# Distances, volumes et âges en cosmologie





## 1-Les distances en cosmologie: indicateurs de distance et distance propre, comobile et lumineuse

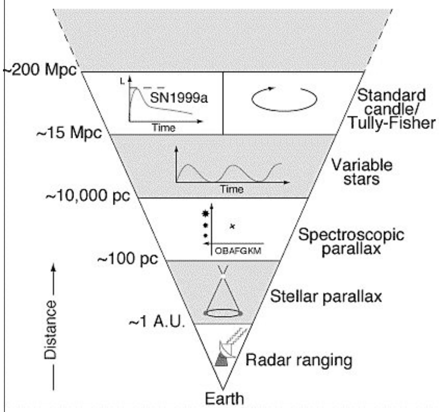
Les mesures astronomiques sont des magnitudes apparentes ou des flux mais pour décrire les propriétés intrinsèques des galaxies, il est nécessaire de connaître leur distance.
Sans distances, il aurait été impossible de résoudre la question de la nature des nébuleuses spirales. De même, la découverte de faibles sources radio similaires à des toiles n'atteint sa véritable signification que lorsqu'on s'est rendus compte de la très grande distance de ces quasars.
Pour cela, on a utilisé une succession d'estimateurs de distances relatives que l'on a normalisé grâce à quelques estimateurs de distances absolues.
A grande échelle, les effets relativistes deviennent importants et il est crucial de bien séparer 3 distances fondamentales dans l'étude des galaxies:
les distance propre, comobile et lumineuse.

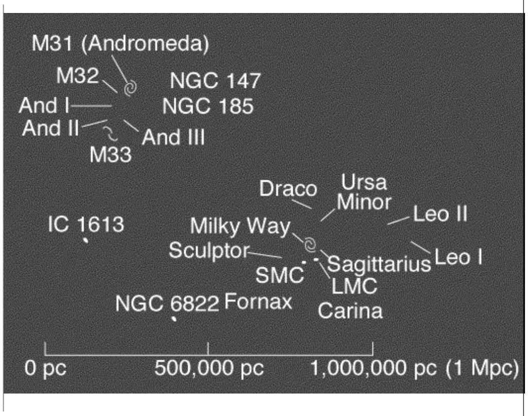
***Références:***


-Hogg, astro-ph/9905116, *distance measures in cosmology*
-Peebles, 1993, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press
-Longair, 1998, *Galaxy Formation*

## Indicateurs de distance

La relation de Tully-Fischer permet de déterminer les distances des galaxies entre 15 et 200 Mpc. Au-delà, on utilise les distances cosmologiques mesurées par le redshift.
En-deça, on utilise les étoiles variables de type céphéides. Ces dernières suffisent à répertorier les galaxies du Groupe Local. Elles-mêmes ont été calibrées à partir de la méthode des parallaxes.

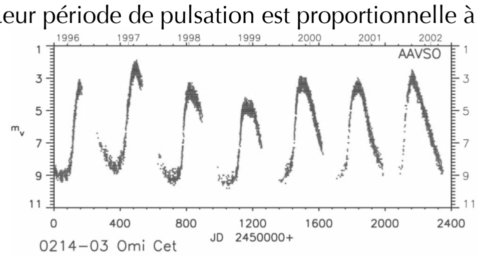


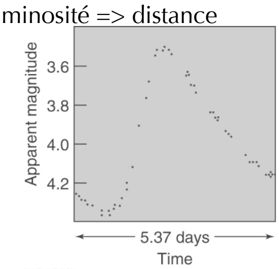



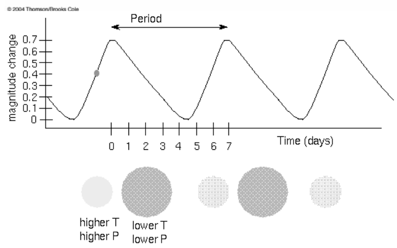



## Les étoiles variables (Céphéides (M>5 $M_\odot$, <0.1 Gyr), RR Lyrae ($M \approx 1 M_\odot$))

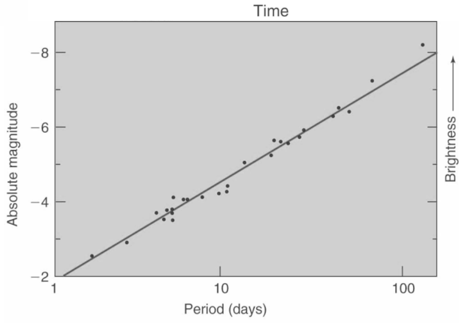
La magnitude apparente de certaines étoiles pulse du fait de mouvements internes responsables d'une variation de leur rayon et de leur température et donc de leur flux.
Leur période de pulsation est proportionnelle à leur luminosité => distance



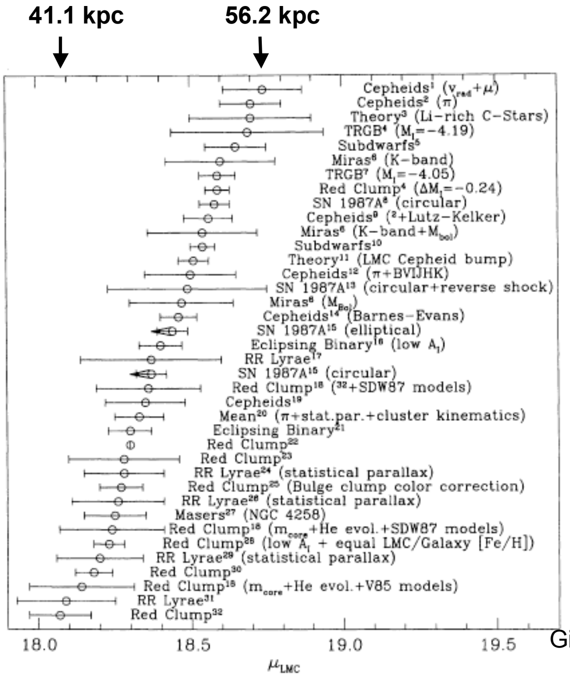




*Cepheid* variables: outward pressure (P) and inward gravity compression are out of sync, so star changes size and temperature: it **pulsates**.
*RR-Lyrae* variables are smaller and have pulsation periods of less than 24 hours. Also, their light curve looks different from the Cepheid light curve.



