

DAPNIA-03-173

08/2003

**Théorie quantique des champs et transitions de phase:  
universalité et groupe de renormalisation**

J. ZINN-JUSTIN

*Cours de DEA de Mathématiques  
Université Paris VII – Denis Diderot*



**THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS ET TRANSITIONS DE PHASE:  
UNIVERSALITE ET GROUPE DE RENORMALISATION**

J. ZINN-JUSTIN\*

*DAPNIA, \*\* CEA/Saclay,  
F91191 Gif-sur-Yvette cédex, FRANCE*

*et*

*Institut de Mathématiques de Jussieu-Chevaleret,  
Université de Paris VII*

**RÉSUMÉ**

La théorie quantique des champs est à la base d'une partie notable des développements théoriques en physique de la deuxième moitié du vingtième siècle. Elle a permis la construction d'un modèle qui décrit toutes les interactions fondamentales à l'échelle microscopique en dehors de la gravitation. Elle a permis de comprendre les propriétés singulières d'une large classe de transitions de phase de la physique macroscopique au voisinage de la transition.

Cependant, à la différence de la mécanique newtonienne ou quantique non relativiste, la théorie quantique des champs dans sa formulation la plus directe pose problème à cause de l'apparition d'infinis dans le calcul des observables physiques. Le problème des infinis a été résolu de façon empirique par une méthode appelée renormalisation. Cette méthode n'a trouvé une interprétation satisfaisante que dans le cadre du groupe de renormalisation. Le problème des infinis a ainsi été relié à un phénomène très surprenant, le non-découplage des différentes échelles de physique.

C'est dans le cadre de la physique statistique et des transitions de phase continues que la discussion de ces problèmes est la plus simple. Ces notes tentent donc d'introduire de façon élémentaire les notions de limite continue et d'universalité dans les systèmes stochastiques à un grand nombre de degrés de liberté. Nous insisterons sur l'importance des mesures gaussiennes et leurs relations avec l'approximation de champ moyen, et la théorie de Landau. Nous

---

\*email: zinn@spht.saclay cea.fr

\*\*Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière du Commissariat à l'Energie Atomique.

montrerons que les approximations quasi-gaussiennes ou de champ moyen ne peuvent pas décrire correctement les transitions de phase. Nous attribuerons cette difficulté au couplage d'échelles de physique très différentes. Pour analyser ce problème un concept nouveau est nécessaire: le groupe de renormalisation, dont les points fixes permettent de comprendre l'universalité au-delà du champ moyen.

Les arguments de groupe de renormalisation conduisent alors à l'idée que les corrélations à grande distance près de la température de transition peuvent être décrites par une théorie statistique des champs, formellement une théorie quantique des champs en temps imaginaire.

Après une courte introduction, nous exhiberons donc différentes formes des équations de groupe de renormalisation dans le cadre. Nous les résoudre dans différentes limites, près des dimensions 4 et 2, pour des champs à grand nombre de composantes.

Enfin nous étudierons une réalisation particulière du groupe de renormalisation, dite groupe de renormalisation fonctionnel (aussi appelé exact).

## Table des matières

1 Théorie Quantique des Champs: Renormalisation et Groupe de Renormalisation . . . . .	7
1.1 L'Electrodynamique Quantique: une Théorie Quantique des Champs . . . . .	10
1.2 Les premiers calculs et le problème des infinis . . . . .	11
1.3 Méthode de renormalisation . . . . .	14
1.4 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation . . . . .	16
1.5 Le triomphe de la théorie quantique des champs: Le Modèle Standard . . . . .	17
1.6 Phénomènes critiques: D'autres infinis . . . . .	19
1.7 Le groupe de renormalisation de Kadanoff–Wilson . . . . .	22
1.8 Théories quantiques des champs effectives . . . . .	24
2 Valeurs moyennes gaussiennes. Méthode du col . . . . .	26
2.1 Fonctions génératrices . . . . .	26
2.2 Valeurs moyennes gaussiennes. Théorème de Wick . . . . .	27
2.3 Mesure gaussienne perturbée. Contributions connexes . . . . .	32
2.4 Valeurs moyennes. Fonction génératrice. Cumulants . . . . .	34
2.5 Méthode du col . . . . .	37
2.6 Méthode du col à plusieurs variables. Application aux fonctions génératrices . . . . .	42
Exercices . . . . .	44
3 Universalité et limite continue . . . . .	49
3.1 Théorème de la limite centrale des probabilités . . . . .	49
3.2 Universalité et points fixes de transformations . . . . .	57
3.3 Marche au hasard et mouvement brownien . . . . .	61
3.4 Mouvement brownien et intégrale de chemin . . . . .	72
Exercices . . . . .	75
4 Mécanique statistique classique à une dimension . . . . .	78
4.1 Interactions de proches voisins. Matrice de transfert . . . . .	79
4.2 Fonction de partition. Fonctions de corrélation . . . . .	82
4.3 Limite thermodynamique . . . . .	83
4.4 Fonctions connexes et propriété d'amas . . . . .	87
4.5 Exemples . . . . .	88
4.6 Le modèle gaussien . . . . .	89
4.7 Modèle gaussien: limite continue . . . . .	96
4.8 Généralisation . . . . .	99
Exercices . . . . .	101
5 Limite continue et intégrale de chemin . . . . .	105
5.1 Intégrale de chemin gaussienne . . . . .	105
5.2 Corrélations gaussiennes. Théorème de Wick . . . . .	111
5.3 Mesure gaussienne perturbée . . . . .	112
5.4 Calculs perturbatifs: Exemples . . . . .	114
Exercices . . . . .	116
6 Systèmes ferromagnétiques. Corrélations . . . . .	117

6.1	Systèmes ferromagnétiques: définition	117
6.2	Fonctions de corrélation	121
6.3	Transformation de Legendre et fonctions de vertex	124
6.4	Transformation de Legendre et méthode du col	128
6.5	Transformation de Legendre: fonction à quatre points	129
	Exercices	132
7	Transitions de phase: Généralités et exemples	133
7.1	Température infinie ou spins indépendants	136
7.2	Transition de phase en dimension infinie	139
7.3	Universalité en champ moyen	145
7.4	Transformations, points fixes et universalité	147
7.5	Interactions de portée finie: le modèle d'Ising	149
7.6	Symétries continues	155
	Exercices	158
8	Approximation quasi-gaussienne: universalité et dimension critique	161
8.1	Interactions à deux spins de courte portée	163
8.2	Le modèle gaussien: la fonction à deux points	166
8.3	Modèle gaussien et marche au hasard	170
8.4	Modèle gaussien et intégrale de champ	172
8.5	Approximation quasi-gaussienne	177
8.6	La fonction à deux points: Universalité	178
8.7	Approximation quasi-gaussienne et théorie de Landau	181
8.8	Symétries continues et modes de Goldstone	182
8.9	Corrections à l'approximation quasi-gaussienne	187
8.10	Approximation de champ moyen et corrections	191
8.11	Points tricritiques	195
	Exercices	196
9	Groupe de renormalisation: Formulation générale	198
9.1	Hamiltonien de Landau général	199
9.2	Le groupe de renormalisation: Idée générale	202
9.3	Flots des hamiltoniens: points fixes et stabilité	206
9.4	Le point fixe gaussien	210
9.5	Vecteurs propres: analyse générale	213
9.6	Au delà du point fixe gaussien: le développement en $\varepsilon$	216
9.7	Valeurs propres et dimensions des polynômes locaux	220
10	Groupe de renormalisation perturbatif: calculs explicites	223
10.1	Hamiltonien critique et développement perturbatif	223
10.2	Détermination du point fixe	225
10.3	Le domaine critique	231
10.4	Modèle avec symétrie $O(N)$	235
10.5	Groupe de renormalisation près de la dimension 4	237
10.6	Quantités universelles: Quelques résultats numériques	240
11	Paramètre d'ordre à $N$ composantes	244

11.1 Anisotropie cubique . . . . .	244
11.2 Etude générale: Groupe de renormalisation . . . . .	248
11.3 Flots de gradients: Points fixes et stabilité . . . . .	252
11.4 Exercice: modèle général à deux paramètres . . . . .	258
12 Calculs perturbatifs en théorie statistique des champs . . . . .	262
12.1 Fonctionnelles génératrices de fonctions de corrélation . . . . .	263
12.2 La théorie des champs gaussienne. Théorème de Wick . . . . .	264
12.3 Développement perturbatif . . . . .	267
12.4 Diagrammes de Feynman et fonctions génératrices . . . . .	268
12.5 Développement en nombre de boucles . . . . .	275
12.6 Prolongement et régularisation dimensionnels . . . . .	278
13 Théorie des champs près de la dimension 4 . . . . .	286
13.1 Hamiltonien effectif . . . . .	286
13.2 Théorie des champs: renormalisation . . . . .	288
13.3 Les équations du groupe de renormalisation . . . . .	292
13.4 Solution des EGR: le développement en $\varepsilon$ . . . . .	295
13.5 EGR et interaction renormalisée . . . . .	301
13.6 Lois d'échelles dans le domaine critique au-dessus de $T_c$ . . . . .	302
14 La théorie $(\phi^2)^2$ avec symétrie $O(N)$ dans la limite $N \rightarrow \infty$ . . . . .	307
14.1 Préliminaires algébriques . . . . .	307
14.2 Intégrale sur le champ $\phi$ : le déterminant . . . . .	309
14.3 Limite $N \rightarrow \infty$ : domaine critique . . . . .	311
14.4 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ pour $N \rightarrow \infty$ . . . . .	313
14.5 Partie singulière de l'énergie libre et forme d'échelle de l'équation d'état . . . . .	316
14.6 Les fonctions à deux points $\langle \lambda \lambda \rangle$ and $\langle \phi^2 \phi^2 \rangle$ . . . . .	319
14.7 Fonctions de GR et corrections dominantes aux lois d'échelles . . . . .	321
14.8 Le développement en $1/N$ . . . . .	324
14.9 Le modèle $\sigma$ non linéaire . . . . .	325
14.10 L'exposant $\eta$ à l'ordre $1/N$ . . . . .	327
15 Le modèle $\sigma$ non linéaire . . . . .	329
15.1 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ à basse température . . . . .	329
15.2 Le modèle $\sigma$ non linéaire . . . . .	331
15.3 Théorie des perturbations. Comptage de puissances . . . . .	333
15.4 Régularisations perturbatives . . . . .	335
15.5 Régularisation par le réseau et mécanique statistique . . . . .	336
15.6 Divergences infrarouges (IR) . . . . .	338
15.7 Le modèle $\sigma$ non linéaire: équations du groupe de renormalisation . . . . .	339
15.8 Solution des EGR. Points fixes . . . . .	342
15.9 Forme d'échelle des fonctions de corrélation. Domaine critique . . . . .	345
15.10 Résultats au-delà d'une boucle . . . . .	347
15.11 Dimension 2 . . . . .	349
16 Groupe de renormalisation fonctionnel . . . . .	352
16.1 Variation de l'hamiltonien et invariance de la fonction de partition . . . . .	353

16.2	Intégration partielle sur les modes de grande impulsion et EGR . . .	359
16.3	Solution perturbative: Théorie $\phi^4$ . . . . .	364
16.4	Groupe de renormalisation: Forme standard . . . . .	368
16.5	Dimension 4 . . . . .	370
16.6	Equation de point fixe: Développement en $\varepsilon$ . . . . .	375
16.7	Stabilité locale du point fixe . . . . .	377
	Notes Bibliographiques . . . . .	383
	Appendices. . . . .	386
A1	Compléments . . . . .	386
A1.1	Fonctions $\Gamma$ , $\psi$ , $\zeta$ : quelques identités utiles . . . . .	386
A1.2	Modèle gaussien . . . . .	387
A1.3	Transformation de Fourier: décroissance et régularité . . . . .	388
A1.4	Matrice de transfert et formalisme quantique . . . . .	394
A1.5	Paramètre d'ordre et propriété d'amas . . . . .	397
A1.6	Dynamiques stochastiques et transitions de phase . . . . .	399
A1.7	Développement en $1/N$ et diagrammes . . . . .	400
A1.8	Modèle $\sigma$ non-linéaire: Régularisation dimensionnelle . . . . .	402
A1.9	Groupe de renormalisation fonctionnel et équations de champs . . .	404

## Chapitre 1

# Théorie Quantique des Champs: Renormalisation et Groupe de Renormalisation

Sans une compréhension minimale de la théorie quantique ou statistique (reliées par le passage au temps imaginaire)) des champs, une partie notable de la physique de la deuxième moitié du vingtième siècle demeure incompréhensible.

En effet, la théorie des champs, dans des incarnations variées, décrit toute la physique des interactions fondamentales à l'échelle microscopique, les propriétés singulières des transitions de phase (liquide-vapeur, ferromagnétiques, superfluide, mélanges binaires...) au voisinage du point de transition, les propriétés des gaz quantiques dilués au delà du modèle de la condensation de Bose-Einstein, les propriétés statistiques des longues chaînes polymériques (comme de la marche au hasard avec auto évitement sur réseau), de la percolation...

En fait, le formalisme de la théorie quantique des champs reste pour l'instant le formalisme le plus fécond pour étudier les problèmes en physique où un nombre très grand de degrés de liberté interagissent fortement.

Cependant dès l'origine, la théorie quantique des champs a été confrontée à un problème inattendu, le problème des infinis. La plupart des calculs de processus physiques conduisaient à des résultats infinis. Une recette empirique, la *renormalisation*, a finalement été découverte qui permettait de déduire d'expressions divergentes des prédictions finies. Elle n'aurait guère été convaincante si les prédictions n'avaient pas été confirmées avec une précision croissante par l'expérience. Un concept nouveau, le *groupe de renormalisation* issu de la théorie quantique des champs, mais dont la signification n'a été complètement appréciée que dans le cadre plus général des transitions de phase, a permis, plus tard, de donner une interprétation satisfaisante à l'apparition de théories quantiques des champs renormalisables et au processus de renormalisation.

Ce premier chapitre essaie de présenter un bref rappel historique des idées à la base de la théorie quantique des champs, des notions de renormalisation et groupe de renormalisation telles que nous les comprenons aujourd'hui. Cette histoire a deux aspects, l'un très directement lié à la théorie de Interactions Fondamentales qui décrit les phénomènes physiques à l'échelle microscopique, l'autre à la

compréhension des transitions de phase de la physique macroscopique et leurs propriétés d'universalité. Que deux domaines de la physique aussi différents aient nécessité le développement des mêmes concepts est extrêmement surprenant, et c'est un des charmes de l'étude de la physique.

À la fin des années vingt, après la découverte de l'équation de Dirac, tout était en place pour la construction d'une théorie quantique et relativiste, permettant une description précise des interactions électromagnétiques entre protons et électrons. Cette théorie était une théorie des champs et non une théorie de particules individualisées, car la découverte que le champ électromagnétique pouvait se manifester sous forme de particules (les photons) suggérait que de façon plus générale toutes les particules étaient des manifestations de l'existence de champs.

Une des réponses attendues de cette Théorie Quantique des Champs, appelée électrodynamique Quantique ou QED, était la solution du puzzle de la contribution coulombienne infinie à la masse de l'électron.

Les calculs montrèrent, cependant, que des divergences, dues à la nature ponctuelle de l'électron, subsistaient, quoique moins sévères. Elles acquièrent même une signification beaucoup plus fondamentale, paraissant une conséquence inévitable de ce caractère ponctuel et de la conservation des probabilités. Il apparut également qu'il était très difficile de construire une théorie relativiste cohérente de particules non ponctuelles.

Comme conséquence d'importants progrès théoriques confortés par un apport expérimental essentiel, une procédure empirique, appelée *renormalisation*, fut enfin découverte qui conduisait à des résultats finis: bien que toutes les observables physiques soient données en termes d'expressions contenant des infinités, il est possible de trouver des relations entre ces observables dans lesquelles les infinis se compensent.

Cette méthode permit des calculs de précision croissante pour les processus physiques relevant de l'Electrodynamique Quantique. Le concept de théorie quantique des champs renormalisable se révéla même si fructueux qu'il put, plus tard, être appliqué à toutes les interactions fondamentales, sauf la gravitation: Le Modèle Standard des Interactions Faibles, Electromagnétiques et Fortes a maintenant survécu (à des modifications mineures récentes près) avec succès à plus de 25 ans de confrontation avec l'expérience.

Cependant la procédure de renormalisation elle-même est restée longtemps une énigme pour nombre de théoriciens. Un ensemble convergent d'idées, venant à la fois de la physique microscopique et de la physique de transitions de phase dans les systèmes macroscopiques (comme la transition liquide-vapeur), qui peuvent être regroupées sous le nom général de *groupe de renormalisation*, a finalement conduit à une image nouvelle et cohérente. À cause du couplage essentiel de la physique à des échelles très différentes, les théories des champs *renormalisables* ont une cohérence limitée à la physique des basses énergies (ou de longue distance). On parle de *théories effectives*, approximations d'une théorie plus

fondamentale mais à ce jour inconnue. C'est cette évolution des idées que nous voulons décrire brièvement ici.

### Quelques dates repère utiles:

1925– Heisenberg jette les bases de la Mécanique Quantique, sous la forme de la mécanique des matrices.

1926– Schrödinger publie sa célèbre équation qui base la Mécanique Quantique sur la solution d'une équation d'onde non-relativiste. Comme la théorie de la relativité était déjà bien établie quand la mécanique quantique fut découverte cela peut surprendre. En fait, pour des raisons accidentelles, le spectre de l'atome d'hydrogène est plus mal reproduit par une équation d'onde relativiste sans spin\*, l'équation de Klein–Gordon (1926), que par l'équation de Schrödinger non-relativiste.

1928– Dirac découvre sa fameuse équation, une équation d'onde relativiste tenant compte du spin  $1/2$  de l'électron, qui conduit à des résultats en excellent accord avec le spectre de l'atome d'hydrogène, et ceci ouvre la voie à une théorie quantique relativiste. Dans les deux ans qui suivent, Heisenberg et Pauli établissent, dans une série d'articles, les principes généraux de la *théorie quantique des champs*.

1934– Premier calcul correct d'Electrodynamique Quantique (Weisskopf) et confirmation de l'existence de divergences, appelées ultraviolettes.

1937– Landau publie sa théorie générale des transitions de phase.

1947– Mesure du déplacement de Lamb (ou Lambshift) et accord avec les prédictions de l'Electrodynamique Quantique après compensation des infinis.

1947–1949 Développement d'une méthode empirique générale pour éliminer les divergences appelée *Renormalisation*.

1949– Solution exacte du modèle d'Ising en dimension deux par Onsager.

1954–1956 Découverte d'une propriété formelle de la Théorie Quantique des Champs liée à l'existence d'un *groupe de renormalisation* dont la signification profonde est mal comprise.

1967–1975 Le Modèle Standard, une théorie quantique des champs renormalisable basée sur les notions de symétrie de jauge non-abélienne et de symétrie brisée spontanément, est construite qui décrit de façon précise toutes les interactions fondamentales, sauf la gravitation.

1971–1972 Après un travail précurseur de Kadanoff, Wilson, Wegner... développent un concept plus général de groupe de renormalisation qui inclut celui de la théorie des champs dans certaines limites, et qui explique les propriétés d'universalité des transitions de phase continues (liquide–vapeur, Hélium superfluide, systèmes ferromagnétiques) ou des chemins aléatoires auto-évitant.

---

\* moment angulaire intrinsèque des particules, prend des valeurs demi-entières (fermions) ou entières (bosons) en unité  $\hbar$ .

## 1.1 L'Electrodynamique Quantique: une Théorie Quantique des Champs

L'Electrodynamique Quantique (QED) décrit, dans un cadre quantique et relativiste, les interactions entre toutes les particules électriquement chargées et le champ électromagnétique. L'électrodynamique quantique n'est pas une théorie de particules individualisées, comme la mécanique quantique non-relativiste, mais une *Théorie Quantique des Champs*. C'est en effet aussi une extension quantique d'une théorie des champs classique relativiste: l'électromagnétisme dans laquelle les variables dynamiques sont des champs, les champs électrique et magnétique  $E(x), B(x)$ . Par ailleurs, la découverte qu'au champ électromagnétique est associée une particule de masse nulle et de spin un, le photon, a conduit à postuler que toutes les particules sont également des manifestations de champs.

Or une telle théorie se distingue radicalement d'une théorie de particules en ce sens que les champs ont un nombre *infini de degrés de liberté*. En effet un point matériel de la mécanique classique a trois degrés de liberté; il est défini par ses trois coordonnées cartésiennes. Par contraste, un champ est défini par sa valeur en chaque point d'espace, ce qui représente un nombre infini de données. La non conservation du nombre de particules dans les collisions à haute énergie est une manifestation de cette propriété.

Par ailleurs, les théories des champs qui apparaissent dans la physique microscopique ont une propriété de *localité*, une notion qui généralise la notion de particule ponctuelle. Elles n'ont pas de structure de courte distance.

Le nombre infini de degrés de liberté et la localité expliquent que la théorie quantique des champs puisse avoir des propriétés quelque peu "exotiques".

*Symétries de jauge.* Dans ce qui suit il sera beaucoup question de symétrie de jauge et de théories de jauge comme l'Electrodynamique Quantique. À la différence d'une symétrie ordinaire qui correspond à faire une transformation globale sur toutes les variables dynamiques, une symétrie de jauge correspondant à des transformations indépendantes en tout point d'espace. Par exemple, en mécanique quantique non-relativiste, la physique ne change pas si l'on multiplie la fonction d'onde par une phase  $e^{i\theta}$  (correspondant à une transformation du groupe abélien  $U(1)$ ). Dans le cas d'une particule chargée, en présence d'un champ magnétique, on trouve une symétrie de jauge: on peut changer la phase de la fonction d'onde en chaque point d'espace indépendamment:

$$\psi(x) \mapsto e^{i\theta(x)} \psi(x).$$

La symétrie de jauge est un principe dynamique qui engendre des interactions, au lieu simplement de les relier entre elles comme une symétrie ordinaire ou globale. Il force à introduire un potentiel vecteur couplé de façon universelle à toutes les particules chargées. À ce potentiel vecteur est associé en théorie relativiste une particule de spin un dite de jauge, le photon dans le cas de l'électrodynamique quantique.

*Unités en théorie quantique relativiste.* Les phénomènes que nous décrivons ci-dessous apparaissent dans une limite relativiste et très quantique. Il est alors physiquement raisonnable de prendre la vitesse de la lumière  $c$  et la constante de Planck  $\hbar$  comme unités. Ainsi dans une théorie relativiste les échelles de masse  $M$ , impulsion (ou quantité de mouvement)  $p$  et énergie  $E$  peuvent être reliées à travers la vitesse de la lumière  $c$ :

$$E = pc = Mc^2,$$

et donc exprimées dans une unité commune comme l'électron-volt (eV). Aussi parle-t-on de façon équivalente de grande impulsion ou grande énergie.

Par ailleurs, dans une théorie quantique il est possible de relier l'unité d'impulsion  $p$  (ou quantité de mouvement) à l'unité de distance  $\ell$  par la constante de Planck

$$p\ell = \hbar.$$

Ainsi les expériences faites à haute énergie sondent-elles les propriétés de la matière à courte distance.

## 1.2 Les premiers calculs et le problème des infinis

Peu après les travaux de Heisenberg et Pauli, Oppenheimer et Waller (1930) publièrent indépendamment le calcul de l'effet du champ de photons sur la propagation de l'électron, au premier ordre dans la constante de structure fine, une constante *sans dimension* qui caractérise l'intensité de la force électromagnétique,

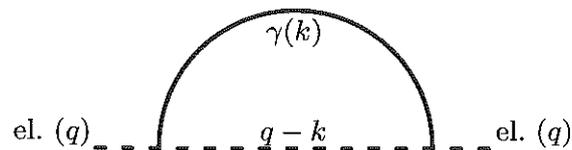
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx 1/137, \quad (1.1)$$

où  $e$  est la charge de l'électron définie à partir du potentiel de Coulomb écrit  $e^2/R$ . Comme cette constante est numériquement petite (une phrase qui a un sens car c'est une quantité sans dimension) un calcul au premier ordre est significatif.

Une motivation pour un tel calcul était de déterminer les corrections à la masse de l'électron en électrodynamique Quantique. En théorie relativiste la masse d'une particule est proportionnelle à son énergie au repos. Elle inclut des termes d'énergie potentielle. Or il était bien connu que le "modèle classique" de l'électron comme une sphère chargée de rayon  $R$  conduisait à un résultat qui tendait vers l'infini comme  $e^2/R$  quand on prenait la limite de rayon nul. Il était espéré que la mécanique quantique, qui est une théorie de fonctions d'onde, allait guérir ce problème engendré par la nature ponctuelle de l'électron.

Toutefois, les premiers résultats se révélèrent tout à fait décevants. Non seulement la contribution à la masse était infinie, mais elle divergeait plus fortement que dans le modèle classique: introduisant une borne  $\Lambda c^2$  sur l'énergie du photon, (ceci est équivalent à modifier la théorie à courte distance  $R = \hbar/c\Lambda$ ) on

trouvait une divergence quadratique  $\Lambda^2 \propto 1/R^2$ . Mais il fut bientôt découvert que ces résultats étaient erronés. En effet les calculs perturbatifs avec les outils de l'époque étaient laborieux. On utilisait des méthodes de calcul non explicitement relativiste; le rôle des "trous" de la théorie de Dirac (prédits être des anti-électrons ou positrons en 1931 et expérimentalement découverts en 1932) était peu clair, et l'invariance de jauge créait un problème supplémentaire. Il fallut attendre 1934 pour que soit publié le résultat correct dans un article de Weisskopf (non sans qu'une dernière erreur ait été remarquée par Furry). Le processus physique responsable de cette contribution était un processus typique de la théorie quantique des champs, l'émission et la réabsorption par un électron d'énergie-impulsion (ou quadri-impulsion)  $q$  d'un photon virtuel ( $\gamma$  sur la figure) de quadri-impulsion  $k$ , comme représenté par le diagramme de Feynman de la figure 1 (une représentation imaginée par Feynman des années plus tard).



**FIG. 1** – Contribution à la propagation de l'électron: le photon est en train plein, l'électron en pointillé.

Le résultat était à la fois plus meilleur et profondément inquiétant. La contribution à la masse était toujours infinie, quoique la divergence quadratique ait été remplacée par une divergence logarithmique beaucoup moins sévère:

$$\delta m_{\text{QED}} = -3 \frac{\alpha}{2\pi} m \ln(mRc/\hbar),$$

où  $m$  est la masse de l'électron.

Ainsi la théorie quantique des champs (TQC) conduisait à un résultat moins singulier que le modèle classique. Néanmoins le problème des infinis n'était pas résolu et aucune modification simple ne pouvait être trouvée pour sauver la théorie des champs.

En effet, ces divergences sont dans une large mesure une conséquence directe de la localité (les particules sont ponctuelles, avec interactions de contact) et de l'unitarité (conservation des probabilités). Elles proviennent de la nécessité de sommer sur les photons virtuels de quadri-impulsion arbitrairement élevée (à cause de l'absence de structure à courte distance). De plus à cause de la conservation des probabilités, tous les processus contribuent de façon additive.

Le problème était donc très profond et touchait à l'essence même de la théorie. La QED était une théorie incomplète, mais il semblait difficile de la modifier sans sacrifier quelque principe physique fondamental. Il était possible de rendre la théorie finie en abandonnant l'unitarité, et donc la conservation des probabilités (comme ce fut proposé par Dirac (1942)), mais les conséquences physiques étaient

difficilement acceptables. Ce que nous appelons maintenant régularisation de Pauli–Villars, une procédure *ad hoc* et temporaire pour rendre la théorie finie avant *renormalisation* (voir plus loin), est de cette nature. Il paraissait encore plus difficile de l’incorporer dans une extension relativiste non-locale (ce qui correspondrait à donner une structure interne aux particules), quoiqu’en 1938 Heisenberg ait proposé l’introduction d’une longueur fondamentale. En fait il a fallu attendre les années 80 pour voir apparaître des candidats possibles sous le nom de théories de super-cordes.

La crise était si sérieuse que Wheeler (1937) et Heisenberg (1943) proposèrent d’abandonner complètement la théorie quantique des champs au profit d’une théorie d’observables physiques, en fait les données de collision entre particules: la théorie de la matrice  $S$ , une idée qui eut son heure de gloire dans les années soixante en théorie des Interactions Fortes (celles qui engendrent les forces nucléaires).

*Les infinis et le problème des bosons scalaires chargés.* Dans le même temps des physiciens plus pragmatiques calculaient d’autres quantités physiques, explorant la forme et la nature de ces infinis. Je veux juste mentionner ici un autre article important de Weisskopf (1939) dans lequel l’auteur montre que les divergences logarithmiques persistent à tous les ordres de la théorie des perturbations, c’est à dire du développement en puissances de  $\alpha$ . Mais il remarque aussi que dans le cas de particules de spin nul (ou scalaires) chargées la situation est bien pire: les divergences sont quadratiques ce qui est désastreux. En effet, si les divergences sont supprimées par un facteur de coupure (ou cut-off)  $\Lambda = \hbar/Rc$  lié à quelque nouvelle physique et que  $\Lambda/m$  n’est pas trop grand (et pour quelque temps 100 MeV qui est la portée des forces nucléaires semblait un candidat raisonnable), alors le produit  $\alpha \ln(\Lambda/m)$  reste petit: une divergence logarithmique produit des corrections incalculables, mais néanmoins petites, ce qui n’est plus le cas pour des divergences quadratiques. Ceci pouvait être pris comme une indication que des particules scalaires chargées ne pouvaient être considérées comme fondamentales.

Notons que ce problème est plus que jamais d’actualité puisque le Modèle Standard qui décrit avec précision tous les processus physiques entre particules jusqu’aux énergies les plus élevées accessibles dans les accélérateurs, contient une particule scalaire, la particule de Higgs, et est maintenant appelé le problème de *l’ajustage fin* ou de *la hiérarchie*. En effet pour compenser les infinis il faut ajuster un paramètre de la théorie initiale avec une précision liée au rapport de la masse de la particule scalaire et du cut-off, ce qui n’est pas naturel. Ce problème est donc devenu particulièrement sévère depuis que nous avons pris conscience que des échelles de masse aussi grande que  $10^{15}$  (masse d’unification) ou  $10^{19}$  GeV (masse de Planck) peuvent être impliquées. Il est une des motivations principales pour l’introduction de la *Supersymétrie* (une symétrie qui, de façon très surprenante, relie des bosons à des fermions). La découverte expérimentale d’une telle particule et la compréhension de ses propriétés est un des enjeux majeurs de la nouvelle génération d’accélérateurs comme le LHC en construction

au CERN.

### 1.3 Méthode de renormalisation

Calculant nombre de quantités physiques différentes, quelques physiciens ne manquèrent pas de remarquer que bien que beaucoup de quantités étaient divergentes, c'étaient toujours les mêmes termes divergents qui intervenaient. On pouvait donc trouver des combinaisons qui étaient finies (Weisskopf 1936). Toutefois, la signification physique d'une telle propriété était totalement obscure. En réalité, en l'absence de toute compréhension profonde du problème, peu de progrès était possible.

Chaque fois que les physiciens sont confrontés à de profondes difficultés conceptuelles, la réponse ne peut venir que de l'expérience.

Ainsi, en 1947 Lamb et Retherford mesurèrent avec précision la séparation entre les niveaux  $2s_{1/2}2p_{1/2}$  de l'atome d'hydrogène, tandis que le groupe de Rabi à Columbia mesurait le moment magnétique anormal de l'électron. De façon assez remarquable il fut possible d'organiser le calcul du déplacement de Lamb de telle sorte que les infinis se compensent (premier calcul approché par Bethe) et le résultat se trouva être en très bon accord avec l'expérience. Peu de temps après Schwinger obtint le terme dominant du moment magnétique anormal de l'électron.

Ces résultats entraînèrent d'extraordinaires développements théoriques (un travail antérieur de Kramers sur la renormalisation de masse de l'électron classique étendu se révéla important pour généraliser l'idée de compensation des infinis par soustraction, à l'idée de renormalisation), et en 1949 Dyson, s'appuyant sur les travaux de Feynman, Schwinger et Tomonaga, donna la première preuve de la compensation des infinis à tous les ordres de la théorie des perturbations. Ce qui fut alors baptisée *théorie de la renormalisation* conduisait en QED à des résultats finis pour toutes les observables physiques.

L'idée est la suivante: on commence avec une théorie appelée *nue* qui dépend de paramètres comme la *masse nue*  $m_0$  et la *charge nue*  $e_0$  de l'électron (les masses et charges en l'absence d'interactions), ou ce qui est équivalent la constante de structure fine nue  $\alpha_0 = e_0^2/4\pi\hbar c$ . On introduit, de plus, une échelle de coupure des grandes impulsions  $c\Lambda$ , appelée *cut-off* (ce qui correspond à modifier de façon quelque peu arbitraire et non-physique la théorie à une très courte distance d'ordre  $\hbar/c\Lambda$ ). On calcule alors les valeurs physiques (c'est à dire celles qu'on mesure), appelées *renormalisées*, des mêmes quantités (comme la charge observée  $e$ , et donc la constante de structure fine  $\alpha$ , et la masse physique  $m$ ) en fonction des paramètres nus et du cut-off. On inverse ces relations, exprimant maintenant les quantités nues en fonction des quantités renormalisées. Dans cette substitution on échange par exemple la constante nue  $\alpha_0$  avec la constante

physique ou renormalisée  $\alpha$  comme paramètre de développement:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha + \beta_2 \alpha^2 \ln(\Lambda/m) + \dots, \\ m_0 &= m + \gamma_1 m \alpha \ln(\Lambda/m) + \dots\end{aligned}$$

On exprime ensuite toute autre observable, initialement calculée en termes des paramètres nus, en termes de ces quantités physiques ou renormalisées. De façon très surprenante, quand on prend la limite du cut-off  $\Lambda$  infini, toutes les observables physiques ont alors une limite finie.

