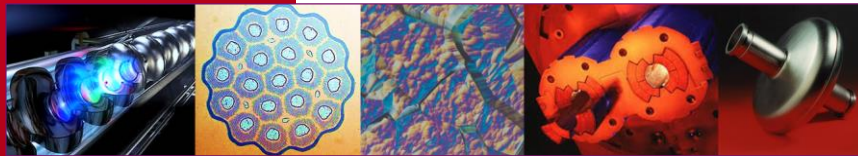


DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



SUPRACONDUCTIVITÉ DANS ACCÉLÉRATEURS PARTIE I : INTRODUCTION



www.cea.fr

Cours supraconductivité M2 GI | Claire ANTOINE

AIMANTS ET CAVITÉS RF



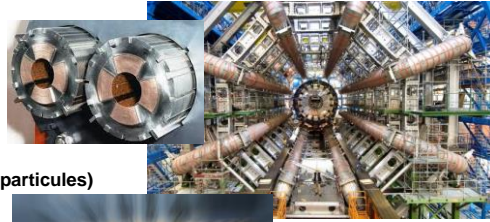
AVANT PROPOS



Objectifs de ce cours:

- **Peu de formules**
 - Ça peut se trouver dans des livres, e.g. :
 - A.C. Rose-Innes, "Introduction to superconductivity", Ed2. 2012: Elsevier
 - M. Héritier, « physique de la matière condensée » [cours M2](#)
 - [CERN accelerator Schools](#) (chercher « superconductivity »)
- **Vous donner du sens physique**
 - Qu'est-ce qui est important, dans quel contexte
 - Ça varie beaucoup avec les applications
- **Vous donner du sens critique**
 - Beaucoup de théories/modèles en supra (c'est un truc compliqué!):
 - La littérature fourmille de calculs appliqués en dehors de leurs limites de validité,
- **Vous montrer qu'il faut faire des compromis**
 - Les propriétés supras ne sont jamais les seules à prendre en compte dans le design d'un projet
 - Antagonismes avec les propriétés mécaniques, thermiques....

INTRODUCTION



■ Aimants (pour courber la trajectoire des particules)

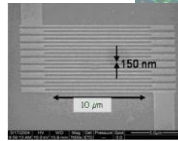
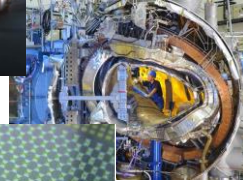
- Aimant de courbure, de focalisation
- Détecteurs

■ Cavités RF (pour accélérer)



■ Autres applications à connaître

- Aimants pour l'imagerie médicale (origine du développement)
- Aimants pour la fusion
- Electrotechnique (très grands enjeux !!!)
- Jonctions Josephson
 - Électronique supra (logique RSFQ)
 - SQUIDS
 - Détection de champ magnétique
 - Bolomètres
- Nanodétecteurs (constrictions, fils...)



Images de haut en bas : quadripôles focalisation LHC en NbTi, aimants du détecteurs Atlas en NbTi, cavité 9-cellules pour électrons en Nb (ILC, XFEL), bobines du stellator NbTi W7X (fusion), réseaux de bolomètres en NbSi (SQUIDS, application détection IR spatiale), détecteurs mono photons en NbN.

Electrotechnique : transport, stockage, conversion d'énergie. Il existe déjà des limiteurs de courant, lignes de transport, et à venir bientôt : transfo et moteurs. Devrait permettre énormes diminutions des pertes (Le transport d'électricité engendre aujourd'hui des pertes d'énergie importantes par effet Joule. Pour le réseau de transport d'électricité en France, ces pertes sont estimées en moyenne à 2,5 % de la consommation globale, soit 11,5 TWh par an)

Principale difficulté : fabrication des câbles en supra HTC (refroidissement azote liquide) en grande longueur (car Supra HTC = céramiques)

Pour faire passer qqs 10 000 A :

Câble en cuivre

Câble NbTi (refroidi à l'hélium)



Aimants

■ Exemples

■ LHC @ CERN : aimant NbTi :

- 27 km circonférence, consommation ~1 centrale thermique (seult consommation cryogénique).
- Si aimants = Cu (+Fe) : 100 km de circonférence, consommation ~4 centrales,

■ Dans les détecteur : permet d'augmenter la « transparence »

- Aimant pour courber trajectoires. Volume occupé / aimant => pas d'elt de détection

Supra en DC : gain en poids, et en volume (même en comptant les cryostats). Aucune perte, toute l'énergie consommée sert à refroidir.

Cavités RF

■ C'est plus compliqué, dépend bcp du cycle utile

- Seule supra peut atteindre C.U. de 1 (puissance 100% du temps)

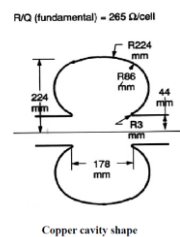
■ Exemple

- Linac à protons (sources de neutrons):

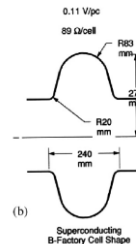
■ Autre avantage

- Ouverture + grande => plus faible impédance => alignement + facile et réduction du champ de sillage / meilleure émittance

	Cuivre	Niobium (SC)
Résistance de surface du matériau : R_s	7mΩ	10nΩ
Champ accélérateur envisageable : E_{acc}	1,6 MV/m	10 MV/m
Efficacité RF $\eta_{RF} = P_{beam} / (P_{beam} + P_{cav})$	15%	100%
Efficacité cryogénique ($\eta_{cryo} = \eta_{Carnot} \times \eta_{thermo}$ avec $\eta_{Carnot} = T_{froid} / (T_{chaud} - T_{froid})$)	100%	0,2%
Efficacité globale $P_{fournie\ au\ faisceau} / P_{à\ la\ prise}$	7.5%	49%
Longueur réelle pour gagner 1 GeV	833m	286m



Copper cavity shape



Superconducting B-Factor Cell Shape

C. ANTOINE

Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 8

Supra en RF plus compliqué :

Supra bien meilleure à cycle utile élevé, mais cuivre peut aller à des champs + élevés à cycle utile très faible.

Autre avantage supra :

- on peut utiliser des fréquences + basses :
- design : ouvertures cavités supra + grandes => plus faible impédance=> réduction du champ de sillage => meilleure émittance,
- de plus, alignement + facile avec grandes ouvertures (machines de plusieurs km)

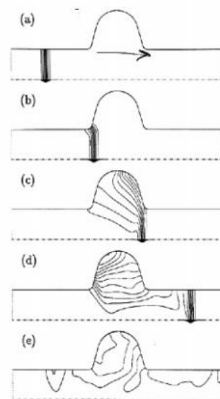
On gagne sur la résistance de surf (un facteur 100 000), mais on perd sur le rendement cryogénique (rendement Carnot ~0,15%, à multiplier par un rendement technique).

Bilan à la prise : on est entre 2 et 100 fois meilleur en supra suivant les applications

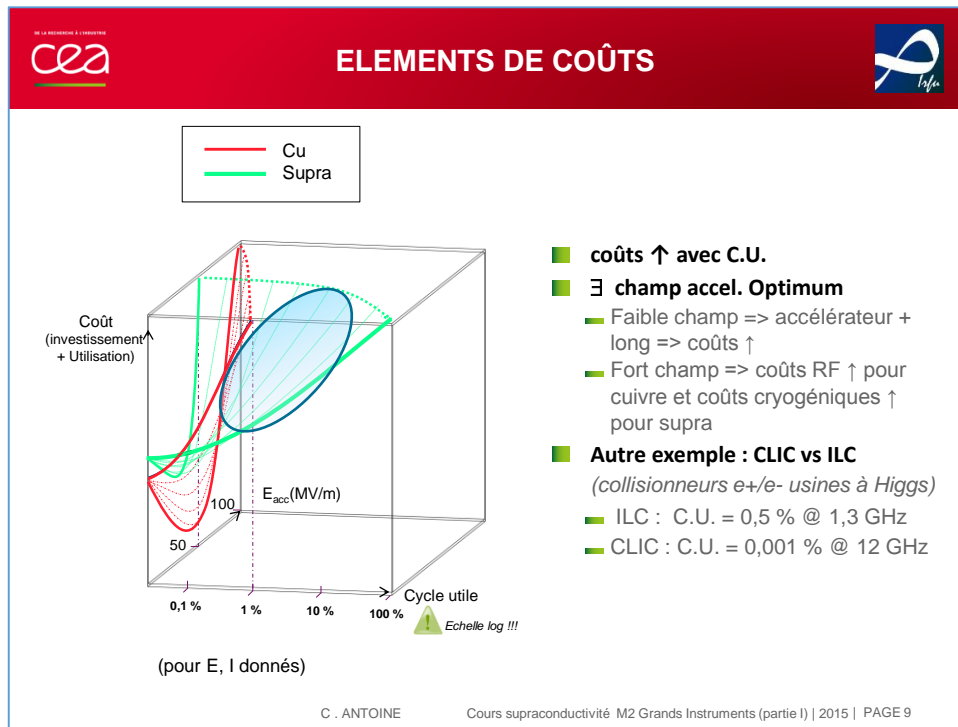
(Some) Further SC Advantages

H. Padam

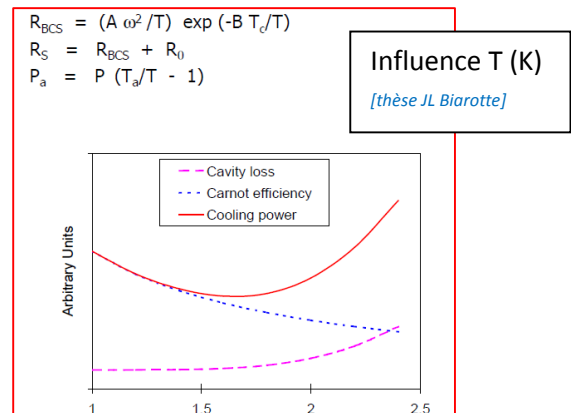
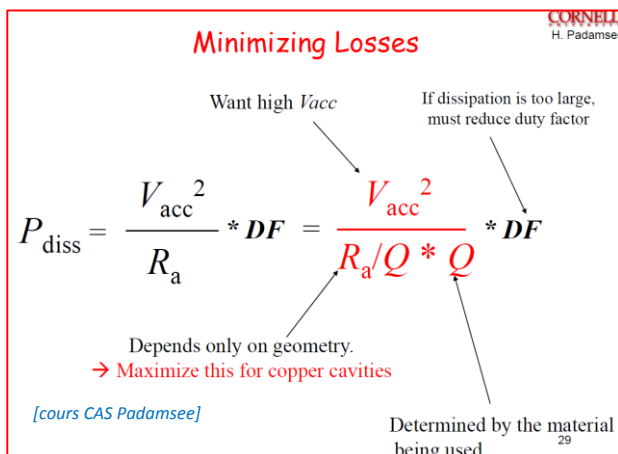
- Freedom to adapt design better to the accelerator requirements allows, for example, the beam-tube size to be increased:
 - Reduces the interaction of the beam with the cavity (scales as size³) → The beam quality is better preserved (important for, e.g., FELs).
 - HOMs are removed more easily → better beam stability → more current accelerated (important for, e.g., B-factories)
 - Reduce the amount of beam scraping → less activation in, e.g., proton machines (important for, e.g., SNS, Neutrino factory)