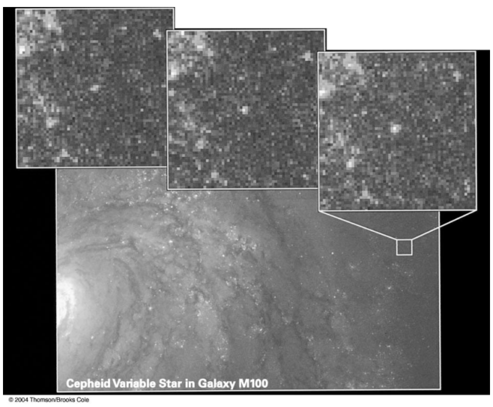
Mesure de la distance du Grand Nuage de Magellan




Gibson (1999)

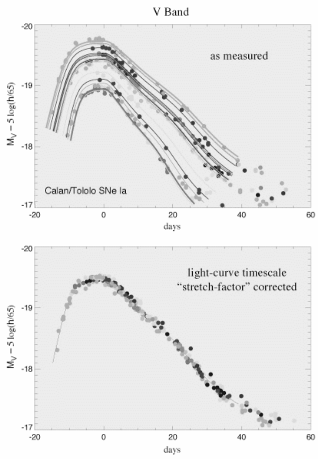


# Observation d'une céphéide dans la galaxie spirale M100

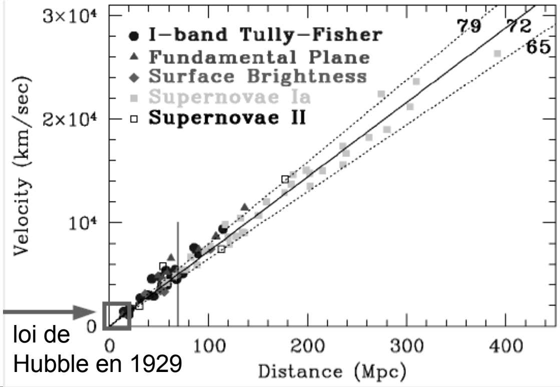


# Mesures de distances jusqu'à 400 Mpc

Low Redshift Type Ia
Template Lightcurves

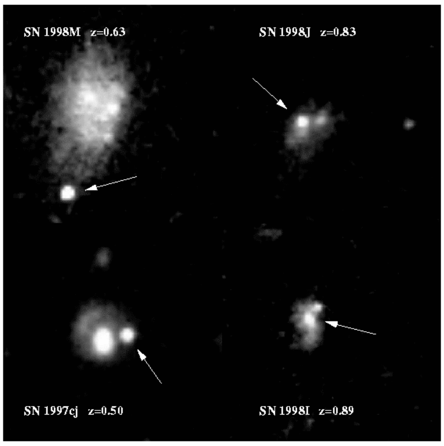


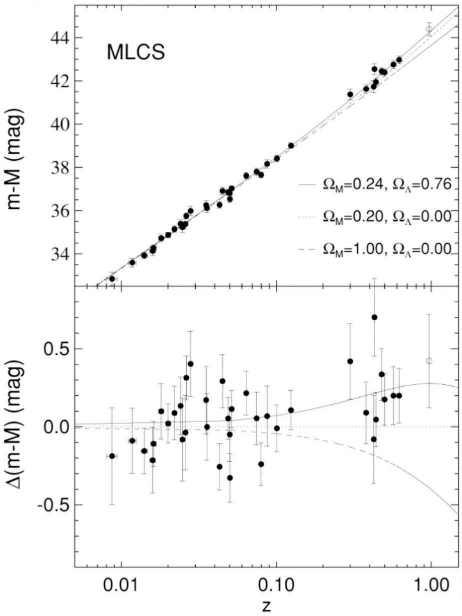

Courbe de lumière des SNIa=
bougies universelles






# Les SNIa et la constante cosmologique



## Loi de Tully-Fisher pour les galaxies Spirales

- En 1971, Tully & Fisher ont mis en évidence une loi qui relie la vitesse de rotation des galaxies spirales avec leur luminosité: $L \sim V^4$, où V est la vitesse du gaz que l'on mesure grâce à **la largeur de ses raies en émission**.
- La mesure de la magnitude apparente et de la vitesse de rotation est donc reliée à la distance des galaxies et cette loi est un **indicateur de distance**.
- Voici l'origine physique de cette loi:
- Théorème du Viriel (gravité): $V^2 = \frac{GM}{R} \Rightarrow M \sim RV^2$
- Rapport masse sur luminosité: $M = L\left(\frac{M}{L}\right)$
- Brillance de surface: $\Sigma = \frac{L}{surface} \sim \frac{L}{R^2} \Rightarrow R \sim \sqrt{\frac{L}{\Sigma}}$

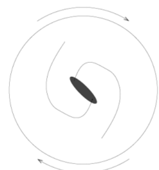
$$\sqrt{\frac{L}{\Sigma}}V^2 \sim L\left(\frac{M}{L}\right) \Rightarrow \boxed{L \sim \frac{V^4}{\Sigma\left(\frac{M}{L}\right)^2}}$$

Nous voyons donc que la loi de Tully-Fisher repose sur l'hyp. que la brillance de surface et le rappor M/L sont universels pour les galaxies spirales.

Cette loi a aussi été utilisée pour mesurer $H_0$, la constante de Hubble



## Application de la loi de Tully-Fischer aux galaxies distantes non résolues spatialement



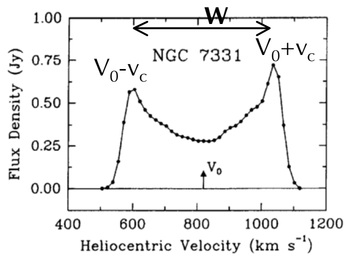
On mesure: $m_B^{AB} = -2.5\ log_{10}\left(f_\nu[\mathrm{Wm^{-2}Hz^{-1}}]\right) + 8.9$

et: $L_B = 10^{-0.4(m_B-8.9)} \times 4\pi d^2$

donc: $L_B = \frac{V^4}{\Sigma_B\left(\frac{M}{L_B}\right)^2} = 10^{-0.4(m_B^{AB}-8.9)} \times 4\pi d^2$

Cette formule permet de calculer la distance d'une galaxie par la mesure de:

- $V=v_c$: vitesse circulaire de rotation du gaz dans le disque de la galaxie (à ne pas confondre avec le décalage spectral relié à la vitesse de la galaxie dans le "flux de Hubble", i.e. l'expansion). V traduit l'élargissement par effet Doppler des raies en émission du gaz interstellaire, en général on utilise la raie en émission de l'hydrogène neutre interstellaire (raie hyperfine) à 21 cm, par : $2v_c sin\theta = W$ où θ est l'inclinaison du disque de la galaxie.
- $m_B^{AB}$= la magnitude relative en bande B
- loi de Freeman:
  $\Sigma_B = I_0^B = I(\mathrm{h}) = 21.67 \pm 0.3$ mag.B/"$^2$
- $M/L_B \approx 5\ M_\odot/L_\odot$
- Attention: l'extinction par la poussière augmente avec l'inclinaison de la galaxie, il faut donc aussi corriger de l'extinction la magnitude.