Il faut reconnaître qu'il semble assez miraculeux qu'une telle procédure puisse réussir. Elle a pourtant permis et permet toujours en QED des calculs de précision croissante, donc l'accord avec l'expérience démontre de façon absolument convaincante que la TQC est le formalisme adéquat pour décrire l'électrodynamique au niveau quantique.

De plus la théorie de la renormalisation conduisit au très important concept de *théories renormalisables*. Seul un nombre limité de théories des champs conduisent à des résultats finis par cette procédure. Ceci contraint donc fortement la structure des théories possibles.

Notons, enfin, que pendant plus de quinze ans les progrès théoriques avaient été bloqués par le problème des divergences en TQC. Pourtant, une fois que l'expérience commença à procurer des informations décisives, en deux ans un cadre complet et cohérent pour des calculs perturbatifs fut développé.

Quoiqu'il fut maintenant évident que la QED était la théorie correcte, la procédure permettant d'obtenir des réponses finies restait une énigme pour nombre de théoriciens: La signification de la recette de renormalisation, et donc des paramètres nus restait obscure. Beaucoup d'efforts furent alors consacrés à essayer de surmonter cette faiblesse conceptuelle fondamentale. Plusieurs types de solutions furent proposés:

(i) Le problème était lié à la théorie des perturbations et une sommation correcte du développement en puissance de  $\alpha$  ferait disparaître le problème.

(ii) Le problème était de nature mathématique: La procédure qui engendrait le développement renormalisé devait être modifiée pour éviter l'introduction de divergences non-physiques et pour engendrer automatiquement des quantités finies. Les paramètres initiaux (nus) n'avaient simplement pas de signification physique.

(iii) Finalement, le cut-off avait un sens physique et était engendré par des interactions supplémentaires, non-descriptibles par la TQC. Un candidat favori, jusqu'à la fin des années soixante, fut l'Interaction Forte (le cut-off étant procuré par la portée des forces nucléaires).

Quelque peu relié à la démarche (i) fut le développement de ce qui fut appelé la *TQC Axiomatique* qui essayait d'extraire des résultats rigoureux et non-perturbatifs des principes généraux sur lesquels la TQC était basée. La ligne de pensée (ii) conduisit au formalisme BPHZ (Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann), et finalement au travail d'Epstein–Glaser, où le problème des divergences

dans l'espace des positions (plutôt que l'espace des impulsions) était réduit au problème mathématique d'une définition correcte de produits de distributions singulières. Les efforts correspondants furent très efficaces pour clarifier les principes de calcul perturbatifs, mais aussi pour déguiser le problème des divergences de telle manière qu'il semblait n'avoir jamais existé. Finalement le point de vue (iii) est le plus proche du point de vue moderne, quoique bien sûr le cut-off nécessaire ne soit plus procuré par les Interactions Fortes.

#### 1.4 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation

Au milieu des années cinquante il fut noté par plusieurs groupes, en particulier Peterman–Stückelberg (1953), Gell-Mann–Low (1954) et Bogoliubov–Shirkov (1955-1956), que dans la limite de la QED avec masse nulle de l'électron, le développement perturbatif avait une propriété formelle curieuse, conséquence directe du processus de renormalisation lui-même. Dans une théorie des champs de masse nulle il n'y a pas d'échelle. Il est alors nécessaire d'introduire une échelle de masse  $\mu$  arbitraire pour définir la charge  $e$  renormalisée: elle est liée à l'intensité de la force électromagnétique mesurée dans des collisions d'une impulsion d'ordre  $c\mu$ . On peut appeler la charge renormalisée la *charge effective* à l'échelle  $\mu$ . Toutefois, comme cette masse  $\mu$  est arbitraire, on peut trouver d'autres couples  $\{e', \mu'\}$  qui donne les mêmes résultats physiques. L'ensemble des transformations des paramètres physiques, associées à ces changements d'échelle de masse, et nécessaires pour maintenir les résultats physiques inchangés, fut appelé *groupe de renormalisation* (GR). Faisant un changement d'échelle infinitésimal, on peut décrire le flot de la charge effective par une équation différentielle

$$\mu \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} = \beta(\alpha(\mu)), \quad \beta(\alpha) = \beta_2 \alpha^2 + O(\alpha^3), \quad (1.2)$$

où la fonction  $\beta(\alpha)$  peut être calculée perturbativement en série de puissances de  $\alpha$ .

La charge effective a l'interprétation physique suivante. À grande distance l'intensité de la force électromagnétique ne varie pas et a une valeur qu'on peut mesurer à travers la force de Coulomb. Toutefois, à des distances plus petites que la longueur d'onde  $\hbar/mc$  associée à une particule (on explore en quelque sorte "l'intérieur" de la particule), on observe des effets d'écrantage ou d'anti-écrantage. Ce qui est remarquable c'est que ces effets évidemment de courte distance sont ainsi liés à la renormalisation. Comme la préoccupation principale était le problème des divergences à grande impulsion en TQC, Gell-Mann et Low essayèrent d'utiliser le GR pour étudier le comportement de la charge nue à grand cut-off. La charge nue pouvait en effet apparaître comme la charge effective à l'échelle du cut-off. Si la fonction  $\beta(\alpha)$  avait eu un zéro avec une pente négative, ce zéro aurait été la limite finie à cut-off infini de la charge nue, au-delà de la théorie des perturbations.

Malheureusement la QED est une théorie libre à grande distance ( $\beta_2 > 0$ ), ce qui signifie que la charge effective décroît à faible impulsion, et réciproquement croît à grande impulsion jusqu'à ce que le développement perturbatif de la fonction  $\beta$  ne soit plus valable. (Cette variation est vérifiée expérimentalement puisque la valeur de  $\alpha$  mesurée près de la masse du boson intermédiaire des Interactions Faibles  $Z$  vers 100 GeV, est environ 4% plus grande que la valeur mesurée à basse énergie.)

Il est frappant de constater que si ces auteurs n'avaient pas insisté pour prendre la limite du cut-off infini, ils auraient été conduits à des conclusions plus intéressantes.

Notons encore quelques spéculations reliées: Landau et Pomeranchuk (1955) remarquèrent que si, dans le calcul de la propagation de l'électron on somme les termes dominants à grande impulsion à chaque ordre, on prédit l'existence d'une particule de masse  $M$

$$M \propto m e^{1/\beta_2 \alpha}.$$

Cette particule aurait malheureusement des propriétés physiquement inacceptables, conduisant à des violations de la conservation des probabilités, et fut donc appelée "fantôme" de Landau. Pour Landau c'était le signe de quelque incohérence de la QED, quoique sans conséquence physique immédiate, parce que  $\alpha$  est si faible que cet état non-physique a une masse de l'ordre de  $10^{30}$  GeV. Bogoliubov et Shirkov montrèrent alors correctement que ce résultat correspondait à résoudre l'équation de GR (1.2) à l'ordre dominant, dans la limite de faible charge effective. Comme la charge effective devenait grande à grande impulsion, la théorie des perturbations n'était pas crédible dans ce régime de grande masse. Il est amusant de noter que dans le point de vue moderne nous croyons que l'intuition de Landau était fondamentalement correcte, même si son argument était quelque peu naïf dans sa formulation.

## 1.5 Le triomphe de la théorie quantique des champs: Le Modèle Standard

*La Théorie Quantique des Champs dans les années soixante.* Après le triomphe de la QED, les années soixante furent des années difficiles pour la TQC. La situation peut être décrite de la manière suivante:

Il restait trois problèmes essentiels à résoudre liés aux trois autres interactions connues:

(i) Les Interactions Faibles étaient décrites par la théorie des champs non renormalisable de Fermi (–Feynman–Gell-Mann). Puisque le couplage était faible, et l'interaction de type interaction entre courants un peu comme en électrodynamique quand on ne quantifie pas le photon, il était concevable que cette théorie fût en quelque sorte l'approximation dominante à une théorie genre QED, mais avec au moins deux photons chargés et très lourds (masse de l'ordre de 100 GeV), parce que l'interaction apparaissait essentiellement ponctuelle.

Des théories des champs classiques appelées théories de jauge non-abéliennes, c'est à dire des théories où les interactions sont engendrées par un principe de symétrie généralisé appelé symétrie de jauge, avaient bien été construites qui généralisaient la QED au cas de "photons" chargés (Yang–Mills 1954). Mais d'une part leur quantification posait des problèmes nouveaux et difficiles. D'autre part une autre difficulté venait de ce que les théories de jauge ont une forte tendance à produire des particules de masse nulle, comme le photon. Ainsi quelques théoriciens essayaient à la fois de quantifier ces théories des champs et de trouver les moyens d'engendrer des termes de masse, dans le cadre de théories renormalisables.

(ii) Beaucoup pensaient, par contre que le cas de la TQC était désespéré dans la physique des Interactions Fortes: Parce que les interactions étaient trop fortes, un calcul perturbatif n'avait pas de sens. Une théorie des observables physiques, appelée théorie de la matrice  $S$ , paraissait le cadre adéquat pour décrire cette physique, et la localité stricte devait sans doute être abandonnée. On peut d'ailleurs noter une première incarnation de la théorie des Cordes dans ce contexte.

(iii) Enfin, puisque la force gravitationnelle étant extrêmement faible à courte distance, il n'avait pas d'urgence immédiate à s'occuper de la gravitation quantique, et la solution de ce problème d'impact expérimental incertain pouvait attendre.

*Le triomphe de la TQC renormalisable.* Vers la fin des années soixante la situation se mit à évoluer très rapidement. On trouva enfin une méthode pour quantifier les théories de jauge non-abéliennes (Faddeev–Popov, De Witt 1967). On put démontrer que ces nouvelles théories étaient renormalisables ('t Hooft, 't Hooft–Veltman, Slavnov, Taylor, Lee–Zinn-Justin, Becchi–Rouet–Stora, Zinn-Justin 1971–1975), même dans une version de symétrie brisée qui permettaient de donner des masses aux particules de jauge correspondantes (le mécanisme de Higgs, Brout–Englert, Guralnik–Hagen–Kibble 1964). Ces développements permirent de construire une version quantique d'un modèle pour les Interactions Faibles basé sur une symétrie de jauge, qui avait été proposé auparavant (Weinberg 1967, Salam 1968) et qui unifiait dans une certaine mesure l'électromagnétisme et l'interaction faible. Ses prédictions devaient être rapidement confirmées par l'expérience.

Dans la situation très confuse des Interactions Fortes, la solution vint comme souvent dans de tels cas de l'expérience: Les expériences de Diffusion Profondément Inélastique faites au SLAC (Stanford), qui sondaient l'intérieur des protons et neutrons, révélèrent que ces hadrons étaient composés de particules ponctuelles quasi libres, appelées initialement *partons* et finalement identifiées avec les *quarks*, ces entités mathématiques qui avaient été introduites pour décrire de façon simple le spectre des hadrons et ses symétries.

Pour comprendre ce phénomène particulier on fit appel aux idées de GR dans une version modernisée (Callan, Symanzik 1970) valable aussi pour les théories

massives, mais le phénomène resta quelque temps mystérieux jusqu'à ce qu'une théorie des champs puisse être trouvée qui ait la propriété de *liberté asymptotique*, c'est à dire dans laquelle les interactions effectives deviennent faibles à très courte distance de façon à expliquer les résultats du SLAC. Finalement les mêmes progrès théoriques dans la quantification des théories de jauge non-abéliennes qui avaient permis de modéliser les Interactions Faibles, permirent de construire une théorie de l'Interaction Forte: la ChromoDynamique Quantique (QCD). En effet les théories de jauge non-abéliennes, avec un nombre de fermions pas trop élevé, sont *asymptotiquement libres* (Gross–Wilczek, Politzer 1973): À la différence de la QED, le premier coefficient  $\beta_2$  de la fonction  $\beta$  pour la charge forte est alors négatif. La faiblesse des interactions entre quarks à courte distance devient une conséquence par la décroissance de la charge forte effective.

Donc autour de 1973–1974 un modèle complet de TQC pour toutes les interactions fondamentales sauf la gravitation fut proposé, maintenant appelé le Modèle Standard, qui a survécu avec un succès croissant à plus de vingt-cinq ans de tests expérimentaux. Ce fut le triomphe de toutes les idées basées sur le concept de TQC renormalisable.

À ce moment là il devenait tentant de conclure qu'en quelque sorte une nouvelle loi de la nature avait été découverte: toutes les interactions peuvent être décrites par des TQC *renormalisables* et par la théorie des perturbations renormalisée. Le problème des divergences avait à cette époque été si bien camouflé, que pour beaucoup de physiciens ce n'était plus un réel souci.

Un problème potentiel restant était ce que Weinberg appelait la condition de protection asymptotique (*asymptotic safety*): l'existence de points fixes de grande impulsion du GR, dans le formalisme de l'équation (1) des solutions de

$$\beta(\alpha) = 0, \quad \text{avec } \beta'(\alpha) < 0,$$

semblait nécessaire pour la cohérence à toute échelle d'une TQC (l'option déjà considérée par Gell-Mann et Low). Les théories des champs asymptotiquement libres partagent bien sûr cette propriété, mais les champs scalaires (comme requis par le mécanisme de Higgs) ont tendance à détruire la liberté asymptotique.

Enfin il restait à mettre la gravitation quantique dans ce cadre renormalisable, et ceci devint le but de beaucoup d'études théoriques dans les années qui suivirent.

## 1.6 Phénomènes critiques: D'autres infinis

La théorie de phénomènes critiques a comme objet la description des transitions de phase continues ou du second ordre dans les systèmes macroscopiques. Des exemples simples sont fournis par la transition liquide vapeur, les transitions dans les mélanges, binaires, l'Hélium superfluide, les systèmes magnétiques. Le modèle sur réseau le plus simple qui exhibe une telle transition est le fameux modèle d'Ising.

Ces transitions sont caractérisées par des comportements collectifs à grande échelle à la température de transition (la température critique  $T_c$ ). Par exemple la longueur de corrélation, qui caractérise l'échelle de distance sur lequel des comportements collectifs sont observés, devient infinie. Près de  $T_c$ , ces systèmes font donc apparaître deux échelles de longueur très différentes, une échelle microscopique liée à la taille des atomes, la maille du cristal ou la portée des forces, et une autre engendrée dynamiquement, la longueur de corrélation. À cette nouvelle échelle est associée une physique de longue distance ou macroscopique non-triviale.

On s'attend alors à ce que cette physique près de la température critique puisse faire l'objet d'une description macroscopique, ne faisant intervenir qu'un petit nombre de paramètres adaptés à cette échelle, sans référence explicite aux paramètres microscopiques initiaux. Cette idée conduit à la Théorie du Champ Moyen (TCM) et dans sa forme la plus générale à la théorie de Landau des Phénomènes Critiques (1937). Une telle théorie peut aussi être qualifiée de quasi-gaussienne, en ce sens qu'elle suppose implicitement que les corrélations entre variables aléatoires à l'échelle microscopique peuvent être traitées de façon perturbative, et donc les valeurs moyennes macroscopiques suivent des lois quasi-gaussiennes, comme le théorème de la limite centrale des probabilités nous l'enseigne. ■

Parmi les prédictions les plus simples et les plus solides d'une telle théorie, on trouve l'*universalité* des comportements singuliers des quantités thermodynamiques quand on s'approche de  $T_c$ : par exemple la longueur de corrélation  $\xi$  diverge toujours comme  $(T - T_c)^{-1/2}$ , l'aimantation spontanée s'annule comme  $(T_c - T)^{1/2}$ ..., ces propriétés étant indépendantes de la dimension de l'espace, de la symétrie du système, et bien sûr des détails de la dynamique microscopique.

Aussi les physiciens furent-ils très surpris quand quelques expériences aussi bien que des calculs de modèles de mécanique statistique sur réseau commencèrent ■ à mettre en cause les prédictions de la TCM. Un coup supplémentaire à la TCM fut porté par la solution exacte du modèle d'Ising à deux dimensions par Onsager (1949) qui confirma les calculs numériques sur réseau correspondant. Dans les années suivantes les preuves empiriques s'accumulèrent, montrant que les Phénomènes Critiques en deux et trois dimensions d'espace ne pouvaient pas être décrits quantitativement par la TCM. En fait on trouva que le comportement critique variait avec la dimension d'espace ainsi qu'avec d'autres propriétés générales des modèles. Néanmoins il semblait aussi qu'une certaine *universalité* survivait, mais d'une forme plus limitée. Quelques propriétés spécifiques paraissaient importantes, mais pas tous les détails de la dynamique microscopique.

*Le non-découplage des échelles.* Pour comprendre combien le problème était profond, il faut prendre conscience que cette situation n'avait jamais été confrontée auparavant: En effet, l'ingrédient principal de la théorie de Landau est l'hypothèse que, comme d'habitude en physique, les phénomènes qui correspondent à des échelles de distance trop différentes se découplent.

Illustrons cette idée par un exemple classique très simple. À un niveau naïf on

obtient  $\tau$ , la période du pendule, par analyse dimensionnelle,

$$\tau \propto \sqrt{\text{longueur}/g}.$$

En réalité, dans cet argument se cache une hypothèse physique essentielle: à savoir qu'on peut oublier la structure atomique interne du pendule, la taille de la terre ou la distance terre soleil. Ces échelles de distance n'interviennent pas parce que beaucoup trop petites ou trop grandes par rapport à l'échelle du pendule. On s'attend à ce qu'elles donnent des corrections d'ordre le rapport  $\lambda = (\text{petite échelle}/\text{grande échelle})$  et donc négligeables avec une bonne approximation. Bien sûr, il existe des fonctions mathématiques qui ne sont pas très petites même quand le rapport  $\lambda$  est petit telles que  $1/\ln \lambda$ . Mais ces fonctions sont singulières et, la nature étant bonne fille, elle ne met pas en général des singularités là ou cela n'est pas indispensable.

De même en mécanique Newtonienne, pour décrire le mouvement planétaire on peut oublier dans une très bonne approximation, à la fois les autres étoiles et la taille de soleil et des planètes, qui peuvent être remplacés par des objets ponctuels. De la même manière encore, en mécanique quantique non-relativiste, on peut ignorer la structure interne du proton, et obtenir les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène avec une excellente précision.

L'échec de la théorie du champ moyen démontre au contraire que ceci n'est plus généralement vrai pour les Phénomènes Critiques, une situation inattendue et totalement nouvelle. En fait si l'on essaye de calculer des corrections à la théorie du champ moyen on trouve des divergences quand la température s'approche de la température critique. Ces divergences font intervenir le rapport de la longueur de corrélation et de l'échelle microscopique, une situation réminiscente de la physique des particules, à ceci près que dans l'interprétation conventionnelle de la théorie des champs c'est l'échelle microscopique qu'on veut faire tendre vers zéro, alors qu'ici c'est l'échelle macroscopique (la longueur de corrélation) qui tend vers l'infini.

Les divergences rencontrées dans la théorie des champs de la physique des particules et la théorie des phénomènes critiques ont en fait une origine commune: le non-découplage des différentes échelles de physiques. Les infinis apparaissent quand on essaye d'ignorer comme on en a l'habitude, et comme il est généralement justifié, l'existence d'une échelle de physique ou les lois de la physique sont très différentes.

On aurait pu craindre, dans ces conditions, que la physique macroscopique soit sensible à toute la structure de courte distance, que les phénomènes à grande distance dépendent de la dynamique microscopique détaillée et donc soient essentiellement imprédictibles. La survivance d'une universalité, même réduite, était encore plus surprenante. Pour comprendre toutes ces observations, un nouveau cadre conceptuel devait évidemment être inventé.

## 1.7 Le groupe de renormalisation de Kadanoff–Wilson

En 1966, Kadanoff proposa une méthode pour attaquer ce problème: calculer les observables physiques de façon récursive en sommant d’abord sur les degrés de liberté de courte distance. Comme lui, nous allons illustrer l’idée par le modèle d’Ising, mais avec un point de vue plus général.

*Un exemple: le modèle d’Ising.* Le modèle d’Ising est un modèle de mécanique statistique sur réseau. À chaque site  $i$  du réseau est associée une variable aléatoire  $S_i$  qui ne peut prendre que les valeurs  $\pm 1$ , un spin “classique”. Les quantités thermodynamiques sont obtenues en moyennant sur toutes les configurations de spins avec un poids de Boltzmann  $e^{-\mathcal{H}_a(S)/T}$ , où  $T$  est la température,  $a$  la maille du réseau, et  $\mathcal{H}_a(S)$  une énergie de configuration correspondant à une interaction de courte portée (par exemple seuls les spins proches voisins sur le réseau sont couplés).

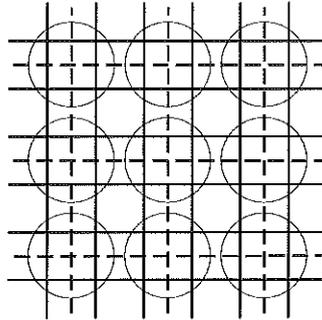


FIG. 2 – Réseau initial et réseau de maille double.

Les transitions de phase n’apparaissent que dans la limite de volume infini, appelée limite thermodynamique. Bien sûr, en général on ne sait pas calculer les moyennes exactement. Mais on voudrait au moins comprendre les propriétés d’universalité.

L’idée alors est de sommer sur les spins  $S_i$  à moyenne sur un sous réseau de maille  $2a$  fixée. Par exemple sur un réseau carré on regroupe les spins sur des carrés disjoints et fixe la moyenne sur chaque carré (figure 2). Après cette sommation la fonction de partition est donnée en sommant sur des configurations de ces spins moyens (qui prennent plus de deux valeurs) sur un réseau de maille double. À ces spins correspondent une nouvelle énergie de configuration *effective*  $\mathcal{H}_{2a}(S)$ . On peut itérer cette transformation, aussi longtemps que la maille du réseau reste petite comparée à la longueur de corrélation, c’est à dire l’échelle des phénomènes macroscopiques qu’on veut décrire,

$$\mathcal{H}_{2^n a}(S) = \mathcal{T} [\mathcal{H}_{2^{n-1} a}(S)].$$

On espère que l’application répétée de cette transformation produira asymptotiquement une interaction effective dont la forme serait indépendante dans une

large mesure de l'interaction initiale, justifiant de cette manière l'universalité restante. Un tel espoir est basé sur l'existence possible de *points fixes* ou de *surfaces fixes* de la transformation  $T$ ,

$$\mathcal{H}^*(S) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{2^n a}(S), \quad \mathcal{H}^*(S) = T[\mathcal{H}^*(S)].$$

Ce fut Wilson (1971) qui transforma une idée à l'origine un peu vague, en un cadre précis et opérationnel, passant en particulier en variables de Fourier, unifiant finalement le groupe de renormalisation de Kadanoff et celui de la théorie des champs. Les idées essentielles nouvelles sont les suivantes: on remplace la notion d'intensité fixe des interactions par la notion d'interaction effective dépendant de l'échelle des phénomènes considérés. Le groupe de renormalisation relie alors de façon itérative l'intensité à une certaine échelle de distance à l'intensité à une échelle voisine légèrement différente, comme dans l'équation de flot (1.2). Ceci conduisit à une compréhension de l'universalité, comme conséquence de l'existence de points fixes de longue distance du groupe de renormalisation général. Il devint possible de développer des méthodes de calcul précises des quantités universelles, avec l'aide de techniques déjà partiellement préexistantes de la TQC (Brézin–Le Guillou–Zinn-Justin 1973).

*Limite continue et théorie quantique des champs.* En premier lieu, il est clair que dans le modèle d'Ising, après beaucoup d'itérations, la variable de spin effective, qui est une moyenne locale de beaucoup de spins, prend un continuum de valeurs. De même, la taille du réseau initial devient de plus en plus petite par rapport à la maille du réseau itéré. On peut donc remplacer la variable de spin effective par un champ continu  $S(x)$  de l'espace continu. La somme sur les spins devient une intégrale sur les champs, ou intégrale fonctionnelle, (généralisation de l'intégrale de chemin) formellement analogue à celle qui permet de calculer les observables physiques en théorie quantique des champs, mais avec une interaction de forme très générale.

*Le point fixe gaussien.* Une propriété qui devient alors apparente est que le modèle gaussien est un point fixe du GR (ce qui n'est pas sans rapport avec le théorème central limite de la théorie des probabilités). À  $T_c$ , dans la limite de grande distance, il prend la forme d'une théorie quantique de champs (scalaires) libres et sans masses. De plus le modèle gaussien perturbé reproduit tous les résultats connus de la TCM. Le groupe de renormalisation de la TQC apparaît ainsi comme une forme limite du groupe de renormalisation général à la Wilson–Kadanoff.

Ce qui est frappant dans cette approche, c'est l'apparition naturelle d'une TQC renormalisable comme théorie effective pour décrire la physique de grande distance des phénomènes critiques.

Il devient alors difficile de résister à la tentation d'appliquer les mêmes idées à la théorie quantique des champs qui décrit la Physique des Particules.

## 1.8 Théories quantiques des champs effectives

La condition que les Interactions Fondamentales devaient être décrites par des théories renormalisables a été un des principes de base dans la construction du Modèle Standard. Du succès de ce programme, il pouvait être conclu que le principe de renormalisabilité était une nouvelle loi de la nature. Ceci impliquait évidemment que toutes les interactions incluant la gravitation devaient être descriptibles par de telles théories. L'incapacité d'exhiber une version renormalisable de la théorie de la gravitation quantique a donc jeté un doute sur le programme lui-même. En effet, si le Modèle Standard et ses extensions naturelles possibles n'étaient que des théories approchées, il devenait difficile de comprendre pourquoi elles devaient obéir à un principe aussi abstrait.

La théorie des phénomènes critiques, et l'apparition naturelle de théorie des champs renormalisables, a procuré une interprétation beaucoup plus simple et plausible. On peut maintenant imaginer que les Interactions Fondamentales sont décrites à l'échelle microscopique (bien sûr microscopique, comme la longueur de Planck, par rapport aux échelles de distance actuellement accessibles), ou à très grande énergie, par une théorie finie qui n'a pas la nature locale d'une théorie quantique des champs. Bien que cette théorie ne fasse intervenir que l'échelle microscopique, pour des raisons qui restent à être comprises, elle engendre, par l'effet coopératif d'un grand nombre de degrés de liberté, une physique de grande distance avec interactions entre particules de très faible masse. Dans les Phénomènes Critiques c'est l'expérimentateur qui ajuste la température à sa valeur critique pour faire diverger la longueur de corrélation. Dans la physique des Interactions Fondamentales ceci doit se produire naturellement, sinon on est confronté au fameux problème de *l'ajustage fin*. Comme la masse de Planck est au moins de l'ordre de  $10^{13}$  fois la masse de la particule de Higgs, dont l'existence est conjecturée par le modèle Standard, il faudrait qu'un paramètre de la théorie soit par accident proche de sa valeur critique avec une précision analogue.

Quelques mécanismes possibles sont connus, qui engendrent des particules de masse nulle, les symétries brisées spontanément avec bosons scalaires dit de Goldstone, les particules au coeur des interactions de jauge tel le photon, la symétrie chirale qui produit des fermions de masse nulle (mais aucun schéma n'est actuellement établi).

Alors, comme conséquence de l'existence d'un point fixe de longue distance, la physique de basse énergie, de longue distance, de faible masse, peut être décrite par une théorie des champs effective. Cette théorie des champs est munie naturellement d'un cut-off, réflexion de la structure microscopique initiale, et contient toutes les interactions locales permises par le contenu en champs et les symétries. Si la théorie des champs libres (c'est à dire la TCM) n'est pas une trop mauvaise approximation (le point fixe est suffisamment proche du point fixe gaussien) les interactions peuvent être classées par la dimension des couplages correspondants. Ainsi les interactions de type non-renormalisable, qui apparaissent dans la présentation traditionnelle de la TQC comme très dangereuses, sont

automatiquement supprimées par des puissances du cut-off (cest sans doute le cas de la gravitation d'Einstein). Les interactions renormalisables qui sont sans dimension n'évoluent que très lentement (logarithmiquement) avec l'échelle et survivent à longue distance. Ce sont elles qui déterminent la physique à basse énergie. Les interactions super-renormalisables (ceci inclut aussi les termes de masse), qu'on jugeait inoffensives car elles engendrent le moins de divergences, doivent être naturellement absentes ou très faibles car elles croissent à longue distance. La théorie nue est alors une version de la théorie effective dans laquelle toutes les interactions non-renormalisables ont déjà été négligées. Elle n'a nul besoin d'être physiquement cohérente à très courte distance où elle ne constitue plus une approximation valable, et où on peut la modifier de façon largement arbitraire pour la rendre finie.

Bien sûr cette interprétation n'a aucune influence sur la manière dont les calculs perturbatifs sont effectués, et donc on pourrait se demander si le problème n'est pas de nature quasi philosophique. Pas tout à fait!

Nous avons mentionné ci-dessus que prendre la théorie nue au sérieux conduit en particulier à confronter le problème de l'ajustage fin des masses des particules scalaires (ceci s'applique donc au boson de Higgs), et donc force à chercher des solutions (supersymétrie, état lié de fermions plus fondamentaux).

Il résout le problème de la *trivialité*: des interactions renormalisées décroissant logarithmiquement avec le cut-off sont acceptables parce que le cut-off est fini. Reprenons l'exemple de la QED et utilisons l'argument de Gell-Mann–Low en sens inverse. À charge nue maintenant fixée, la charge effective à la masse  $\mu$  tend vers zéro comme  $1/\ln(\Lambda/\mu)$ , ce qui est acceptable pour toute valeur raisonnable du cut-off  $\Lambda$  si  $\mu$  est de l'ordre de grandeur de la masse de l'électron. Ceci peut même expliquer la faible valeur de la constante de structure fine.

Il suggère la possibilité d'une découverte d'interactions non-renormalisables, bien qu'elles soient très faibles. Un mécanisme possible est le suivant. Des exemples peuvent être trouvés dans les phénomènes critiques dans lesquels la théorie réduite aux interactions renormalisables a plus de symétrie que la théorie complète (la symétrie cubique du réseau conduit à une symétrie de rotation à grande distance). Alors de très petites violations de symétries pourraient être le signe d'interactions non-renormalisables (et comme nous l'avons déjà mentionné la gravitation quantique est déjà peut-être un exemple).

Donc ce point de vue moderne, profondément basé sur le groupe de renormalisation et la notion d'intensité des interactions dépendant de l'échelle d'observation, non seulement procure une image plus cohérente de la théorie quantique des champs, mais également un cadre dans lequel de nouveaux phénomènes peuvent être discutés.

Il implique aussi que les théories quantiques des champs sont des structures temporaires, qui ne sont pas nécessairement cohérentes à toute distance, et destinées à être finalement remplacées par une théorie plus fondamentale de nature radicalement différente.

## Chapitre 2

### Valeurs moyennes gaussiennes. Méthode du col

Dans ce premier chapitre, nous rappelons un ensemble de résultats et de notions mathématiques utiles, et parfois indispensables, pour comprendre le reste de l'exposé.

Nous ferons un grand usage des intégrales et valeurs moyennes gaussiennes. Elles apparaissent naturellement en théorie des probabilités parce que les moyennes d'un grand nombre de variables stochastiques indépendantes obéissent à des lois gaussiennes. Dans la théorie des transition de phase et phénomènes critiques des considérations quelque peu analogues conduisent au modèle quasi-gaussien dont on vérifie qu'il reproduit tous les résultats de l'approximation de champ moyen ou de la théorie de Landau. Dans une limite où le nombre de variables d'intégration diverge, les intégrales gaussiennes jouent un rôle essentiel dans tous les aspects quantitatifs de l'analyse des fluctuations critiques.

Il est commode pour des raisons techniques de rappeler d'abord la notion de fonction génératrice. Nous calculons ensuite des intégrales gaussiennes et démontrons le théorème de Wick pour des valeurs moyennes gaussiennes, un résultat simple mais d'un grand intérêt pratique.

Nous expliquons ensuite la méthode du col, une méthode d'évaluation asymptotique, dans certaines limites, d'intégrales réelles ou complexes. En effet, la méthode du col nous sera directement utile et ramène le calcul d'intégrales au calcul d'intégrales gaussiennes.

*Notation.* Dans ce qui suit nous utilisons des caractères gras pour indiquer des matrices ou des vecteurs, et les caractères italiques correspondants pour indiquer les éléments de matrice ou les composantes de vecteurs.

#### 2.1 Fonctions génératrices

Soit  $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une mesure positive ou une distribution de probabilité définie dans tout  $\mathbb{R}^n$  et normalisée. Nous notons

$$\langle F \rangle \equiv \int d^n x F(\mathbf{x}) \Omega(\mathbf{x}),$$

où  $d^n x \equiv \prod_{i=1}^n dx_i$ , la valeur moyenne d'une fonction  $F(x_1, \dots, x_n)$ . Par définition  $\langle 1 \rangle = 1$ .

Il est souvent commode d'introduire la transformée de Fourier de la distribution

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \left\langle \exp \left( \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) \right\rangle = \int d^n x \exp \left( \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) \Omega(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

où  $b_i$  est imaginaire. Pour certaines distributions, la fonction génératrice est une fonction entière et peut donc être prolongée à toutes les valeurs des  $b_i$  complexes. Dans ce cas il est parfois plus commode de partir des  $b_i$  réels plutôt qu'imaginaires, parce que l'intégrand est alors encore une mesure positive.

La fonction  $\mathcal{Z}(\mathbf{b})$  est une *fonction génératrice* des moments de la distribution, c'est à dire des valeurs moyennes de polynômes. En effet on reconnaît, après développement de l'intégrand en puissances des variables  $b_k$ , la série

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_\ell=1}^n b_{k_1} b_{k_2} \dots b_{k_\ell} \langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle.$$

Les valeurs moyennes peuvent donc être obtenues en dérivant la fonction  $\mathcal{Z}(\mathbf{b})$  par rapport à ses arguments. Dérivant les deux membres de l'équation (2.1) par rapport à  $b_k$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial b_k} \mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \int d^n x x_k \exp \left( \sum_i b_i x_i \right) \Omega(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Dérivant de façon répétée et prenant la limite  $\mathbf{b} = 0$ , on trouve donc

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle = \left[ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \mathcal{Z}(\mathbf{b}) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.3)$$

Cette notion de fonction génératrice est très utile et sera étendue plus tard à la limite où le nombre de variables est infini.