[cours CAS Padamsee]



- For copper cavities, power dissipation is a huge constraint
 - Cavity design is driven by this fact
- For SC cavities, power dissipation is minimal
 - decouples the cavity design from the dynamic losses
 - free to adapt design to specific application



- Cuivre : aller plutôt vers les hautes fréquences
- Nb : aller plutôt vers les basses fréquences

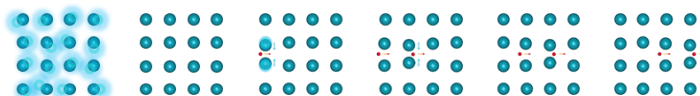
BASES



Paires de Cooper : comment annuler la résistance

Dans un métal, les électrons sont comme des danseurs dans une discothèque, chacun danse dans son coin de façon non synchrone avec les autres. Dans un supra, les électrons se mettent ensembles comme les danseurs dans un bal viennois qui d'abord se mettent par paire puis forment ensemble des mouvements collectifs organisés ; il n'y a plus d'énergie perdue à se cogner contre les autres !

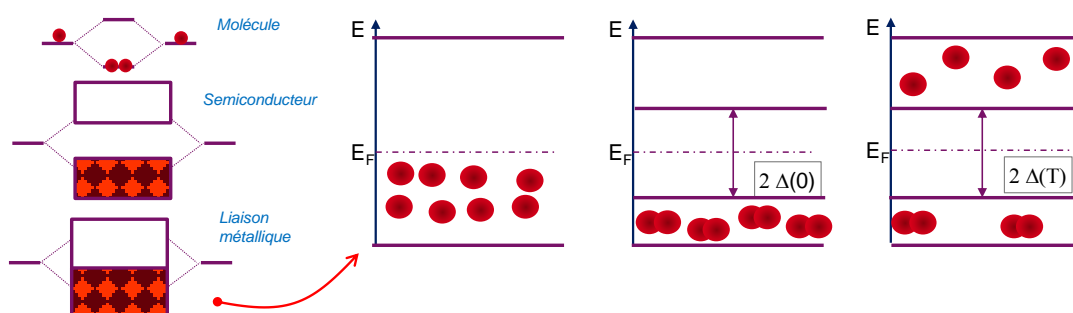
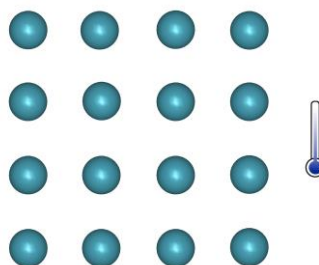
Comment former une paire : couplage avec le réseau cristallin.



À température ambiante, les noyaux du réseau cristallin vibrent dans tous les sens. À froid ils sont presque immobiles. Si un électron (charge -) passe entre deux noyaux (charge +), il les attire. Un autre électron ressent l'augmentation de charge + des noyaux rapprochés et est « attiré » à son tour. Mais cela ne peut arriver que lorsque la température est assez basse pour que les autres vibrations des noyaux se calment, sinon les électrons rebondissent au hasard.

Principe simplifié :

- Couplage via les phonons
- e- seuls= fermions, paires de Cooper = bosons
- Condensation (Bose-Einstein) + ouverture d'un gap
- 1! Fonction d'onde pour tous les e- appariés : état cohérent dimension macro
- $R=0$ (⚠ : pas toujours vrai !!!)



C. ANTOINE

Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 12

Quelques rappels sur la supraconductivité :

A l'état supraconducteur les électrons sont regroupés en paires via un couplage par les phonons du réseau cristallin.

C'est un peu comme si on transformait une boîte de nuit bondée en salle de valse viennoise où tous les couples évoluent ensemble dans le même sens.

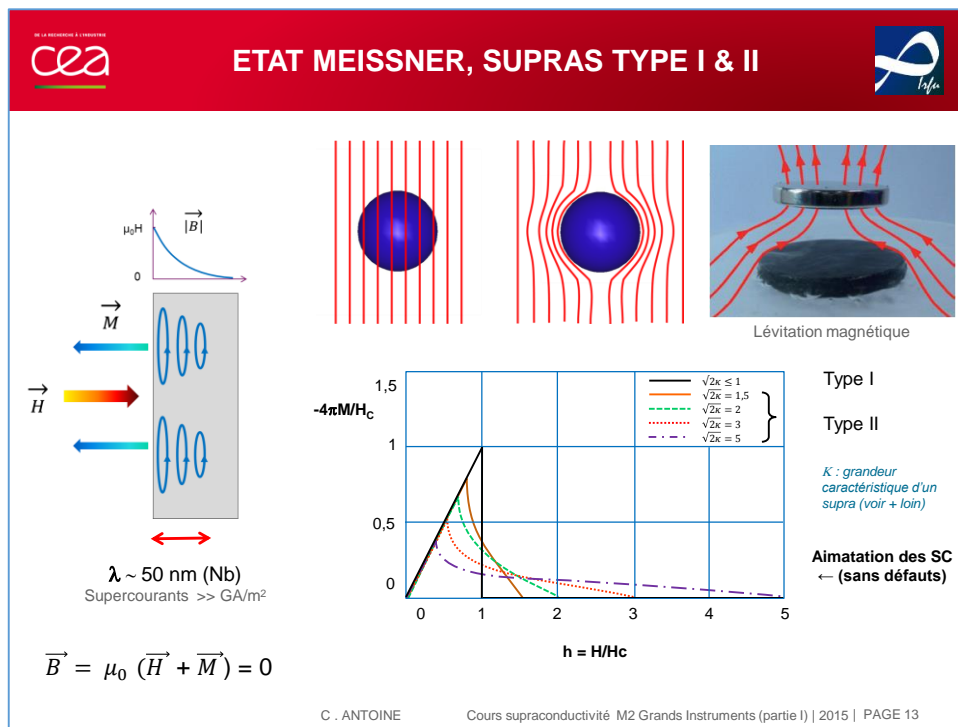
On peut d'ailleurs décrire tous les électrons appariés avec une seule fonction d'onde ce qui fait de la supraconductivité un des rares phénomènes quantique observable à grande échelle.

Basic facts on superconductivity

In the superconducting state electrons are grouped in pairs thanks to a coupling via the crystalline lattice phonons.

It is like if one would transform a crowded nightclub into a Viennese ballroom where all couples evolve together in the same direction.

Beside on can describe all the paired electron with one single wave function, which makes superconductivity one of the few quantum phenomena observable at large scale.



Dans le régime Meissner le champ pénètre sur une profondeur λ de quelques dizaines de nm et induit des « supercourants » qui génèrent à leur tour un moment magnétique opposé au champ appliqué H

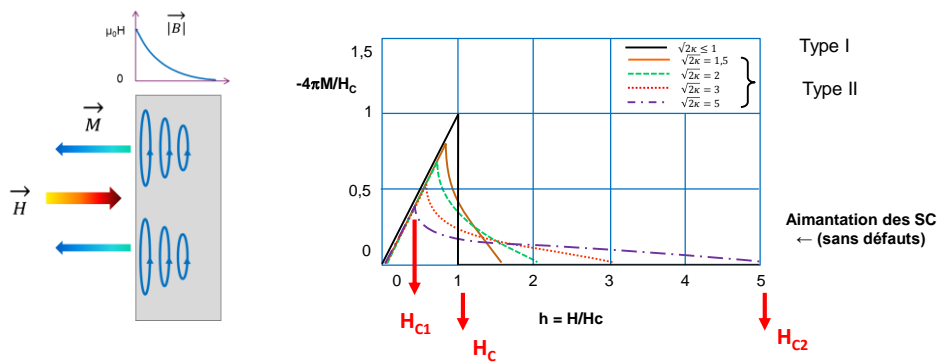
- le champ résultant est rigoureusement nul dans le supra (excepté dans λ)

Ces courants atteignent des dizaines de milliards d'A/m² -essentiellement dans les 50 1ers nm de la surface-
Au-delà d'un certain champ on arrive à un courant limite (J_D : depairing current : suffisant pour provoquer le désappariement des paires) et le supra n'est plus capable d'écranter le champ. Le champ correspondant : H_c est le champ de transition thermodynamique des supra de type I.

Mais il existe des supra de type II qui ont un comportement différent : le champ commence à pénétrer à un champ plus faible que H_c mais la supraconductivité perdure bien au-delà : c'est l'état mixte.