## Mesures de distances par Tully-Fischer

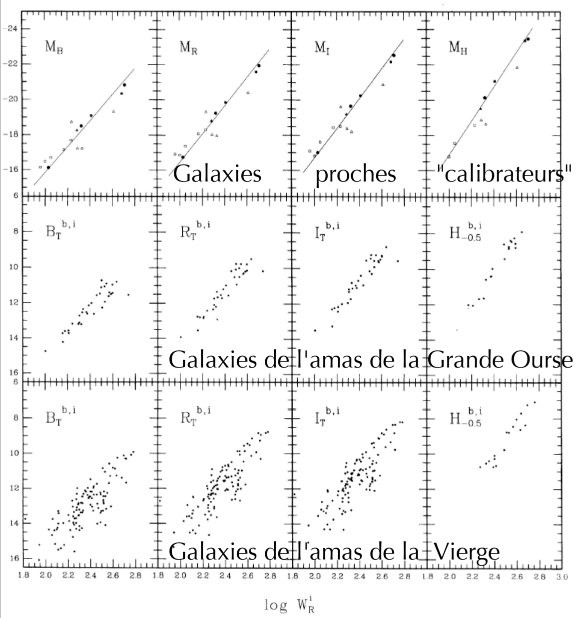



Fig. de Jacoby et al. (1992, PASP 104, 5999). En abscisse: $W_i=2v_c$.

La pente des corrélations augmente et la dispersion diminue en allant vers les grandes longueurs d'ondes (de B vers H) car l'effet des étoiles jeunes diminue de B vers H (le poids relatif des étoiles jeunes dépend de l'histoire de formation d'étoiles des galaxies et introduit une source de dispersion aux petites longueurs d'ondes)



## Loi de Faber-Jackson pour les galaxies Elliptiques

- Dans le cas des galaxies elliptiques, **L~σ⁴**, où σ est la dispersion de vitesse des étoiles au centre des galaxies (là où le rapport signal sur bruit, S/N, est le plus élevé). C'est la **loi de Faber-Jackson**.

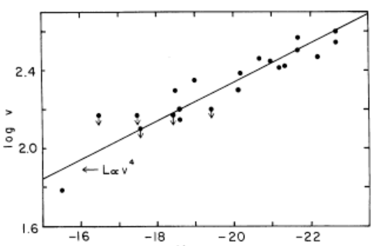
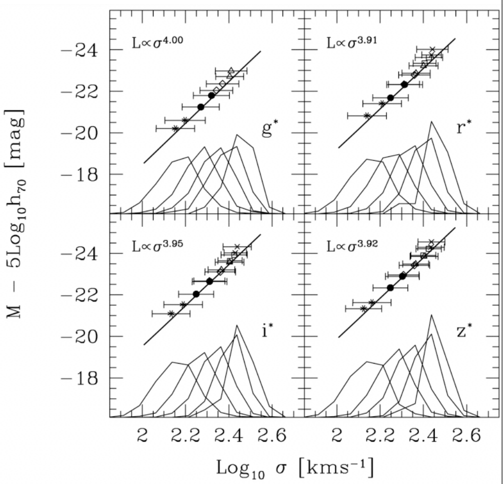
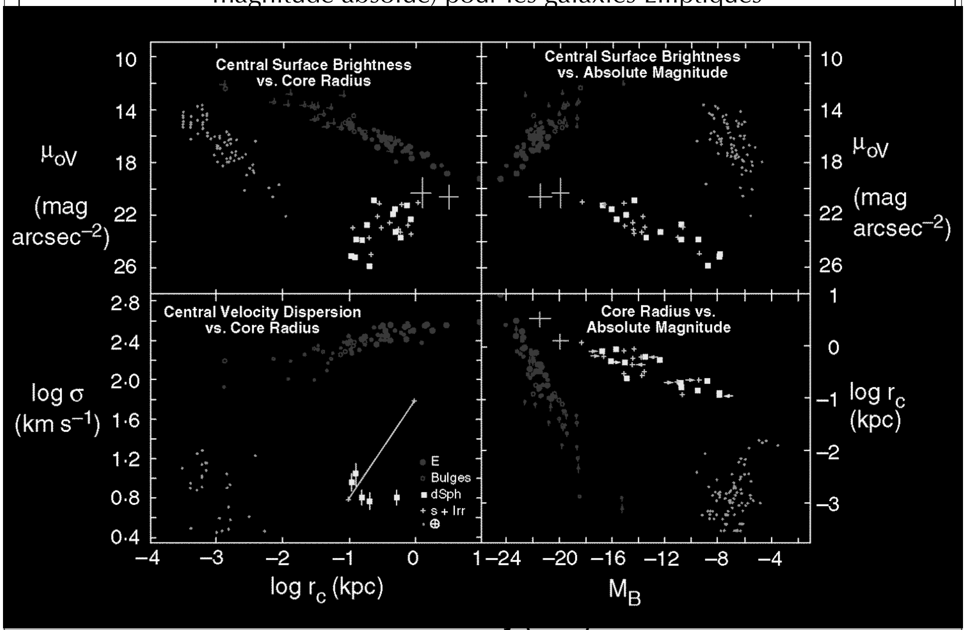



Fig. 16.—Line-of-sight velocity dispersions versus absolute magnitude from Table 1. The point with smallest velocity corresponds to M32, for which the velocity dispersion (60 km s⁻¹) was taken from Richstone and Sargent (1972).




**Faber & Jackson (1976)** **Bernardi et al. (2003)**

## Corrélations entre (Brillance de surface, rayon de cœur, dispersion de vitesse et magnitude absolue) pour les galaxies Elliptiques



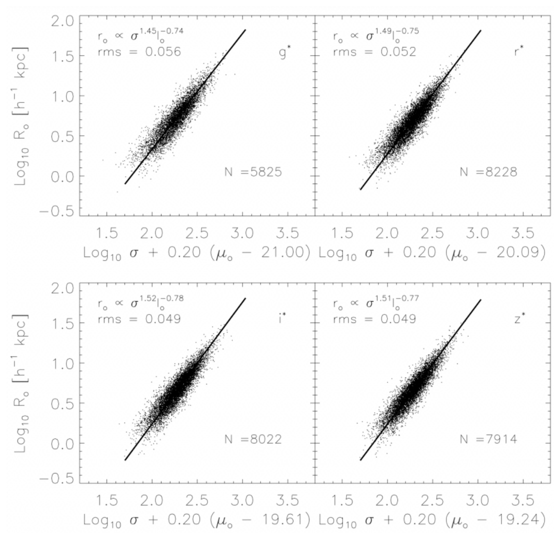



## Plan fondamental pour les galaxies Elliptiques

- Un changement de variables permet de minimiser la dispersion qui relie les trois variables (*log* $R_e$, $I_e$, *log* $\sigma_0$):

- On appelle cette relation le "plan fondamental".

La faible dispersion observée pour un grand nombre de galaxies E implique que celles-ci ont eu une histoire de formation d'étoiles très similaire, d'autant plus que l'on a aussi constaté l'existence d'un plan fondamental en utilisant :
B-V; l'indice $Mg_2$
qui présentent l'avantage de ne pas nécessiter de connaître la distance des galaxies.
L'indice $Mg_2$ est calculé à partir de largeurs équivalentes des raies en absorption du magnésium, il caractérise la métallicité.