## 2.2 Valeurs moyennes gaussiennes. Théorème de Wick

À cause du théorème de la limite centrale, les distributions de probabilités gaussiennes jouent un rôle important en théorie des probabilités comme en physique. De plus elles ont des propriétés algébriques remarquables que nous rappelons maintenant. Comme la plupart de ces propriétés algébriques se généralisent à toutes les intégrales gaussiennes, nous nous plaçons dans ce cadre plus général.

Considérons d'abord l'intégrale gaussienne

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \int d^n x \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j \right), \quad (2.4)$$

où la matrice  $\mathbf{A}$  d'éléments  $A_{ij}$  est une matrice symétrique complexe dont la partie réelle a des valeurs propres non négatives, et qui n'a pas de valeur propre nulle:

$$\operatorname{Re} \mathbf{A} \geq 0, \quad a_i \neq 0.$$

Diverses méthodes permettent de démontrer

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2}. \quad (2.5)$$

Nous démontrons ici ce résultat pour des matrices réelles. Comme le résultat est la racine carrée d'une fonction algébrique, on comprend facilement que le résultat se généralise à des matrices complexes, à condition de préciser la détermination de la racine.

### 2.2.1 Matrices réelles

Nous partons de l'intégrale simple ( $a > 0$ )

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2/2+bx} = \sqrt{2\pi/a} e^{b^2/2a}. \quad (2.6)$$

Toute matrice symétrique réelle peut être diagonalisée par une transformation orthogonale, et donc la matrice  $\mathbf{A}$  peut être écrite

$$\mathbf{A} = \mathbf{O} \mathbf{D} \mathbf{O}^T, \quad (2.7)$$

où la matrice  $\mathbf{O}$  est orthogonale et la matrice  $\mathbf{D}$  d'éléments  $D_{ij}$  diagonale:

$$\mathbf{O}^T \mathbf{O} = \mathbf{1}, \quad D_{ij} = a_i \delta_{ij}.$$

Changeons alors de variables,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ , dans l'intégrale (2.4):

$$x_i = \sum_{j=1}^n O_{ij} y_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j = \sum_{ij} x_i O_{ik} a_k O_{jk} x_j = \sum_i a_i y_i^2,$$

dont le jacobien est  $J = |\det \mathbf{O}| = 1$ . Nous sommes alors ramenés à une intégrale factorisée

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \int dy_i e^{-a_i y_i^2/2}.$$

La matrice  $\mathbf{A}$  est positive; ses valeurs propres  $a_i$  sont donc positives, chaque intégrale converge et se déduit du résultat (2.6). Nous concluons

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = (2\pi)^{n/2} (a_1 a_2 \dots a_n)^{-1/2} = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2}.$$

### 2.2.2 Intégrale gaussienne générale

Considérons maintenant une intégrale gaussienne générale

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \int d^n x \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right). \quad (2.8)$$

Pour calculer  $\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , on cherche le minimum de la forme quadratique:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) = \sum_{j=1}^n A_{kj} x_j - b_k = 0.$$

En terme de la matrice inverse de  $\mathbf{A}$ :

$$\Delta = \mathbf{A}^{-1},$$

la solution peut s'écrire

$$x_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} b_j. \quad (2.9)$$

Après le changement de variables  $x_i \mapsto y_i$ ,

$$x_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} b_j + y_i, \quad (2.10)$$

l'intégrale devient

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \exp \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \int d^n y \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} y_i A_{ij} y_j \right). \quad (2.11)$$

Ce changement de variables réduit le calcul à l'intégrale (2.4). On en déduit

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2} \exp \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right]. \quad (2.12)$$

*Remarque.* L'intégrale gaussienne a une propriété remarquable: si l'on intègre l'exponentielle d'une forme quadratique sur un sous-ensemble de variables, le résultat est encore l'exponentielle d'une forme quadratique. Cette stabilité structurale explique la stabilité des distributions de probabilité gaussiennes et est reliée aussi à certaines propriétés de l'oscillateur harmonique qui vont être discutées en section 5.1.2.

### 2.2.3 Valeurs moyennes gaussiennes et théorème de Wick

Dans le cas où la matrice  $\mathbf{A}$  est réelle et donc positive, nous pouvons considérer la fonction gaussienne comme une mesure positive sur  $\mathbb{R}^n$  ou une distribution de probabilité et calculer des valeurs moyennes de fonction des variables  $x_i$ :

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle \equiv \mathcal{N} \int d^n x F(\mathbf{x}) \exp \left( - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j \right), \quad (2.13)$$

où la normalisation  $\mathcal{N}$  est choisie de telle sorte que  $\langle 1 \rangle = 1$ :

$$\mathcal{N} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{A}, 0) = (2\pi)^{-n/2} \det \mathbf{A}.$$

La fonction (2.8) est alors une *fonction génératrice* des moments de la distribution, c'est à dire des valeurs moyennes gaussiennes de polynômes (cf. section 2.1). En effet

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) / \mathcal{Z}(\mathbf{A}, 0) = \left\langle \exp \sum_i b_i x_i \right\rangle.$$

Les valeurs moyennes peuvent donc être obtenues en dérivant l'expression (2.8) par rapport aux variables  $b_i$ :

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle = (2\pi)^{-n/2} (\det \mathbf{A})^{1/2} \left[ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0}$$

et, remplaçant  $\mathcal{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  par son expression explicite (2.12),

$$\langle x_{k_1} \dots x_{k_\ell} \rangle = \left\{ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \exp \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \right\} \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.14)$$

De façon générale, si  $F(\mathbf{x})$  est une série entière dans l'ensemble des variables  $x_i$ , nous trouvons l'identité

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle = \left\{ F \left( \frac{\partial}{\partial b} \right) \exp \left[ \sum_{i,j} \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \right\} \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.15)$$

*Théorème de Wick.* L'identité (2.14) conduit au théorème de Wick. Chaque fois qu'une dérivée agit sur l'exponentielle du membre de droite, elle engendre un facteur  $b$ . Une autre dérivée devra agir ultérieurement sur ce facteur, sinon le terme correspondant s'annulera dans la limite  $\mathbf{b} = 0$ . Nous en concluons que la moyenne du produit  $x_{k_1} \dots x_{k_\ell}$  avec le poids gaussien  $\exp(-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j)$  est obtenue de la manière suivante: on considère tous les appariements possibles

des indices  $k_1, \dots, k_\ell$  ( $\ell$  doit donc être pair). À chaque paire  $k_p k_q$  on associe l'élément  $\Delta_{k_p k_q}$  de la matrice  $\Delta = \mathbf{A}^{-1}$ . Alors

$$\langle x_{k_1} \dots x_{k_\ell} \rangle = \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{possibles } P \text{ de } \{k_1 \dots k_\ell\}}} \Delta_{k_{P_1} k_{P_2}} \dots \Delta_{k_{P_{\ell-1}} k_{P_\ell}}, \quad (2.16)$$

$$= \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{possibles } P \text{ de } \{k_1 \dots k_\ell\}}} \langle x_{k_{P_1}} x_{k_{P_2}} \rangle \dots \langle x_{k_{P_{\ell-1}}} x_{k_{P_\ell}} \rangle. \quad (2.17)$$

Les équations (2.16,2.17) sont des propriétés caractéristiques de toute mesure gaussienne centrée ( $\langle x_i \rangle = 0$ ). Elles sont connues sous le nom de théorème de Wick et sont, dans une forme adaptée à la mécanique quantique ou à la théorie quantique des champs, la base de la théorie des perturbations. La simplicité du résultat ne doit donc pas cacher sa *grande importance pratique*. Notons aussi que la démonstration est purement algébrique et s'étend donc aux intégrales complexes. Seule l'interprétation des fonctions gaussiennes comme mesure ou distribution de probabilité disparaît alors.

*Exemples.* On trouve alors successivement:

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle &= \Delta_{i_1 i_2}, \\ \langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle &= \Delta_{i_1 i_2} \Delta_{i_3 i_4} + \Delta_{i_1 i_3} \Delta_{i_2 i_4} + \Delta_{i_1 i_4} \Delta_{i_3 i_2}. \end{aligned}$$

Plus généralement, la valeur moyenne d'un produit de  $2p$  variables est la somme de  $(2p-1)(2p-3) \dots 5 \times 3 \times 1$  termes distincts.

*Une identité utile.* Considérons maintenant la valeur moyenne gaussienne du produit  $x_i F(\mathbf{x})$ :

$$\langle x_i F(\mathbf{x}) \rangle = \mathcal{N} \int d^n x x_i F(\mathbf{x}) \exp \left( - \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{2} x_j A_{jk} x_k \right). \quad (2.18)$$

Nous notons

$$x_i \exp \left( - \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{2} x_j A_{jk} x_k \right) = - \sum_{\ell} \Delta_{i\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \exp \left( - \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{2} x_j A_{jk} x_k \right).$$

Nous utilisons alors cette identité dans (2.18) et intégrons par parties:

$$\langle x_i F(\mathbf{x}) \rangle = \mathcal{N} \sum_{\ell} \Delta_{i\ell} \int d^n x \exp \left( - \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{2} x_j A_{jk} x_k \right) \frac{\partial F}{\partial x_\ell},$$

ce qui se résume dans une identité qui peut se démontrer aussi en appliquant le théorème de Wick:

$$\langle x_i F(x) \rangle = \sum_{\ell} \langle x_i x_\ell \rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_\ell} \right\rangle. \quad (2.19)$$

## 2.3 Mesure gaussienne perturbée. Contributions connexes

Même dans les cas favorables où le théorème de la limite centrale s'applique, la mesure gaussienne n'est qu'une distribution limite. Il est donc intéressant d'étudier les corrections à la distribution gaussienne.

### 2.3.1 Mesure gaussienne perturbée

Nous considérons une distribution plus générale normalisée  $e^{-A(\mathbf{x},\lambda)} / \mathcal{Z}(\lambda)$  où la fonction  $A(\mathbf{x}, \lambda)$  est la somme d'une partie quadratique et d'un polynôme  $\lambda V(\mathbf{x})$  dans les variables  $x_i$ :

$$A(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n x_i A_{ij} x_j + \lambda V(\mathbf{x}), \quad (2.20)$$

le paramètre  $\lambda$  caractérisant l'amplitude de la déviation à la distribution gaussienne.

La normalisation  $\mathcal{Z}(\lambda)$  est donnée par l'intégrale

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \int d^n x e^{-A(\mathbf{x},\lambda)}. \quad (2.21)$$

Pour la calculer, nous développons l'intégrand en série formelle de  $\lambda$  et intégrons terme à terme:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int d^n x V^k(\mathbf{x}) \exp\left(-\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j\right) \\ &= \mathcal{Z}(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle V^k(\mathbf{x}) \rangle_0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où  $\langle \bullet \rangle_0$  signifie valeur moyenne gaussienne avec la mesure  $\exp[-\sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j / 2]$ . Chaque terme du développement, qui est la valeur moyenne gaussienne d'un polynôme, s'obtient alors en utilisant le théorème de Wick (2.16).

Utilisant l'équation (2.15) avec  $F = e^{-\lambda V}$ , nous en déduisons aussi une représentation formelle de la fonction (2.21):

$$\mathcal{Z}(\lambda)/\mathcal{Z}(0) = \left\{ \exp\left[-\lambda V\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)\right] \exp\left[\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j\right] \right\} \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.23)$$

*Exemple.* Considérons la perturbation

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^n x_i^4. \quad (2.24)$$

À l'ordre  $\lambda^2$  on trouve ( $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{1}$ )

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\lambda)/\mathcal{Z}(0) &= 1 - \frac{1}{4!}\lambda \sum_i \langle x_i^4 \rangle_0 + \frac{1}{2!(4!)^2}\lambda^2 \sum_i \sum_j \langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0 + O(\lambda^3) \\
&= 1 - \frac{1}{8}\lambda \sum_i \Delta_{ii}^2 + \frac{1}{128}\lambda^2 \sum_i \Delta_{ii}^2 \sum_j \Delta_{jj}^2 \\
&\quad + \lambda^2 \sum_{ij} \left( \frac{1}{16} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \Delta_{ij}^2 + \frac{1}{48} \Delta_{ij}^4 \right) + O(\lambda^3). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Une vérification simple des facteurs est obtenue en spécialisant au cas d'une seule variable. Alors

$$\mathcal{Z}(\lambda)/\mathcal{Z}(0) = 1 - \frac{1}{8}\lambda + \frac{35}{384}\lambda^2 + O(\lambda^3).$$

Notons aussi que les deux premiers termes de l'expression (2.25) s'exponentient de telle sorte que  $\ln \mathcal{Z}$  n'a plus que des termes *connexes*, c'est à dire des termes qui ne peuvent pas se factoriser en un produit de sommes:

$$\ln \mathcal{Z}(\lambda) - \ln \mathcal{Z}(0) = -\frac{1}{8}\lambda \sum_i \Delta_{ii}^2 + \lambda^2 \sum_{ij} \left( \frac{1}{16} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \Delta_{ij}^2 + \frac{1}{48} \Delta_{ij}^4 \right) + O(\lambda^3).$$

### 2.3.2 Diagrammes de Feynman. Contributions connexes

Il est possible d'associer à chaque contribution perturbative un graphe appelé diagramme de Feynman. Chaque monôme contribuant à  $V(\mathbf{x})$  est représenté par un point (un vertex) d'où partent un nombre de lignes égal au degré du monôme, et chaque appariement est représenté par une ligne joignant les vertex auxquels appartiennent les variables correspondantes.

Nous venons d'introduire la notion de contribution connexe. À cette notion correspond une propriété des graphes. Une contribution connexe est une contribution correspondant à un diagramme connexe. Nous utilisons ci-dessous l'indice  $c$  pour indiquer la partie connexe d'une valeur moyenne. Dans ces conditions par exemple

$$\begin{aligned}
\langle V(\mathbf{x}) \rangle &= \langle V(\mathbf{x}) \rangle_c, \quad \langle V^2(\mathbf{x}) \rangle = \langle V^2(\mathbf{x}) \rangle_c + \langle V(\mathbf{x}) \rangle_c^2 \\
\langle V^3(\mathbf{x}) \rangle &= \langle V^3(\mathbf{x}) \rangle_c + 3 \langle V^2(\mathbf{x}) \rangle_c \langle V(\mathbf{x}) \rangle_c + \langle V(\mathbf{x}) \rangle_c^3, \dots
\end{aligned}$$

De façon générale à l'ordre  $k$  on trouve

$$\frac{1}{k!} \langle V^k(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{k!} \langle V^k(\mathbf{x}) \rangle_c + \text{termes non connexes}.$$

Un terme non connexe est un produit de la forme

$$\langle V^{k_1}(\mathbf{x}) \rangle_c \langle V^{k_2}(\mathbf{x}) \rangle_c \dots \langle V^{k_p}(\mathbf{x}) \rangle_c, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_p = k,$$

avec un poids  $1/k!$  venant du développement de l'exponentielle multiplié par un facteur combinatoire correspondant à toutes les façons de regrouper  $k$  objets en sous-ensembles de  $k_1 + k_2 + \dots + k_p$  objets, si tous les  $k_i$  sont distincts. On trouve

$$\frac{1}{k!} \times \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_p!} = \frac{1}{k_1!k_2!\dots k_p!}.$$

Si  $m$  puissances  $k_i$  sont égales, il faut diviser par un facteur combinatoire supplémentaire  $1/m!$  car le même terme a été compté  $m!$  fois.

On remarque alors que le développement perturbatif peut être réécrit

$$\mathcal{W}(\lambda) = \ln \mathcal{Z}(\lambda) = \ln \mathcal{Z}(0) + \sum_k \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle V^k(\mathbf{x}) \rangle_c. \quad (2.26)$$

## 2.4 Valeurs moyennes. Fonction génératrice. Cumulants

Nous calculons maintenant les valeurs moyennes de polynômes avec la distribution  $e^{-A(\mathbf{x}, \lambda)} / \mathcal{Z}(\lambda)$  où  $A(\mathbf{x}, \lambda)$  est le polynôme (2.20):

$$A(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \lambda V(\mathbf{x}).$$

Les valeurs moyennes  $\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \rangle_\lambda$ , que nous appellerons aussi *fonctions à  $\ell$  points*, sont données par le rapport

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \rangle_\lambda &= \mathcal{Z}^{-1}(\lambda) \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_\ell}(\lambda), \\ \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_\ell}(\lambda) &= \int d^n x x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \exp[-A(\mathbf{x}, \lambda)]. \end{aligned}$$

### 2.4.1 La fonction à deux points

Considérons, par exemple, la fonction à deux points  $\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda$ . Il faut calculer l'intégrale

$$\mathcal{Z}_{i_1 i_2}(\lambda) = \int d^n x x_{i_1} x_{i_2} \exp[-A(\mathbf{x}, \lambda)].$$

Dans l'exemple (2.24) à l'ordre  $\lambda^2$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{i_1 i_2}(\lambda) / \mathcal{Z}(0) &= \Delta_{i_1 i_2} - \frac{1}{24} \lambda \Delta_{i_1 i_2} \sum_i \langle x_i^4 \rangle_0 - \frac{1}{2} \lambda \sum_i \Delta_{i i_1} \Delta_{i i_2} \Delta_{i i_2} \\ &+ \frac{\lambda^2}{2!(4!)^2} \sum_{ij} \Delta_{i_1 i_2} \langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0 + \frac{\lambda^2}{2!4!} \sum_{ij} \Delta_{i i_1} \Delta_{i i_2} \Delta_{i i_2} \langle x_j^4 \rangle_0 \\ &+ \lambda^2 \sum_{ij} \left( \frac{1}{4} \Delta_{i i_1} \Delta_{i i_2} \Delta_{ij}^2 \Delta_{jj} + \frac{1}{6} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij}^3 \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij} \Delta_{i i_2} \Delta_{j j} \right) + O(\lambda^3). \end{aligned}$$

Nous devons encore calculer le rapport

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda = \mathcal{Z}_{i_1 i_2}(\lambda) / \mathcal{Z}(\lambda).$$

Dans la division des deux séries les termes non connexes disparaissent et nous trouvons

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda &= \Delta_{i_1 i_2} - \frac{1}{2} \lambda \sum_i \Delta_{i i_1} \Delta_{i i} \Delta_{i i_2} + \lambda^2 \sum_{ij} \left( \frac{1}{4} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij} \Delta_{i i} \Delta_{j j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \Delta_{i i_1} \Delta_{i i_2} \Delta_{ij}^2 \Delta_{j j} + \frac{1}{6} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij}^3 \right) + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (2.27)$$

En termes de diagrammes de Feynman, la contribution d'ordre  $\lambda$  est représentée par le diagramme de la figure 3 et les diagrammes de la figure 4 représentent les contributions d'ordre  $\lambda^2$ .

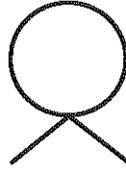


FIG. 3 – La fonction à deux points à l'ordre  $\lambda$ .

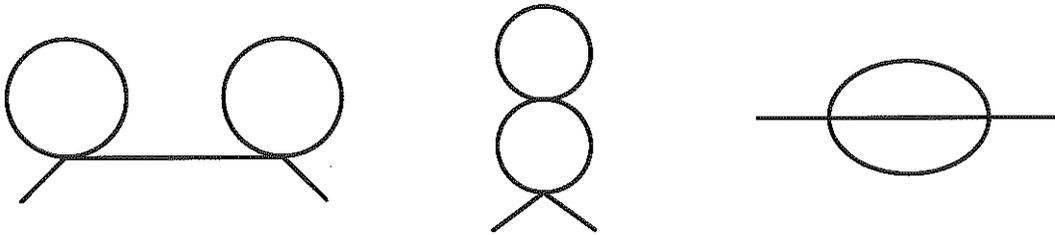


FIG. 4 – Contributions d'ordre  $\lambda^2$  à la fonction à deux points.

Nous pourrions calculer de même la fonction à quatre points, c'est à dire les valeurs moyennes des monômes de degré quatre. Nous trouverions un grand nombre de contributions. Mais les résultats se simplifient notablement si nous calculons directement les cumulants de la distribution. Pour cela il est commode de définir d'abord une fonction génératrice des valeurs moyennes  $\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} \rangle_\lambda$ .

#### 2.4.2 Fonctions génératrices. Cumulants

Nous généralisons la fonction (2.8) de l'exemple gaussien sous la forme

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda) = \mathcal{Z}(\lambda) \langle \exp [\sum_i b_i x_i] \rangle_\lambda = \int d^n x \exp \left( -A(\mathbf{x}, \lambda) + \sum_i b_i x_i \right). \quad (2.28)$$

La fonction  $\mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda)/\mathcal{Z}(\lambda)$  est la fonction génératrice des valeurs moyennes (section 2.1)

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \rangle_\lambda = \mathcal{Z}^{-1}(\lambda) \left[ \frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \frac{\partial}{\partial b_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{i_\ell}} \mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (2.29)$$

Introduisons maintenant la fonction

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda) = \ln \mathcal{Z}(\mathbf{b}, \lambda). \quad (2.30)$$

Dans l'interprétation probabiliste,  $\mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda)$  est la fonction génératrice des cumulants de la distribution. Comme conséquence de l'équation (2.26), le développement perturbatif des cumulants est beaucoup plus simple puisqu'il ne contient que des contributions connexes.

*Remarques.*

(i) Dans le cas de la *mesure gaussienne*,  $\mathcal{W}(\mathbf{b})$  se réduit à polynôme du second degré dans les variables  $b_i$ , et c'est là une propriété caractéristique.

(ii) Dans le cadre de la physique statistique, les valeurs moyennes  $\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} \rangle_\lambda$  sont appelées fonctions de corrélation à  $\ell$  points et les cumulants

$$W_{i_1 i_2 \dots i_\ell}^{(\ell)} = \left[ \frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \frac{\partial}{\partial b_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{i_\ell}} \mathcal{W}(\mathbf{b}, \lambda) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0},$$

fonctions de corrélation *connexes*.

*Exemples.* Développant la relation (2.30) en puissances de  $\mathbf{b}$ , on trouve que les fonctions à un point sont identiques

$$W_i^{(1)} = \langle x_i \rangle_\lambda.$$

Pour les fonctions à deux points, on trouve

$$W_{i_1 i_2}^{(2)} = \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda - \langle x_{i_1} \rangle_\lambda \langle x_{i_2} \rangle_\lambda = \langle (x_{i_1} - \langle x_{i_1} \rangle_\lambda) (x_{i_2} - \langle x_{i_2} \rangle_\lambda) \rangle_\lambda.$$

C'est donc la fonction à deux points de la variable à laquelle sa valeur moyenne a été soustraite.

Dans le cas d'une perturbation paire  $V(\mathbf{x}) = V(-\mathbf{x})$  (comme dans l'exemple (2.24))

$$\begin{aligned} W_{i_1 i_2}^{(2)} &= \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda, \\ W_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} &= \langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle_\lambda - \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda \langle x_{i_3} x_{i_4} \rangle_\lambda - \langle x_{i_1} x_{i_3} \rangle_\lambda \langle x_{i_2} x_{i_4} \rangle_\lambda \\ &\quad - \langle x_{i_1} x_{i_4} \rangle_\lambda \langle x_{i_3} x_{i_2} \rangle_\lambda. \end{aligned} \quad (2.31)$$

La fonction connexe à quatre points, qui s'annule exactement pour une mesure gaussienne, donne une première évaluation de l'écart à la mesure gaussienne.

Dans l'exemple (2.24), on trouve alors à l'ordre  $\lambda^2$ :

$$\begin{aligned}
W_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} &= -\lambda \sum_i \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_2 i} \Delta_{i_3 i} \Delta_{i_4 i} + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{ij} \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_2 i} \Delta_{i_3 j} \Delta_{i_4 j} \Delta_{ij}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{ij} \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_3 i} \Delta_{i_2 j} \Delta_{i_4 j} \Delta_{ij}^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{ij} \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_4 i} \Delta_{i_3 j} \Delta_{i_2 j} \Delta_{ij}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{ij} (\Delta_{ii} \Delta_{ij} \Delta_{i_1 i} \Delta_{i_2 j} \Delta_{i_3 j} \Delta_{i_4 j} + 3 \text{ termes}) + O(\lambda^3). \quad (2.32)
\end{aligned}$$

## 2.5 Méthode du col

Pour évaluer des intégrales de contour dans le domaine complexe, on peut parfois utiliser la méthode du col, qui réduit leur évaluation à une somme (infinie) d'intégrales gaussiennes.

Nous décrivons d'abord la méthode dans le cas d'une intégrale réelle puis complexe. Nous généralisons ensuite à un nombre quelconque de variables.

### 2.5.1 Intégrale réelle

Considérons l'intégrale

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int_a^b dx e^{-A(x)/\lambda}, \quad (2.33)$$

où la fonction  $A(x)$  est une fonction réelle, analytique dans un voisinage du segment  $(a, b)$ , et  $\lambda$  un paramètre positif. Nous voulons évaluer cette intégrale dans la limite  $\lambda \rightarrow 0_+$ . Dans cette limite l'intégrale est dominée par les maxima de l'intégrand et donc les minima de  $A(x)$ . Deux cas peuvent se présenter:

(i) Le minimum de  $A(x)$  correspond à un bord du domaine d'intégration. On développe alors  $A(x)$  au voisinage du minimum et on intègre. Ce n'est pas le cas qui nous intéresse ici.

(ii) La fonction  $A(x)$  a un, ou plusieurs minima sur l'intervalle  $(a, b)$ . Les minima correspondent à des points  $x^c$  caractérisés par

$$A'(x^c) = 0,$$

où génériquement  $A''(x^c) > 0$  (les cas où  $A''(x^c) = 0$  exigent une analyse séparée). Pour des raisons qui apparaîtront plus tard ces points sont appelés des cols (cf. exemple (ii)). S'il y a plusieurs solutions, la contribution dominante sera donnée par le minimum absolu de  $A(x)$ .

Par ailleurs, si nous négligeons des corrections relatives d'ordre  $\exp[-\text{const.}/\lambda]$ , nous pouvons restreindre l'intégration à un voisinage fini  $(x^c - \varepsilon, x^c + \varepsilon)$  de  $x^c$ , mais avec  $\varepsilon$  arbitrairement petit. En effet, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, les contributions hors de cet intervalle sont bornées par

$$e^{-A(x_c)/\lambda} \times (b - a) e^{-A''(x^c)\varepsilon^2/2\lambda},$$

où nous avons utilisé la propriété  $\varepsilon \ll 1$  de sorte que

$$A(x) - A(x^c) \sim \frac{1}{2}A''(x^c)(x - x^c)^2,$$

et donc d'ordre  $e^{-C/\lambda}$ , avec  $C > 0$ , plus petites que la contribution dominante. En fait, le domaine qui contribue est d'ordre  $\sqrt{\lambda}$ . Il est donc commode de changer de variables,  $x \mapsto y$ :

$$y = (x - x^c)/\sqrt{\lambda}.$$

Le développement de la fonction  $A$  s'écrit alors

$$A/\lambda = A(x^c)/\lambda + \frac{1}{2}y^2A''(x^c) + \frac{1}{6}\sqrt{\lambda}A'''(x^c)y^3 + \frac{1}{24}\lambda A^{(4)}(x^c)y^4 + O(\lambda^{3/2}).$$

On voit qu'à l'ordre dominant il suffit de garder le terme quadratique. À cause du caractère négligeable des contributions loin du col, on peut alors intégrer sur  $[-\infty, +\infty]$ . On est ramené à une intégrale gaussienne:

$$\mathcal{I}(\lambda) \sim \sqrt{2\pi\lambda/A''(x^c)} e^{-A(x^c)/\lambda}. \quad (2.34)$$

Pour calculer les corrections d'ordre supérieur, on développe l'exponentielle en puissances de  $\lambda$  et on intègre terme à terme. Par exemple, à l'ordre suivant

$$\mathcal{I}(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{A''(x^c)}} e^{-A(x^c)/\lambda} \left[ 1 + \frac{1}{24} \left( 5 \frac{A'''^2}{A''^3} - 3 \frac{A^{(4)}}{A''^2} \right) \lambda + O(\lambda^2) \right].$$

*Remarques.*

(i) Le développement formel engendré par la méthode du col en général diverge pour toute valeur de  $\lambda$  et n'est que le développement asymptotique d'une fonction pour  $\lambda \rightarrow 0_+$ , c'est à dire satisfait

$$\exists \lambda_0 > 0, \{M_K\} : \quad \forall K \text{ et } 0_+ \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \left| \mathcal{I}(\lambda) - \sum_{k=0}^K I_k \lambda^k \right| \leq M_K \lambda^{K+1},$$

où les termes  $M_k$  génériquement croissent comme  $k!$ . Pour comprendre l'origine de cette propriété, il suffit de changer le signe de  $\lambda$  dans l'intégrale.

(ii) Fréquemment l'intégrale à calculer prend la forme plus générale

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int dx \rho(x) e^{-A(x)/\lambda},$$

Dans ce cas, pourvu que  $\ln \rho(x)$  soit holomorphe au voisinage du col, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la fonction  $\rho(x)$  dans l'équation de col. En effet, la modification de la position du col est d'ordre  $\lambda$  et la contribution à l'intégrale provient d'une région d'ordre  $\sqrt{\lambda} \gg \lambda$  autour du col.

On peut encore développer autour du col solution de  $A'(x) = 0$ . À l'ordre dominant on trouve alors

$$\mathcal{I}(\lambda) \sim \sqrt{2\pi\lambda/A''(x^c)} \rho(x^c) e^{-A(x^c)/\lambda}.$$

### 2.5.2 Exemples

*Fonctions de Bessel.* Evaluons la fonction de Bessel modifiée

$$I_0(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{s \cos \theta},$$

(=  $J_0(is)$ ) pour  $s \rightarrow +\infty$  (la fonction est paire).

Cette intégrale a la forme canonique pour l'application de la méthode du col ( $s = 1/\lambda$ ), et l'intégrand est une fonction entière.

Les cols sont donnés par

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \pmod{\pi}.$$

Pour  $s \rightarrow +\infty$  le col dominant est  $\theta = 0$ . Nous développons au voisinage du col

$$s \cos \theta = s - \frac{1}{2}s\theta^2 + \frac{1}{24}s\theta^4 + O(\theta^6).$$

La région contribuant à l'intégrale est d'ordre  $\theta = O(1/\sqrt{s})$ . Donc

$$\begin{aligned} I_0(s) &= \frac{1}{2\pi} e^s \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{-s\theta^2/2} \left(1 + \frac{1}{24}s\theta^4\right) + O(e^s/s^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^s \left(1 + \frac{1}{8s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Justifions, sur cet exemple, l'appellation *méthode du col*. Pour cela il faut examiner la fonction  $\cos \theta$ , qui apparaît dans l'intégrand, dans le plan complexe au voisinage du col  $\theta = 0$ . Les courbes de module constant de l'intégrand sont les courbes  $\operatorname{Re} \cos \theta$  constant. Nous notons que ces courbes se croisent au col (cf. figure 5) et le module de l'intégrand a donc une structure de col au sens géographique.

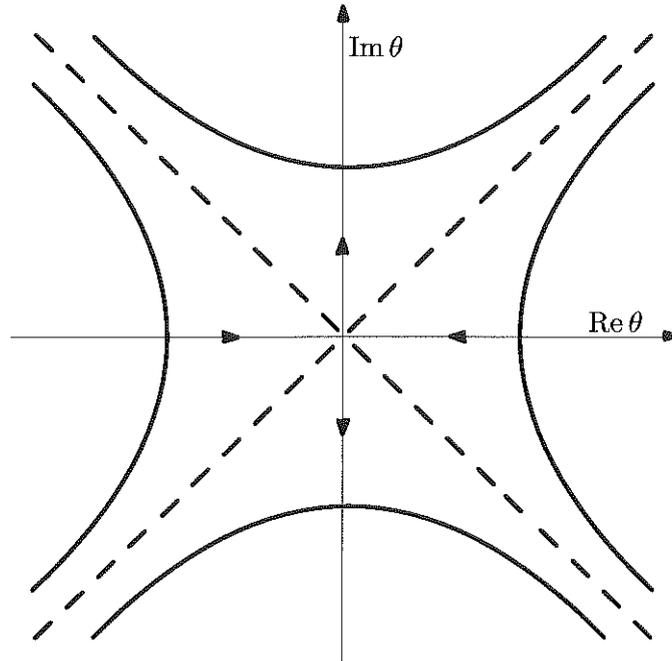
*Fonction  $\Gamma$ .* Un autre exemple classique est l'évaluation asymptotique de la fonction

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx x^{s-1} e^{-x}$$

pour  $s \rightarrow +\infty$ .

L'intégrand est singulier à  $x = 0$  mais le voisinage de la singularité contribue de façon négligeable dans cette limite ce qui permet d'appliquer la méthode du col. L'intégrale n'est pas directement sous la forme canonique (2.33), mais un changement de variable linéaire la lui donne:  $x = (s-1)x'$ , et on pose  $s-1 = 1/\lambda$ . Alors

$$\Gamma(s) = (s-1)^{s-1} \int_0^{\infty} dx e^{-(x-\ln x)/\lambda}$$



**FIG. 5** – Fonction  $I_0$ : courbes de niveaux du module de l'intégrand dans le voisinage du col  $\theta = 0$ .

et donc  $A(x) = x - \ln x$ . La position du col est donnée par

$$A'(x) = 1 - 1/x = 0 \Rightarrow x^c = 1.$$

La dérivée seconde au col est  $A''(x^c) = 1$ . Le résultat à l'ordre dominant est donc

$$\Gamma(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi}(s-1)^{s-1/2} e^{1-s} \sim \sqrt{2\pi}s^{s-1/2} e^{-s}, \quad (2.35)$$

une évaluation aussi appelée formule de Stirling. Notons que grâce à la méthode du col complexe que nous expliquons maintenant, ce résultat s'étend à  $s$  complexe avec  $|\arg s| < \pi$ .