Paramètres importants:

- H_C : champ critique thermodynamique (intrinsèque)
- H_{C1} : 1er champ critique (transition état Meissner => état mixte, dépend de l'état du matériau)
- H_{C2} : 2nd champ critique (transition état mixte => état normal, dépend de l'état du matériau)
- $\kappa : \lambda/\xi$, paramètre de Ginzburg-Landau (dépend de l'état du matériau, indépendant de T)
- λ : profondeur de pénétration du champ, ξ longueur de cohérence des paires de Cooper (voir suite)



C. ANTOINE

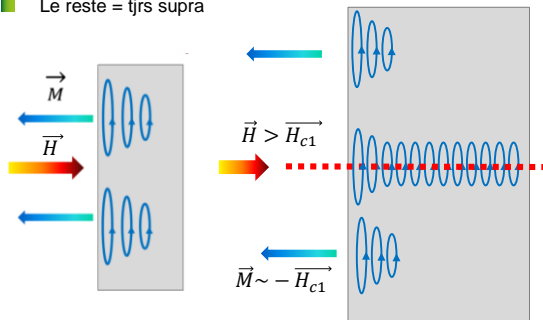
Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 14

Remarques

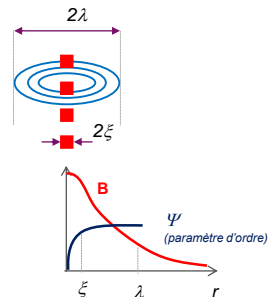
- H_C est toujours un paramètre intrinsèque (thermodynamique) d'un supra type II, mais il n'est plus directement accessible à la mesure (on le retrouve via les formules)
- influence du l.p.m. : $\lambda_0 \sim \lambda_L$: intrinsèques, supra « propre ». Si impuretés ou désordre (limite « sale ») ça joue sur le libre parcours moyen et change λ (ce n'est plus une valeur intrinsèque).
- ça joue également sur les valeurs respectives de H_{C1} et H_{C2} : en général introduire des défauts (impuretés, désordre) fait $\uparrow H_{C2}$ et $\downarrow H_{C1}$
- Voir transparent 30

Etat mixte : au - dessus de H_{c1}

- Le champ n'est plus totalement écranté
- Des lignes de champ pénètrent dans le matériau => zone normale (également) entourée de courants d'écrantage (= vortex)
- Le reste = tjrs supra



NB : ne pas confondre état *intermédiaire* des supras type I (coexistence de zones normales et supra, sans vortex) avec l'état *mixte* des supras type II

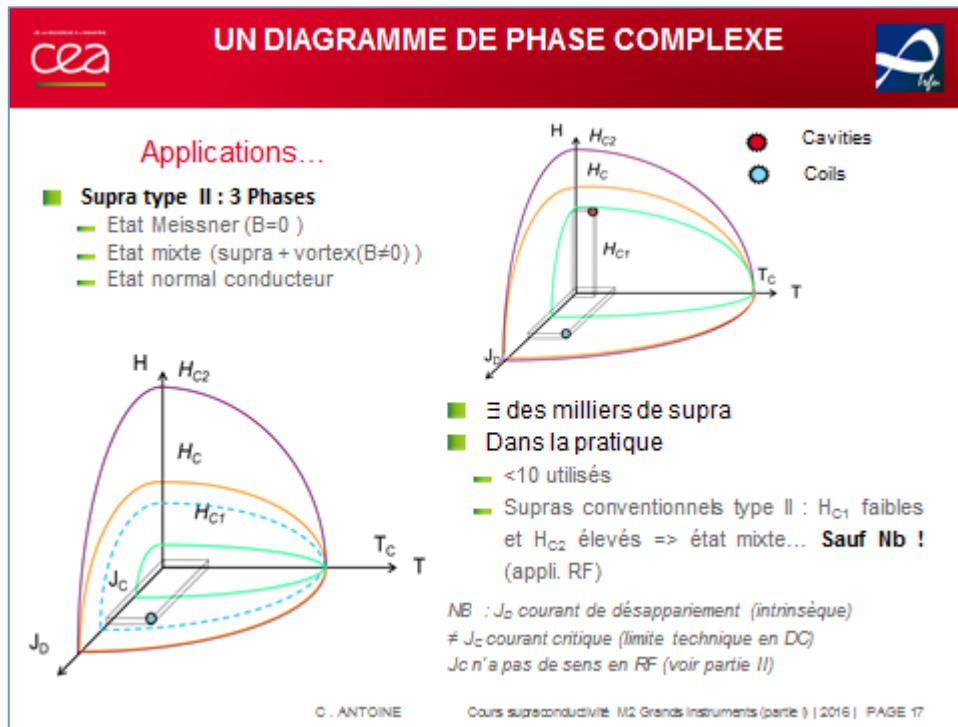


- Chaque vortex porte 1! Quantum de flux Φ_0
- Suppression de $\Delta(r)$ pour $r < \xi$ car $J(r)$ att
- Courants d'écrantage sur $r < \lambda$

$$\Phi_0 = h/(2e) = 2,06783376 \times 10^{-15} \text{ Weber (T/m}^2\text{)}$$

vortex (défauts linéaires le long desquels le paramètre d'ordre ψ s'annule)

- Chaque vortex porte 1! Quantum de flux Φ_0
- Suppression de $\Delta(r)$ pour $r < \xi$ car $J(r)$ atteint J_D *: J_D = courant de désappariement (depairing en ang), sera défini + loin. \sim densité de courant pour laquelle les paires se cassent
- Courants d'écrantage sur $r < \lambda$



La supra n'apparaît qu'en dessous d'une certaine température, d'un certain champ magnétique et/ou d'une certaine densité de courant. Dans la plupart des applications de la supra on est à l'état mixte, par exemple pour les aimants supra. Mais le régime de fonctionnement des cavités est l'état Meissner (seule application de la supra dans ce cas)

HM « melting » ou « moving » : c'est le moment où les vortex commencent à se mouvoir librement dans le supra : cela marque le début des dissipations thermiques (R n'est plus =0)

Superconductivity only appears below a definite temperature, definite magnetic field and/or a definite current density.

In most superconductivity applications one is in the mixed state, but for accelerating cavities one is in the Meissner state.

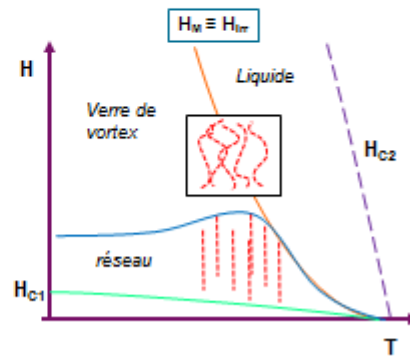
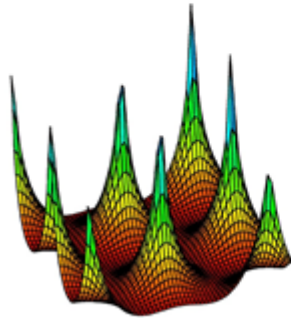
☀ Cavities : Meissner State,
 $H \sim H_{C1}$, $J \sim J_D$ (@ H_{SH})

☀ Coils : higher T_C , but
 mixed state (low H_{C1}) , $J_C \sim J_D/10$
 (generally at low magnetic field)

Comportement des vortex conditionne les limites de l'utilisation

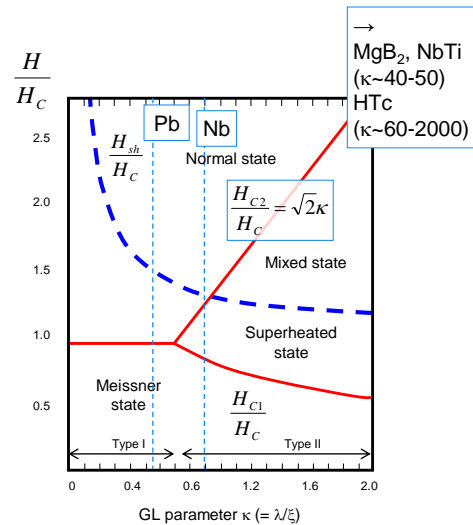
■ Vortex

- forment un réseau hexagonal centré (perforé appelé « fond » triangulaire « a »)
- peuvent s'ancrer sur des défauts (voir + loin)
- peuvent présenter \neq états (analogie avec les états cristallins)
- $H > H_{M1} \Rightarrow R \neq 0$



Applications...

- ∃ des milliers de supra
- Dans la pratique
 - <10 utilisés
 - Supras conventionnels type II : H_{C1} faibles et H_{C2} élevés => état mixte... **Sauf Nb !** (appli. RF)
 - E. Mixte décrit par modèles phénoménologiques (GL et GLAG)
 - ⚠ approximations valables seul à $T \sim T_c$
 - « superheating field » = état métastable (voir § « RF »)



Remarque

SH field : état métastable ; + favorable en champ parallèle, observable en DC et en AC, mais + facile à voir en RF pulsée

État métastable : analogie avec l'état de surfusion (l'eau très pure reste liquide en dessous de 0°C et gèle dès que contact avec autre chose <http://www.koreus.com/video/surfusion-eau.html>)

Voir + loin , mais en résumé :

London marche $\forall T$

Développements en T seul valable près de T_c pour GL

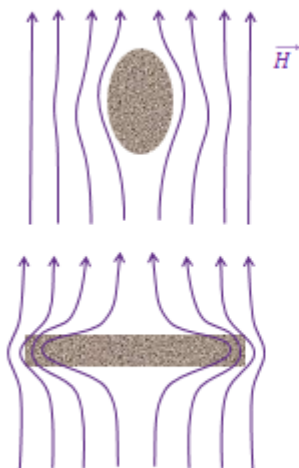
Eliasberg : corrections $T \ll T_c$

Bardenn Cooper : corrections $B \gg 0$

Pippard pour les cas où $\xi \gg \lambda$, London pour $\xi \ll \lambda$ (type II, κ élevés).

λ dépend du l_{pm} (mfp en anglais)

Effets géométriques



- Echantillons de forme elliptique : $H = H_c$ en tout point de la surface
- Forme quelconque : tenir compte de la déformation locale des lignes de champ

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + (1-D) \vec{M})$$

— Lamé infiniment mince $D \rightarrow 1$

— Sphère : $D = 1/3$

— Cylindre infini : $D = 0$

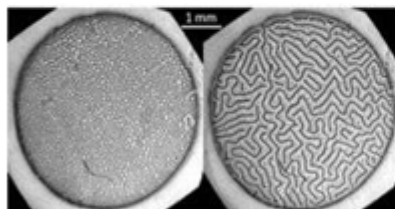


⇒ Si le champ n'est pas le même partout, des zones peuvent transiter avant d'autres !!!



■ Observé sur les supra type I (aussi appelé Paramagnetic Meissner Effect)

- du aux effets démagnétisants (facteur de forme => surtout films minces),
- plusieurs configurations métastables équivalentes,
- Applications : φ fondamentale : étude compétition entre interaction répulsive longue distance et interaction attractive à petite distance

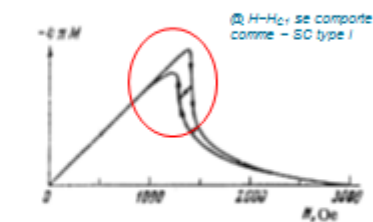


SC Type I : même T_c même H_c
 ≠ historique magnétique

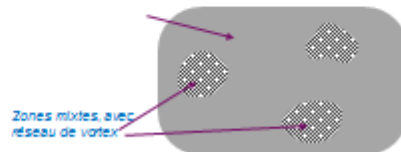
<https://phys.org/news/2007-07-superconductivity.html>

■ Niobium = type II, mais...