## La relation $D_n$-σ pour les galaxies Elliptiques

- Un groupe de sept astronomes que l'on a surnommé les "7 samouraïs" a introduit une taille caractéristique des galaxies, $D_n$, qui est directement reliée à leur dispersion de vitesse grâce à une très faible dépendance en *I*e.
- $D_n$= le diamètre à l'intérieur duquel on mesure une magnitude apparente en B des galaxies de 20.75 mag par secondes d'arc carrées, i.e. $D_n$ est associé à une brillance de surface: $D_n \sim \sigma^{1.4}$ ($I_e^{0.07}$).On parle de la relation $D_n$-σ.
- *Les 7 samouraïs:*

  Dressler,Alan;Lynden-Bell,Donald;Burstein,David;Davies,RogerL.; Faber,S.M.; Terlevich,Roberto; Wegner,Gary; 1987, ApJ 313, 42



## Redshift et facteur d'échelle

Le long de la ligne de visée:

distance propre = facteur d'échelle x distance comobile où fact. d'éch. < 1

$r_p(t)$ = R(t) x r , où r ne varie pas avec t

Le redshift: $z = \dfrac{\lambda_{\rm obs} - \lambda_{\rm em}}{\lambda_{\rm em}}$ $z = \sqrt{\dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$ quand v<<c: v≈cz=$H_0$d on retrouve bien la loi de Hubble

1 source qui s'éloigne selon *R*(t) émet: $\nu_{\rm obs} = R(t)\nu_{\rm em}$

On en déduit le lien suivant entre le redshift et le facteur d'échelle:

$$1 + z = \frac{1}{R(t)}$$

Le redshift est donc une mesure directe du facteur d'échelle de l'univers, de l'expansion

N.B.: le facteur d'échelle est parfois noté "R" ou "a".

## Origine Newtonienne des équations de Friedmann

$$\ddot{r} = -\frac{dE_{grav}}{dr} \Rightarrow \ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho}{3}R = -\frac{4\pi G\rho_0}{3R^2} \qquad \text{car } \rho(\mathrm{t}) = \frac{\rho_0}{\mathrm{R}^3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho \;\rightarrow\; \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}$$

l'accélération de l'univers subit: la gravité, la pression du fluide (matière/rayonnement) + $\Lambda$, son intégrale:

$$\dot{R}^2 + K = \frac{8\pi G\rho_0}{3R} \rightarrow \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + k\left(\frac{c}{\mathcal{R}_c}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{où } \mathcal{R}_c = \mathcal{R}\, R(t) = \text{rayon de courbure (t)}$$

Origine newtonienne de la densité critique:
On considère une sphère de rayon $r$, en expansion au taux: $\mathrm{v} = H_0 r$
dans un Univers de densité $\rho$. L'énergie d'une galaxie sur la surface de la sphère est:

$$E = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\left(H_0 r\right)^2 - \frac{G\left(4\pi r^3\rho/3\right)m}{r}$$

Si $E < 0$ l'univers s'effondrera sur lui-même
Si $E > 0$ l'univers s'étendra à l'infini

Ceci définit la **densité critique** pour laquelle la gravité surpasse l'expansion: $\rho_{\mathrm{crit}} = \dfrac{3H_0^2}{8\pi G}$



## La courbure de l'univers

En relativité, l'équivalence matière-énergie implique que l'énergie totale de l'univers peut produire une courbure de l'espace : E = E(cinétique) + E(gravitation)

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - \frac{4\pi G\rho r^2}{3} = \frac{1}{2}mr^2\left[\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{8\pi G\rho}{3}\right]$$

La courbure de l'univers est associée à un rayon de courbure:

$$\left[\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{8\pi G\rho}{3}\right] = -\frac{kc^2}{\Re^2}$$

La position du 1er pic acoustique mesuré dans la carte centimétrique du CMB par le satellite WMAP traduit la densité totale de l'univers à l'époque où matière et rayonnement constituaient un fluide unique subissant des résonances acoustiques:

$$\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_{\mathrm{rad}} + \Omega_\Lambda = 1.02 \pm 0.02$$

Or on sait aussi que $\Omega_0+\Omega_k=1$ donc: $\quad \Omega_k = -k\dfrac{c^2}{\Re H_0^2} = 1 - \Omega_0 \simeq 0$

## La loi de Hubble, H(t)

loi de Hubble: v = H(t) $r_p$ où $r_p$ est une distance propre

avec : v=d$r_p$/dt et $r_p(t) = R(t) \times r$ , d'où: $H(t) = \frac{\dot{R}}{R}$

et à t =$t_0$= aujourd'hui : $H_0 = H(t_0) = \dot{R}(t_0)$

Equation de Friedmann:

où $\rho(t) = \rho_0 \times R(t)^{-3} = \rho_0\ (1+z)^3$ $\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 - k\frac{c^2}{R_c^2} + \frac{\Lambda}{3}R^2$

d'où:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) = H(t) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}$$

où: $\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} = \Omega_{\rm baryons} + \Omega_{\rm DM} = 0.27 \pm 0.04$

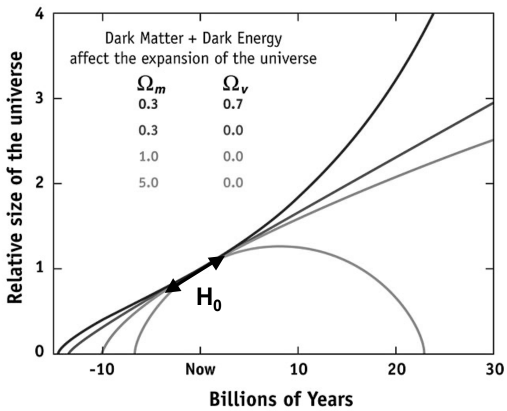
$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} = 0.73 \pm 0.04$$

$$\Omega_k = -k\frac{c^2}{\Re H_0^2} = 1 - \Omega_0 \simeq 0$$

$\Omega_{\rm rad} = 5 \times 10^{-5}$ $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_{\rm rad} + \Omega_\Lambda = 1.02 \pm 0.02$



## Evolution du facteur d'échelle en fonction du temps



## Le calcul des âges en cosmologie: Relation temps - redshift

L'étude de l'évolution des galaxies peut être réalisée en observant des galaxies lointaines en tant que représentantes de stades primordiaux dans l'évolution des galaxies. Mais pour en tirer une information, il faut pouvoir convertir la position des raies en émission de ces galaxies, et donc leur redshift, en vitesse et donc en durée temporelle, appelée "lookback time" ou temps de regard en arrière:

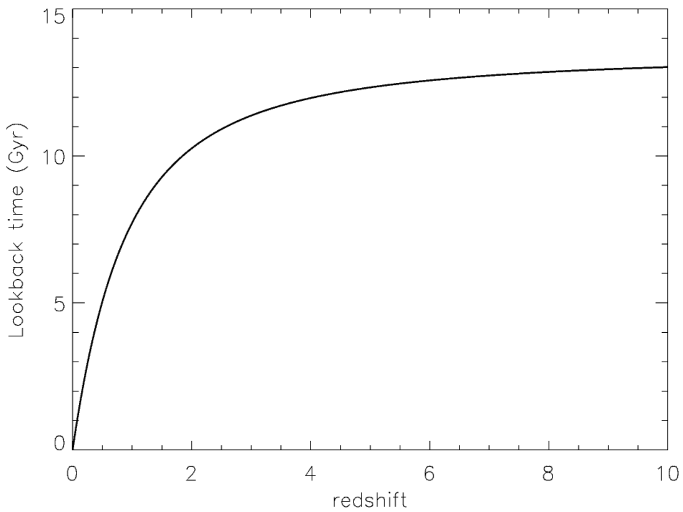
$$t = \int dt = \int dz \times \frac{dt}{dz} = \int \frac{dz}{(1+z)H(z)}$$