### 2.5.3 Intégrale de contour complexe

Considérons l'intégrale

$$\mathcal{I}(\lambda) = \oint_C dx e^{-A(x)/\lambda}, \quad (2.36)$$

où la fonction  $A(x)$  est une fonction analytique de la variable complexe  $x$  et  $\lambda$  un paramètre réel positif. Le contour  $C$  va du point  $a$  au point  $b$  du plan complexe, et est contenu dans le domaine d'holomorphic de  $A$ . Comme cas limite, on peut considérer la situation où les points  $a$  et  $b$  s'éloignent à l'infini dans le plan complexe.

On veut évaluer l'intégrale pour  $\lambda \rightarrow 0_+$ . On pourrait penser *a priori* que l'intégrale est alors dominée par les points où le module de l'intégrand est maximum et donc la partie réelle de  $A(x)$  est minimum. Cependant la contribution du

voisinage de tels points peut se compenser parce que la phase varie rapidement (un argument qui conduit à la méthode de la phase stationnaire).

La méthode du col consiste à déformer le contour  $C$  de toutes les manières possibles dans le domaine d'holomorphie de  $A$  (sans évidemment franchir de singularité ce qui changerait la valeur de l'intégrale) de façon à ce que le module maximum de l'intégrand soit minimum, c'est à dire que le minimum de  $\operatorname{Re} A(x)$  sur le contour soit maximum.

S'il est possible de déformer le contour  $C$  en un contour équivalent sur lequel  $\operatorname{Re} A(x)$  est monotone, alors l'intégrale est dominée par une des extrémités du contour. Dans le cas contraire la partie réelle passe par un minimum. Sur le contour optimal le minimum ne peut être dû qu'à une singularité de la fonction ou enfin, et c'est la situation qui nous intéresse ici, à un point régulier où la dérivée de  $A$  s'annule:

$$A'(x) = 0.$$

Un tel point  $x^c$  est un *col* au sens des courbes de niveaux de  $\operatorname{Re} A(x)$  (figure 5). La structure de l'intégrand se comprend mieux si l'on se souvient que les courbes  $\operatorname{Re} A$  constant et  $\operatorname{Im} A$  constant forment deux ensembles de courbes bi-orthogonales. Les seuls points doubles de ces courbes sont des singularités ou des cols. En effet développons la fonction au voisinage de  $x^c$ :

$$A(x) - A(x^c) \sim \frac{1}{2} A''(x^c) (x - x^c)^2 \Rightarrow \operatorname{Re}[A(x) - A(x^c)] \sim \frac{1}{2} |A''(x^c)| (u^2 - v^2),$$

où les coordonnées réelles  $u, v$  sont définies par

$$u + iv = (x - x^c) e^{i \operatorname{Arg} A''(x^c)/2}.$$

Au voisinage du col on peut choisir le contour déformé pour qu'il suive une courbe  $\operatorname{Im} A$  constant, et donc la phase de l'intégrand reste constante: Il n'y a plus de compensations. L'intégrale est dominée, à des contributions plus petites que toute puissance de  $\lambda$  près, par le voisinage du col. À partir d'ici, l'argument et le calcul sont les mêmes que dans le cas réel précédent.

*Exemple.* Considérons la représentation intégrale de la fonction de Bessel

$$J_0(s) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{dz}{z} e^{s(z-1/z)/2},$$

où le contour  $C$  est un contour fermé simple contenant l'origine à son intérieur et parcouru dans le sens positif. Evaluons par la méthode du col l'intégrale pour  $s$  réel tendant vers  $+\infty$ .

Posons

$$A(z) = (1/z - z)/2.$$

L'équation des cols est

$$2A'(z) = -\frac{1}{z^2} - 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i.$$

Par ailleurs,

$$\operatorname{Re} A(z) = \operatorname{Re} z(1/|z|^2 - 1).$$

On voit que les deux cols contribuent. Pour le col  $z = i$  posons  $z = i + e^{3i\pi/4} s$ . Alors

$$A(z) = -i + s^2/2 + O(s^3).$$

La contribution du col est

$$\frac{1}{2\pi} e^{is-i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{-ss^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{is-i\pi/4}$$

Le deuxième col donne une contribution complexe conjuguée. On trouve alors

$$J_0(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos(s - \pi/4).$$

## 2.6 Méthode du col à plusieurs variables. Application aux fonctions génératrices

Nous généralisons d'abord la méthode du col au cas de  $n$  variables, et l'appliquons ensuite au calcul de fonctions génératrices.

### 2.6.1 Méthode du col à plusieurs variables

Considérons l'intégrale générale sur  $n$  variables

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int d^n x \exp \left[ -\frac{1}{\lambda} A(x_1, \dots, x_n) \right], \quad (2.37)$$

où pour simplifier nous supposons que la fonction  $A$  est entière et que l'intégration porte sur tout  $\mathbb{R}^n$ .

Dans la limite  $\lambda \rightarrow 0$ , l'intégrale est dominée par les cols solutions de:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A(x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c) = 0 \quad \forall i. \quad (2.38)$$

Dans le cas où il existe plusieurs cols, il faut classer les cols par la valeur de  $\operatorname{Re} A$ . Le col dominant sera souvent celui qui correspond à  $\operatorname{Re} A$  minimum. Toutefois, tous les cols ne contribuent pas nécessairement et il faut procéder par déformation du domaine d'intégration initial. Dans le cas de plusieurs variables, il peut ne pas être simple de reconnaître quels cols contribuent.

Pour calculer la contribution dominante du col  $\mathbf{x}^c$ , nous changeons de variables, posant

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^c + \mathbf{y}\sqrt{\lambda}. \quad (2.39)$$

Nous développons alors  $A(\mathbf{x})$  en puissances de  $\lambda$  (et donc de  $y$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} A(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{\lambda} A(\mathbf{x}^c) + \frac{1}{2!} \sum_{ij} \frac{\partial^2 A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^{k/2-1}}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{\partial^k A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} y_{i_1} \dots y_{i_k}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Après le changement de variables, le terme quadratique en  $y$  est indépendant de  $\lambda$ . L'intégrale devient

$$\mathcal{I}(\lambda) = \lambda^{n/2} e^{-A(\mathbf{x}^c)/\lambda} \int d^n y \exp \left[ -\frac{1}{2!} \sum_{ij} \frac{\partial^2 A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j - R(\mathbf{y}) \right] \quad (2.41)$$

$$R(\mathbf{y}) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^{k/2-1}}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{\partial^k A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} y_{i_1} \dots y_{i_k}. \quad (2.42)$$

Nous développons alors l'intégrand en puissances de  $\sqrt{\lambda}$ : à chaque ordre le calcul est ramené à une moyenne gaussienne de polynômes. À l'ordre dominant on trouve

$$\mathcal{I}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} (2\pi\lambda)^{n/2} \left[ \det \mathbf{A}^{(2)} \right]^{-1/2} e^{-A(\mathbf{x}^c)/\lambda}, \quad (2.43)$$

où  $\mathbf{A}^{(2)}$  est la matrice des dérivées partielles secondes:

$$[\mathbf{A}^{(2)}]_{ij} \equiv \frac{\partial^2 A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

### 2.6.2 Fonction génératrice et méthode du col

Nous introduisons la fonction génératrice des valeurs moyennes (2.28)

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \int d^n x e^{-A(\mathbf{x}) + \sum_i b_i x_i}, \quad (2.44)$$

où  $A(\mathbf{x})$  est maintenant une fonction régulière des  $x_i$ . Définissons

$$\mathcal{N} = 1/\mathcal{Z}(0).$$

Les valeurs moyennes de polynômes avec le poids  $e^{-A(\mathbf{x})}$ ,

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle \equiv \mathcal{N} \int d^n x x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} e^{-A(\mathbf{x})}, \quad (2.45)$$

peuvent être obtenues à partir de dérivées de  $\mathcal{Z}$  (cf. équation (2.29)):

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle = \mathcal{N} \left[ \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_\ell}} \mathcal{Z}(\mathbf{b}) \right] \Big|_{\mathbf{b}=0}.$$

*Méthode du col.* Calculons les contributions des deux premiers ordres de la méthode du col à l'intégrale (2.44). L'équation du col est

$$b_i = \frac{\partial A}{\partial x_i}.$$

Nous développons  $A(\mathbf{x})$  autour du col  $\mathbf{x}^c$  comme expliqué en section 2.6.1 et utilisons le résultat (2.43). Introduisons maintenant  $\mathcal{W}(\mathbf{b})$ , la fonction génératrice des cumulants de la distribution qui sont aussi les fonctions de corrélation connexes (équation (2.30)):

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}) = \ln \mathcal{Z}(\mathbf{b}).$$

Utilisant le résultat (2.43) et l'identité

$$\ln \det \mathbf{M} = \text{tr} \ln \mathbf{M}$$

valable pour toute matrice  $\mathbf{M}$ , nous trouvons

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}) = -A(\mathbf{x}_c) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} \text{tr} \ln \mathbf{A}^{(2)}, \quad (2.46a)$$

$$b_i = \frac{\partial A(\mathbf{x}_c)}{\partial x_i} \quad (2.46b)$$

avec

$$[\mathbf{A}^{(2)}]_{ij} \equiv \frac{\partial^2 A(\mathbf{x}^c)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Les dérivées successives par rapport à  $\mathbf{b}$  (se rappelant que  $\mathbf{x}_c$  est une fonction de  $\mathbf{b}$  à travers l'équation (2.46b)) calculées à  $\mathbf{b} = 0$  sont les fonctions de corrélation connexes.

## Exercices

### Exercice 2.1

Soient deux variables aléatoires  $x, y$  corrélées dont on suppose la loi de probabilité gaussienne. On trouve les cinq valeurs moyennes suivantes

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = 5, \quad \langle xy \rangle = 3, \quad \langle y^2 \rangle = 2.$$

En déduire les valeurs moyennes  $\langle x^4 \rangle, \langle x^3 y \rangle, \langle x^2 y^2 \rangle, \langle xy^5 \rangle, \langle y^6 \rangle, \langle x^3 y^3 \rangle$  (on utilisera le théorème de Wick).

Quelle est la distribution gaussienne qui conduit à ces valeurs?

*Solution.*

$$75, 45, 28, 180, 120, 432.$$

La distribution gaussienne est

$$e^{-(x^2 - 3xy + 5y^2)/2}.$$

*Exercice 2.2*

Soient trois variables aléatoires  $x, y, z$  corrélées dont on suppose la loi de probabilité gaussienne. On trouve les neuf valeurs moyennes suivantes

$$\begin{aligned}\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = a, \\ \langle xy \rangle = b, \quad \langle xz \rangle = \langle zy \rangle = c.\end{aligned}$$

En déduire en fonctions de  $a, b, c$  les valeurs moyennes  $\langle x^4 \rangle, \langle x^6 \rangle, \langle x^3 y \rangle, \langle x^2 y^2 \rangle, \langle x^2 y z \rangle$ .

Quelle est pour  $a = 2, b = 1, c = 0$  la distribution gaussienne qui conduit à ces valeurs?

*Solution.*

$$\begin{aligned}\langle x^4 \rangle = 3a^2, \quad \langle x^6 \rangle = 15a^3, \quad \langle x^3 y \rangle = 3ab, \quad \langle x^2 y^2 \rangle = a^2 + 2b^2, \\ \langle x^2 y z \rangle = ac + 2bc.\end{aligned}$$

Pour  $a = 2, b = 1, c = 0$  la distribution gaussienne qui conduit à ces valeurs est

$$\exp \left[ -\frac{1}{12} (4x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 4xy) \right].$$

*Exercice 2.3*

*Démonstration du résultat (2.5) par méthode itérative.* Le déterminant d'une matrice complexe quelconque  $\mathbf{A}^{(n)}$   $n \times n$ , d'éléments  $A_{ij}^{(n)}$  peut être calculé de façon récursive en soustrayant à toutes les lignes un multiple de la dernière ligne de façon à annuler la dernière colonne (supposant  $A_{nn}^{(n)} \neq 0$ , sinon il faut prendre une autre ligne et colonne). Cette méthode conduit à la relation entre déterminants

$$\det \mathbf{A}^{(n)} = A_{nn}^{(n)} \det \mathbf{A}^{(n-1)},$$

où  $\mathbf{A}^{(n-1)}$  est une matrice  $(n-1) \times (n-1)$  d'éléments

$$A_{ij}^{(n-1)} = A_{ij}^{(n)} - A_{in}^{(n)} A_{nj}^{(n)} / A_{nn}^{(n)}, \quad i, j = 1 \dots n-1. \quad (2.47)$$

Utiliser le résultat (2.6) pour retrouver cette identité.

*Solution.* Nous considérons maintenant l'intégrale (2.4). Nous intégrons sur la variable  $x_n$  (supposant  $\text{Re } A_{nn} > 0$ ), utilisant le résultat (2.6):

$$\int dx_n \exp \left( -\frac{1}{2} A_{nn} x_n^2 - x_n \sum_{i=1}^{n-1} A_{ni} x_i \right) = \sqrt{\frac{2\pi}{A_{nn}}} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{A_{in} A_{nj}}{A_{nn}} x_i x_j \right).$$

L'intégrale gaussienne restante devient une intégrale sur  $n-1$  variables:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{2\pi}{A_{nn}}} \int \left( \prod_{i=1}^{n-1} dx_i \right) \exp \left( -\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{2} x_i (A_{ij} - A_{in} A_{nn}^{-1} A_{nj}) x_j \right).$$

Comparant avec l'identité (2.47), nous remarquons que nous sommes en train de calculer  $1/\sqrt{\det \mathbf{A}}$ . Nous concluons

$$\mathcal{Z}(\mathbf{A}) = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2}. \quad (2.48)$$

*Exercice 2.4*

Evaluer par la méthode du col l'intégrale suivante

$$I_n(\alpha) = \int_0^1 dx x^{\alpha n} (1-x)^{\beta n},$$

avec  $\beta = 1 - \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , dans la limite  $n \rightarrow \infty$ .

*Solution.* Le col est  $x_c = \alpha$ , et donc

$$I_n(\alpha) \sim \sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)/n} \alpha^{n\alpha} (1-\alpha)^{n(1-\alpha)}.$$

*Exercice 2.5*

On considère l'intégrale

$$Z(g) = \int d^2q \exp \left[ \frac{1}{g} \left( \frac{\mathbf{q}^2}{2} - \frac{(\mathbf{q}^2)^2}{4} \right) \right],$$

où le vecteur  $\mathbf{q}$  a deux composantes  $q_1, q_2$ . Calculer cette intégrale pour  $g \rightarrow 0_+$  par la méthode du col. On vérifiera d'abord que la méthode du col à deux variables n'est pas justifiée. On pourra alors réexaminer le problème en coordonnées polaires.

*Solution.* Il y a un cercle de cols dégénérés et il faut passer en coordonnées polaires pour en tenir compte car l'intégrale gaussienne autour de chaque col diverge. Alors

$$Z(g) \sim 2\pi^{3/2} g^{1/2} e^{1/4g}.$$

*Exercice 2.6*

Les polynômes de Hermite, qui sont liés aux fonctions propres de l'oscillateur harmonique, ont une représentation intégrale de la forme

$$\mathcal{H}_n(z) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{-ns^2/2} (z - is)^n.$$

Evaluer ces polynômes pour  $n \rightarrow \infty$  et  $z$  réel par la méthode du col.

*Solution.* Les polynômes  $\mathcal{H}_n(z)$  sont pairs ou impairs

$$\mathcal{H}_n(-z) = (-1)^n \mathcal{H}_n(z).$$

Nous pouvons donc nous restreindre à  $z \geq 0$ .

Posons

$$A(s) = \frac{1}{2}s^2 - \ln(z - is).$$

Les cols sont donnés par

$$A'(s) = s - \frac{1}{s+iz} = 0 \Rightarrow s_{\pm} = -\frac{1}{2}iz \pm \sqrt{1 - z^2/4}.$$

Par ailleurs

$$A''(s) = 1 + \frac{1}{(s+iz)^2} = s^2 + 1.$$

Il faut alors distinguer les deux cas  $0 \leq z < 2$  et  $z > 2$  ( $z = 2$  exige un traitement spécial).

(ii)  $z > 2$ . Il est commode de poser  $z = 2 \cosh \theta$  avec  $\theta > 0$ . Alors

$$s_{\pm} = -ie^{\pm\theta} \Rightarrow e^{-nA} = \exp \left[ \frac{1}{2}n e^{\pm 2\theta} \mp n\theta \right].$$

Il est facile de se convaincre en déplaçant le contour que le col pertinent est  $s_-$  (le col  $s_+$  est un col entre le trou à  $s = -iz$  et l'autre col  $s_-$ ) et donc

$$\mathcal{H}_n(z) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\theta}}} \exp \left[ \frac{1}{2}n e^{-2\theta} + n\theta \right].$$

Au contraire pour  $|z| < 2$ , les deux cols contribuent. Posant  $z = 2 \cos \theta$ , on trouve

$$\mathcal{H}_n(z) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2i\theta}}} e^{n e^{-2i\theta}/2 + ni\theta} + \text{conjugué complexe}.$$

### Exercice 2.7

Evaluer par la méthode du col l'intégrale

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-nx^2/2 + nax} \cosh^n x$$

en fonction du paramètre réel  $a$  dans la limite  $n \rightarrow \infty$ . On pourra exprimer le résultat sous forme paramétrique en fonction de la position du col.

*Solution.* On observe qu'on peut écrire l'intégrale

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{nf(x)},$$

$$f(x) = -x^2/2 + ax + \ln \cosh x.$$

La position du col est donnée par

$$f'(x) = 0 = -x + a + \tanh x,$$

et

$$f''(x) = -\tanh^2(x).$$

Cette équation a donc une solution unique  $x(a)$  pour tout  $a$ . Il est commode de paramétrer le résultat en fonction de  $x(a)$ . On substitue

$$a = x - \tanh x.$$

Au col

$$f(x) = x^2/2 - x \tanh x + \ln \cosh x,$$

et donc

$$I_n(a) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{|\tanh x|} e^{nf(x)}.$$

On note que la méthode du col ne s'applique pas pour  $a = 0$  où  $f''(x)$  s'annule au col. Il faut alors développer  $f(x)$  jusqu'à l'ordre  $x^4$  et intégrer directement.

## Chapitre 3

### Universalité et limite continue

Nous abordons maintenant deux des sujets principaux de ce cours, les questions liées d'*universalité* et de *limite continue* macroscopique.

Nous allons d'abord expliquer les notions d'universalité et de limite continue à l'aide d'exemples classiques simples, le théorème de la limite centrale de la théorie des probabilités et les propriétés de la marche au hasard sur réseau.

Ces exemples ont en commun les caractéristiques suivantes: ce sont des processus aléatoires déterminés par des lois de probabilité dont les déviations par rapport à la valeur moyenne décroissent rapidement avec l'écart. Par ailleurs, nous nous intéressons à des propriétés collectives d'un nombre de variables aléatoires tendant vers l'infini.

De l'étude de ces premiers exemples émergera l'importance des distributions gaussiennes, ce qui justifiera les développements du chapitre 2.

#### 3.1 Théorème de la limite centrale des probabilités

L'exemple le plus simple d'*universalité* nous vient de la théorie des probabilités: c'est le théorème de la limite centrale, dont nous démontrons ici une version forte avec des hypothèses assez restrictives, mais bien adaptées aux questions que nous voulons étudier par la suite.

Considérons une variable aléatoire réelle  $q$  dont la distribution de probabilité est caractérisée par une fonction  $\rho(q) \geq 0$ . Nous notons  $\langle f \rangle$  la valeur moyenne d'une fonction  $f(q)$ :

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \rho(q) f(q), \quad \langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \rho(q) = 1. \quad (3.1)$$

Nous choisissons, pour des raisons de simplicité technique,  $\rho(q)$  d'une des deux classes qui apparaîtront fréquemment par la suite:  $\rho(q)$  est une fonction (et non une distribution) positive, dérivable par morceaux à dérivée sommable, et à variation bornée:

$$\int dq |\rho'(q)| < \infty, \quad \int |d\rho| < \infty. \quad (3.2)$$

Plus loin nous évoquerons l'autre situation qui nous intéresse, le cas d'une distribution discrète où  $q$  ne prend que des valeurs entières.

De plus, nous supposons  $\rho(q)$  bornée à décroissance exponentielle, c'est à dire qu'il existe deux constantes positives  $M, \mu$  telles que

$$\rho(q) \leq M e^{-\mu|q|}, \quad \mu > 0. \quad (3.3)$$

Dans ces conditions les grandes valeurs de  $|q|$  sont très peu probables.

Avec ces hypothèses (assez restrictives du pur point de vue du théorème de la limite centrale), on démontre que *la distribution asymptotique de la valeur moyenne de  $n$  variables aléatoires indépendantes de même distribution  $\rho$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , est une distribution gaussienne.*

### 3.1.1 Transformation de Fourier

Pour démontrer le théorème, il est commode d'introduire la transformée de Fourier  $\tilde{\rho}(k)$  de la fonction  $\rho(q)$ , qui est aussi une fonction génératrice de moments de la distribution, ainsi que la fonction  $w(k) = \ln \tilde{\rho}(k)$  qui est la fonction génératrice des cumulants.

*Transformée de Fourier.* La transformée de Fourier

$$\tilde{\rho}(k) = \int dq e^{-ikq} \rho(q) \Rightarrow \rho(q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq} \tilde{\rho}(k) \quad (3.4)$$

de la distribution  $\rho(q)$  satisfait (\* note ici la conjugaison complexe)

$$\tilde{\rho}^*(k) = \tilde{\rho}(-k), \quad \tilde{\rho}(k=0) = 1, \quad |\tilde{\rho}(k)| \leq 1,$$

et de plus, avec nos hypothèses,  $|\tilde{\rho}(k)| = 1$  n'est possible que pour  $k = 0$ .

Avec la borne (3.3), l'intégrale définissant  $\tilde{\rho}(k)$  converge aussi pour  $k$  complexe dans le domaine

$$|\operatorname{Im} k| < \mu.$$

La fonction  $\tilde{\rho}(k)$  est, de plus, dérivable dans cette bande et est donc holomorphe.

Les transformées de Fourier analytiques dans une bande correspondent aux distributions à décroissance exponentielle.

Cette propriété illustre la dualité entre décroissance d'une fonction et régularité de sa transformée de Fourier. Elle va jouer un rôle très important dans notre étude de l'universalité et de la limite continue.

En particulier,  $\tilde{\rho}(k)$  admet un développement en série de Taylor convergent pour  $|k| < \mu$ . Elle est également la fonction génératrice des moments de la distribution  $\rho(q)$  puisque

$$\tilde{\rho}(k) = 1 + \sum_{p=1} \frac{(-i)^p}{p!} \langle q^p \rangle k^p.$$

avec

$$\langle q^p \rangle = \int dq q^p \rho(q), \quad |\langle q^p \rangle| < \frac{2M}{\mu^{p+1}} p!.$$

Enfin les propriétés de dérivabilité de  $\rho(q)$  et les hypothèses (3.2) entraînent que  $\tilde{\rho}(k)$  décroît comme  $1/k$  pour  $|k| \rightarrow \infty$ .

Il est également commode d'introduire la fonction

$$w(k) = \ln \tilde{\rho}(k) = \sum_{p=1} \frac{(-i)^p}{p!} w_p k^p, \quad (3.5)$$

(notons  $w^*(k) = w(-k)$ ) qui est une fonction génératrice des cumulants de la distribution:

$$w_1 = \langle q \rangle, \quad w_2 = \langle q^2 \rangle - (\langle q \rangle)^2, \quad w_3 = \langle q^3 \rangle - 3 \langle q^2 \rangle \langle q \rangle + 2 (\langle q \rangle)^3 \dots$$

La fonction  $w$  satisfait

$$w(0) = 0, \quad \text{Re } w(k) < 0 \text{ pour } k \neq 0.$$

Notons que le coefficient  $w_2$  qui peut aussi s'écrire

$$w_2 = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle \geq 0,$$

(le carré de l'écart quadratique moyen) est positif, sauf pour une distribution certaine que nous excluons; que dans le cas d'une distribution gaussienne tous les cumulants  $w_p$  avec  $p > 2$  sont nuls puisque  $\tilde{\rho}(k)$  est aussi une fonction gaussienne.

La fonction analytique  $w(k)$  a comme singularité les singularités de  $\tilde{\rho}(k)$  et ses zéros. Comme  $\tilde{\rho}(0) = 1$ , il existe un cercle centré à l'origine sans zéro dans lequel  $w(k)$  est analytique.

### 3.1.2 Théorème de la limite centrale et conséquences

On considère maintenant  $n$  variables aléatoires indépendantes  $q_i$  avec la même distribution  $\rho(q)$ , ou  $n$  tirages de la même variable (mais physiquement c'est la première situation qui nous intéresse).

*Distribution de la somme de  $n$  tirages.* La distribution de la somme de  $n$  tirages est donnée par

$$P_n(Q) = \langle q_1 + q_2 + \dots + q_n \rangle \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n q_i = Q.$$

Elle satisfait à l'équation de récurrence

$$\begin{aligned} P_{n+1}(Q) &= \langle q_1 + q_2 + \dots + q_n + q_{n+1} \rangle \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n+1} q_i = Q \\ &= \int dQ' \rho(Q') P_n(Q - Q'). \end{aligned} \quad (3.6)$$

C'est une équation de convolution qui se simplifie donc après transformation de Fourier. Posant

$$\tilde{P}_n(k) = \int dq e^{ikq} P_n(q),$$

on trouve

$$\tilde{P}_{n+1}(k) = \tilde{\rho}(k) \tilde{P}_n(k)$$

et donc

$$\tilde{P}_n(k) = \tilde{\rho}^n(k) = e^{nw(k)}. \quad (3.7)$$

On en déduit

$$P_n(Q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikQ} \tilde{P}_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikQ + nw(k)}. \quad (3.8)$$

La fonction  $\tilde{P}_n(k)$  décroît donc comme  $1/|k|^n$  pour  $|k| \rightarrow \infty$ , de sorte que  $P_n(Q)$  est  $n - 1$  fois dérivable.

Comme  $\text{Re } w(k) < 0$  pour  $k \neq 0$ , la contribution du voisinage de  $k = 0$  domine l'intégrale (3.8) à des corrections décroissant exponentiellement en  $n$ . Dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , nous pouvons donc restreindre l'intégrale à un voisinage  $|k|/n \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  mais arbitrairement petit. Comme dans la méthode du col, on peut donc remplacer la fonction analytique  $w(k)$  par les premiers termes de son développement en série de Taylor (3.5):

$$P_n(Q) = \frac{1}{2\pi} \int dk \exp \left( iQk - inw_1k - \frac{1}{2}nw_2k^2 + O(k^3) \right). \quad (3.9)$$

L'intégrale gaussienne donne

$$P_n(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nw_2}} e^{-n(Q/n - w_1)^2 / 2w_2} (1 + O(1/n)), \quad (3.10)$$

où nous avons négligé des termes décroissant exponentiellement en  $n$ .

À  $Q$  fixé, la probabilité tend exponentiellement vers zéro pour tout  $w_1 \neq 0$ .

Par contre, la variable aléatoire  $Q = (q_1 + q_2 + \dots + q_n)/n$ , valeur moyenne des  $n$  variables, a comme distribution

$$R_n(Q) = nP_n(nQ) \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi w_2}} e^{-n(Q - w_1)^2 / 2w_2}.$$

La moyenne de  $n$  variables est donc une variable aléatoire qui tend vers une valeur certaine qui est la valeur moyenne

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle q_i \rangle = \langle q \rangle = w_1. \quad (3.11)$$

Enfin, la variable aléatoire

$$X = \left( \frac{1}{n} \sum_i q_i - w_1 \right) \sqrt{n}, \quad (3.12)$$

et donc  $\langle X \rangle = 0$ , a comme distribution

$$L_n(X) = \sqrt{n} P_n(nw_1 + X\sqrt{n}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi w_2}} e^{-X^2/2w_2}.$$

*Universalité.* La distribution asymptotique de la moyenne de  $n$  variables indépendantes de valeur moyenne nulle est une distribution gaussienne, indépendamment de la distribution initiale (dans une certaine classe); en particulier elle ne dépend que du seul paramètre  $w_2 = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle$ . Cette indépendance dans la distribution initiale est un premier exemple d'*universalité*. Elle traduit les propriétés collectives d'un nombre infini de variables aléatoires non corrélées.

Il est facile de calculer les corrections à ce résultat asymptotique. Si  $w_3 \neq 0$  on trouve

$$L_n(X) = \frac{e^{-X^2/2w_2}}{\sqrt{2\pi w_2}} \left[ 1 + (X^3/6 - w_2 X/2) \frac{w_3}{w_2^3 \sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Les cumulants  $w_p$ ,  $p > 2$  caractérisent alors l'approche à la distribution gaussienne limite, le premier cumulant non-nul donnant la correction dominante. Ils modifient la gaussienne par des corrections relatives polynomiales.

*Remarque.* Comme des termes décroissants exponentiellement avec  $n$  ont été négligés, numériquement la forme asymptotique n'est une bonne approximation pour  $n$  grand mais fini que si

$$|X| \ll \sqrt{n} \quad \text{pour } n \gg 1.$$

*Cumulants de la distribution.* La transformée  $\tilde{R}_n(k)$  de la distribution  $R_n(Q)$  se déduit de l'équation (3.8), qui implique

$$\tilde{R}_n(k) = e^{nw(k/n)}. \quad (3.13)$$

Les cumulants de la distribution  $R_n(Q)$  se déduisent donc simplement des cumulants (3.5) de la distribution  $\rho(q)$ ,

$$\ln \tilde{R}_n(k) = \sum_{p=1} \frac{(-i)^p}{p!} \Omega_p k^p, \quad \Omega_p = n^{1-p} w_p.$$

Cette expression montre que pour  $n \rightarrow \infty$  tous les cumulants de  $R_n(Q)$  avec  $p > 1$  tendent vers zéro, ce qui correspond à la propriété que la valeur moyenne  $Q = \langle Q \rangle$

devient certaine. Notons que le comportement des moments de la distribution  $R_n$  est beaucoup moins simple.

De même, la représentation de Fourier de la distribution  $L_n(X)$  peut s'écrire

$$L_n(X) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int dk e^{ik(X\sqrt{n}+nw_1)} e^{nw(k)}.$$

Après le changement de variable  $\kappa = k\sqrt{n}$ , nous reconnaissons la transformée de Fourier  $\tilde{L}_n(\kappa)$  de  $L_n(X)$ :

$$\begin{aligned} \ln \tilde{L}_n(\kappa) &= nw(\kappa/\sqrt{n}) + iw_1\kappa\sqrt{n} = -\frac{1}{2}w_2\kappa^2 + \frac{(-i)^3}{3!} \frac{w_3}{n^{1/2}}\kappa^3 \\ &+ \frac{(-i)^4}{4!} \frac{w_4}{n}\kappa^4 + \dots, \end{aligned}$$

et donc la fonction génératrice des cumulants de la distribution de  $X$ . Les cumulants convergent vers les cumulants d'une distribution gaussienne universelle. Les moments se déduisant des cumulants de façon algébrique, la même propriété s'applique pour les moments. Notons que cette convergence n'exige que des hypothèses plus faibles.

*Exemples.*

(i) La distribution uniforme sur le segment  $[-1, +1]$  et nulle en dehors du segment, est centrée en zéro, et satisfait aux conditions du théorème de la limite centrale

$$\rho(q) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(q+1) - \text{sgn}(q-1)), \quad \Rightarrow \quad \langle q \rangle = 0, \quad \langle q^2 \rangle = \frac{1}{3}.$$

Sa transformée de Fourier est

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dq e^{iqk} = \frac{\sin k}{k}.$$

Développons la fonction  $w(k)$

$$w(k) = \ln(\sin k/k) = \frac{1}{6}k^2 + \frac{1}{180}k^4 + O(k^6).$$

Le coefficient de  $k^4$  caractérise la déviation dominante par rapport à la distribution gaussienne asymptotique. Cet exemple montre bien que la forme gaussienne n'est pas une bonne approximation pour  $|X| > \sqrt{n}$  où la distribution exacte s'annule.

(ii) La distribution

$$\rho(q) = \frac{1}{2}\mu e^{-\mu|q|},$$

satisfait également à nos hypothèses. Sa transformée de Fourier est

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{\mu^2}{k^2 + \mu^2}.$$

(iii) Par contre, une distribution qui ne satisfait pas aux conditions du théorème de la limite centrale, même dans sa forme la plus faible, est par exemple

$$\rho(q) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+q^2}.$$

Cette distribution n'a pas de second moment puisque l'intégrale  $\int q^2 \rho(q) dq$  diverge. Sa transformée de Fourier

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{1}{2} e^{-|k|},$$

n'est pas dérivable à  $k = 0$ . Nous remarquons

$$[\tilde{\rho}(k/n)]^n = \frac{1}{2} e^{-|k|},$$

et donc  $R(Q) = \rho(Q)$ . Cette distribution est la distribution asymptotique d'une autre classe d'universalité.

### 3.1.3 Variables aléatoires à valeurs entières

Le théorème de la limite centrale se généralise au cas d'une variable aléatoire  $q$  qui ne prend que des valeurs entières. Les intégrales sont remplacées par des sommes et les transformées de Fourier deviennent des séries de Fourier.

Nous supposons de nouveau que les probabilités correspondantes  $\rho(q) \geq 0$  satisfont la même borne exponentielle (3.3).

On introduit maintenant la série de Fourier convergente

$$\tilde{\rho}(k) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} e^{-ikq} \rho(q), \quad \rho(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk e^{ikq} \tilde{\rho}(k),$$

et la fonction  $w(k) = \ln \tilde{\rho}(k)$ .

Avec la borne (3.3) la fonction  $\tilde{\rho}(k)$  périodique, de période  $2\pi$ , est aussi holomorphe dans la bande  $|\operatorname{Im} k| < \mu$ .