■ Près de H_{c1} :




Zones Meissner



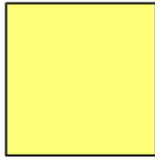
Dépend de la qualité cristallographique, voir partie II



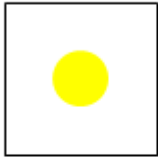
MESOPHASES



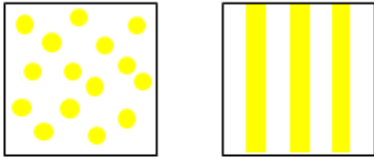
Répulsion seule :
1/ seule phase uniforme



Attraction seule :
2 phases



Compétition entre Répulsion et Attraction :
MESOPHASES

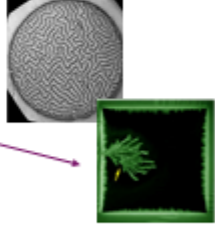


■ S'applique à de nombreux phénomènes physiques dont :

- L'état intermédiaire dans les supra de type I
- Les états transitoires dans les supra de type II
 - Pénétration en avalanche, dendrites
- Les matériaux magnétiques et les ferro-fluides
- Solidification/croissance des alliages, croissance dendritique
- De façon générale : fronts de propagation, instabilités interfaciales (Instabilités type Mullins-Sekerka)

■ Mathématiques complexes

- Traitements numériques uniquement
- Résultats dépendent énormément des conditions initiales



Ce n'est pas la même chose !

C. ANTOINE

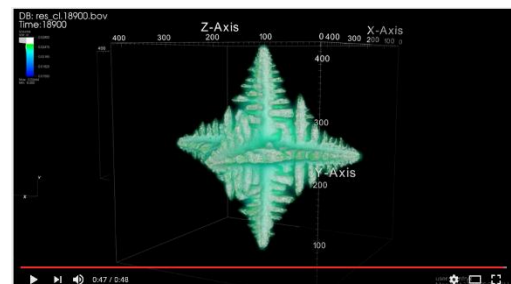
Interaction longue portée : Biot Savart, nrj de démagnétisation (favorise des structures finement divisées)

Interaction courte portée : tension de surface/nrj de surface (favorise une structure regroupée)

Approches numériques du problème :

- Van der Waals (1893)
- Korteweg (1901)
- Landeau Ginzburg (Time dependent G.L., 1950)
- Cahn Hilliard (1958)
- Phase field models (fin des années 1970)

<https://www.youtube.com/watch?v=S7ouGK58TX8>



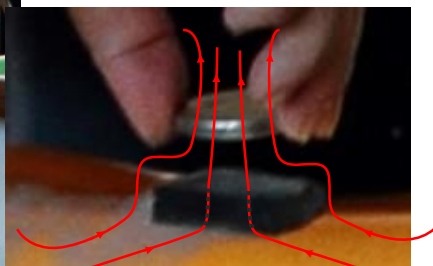
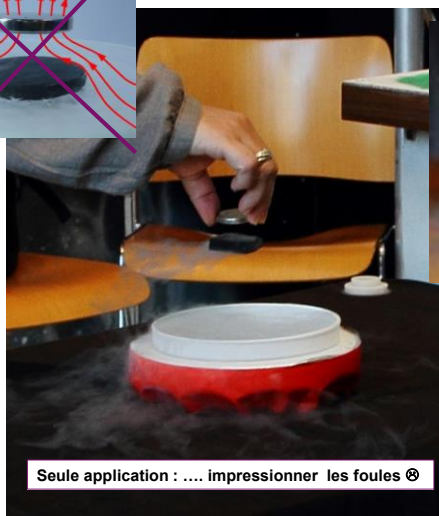
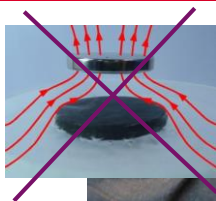
Etat intermédiaire :

- Région Normale : le déplacement de l'interface génère des courants de Foucault
- Région supra : $B = 0$
- A l'interface, supercourants d'écrantage
- conditions aux lim \Rightarrow on a le même champ de part et d'autre $B_i \cdot v_n = -D_B \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)_i$
- Interface plane $\Rightarrow B = \mu_0 H_c$ alors qu'interface courbe $\Rightarrow B = \mu_0 H_c (1 - d_0 \kappa - \beta v_n)$
- Analogie avec la condition de Gibbs Thomson utilisée e.g. en cristallisation
- L'énergie de surface dépend du vecteur normal local
- ∇B est le plus grand près d'une bosse
- La vitesse de déplacement de l'interface est la plus élevée près d'une « bosse » \Rightarrow les bosses grandissent encore plus vite
- Le phénomène est stabilisé par la tension superficielle mais aux petites longueurs d'ondes \Rightarrow dendrites

vitesse de déplacement du front

∇B

Analogie d'un coeff de diffusion



Mouvement $\equiv \Delta H$

- supercourants génèrent - ΔM
- s'oppose au changement de position
- ramène le supra dans la position « figée » au moment du refroidissement

<http://hebergement.u-psud.fr/supraconductivite/video supra.html>

Seule application : impressionner les foules ☺

Material	T_c (K)	ρ_n (μW cm)	$\mu_0 H_{C1}$ (mT)*	$\mu_0 H_{C2}$ (mT)*	$\mu_0 H_C$ (mT)*	$\mu_0 H_{SH}$ (mT)*	λ_L (nm)*	ξ (nm)*	Type
Pb	7,1		n.a.	n.a.	80		48		I
Nb	9,22	2	170	400	200	219	40	28	II
NbN	17,1	70	20	15 000	230	214	200-350	<5	II
NbTiN	17,3	35	30				150-200	<5	II
Nb₃Sn	18,3	20	50	30 000	540	425	80-100	<5	II
V ₃ Si	17								II
M ₀₃ Re	15		30	3 500	430	170	140		II
MgB ₂	39		30	3 500	430	170	140		II- 2gaps
YBCO	93		10	100 000	1400	1050	150		d-wave
Pnictide Ba _{0,8} K _{0,2} FeAs ₂	38				900	756	200		

* @ 0K

D'AUTRES PROPRIÉTÉS AFFECTÉES

Transition normal => SC

- Saut sur chaleur spécifique (si B=0) mais pas sur chaleur latente
 - => transition du 2nd ordre
 - contribution électronique change, pas celle du réseau cristallin
- Effet isotopique :
 - $T_c \sim 1/\sqrt{m}$ (lien avec réseau cristallin, mais pas changement de structure aux RX)
- e- : Ordre à longue portée :
 - Transition abrupte @ T_c : bcp d'e- concernés
 - Effet de proximité (ds ξ à l'interface région normale/supra)
- Pas d'effets thermoélectriques dans les supras type I
 - Car paires de Cooper ne transportent pas d'entropie (mais vortex si !)
- Pas de changement ds l'absorpⁿ lumière visible (liée à ρ_n)
 - mais bande d'abs vers $10^{11} - 10^{12}$ Hz ($\sim 10^{-3} - 10^{-4}$ eV \sim qq^s K $\sim T_c$) => gap supra
- Conductivité thermique]
 - Partie des e- qui assuraient la conductivité thermique maintenant sous forme de paires de Cooper
- Influence de l'état mécanique
 - Pression isostatique peut jouer sur T_c (e.g. SC organiques)
 - Déformation : joue sur l.p.m. / ∇ joue bcp sur les pptés supra : voir suite)

C. ANTOINE
Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 20

Le paramètre d'ordre est discontinu pour les transitions du premier ordre, continu pour celles du second ordre. Les transitions du second ordre correspondent à des phénomènes coopératifs. Les grandeurs physiques montrent des comportements singuliers au point de transition et l'on peut définir des exposants critiques universels (Voir + loin et <http://www.impmc.upmc.fr/~ferlat/Enseignement/LP350/cours-thermo-2.pdf>)

La **chaleur spécifique** (ou capacité calorifique) d'un matériau est la quantité de chaleur (énergie) nécessaire pour élever d'un degré centigrade (ou Kelvin) une masse d'1 kg de ce matériau.

La **chaleur latente** (ou enthalpie) de changement est la quantité d'énergie qu'il faut fournir au système pour qu'il change d'état (Transition du 1^{er} ordre)

Pas d'effets thermoélectriques dans les supras type I (pas vrai pour certains HT_c/état mixte)

Effets thermoélectriques : lien entre chaleur et courants :

Effet Seebeck : Une différence de potentiel apparaît à la jonction de deux matériaux soumis à une différence de température,

Effet Peltier : réciproquement une différence de température apparaît à la jonction de deux matériaux soumis à une différence de potentiel

L'effet Thomson apparaît dans les matériaux dont le coefficient Peltier n'est pas indépendant de la température. Lien entre courant et gradient de température (jonction pas nécessaire).

Absorption de la lumière → en fait

Photons d'énergie $< \Delta$ (~ 100 GHz) et $T \rightarrow 0$: pas d'absorption => $R=0$

Photons d'énergie $< \Delta$ (~ 100 GHz) et $T \neq 0$: absorption faible => $R \neq 0$, mais reste petit

Photons d'énergie $> \Delta$ => $R \nearrow \nearrow$

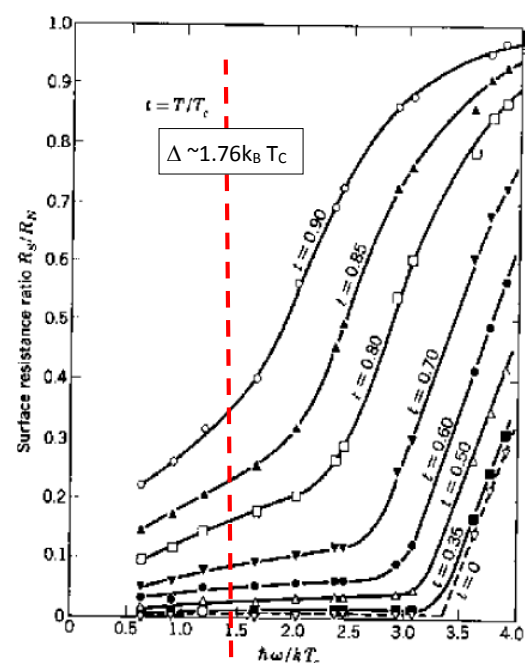


Figure 11.11: Résistivité de surface en fonction de la fréquence d'une couche mince supraconductrice , à diverses températures.