Car: $z = \frac{1}{R(t)} - 1$ et: $\frac{dz}{dt} = -(1+z)H(t)$

Donc: $t_{\mathrm{lookback}} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)\sqrt{(\Omega_{\mathrm{m}}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}$

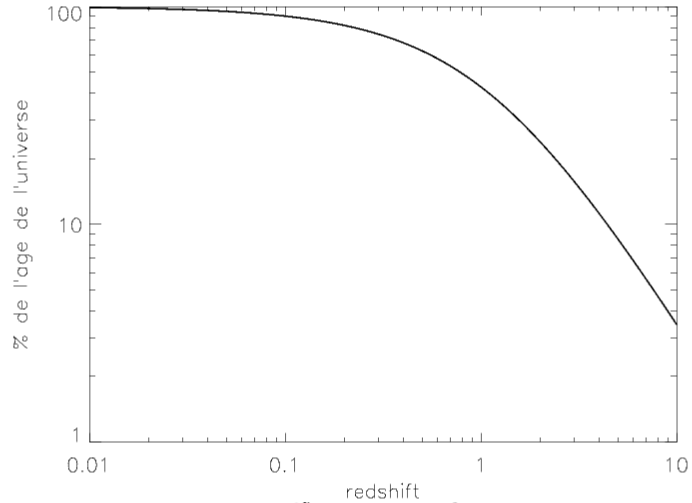


## Temps de regard en arrière ou lookback time ($\Omega_m$=0.3, $\Omega_\Lambda$=0.3, $H_0$= 70 km.s$^{-1}$Mpc$^{-1}$)




$$t_{\mathrm{lookback}} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)\sqrt{(\Omega_{\mathrm{m}}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}$$

## Fraction de l'âge de l'univers =($t_{univers}$-$t_{lookback}$)/$t_{univers}$
## ($\Omega_m$=0.3, $\Omega_\Lambda$=0.3, $H_0$= 70 km.s$^{-1}$Mpc$^{-1}$) où $t_{univers}$ = 13.5 Gyr




$$t_{\mathrm{lookback}} = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{(1+z)\sqrt{(\Omega_{\mathrm{m}}(1+z)^3+\Omega_\Lambda}}$$



## Fraction de l'âge de l'univers =($t_{univers}$-$t_{lookback}$)/$t_{univers}$
## ($\Omega_m$=0.3, $\Omega_\Lambda$=0.7, $H_0$= 70 km.s$^{-1}$Mpc$^{-1}$) où $t_{univers}$ = 13.5 Gyr

| Z | Universe age | | Lookback time |
|---|---|---|---|
| | Gyr | % | Gyr |
| 0.2 | 11.1 | 81.9 % | 2.4 |
| 0.5 | 8.5 | 62.6 % | 5.0 |
| 0.7 | 7.2 | 53.2 % | 6.3 |
| 0.8 | 6.7 | 49.3 % | 6.8 |
| 1 | 5.8 | 42.7 % | 7.7 |
| 2 | 3.2 | 24.0 % | 10.3 |
| 4 | 1.5 | 11.3 % | 12.0 |
| 5 | 1.2 | 8.6 % | 12.3 |
| 6.5 | 0.8 | 6.1 % | 12.7 |
| 10 | 0.5 | 3.5 % | 13.0 |
| 20 | 0.2 | 1.3 % | 13.3 |
| 30 | 0.1 | 0.7 % | 13.4 |

## Distances de diamètre angulaire et comobile radiale

- distance de diamètre angulaire: $D_A$

Si une galaxie, localisée à un redshift z, possède une taille angulaire de θ secondes d'arc, le diamètre physique, $d_{kpc}$, de cette galaxie peut être calculé grâce à la distance de diamètre angulaire: $D_A$, selon:

$$d_{kpc}=\theta\ D_A$$

d'une manière générale, toutes les structures relaxées gravitationnellement (virialisées) sont découplées de l'expansion de l'univers et l'on doit utiliser cette formule.

Pour les structures plus grandes, qui suivent l'expansion de l'univers, on utilise la distance comobile radiale, $D_m$, qui suit l'expansion.

Les 2 distances sont donc reliées par la relation: $D_m=(1+z)D_A$

- distance comobile radiale: $$D_m = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = c\int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

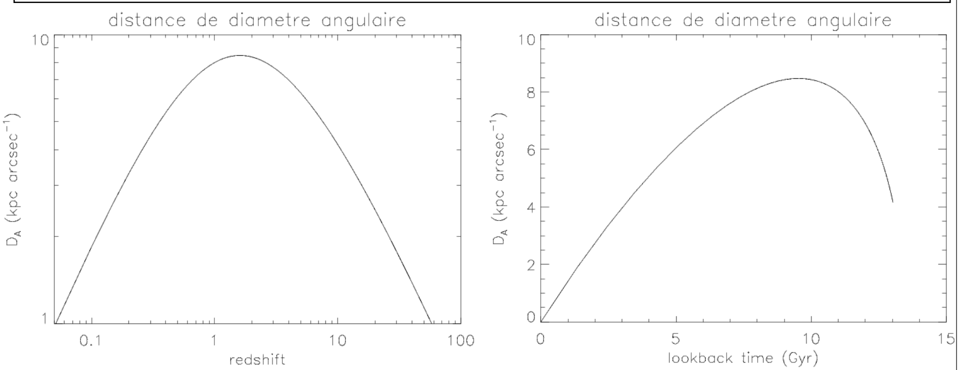
cdt= distance parcourue par la lumière, x1/R(t) du fait de l'expansion pendant dt
quand z est petit, $D_m \approx cz/H_0$

- distance de diamètre angulaire: $$D_A = \frac{c}{1+z}\int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

quand z est petit, $D_A \approx D_m \approx cz/H_0$

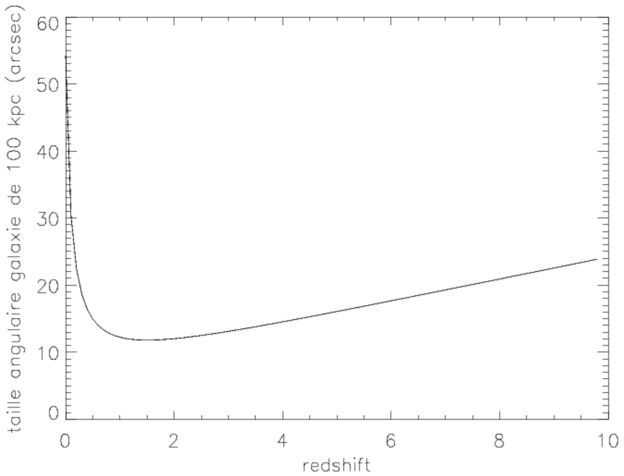


## Evolution de la distance de diamètre angulaire




La taille apparente d'un objet augmente à mesure que cet objet est éloigné, mais en relativité, jusqu'à une certaine limite située autour de z=1.5. Au-delà, la diminution de la taille de l'univers avec le redshift l'emporte sur la croissance de la taille couverte avec l'angle solide considéré.