Par ailleurs

$$|\tilde{\rho}(k)| \leq 1,$$

et si nous supposons de plus que  $2\pi$  est la plus petite période de  $\tilde{\rho}(k)$ , alors dans l'intervalle  $-\pi \leq k \leq \pi$  le maximum  $\tilde{\rho}(k) = 1$  n'est atteint que pour  $k = 0$ . La série de Fourier a donc les propriétés qui ont permis de démontrer le théorème de la limite centrale.

La distribution de la somme de  $n$  variables indépendantes,

$$P_n(Q) = \sum_{q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Z}} \prod_i \rho(q_i) \quad \text{avec} \quad \sum_i q_i = Q,$$

satisfait la forme discrète de l'équation de récurrence (3.6):

$$P_{n+1}(Q) = \sum_{Q' \in \mathbb{Z}} \rho(Q') P_n(Q - Q'). \quad (3.14)$$

La série de Fourier correspondante

$$\tilde{P}_n(k) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} e^{-ikq} P_n(q), \quad P_n(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk e^{ikq} \tilde{P}_n(k),$$

satisfait à l'équation de récurrence

$$\tilde{P}_{n+1}(k) = \tilde{\rho}(k) \tilde{P}_n(k),$$

et donc

$$\tilde{P}_n(k) = \tilde{\rho}^n(k) = e^{nw(k)}.$$

En représentation de Fourier, on est ramené à la situation précédente. La variable aléatoire  $(q_1 + q_2 + \dots + q_n)/n$  tend vers une valeur certaine, la moyenne  $w_1 = \langle q \rangle$ .

Les cumulants de la distribution de la variable aléatoire

$$X = \left( \frac{1}{n} \sum_i q_i - w_1 \right) \sqrt{n}, \quad (3.15)$$

tendent vers les cumulants d'une distribution gaussienne universelle caractérisé par le paramètre  $w_2$ .

Notons, par contre, que la distribution  $L_n(X)$  n'a pas de limite au sens des fonctions, puisqu'elle n'est non nulle que sur un ensemble discret, mais seulement au sens des mesures. Par contre, au sens des mesures, le caractère discret initial n'est pas important, et dans la limite  $n \rightarrow \infty$  on obtient la même limite gaussienne.

Du point de vue physique, on peut interpréter  $X$  comme une variable macroscopique, moyenne d'un grand nombre de variables microscopiques, qui n'est mesurée qu'avec une précision finie  $\Delta X$ . D'une part, le concept de convergence au sens des mesures est alors approprié. Par ailleurs, dès que  $1/\sqrt{n} \gg \Delta X$  le caractère discret des variables  $q$  ne joue plus de rôle. Nous pouvons alors considérer  $X$  comme une variable continue. Nous introduisons donc la notion de *limite continue*, la fonction continue vers laquelle les points de  $L_n(X)$  convergent. La distribution gaussienne, considérée comme une fonction continue, est la limite continue de  $L_n(X)$ .

*Exemple.*

$$\rho(q) = \frac{1}{2} \quad \text{pour } q = \pm 1.$$

Alors

$$\tilde{\rho}(k) = \cos k, \quad w(k) = \ln \cos k = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{12}k^4 + O(k^6).$$

## 3.2 Universalité et points fixes de transformations

Nous allons maintenant démontrer la propriété d'universalité, à savoir l'existence d'une distribution gaussienne limite indépendante de la distribution initiale, de façon très différente. Il va être simple de supposer que nous partons de  $2^m$  variables indépendantes. Nous moyennons alors ces variables deux par deux de façon itérative, diminuant le nombre de variables d'un facteur deux à chaque itération.

Cette méthode va nous fournir un premier exemple, élémentaire, de l'application des méthodes de groupe de renormalisation pour démontrer des propriétés d'universalité et va nous permettre de définir un langage adapté.

La distribution de la valeur moyenne de deux variables est obtenue par une transformation  $\mathcal{T}$ , qui sur la distribution  $\rho(q)$  a une forme compliquée,

$$(\mathcal{T}\rho)(q) = 2 \int dq' \rho(q')\rho(2q - q'),$$

mais sur la fonction  $w(k)$  devient une application linéaire qui s'écrit simplement

$$(\mathcal{T}w)(k) \equiv 2w(k/2).$$

Notons que le choix du facteur  $k/2$  correspond à une anticipation du résultat que c'est la moyenne et non la somme qui a une distribution limite. Notons aussi que la transformation est indépendante de  $m$ . Dans le langage des systèmes dynamiques, son application répétée définit un processus markovien.

La fonction génératrice des cumulants de la moyenne des  $n = 2^m$  variables s'obtient en itérant la transformation:

$$\ln \tilde{R}_n(k) = (\mathcal{T}^m w)(k).$$

### 3.2.1 Cas générique

La distribution asymptotique est nécessairement un point fixe de cette transformation. Elle correspond donc à une fonction  $w_*(k)$  (où la notation  $*$  n'est pas reliée à la conjugaison complexe) qui satisfait

$$(\mathcal{T}w_*)(k) = 2w_*(k/2) = w_*(k).$$

Nous cherchons une solution dans la classe des fonctions régulières à  $k = 0$ . Développant les deux membres en puissances de  $k$ , nous trouvons que les solutions sont de la forme

$$w_*(k) = -iw_1 k,$$

et forment une famille à un paramètre  $w_1$  qui peut être absorbé (si  $w_1 \neq 0$ ) dans une normalisation de la variable aléatoire  $q$ . Elles correspondent bien à des distributions certaines  $q = \langle q \rangle = w_1$ . En effet

$$\rho(q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq - iw_1 k} = \delta(q - w_1),$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac.

*Convergence et stabilité du point fixe.* On peut maintenant étudier la convergence d'une distribution initiale quelconque vers ce point fixe.

Pour une transformation générale non linéaire, il est souvent impossible de faire une analyse globale. On ne peut souvent que linéariser la transformation au voisinage du point fixe et faire une étude locale.

Ici cela n'est pas nécessaire puisque la transformation est linéaire. Posons

$$w(k) = w_*(k) + \delta w(k).$$

Alors

$$\mathcal{T}w(k) = \mathcal{T}w_*(k) + \mathcal{T}\delta w(k) = w_*(k) + \mathcal{T}\delta w(k).$$

Cherchons les vecteurs et valeurs propres  $\tau$  de la transformation  $\mathcal{T}$ . Il est clair que les vecteurs propres sont de la forme  $k^p$ , où  $p$  est un entier positif car  $w(k)$  est holomorphe et  $w(0) = 0$ :

$$\mathcal{T}k^p = \tau_p k^p \quad \text{avec} \quad \tau_p = 2^{1-p}.$$

Dans la mesure où à chaque itération le nombre de variables est divisé par deux, on peut relier les valeurs propres au comportement en fonction du nombre  $n$  de variables. On définit l'*exposant* associé

$$l_p = \ln \tau_p / \ln 2 = 1 - p.$$

Après  $m$  itérations, une composante sur  $k^p$  a été multipliée par  $n^{l_p}$ :

$$\mathcal{T}^m k^p = 2^{m(1-p)} k^p = n^{1-p} k^p.$$

Examinons les différentes valeurs de  $p$ :

(i)  $p = 1 \Rightarrow \tau_1 = 1, l_p = 0$ . Si nous ajoutons un terme  $\delta w$  proportionnel au vecteur propre  $k$  à  $w_*(k)$ ,  $\delta w(k) = -i\delta w_1 k$ , nous changeons le point fixe

$$w_1 \mapsto w_1 + \delta w_1.$$

Remarquons que ce changement peut s'interpréter comme une simple transformation linéaire sur  $k$  et donc sur la variable aléatoire  $q$ .

De façon générale, l'existence d'un vecteur propre associé à la valeur propre  $\tau = 1$ , et donc  $l = 0$ , est la conséquence de l'existence d'une famille à un paramètre de points fixes. En effet soit  $\alpha$  un tel paramètre et supposons que, quel que soit  $\alpha$ ,

$$\mathcal{T}w_\alpha = w_\alpha,$$

et que  $w_\alpha$  soit une fonction dérivable de  $\alpha$ . Alors,

$$\mathcal{T} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

Dans le langage du groupe de renormalisation où de telles transformations (mais plus linéaires en général) apparaissent, un vecteur propre correspondant à la valeur propre un, et donc un exposant nul, est appelé *marginal*.

(ii)  $p > 2 \Rightarrow \tau_p = 2^{1-p} < 1$ ,  $l_p < 0$ . La composante de  $\delta w$  sur un tel vecteur propre tend vers zéro quand  $n$  ou  $m \rightarrow \infty$ .

Dans le langage du groupe de renormalisation, de tels vecteurs, qui correspondent à des valeurs propres plus petites en module que un, et donc à des exposants négatifs (ou plus généralement à partie réelle négative), sont appelés *inessentiels* (irrelevant en français).

Enfin pour étudier le comportement d'une variation arbitraire  $\delta w(k)$ , il suffit de la développer sur la base des vecteurs propres, c'est à dire de la développer en série de Taylor.

*L'universalité dans ce formalisme est liée à la propriété que tous les vecteurs propres, sauf un nombre fini, sont inessentiels.*

### 3.2.2 Distribution centrée

Pour une distribution centrée,  $w_1 = 0$ , la solution est  $w(k) \equiv 0$  sauf si nous modifions la transformation en introduisant une transformation linéaire de  $q$ ,  $q \mapsto \lambda q$  (une renormalisation), avec  $\lambda$  réel positif pour l'instant arbitraire et donc  $k \mapsto k/\lambda$ :

$$(\mathcal{T}_\lambda w)(k) = 2w(k/\lambda).$$

L'équation de point fixe devient

$$w_*(k) = 2w_*(k/\lambda).$$

Développant de nouveau les deux membres, et utilisant  $w_1 = 0$ ,  $w_2 > 0$  nous trouvons

$$w_2 = 2w_2/\lambda^2.$$

Cette équation a une solution non-triviale si  $\lambda = \sqrt{2}$ :

$$w_*(k) = -\frac{1}{2}w_2k^2.$$

On trouve donc une distribution gaussienne. Comme dans cette transformation le nombre  $n$  de variables est divisé par deux, cette valeur de  $\lambda$  correspond au facteur  $\sqrt{n}$  dans la transformation (3.12).

*Stabilité du point fixe.* La valeur de  $\lambda$  et donc la transformation  $\mathcal{T}$  étant déterminées, il est facile de faire de nouveau une étude de stabilité du point fixe. Posons

$$w(k) = w_*(k) + \delta w(k),$$

et cherchons les vecteurs et valeurs propres de la transformation

$$\mathcal{T}\delta w \equiv 2\delta w(k/\sqrt{2}) = \tau\delta w(k).$$

Les vecteurs propres sont évidemment toujours de la forme

$$\delta w(k) = k^p \Rightarrow \tau_p = 2^{1-p/2}.$$

En termes du nombre  $n$  de variables, cette valeur correspond à des exposants

$$l_p = \ln \tau_p / \ln 2 = 1 - p/2.$$

Examinons les différents cas.

(i)  $p = 1 \Rightarrow \tau_1 = \sqrt{2}$ ,  $l_p = \frac{1}{2}$ . Ceci correspond à une direction d'instabilité, une composante sur tel vecteur tend vers l'infini quand  $m \rightarrow \infty$ .

Dans le langage du groupe de renormalisation, une perturbation correspondant à un exposant  $l$  positif est appelée *essentielle*. Chaque itération éloigne du point fixe même si la composante est initialement arbitrairement petite. On ne reste pas dans un voisinage du point fixe (à la différence du cas marginal).

L'interprétation est ici simple, une composante sur  $k$  viole la condition  $w_1 = 0$  et on est ramené à l'étude des points fixes de la section précédente.

(ii)  $p = 2 \Rightarrow \tau_2 = 1$ ,  $l_2 = 0$ . Une valeur propre nulle caractérise une perturbation *marginale*. Ici c'est le cas de  $p = 2$  qui ne fait que modifier la valeur de  $w_2$ . Ceci peut de nouveau s'interpréter comme un changement linéaire sur la variable aléatoire.

(iii)  $p > 2 \Rightarrow \tau_p = 2^{1-p/2} < 1$ ,  $l_p = 1 - p/2 < 0$ . Enfin toutes les perturbations  $p > 2$  correspondent à des directions stables en ce sens que leur amplitude tend vers zéro quand  $m \rightarrow \infty$  et sont *inessentielles*.

*Remarques.*

(i) Dans les cas ci-dessus, les perturbations marginales correspondent à de simples changements de normalisation de la variable aléatoire. Dans nombre de problèmes, cette normalisation ne joue aucun rôle. On peut alors considérer que tous les points fixes correspondant à des normalisations différentes ne doivent pas être distingués. Dans ce cas il n'y a qu'un point fixe, et la valeur propre nulle n'est plus appelée *marginale* mais *redondante*, en ce sens qu'elle ne change qu'une normalisation de toute façon arbitraire.

(ii) Il est facile en changeant la valeur de  $\lambda$  de trouver aussi des points fixes de la forme  $|k|^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$  ( $\alpha > 2$  est exclus car le coefficient de  $k^2$  est strictement positif). Mais ces points fixes ne sont des fonctions régulières de  $k$  et correspondent à des distributions moins concentrées autour de la valeur moyenne. En particulier, ces distributions n'ont pas de second moment  $\langle q^2 \rangle$ .

Dans le langage du groupe de renormalisation, elles correspondent à d'autres *classes d'universalité*. Il faut dans chaque cas caractériser l'ensemble des distributions qui convergent vers ces points fixes.

*Variables aléatoires entières.* Dans ce cas la fonction initiale  $w(k)$  est une fonction périodique de périodes  $2\pi$ . À chaque itération la période est multipliée par  $\lambda$ , et les valeurs possibles de la variable aléatoire  $q$  sont divisées par  $\lambda$ . Le

point fixe  $w_*(k)$  correspond à une fonction qui n'est plus périodique et donc une variable aléatoire  $q$  prenant des valeurs réelles. Cela reflète la propriété qu'il n'y a convergence qu'en mesure.

### 3.3 Marche au hasard et mouvement brownien

Nous considérons maintenant un processus de marche au hasard, en temps discrets, d'abord dans  $\mathbb{R}^d$ , ensuite sur réseau.

Il est entièrement spécifié par une distribution de probabilité  $P_0$  au temps initial  $n = 0$  et une probabilité de transition  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  du point  $\mathbf{q}'$  vers le point  $\mathbf{q}$ , indépendante du temps  $n$ .

En particulier, le processus est markovien, c'est à dire que le déplacement au temps  $n$  ne dépend que de la position au temps  $n$  mais pas de l'histoire antérieure qui a conduit à ce point.

Notre but est de montrer, d'abord dans le continu, ensuite sur le réseau, qu'asymptotiquement dans le temps, pour une classe de marches au hasard, on retrouve de nouveau des lois asymptotiques gaussiennes universelles.

Nous introduisons aussi les notions de *limite continue* et d'*intégrale de chemin*.

#### 3.3.1 Marche dans l'espace continu

Soit  $P_n(\mathbf{q})$  la probabilité pour le marcheur d'être au point  $\mathbf{q}$  au temps  $n$ . La probabilité  $P_n(\mathbf{q})$  satisfait à l'équation d'évolution ou de récurrence (parfois appelée équation maîtresse)

$$P_{n+1}(\mathbf{q}) = \int d^d q' \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') P_n(\mathbf{q}'). \quad (3.16)$$

La conservation des probabilités implique les conditions

$$\int d^d q P_0(\mathbf{q}) = 1, \quad \int d^d q \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 1 \quad \Rightarrow \quad \int d^d q P_n(\mathbf{q}) = 1. \quad (3.17)$$

*Symétries de translation.* Nous avons déjà supposé que la marche est invariante par translation du temps en choisissant  $\rho$  indépendant de  $n$ . Nous supposons maintenant, de plus, que les probabilités de transition sont invariantes par translation d'espace et donc

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (3.18)$$

Dans ces conditions l'équation de récurrence prend la forme d'une équation de convolution

$$P_{n+1}(\mathbf{q}) = \int d^d q' \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}') P_n(\mathbf{q}'), \quad (3.19)$$

généralisation de l'équation (3.6).

*Localité.* Nous nous limitons aussi aux fonctions de transitions qui généralisent les distributions de la section 3.1, c'est à dérivable par morceaux pour chaque

variable et à variation bornée, et satisfaisant une propriété de décroissance exponentielle appelée ici propriété de *localité*, à cause de l'interprétation de marche au hasard: les déplacements trop grands ont une probabilité très faible. Nous supposons donc que les probabilités de transition  $\rho(\mathbf{q})$  satisfont une borne du type (3.3),

$$\rho(\mathbf{q}) \leq M e^{-\mu|\mathbf{q}|}, \quad M, \mu > 0. \quad (3.20)$$

De plus, nous supposons que la distribution initiale  $P_0(\mathbf{q})$  est aussi locale, c'est à dire satisfait la même borne exponentielle, du moins pour  $|q|$  assez grand:

$$P_0(\mathbf{q}) \leq M e^{-\mu|\mathbf{q}|}. \quad (3.21)$$

*Représentation de Fourier.* L'équation (3.19) est une équation de convolution qui se simplifie après transformation de Fourier. Nous introduisons donc

$$\tilde{P}_n(\mathbf{k}) = \int d^d q e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) \Rightarrow \tilde{P}_n^*(\mathbf{k}) = \tilde{P}_n(-\mathbf{k}), \quad \tilde{P}(\mathbf{k} = 0) = 1, \quad (3.22)$$

ainsi que

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \int d^d q e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} \rho(\mathbf{q}) \Rightarrow \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(-\mathbf{k}), \quad \tilde{\rho}(0) = 1, \quad (3.23)$$

où les propriétés (3.17) ont été utilisées.

Prenant le module de l'équation de définition, nous trouvons la borne

$$|\tilde{\rho}(\mathbf{k})| \leq 1. \quad (3.24)$$

De plus, la borne n'est atteinte qu'à l'origine  $\mathbf{k} = 0$ . Enfin la condition de décroissance (3.20) implique que fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  est une fonction analytique holomorphe dans  $|\text{Im } \mathbf{k}| < \mu$ .

Posons

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = e^{w(\mathbf{k})} \Rightarrow w^*(\mathbf{k}) = w(-\mathbf{k}), \quad w(\mathbf{0}) = 0. \quad (3.25)$$

La régularité de  $\tilde{\rho}$  et la condition  $\tilde{\rho}(\mathbf{0}) = 1$  impliquent que  $w(\mathbf{k})$  a un développement régulier pour  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ . Nous posons

$$w(\mathbf{k}) = -i\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{k} - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^d [w_2]_{ab} k_a k_b + O(|k|^3).$$

Identifiant les coefficients du développement de  $w$  avec les moments de la distribution  $\rho(\mathbf{q})$ , nous trouvons

$$[w_2]_{ab} = \langle (q_a - \langle q_a \rangle) (q_b - \langle q_b \rangle) \rangle,$$

où nous avons utilisé la notation

$$\langle f(\mathbf{q}) \rangle \equiv \int d^d q f(\mathbf{q}) \rho(\mathbf{q}). \quad (3.26)$$

La matrice  $w_2$  est définie positive, sauf pour une distribution certaine que nous excluons. En effet,

$$\sum_{ab} X_a X_b [w_2]_{ab} = \left\langle \left[ \sum_a X_a (q_a - \langle q_a \rangle) \right]^2 \right\rangle > 0,$$

comme valeur moyenne d'une quantité strictement positive.

La décroissance de  $P_0$  et  $\tilde{P}_0(0) = 1$  implique que  $\ln \tilde{P}_0(\mathbf{k})$  est holomorphe à  $\mathbf{k} = 0$ . Nous posons aussi

$$\ln \tilde{P}_0(\mathbf{k}) = -i\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{k} + \mathbf{O}(|\mathbf{k}|^2),$$

où  $\mathbf{q}_0$  est la position moyenne initiale.

*Distribution asymptotique.* Après transformation de Fourier, l'équation (3.19) s'écrit

$$\tilde{P}_{n+1}(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \tilde{P}_n(\mathbf{k}) \Rightarrow \tilde{P}_n(\mathbf{k}) = \tilde{p}^n(\mathbf{k}) \tilde{P}_0(\mathbf{k}).$$

Par conséquent,

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \tilde{p}^n(\mathbf{k}) \tilde{P}_0(\mathbf{k}). \quad (3.27)$$

Nous cherchons maintenant à déterminer la distribution  $P_n(\mathbf{q})$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

Avec nos hypothèses nous sommes ramenés à un problème très voisin de celui du théorème de la limite centrale. Pour  $n \rightarrow \infty$ , l'intégrale (3.27) est dominée par le voisinage de  $\mathbf{k} = 0$  et donc

$$\begin{aligned} P_n(\mathbf{q}) &\sim \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \exp \left[ i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - i\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{k} - in\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{k} - \frac{n}{2} \sum_{\alpha\beta=1}^d [w_2]_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \right] \\ &= \frac{(2\pi/n)^{d/2}}{\sqrt{\det \mathbf{w}_2}} \exp \left[ -\frac{1}{2n} \sum_{ab} Q_a [w_2]_{ab}^{-1} Q_b \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 - n\mathbf{w}_1.$$

De nouveau les termes négligés sont de deux types, des corrections multiplicatives d'ordre  $1/\sqrt{n}$  et des corrections additives décroissant exponentiellement avec  $n$ .

La probabilité de trouver le marcheur est donc concentrée autour de la trajectoire rectiligne uniforme

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_0 + n\mathbf{w}_1,$$

et  $\mathbf{w}_1$  a une interprétation de vitesse moyenne.

La variable aléatoire qui caractérise la déviation par rapport à la trajectoire moyenne,

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}\sqrt{n},$$

a une distribution gaussienne asymptotique universelle:

$$L_n(\mathbf{X}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det \mathbf{w}_2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ab} X_a [w_2]_{ab}^{-1} X_b \right]. \quad (3.29)$$

Seule l'interprétation est ici un peu différente de celle du théorème de la limite centrale, car  $n$  a une interprétation de temps. Ce résultat implique que la déviation moyenne par rapport à la trajectoire moyenne augmente comme la racine carrée du temps. C'est une propriété caractéristique du mouvement brownien.

### 3.3.2 Limite du temps continu

Pour simplifier la discussion, nous supposons maintenant  $\mathbf{w}_1 = 0$ , et nous faisons un changement affine de coordonnées tel que

$$\sum_{ab} Q_a [w_2]_{ab}^{-1} Q_b \mapsto \frac{1}{w_2} \mathbf{q}^2,$$

où  $w_2$  est un nombre positif.

La distribution gaussienne limite prend la forme

$$P_n(\mathbf{q}) \sim \left( \frac{2\pi}{nw_2} \right)^{d/2} e^{-\mathbf{q}^2/2nw_2}.$$

En faisant un changement d'échelle de temps, on peut définir par continuité un processus de diffusion ou mouvement brownien associé en temps continu.

Soit  $t$  et  $\varepsilon$  deux réels positifs et  $n$  entier tel que

$$n = [t/\varepsilon], \quad (3.30)$$

où  $[\bullet]$  dénote la partie entière. On prend alors la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $t$  fixé et donc  $n \rightarrow \infty$ .

Si le temps  $t$  est mesuré avec une précision finie  $\Delta t$ , dès que  $\Delta t \gg \varepsilon$ , le temps peut être considéré comme une variable continue pour toutes les fonctions continues du temps.

On fait aussi un changement d'échelle de distance

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}/\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.31)$$

Comme la fonction gaussienne est continue, la distribution asymptotique prend la forme

$$\varepsilon^{-d/2} P_n(\mathbf{q}) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \Pi(t, \mathbf{x}) = \left( \frac{2\pi}{tw_2} \right)^{d/2} e^{-\mathbf{x}^2/2tw_2}. \quad (3.32)$$

(Le changement de variables sur  $\mathbf{q}$  entraîne un changement de normalisation.) Cette distribution est la solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme d'une équation de diffusion ou équation de la chaleur:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} w_2 \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Pi(t, \mathbf{x}).$$

Dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , et dans des variables macroscopiques adaptées, on obtient donc un processus aléatoire qui peut entièrement être décrit dans un temps continu.

La distribution asymptotique  $\Pi(t, \mathbf{x})$  conduit à une *loi d'échelle*, la loi d'échelle du mouvement brownien. Les moments de la distribution satisfont

$$\langle \mathbf{x}^{2m} \rangle = \int d^d x \mathbf{x}^{2m} \Pi(t, \mathbf{x}) \propto t^m.$$

La variable  $\mathbf{x}/\sqrt{t}$  a des moments indépendants du temps. Comme l'indique aussi le changement (3.31), on peut donc attribuer au vecteur  $\mathbf{x}$  une *dimension*  $1/2$  en unité de temps (ce qui correspond aussi à attribuer au chemin brownien une dimension de Hausdorff deux).

### 3.3.3 Corrections à la limite continue

Il est simple d'étudier comment des perturbations à la distribution gaussienne limite décroissent avec  $\varepsilon$ .

Nous supposons toujours que  $\mathbf{w}_1 = 0$  et que nous avons choisi un système de coordonnées tel que le développement de la fonction régulière  $w(\mathbf{k})$  définie en (3.25) en puissances de  $\mathbf{k}$  s'écrive

$$w(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} w_2 \mathbf{k}^2 + \sum_{r=3} \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{i^r}{r!} w_{i_1, \dots, i_r}^{(r)} k_{i_1} \dots k_{i_r}.$$

Nous choisissons aussi une condition aux limites certaine,

$$P_0(\mathbf{q}) = \delta^{(d)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

où  $\delta^{(d)}(\mathbf{q})$  est la distribution de Dirac.

Dans ces conditions (équation (3.27))

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} e^{nw(\mathbf{k})}.$$

Nous faisons alors les changements d'échelle (3.30,3.31), ce qui sur les variables de Fourier correspond à  $\mathbf{k} = \kappa\sqrt{\varepsilon}$ . Nous trouvons

$$nw(\mathbf{k}) = t\omega(\kappa),$$

$$\omega(\kappa) = -\frac{w_2}{2!}\kappa^2 + \sum_{r=3} \varepsilon^{r/2-1} \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{i^r}{r!} w_{i_1, \dots, i_r}^{(r)} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_r}.$$

On voit que les contributions décroissent d'autant plus vite que les puissances de  $\mathbf{k}$  sont élevées quand  $\varepsilon = t/n$  tend vers zéro.

La distribution dans la limite continue prend la forme

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \kappa e^{-i\kappa\cdot\mathbf{x}} e^{t\omega(\kappa)},$$

où l'intégrale sur  $\kappa$  n'est plus restreinte à une période. Dérivant par rapport au temps  $t$ , nous voyons que  $\Pi(t, \mathbf{x})$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, \mathbf{x}) = \left[ \frac{w_2}{2!} \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{r=3} \varepsilon^{r/2-1} \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{i^r}{r!} w_{i_1, \dots, i_r}^{(r)} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \right] \Pi(t, \mathbf{x}),$$

où nous avons utilisé la propriété que la multiplication par  $\kappa$  de la transformée de Fourier correspond à la dérivation par rapport à  $x$  de la fonction. Nous remarquons que les contributions qui contiennent le plus de dérivées, tendent le plus vite vers zéro, puisque chaque dérivée supplémentaire est affectée d'un facteur  $\sqrt{\varepsilon}$ .

### 3.3.4 Marche sur réseau

En général les marches au hasard sont formulées sur un réseau. Nous considérons donc le réseau à  $d$  dimensions formé par les points de coordonnées entières  $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_d)$ .

Soit alors  $P_n(\mathbf{q})$  la probabilité au temps  $n$  d'être au point  $\mathbf{q}$ . Les probabilités  $P_n(\mathbf{q})$  satisfont l'équation de récurrence

$$P_{n+1}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbb{Z}^d} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') P_n(\mathbf{q}'). \quad (3.33)$$

La conservation des probabilités implique les conditions

$$\sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} P_0(\mathbf{q}) = 1, \quad \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 1 \Rightarrow \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} P_n(\mathbf{q}) = 1. \quad (3.34)$$

*Symétries.* Nous nous limitons de nouveau aux probabilités de transition invariantes par translation d'espace, et donc

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (3.35)$$

Alors l'équation de récurrence prend la forme d'une équation de convolution

$$P_{n+1}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbb{Z}^d} \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}') P_n(\mathbf{q}'),$$

généralisation de l'équation (3.6) dans sa forme discrète.

Nous supposons de plus que les probabilités de transition ont la symétrie du réseau, c'est à dire sont invariantes par le groupe à  $2^d d!$  éléments engendré par

$$\begin{cases} \rho(q_1, \dots, q_{i+1}, q_i, \dots, q_d) = \rho(q_1, \dots, q_i, q_{i+1}, \dots, q_d) \quad \forall i. \\ \rho(-q_1, \dots, q_d) = \rho(-q_1, \dots, q_d), \end{cases} \quad (3.36)$$

Ce groupe est un sous-groupe fini du groupe orthogonal  $O(d)$  (rotations-réflexions dans  $\mathbb{R}^d$ ). Il admet le groupe symétrique ou groupe des permutations  $q_i \mapsto q_{P(i)}$  engendré par les transpositions comme sous-groupe, ainsi que toutes les réflexions  $q_i \mapsto -q_i$ . Toutes les directions sur le réseau sont donc équivalentes. Par exemple, pour le réseau carré, on trouve les huit éléments

$$(\epsilon_1 q_1, \epsilon_2 q_2) \quad \text{et} \quad (\epsilon_2 q_2, \epsilon_1 q_1),$$

avec  $\epsilon_1 = \pm 1$ ,  $\epsilon_2 = \pm 1$ .

*Localité.* Nous nous restreignons aux probabilités de transition  $\rho(\mathbf{q})$  ayant une propriété de localité, c'est à dire satisfaisant une borne du type (3.20):

$$\rho(\mathbf{q}) \leq M e^{-\mu|\mathbf{q}|}, \quad M, \mu > 0.$$

Ceci comprend l'exemple classique où les seuls déplacements possibles correspondent aux voisins sur le réseau.

De plus, nous supposons aussi que la distribution initiale  $P_0(\mathbf{q})$  est aussi locale, c'est à dire satisfait à la même borne exponentielle:

$$P_0(\mathbf{q}) \leq M e^{-\mu|\mathbf{q}|}.$$

Un cas particulier est une position de départ certaine  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ , et donc

$$P_0(\mathbf{q}) = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}.$$

Dans ces conditions on démontre que dans la limite asymptotique  $n \rightarrow \infty$ , la distribution  $P_n(\mathbf{q})$  tend de nouveau vers une distribution gaussienne du type

$$P_n(\mathbf{q}) \sim \frac{1}{(2\pi w_2 n)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2}{2w_2 n} \right]. \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{q}_0$  dépend de la distribution initiale au temps  $n = 0$ , et  $w_2$  de la probabilité de transition.

La démonstration du résultat est une généralisation simple de la démonstration de la méthode de la section 3.3.1.

### 3.3.5 Séries de Fourier

Dans le cas d'une probabilité de transition invariante par translation, la distribution  $P_n(\mathbf{q})$  peut se calculer par transformation de Fourier. Nous posons

$$\tilde{P}_n(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) \Rightarrow \tilde{P}_n^*(\mathbf{k}) = \tilde{P}_n(-\mathbf{k}), \quad \tilde{P}(\mathbf{k} = 0) = 1, \quad (3.38)$$

ainsi que

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \rho(\mathbf{q}) \Rightarrow \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(-\mathbf{k}), \quad \tilde{\rho}(0) = 1, \quad (3.39)$$

où les propriétés (3.34,3.35) ont été utilisées. Les fonctions  $\tilde{P}_n$  and  $\tilde{\rho}$  sont des fonctions périodiques des composantes  $k_i$  du vecteur  $\mathbf{k}$ , et ces composantes peuvent donc être restreintes à  $-\pi \leq k_i < \pi$  (un domaine appelé en physique une *zone de Brillouin*).

Prenant le module de l'équation de définition, on trouve la borne

$$|\tilde{\rho}(\mathbf{k})| \leq 1. \quad (3.40)$$

De plus, si pour chaque composante  $k_i$ ,  $2\pi$  est la plus petite période, alors dans la zone de Brillouin la borne n'est atteinte qu'à l'origine  $\mathbf{k} = 0$ .

La borne exponentielle (3.20) implique de nouveau que fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  est une fonction analytique holomorphe dans  $|\operatorname{Im} \mathbf{k}| < \mu$ . Posons

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = e^{-w(\mathbf{k})} \Rightarrow w^*(\mathbf{k}) = w(-\mathbf{k}), \quad w(\mathbf{0}) = 0. \quad (3.41)$$

La régularité de  $\tilde{\rho}$  et la condition  $\tilde{\rho}(\mathbf{0}) = 1$  impliquent que  $w(\mathbf{k})$  a un développement convergent à  $\mathbf{k} = 0$ .

On vérifie que, parce que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}$  a la forme d'un produit scalaire, la fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  est invariante par le groupe des transformations (3.36) appliquées au vecteur  $\mathbf{k}$ . Cette symétrie (3.36) entraîne que la fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  est symétrique et paire dans toutes composantes du vecteur  $\mathbf{k}$  et, en particulier, réelle. Aucun terme impair en  $\mathbf{k}$  ne peut être pair dans toutes les composantes du vecteur. Un seul terme quadratique est symétrique, le carré scalaire du vecteur. La fonction  $w(\mathbf{k})$  admet un développement en série de Taylor à  $\mathbf{k} = 0$ , que nous paramétrons comme

$$w(\mathbf{k}) = w_2 \mathbf{k}^2 / 2 + O(k^4), \quad w_2 > 0, \quad (3.42)$$

la positivité de  $w_2$  résultant de l'inégalité (3.40).