LES THÉORIES

Les + utilisées...

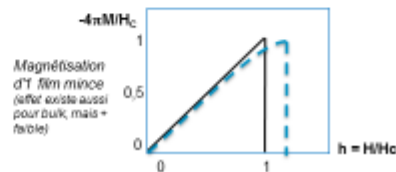
■ London (1935)

- Modèle 2 fluides, inspiré du comportement de l'He superfluide
- Théorie classique, suppose n_s uniforme
- Ne marche pas pour les films mince
- Valable $\forall T$, mais B faible; à B fort : comportement non linéaire
- Permet d'expliquer l'effet Meissner

■ Ginzburg Landau (1950)

- Introduit les aspects quantiques : 1^{er} fonction d'onde, paramètre d'ordre
- Introduit les comportements non-linéaires
- Développements valables **seulement** à $T \sim T_C$
- A. N. pas vraiment meilleures que London, mais meilleures prédictions pour films minces
- GLAC (Ginzburg-Landau-Abrikosov-Gor'kov) : développements de G.L. adaptés aux $\kappa >> 1,2$

Les deux modèles restent « bas courant »



C. ANTOINE

Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 22

Modèle à 2 fluides proposé par Gorter et Casimir (1934). Utilisé par F. & H. London (1935) pour expliquer l'effet Meissner. Théorie phénoménologique; classique.

London :

Explique effet Meissner et fait apparaître λ

Marche à condition que J_s soit $\ll J_D$ et que n_s (densité d'électrons supras) soit uniforme. Mais beaucoup de phénomènes apparaissent en supra car n_s n'est pas uniforme,

GL :

Électromagnétisme + thermodynamique.

Se base sur les transitions de phase du second ordre. Paramètre d'ordre ψ appelé « fonction d'onde des électrons condensés ». Ce paramètre d'ordre mesure la brisure de symétrie U dans l'état supraconducteur.

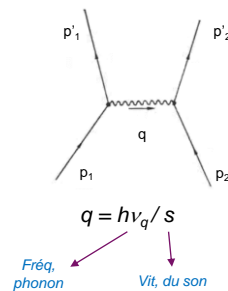
Énergie de condensation est $\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2$; en présence de H , n_s peut varier, l'énergie libre peut s'écrire comme un développement de Taylor. La solution est trouvée en minimisant ψ (la fonction d'onde) et A (le potentiel vecteur) sur tout l'espace, mais développement ordre 1 ou 2 valables seulement près de T_C ,

Fait apparaître une deuxième longueur caractéristique : ξ

GLAC : influence de ℓ (libre parcours moyen)

La + complète...

- BCS (Bardeen-Schrieffer-Cooper) : (1957)
 - Théorie quantique, locale
 - Généralement pas utilisée pour prédictions « ingénierie » : trop complexe,
 - Paires = électrons de moments p et spins opposés (au temps T)
(Aspect quantique : on ne peut pas parler d'e- individuels, système corrélé)
 - 1 ! Fonction d'onde pour tous les e- supra, bcp d'échanges entre paires, couplage faible
 - Permet d'expliquer tous les phénomènes observés autour de la supra



D'autres raffinements

- Eliashberg
 - Valide $\forall T$
 - Couplages fort (s'applique à Nb, bien que type II ?)
- Eilenberg
 - Théorie semi-classique, toujours pas valable à bas T
 - type II limite propre : tient compte des certaines inhomogénéités
- RF :
 - Réponse aux ondes EM ($R \neq 0$) : Mattis-Bardeen (B faible)
 - Fort courants ($J \sim J_D$) : "non linear R_{BCS} " (clean type II)
 -

SC:

- Pas de théorie complète ☹️
- Bcp de développements particuliers
- Attentions aux limites de validité
- \exists Contradictions ds littérature
- Théo. parfois très loin du monde réel

BCS : Pbme au départ : électrons sont soumis à répulsion Coulombienne : même si elle était attractive, elle est tellement intense que le gap ne pourrait pas être aussi petit => trouver 1 autre mécanisme d'attraction faible (mécanisme « weak interaction » a été difficile à trouver) !

1950 Frolich montre que l'émission/absorption d'un phonon \Leftrightarrow interaction attractive

L'énergie totale des paires d'e- en interaction reste constante bien que leurs moments soient tout le temps en train de changer car aspect quantique (délocalisation : ce ne sont pas deux e- individuels bien déterminés, mais 2 e- de moments opposés à chaque instant t)

BCS a servi essentiellement à faire des calculs « exacts » et conforter les hypothèses prises par ex pour GL (on retrouve mes même résultats à peu de chose près à $T \sim T_C$)

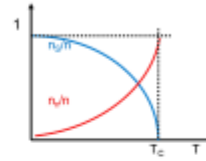
Tous les autres développements => pour chaque cas particuliers

NB : bcp de contradictions dans la littérature (difficile de savoir si les approximations dans ce cadre sont légitimes) : le juge de paix c'est les expériences !!!!

Modèle à 2 fluides

- La conductivité est assurée par deux composantes différentes

- $\vec{J} = \vec{J}_N + \vec{J}_S$
- Composante normale n_N/n
- Composante superfluide $n_S/n = 1 - n_N/n$



- E accélère seule la composante SC, la composante N est court-circuitée

- $\vec{J}_S = n_S e \vec{v}_S$
- $m \vec{v}_S = -e \vec{E}$ eq. Dynamique des e- (accélération par E)

- 1^{ère} Equation de London (eq. de Maxwell + 2 fluides) Analogie de la Loi d'Ohm pour les supers

$$\frac{d\vec{J}_S}{dt} = \frac{e^2 n_S}{m} \vec{E} = \lambda_L^2 \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{J}_S = \frac{\vec{A}}{\mu_0 \lambda_L^2} \quad \rightarrow \quad J(x) = \frac{H(0)}{\lambda_L} e^{(-x/\lambda_L)}$$

- 2^{ème} Equation de London (rot 1^{ère} eq. + Maxwell) Diamagnétisme parfait quand $x \gg \lambda_L$

$$\nabla \times \frac{d\vec{J}_S}{dt} = \nabla \times \lambda_L^2 \vec{E} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_S \quad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{\vec{H}}{\lambda_L^2} \quad \rightarrow \quad H(x) = H(0) e^{(-x/\lambda_L)}$$

Si le courant est constant, il ne peut pas y avoir de champ électrique E dans le supraconducteur car autrement les supers électrons seraient continûment accélérés et le courant augmenterait infiniment.

S'il n'y a pas de champ électrique, les électrons normaux sont donc au repos : seuls les supers électrons transportent le courant en régime stationnaire, et ils ne diffusent pas sur les impuretés grâce à l'état de cohérence (voir + loin : toutes les paires sont corrélées, pour casser 1 ! paire, il faudrait fournir l'énergie pour détruire toutes les paires)

Première eq de London montre que **le champ électrique ne diffère de zéro que lorsque la densité de courant varie dans le temps**. Elle décrit l'écoulement balistique des électrons supers à la place de la loi d'Ohm (qui elle décrit l'écoulement visqueux d'électrons dans un métal) et donne J_s en fonction du potentiel vecteur A :

This equation suffers from the disadvantage that it is not gauge invariant, but is true only in the Coulomb gauge, where the divergence of A is zero. This equation holds for magnetic fields that vary slowly in space.

Cas stationnaire : on peut négliger les courants de déplacement dans la 2ème eq de Maxwell.

2ème eq : on remplace rot E par son équivalent Maxwell et on intègre en fonction du tps

$$\text{rot} \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B} \quad (7)$$

⁷L'équation de London peut être dérivée phénoménologiquement de la façon suivante. On suppose que dans le supraconducteur, une fraction $n_s(T)$ d'électrons porte un supercourant, c'est-à-dire un courant sans dissipation. Cette fraction s'appelle la densité d'électrons supraconducteurs. Ces électrons peuvent être accélérés sans dissipation ($\tau = \infty$) par un champ électrique \vec{E} :

$$m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e \vec{E}$$

Ils portent donc un courant :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = -en_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = n_s \frac{e^2}{m} \vec{E}$$

Comme $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, ceci implique que


$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{rot} \vec{J} + n_s \frac{e^2}{m} \vec{B}] = 0$$

ce qui est évidemment obéi par n'importe quelle solution stationnaire. Les frères F. et H. London (1935) ont réalisé que la solution plus restrictive :


$$\text{rot} \vec{J} + n_s \frac{e^2}{m} \vec{B} = 0$$

conduit à l'effet Meissner.

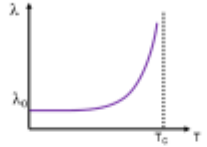
Voir [Cours Montambaux](#)



LONDON (II)



$$\lambda_L = \left(\frac{m}{e^2 n_s(T) \mu_0} \right)$$

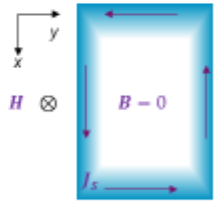


Remarque : $\lambda_c \leq$ erreur d'un facteur ~ 2 par rapport aux valeurs λ mesurées exp)

London permet d'expliquer l'état Meissner

- Le champ pénètre sur λ_L
- Les supercourants écrantent complètement H_0
- $B = 0$ au cœur du supra
- NB. La densité de courant maximum ne peut pas excéder J_D (le courant de désappariement)

$$J_D(T) = \frac{H_c(T)}{\lambda_L(T)} \sim J_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right)^{3/2}$$



$\vec{B} = B(0)e^{(-x/\lambda_L)}$

Remarques :

- H_c : champ critique thermodynamique
- Peut être défini comme le champ suffisant pour briser les paires de Cooper

C. ANTOINE
Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 25

London permet d'expliquer Meissner (les supercourants écrantent complètement H, B=0 à l'intérieur), mais sous-estime λ .