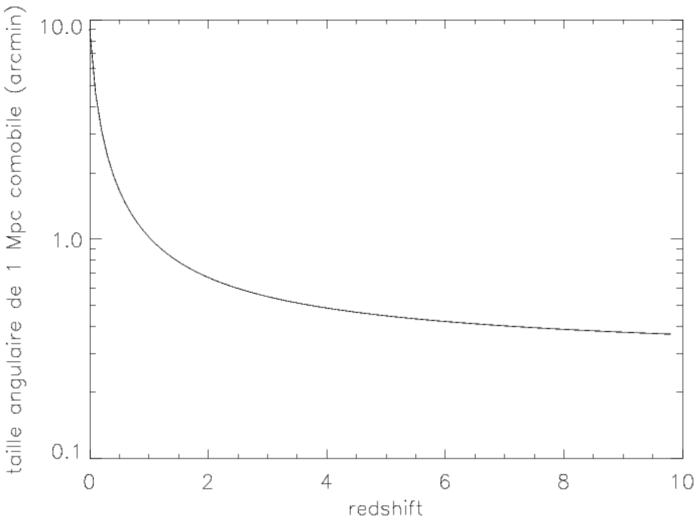
Taille angulaire apparente d'une galaxie de 100 kpc vs z
($\Omega_m$=0.3, $\Omega_\Lambda$=0.3, $H_0$= 70 km.s$^{-1}$Mpc$^{-1}$)




$$\Theta = \frac{\pi}{(180 \times 60)} \times (0.1\ \mathrm{Mpc}) \times \left[ \frac{c}{H_0(1+z)} \int \left( \Omega_\mathrm{m}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \right)^{(-1/2)} dz \right]^{-1}$$



Taille angulaire apparente de 1 Mpc comobile vs z
($\Omega_m$=0.3, $\Omega_\Lambda$=0.3, $H_0$= 70 km.s$^{-1}$Mpc$^{-1}$)




$$\Theta_\mathrm{com} = \Theta \times (1+z) = \frac{\pi}{(180 \times 60)} \times (1\ \mathrm{Mpc}) \times \left[ \frac{c}{H_0} \int \left( \Omega_\mathrm{m}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \right)^{(-1/2)} dz \right]^{-1}$$

## Ordres de grandeur

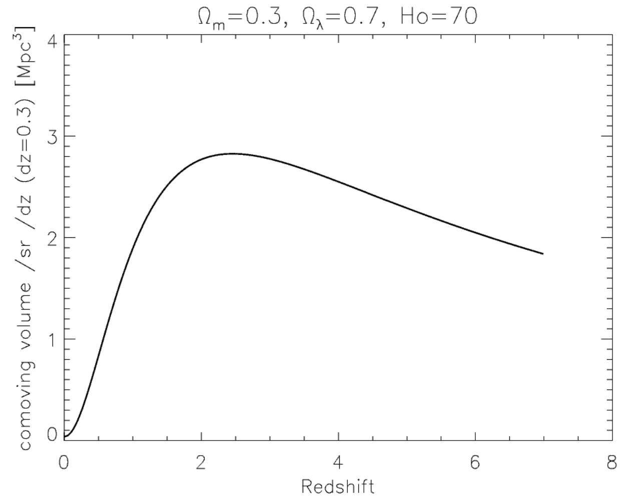
- Une taille comobile de 1 Mpc => 1' (= 1arcmin) à z=1
- Une taille physique de 10 kpc => 1.2" (= 1.2 arcsec) à z=1
- Quel que soit le redshift :
  - Une galaxie de 30 kpc apparaît toujours avec une taille angulaire de 3-7"
  - Un amas de galaxies riche a une taille de ~5 Mpc, sa taille apparente est donc toujours contenue entre 10' et 20'
- 1 pixel du télescope spatial Hubble (HST) = 0.1":
  0.1" <-> 1 kpc à z=1 et < 1 kpc au-delà !



## Volumes propre et comobile

- Lorsque l'on étudie l'évolution des galaxies, on considère une boîte de l'univers qui suit l'expansion, i.e. un volume comobile, si dans cette boîte le nombre et la luminosité des galaxies ne varie pas avec le redshift, alors on dit qu'il n'y a pas d'évolution:
- Volume (comobile) = $4/3\ \pi\ D_m^3(z)$
- Le volume "propre", d'un amas de galaxies par exemple, ne suit pas l'expansion:
- Volume (propre) = $4/3\ \pi\ D_A^3(z)$
- A retenir: le volume comobile est le volume qu'aurait la boîte considérée à z=0, tandis que le volume propre est celui qu'elle possède à z.

## Elément de volume comobile ($Mpc^3$) par stéradian et par dz ($\Omega_m$=0.3, $\Omega_\Lambda$=0.3, $H_0$= 70 $km.s^{-1}Mpc^{-1}$)




$$dV = V(z+dz/2) - V(z-dz/2) \text{ ou } V(z) = \frac{c^3}{3H_0^3}\left(\frac{\pi}{180\times 60}\right)\left[\int \left(\Omega_\mathrm{m}(1+z)^3+\Omega_\Lambda\right)^{(-1/2)} dz\right]^3$$



## Distance lumineuse et densité de flux

La distance lumineuse permet de relier la luminosité intrinsèque d'une galaxie avec sa densité de flux observée.
Une source localisée à un redshift z rayonne une luminosité monochromatique $L(\nu_{em})$ (en $W.Hz^{-1}$)= énergie totale (J) rayonnée sur $4\pi$ stéradians par unité de temps ($s^{-1}$) et de fréquence ($Hz^{-1}$)
Quelle est la densité de flux observée, $S_\nu(\nu_{obs})$ (énergie/temps/surface/fréquence) reçue ?

$$L_\nu(\nu_\mathrm{em}) = \frac{N(\nu_\mathrm{em})h\nu_\mathrm{em}}{\Delta\nu_\mathrm{em}\Delta t_\mathrm{em}}$$