### 3.3.6 Comportement asymptotique. Limite continue

Après transformation de Fourier, l'équation (3.33) s'écrit

$$\tilde{P}_{n+1}(\mathbf{k}) = \tilde{\rho}(\mathbf{k})\tilde{P}_n(\mathbf{k}) \Rightarrow \tilde{P}_n(\mathbf{k}) = \tilde{p}^n(\mathbf{k})\tilde{P}_0(\mathbf{k}).$$

Par conséquent,

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} \tilde{p}^n(\mathbf{k})\tilde{P}_0(\mathbf{k}). \quad (3.43)$$

Pour  $n \rightarrow \infty$ , l'intégrale (3.43) est dominée par les valeurs maximales de  $|\tilde{\rho}(\mathbf{k})|$  et donc le voisinage de  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ . À cause de la forme (3.42) de  $w(\mathbf{k})$ , pour  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$ , seules les valeurs de  $\mathbf{k}$  d'ordre  $1/\sqrt{n}$  contribuent à l'intégrale (3.43). Nous pouvons donc négliger les termes d'ordre  $k^4$  dans  $w(\mathbf{k})$ .

De plus, avec l'hypothèse (3.21)  $\ln \tilde{P}_0(\mathbf{k})$ , où  $P_0(\mathbf{k})$  est la série de Fourier associée à la distribution initiale, est régulière et nous posons

$$\tilde{P}_0(\mathbf{k}) = \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_0 + O(k^2)],$$

où  $\mathbf{q}_0$  est la position initiale moyenne. Les termes d'ordre  $k^2$  ou plus sont négligeables.

Pour les mêmes raisons que dans la méthode du col, dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , on peut intégrer dans (3.43), dans l'approximation gaussienne, sur toutes les valeurs de  $\mathbf{k}$  réelles sans restriction à une période (la zone de Brillouin). On en déduit la forme asymptotique

$$P_n(\mathbf{q}) \sim \frac{1}{(2\pi w_2 n)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2}{2w_2 n}\right]. \quad (3.44)$$

Nous sommes ramenés à une situation très semblable à la celui de la section 3.3.1. Pour  $n \rightarrow \infty$ , la probabilité  $P_n(\mathbf{q})$  prend une forme gaussienne universelle qui de nouveau ne dépend que de propriétés générales de  $\rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ .

*Remarques.*

(i) De même que dans le cas du théorème de la limite centrale des probabilités discuté en section 3.1.3, la convergence vers la loi gaussienne n'est valable qu'au sens des mesures.

(ii) La distribution asymptotique a une symétrie de rotation — elle ne dépend que du module du vecteur  $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  — et admet donc un groupe de symétrie plus grand que la fonction de transition  $\rho(\mathbf{q})$  qui n'a que la symétrie du réseau.

(iii) Cette forme gaussienne asymptotique est valable à temps grands et pour des distances  $|\mathbf{q}| \ll n$ .

*Limite continue.* Faisons un changement d'échelles de temps et de distance

$$t = n\varepsilon, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)\sqrt{\varepsilon}, \quad (3.45)$$

où nous prenons une limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $t$  et  $\mathbf{x}$  fixés, et donc  $n = O(1/\varepsilon)$  (plus précisément  $n$  et les composantes de  $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  sont les parties entières des expressions correspondantes).

Comme nous l'avons déjà noté, si les variables *macroscopiques*  $t$  et  $\mathbf{x}$  sont mesurées avec une précision finie, du point de vue de toute fonction continue elles peuvent être considérées comme des variables continues. La distribution asymptotique, définie pour toute variable réelle par continuité, devient

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi w_2 t)^{d/2}} e^{-\mathbf{x}^2/2w_2 t}. \quad (3.46)$$

Le temps  $t$  et les coordonnées  $\mathbf{x}$  sont les variables qui décrivent à l'échelle macroscopique le mouvement brownien engendré par la dynamique microscopique (3.33). L'universalité a permis de définir une *limite continue*, dans la mesure où la structure de réseau et les détails du processus élémentaire ont disparu.

Enfin, la distribution (3.46) est solution d'une équation du type diffusion ou de la chaleur isotrope dans l'espace continu  $\mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial \Pi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \frac{1}{2} w_2 \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Pi(t, \mathbf{x}).$$

*Exemple.* On vérifiera les propriétés démontrées dans cette section sur l'exemple de la marche au hasard avec déplacements limités aux proches voisins sur le réseau. Dans cet exemple,  $\rho(\mathbf{q})$  s'annule sauf si  $\mathbf{q}$  est un des vecteurs de coordonnées  $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ . Dans ce dernier cas  $\rho(\mathbf{q})$  vaut  $1/2d$ . Donc

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos k_i, \quad w(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2/2d + O(k^4),$$

où  $k_i$  est une composante du vecteur  $\mathbf{k}$ . On prendra comme condition initiale un point de départ certain  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ , et donc

$$P_0(\mathbf{q}) = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0} \Rightarrow \tilde{P}_0(\mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_0}.$$

### 3.3.7 Dilatation de l'échelle des temps et points fixes

Puisque nous nous intéressons aux propriétés asymptotiques à grand temps de  $P_n(\mathbf{q})$ , nous pouvons essayer de démontrer des propriétés d'universalité en imitant la stratégie utilisée en section 3.2 dans le cadre du théorème de la limite centrale.

Ici l'idée naturelle est de faire un changement d'échelle de temps d'un facteur deux. Autrement dit, on part de  $n = 2^m$ , et on remplace à chaque itération  $p$  par  $\mathcal{T}p$ :

$$(\mathcal{T}\rho)(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \equiv \sum_{\mathbf{q}'' \in \mathcal{Z}^d} \rho(\mathbf{q} - \mathbf{q}'') \rho(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}').$$

Ceci correspond en transformée de Fourier dans une transformation

$$(Tw)(\mathbf{k}) \equiv 2w(\mathbf{k}).$$

Développant en puissances de  $\mathbf{k}$ , on vérifie qu'une telle transformation n'a avec nos hypothèses qu'un point fixe trivial  $w(\mathbf{k}) \equiv 0$ . Mais l'exemple 3.2 montre qu'une plus grande classe de points fixes devient accessible si la transformation est généralisée. Nous considérons la transformation

$$(Tw)(\mathbf{k}) \equiv 2w(\mathbf{k}/\lambda), \quad \lambda > 0,$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel positif à déterminer.

Notons à nouveau qu'à chaque itération les périodes des fonctions  $w(k)$  dans chaque composante  $k_i$  sont multipliées par  $\lambda$ , ce qui du point de vue de l'ensemble des valeurs des variables  $\mathbf{q}$  correspond à un réseau dont le pas a été divisé par  $\lambda$ .

Cherchons maintenant les points fixes  $w_*$  de cette transformation

$$2w_*(\mathbf{k}/\lambda) = w_*(\mathbf{k}).$$

Pour  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ , cette identité entraîne

$$2w_2/\lambda^2 = w_2.$$

Pour  $\lambda = \sqrt{2}$ , on trouve les points fixes non triviaux

$$w_*(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2}w_2k^2$$

qui correspondent à une probabilité de saut gaussienne.

De plus, comme à une transformation d'échelle d'un facteur 2 du temps correspond une transformation d'échelle d'un facteur  $\sqrt{2}$  des distances, on en déduit la loi d'échelle  $t \propto \sqrt{|x|}$ .

Enfin, suivant l'exemple de la section 3.2 dans le cas des distributions à valeurs moyennes nulles, on peut étudier la stabilité du point fixe, et le taux de décroissance des perturbations dans le temps. La seule différence notable est que les vecteurs propres sont des polynômes homogènes pairs de  $d$  variables, invariants par le groupe cubique. Par exemple, en dehors du terme marginal associé à un changement de  $w_2$ , les termes inessentiels les plus importants sont des polynômes de degré quatre

$$\sum k_i^4, \quad (\mathbf{k}^2)^2.$$

### 3.4 Mouvement brownien et intégrale de chemin

Si nous ne nous intéressons qu'à la distribution asymptotique, dont nous avons montré qu'elle est indépendante de la probabilité de transition initiale, nous pouvons l'obtenir avec des probabilités de transition gaussiennes, dans le continu, de la forme (nous supposons invariance par rotation)

$$\rho(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi w_2)^{d/2}} e^{-\mathbf{q}^2/2w_2}.$$

Dans le cas d'un point initial certain  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = 0$ , l'itération de l'équation de récurrence (3.33) conduit alors à

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi w_2)^{nd/2}} \int d^d q_1 d^d q_2 \dots d^d q_{n-1} e^{-\mathcal{S}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)} \quad (3.47)$$

avec

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{\ell=1}^n \frac{(\mathbf{q}_\ell - \mathbf{q}_{\ell-1})^2}{2w_2}$$

et  $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}$ .

Introduisons les variables de temps macroscopiques

$$\tau_\ell = \ell\varepsilon, \quad \tau_n = n\varepsilon = t,$$

et un chemin  $\mathbf{x}(\tau)$  continu linéaire par morceaux (figure 6)

$$\mathbf{x}(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \left[ \mathbf{q}_{\ell-1} + \frac{\tau - \tau_{\ell-1}}{\tau_\ell - \tau_{\ell-1}} (\mathbf{q}_\ell - \mathbf{q}_{\ell-1}) \right] \quad \text{pour } \tau_{\ell-1} \leq \tau \leq \tau_\ell.$$

On vérifie que  $\mathcal{S}$  peut s'écrire alors ( $\dot{\mathbf{x}}(\tau) \equiv d\mathbf{x}/d\tau$ )

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}(\tau)) = \frac{1}{2w_2} \int_0^t (\dot{\mathbf{x}}(\tau))^2 d\tau \quad (3.48)$$

avec

$$\mathbf{x}(0) = 0, \quad \mathbf{x}(t) = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{q} = \mathbf{x}.$$

De plus

$$P_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi w_2)^{d/2}} \int \left( \prod_{\ell=1}^{n-1} \frac{d^d x(\tau_\ell)}{(2\pi w_2 \varepsilon)^{d/2}} \right) e^{-\mathcal{S}(\mathbf{x}(\tau))}. \quad (3.49)$$

Prenons maintenant la limite continue  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  avec  $t$  fixé dans l'expression (3.49). Nous obtenons alors une représentation de la distribution de la limite continue

$$\Pi(t, \mathbf{x}) \sim \varepsilon^{-d/2} P_n(\mathbf{q})$$

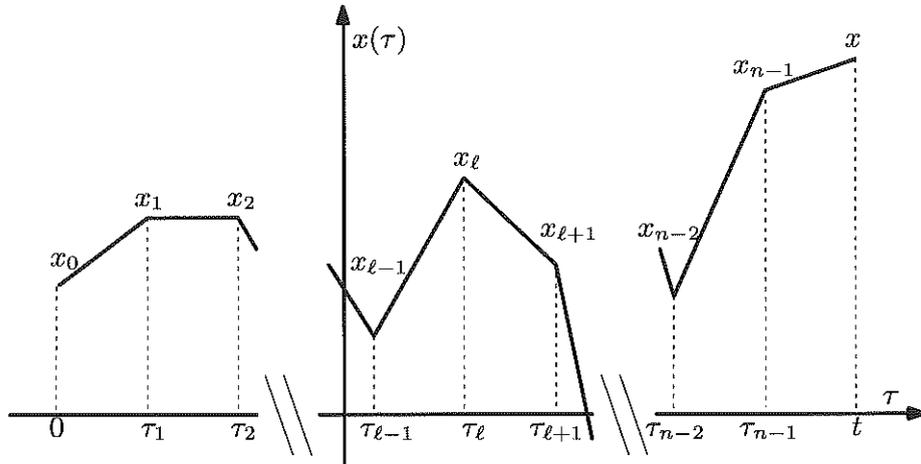


FIG. 6 – Un chemin contribuant à l'intégrale (3.47) ( $d = 1$ ) avec  $x_\ell \equiv x(\tau_\ell)$ .

sous forme d'une *intégrale de chemin*, que nous notons symboliquement

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \int [d\mathbf{x}(\tau)] e^{-\mathcal{S}(\mathbf{x}(\tau))}, \quad (3.50)$$

où  $\int [d\mathbf{x}(\tau)]$  veut dire somme sur tous les chemins continus qui vont de l'origine au temps  $\tau = 0$  à  $\mathbf{x}$  au temps  $t$ . Cette représentation du mouvement brownien est initialement due à Wiener, et donc est parfois aussi appelée intégrale de Wiener.

*Calcul de l'intégrale de chemin.* Nous avons introduit la notion formelle d'intégrale de chemin. On pourrait craindre que tout calcul nécessite un retour à sa définition comme limite d'intégrales avec des temps discrets. Heureusement cela n'est pas le cas. En dehors d'un facteur de normalisation, le calcul peut être mené sans faire référence au processus limite. C'est ce que nous allons illustrer ici.

Pour calculer l'intégrale, nous faisons un changement de variables  $\mathbf{x}(\tau) \mapsto \mathbf{r}(\tau)$  (une translation):

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{f}(\tau) + \mathbf{r}(\tau),$$

où  $\mathbf{f}(\tau)$  est la solution de l'équation variationnelle

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathbf{x}(\tau)} = -\frac{1}{w_2} \ddot{\mathbf{x}}(\tau) = 0$$

satisfaisant aux conditions aux limites  $\mathbf{x}(0) = 0$ ,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$ . Elle correspond au mouvement rectiligne uniforme qui joint l'origine au point  $\mathbf{x}$ , dans le temps  $t$ :

$$\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{x} \tau / t.$$

Le chemin  $\mathbf{r}(\tau)$  satisfait alors aux conditions aux limites

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}.$$

La translation conduit à

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2w_2} \left[ \frac{\mathbf{x}^2}{t} + 2 \int_0^t d\tau \dot{\mathbf{r}}(\tau) \cdot \mathbf{x}/t + \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}(\tau))^2 d\tau \right].$$

Le terme linéaire en  $\mathbf{r}$  s'intègre explicitement et s'annule à cause des conditions aux limites. On en déduit

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \mathcal{N} e^{-\mathbf{x}^2/2w_2 t},$$

où la normalisation  $\mathcal{N}$  est donnée par l'intégrale de chemin

$$\mathcal{N} = \int [d\mathbf{r}(\tau)] e^{-\mathcal{S}(\mathbf{r}(\tau))}$$

avec  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ . Cette normalisation ne dépend plus de  $\mathbf{x}$  et est donc une fonction de  $t$  déterminée par la conservation des probabilités.

L'intégrale de chemin permet donc de calculer la distribution dans la limite du continu, par des méthodes du continu.

*Remarque importante.*

(i) La notation  $\dot{\mathbf{x}}$  semble suggérer que les chemins contribuant à l'intégrale de chemin sont dérivables. Il n'en est rien. Dans la limite du continu nous savons que

$$\langle [\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\tau')]^2 \rangle \propto |\tau - \tau'|.$$

Nous voyons que les chemins typiques sont continus puisque le membre de gauche s'annule pour  $\tau \rightarrow \tau'$ . Par contre, pour calculer la moyenne de la dérivée au carré, il faut diviser par  $(\tau - \tau')^2$  et faire tendre  $\tau$  vers  $\tau'$ . Le membre de droite alors diverge. Les chemins typiques du mouvement brownien sont continus mais pas dérivables, ils ne satisfont qu'une condition de Hölder d'ordre 1/2:

$$|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\tau')| = O(|\tau - \tau'|^{1/2}).$$

Néanmoins la notation  $\dot{\mathbf{x}}$  est utile car les chemins qui donnent les contributions dominantes à l'intégrale de chemin sont dans un voisinage des chemins dérivables.

(ii) Comme l'expression (3.49) le montre, dans le symbole  $[d\mathbf{x}(\tau)]$  est cachée une normalisation indépendante de la trajectoire, mais dont il est difficile de tenir compte dans la limite continue. C'est pourquoi on calcule toujours, comme ici, le rapport de l'intégrale de chemin et d'une intégrale de chemin de référence dont le résultat est connu.

## Exercices

### Exercice 3.1

On considère une marche au hasard markovienne sur un réseau carré bidimensionnel. À chaque pas de temps, le marcheur, soit reste immobile avec probabilité  $1 - s$ , soit se déplace d'une maille de réseau dans une des quatre directions possibles avec la même probabilité  $s/4$ .

Enfin, au temps  $n = 0$  le marcheur est au point  $\mathbf{q} = 0$ . Trouver la distribution asymptotique de la distance parcourue par le marcheur après  $n$  pas,  $n \rightarrow \infty$ .

*Solution.* L'étude générale a montré que pour une telle marche au hasard il faut introduire la série de Fourier associée à la probabilité de saut

$$\tilde{\rho}(k) = 1 - s + \frac{1}{2}s \cos k_1 + \frac{1}{2}s \cos k_2.$$

Alors

$$w(k) = \ln \tilde{\rho}(k) = -\frac{1}{4}s (k_1^2 + k_2^2) + O(k^4).$$

On en déduit la distribution gaussienne asymptotique ( $q \equiv |\mathbf{q}|$ )

$$R_n(q) \sim \frac{1}{\pi n s} e^{-q^2/ns}.$$

### Exercice 3.2

On considère une marche au hasard markovienne sur un réseau cubique, c'est à dire dans  $\mathbb{Z}^3$ . À chaque pas le marcheur, soit reste immobile avec probabilité  $1 - s$ , soit se déplace d'une maille de réseau dans une des six directions possibles avec la même probabilité  $s/6$ .

Trouver la distribution asymptotique de la distance parcourue par le marcheur après  $n$  pas,  $n \rightarrow \infty$ .

*Solution.* La série de Fourier associée à la probabilité de saut est maintenant

$$\tilde{\rho}(k) = 1 - s + \frac{1}{3}s \cos k_1 + \frac{1}{3}s \cos k_2 + \frac{1}{3}s \cos k_3.$$

Alors,

$$w(k) = \ln \tilde{\rho}(k) = -\frac{1}{6}s (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + O(k^4).$$

On en déduit la distribution gaussienne asymptotique

$$R_n(q) \sim \left( \frac{3}{2\pi n s} \right)^{3/2} e^{-3q^2/2ns}.$$

*Exercice 3.3*

Etudier la stabilité *locale* du point fixe gaussien, correspondant à la loi de probabilité

$$\rho_G(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-q^2/2}$$

par la méthode de la section 3.2, mais appliquée directement à l'équation

$$[\mathcal{T}_\lambda \rho](q) = \lambda \int dq' \rho(q') \rho(\lambda q - q'). \quad (3.51)$$

On déterminera d'abord la valeur de  $\lambda$  pour laquelle la loi de probabilité gaussienne est un point fixe de  $\mathcal{T}_\lambda$ .

Posant  $\rho = \rho_G + \delta\rho$ , on développera l'équation (3.51) au premier ordre en  $\delta\rho$ . On montrera que les vecteurs propres de l'opérateur linéaire agissant sur  $\delta\rho$  sont de la forme

$$\delta\rho_p(q) = \left(\frac{d}{dq}\right)^p \rho_G(q), \quad p > 0.$$

On en déduira les valeurs propres associées.

*Solution: Quelques éléments.* On retrouve  $\lambda = \sqrt{2}$ . On linéarise l'équation. On note que la conservation des probabilités entraîne

$$1 = \int dq \rho(q) = \int dq [\rho_G + \delta\rho(q)] = 1 + \int dq \delta\rho(q) \Rightarrow \int dq \delta\rho(q) = 0.$$

Posons

$$[\mathcal{T}_\lambda(\rho_G + \delta\rho)] = \rho_G + \mathcal{L}\delta\rho + O(\|\delta\rho\|^2),$$

où l'action de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  sur une fonction  $\delta\rho$  est donné par

$$[\mathcal{L}\delta\rho](q) = 2\lambda \int dq' \rho_G(q') \delta\rho(\lambda q - q').$$

On vérifie alors que les vecteurs propres de  $\mathcal{L}$  ont la forme proposée en intégrant un certain nombre de fois par parties.

*Exercice 3.4*

*Marche au hasard sur le cercle.* Pour illustrer les propriétés quelques peu différentes de la marche au hasard sur des variétés compactes, on se propose d'étudier la marche au hasard sur le cercle. Nous supposons toujours invariance par translation. La marche au hasard est alors spécifiée par une fonction de saut  $\rho(q - q')$  où  $q$  et  $q'$  sont deux angles correspondant aux positions sur le cercle. La fonction  $\rho(q)$  est, de plus, supposée périodique et continue. Déterminer la distribution asymptotique du marcheur partant de  $q = 0$  au temps  $n = 0$ .

*Solution.* Comme nous avons supposé invariance par translation, l'équation d'évolution est encore une convolution, qui se simplifie en transformée de Fourier. Mais, comme la fonction  $\rho(q)$  est périodique et continue, elle admet un développement en séries de Fourier:

$$\rho(q) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{iq l} \tilde{\rho}_l$$

avec

$$\tilde{\rho}_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dq e^{-iq l} \rho(q),$$

et donc

$$\tilde{\rho}_0 = 1/2\pi, \quad |\tilde{\rho}_l| < 1/2\pi \quad \text{pour } l \neq 0.$$

Donc au temps  $n$ , la distribution du marcheur s'écrit

$$P_n(q) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{iq l} \tilde{\rho}_l^n.$$

Pour  $n \rightarrow \infty$ , la somme converge exponentiellement vers la contribution  $l = 0$  et donc

$$P_n(q) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2\pi},$$

ce qui est la distribution uniforme sur le cercle.

La valeur maximum de  $|\tilde{\rho}_l|$  pour  $l \neq 0$ , qui donne la correction dominante, définit un temps

$$\tau = \max_{l \neq 0} -\frac{1}{\ln |\tilde{\rho}_l|},$$

caractérisant la décroissance exponentielle des corrections, appelé *temps de relaxation*.

## Chapitre 4

### Mécanique statistique classique à une dimension

Nous étudions maintenant, dans le cadre de la mécanique statistique classique, des modèles sur réseau unidimensionnel. Bien que du point de vue de la physique, certains des modèles que nous allons décrire soient quelque peu artificiels, ils ont une utilité pratique en tant que versions simplifiées de modèles à plusieurs dimensions d'espace et nous rapprochent donc peu à peu de la physique que nous voulons décrire. Par ailleurs, leur étude va nous permettre d'introduire un certain nombre de définitions et concepts nécessaires pour la suite.

Ces modèles sont définis de la manière suivante. À chaque site du réseau, nous associons une ou plusieurs variables aléatoires à valeurs réelles. Les modèles sont alors spécifiés par un poids de Boltzmann, c'est à dire une mesure de probabilité fonction de l'ensemble de ces variables aléatoires.

Les quantités qui nous intéressent sont la fonction de partition et surtout les fonctions de corrélations qui sont les valeurs moyennes de produits de variables aléatoires en des sites différents.

De nouveau, la notion de *localité*, dont nous donnerons une définition plus précise dans les chapitres suivants, va jouer un rôle essentiel: les corrélations directes induites par le poids de Boltzmann entre sites différents doit décroître suffisamment vite avec la distance.

Dans ce chapitre, nous étudions l'exemple local le plus simple: celui de modèles qui ne comportent que des interactions de proches voisins sur le réseau.

Pour de tels modèles, les fonctions de corrélation peuvent être calculées par un formalisme de matrice de transfert.

Nous présentons donc d'abord quelques propriétés générales des matrices de transfert dans le cadre de modèles unidimensionnels. Nous nous servons de ce formalisme pour établir certaines propriétés des fonctions de corrélations, comme le comportement à grande distance de la fonction à deux points, et introduisons la notion très importante de *longueur de corrélation*.

Nous utilisons ce formalisme dans le cas d'un poids de Boltzmann gaussien, que nous étudions en détail. Nous calculons la fonction de partition et les fonctions de corrélation explicitement. Nous observons que dans *la limite de basse température*

la longueur de corrélation tend vers l'infini, ce qui permet de définir à nouveau une limite continue.

Nous montrons que les résultats de la limite continue peuvent être reproduits directement en résolvant une équation aux dérivées partielles dans laquelle toute trace de la structure initiale de réseau a disparu.

Enfin, nous exhibons une classe un peu plus générale de modèles qui ont la même propriété: longueur de corrélation qui diverge et limite continue.

#### 4.1 Interactions de proches voisins. Matrice de transfert

Nous considérons donc le réseau unidimensionnel des points de coordonnées entières de la droite réelle. À chaque point  $k \in \mathbb{Z}$  du réseau sont attachées une ou plusieurs variables réelles  $q_k$  (par exemple la déviation d'une particule de sa position d'équilibre). Dans la suite nous nous limiterons à une variable réelle par site, mais la généralisation à plusieurs variables est simple.

Le modèle statistique est alors spécifié par un poids statistique (une densité de probabilité) que nous écrivons sous la forme particulière

$$\rho(\mathbf{q}) = \mathcal{Z}^{-1} e^{-\mathcal{S}(\mathbf{q})}, \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{q}$  dénote l'ensemble des variables  $q_k$  et  $\mathcal{Z}$  est une normalisation, appelée *fonction de partition*, qui est déterminée par la condition

$$\int \prod_k dq_k \rho(\mathbf{q}) = 1.$$

La fonction  $\mathcal{S}(\mathbf{q})$  peut souvent être écrite comme la somme de termes indépendants  $\omega(q_k)$  qui spécifient la distribution des variables  $q_k$  en l'absence d'interaction, et d'une énergie de configuration ou interaction  $\mathcal{E}(\mathbf{q})$  qui corrélent les sites:

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \sum_k \omega(q_k) + \mathcal{E}(\mathbf{q})/T, \quad (4.2)$$

le paramètre  $T$  étant physiquement la température.

Nous supposons aussi que  $\mathcal{E}(\mathbf{q})$  est invariant par translation sur le réseau, c'est à dire invariant dans la substitution  $q_i \mapsto q_{i+1}$ , et *local*. Un exemple d'interactions locales est celui des interactions de portée finie. Alors  $\mathcal{E}(\mathbf{q})$  peut s'écrire

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}) = \sum_k E(q_k, q_{k+1}, \dots, q_{k+m}), \quad m > 0.$$

Nous considérons dans un premier temps un système sur un réseau fini de taille  $n$ , imposant par commodité des conditions aux limites périodiques. Notre but, cependant, est d'étudier la limite du système infini,  $n \rightarrow \infty$ , appelé aussi dans ce contexte *limite thermodynamique*.

#### 4.1.1 Interactions de proches voisins

Nous considérons maintenant une fonction  $\mathcal{S}(\mathbf{q})$  de la forme particulière

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \sum_k S(q_{k-1}, q_k) \quad (4.3)$$

avec  $S(q'', q') = S(q', q'')$ . On parle alors d'interaction de proches voisins puisque chaque variable  $q_k$  n'est directement corrélée qu'aux variables attachées aux sites voisins sur le réseau.

Nous supposons, par ailleurs,  $S(q, q')$  continue par morceaux, et de plus pour assurer la convergence des intégrales nous imposons

$$S(q, q') \geq \mu(|q| + |q'|), \quad \mu > 0. \quad (4.4)$$

Cette restriction est un peu forte, mais commode pour les systèmes que nous voulons étudier.

Nous discutons d'abord un système sur un réseau fini de taille  $n$ ,  $k \in [0, n]$ , imposant par commodité des conditions aux limites périodiques:  $q_n = q_0$ , ce qui donne au réseau une structure de cercle.

La fonction de partition s'écrit alors

$$\mathcal{Z}_n = \int \left( \prod_{k=1}^n dq_k \right) e^{-\mathcal{S}_n(\mathbf{q})} \quad (4.5)$$

avec

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n S(q_{k-1}, q_k). \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Matrice de transfert

Pour discuter la physique des modèles statistiques classiques sur réseau dans le cas d'interactions de proches voisins, un outil se révèle très utile: la *matrice de transfert*.

Notons que le formalisme de la matrice de transfert, que nous allons introduire, se généralise à des systèmes statistiques classiques sur réseau en dimension d'espace arbitraire, avec interaction de portée finie (avec un nombre fini de sites directement corrélés).

Nous introduisons l'opérateur  $\mathbf{T}$  associé au noyau symétrique réel

$$[\mathbf{T}](q'', q') = e^{-S(q'', q')}. \quad (4.7)$$

L'opérateur  $\mathbf{T}$  est appelé la *matrice de transfert* du modèle statistique. Cette dénomination provient des exemples où la variable  $q$  ne prend qu'un nombre fini

de valeurs et donc  $\mathbf{T}$  est une matrice. Ici, au contraire, c'est un opérateur intégral qui agit sur les fonctions par

$$[\mathbf{T}\psi](q) = \int dq' [\mathbf{T}](q, q')\psi(q').$$

Dans cette représentation, le produit de deux opérateurs  $\mathcal{O}_1(q', q)$  et  $\mathcal{O}_2(q', q)$  s'écrit

$$[\mathbf{O}_2\mathbf{O}_1](q', q) = \int dq'' \mathcal{O}_2(q', q'')\mathcal{O}_1(q'', q). \quad (4.8)$$

La trace est définie par

$$\text{tr } \mathbf{O} \equiv \int dq \mathcal{O}(q, q), \quad (4.9)$$

une définition dont on vérifie en la combinant avec la règle de produit (4.8), qu'elle satisfait bien à la condition cyclique  $\text{tr } \mathbf{O}_2\mathbf{O}_1 = \text{tr } \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ .

On vérifie alors qu'avec la borne (4.4), les traces de toutes les puissances  $\mathbf{T}$  existent.

De l'existence de  $\text{tr } \mathbf{T}^2$  on déduit que, si  $f$  appartient à l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2$  des fonctions de carré sommable,  $\mathbf{T}f$  est de carré sommable, et de plus dans  $\mathcal{L}^2$  l'opérateur  $\mathbf{T}$  est borné.

L'opérateur  $\mathbf{T}$  est symétrique réel. Il est diagonalisable dans l'espace  $\mathcal{L}^2$  des fonctions de carré sommable, son spectre est réel et ses vecteurs propres réels et orthogonaux. Comme la trace de  $\mathbf{T}^2$  est fini, le spectre de plus est discret et les valeurs propres ont zéro comme seul point d'accumulation.

Dans la suite, nous notons  $\psi_\nu(q)$  les vecteurs propres normalisés de  $\mathbf{T}$ , associés aux valeurs propres (toutes réelles)  $\tau_0 \geq |\tau_1| \geq |\tau_2| \dots$ :

$$\int dq' [\mathbf{T}](q, q')\psi_\nu(q') = \tau_\nu\psi_\nu(q), \quad \int dq \psi_\nu^2(q) = 1.$$

Enfin,  $[\mathbf{T}](q, q')$  peut alors s'exprimer comme une combinaison linéaire de projecteurs sur les valeurs propres sous la forme

$$[\mathbf{T}](q, q') = \sum_{\nu=0} \tau_\nu \psi_\nu(q)\psi_\nu(q'). \quad (4.10)$$

*Opérateur position.* Pour la suite, il est utile d'introduire également l'opérateur  $\hat{\mathbf{Q}}$ , analogue de l'opérateur position de la mécanique quantique, qui agit par multiplication:

$$[\hat{\mathbf{Q}}\psi](q) = q\psi(q). \quad (4.11)$$

Le noyau correspondant peut s'écrire

$$[\hat{\mathbf{Q}}](q, q') = \delta(q - q'),$$

où  $\delta(q)$  est la distribution de Dirac.

## 4.2 Fonction de partition. Fonctions de corrélation

*Fonction de partition.* En terme de la matrice de transfert, la fonction de partition (4.5) peut s'écrire ( $q_0 = q_n$ )

$$Z_n = \int \prod_{k=1}^n dq_k [\mathbf{T}](q_{k-1}, q_k) = \text{tr } \mathbf{T}^n.$$

*Fonctions de corrélation: définition.* Nous définissons maintenant les fonctions de corrélation des variables  $q_k$ . Dans la suite la notation  $\langle \bullet \rangle_n$  signifiera valeur moyenne de  $\bullet$  par rapport au poids statistique  $Z_n^{-1} e^{-S_n}$ . Avec cette notation, nous définissons la fonction de corrélation à  $p$  points comme le moment de la distribution ( $q_0 = q_n$ )

$$Z_n^{(p)}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) = \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_n \equiv Z_n^{-1} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} e^{-S_n(q)}. \quad (4.12)$$

### 4.2.1 Fonction de corrélation à un point

La fonction de corrélation à un point, qui est la valeur moyenne de  $q_\ell$ , est donnée par

$$Z_n^{(1)}(\ell) \equiv \langle q_\ell \rangle_n = Z_n^{-1} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_\ell e^{-S_n(q)}.$$

L'intégrale peut se récrire

$$\begin{aligned} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_\ell e^{-S_n(q)} &= \int q_\ell dq_\ell dq_n \int \prod_{s=\ell+1}^{n-1} dq_s \prod_{s=\ell}^{n-1} [\mathbf{T}](q_s, q_{s+1}) \\ &\times \int \prod_{s=1}^{\ell-1} dq_s \prod_{s=1}^{\ell} [\mathbf{T}](q_{s-1}, q_s). \end{aligned}$$

Introduisant maintenant l'opérateur (4.11), nous notons

$$[\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{T}](q_\ell, q_{\ell+1}) = q_\ell [\mathbf{T}](q_\ell, q_{\ell+1}).$$

L'intégrale se ramène alors à la trace d'un produit d'opérateurs. La fonction à un point devient

$$Z_n^{(1)}(\ell) = Z_n^{-1} \text{tr } \mathbf{T}^n \hat{\mathbf{Q}}. \quad (4.13)$$

*Invariance par translation.* L'expression (4.13) montre que la valeur moyenne est indépendante du point  $\ell$ . C'est en fait une conséquence directe de deux propriétés: la matrice de transfert est indépendante des points sur le réseau; nous avons choisi des conditions aux limites périodiques qui ont donné au réseau une structure de cercle. Ceci induit une invariance par translation sur le réseau.

### 4.2.2 Fonction de corrélation à $p$ points

De la même manière, la fonction de corrélation à deux points, valeur moyenne du produit des valeurs de  $q$  en deux points  $\ell_1, \ell_2$  du réseau, est donnée par

$$Z_n^{(2)}(\ell_1, \ell_2) = \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle_n \equiv Z_n^{-1} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_{\ell_1} q_{\ell_2} e^{-S_n(q)}.$$

La fonction  $Z_n^{(2)}(\ell_1, \ell_2)$  est symétrique dans l'échange  $\ell_1 \leftrightarrow \ell_2$ . Supposons par exemple  $\ell_2 \geq \ell_1$ . La même méthode permet alors d'établir l'identité

$$Z^{(2)}(\ell_1, \ell_2) = Z_n^{-1} \text{tr} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{\ell_2 - \ell_1} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{n - \ell_2 + \ell_1}. \quad (4.14)$$

De nouveau, comme conséquence de l'invariance par translation, la fonction à deux points ne dépend que de la distance entre les deux points sur le réseau.