Remarque : comme on le verra plus loin toutes les paires de Cooper on la même phase, s'il n'y a pas de courant. Si un gradient de phase apparaît alors un courant apparaît

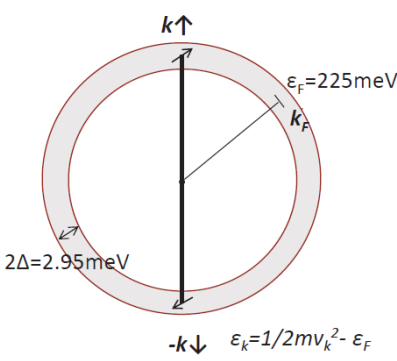
Courant de désappariement : en fait la valeur du gap (voir théorie BCS, +loin) est influencée par la vitesse de déplacement des électrons des paires de Cooper V_s et leur quantité de mouvement $\pm p_f$:

$$\Delta(V_s) = \Delta - p_f |V_s|$$

Donc à fort courant le gap diminue et de plus en plus de paires sont cassées par activation thermique.

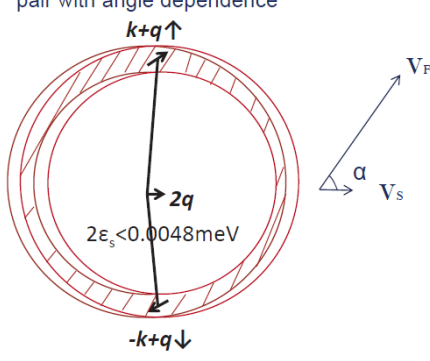
Voir par ex : http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/SRF2013/talks/moioc02_talk.pdf :

Cooper pair and moving Cooper pair




$\varepsilon_k = 1/2 m v_k^2 - \varepsilon_F$


Energy split appears in Cooper pair with angle dependence



$\varepsilon_{k+q} = 1/2 m (v_k + v_s)^2 - \varepsilon_F = \varepsilon_k + \varepsilon_s + \varepsilon_{ext}$
 $\varepsilon_{-k+q} = 1/2 m (v_k - v_s)^2 - \varepsilon_F = \varepsilon_k + \varepsilon_s - \varepsilon_{ext}$
 $\varepsilon_{ext} = m v_k v_s \cos \alpha = p_f v_s x$

With total momentum $2q$ for all Cooper pairs.
 (Energies are based on Nb with selected parameters)

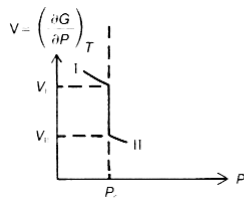
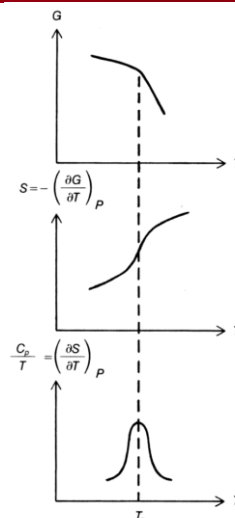
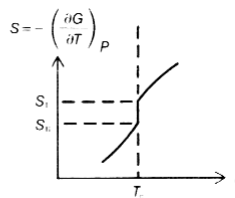




Rappels sur les transitions du 1^{er}/2nd ordre

■ Supras

- transition du 2nd ordre si $B = 0$
- transition du 1^{er} ordre si $B \neq 0$

Comportement de l'enthalpie libre (Gibbs) et de ses dérivées lors d'une transition de phase du 1^{er} ordre.Comportement de l'enthalpie libre (Gibbs) pour une transition du 2nd ordre.

Transitions du premier ordre : énergie libre discontinue, systèmes hétérogènes, toutes les parties ne transitent pas en même temps, e.g. ébullition : mélange liquide – gaz

Transitions du second ordre : dérivée énergie libre discontinue, systèmes homogène, toutes les parties transitent en même temps, e.g. transition ferromagnétique, transition nématique

Les phases avant et après transition ont souvent des symétries différentes.

Transitions de phase :


Les transitions du premier ordre sont celles qui impliquent une enthalpie de transition de phase (ou enthalpie de changement d'état, encore parfois appelée chaleur latente). La **chaleur latente** (ou enthalpie) de changement est la quantité d'énergie qu'il faut fournir au système pour qu'il change d'état

Les transitions de premier ordre ont lieu dans des phases étendues dans lesquelles toutes les parties ne subissent pas la transition au même moment, (systèmes hétérogènes, e.g. ébullition). Par exemple : point critique dans un diagramme liquide /vapeur : en tournant autour du point critique, on peut passer continuellement de la phase liquide à la phase gazeuse sans transition discontinue. Mais la dérivée première par rapport à une des variables thermodynamiques de l'énergie libre est discontinue (présence d'un "saut" dans cette dérivée). Le paramètre d'ordre est également discontinu.


Les transitions du second ordre correspondent à des phénomènes coopératifs (tout le matériau transite d'un coup) et sont des transitions dites « de phase continues » ; il n'y a pas de chaleur latente associée, par contre c'est la dérivée seconde par rapport à une des variables thermodynamiques de l'énergie libre qui n'est pas continue. \exists aussi divergence sur susceptibilité du paramètre d'ordre $\chi = (d\psi/dh)$ à T_c

Rappels

La **chaleur spécifique** (ou capacité calorifique) d'un matériau est la quantité de chaleur (énergie) nécessaire pour élever d'un degré centigrade (ou Kelvin) une masse d'1 kg de ce matériau. Ne pas confondre avec chaleur latente.



MODÈLE DE GINZBURG LANDAU (II)

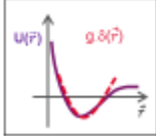


Théorie de Jauge / approche de Landau / champ moyen

(Approche universelle pour les phénomènes critiques, e.g. transitions de phase)

- **Trouver un paramètre d'ordre ψ macroscopique**
 - Décrit les degrés de liberté du point critique
 - Guidé par des considérations de symétrie du système (théorie de Jauge)
 - Théorie de Jauge : théorie de champ basée sur 1 gpe de symétrie locale (gpe de Jauge) qui définit une « invariance de Jauge ». S'applique bien aux transitions de phase : généralement 1 côté est symétrique et il y a brisure de symétrie après la transition

- **Construire énergie libre $F[\psi]$ effective (approximⁿ champ moyen)**
 - On suppose fluctuations spatiales et thermo de ψ petites devant taille système
 - On peut remplacer $U(\vec{r})$ par $g\delta(\vec{r})$ + perturbation (faible d° dans les développements en ψ)
 - On fixe g = potentiel effectif qui a les mêmes propriétés locales dans la gamme d'nrj considérée
 - Soit par intuition
 - Soit par minimisation de l'nrj libre => on trouve la configuration fondamentale ψ_0
 - Permet de reconstruire le diagramme de phase
 - $F[\psi]$ doit respecter les symétries microscopiques du système (« Invariant de Jauge »)
 - Équivalent à un Hamiltonien effectif dit de « Ginzburg-Landau »



C. ANTOINE
Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 27

Les grandeurs physiques montrent des comportements singuliers au point de transition et l'on peut définir des exposants critiques universels (Voir + loin et

<http://www.imPMC.upmc.fr/~ferlat/Enseignement/LP350/cours-thermo-2.pdf>).

Les phases avant et après transition ont des symétries différentes : la phase haute température est généralement plus symétrique (désordonnée : invariance par translation dans toutes les directions) que la phase basse température. On parle alors de brisure de symétrie lors du passage haute T_p° vers basse T_p° . D'où l'intérêt d'utiliser/définir un paramètre d'ordre (nul à haute T_p°).

Même approche possible pour toutes les autres transitions de phase : par exemple

- Transition ferroélectrique : le paramètre d'ordre ψ = Ms aimantation spontanée
- Transition eau-vapeur le paramètre d'ordre ψ = n la densité d' H_2O
- Mécanisme de Higgs en ψ des particules

Analogie avec modèle oscillateur harmonique en M.Q. : pour simuler une liaison (chimique, nucléaire..), on utilise un modèle simplifié, uniquement valable à basse énergie. Si on veut pouvoir aller plus loin : méthode des perturbations (petites devant l'énergie), si on veut aller encore plus loin... ça se complique ☹...mais c'est toujours avec des approximations.

Toujours le même problème : savoir quand les approximations que l'on fait ne sont plus valables quantitativement, voire qualitativement pour éviter de dire des bêtises...

EQUATIONS DE GINZBURG LANDAU

$\psi = 0$ si $T > T_c$, $\psi \uparrow \uparrow$ si $T \rightarrow 0$, et $\psi \sim 0$ à $T_c \Rightarrow$ D.L.

$\mathcal{F}_s(T, \Psi, \vec{A}) = \mathcal{F}_n(T) + a(T - T_c)|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e^* \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} - \vec{H}_0 \cdot \vec{B}$

Remarques

- Fluctuations spatiales de n_s prises en compte dans le terme $i\hbar \vec{\nabla}$
- Termes impairs non nuls s.si transition 1^{er} ordre (champ H)
- F_0 doit être « invariante de Jauge » (invariante par/ aux opérations de symétrie de la phase désordonnée)
- A champ nul, $J=0$ et ψ est réel \Rightarrow on en déduit ξ
- Conditions aux limites : annuler les termes de surface ($J=0$, $B \cdot H=0$)

*Minimisation.
Calculs longs
et compliqués*

$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi(\mathbf{r}) \exp -i \frac{e^*}{\hbar c} f(\mathbf{r})$

$\Psi = |\Psi| e^{i\theta}$ avec $|\Psi| = \sqrt{n_s}$

Equations de Ginzburg Landau

*Oups ! Des Eq. diff. non linéaires et couplées...
 \Rightarrow Traitements numériques*

$$\alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q \vec{A} \right]^2 \Psi = 0$$

$$\vec{J} = \frac{i\hbar q}{2m} [\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi] - \frac{q^2 \vec{A}}{m} |\Psi|^2$$

Rend compte de l'effet Meissner pour supras I et II (supercourants), quantification du flux, effets quantiques macroscopiques...), donne un calcul pour estimer λ et ξ

C . ANTOINE
Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 28

Energie libre d'un système = énergie disponible pour fournir un travail

A une température donnée T, l'état d'équilibre stable correspond à une valeur de ψ qui minimise l'énergie libre $F(\psi, T)$ (notation US, en français ce serait enthalpie).

Au voisinage de la température de transition T_0 , ψ est petit : on peut donc développer

$$F(\psi, T) = F_0(T) + A_0(T) \psi + A(T) \psi^2 + B(T) \psi^3 + C(T) \psi^4 + \dots$$

où F_0 est l'énergie de la phase haute température.

pour $T > T_0$, F doit être minimale pour $\psi = 0$ et $A(T) > 0$.

pour $T < T_0$, F doit être minimale pour $\psi \neq 0$ et $A(T) < 0$

(concavité).