La lumière émise sur $4\pi$ stéradians est étalée par l'expansion, donc la surface collectrice du télescope, vue par la source est calculée avec la distance comobile radiale, $D_m$.
diamètre du télescope =$d_{tel}$= $\theta D_m$
Surface collectrice du télescope = $\pi d_{tel}^2/4 = \pi(\theta D_m)^2/4$
D'autre part, le faisceau lumineux est étalé sur $4\pi$ stéradians dont le télescope reçoit une fraction du fait de son angle solide: $(\pi\theta^2/4)/4\pi$
Donc:

$$S_\nu(\nu_\mathrm{obs}) = \frac{[N(\nu_\mathrm{em})\times\frac{\pi\theta^2/4}{4\pi}]h\nu_\mathrm{obs}}{\Delta\nu_\mathrm{obs}\Delta t_\mathrm{obs}[\pi(\theta D_m)^2/4)]}$$

où : $\Delta\nu_\mathrm{obs} = R(t)\Delta\nu_\mathrm{em}$ $\quad \Delta t_\mathrm{obs} = \frac{\Delta t_\mathrm{em}}{R(t)}$

$$\nu_\mathrm{obs} = R(t)\nu_\mathrm{em}$$

$$S_\nu(\nu_\mathrm{obs}) = \frac{L_\nu(\nu_\mathrm{em})}{(1+z)4\pi D_m^2} = \frac{L_\nu(\nu_\mathrm{obs})}{4\pi D_L^2}$$

où la distance lumineuse $D_L=(1+z)D_m=(1+z)^2D_A$

## Distance lumineuse et correction K

$$S_\nu(\nu_{\rm obs}) = \frac{L_\nu(\nu_{\rm obs})}{4\pi D_L^2} = (1+z)\frac{L_\nu(\nu_{\rm em})}{4\pi D_L^2}$$

$$m_{\rm B} = -2.5\ log_{10}\left(\frac{L_\nu^{\rm em}\left[\nu_{\rm B}(1+z)\right](1+z)}{4\pi D_L^2}\right) + C$$

$$m_{\rm B} = -2.5\ log_{10}\left(\frac{L_\nu^{\rm em}\left[\nu_{\rm B}\right]}{4\pi D_L^2}\right) + C - 2.5\ log_{10}\left((1+z)\frac{L_\nu^{\rm em}\left[\nu_{\rm B}(1+z)\right]}{L_\nu^{\rm em}\left[\nu_{\rm B}\right]}\right)$$

$$K(z) = -2.5\ log_{10}\left((1+z)\frac{L_\nu^{\rm em}\left[\nu_{\rm B}(1+z)\right]}{L_\nu^{\rm em}\left[\nu_{\rm B}\right]}\right)$$



## Equations utiles

Luminosité (W) L = énergie (J) / temps (s) = dE/dt

unité de luminosité, la luminosité solaire: $L_\odot$= 3.826x$10^{26}$ W= 3.826x$10^{33}$ erg.$s^{-1}$

Luminosité monochromatique: $L_\nu$ (W.Hz-1)= L/ν

Flux (W.$m^{-2}$): F = L/4π$r^2$

densité de flux (W.$m^{-2}$.$Hz^{-1}$) $F_\nu$ = Flux(W.$m^{-2}$) / ν(Hz) = L/4π$r^2$ν

unité de densité de flux, le Jansky: 1 Jy = $10^{-26}$ W.$m^{-2}$.$Hz^{-1}$

magnitude apparente: m = -2.5 $\log_{10}(F/F_0)$= -2.5 $\log_{10}$(F) + C

magnitude absolue: M = m - 5 $\log_{10}$(d(pc)/10pc) où d= distance de l'objet

M = magnitude apparente de l'objet s'il était situé à 10 pc de nous

$F_\nu$ = k x $10^{-0.4m}$

| Filtre | $\lambda_0$ (Å) | dλ/λ =dν/ν | k (W.$m^{-2}$.$Hz^{-1}$) |
|---|---|---|---|
| U (Johnson) | 3660 Å | 0.19 | 1.81x$10^{-23}$ |
| B (Johnson) | 4400 Å | 0.22 | 4.26x$10^{-23}$ |
| V (Johnson) | 5530 Å | 0.15 | 3.64x$10^{-23}$ |
| R (Johnson) | 6930 Å | 0.309 | 2.89x$10^{-23}$ |
| I (Johnson) | 8785 Å | 0.196 | 2.28x$10^{-23}$ |
| J (ESO) | 1.244 µm | 0.19 | 1.59x$10^{-23}$ |
| H (ESO) | 1.634 µm | 0.22 | 1.06x$10^{-23}$ |
| V (ESO) | 2.190 µm | 0.15 | 6.60x$10^{-24}$ |
| L (ESO) | 3.770 µm | 0.15 | 2.54x$10^{-24}$ |

voir le fichier suivant pour une liste plus complète: http://nedwww.ipac.caltech.edu/help/photoband.lst

# Constantes astrophysiques

| | |
|---|---|
| Gravitational constant | $G = 6.67390\times10^{-8}$ cm$^3$ gm$^{-1}$sec$^{-2}$ ,$\times10^{-11}$ m$^3$ kg$^{-1}$sec$^{-2}$ |
| Boltzmann constant | $k = 1.380658\times10^{-16}$ erg K$^{-1}$ ,$\times10^{-23}$ joule K$^{-1}$ |
| Stefan-Boltzmann constant | $\sigma = 5.67051\times10^{-5}$ erg sec$^{-1}$ cm$^{-2}$ K$^{-4}$ ,$\times10^{-8}$ joule sec$^{-1}$ m$^{-2}$ K$^{-4}$ |
| Planck constant | $h = 6.6260755\times10^{-27}$ erg sec,$\times10^{-34}$ joule sec |
| Speed of light | $c = 2.99792458\times10^{10}$ cm sec$^{-1}$ ,$\times10^{8}$ m sec$^{-1}$ |
| Electron mass | $m_e = 9.1093897\times10^{-28}$ gm,$\times10^{-31}$ kg |
| Proton mass | $m_p = 1.6726231\times10^{-24}$ gm,$\times10^{-27}$ kg |
| Neutron mass | $m_n = 1.674929\times10^{-24}$ gm,$\times10^{-27}$ kg |
| Hydrogen mass | $m_{\mathrm{H}} = 1.673534\times10^{-24}$ gm,$\times10^{-27}$ kg |
| Atomic mass unit | $u = 1.6605402\times10^{-24}$ gm,$\times10^{-27}$ kg |
| Quantum of electric charge, cgs | $e = 4.803206\times10^{-10}$ esu |
| Quantum of electric charge, SI | $e = 1.60217733\times10^{-19}$ coul |
| Earth mass | $M_\oplus = 5.97223\times10^{27}$gm,$\times10^{24}$kg |
| Earth radius | $R_\oplus = 6.378\times10^{8}$cm,$\times10^{6}$m |
| Earth solar day | Day = 86400 sec |
| Earth sidereal year | $P_\oplus$ = yr = $3.155815\times10^{7}$ sec |
| Astronomical unit | $AU = 1.4960\times10^{13}$ cm,$\times10^{11}$ m |
| Solar mass | $M_\odot = 1.98843\times10^{33}$gm, $\times10^{30}$kg |
| Solar radius | $R_\odot = 6.9599\times10^{10}$ cm, $\times10^{8}$ m |
| Solar effective temperature | $T_{e\odot}$ = 5800 K |
| Solar luminosity | $L_\odot = 3.826\times10^{33}$ erg sec$^{-1}$, $\times10^{26}$ watt |
| Solar apparent bolometric magnitude | $m_S = -26.82$ |
| Solar absolute bolometric magnitude | $M_S = 4.75$ |
| Light year | ly = $9.4605\times10^{17}$ cm, $\times10^{15}$ m |
| Parsec | pc = $3.0857\times10^{18}$cm, $\times10^{16}$m = 3.2616 ly |
| Hubble constant | $H_0$ = 65 km sec$^{-1}$ Mpc$^{-1}$ = 20 km sec$^{-1}$ Mly$^{-1}$ |