Plus généralement, si nous supposons les points ordonnés  $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_p$ ,

$$\begin{aligned} Z_n^{(p)}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) &= \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_n \\ &\equiv Z_n^{-1} \int \left( \prod_{s=1}^n dq_s \right) q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} e^{-S_n(q)} \\ &= Z_n^{-1} \text{tr} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{\ell_p - \ell_{p-1}} \hat{\mathbf{Q}} \dots \mathbf{T}^{\ell_3 - \ell_2} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{\ell_2 - \ell_1} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{n - \ell_p + \ell_1}. \end{aligned}$$

## 4.3 Limite thermodynamique

Nous évaluons maintenant la fonction de partition et les fonctions de corrélation dans la limite thermodynamique. De façon générale, pour un modèle statistique, la limite thermodynamique est la limite de volume infinie. À une dimension, le volume se réduit à la longueur du réseau  $n$ .

### 4.3.1 La fonction de partition

La limite thermodynamique fait jouer un rôle essentiel au spectre et aux vecteurs propres de l'opérateur  $\mathbf{T}$  dans l'espace  $\mathcal{L}^2$  des fonctions de carré sommable.

*Valeur propre dominante de la matrice de transfert.* Pour les systèmes unidimensionnels que nous étudions ici, on démontre que  $\tau_0$ , la valeur propre de module maximum de  $\mathbf{T}$ , est *positive et non dégénérée* ou simple, et que  $\psi_0(q)$  est une fonction de signe constant, qu'on peut donc choisir positive (cf. appendice A1.4.1).

*Limite thermodynamique.* La fonction de partition peut alors s'exprimer en termes des valeurs propres:

$$Z_n = \text{tr} \mathbf{T}^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{\nu}^n.$$

Pour  $n \rightarrow \infty$ , la fonction de partition est dominée par la valeur de module maximum  $\tau_0$  de la matrice de transfert et donc

$$\mathcal{Z}_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tau_0^n.$$

La quantité

$$\mathcal{W}_n = T \ln \mathcal{Z}_n, \quad (4.15)$$

que, dans le contexte de la physique statistique, on appelle *énergie libre*, est donc proportionnelle au volume  $n$  et  $\mathcal{W}_n/n$  a une limite finie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{W}_n = T \ln \tau_0. \quad (4.16)$$

Dans ce qui suit nous omettrons le plus souvent le facteur de proportionnalité  $T$ , nécessaire à l'interprétation physique, mais qui ne jouera en général aucun rôle.

Plus généralement, la propriété que  $\ln \mathcal{Z}$  soit proportionnel au volume est une conséquence directe de la portée finie des interactions.

### 4.3.2 Fonction de corrélation à un point

Nous utilisons maintenant l'expression (4.13) pour évaluer la valeur moyenne de  $q$ . Dans la limite thermodynamique  $n \rightarrow \infty$ , la matrice  $\mathbf{T}^n$  est dominée par ses valeurs propres les plus grandes. Alors, du développement (4.10) on déduit

$$[\mathbf{T}^n](q, q') \underset{n \rightarrow \infty}{=} \tau_0^n \psi_0(q) \psi_0(q') + O(\tau_1^n)$$

et donc

$$\text{tr } \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tau_0^n \int dq q \psi_0^2(q).$$

La valeur moyenne de  $q_\ell$  a une limite finie donnée par

$$\langle q_\ell \rangle \equiv Z_n^{(1)}(\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^{-1} \text{tr } \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^n = \int dq q \psi_0^2(q).$$

*Brisure de symétrie.* La valeur moyenne  $\langle q_\ell \rangle$  n'a, en général, pas de signification particulière, puisqu'il suffit de faire une translation pour la supprimer:

$$q_\ell \mapsto q'_\ell = q_\ell - \langle q_\ell \rangle.$$

Le seul cas intéressant est celui où le point  $q = 0$  est privilégié pour des raisons de symétrie, par exemple le système est invariant par la réflexion  $q \mapsto -q$ . Dans ce cas une valeur moyenne non-nulle a un sens de *brisure spontanée de symétrie* (cf. chapitre 7).

Cette situation se rencontre si l'interaction satisfait

$$S(q'', q') = S(-q'', -q') \Rightarrow [\mathbf{T}](q'', q') = [\mathbf{T}](-q'', -q').$$

À une dimension avec interaction de proches voisins (ou de courte portée), une telle brisure spontanée de symétrie est impossible. L'argument est le suivant: Pour que

$$\langle q_\ell \rangle = \int dq q \psi_0^2(q)$$

soit différent de zéro, il faut que la fonction  $\psi_0(q)$  ne soit pas symétrique, c'est à dire ne soit ni paire ni impaire. La valeur propre  $\tau_0$  est alors dégénérée (ici double) car l'état symétrique  $\psi_0(-q)$  est un vecteur propre indépendant:

$$\tau_0 = \int dq dq' \psi_0(q') [\mathbf{T}](q', q) \psi_0(q) = \int dq dq' \psi_0(-q') [\mathbf{T}](q', q) \psi_0(-q).$$

Ceci est contradictoire avec le résultat général qui affirme que la valeur propre  $\tau_0$  est non dégénérée.

Comme la symétrie de réflexion ne peut pas être brisée spontanément, une transition de phase avec ordre est exclue.

### 4.3.3 Fonction à deux points et longueur de corrélation

*Limite thermodynamique.* Pour la fonction à deux points, avec le même argument on trouve

$$Z^{(2)}(\ell_1, \ell_2) = \frac{1}{\tau_0^{|\ell_2 - \ell_1|}} \int dq dq' \psi_0(q) [\hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{|\ell_2 - \ell_1|} \hat{\mathbf{Q}}](q, q') \psi_0(q'). \quad (4.17)$$

*Comportement à longue distance.* Examinons maintenant le comportement de la fonction à deux points à grande distance  $\ell = |\ell_1 - \ell_2| \rightarrow \infty$  (supposant pour simplicité  $|\tau_2| < |\tau_1|$ ). Utilisant le développement (4.10),

$$[\mathbf{T}^n](q, q') \underset{n \rightarrow \infty}{=} \tau_0^n \psi_0(q) \psi_0(q') + \tau_1^n \psi_1(q) \psi_1(q') + O(\tau_2^n),$$

on obtient

$$Z^{(2)}(\ell) = \langle q \rangle^2 + A_1^2 (\tau_1/\tau_0)^\ell + O((\tau_2/\tau_0)^\ell)$$

avec

$$A_1 = \int dq q \psi_1(q) \psi_0(q).$$

Le terme dominant est une constante, le carré de la valeur moyenne de  $q$ . Comme noté plus haut, il peut être éliminé en redéfinissant les variables  $q_k$ :

$$q_k \mapsto q'_k = q_k - \langle q \rangle$$

ainsi que

$$\hat{Q}' = \hat{Q} - \langle q \rangle .$$

La fonction à deux points de  $q'$  décroît alors exponentiellement pour  $\ell \rightarrow \infty$  (supposant  $A_1 \neq 0$  sinon il faut prendre le terme suivant):

$$\langle q'_\ell q'_0 \rangle = A_1^2 (\tau_1/\tau_0)^\ell + O((\tau_2/\tau_0)^\ell) .$$

On caractérise de façon générale cette décroissance par la *longueur de corrélation*  $\xi$  qui est définie par

$$\xi = \lim_{\ell \rightarrow \infty} -\frac{\ell}{\ln(|\langle q_0 q_\ell \rangle|)} . \quad (4.18)$$

On trouve ici

$$\xi^{-1} = \ln(\tau_0/\tau_1) . \quad (4.19)$$

*Limite continue.* Supposons que la matrice de transfert dépende d'un paramètre tel que, dans une certaine limite de ce paramètre, la longueur de corrélation tende vers l'infini. Alors, comme nous allons le montrer explicitement dans l'exemple gaussien, il est possible de définir une limite continue, et les fonctions de corrélations de la limite continue peuvent être calculées à partir d'une équation aux dérivées partielles ou d'une intégrale de chemin (cf. chapitre 5).

À la différence de la dimension un, en dimensions d'espace supérieures, il est possible de trouver des modèles où la longueur de corrélation diverge pour une valeur finie de la température. À cette température  $\tau_1 = \tau_0$ , c'est à dire que la valeur propre maximale est dégénérée (au moins double). Mais comme nous l'avons discuté en section 4.3.2, si la valeur propre maximale de la matrice de transfert est dégénérée, il est possible d'avoir une brisure spontanée de symétrie. À cette température, on observe donc en général une transition de phase.

Cet argument établit donc un lien entre existence d'une transition de phase et possibilité de définir une limite continue.

#### 4.3.4 Variable moyenne et limite thermodynamique

Il est instructif d'étudier le comportement des moments de la variable aléatoire moyenne

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n q_\ell$$

dans la limite thermodynamique  $n \rightarrow \infty$ .

D'abord, par invariance par translation,

$$\langle Q \rangle_n = \langle q \rangle_n .$$

Le second moment est lié à la fonction à deux points, et donc à deux points connexe, en effet

$$\langle Q^2 \rangle_n = \frac{1}{n^2} \sum_{\ell_1, \ell_2} \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{\ell} \langle q_0 q_\ell \rangle_n = \langle q \rangle_n^2 + \frac{1}{n} \sum_{\ell} (\langle q_0 q_\ell \rangle_n)_{\text{conn.}} .$$

Dans la limite thermodynamique, la fonction à deux points connexe décroît exponentiellement pour  $|\ell| \rightarrow \infty$  d'une façon déterminée par la longueur de corrélation. Si la longueur de corrélation est finie, la somme sur  $\ell$  converge. Le second cumulant  $\langle Q^2 \rangle_c$  tend alors vers zéro comme

$$\langle Q^2 \rangle_c \sim \frac{1}{n} \sum_{\ell} \langle q_0 q_{\ell} \rangle_c.$$

Quand la longueur de corrélation est finie, les variables  $q_{\ell}$ , bien qu'elles ne soient pas indépendantes, ont une moyenne dont les moments ont le comportement prédit par le théorème de la limite centrale.

#### 4.4 Fonctions connexes et propriété d'amas

La fonction à deux points de  $q'$  est aussi la fonction à deux points de  $q$  à laquelle le produit des fonctions à un point a été soustraite:

$$\langle q'_{\ell_1} q'_{\ell_2} \rangle = \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle - \langle q_{\ell_1} \rangle \langle q_{\ell_2} \rangle.$$

La combinaison ainsi obtenue, qui est le deuxième cumulant de la distribution, est appelée fonction à deux points connexe et sera notée

$$\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle_c \equiv \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \rangle - \langle q_{\ell_1} \rangle \langle q_{\ell_2} \rangle.$$

C'est cette fonction connexe qui décroît à grande distance dans la limite thermodynamique.

Cette propriété se généralise à la fonction à  $p$  points. Utilisant, en particulier, les techniques de la section 2.4.2, on introduit une fonction génératrice des fonctions de corrélation

$$\mathcal{Z}(\mathbf{b}) = \left\langle \exp \sum_{\ell} b_{\ell} q_{\ell} \right\rangle.$$

Alors

$$\mathcal{W}(\mathbf{b}) = \ln \mathcal{Z}(\mathbf{b}),$$

la fonction génératrice des cumulants, est la fonction génératrice des fonctions de corrélation connexes.

Notons qu'elle est aussi l'énergie libre d'un système où un terme couplé linéairement à  $q$  a été ajouté à l'énergie de configuration.

*Propriété d'amas.* Une propriété très importante des fonctions de corrélation connexes est la propriété d'*amas* (cluster en anglais).

Notons  $\langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_c$  la fonction à  $p$  points connexe. Séparons alors les  $p$  points  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$  en deux sous-ensembles non vides disjoints  $I$  et  $J$ . Appelons distance  $D$  entre ces deux sous-ensembles de points la quantité

$$D = \min_{\ell_i \in I, \ell_j \in J} |\ell_i - \ell_j|.$$

Alors

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \langle q_{\ell_1} q_{\ell_2} \dots q_{\ell_p} \rangle_c = 0. \quad (4.20)$$

Avec les hypothèses de ce chapitre, on peut montrer plus précisément que la fonction de corrélation décroît au moins comme  $e^{-D/\xi}$ , où  $\xi$  est la longueur de corrélation (4.19).

## 4.5 Exemples

Avant d'aborder le cas gaussien, qui va nous intéresser plus particulièrement, nous allons illustrer l'analyse précédente par quelques exemples simples.

(i) *Température infinie ou variables indépendantes.* Considérons l'expression (4.2). Quand l'énergie de configuration  $\mathcal{E}$  est nulle ou la température  $T$  infinie, les variables en sites différents sont indépendantes. La matrice de transfert se factorise (dans la notation):

$$[\mathbf{T}](q, q') = e^{-\omega(q)/2} e^{-\omega(q')/2},$$

et prend donc la forme d'un projecteur sur le vecteur  $e^{-\omega(q)/2}$ . Donc la valeur propre correspondant à ce vecteur est positive et toutes les autres valeurs propres s'annulent. La longueur de corrélation est nulle.

(ii) *Systèmes invariants par translation.* La limite opposée correspond à prendre  $S(q, q')$  de la forme

$$S(q, q') = E(q - q')/T,$$

où  $E(q)$  est donc une fonction paire.

Nous reconnaissons alors une version de la marche au hasard étudiée en section 3.3, à une dimension dans l'espace continu, la matrice de transfert jouant le rôle de la probabilité de transition. Dans cet exemple la borne (4.4) n'est pas satisfaite, et nous la remplaçons par

$$E(q) \geq \mu|q|.$$

La matrice de transfert se diagonalise par transformée de Fourier:

$$[\tilde{\mathbf{T}}](k) = \int dq e^{ikq - E(q)/T}.$$

La matrice de transfert a donc un spectre continu. La limite thermodynamique est dominée par le voisinage de  $k = 0$ . On peut définir alors une limite continue qui est directement reliée au mouvement brownien.

(iii) *Limite de basse température.* Considérons maintenant l'exemple

$$S(q, q') = \frac{1}{2}(q - q')^2/T + \frac{1}{2}(\omega(q) + \omega(q')).$$

où  $T$  est physiquement proportionnel à la température et la fonction  $\omega(q)$  est une fonction régulière (par exemple un polynôme) positive avec un minimum unique à  $q = q_0$ :

$$\omega(q) = \frac{1}{2}\omega_2(q - q_0)^2 + O((q - q_0)^3).$$

Pour  $T \rightarrow 0$ , la configuration dominante à la fonction de partition correspond à tous les  $q_k$  égaux. La fonction à  $p$  points se réduit à

$$\langle q^p \rangle_n = \int dq q^p e^{-n\omega(q)} / \int dq e^{-n\omega(q)}$$

Alors, pour  $n \rightarrow \infty$ , seul le voisinage de la configuration  $q = q_0$  contribue et  $\langle q^p \rangle_n \rightarrow q_0^p$ . Pour le calcul des fonctions connexes, on peut introduire la fonction génératrice

$$\mathcal{Z}_n(b) = \langle e^{bq} \rangle_n.$$

La limite  $n \rightarrow \infty$  relève de la méthode du col. On peut donc approximer  $\omega(q)$  par  $\frac{1}{2}\omega_2 q^2$ . La fonction génératrice est donnée par

$$\mathcal{Z}_n(b) \propto \int dq e^{-n\omega_2(q-q_0)^2/2 + bq} \propto e^{bq_0 + b^2/2n\omega_2},$$

et donc la fonction génératrice des fonctions connexes

$$\mathcal{W}_n(b) = bq_0 + b^2/2n\omega_2,$$

un résultat analogue au théorème de la limite centrale. En particulier, puisque la fonction à deux points est constante, la longueur de corrélation est infinie.

Enfin, pour étudier le voisinage de  $T = 0$ , on peut aussi remplacer  $\omega(q)$  par l'approximation quadratique. On est alors conduit à une distribution gaussienne que nous discutons maintenant en détail.

## 4.6 Le modèle gaussien

Nous étudions maintenant de façon plus détaillée un modèle où la fonction  $S(q, q')$  est une forme quadratique, correspondant à un poids de Boltzmann gaussien.

À chaque point  $k \in \mathbb{Z}$  du réseau est attachée une variable réelle  $x_k$  (par exemple la déviation d'une particule de son point d'équilibre) et un poids statistique

$$\rho(x) = \mathcal{Z}^{-1} e^{-S(x)},$$

où nous choisissons la fonction  $S(x)$  de la forme particulière

$$S(x) = \sum_k \left[ \frac{J}{2T} (x_k - x_{k-1})^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_k^2 \right], \quad \omega, J > 0. \quad (4.21)$$

Dans l'interprétation physique, la constante  $J$  caractérise la force de l'interaction entre proches voisins, le paramètre positif  $T$  est la température et  $\omega$  caractérise la distribution pour  $T = +\infty$ , qui peut être engendrée par un potentiel harmonique  $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$  correspondant à une force de rappel à l'équilibre.

On s'attend à ce que les comportements collectifs apparaissent à basse température, où la corrélation entre points voisins est la plus forte. En effet, pour  $T \rightarrow 0$ , la configuration dominante est obtenue en minimisant l'énergie et correspond à tous les  $x_k$  égaux.

Il est commode, pour ce qui suit, de changer de normalisation, posant

$$x_k = \sqrt{\varepsilon} q_k,$$

où le paramètre

$$\varepsilon = \sqrt{T/J}$$

est proportionnel à  $\sqrt{T}$ . La limite de basse température  $T \rightarrow 0$  correspond alors à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Dans ces nouvelles variables, la fonction  $\mathcal{S}$  (équation (4.2)) devient

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_k \left[ (q_k - q_{k-1})^2 / \varepsilon + \varepsilon \omega^2 q_k^2 \right]. \quad (4.22)$$

Dans la notation (4.6),

$$S(q, q') = \frac{1}{2\varepsilon} (q - q')^2 + \frac{\varepsilon \omega^2}{4} (q^2 + q'^2). \quad (4.23)$$

Nous calculons d'abord les quantités qui nous intéressent pour un réseau fini  $k \in [0, n]$ , imposant des conditions aux limites périodiques:  $q_n = q_0$ , et étudions ensuite la limite du système infini,  $n \rightarrow \infty$ .

Il est aussi commode de changer de normalisation de la fonction de partition et d'écrire la densité de probabilité

$$\rho(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathcal{Z}(n, T)} \frac{e^{-\mathcal{S}_n(\mathbf{q})}}{(2\pi\varepsilon)^{n/2}} \quad (4.24)$$

avec

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n S(q_{k-1}, q_k). \quad (4.25)$$

La fonction de partition est alors donnée par

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) = \int \prod_{k=1}^n \frac{dq_k}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp[-\mathcal{S}_n(\mathbf{q})]. \quad (4.26)$$

#### 4.6.1 Matrice de transfert: Propriétés algébriques

La matrice de transfert  $\mathbf{T}$  est maintenant associée au noyau (pour plus de détails cf. section 4.1.2):

$$[\mathbf{T}](q, q') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(q - q')^2/\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon\omega^2(q^2 + q'^2) \right]. \quad (4.27)$$

L'opérateur  $\mathbf{T}$  est symétrique réel. On vérifie de plus qu'il est positif (cf. section 4.8). Le noyau  $[\mathbf{T}]$  satisfait la borne (4.4) et donc toutes les traces des puissances de  $\mathbf{T}$  existent. Son spectre est discret. Ses valeurs propres sont réelles positives et bornées, et ses vecteurs propres orthogonaux.

Il est commode d'introduire la paramétrisation

$$\omega\varepsilon = 2 \sinh(\theta/2), \quad \Omega = \sinh \theta/\varepsilon = \omega \cosh(\theta/2). \quad (4.28)$$

En termes des paramètres (4.28), la matrice de transfert s'écrit

$$[\mathbf{T}](q, q') = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi \sinh \theta}} \exp \left[ -\frac{\Omega}{2 \sinh \theta} ((q^2 + q'^2) \cosh \theta - 2qq') \right]. \quad (4.29)$$

Dans ce qui suit, nous utilisons directement les notations et résultats de la section 4.3. En particulier, nous notons  $\psi_\nu$  les vecteurs propres de  $\mathbf{T}$  correspondant aux valeurs propres  $\tau_\nu$ . Nous introduisons aussi l'opérateur position  $\hat{\mathbf{Q}}$ , défini par l'équation (4.11), et qui agit de façon multiplicative:

$$[\hat{\mathbf{Q}}\psi](q) = q\psi(q).$$

Pour des raisons qui seront explicitées plus loin, les vecteurs et valeurs propres de  $\mathbf{T}$  peuvent être déterminés par une méthode algébrique inspirée de la solution de l'oscillateur harmonique quantique.

*Opérateurs d'annihilation et de création.* Dans le langage de la mécanique quantique, l'opérateur  $\hat{\mathbf{Q}}$  est l'opérateur *position*. On introduit aussi l'opérateur *impulsion*  $\hat{\mathbf{P}}$ , qui agit sur le sous-ensemble dense des vecteurs différentiables de l'espace de Hilbert par

$$[\hat{\mathbf{P}}\psi](q) = \frac{1}{i} \frac{d\psi}{dq}. \quad (4.30)$$

On vérifie la relation de commutation (avec la notation  $[\mathbf{U}, \mathbf{V}] \equiv \mathbf{UV} - \mathbf{VU}$ )

$$[\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{P}}] = i \mathbf{1},$$

où  $\mathbf{1}$  est l'opérateur identité. Utilisant la notation  $\dagger$  pour indiquer la conjugaison hermitienne, nous remarquons

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}}^\dagger, \quad \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}^\dagger, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^\dagger.$$

On définit alors deux opérateurs

$$\mathbf{A} = i\hat{\mathbf{P}} + \Omega\hat{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{A}^\dagger = -i\hat{\mathbf{P}} + \Omega\hat{\mathbf{Q}}, \quad (4.31)$$

appelés, dans le langage quantique, opérateurs d'*annihilation* et de *création*, respectivement.

Leur commutateur est

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = 2\Omega \mathbf{1}. \quad (4.32)$$

*Matrice de transfert et opérateurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^\dagger$ .* Utilisant la forme explicite (4.27), on vérifie d'abord l'identité

$$\left[ \frac{\partial}{\partial q} + \Omega q + e^{-\theta} \left( \frac{\partial}{\partial q'} - \Omega q' \right) \right] [\mathbf{T}](q, q') = 0.$$

Faisant alors agir les opérateurs  $\mathbf{AT}$  et  $\mathbf{TA}$  sur un vecteur  $\psi$  arbitraire, on obtient

$$\begin{aligned} [\mathbf{AT}\psi](q) &\equiv \int dq' \left( \frac{\partial}{\partial q} + \Omega q \right) [\mathbf{T}](q, q') \psi(q') \\ &= e^{-\theta} \int dq' \psi(q') \left( \Omega q' - \frac{\partial}{\partial q'} \right) [\mathbf{T}](q, q') \\ &= e^{-\theta} \int dq' [\mathbf{T}](q, q') \left( \frac{\partial}{\partial q'} + \Omega q' \right) \psi(q') \equiv e^{-\theta} [\mathbf{TA}\psi](q), \end{aligned}$$

après une intégration par parties. On en déduit les relations de commutation

$$\mathbf{AT} = e^{-\theta} \mathbf{TA} \Rightarrow \mathbf{A}^\dagger \mathbf{T} = e^\theta \mathbf{TA}^\dagger. \quad (4.33)$$

#### 4.6.2 Matrice de transfert. Vecteurs et valeurs propres

Les relations de commutation permettent de déterminer le spectre et les vecteurs propres de la matrice de transfert.

En effet, si  $\psi_\nu$  est le vecteur propre de  $\mathbf{T}$  associé à la valeur propre  $\tau_\nu$ ,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{T} \psi_\nu = \tau_\nu \mathbf{A}^\dagger \psi_\nu = e^\theta \mathbf{TA}^\dagger \psi_\nu.$$

Donc, si  $\mathbf{A}^\dagger \psi_\nu$  est de carré sommable et ne s'annule pas,  $\mathbf{A}^\dagger \psi_\nu$  est aussi un vecteur propre, associé à la valeur propre  $e^{-\theta} \tau_\nu < \tau_\nu$ .

La solution de l'équation

$$[\mathbf{A}^\dagger \psi_\nu](q) = -\psi'(q) + \Omega q \psi(q) = 0$$

est

$$\psi(q) \propto e^{\Omega q^2/2},$$

qui n'est pas de carré sommable. Donc il n'existe pas de vecteur  $\psi$  dans  $\mathcal{L}^2$  tel que  $\mathbf{A}^\dagger \psi = 0$ .

Le même raisonnement, appliqué à  $\mathbf{A}$ , donne

$$\mathbf{A}\mathbf{T}\psi_\nu = \tau_\nu \mathbf{A}\psi_\nu = e^{-\theta} \mathbf{T}\mathbf{A}\psi_\nu.$$

Donc, si  $\mathbf{A}\psi_\nu$  est de carré sommable et ne s'annule pas,  $\mathbf{A}\psi_\nu$  est aussi un vecteur propre, associé à la valeur propre  $e^\theta \tau_\nu > \tau_\nu$ .

Mais comme l'opérateur  $\mathbf{T}$  est borné, il existe nécessairement une valeur propre maximum  $\tau_0$ . Le vecteur propre correspondant  $\psi_0$  est donc tel que

$$\mathbf{A}\psi_0 = 0. \quad (4.34)$$

Explicitant l'équation (4.34), on trouve l'équation différentielle

$$\psi'(q) + \Omega q \psi(q) = 0,$$

dont la solution

$$\psi_0(q) \propto e^{-\Omega q^2/2}$$

est bien de carré sommable.

On en déduit que les vecteurs

$$\psi_\nu \propto (\mathbf{A}^\dagger)^\nu \psi_0,$$

dont on vérifie qu'ils sont bien normalisables, sont les vecteurs propres de  $\mathbf{T}$  associés aux valeurs propres

$$\tau_\nu = e^{-\nu\theta} \tau_0.$$

Calculant la trace de  $\mathbf{T}$  de deux façons différentes, on trouve enfin

$$\text{tr } \mathbf{T} = \int dq [\mathbf{T}](q, q) = \frac{1}{\omega\varepsilon} = \frac{1}{2 \sinh(\theta/2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_\nu = \frac{\tau_0}{1 - e^{-\theta}}.$$

On en déduit

$$\tau_\nu = e^{-\theta(\nu+1/2)}, \quad (4.35)$$

ce qui confirme que l'opérateur est défini positif.

*Opérateur hamiltonien.* L'opérateur

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} + \frac{1}{2} \Omega \quad (4.36)$$

que, par analogie avec la mécanique quantique, nous appelons hamiltonien, commute avec la matrice de transfert et a donc les mêmes vecteurs propres. Pour

déterminer les valeurs propres correspondantes, nous faisons agir  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  sur un vecteur propre:

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} (\mathbf{A}^\dagger)^\nu \psi_0.$$

Commutant l'opérateur  $\mathbf{A}$  systématiquement avec les opérateurs  $\mathbf{A}^\dagger$  placés à sa droite au moyen de la relation (4.32), et utilisant finalement l'équation (4.34), nous en déduisons

$$\mathbf{H} \psi_\nu = \Omega(\nu + \frac{1}{2}) \psi_\nu. \quad (4.37)$$

La matrice de transfert  $\mathbf{T}$  peut donc s'exprimer en fonction de  $\mathbf{H}$  par

$$\mathbf{T} = \exp\left(-\frac{\theta}{\Omega} \mathbf{H}\right). \quad (4.38)$$

Enfin, notons que  $\mathbf{H}$ , exprimé en termes des opérateurs  $\hat{\mathbf{Q}}$  et  $\hat{\mathbf{P}}$ , s'écrit

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 \hat{\mathbf{Q}}^2. \quad (4.39)$$

### 4.6.3 Fonction de partition. Fonctions de corrélation

*Fonction de partition.* La fonction de partition peut s'écrire (section 4.1.2):

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) = \text{tr} \mathbf{T}^n = \sum_{\nu} e^{-n\theta(\nu+1/2)} = \frac{e^{-n\theta/2}}{1 - e^{-n\theta}}. \quad (4.40)$$

*Fonction de corrélations.* Comme la mesure est gaussienne, il suffit de calculer les fonctions à un et deux points, les autres s'obtenant par le théorème de Wick. Le calcul explicite repose sur quelques identités. D'abord, utilisant les relations de commutation (4.33) et la cyclicité de la trace, on trouve

$$\text{tr} \mathbf{T}^n \mathbf{A}^m = \text{tr} \mathbf{T}^n \mathbf{A}^{\dagger m} = 0 \quad \text{pour } m > 0.$$

Avec les mêmes ingrédients, on obtient

$$\text{tr} \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{T}^n = e^{n\theta} \text{tr} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{T}^n.$$

La relation de commutation (4.32) permet alors d'en déduire

$$\text{tr} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{T}^n = \frac{2\Omega}{e^{n\theta} - 1} \text{tr} \mathbf{T}^n.$$

Enfin, des définitions (4.31) nous tirons

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2\Omega} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger). \quad (4.41)$$

*Fonction à un point.* La fonction à un point est proportionnelle à

$$\text{tr } \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^n \propto \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger) \mathbf{T}^n = 0.$$

C'est un résultat qui découle, en fait, directement de la symétrie  $[\mathbf{T}](q, q') = [\mathbf{T}](-q, -q')$ .

*Fonction à deux points.* La fonction à deux points est donnée par (équation (4.14))

$$\langle q_0 q_\ell \rangle = \mathcal{Z}^{-1}(n, \varepsilon) \text{tr } \mathbf{T}^{n-|\ell|} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{|\ell|} \hat{\mathbf{Q}}.$$

Utilisant les relations de commutation (4.33) et les relations exhibées ci-dessus, on obtient le résultat explicite

$$\langle q_0 q_\ell \rangle = \frac{1}{2\Omega} \frac{\cosh((n/2 - |\ell|)\theta)}{\sinh(n\theta/2)}.$$

*Limite thermodynamique.* Dans la limite thermodynamique (limite de volume, ici en fait longueur, infini)  $n \rightarrow \infty$ , la fonction de partition  $\mathcal{Z}(n, \varepsilon)$  devient

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) \sim e^{-n\theta/2},$$

et donc l'énergie libre par unité de volume (ici de longueur)  $\mathcal{W}/n$  est (nous omettons le facteur de température proportionnel à  $\varepsilon^2$  sans intérêt ici) a une limite finie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{W} \equiv \frac{1}{n} \ln \mathcal{Z} = -\frac{\theta}{2}.$$

Dans la limite de basse température  $\varepsilon \rightarrow 0$ , les relations (4.28) entraînent  $\theta \sim \varepsilon\omega$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{W} \sim -\frac{1}{2} \varepsilon\omega.$$

De même, la fonction à deux points devient

$$\langle q_0 q_\ell \rangle \sim \frac{1}{2\Omega} e^{-\theta|\ell|}. \quad (4.42)$$

En conséquence, la fonction à deux points décroît exponentiellement à grande distance. On caractérise cette décroissance par la *longueur de corrélation* (définie en (4.18))

$$\xi = \lim_{\ell \rightarrow \infty} -\frac{\ell}{\ln(|\langle q_0 q_\ell \rangle|)} = \frac{1}{\ln(\tau_0/\tau_1)} = \frac{1}{\theta}.$$

À basse température, c'est à dire pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\xi = 1/\theta \sim 1/\omega\varepsilon$$

et donc la longueur de corrélation diverge.

## 4.7 Modèle gaussien: limite continue

Puisque pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  la longueur de corrélation diverge, nous introduisons la longueur macroscopique  $\beta = n\varepsilon$  et nous prenons la limite  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $n\varepsilon = \beta$  fixé. Ceci correspond à fixer la longueur du système en unités de longueur de corrélation, en effet  $n \sim \omega\beta\xi$ . Alors

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) \sim \frac{e^{-\omega\beta/2}}{1 - e^{-\omega\beta}}.$$

Cette limite est appelée limite continue, dans la mesure où pour les quantités définies à l'échelle de la longueur toute trace du réseau initial a disparu.

### 4.7.1 Limite continue et hamiltonien quantique

Dans la limite continue  $\Omega \rightarrow \omega$  et l'opérateur hamiltonien (4.39) devient

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{\mathbf{Q}}^2, \quad (4.43)$$

qui est l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique de fréquence  $\omega$ .

La fonction de partition quantique est donnée par

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{tr} e^{-\beta\mathbf{H}} = \frac{e^{-\omega\beta/2}}{1 - e^{-\omega\beta}}, \quad (4.44)$$

où  $\beta$  est l'inverse de la température, dans un système d'unités où  $\hbar$ , la constante de Planck, est égale à 1. Elle coïncide avec la limite continue de la fonction de partition classique.

De façon plus générale, la relation (4.38) montre que dans la même limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, n\varepsilon = \beta \text{ fixé}} \mathbf{T}^n = e^{-\beta\mathbf{H}}.$$

Enfin, l'expression explicite (4.42) de la fonction à deux points montre, de plus, que dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\ell \rightarrow \infty$  avec  $\ell\varepsilon = t$  fixé, la fonction à deux points tend vers une limite finie:

$$\langle q(0)q(t) \rangle = \frac{1}{2\omega} \frac{\cosh(\omega(\beta/2 - |t|))}{\sinh(\omega\beta/2)}. \quad (4.45)$$

Cette limite correspond de nouveau à fixer la distance entre les deux points en unité de longueur de corrélation:  $\ell \sim \omega t\xi$ .

Ainsi, fonction de partition et fonctions de corrélation ont une limite dans laquelle toute trace du réseau initial a disparu, appelée donc limite continue. Il n'a été possible de définir une limite continue que parce que la longueur de corrélation tend vers l'infini.