Le choix le plus simple est $A(T) = a(T - T_0)$ avec $a > 0$.

Pour une transition du second ordre, on peut montrer que les termes impairs sont nuls ($A_0(T) = B(T) = 0$) et que $C(T) = c > 0$ donc

$$F(\psi, T) = F_0(T) + a(T - T_0) \psi^2 + c \psi^4, \quad a > 0, \quad c > 0$$

La valeur de ψ qui minimise F est solution de, @F@ ψ :

$$= 2a(T - T_0)\psi + 4c \psi^3 = 0$$

pour $T > T_0$, la seule solution est $\psi = 0$

pour $T < T_0$, on a trois solutions : un maximum en $\psi = 0$ et 2 minima $\psi = \pm a(T_0 - T)/2c$.

Au voisinage de T_0 , le paramètre d'ordre se comporte comme $T_0 - T$.

Rem approx. GL \Rightarrow propose une relation locale entre courant et potentiel vecteur, mais en réalité la relation exacte = non locale, sauf si \vec{A} ou le courant ont des variations lentes à l'échelle de $\xi_0 \Rightarrow$ e.g. supra de type II avec $\lambda \gg \xi_0$. Dans ce cas on a le droit d'utiliser cette approximation.

Français	Energie libre	Enthalpie libre
Anglais (Am)	Helmholtz free energy	Gibbs free energy
Ordre	2 ^{ème} ordre (champ H=0)	1 ^{er} ordre (champ H≠0)
Variables système	T, U (énergie interne)	T, H (enthalpie)
Formule	$F = U - TS$	$G = H - TS$

En présence de champ

- Changer énergie libre => enthalpie libre

- $G = F - BH$

- $G_s = \mathcal{F}_n(T) + a(T - T_c)|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e^*\vec{A}\right)\Psi|^2$

- $G_n = F_n - \frac{\mu_0 H^2}{2}$

Avantage de G : c'est facile de réaliser un processus isobare-isotherme expérimentalement, et à partir de là on accède à tout le reste :

Supra type I :

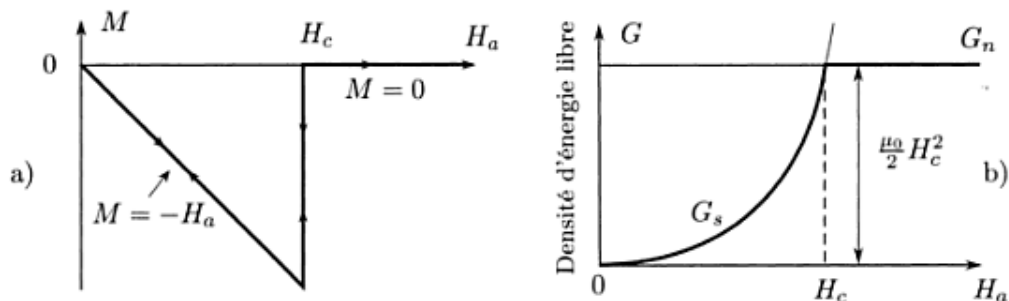


Figure 1.

- a) L'aimantation d'un **supraconducteur**, présentant l'effet Meissner, en fonction de H_a .
b) Densité d'énergie libre du **supraconducteur** et du métal normal en fonction de H_a .

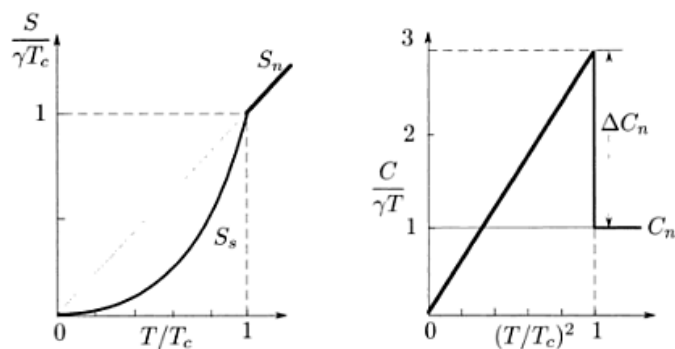


Figure 2.

Entropie et chaleur spécifique en fonction de T/T_c , pour le métal normal et pour l'état **supraconducteur**, obtenues à partir de (6.9) pour $H_c(T)$.

Voir aussi

[Cours supra Thierry Klein](#)

[Cours EPFL](#)

$$G = U + W - TS$$

G = enthalpie libre, appelée également énergie libre de Gibbs,

U = énergie interne du système, T sa température absolue, S son entropie et W le travail qu'il exécute.

Variation d'énergie interne :

$$dU = dq - dW$$

dq = quantité de chaleur fournie au système.

Transition réversible, =>

$$dq = T dS$$

Travail mécanique $P dV$ négligeable pendant la transition.

Travail magnétique = - (énergie magnétique).

En se mettant dans la bonne géométrie (H // échantillon de longueur l) pour simplifier l'expression on obtient finalement :

$$G = U - V \mathbf{H} \mathbf{a} \mathbf{l} - TS$$

et

$$dU = T dS + V \mathbf{H} \mathbf{a} d\mathbf{l}$$

$$dG = - V \mathbf{l} d\mathbf{H} - S$$

G reste constant pendant la transition, car elle s'effectue à température et champ magnétique constants donc $G_n \equiv G_s$ le long de la ligne de transition.

Densité d'énergie interne	u	$du = Tds + \mu_0 H dM$	$\left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_s = \mu_0 \left(\frac{\partial H}{\partial s}\right)_M$
Densité d'enthalpie	$h = u - \mu_0 M H$	$dh = Tds - \mu_0 M dH$	$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_s = -\mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial s}\right)_H$
Densité d'énergie libre (HELMHOLTZ)	$f = u - Ts$	$df = -s dT + \mu_0 H dM$	$-\left(\frac{\partial s}{\partial M}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M$
Densité d'enthalpie libre (GIBBS)	$g = u - Ts - \mu_0 M H$	$dg = -s dT - \mu_0 M dH$	$\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$

Tableau 4.2 - Densités d'énergie libre et d'enthalpie libre : propriétés et relations thermodynamiques associées

Supraconductivité

Par Philippe Mangin, Rémi Kahn

Note: à $T=0K$

$$M = -\frac{\partial U}{\partial B} = -\frac{\partial F}{\partial B}$$

Longueurs caractéristiques ξ_0, λ_0, ℓ

Type I
Pippard $\xi_0 > \lambda_0$

Type II
London $\xi_0 < \lambda_0$

- $\xi = \xi_0$ si $\ell \rightarrow \infty$ sinon
- si $\ell \searrow$ alors
 - $\xi \searrow$
 - $\lambda \nearrow$
 - $\kappa \nearrow \nearrow$
- et

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\ell}$$

$$\lambda = \lambda_L \cdot \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_L \cdot \left(1 + \frac{\xi_0}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ℓ libre parcours moyen

En jouant sur ℓ (état cristallin, impuretés) on peut modifier les propriétés du supra

C. ANTOINE
Cours supraconductivité M2 Grands Instruments (partie I) | 2015 | PAGE 30

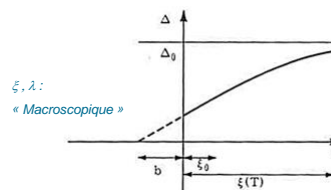
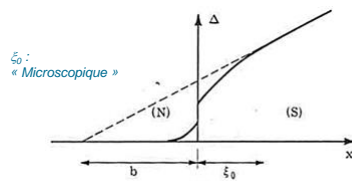
ξ_0 = limite propre, estimée par G.L, calculée précisément par BCS = longueur de cohérence. ξ_0 correspond ~ au diamètre où le paramètre d'ordre s'annule dans un vortex. ξ_0 dépend de T et diverge vers $T \sim T_c$ (comportement typique d'un phénomène critique).

$$\xi_0(T) = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(T)} \text{ et } \lambda_0(T) = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_S(T)}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 e^2 n_S(T)}} \quad (\text{calculs « exacts » à partir de BCS})$$

On assimile la taille d'une paire de Cooper à ξ_0 (à $T=0$) car c'est une longueur de cohérence (la taille des paires ne varie pas avec la température, c'est leur nombre). Mais se rappeler que ξ a été introduit à partir des variations du paramètre d'ordre au niveau des vortex

NB. \exists Corrélations fortes entre superélectrons à l'intérieur de la longueur de cohérence ξ_0

Limite sale : $\xi \sim \sqrt{\xi_0 \ell}$ et $\lambda \sim \lambda_0 \sqrt{\frac{\xi_0}{\ell}}$

Supras « sales » : on peut généraliser G.L. $\forall T$ (i. e. : à l'échelle $GL \sim \xi, \lambda \gg \xi_0$, on peut considérer que ψ, Δ varient linéairement)■ Cas très inhomogènes (e.g. $H \sim H_{C2}$, ou impuretés magnétiques...)

- $H \sim H_{C2}$ quand $H \searrow$: phase supra vient d'apparaître, Ψ est petit
 - Le terme non lin. en $|\psi|^4$ peut être négligé, il ne reste plus que des termes en $|\psi|^2$
- L'effet d'écrantage peut également être négligé (on est $\gg H_{C1}$) donc $\vec{A} \sim \vec{A}_{appl}$
 - les deux éq de GL deviennent découplées
 - La minimisation de l'nrj libre devient : $\xi^2(T)(\nabla + ik_A)^2 \psi(\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$
 - ~ éq. De Schrödinger (part masse $2m$, ch. $2e$) : sol^{ns} de la MQ marchent.

■ Pour traiter les autres cas : de proches en proches, solutions de continuités, méthodes variationnelles, etc...