# Dimensions du système S.I.

**Basic units**

| Quantity | Unit | Sym. |
|---|---|---|
| Length | metre | m |
| Mass | kilogram | kg |
| Time | second | s |
| Therm. temp. | kelvin | K |
| Electr. current | ampere | A |
| Luminous intens. | candela | cd |
| Amount of subst. | mol | mol |

**Extra units**

| | | |
|---|---|---|
| Plane angle | radian | rad |
| solid angle | sterradian | sr |

**Derived units with special names**

| Quantity | Unit | Sym. | Derivation |
|---|---|---|---|
| Frequency | hertz | Hz | $\mathrm{s}^{-1}$ |
| Force | newton | N | $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$ |
| Pressure | pascal | Pa | $\mathrm{N \cdot m^{-2}}$ |
| Energy | joule | J | $\mathrm{N \cdot m}$ |
| Power | watt | W | $\mathrm{J \cdot s^{-1}}$ |
| Charge | coulomb | C | $\mathrm{A \cdot s}$ |
| El. Potential | volt | V | $\mathrm{W \cdot A^{-1}}$ |
| El. Capacitance | farad | F | $\mathrm{C \cdot V^{-1}}$ |
| El. Resistance | ohm | Ω | $\mathrm{V \cdot A^{-1}}$ |
| El. Conductance | siemens | S | $\mathrm{A \cdot V^{-1}}$ |
| Mag. flux | weber | Wb | $\mathrm{V \cdot s}$ |
| Mag. flux density | tesla | T | $\mathrm{Wb \cdot m^{-2}}$ |
| Inductance | henry | H | $\mathrm{Wb \cdot A^{-1}}$ |
| Luminous flux | lumen | lm | $\mathrm{cd \cdot sr}$ |
| Illuminance | lux | lx | $\mathrm{lm \cdot m^{-2}}$ |
| Activity | bequerel | Bq | $\mathrm{s}^{-1}$ |
| Absorbed dose | gray | Gy | $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ |
| Dose equivalent | sievert | Sv | $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ |

**Prefixes**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| yotta | Y | $10^{24}$ | giga | G | $10^{9}$ | deci | d | $10^{-1}$ | pico | p | $10^{-12}$ |
| zetta | Z | $10^{21}$ | mega | M | $10^{6}$ | centi | c | $10^{-2}$ | femto | f | $10^{-15}$ |
| exa | E | $10^{18}$ | kilo | k | $10^{3}$ | milli | m | $10^{-3}$ | atto | a | $10^{-18}$ |
| peta | P | $10^{15}$ | hecto | h | $10^{2}$ | micro | $\mu$ | $10^{-6}$ | zepto | z | $10^{-21}$ |
| tera | T | $10^{12}$ | deca | da | 10 | nano | n | $10^{-9}$ | yocto | y | $10^{-24}$ |

# Constantes physiques

| Name | Symbol | Value | Unit |
|---|---|---|---|
| Number $\pi$ | $\pi$ | 3.14159265358979323846 | |
| Number e | e | 2.71828182845904523536 | |
| Euler's constant | $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n)\right) = 0.5772156649$ | | |
| Elementary charge | $e$ | $1.60217733 \cdot 10^{-19}$ | C |
| Gravitational constant | $G, \kappa$ | $6.67259 \cdot 10^{-11}$ | $\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$ |
| Fine-structure constant | $\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$ | $\approx 1/137$ | |
| Speed of light in vacuum | $c$ | $2.99792458 \cdot 10^{8}$ | m/s (def) |
| Permittivity of the vacuum | $\varepsilon_0$ | $8.854187 \cdot 10^{-12}$ | F/m |
| Permeability of the vacuum | $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}$ | H/m |
| $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$ | | $8.9876 \cdot 10^{9}$ | $\mathrm{Nm^2C^{-2}}$ |
| Planck's constant | $h$ | $6.6260755 \cdot 10^{-34}$ | Js |
| Dirac's constant | $\hbar = h/2\pi$ | $1.0545727 \cdot 10^{-34}$ | Js |
| Bohr magneton | $\mu_B = e\hbar/2m_e$ | $9.2741 \cdot 10^{-24}$ | $\mathrm{Am^2}$ |
| Bohr radius | $a_0$ | 0.52918 | Å |
| Rydberg's constant | $Ry$ | 13.595 | eV |
| Electron Compton wavelength | $\lambda_{Ce} = h/m_e c$ | $2.2463 \cdot 10^{-12}$ | m |
| Proton Compton wavelength | $\lambda_{Cp} = h/m_p c$ | $1.3214 \cdot 10^{-15}$ | m |
| Reduced mass of the H-atom | $\mu_H$ | $9.1045755 \cdot 10^{-31}$ | kg |
| Stefan-Boltzmann's constant | $\sigma$ | $5.67032 \cdot 10^{-8}$ | $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ |
| Wien's constant | $k_W$ | $2.8978 \cdot 10^{-3}$ | mK |
| Molar gasconstant | $R$ | 8.31441 | $\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ |
| Avogadro's constant | $N_A$ | $6.0221367 \cdot 10^{23}$ | $\mathrm{mol^{-1}}$ |
| Boltzmann's constant | $k = R/N_A$ | $1.380658 \cdot 10^{-23}$ | J/K |
| Electron mass | $m_e$ | $9.1093897 \cdot 10^{-31}$ | kg |
| Proton mass | $m_p$ | $1.6726231 \cdot 10^{-27}$ | kg |
| Neutron mass | $m_n$ | $1.674954 \cdot 10^{-27}$ | kg |
| Elementary mass unit | $m_u = \frac{1}{12}m(^{12}_{6}\mathrm{C})$ | $1.6605656 \cdot 10^{-27}$ | kg |
| Nuclear magneton | $\mu_N$ | $5.0508 \cdot 10^{-27}$ | J/T |
| Diameter of the Sun | $D_\odot$ | $1392 \cdot 10^{6}$ | m |
| Mass of the Sun | $M_\odot$ | $1.989 \cdot 10^{30}$ | kg |
| Rotational period of the Sun | $T_\odot$ | 25.38 | days |
| Radius of Earth | $R_A$ | $6.378 \cdot 10^{6}$ | m |
| Mass of Earth | $M_A$ | $5.976 \cdot 10^{24}$ | kg |
| Rotational period of Earth | $T_A$ | 23.96 | hours |
| Earth orbital period | Tropical year | 365.24219879 | days |
| Astronomical unit | AU | $1.4959787066 \cdot 10^{11}$ | m |
| Light year | lj | $9.4605 \cdot 10^{15}$ | m |
| Parsec | pc | $3.0857 \cdot 10^{16}$ | m |
| Hubble constant | $H$ | $\approx (75 \pm 25)$ | $\mathrm{km{\cdot}s^{-1}{\cdot}Mpc^{-1}}$ |