- Par ex : SC « sale » : invariance translationnelle est perdue mais...
 - On fait une approximation de + (moyenne sur toutes les impuretés)
 - On traite les potentiels dus aux impuretés comme des « perturbations faibles » \Rightarrow GLAC

Supra sales près de T_c et/ou H_{C2}

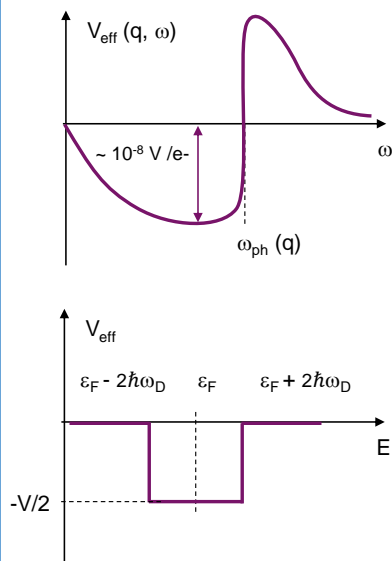
Ici ξ_0 c'est $\xi_0(T=0)$, alors que $\xi(T)$ et $\lambda(T)$ divergent pour $T \sim T_c$ et/ou $H \sim H_{C2}$ et ils sont donc très grands

A T équivalentes ($\ll T_c$), on a toujours ξ « sale » $\ll \xi_0$ « propre » : $\xi \sim \sqrt{\xi_0 \ell}$ et $\lambda \sim \lambda_0 \sqrt{\xi_0 / \ell}$

Encore une fois, beaucoup de publications s'appuient sur ce cas particulier car il correspond aux principales applications : vérifier que les approximations qu'elles proposent pour leurs calculs ont un sens physique.

Modèle principal valable pour les aimants !

(mais pas SRF !)



Interaction effective

(écranages e- et noyaux, vibrations du réseau, etc...)

■ Modèle du Jellium :

- Potentiel effectif créé par les charges en présence (ions + électrons \sim milieu continu) \equiv *interaction de Coulomb écrantée*
- Puis on regarde les effets retard dus au phonons (les ions bougent moins vite que les électrons)

■ Hamiltonien effectif $H = H_0 + V$

- H_0 = Hamiltonien du système sans interaction :
- V = Potentiel perturbatif (*Interaction avec les phonons*)

■ Seuls les électrons près du niveau de Fermi voient une interaction positive \Rightarrow états liés

■ Simplification :

- e- dont l'énergie est $\epsilon_F \pm 2\hbar\omega_D$ sont soumis à $-V/2$,

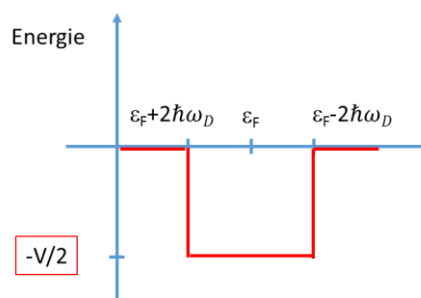
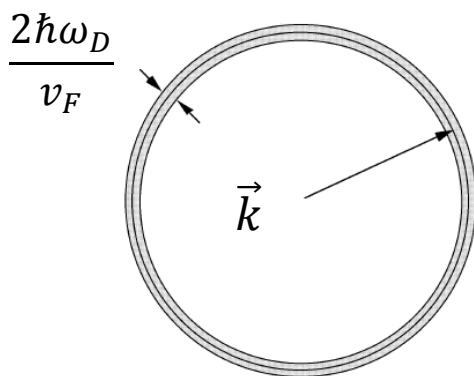
BCS : Modèle du Jellium : on commence par regarder le potentiel effectif créé par les charges en présence (ions + électrons) comme si c'était un milieu continu. Ça rassemble à 1 interaction de Coulomb écrantée (en absence de phonons).

Puis on regarde les effets retard dus au phonons (les ions bougent moins vite que les électrons) : interaction e-/phonons ; pour freq < freq phonons \Rightarrow c'est le retard (ω petit) qui permet au potentiel d'être attractif

Hamiltonien du système $H = H_0 + V$, H_0 = Hamiltonien du système sans interaction, u élt de la matrice de H_0 , v ceux de V . Décrit la création des paires de Cooper par l'opérateur $c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger$. Diagonalisation de la matrice conduit à de nouvelles fns d'onde d'nrj + basse (de Δ) que celle sans interaction

ça ressemble à une condensation de Bose-Einstein des bosons (souvent décrite comme), mais ce n'en est pas exactement une, (paires non localisées, ont toutes le même moment).

Dans un modèle simplifié, on considère que les électrons interagissent entre eux par une interaction attractive constante ($-V/2$) et limitée à une petite région de l'espace des phase autour de la surface de Fermi.



Diagonalisation de la matrice :

- => nouvelles fonctions d'onde d'nrj + basse (de Δ) que celle sans interaction
- Fonction d'onde variationnelle *Décrit la création des paires de Cooper par l'opérateur $c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger$*

$$|\psi\rangle = \prod_k (u_k + v_k c_{k,\uparrow}^\dagger \cdot c_{-k,\downarrow}^\dagger) |0\rangle$$

u_k
élts de la matrice de H_0
 v_k
élts de la matrice de V
 $c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger$
Opérateurs de création des paires de Cooper

■ Explique :

- Etat supraconducteur : condensation des paires de Cooper (~bosons)
 - Blocage de la phase
 - Le nombre de particules n'est pas fixé (principe d'incertitude)
 - Existence d'un gap $\Delta \sim \langle c_{k,\uparrow}^\dagger \cdot c_{-k,\downarrow}^\dagger \rangle$
- Même symétrie que le param. d'ordre ψ de GL..., mais pas tout à fait même valeur que Δ_{BCS}*

Dans la pratique, on utilise des formalismes + simples (London, G.L....)

NB démarche BCS s'applique aussi à bcp d'autres problèmes à n corps quantiques : e.g. gaz atomiques Ufroids, cœur d'étoiles à neutrons, appariement nucléons, quarks, brisure de symétrie Anderson-Higgs

Paires de Cooper (= 2 e- de spin et de quasi-impulsion opposées). Invariable par renversement du temps sauf si présence de champ magnétique.

Cohérence de phase = même idée de départ que GL : mais dans G.L. une seule fonction d'onde ; ne rend pas compte des échanges entre paires. BCS fonctions d'ondes individuelles identiques pour chaque paire mais système corrélé : tout est aussi à la même phase, mais tient aussi compte des interactions entre paires et des effets coopératifs, (analogie avec l'He SF : les paires de Cooper s'écoulent comme un superfluide)

(rem le système est corrélé car beaucoup de paire de Cooper se recouvrent => cohérence de phase macroscopique)

Changer l'état d'une paire => détruire l'état de l'ensemble (demanderait une énergie libre énorme : kBTc)

Près de Tc GL et BCS donnent ~la même chose, mais GL + simple à manipuler, BCS permet de justifier certaines hypothèse prises dans des modèles + simples

Voir aussi : https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_BCS

Rem : BCS = couplage faibles. A.N. pas très bonnes pour supra couplage fort comme Pb ou Hg (on s'éloigne de la relation $2\Delta(0) \approx 3.5 kBTc$), ne marche pas non plus pour les supra HTC et les pnictures

COMPOURTEMENT RÉSISTIF EN AC/RF

Inertie des paires de Cooper : écranage du champ imparfait dans λ

- Bande de conduction : e⁻ normaux accélérés et dissipent e⁻ normaux : e.g. paires thermiquement cassées à $T > 0\text{ K}$
- Rappel : métal normal dans AC

$$Z_n = \frac{1-i}{\sigma_n \delta} = \left\{ 1-i \right\} \frac{\rho_n}{\delta} \quad \begin{matrix} \rho_n = 1/\rho_0 = \text{conductivité DC @ } T \\ \delta = \text{profondeur de peau (skin depth)} \end{matrix}$$

- Extension aux supras :

- Modèle à 2 fluides (London) : $\sigma_1 + i\sigma_2$ à la place de σ_n
- BCS \Rightarrow on peut évaluer σ_1/σ_n et σ_2/σ_n (intégrales de Mattis et Bardeen)
- Elle peuvent être calculées numériquement

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_n} \sim \left[\frac{2\Delta}{K_B T} \right] e^{-\Delta/K_B T} \ln \frac{\Delta}{\hbar \omega} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_n} \sim \frac{\pi \Delta}{\omega} \tanh \frac{\Delta}{2K_B T}$$

$\text{pour } T < T_c/2$

$$\frac{R_s}{R_n} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_n}}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_n} \right)^{3/2}}$$

- Résistance de surface d'un supra en RF

$$R_{BCS} = A(\lambda_L^4, \xi_F, \ell, \sqrt{\rho_n}) \frac{\omega^2}{T} e^{-\Delta/kT}$$

- Il vaut mieux être à $T \ll T_c$
- Il vaut mieux être « métallique » à l'état normal
- Il vaut mieux être « sale » (non + compliqué que ça l)
- Profondeur de peau devient $\lambda \ll \delta$

Valable seulement à bas champ, au delà, corrections nécessaires

Mesures montrent qu'effectivement la résistance de surface de surface dépend de l.p.m.

Un champ électrique apparaît à l'intérieur du supraconducteur lorsque la valeur du courant change (et vice-versa). L'augmentation de courant n'est pas instantanée à cause de l'inertie de masse des porteurs de charge supraconducteurs ; l'écranage est donc imparfait et les électrons normaux vont subir une force et se déplacer de façon dissipative. En mode dynamique (AC et/ou pulsé), le courant est transporté par les deux types de porteurs de charge et le processus est dissipatif.

Les propriétés électriques d'un supraconducteur en AC peuvent se représenter comme une inductance parfaite en parallèle avec une résistance.

Electrons normaux à $0 < T < T_c$: il s'agit des e⁻ normaux près du niveau de Fermi dans la bande de conduction, donc des paires dissociées principalement par activation thermique. D'autre effets peuvent dissocier les paires : fort courant/fort champ (c'est le cas en SRF), présence d'impuretés magnétiques,

Rem : pour décrire ces paires « cassées » on parle parfois de quasiparticules (mais notion assez floue).

Remarque : Il existe une fréquence limite en AC ($\sim 100\text{ GHz}$) où les photons produits par les accélérations des électrons (Bremsstrahlung) peuvent exciter les supers électrons et les rendre normaux (c'est lié à la bande d'absorption en IR ; revoir Transparent 20).

Fin de la
première
partie

Supraconductivité :

- Phénomène quantique observable à échelle macroscopique
- Pas de théorie complète
 - Bcp de développements particuliers (phénoménologiques)
 - Attentions aux limites de validité
 - Contradictions ds littérature
- Théo. parfois très loin du monde réel
- Dans la pratique tous les supra utilisés sont de type II
- A l'état mixte... sauf pour les application SRF accélérateurs

NB il existe des applications RF en électronique supra...@ état mixte