Enfin, les éléments de matrices de l'opérateur quantique  $\mathbf{U}(t) = e^{-t\mathbf{H}}$  (la matrice densité à l'équilibre thermique à la température  $1/t$ ), dans la représentation où l'opérateur  $\hat{\mathbf{Q}}$  (l'opérateur position de la mécanique quantique) agit par multiplication, est solution d'une équation aux dérivées partielles dans une variable  $t$  continue:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{U}(t)](q, q') = -\frac{1}{2} \left( -\frac{\partial^2}{(\partial q)^2} + \omega^2 q^2 \right) [\mathbf{U}(t)](q, q')$$

avec la condition aux limites

$$[\mathbf{U}(0)](q, q') = \delta(q - q').$$

C'est une équation de Schrödinger en "temps" imaginaire (en fait une équation de type diffusion ou chaleur).

*Divergence de la longueur de corrélation et limite continue.* Nous venons d'observer le premier exemple de limite *continue* associée à la divergence de la longueur de corrélation. Toute limite continue correspond aussi à des propriétés d'universalité. Dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (ici basse température), les propriétés macroscopiques du modèle statistique sont indépendantes de la forme détaillée de la matrice de transfert. Nous aurions pu compliquer quelque peu le terme d'interaction de proche voisin et la distribution en chaque site et obtenir la même limite continue. Enfin le résultat s'exprime en fonction de la solution d'une équation de diffusion dans l'espace continu, où toute trace du réseau initial a disparu.

*Mécaniques statistiques classique et quantique.* Nous avons trouvé, dans la limite continue, une relation entre mécanique statistique quantique à zéro dimension (une seule particule) et mécanique statistique classique à une dimension. En effet, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $n\varepsilon = \beta$  fixé, la fonction de partition classique tend, à une normalisation triviale près, vers la fonction de partition d'une particule quantique. Ce type de relation n'est pas particulier à l'exemple gaussien, s'étend à certaines fonctions de corrélations et se généralise aux dimensions supérieures: la mécanique statistique quantique à  $d - 1$  dimensions d'espace a des liens, dans la limite de basse température, avec la mécanique statistique classique à  $d$  dimensions.

*Limite thermodynamique.* La limite thermodynamique du modèle de mécanique statistique classique est obtenue pour  $\beta \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta) = -\frac{\omega}{2},$$

c'est à dire dans la limite de température nulle du modèle quantique. Dans cette limite, la fonction de partition quantique est dominée par la valeur propre la plus petite, c'est à dire l'énergie du fondamental, du hamiltonien. L'étude de la limite

thermodynamique du système classique est donc reliée à l'étude du fondamental du système quantique.

Dans cette limite, la fonction à deux points se réduit alors à

$$\langle q(t)q(0) \rangle = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|t|}. \quad (4.46)$$

#### 4.7.2 Décimation et limite continue

Considérons de nouveau la matrice de transfert  $[\mathbf{T}](q, q')$  (équation (4.27)). Pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega + \frac{1}{8}\varepsilon^2\omega^3 + O(\varepsilon^4) \\ \theta &= \omega\varepsilon \left(1 - \frac{1}{24}\omega^2\varepsilon^2\right) + O(\varepsilon^5). \end{aligned}$$

De la représentation (4.38), on déduit que, à  $\Omega$  fixé,

$$\mathbf{T}(\theta)\mathbf{T}(\theta') = \mathbf{T}(\theta + \theta'),$$

où  $\mathbf{T}(\theta)$  est l'opérateur de noyau  $[\mathbf{T}](q, q')$  et paramètre  $\theta$ , un résultat qu'on peut vérifier directement par calcul explicite.

Pour calculer la fonction de partition, on peut alors utiliser une méthode dite de décimation qui consiste à regrouper les sites du réseau deux par deux de façon itérative. C'est l'analogue, pour ce problème, des transformations discutées en section 3.2. Ceci induit sur la matrice de transfert la transformation

$$\mathcal{T}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}^2.$$

Dans le cas gaussien, cela conduit à

$$\mathcal{T}(\mathbf{T}(\theta)) \equiv \mathbf{T}(2\theta).$$

Le paramètre  $\Omega$  est invariant, et le paramètre  $\theta$  se transforme en  $2\theta$ . Un point fixe doit satisfaire

$$\mathbf{T}(2\theta) = \mathbf{T}(\theta),$$

ce qui n'a que la solution  $\theta = 0$  et  $\mathbf{T} = 1$ , et donc  $\varepsilon = 0$ . C'est la situation limite de température nulle où toutes variables aléatoires sont égales et la longueur de corrélation infinie, que nous avons discutée dans l'exemple (iii) de la section 4.5.

Notons maintenant que pour  $\varepsilon > 0$  la longueur de corrélation, qui est finie, est divisée par deux à chaque itération et tend donc vers zéro. Les itérations éloignent du point fixe qui correspond à une longueur de corrélation infinie et le paramètre  $\varepsilon$  est donc associé à une direction d'instabilité, c'est à dire à une perturbation essentielle.

Une universalité réduite au seul point  $\varepsilon = 0$  est d'un intérêt physique limité. Il existe en réalité une forme d'universalité asymptotique dans le voisinage d'un

point fixe, ici pour  $0 < \varepsilon \ll 1$ , dont nous allons décrire le principe. Elle va jouer un rôle important par la suite.

L'idée est de faire un nombre  $m$  d'itérations tel que  $2^m \gg 1$ , mais  $2^m \varepsilon \ll 1$ , c'est à dire que la longueur de corrélation après  $m$  itérations est encore grande par rapport à la maille du réseau. Une façon de réaliser cette situation est de multiplier par  $2^m$  la longueur de corrélation initiale. Ceci est réalisé en substituant

$$\varepsilon \mapsto \varepsilon 2^{-m},$$

et en itérant ensuite  $m$  fois la transformation. Ces transformations combinées impliquent pour des paramètres  $\Omega, \theta$ , dans la limite  $m \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \omega + \frac{1}{8}\omega^3 \varepsilon^2 2^{-2m} + O(2^{-4m}) \\ \theta_m &= 2^m \theta = \omega \varepsilon \left(1 - \frac{1}{24}\omega^2 \varepsilon^2 2^{-2m}\right) + O(2^{-4m}).\end{aligned}$$

De l'expression (4.38), on déduit alors qu'asymptotiquement pour  $m \rightarrow \infty$ , la matrice de transfert converge vers l'opérateur  $e^{-\varepsilon \mathbf{H}}$ , où  $\mathbf{H}$  est l'hamiltonien quantique (4.43) qui caractérise la limite continue.

Cette façon d'ajuster l'amplitude initiale d'une perturbation essentielle de telle sorte que l'amplitude itérée reste finie, a un analogue en théorie quantique ou statistique des champs, où elle prend la forme d'une renormalisation.

## 4.8 Généralisation

Les résultats obtenus dans le cas gaussien se généralisent, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , à la classe particulière des fonctions

$$S(q', q) = (q - q')^2 / 2\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon V(q) + \frac{1}{2}\varepsilon V(q'), \quad (4.47)$$

où  $V(q) \geq 0$  est, par exemple, un polynôme.

Nous définissons la matrice de transfert par

$$[\mathbf{T}](q', q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-S(q', q)}. \quad (4.48)$$

La fonction de partition (toujours avec conditions aux limites périodiques  $q_0 = q_n$ ) est donné par

$$\mathcal{Z}_n(\varepsilon) = \text{tr } \mathbf{T}^n.$$

En utilisant, en particulier, l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp[-(q - q')^2 / 2\varepsilon] = \int dp e^{ip(q - q') - \varepsilon p^2 / 2},$$

on peut montrer que l'opérateur  $\mathbf{T}$  peut aussi s'exprimer en terme des opérateurs (4.11,4.30). On trouve

$$\mathbf{T} = e^{-\varepsilon V(\hat{\mathbf{Q}})/2} e^{-\varepsilon \hat{\mathbf{P}}^2/2} e^{-\varepsilon V(\hat{\mathbf{Q}})/2},$$

où encore

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger, \quad \mathbf{U} = e^{-\varepsilon V(\hat{\mathbf{Q}})/2} e^{-\varepsilon \hat{\mathbf{P}}^2/4},$$

ce qui montre aussi que l'opérateur  $\mathbf{T}$  est positif.

La trace de  $\mathbf{T}$  est finie si  $V(q)$  tend vers l'infini assez vite pour  $|q| \rightarrow \infty$ . En effet

$$\text{tr } \mathbf{T} = \int dq [\mathbf{T}](q, q) = \int dq e^{-\varepsilon V(q)}.$$

Donc la somme des valeurs propres  $\tau_k$  de  $\mathbf{T}$  (qui sont positives) est bornée, ce qui entraîne qu'elles s'accroissent à zéro

$$\text{tr } \mathbf{T} = \sum_k \tau_k < \infty \Rightarrow \tau_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Puisque  $\mathbf{T}$  est positif, on peut définir l'opérateur hermitien  $\ln \mathbf{T}$  (il a les mêmes vecteurs propres que  $\mathbf{T}$  et comme valeurs propres  $\ln \tau_k$ ).

*Limite continue*  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{T}$  tend vers l'opérateur identité, et donc  $\ln \mathbf{T} \rightarrow 0$ . Pour obtenir le comportement dominant de  $\ln \mathbf{T}$ , il suffit d'estimer  $\mathbf{T} - \mathbf{1}$ . Développant le produit, on trouve

$$\mathbf{T} - \mathbf{1} = -\varepsilon \left[ \frac{1}{2} \hat{\mathbf{P}}^2 + V(\hat{\mathbf{Q}}) \right] + O(\varepsilon^2).$$

On en déduit

$$\mathbf{H} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \ln \mathbf{T} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{P}}^2 + V(\hat{\mathbf{Q}}) \Rightarrow \mathbf{T} = e^{-\varepsilon \mathbf{H} + O(\varepsilon^2)}.$$

L'opérateur quantique  $\mathbf{H}$  est l'hamiltonien d'une particule de masse unité soumise au potentiel  $V(q)$  (dans un système d'unité où  $\hbar = 1$ ). Dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $n\varepsilon = \beta$  fixé, on trouve donc

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{tr } e^{-\beta \mathbf{H}}.$$

De nouveau ce système statistique classique a une limite continue reliée à la fonction de partition quantique d'une seule particule. Cette limite continue est associée à la divergence de la longueur de corrélation  $\xi$ . En effet

$$\xi^{-1} = \ln(\tau_0/\tau_1) \sim \varepsilon(E_1 - E_0),$$

où  $E_0 < E_1$  sont les deux valeurs propres les plus petites de  $\mathbf{H}$ .

Puisque à chaque hamiltonien quantique est associé une limite continue, cela montre que le point fixe  $\mathbf{T} = \mathbf{1}$  a un nombre infini de perturbations essentielles.

## Exercices

### Exercice 4.1

*Le segment.* Nous considérons une fonction  $S(q - q')$  (équation (4.6)) de la forme

$$S(q, q') = |q - q'|/T.$$

où  $q$  varie sur le segment  $[-1, 1]$  et  $T$  un paramètre positif qui, du point de vue physique, s'interprète comme la température.

Les vecteurs propres  $\psi(q)$  de la matrice de transfert correspondant à une valeur  $\tau$  satisfont alors

$$\int_{-1}^{+1} dq' e^{-|q-q'|/T} \psi(q') = \tau \psi(q). \quad (4.49)$$

(i) Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de transfert. On pourra penser à dériver l'équation.

(ii) En déduire la longueur de corrélation. Que peut-t-on dire de la limite  $T \rightarrow 0$ .

*Solution.* Les vecteurs propres sont des fonctions paires ou impaires.

Dérivant une première fois l'équation (4.49), on trouve

$$\int_{-1}^{+1} dq' \epsilon(q' - q) e^{-|q-q'|/T} \psi(q') = T\tau\psi'(q),$$

où  $\epsilon(q)$  est la fonction signe de  $q$ :  $\epsilon(q > 0) = 1$ ,  $\epsilon(q < 0) = -1$ .

Pour  $q = \pm 1$ , on peut relier les valeurs de la dérivée et de la fonction. On trouve

$$q = 1 : \quad \psi(1) = -T\psi'(1), \quad q = -1 : \quad \psi(-1) = T\psi'(-1). \quad (4.50)$$

Dérivant à nouveau, et utilisant l'équation (4.49), on obtient l'équation différentielle

$$-2T\psi(q) + \tau\psi(q) = \tau T^2\psi''(q).$$

Il est commode de poser

$$k^2 = \frac{2}{T\tau} - \frac{1}{T^2} \Rightarrow \tau = \frac{2T}{1 + k^2T^2}.$$

Les solutions satisfaisant aux conditions aux limites (4.50) sont

$$\begin{aligned} \psi_+(q) &= \cos kq \quad \text{avec} \quad kT \tan k = 1, \\ \psi_-(q) &= \sin kq \quad \text{avec} \quad \tan k = -kT. \end{aligned}$$

Combinant les deux équations, on trouve la condition spectrale

$$\tan(2k) = -\frac{2kT}{1 - k^2T^2}.$$

La situation intéressante est  $T \rightarrow 0$  où les corrélations sont les plus grandes. Alors ( $m$  entier positif)

$$k = \frac{1}{2}m\pi(1 - T) + O(T^2), \quad m > 0, \Rightarrow \tau_m = \frac{2T}{1 + T^2 m^2 \pi^2 / 4} + O(T^4).$$

On en déduit la longueur de corrélation

$$\xi \sim \frac{4}{3\pi^2 T^2}.$$

La longueur de corrélation tend vers l'infini pour  $T \rightarrow 0$ . Le spectre complet dans cette limite prend la forme

$$-\ln(\tau_m/2T) \sim m^2 \pi^2 T^2 / 4.$$

La divergence de la longueur de corrélation permet de définir une limite continue et une intégrale de chemin de type marche au hasard, mais avec des conditions de réflexion sur deux parois situés à  $q = \pm 1$ .

#### Exercice 4.2

*Le cercle.* Nous considérons maintenant la situation où la variable aléatoire  $q$  appartient à un cercle de rayon 1 et la matrice de transfert est une fonction périodique définie par

$$S(q, q') = -\cos(q - q')/T.$$

- (i) Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de transfert.
- (ii) En déduire la longueur de corrélation. Que peut-t-on dire de la limite  $T \rightarrow 0$ .
- (iii) Dans ce contexte, il n'est pas naturel de considérer les fonctions de corrélations de la variable  $q$  qui n'est définie que modulo  $2\pi$ . On calculera donc les valeurs moyennes des produits de fonctions périodiques  $e^{\pm i q \ell}$  pour un ou deux points, d'abord à taille finie, ensuite dans la limite thermodynamique.

*Solution.* Les fonctions propres sont de la forme  $e^{i\nu q} / \sqrt{2\pi}$  avec  $\nu$  entier. En effet, ces fonctions diagonalisent la matrice de transfert:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dq dq' e^{i\nu q - i\nu' q'} e^{\cos(q - q')/T} = \delta_{\nu\nu'} \int_{-\pi}^{+\pi} dq e^{i\nu q} e^{\cos q/T},$$

et donc les valeurs propres sont

$$\tau_\nu = \tau_{-\nu} = \int_{-\pi}^{+\pi} dq e^{i\nu q} e^{\cos q/T}.$$

La matrice de transfert peut alors s'écrire

$$[\mathbf{T}](q, q') = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu} \tau_\nu e^{i\nu(q - q')}.$$

Dans la limite  $T \rightarrow 0$ , l'intégrale peut être calculée par la méthode du col, le col étant à  $q = 0$ . On trouve

$$\tau_\nu \sim e^{1/T} \int dq e^{-q^2/2T + i\nu q} \sim \sqrt{2\pi T} e^{1/T} e^{-T\nu^2/2} \sim \tau_0 e^{-T\nu^2/2}.$$

(ii) Dans la limite de basse température  $T \rightarrow 0$ , la longueur de corrélation (équation (4.19))

$$\xi \sim \frac{1}{\ln(\tau_0/\tau_1)} \sim \frac{2}{T}$$

diverge. On peut alors définir une limite continue qui correspond aussi au mouvement brownien sur le cercle.

Notons enfin que ce spectre est le spectre exact d'une autre matrice de transfert sur le cercle qui peut s'écrire

$$[\mathbf{T}](q, q') = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(q-q'+2m\pi)^2/2T}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} dq e^{i\nu q} [\mathbf{T}](q) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} dq e^{i\nu q - q^2/2T} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{i\nu q - q^2/2T} = \sqrt{2\pi T} e^{-T\nu^2/2}. \end{aligned}$$

(iii) L'invariance par translation implique d'une part

$$\langle e^{\pm i q \ell} \rangle = 0$$

et d'autre part que la seule fonction à deux points non nulle est  $\langle e^{i q \ell_1} e^{-i q \ell_2} \rangle$ . Utilisant l'expression (4.14), on trouve ( $\ell = |\ell_1 - \ell_2|$ )

$$\begin{aligned} Z_n^{(2)}(\ell) &= Z_n^{-1} \text{tr} e^{i\hat{\mathbf{Q}}} \mathbf{T}^\ell e^{-i\hat{\mathbf{Q}}} \mathbf{T}^{n-\ell} \\ &= Z_n^{-1} \frac{1}{4\pi^2} \int dq dq' \sum_{\nu, \nu'} \tau_{\nu'}^{n-\ell} e^{i\nu'(q-q')} e^{iq} \tau_\nu^\ell e^{i\nu(q'-q)} e^{-iq'} \\ &= Z_n^{-1} \sum_\nu \tau_{\nu-1}^{n-\ell} \tau_\nu^\ell. \end{aligned}$$

Dans la limite thermodynamique

$$Z^{(2)}(\ell) = (\tau_1/\tau_0)^\ell = e^{-\ell/\xi}.$$

*Exercice 4.3*

*Modèle gaussien.* Dans le cas du modèle gaussien, la fonction de partition est donnée par une intégrale gaussienne qui peut donc être calculée directement. Pour ce calcul, il est suggéré de commencer par trouver les valeurs propres de la forme quadratique,

*Solution.* L'intégrale (4.26) est gaussienne. Appelant  $\Lambda_{ij}$  la matrice telle que l'expression (4.25) s'écrive

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n \Lambda_{ij} q_i q_j,$$

on trouve

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) = (\det \Lambda)^{-1/2}.$$

On peut calculer le déterminant comme produit des valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $\Lambda$ . L'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\sum_{k=1}^n \Lambda_{jk} q_k = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{S}_n}{\partial q_j} \equiv (2 + \omega^2 \varepsilon^2) q_j - q_{j+1} - q_{j-1} = \lambda q_j,$$

avec la condition  $q_n = q_0$ . À cause de la symétrie de translation sur le réseau avec conditions aux limites périodiques, les vecteurs propres sont de la forme  $q_i = r^i$  où la constante  $r$  satisfait  $r^n = 1$  et

$$\lambda = 2 + \varepsilon^2 \omega^2 - r - r^{-1}.$$

Le paramètre  $r$  est une racine de l'unité,  $r = e^{2i\pi\ell/n}$ , et donc

$$\lambda = 2(1 - \cos(2\pi\ell/n)) + \varepsilon^2 \omega^2, \quad 0 \leq \ell < n.$$

On en déduit la fonction de partition

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) = \left[ \prod_{\ell=0}^{n-1} 2(1 - \cos(2\pi\ell/n)) + \varepsilon^2 \omega^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.51)$$

Il est possible de calculer le produit explicitement. Utilisant la paramétrisation (4.28), on trouve l'identité

$$\prod_{\ell=0}^{n-1} 2(\cosh \theta - \cos(2\pi\ell/n)) = 2(\cosh n\theta - 1) = 4 \sinh^2(n\theta/2).$$

(On compare les racines et la normalisation des deux polynômes dans la variable  $\cosh \theta$ .) On retrouve alors la forme explicite (4.40) de  $\mathcal{Z}(n, \varepsilon)$ .

## Chapitre 5

### Limite continue et intégrale de chemin

Nous avons étudié au chapitre 4 des modèles sur réseau à une dimension. Nous avons montré, en section 4.7, dans le cadre du modèle gaussien, que dans la limite où la longueur de corrélation diverge, il est possible de définir une limite continue à condition de ne considérer que des quantités définies à une échelle de distance proportionnelle à la longueur de corrélation. Les quantités caractéristiques de la limite continue peuvent alors être calculées dans un formalisme de type mécanique quantique, dans lequel toute trace de la structure du réseau initial a disparu.

Par exemple, la fonction de partition associée à la fonction (4.25) converge, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $n\varepsilon = \beta$  fixé, vers une fonction de partition quantique.

Nous montrons maintenant que, comme dans le cas de la marche au hasard, on peut associer à la limite continue une intégrale de chemin qui généralise l'intégrale de chemin (3.50) du mouvement brownien.

#### 5.1 Intégrale de chemin gaussienne

On associe aux positions  $k$  sur le réseau les valeurs d'une coordonnée continue  $t$  avec

$$t_k = k\varepsilon, \quad t_n = n\varepsilon = \beta.$$

Remarquons que si  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $t = k\varepsilon$  fixé, alors  $k$  est proportionnel à  $\xi \propto 1/\varepsilon$ , c'est à dire que les positions  $t_k$  sur le réseau sont proportionnelles à la longueur de corrélation.

On introduit alors la fonction

$$q(t) = q_{k-1} + \frac{1}{\varepsilon}(t - t_{k-1})(q_k - q_{k-1}) \quad \text{pour } t_{k-1} \leq t \leq t_k,$$

qui interpole linéairement entre les points  $q_k$ , comme dans l'exemple de la figure 6.

Alors

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_0^\beta dt \dot{q}^2(t).$$

De plus,

$$\varepsilon \sum_{k=1}^n q_k^2 = \int_0^\beta dt [q^2(t) + \frac{1}{6}\varepsilon^2 \dot{q}^2(t)].$$

La matrice de transfert du modèle gaussien s'exprime en termes de la fonction (4.22):

$$\mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\varepsilon} + \varepsilon \omega^2 q_k^2 \right],$$

qui peut donc s'écrire

$$\mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_0^\beta dt \left[ (1 + \frac{1}{6}\omega^2 \varepsilon^2) \dot{q}^2(t) + \omega^2 q^2(t) \right].$$

Dans la limite formelle du continu,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $n\varepsilon = \beta$  fixé,  $\mathcal{S}_\varepsilon$  tend donc vers

$$\mathcal{S}_0(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{q}) = \int_0^\beta dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} \omega^2 q^2(t) \right]. \quad (5.1)$$

La fonction de partition est alors donnée par une intégrale de chemin:

$$\mathcal{Z}_0(\beta) = \int [dq(t)] \exp[-\mathcal{S}_0(q)] \quad (5.2)$$

avec  $q(0) = q(\beta)$  (conditions aux limites périodiques), où la notation  $\int [dq(t)]$  signifie somme sur tous les chemins.

La quantité  $\mathcal{S}_0(q)$  qui est, au signe du potentiel près, l'action classique de l'oscillateur harmonique d'hamiltonien (4.43), est aussi appelée, dans le cadre de la physique quantique, action euclidienne.

Cette représentation par intégrale de chemin se généralise au noyan associé à l'opérateur statistique  $e^{-\beta \mathbf{H}}$  pour des hamiltoniens quantiques plus généraux du type considéré en section 4.8.

*Remarque.* Ici, comme dans l'exemple de l'intégrale de chemin (3.50), la notation  $\dot{q}$  pourrait laisser supposer que les chemins contribuant à l'intégrale de chemin sont dérivables. Pour les mêmes raisons il n'en est rien. Pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  les chemins typiques qui contribuent satisfont

$$[q(t + \varepsilon) - q(t)]^2 / \varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O(1),$$

comme les chemins browniens. En particulier,  $[dq(t)]$  ne représente pas une mesure sur les chemins. Le facteur  $\exp[-\frac{1}{2} \int \dot{q}^2]$  fait partie de la mesure et spécifie l'espace des chemins qui contribuent à l'intégrale.

Néanmoins la notation est utile car les chemins qui donnent les contributions dominantes à l'intégrale de chemin sont dans un voisinage de chemins classiques qui eux sont dérivables.

### 5.1.1 Fonctionnelle génératrice. Dérivée fonctionnelle

Comme dans le cas des variables discrètes, nous introduisons d'abord la notion de fonction (ici fonctionnelle) génératrice des fonctions de corrélations.

Soit  $\{F^{(n)}(t_1, \dots, t_n)\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , une suite de fonctions *symétriques* de leurs arguments. Nous introduisons une nouvelle fonction d'une variable  $f(t)$  et considérons la série formelle en  $f$  suivante:

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n F^{(n)}(t_1, \dots, t_n) f(t_1) \dots f(t_n). \quad (5.3)$$

On appelle  $\mathcal{F}(f)$  fonctionnelle génératrice de la suite de fonctions  $F^{(n)}$ .

En fait, nous admettons pour les  $F^{(n)}$  plus généralement aussi des distributions. Dans ce cas la fonction  $f(t)$  doit appartenir à la classe des fonctions test correspondante, et donc être considérée implicitement comme continue ou même indéfiniment différentiable.

Par la suite nous calculerons, par exemple, des fonctions de corrélation du type

$$Z^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \langle q(t_1) \dots q(t_n) \rangle,$$

où  $q(t)$  est la valeur de la variable aléatoire  $q$  au point  $t$ , et  $\langle \bullet \rangle$  veut dire valeur moyenne. Nous introduirons alors la fonction génératrice de fonctions de corrélation

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n Z^{(n)}(t_1, \dots, t_n) f(t_1) \dots f(t_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n \langle q(t_1) \dots q(t_n) \rangle f(t_1) \dots f(t_n) \\ &= \left\langle \exp \left[ \int dt q(t) f(t) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

*Dérivée fonctionnelle.* Pour calculer une fonction  $F^{(n)}$  à partir de  $\mathcal{F}(f)$ , nous avons alors besoin de la notion de *dérivée fonctionnelle*  $\delta/\delta f(t)$ .

La dérivée fonctionnelle est définie par les propriétés qu'elle satisfait aux règles algébriques habituelles de toute dérivation:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(t)} [\mathcal{F}_1(f) + \mathcal{F}_2(f)] &= \frac{\delta}{\delta f(t)} \mathcal{F}_1(f) + \frac{\delta}{\delta f(t)} \mathcal{F}_2(f), \\ \frac{\delta}{\delta f(t)} [\mathcal{F}_1(f) \mathcal{F}_2(f)] &= \mathcal{F}_1(f) \frac{\delta}{\delta f(t)} \mathcal{F}_2(f) + \mathcal{F}_2(f) \frac{\delta}{\delta f(t)} \mathcal{F}_1(f) \end{aligned} \quad (5.5)$$

et de plus

$$\frac{\delta}{\delta f(u)} f(t) = \delta(u - t), \quad (5.6)$$

où  $\delta(t)$  est la fonction (plus exactement distribution)  $\delta$  de Dirac.

La dérivée de  $\mathcal{F}(f)$ , par exemple, est

$$\frac{\delta}{\delta f(u)} \mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n F^{(n+1)}(u, t_1, \dots, t_n) f(t_1) \dots f(t_n). \quad (5.7)$$

Si l'on dérive maintenant  $p$  fois et prend la limite  $f \equiv 0$ , on trouve

$$F^{(p)}(t_1, \dots, t_p) = \left\{ \left( \prod_{i=1}^p \frac{\delta}{\delta f(t_i)} \right) \mathcal{F} \right\} \Big|_{f \equiv 0}.$$

*Remarque.* Ce formalisme s'applique aussi lorsque les  $F^{(n)}$  ne sont pas des fonctions au sens strict mais sont des distributions. Par exemple

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(u)} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{\delta}{\delta f(u)} \frac{d}{dt} \int dz \delta(t-z) f(z) \\ &= \frac{d}{dt} \delta(t-u). \end{aligned}$$

Ainsi, il est possible d'obtenir les équations du mouvement classique associées à un lagrangien en annulant la dérivée fonctionnelle de l'action. Considérons, par exemple, l'action

$$\mathcal{S}(q) = \int dt \left[ \frac{1}{2} (\dot{q}(t))^2 - V(q(t)) \right].$$

Sa dérivée fonctionnelle est

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta q(\tau)} = \int dt \left[ \dot{q}(t) \frac{d}{dt} \delta(t-\tau) - V'(q(t)) \delta(t-\tau) \right] = -\ddot{q}(\tau) - V'(q(\tau)).$$

L'équation  $\delta \mathcal{S} / \delta q(\tau) = 0$  est donc l'équation du mouvement.

### 5.1.2 Fonctions de corrélations gaussiennes

Nous avons introduit la notion formelle d'intégrale de chemin. En section 2.2, nous avons montré que l'intégrale gaussienne avec un terme linéaire était une fonction génératrice de valeurs moyennes de polynômes avec poids gaussien. Nous généralisons maintenant cette méthode à l'intégrale de chemin.

Il va être commode de remplacer l'intervalle  $[0, \beta]$  par  $[-\beta/2, \beta/2]$ , ce qui correspond à un simple changement de variable sur le temps  $t \mapsto t - \beta/2$ , mais qui rend la limite thermodynamique plus transparente.

Nous considérons donc l'intégrale de chemin

$$\mathcal{Z}_G(b, \beta) = \int_{q(\beta/2)=q(-\beta/2)} [dq(t)] \exp[-\mathcal{S}_G(q, b)] \quad (5.8)$$

avec

$$\mathcal{S}_G(q, b) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} \omega^2 q^2(t) - b(t)q(t) \right], \quad (5.9)$$

dont le résultat est une fonctionnelle de  $b(t)$ .

La fonction  $\mathcal{Z}_G(b, \beta)$  est la fonction génératrice des fonctions de corrélation (généralisant la fonction génératrice (2.1)). En effet, si l'on applique l'identité (la définition de la dérivée fonctionnelle a été donnée en section 5.1.1)

$$\frac{\delta}{\delta b(t_1)} \exp \left[ \int dt b(t)q(t) \right] = q(t_1) \exp \left[ \int dt b(t)q(t) \right],$$

à l'intégrale de chemin (5.8), on obtient

$$\frac{\delta}{\delta b(t_1)} \mathcal{Z}_G(b, \beta) = \int [dq] q(t_1) \exp [-\mathcal{S}_G(q, b)],$$

et plus généralement, par dérivations successives,

$$\prod_{j=1}^p \frac{\delta}{\delta b(t_j)} \mathcal{Z}_G(b, \beta) = \int [dq] \prod_{j=1}^p q(t_j) \exp [-\mathcal{S}_G(q, b)].$$

Dans la limite  $b \equiv 0$ , il est ainsi possible d'engendrer toute fonction de corrélation.

### 5.1.3 Calcul de l'intégrale gaussienne

Généralisant le calcul du mouvement brownien, nous montrons maintenant que l'intégrale de chemin gaussienne (5.8) peut être calculée sans faire référence au processus limite, à une normalisation près.

Pour éliminer le terme linéaire en  $q$  dans  $\mathcal{S}_G(q, b)$ , nous faisons le changement de variables  $q(t) \mapsto r(t)$  (translation):

$$q(t) = q_c(t) + r(t), \quad q_c(\beta/2) = q_c(-\beta/2) \Rightarrow r(\beta/2) = r(-\beta/2), \quad (5.10)$$

où la fonction  $q_c(t)$  va être déterminée ci-dessous. Alors

$$\mathcal{S}_G(q, b) = \mathcal{S}_0(r) + \mathcal{S}_G(q_c, b) + \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \dot{r}(t)\dot{q}_c(t) + \omega^2 r(t)q_c(t) - b(t)r(t) \right].$$

Dans le terme linéaire en  $r$ , nous intégrons par parties:

$$\int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \dot{r}(t)\dot{q}_c(t) = r(\beta/2)\dot{q}_c(\beta/2) - r(-\beta/2)\dot{q}_c(-\beta/2) - \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt r(t)\ddot{q}_c(t).$$

Tenant compte des conditions (5.10), nous voyons que le terme linéaire en  $r$  s'annule si la fonction  $q_c(t)$  est la solution de l'équation du mouvement classique

$$-\ddot{q}_c(t) + \omega^2 q_c(t) = b(t)$$

avec les conditions aux limites (5.10) et  $\dot{q}_c(\beta/2) = \dot{q}_c(-\beta/2)$ .

La solution peut s'écrire

$$q_c(t) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \Delta(t-u)b(u)du, \quad (5.11)$$

où la fonction  $\Delta(t)$  est aussi solution de l'équation

$$-\ddot{\Delta} + \omega^2 \Delta = \delta(t)$$

avec les conditions aux limites périodiques

$$\Delta(\beta/2) = \Delta(-\beta/2), \quad \dot{\Delta}(\beta/2) = \dot{\Delta}(-\beta/2).$$

L'équation (5.11) est l'analogie continu de l'équation (2.9), et le noyau  $\Delta(t-u)$  l'inverse de l'opérateur différentiel  $-\partial_t^2 + \omega^2$  avec conditions aux limites périodiques.

La solution de l'équation est

$$\Delta(t) = \frac{1}{2\omega \sinh(\omega\beta/2)} \cosh(\omega(\beta/2 - |t|)), \quad (5.12)$$

où nous reconnaissons la fonction à deux points (4.45).

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_G(q_c, b) &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_c^2(t) + \frac{1}{2} \omega^2 q_c^2(t) - b(t)q_c(t) \right] \\ &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt q_c(t) \left[ -\frac{1}{2} \ddot{q}_c(t) + \frac{1}{2} \omega^2 q_c(t) - b(t) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt q_c(t)b(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt du b(t)\Delta(t-u)b(u). \end{aligned}$$

L'intégrale résiduelle sur le chemin  $r(t)$ ,

$$\mathcal{N} = \int_{r(\beta/2)=r(-\beta/2)} [dr(t)] \exp[-\mathcal{S}_0(r)],$$

où  $\mathcal{S}_0$  est la fonction (5.1), est égale à la fonction de partition  $\mathcal{Z}_0(\beta)$  de l'oscillateur harmonique (équation (4.44)) et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_G(b, \beta) &= \mathcal{Z}_0(\beta) e^{-\mathcal{S}_G(q_e, b)} \\ &= \mathcal{Z}_0(\beta) \exp \left[ \frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} du dv \Delta(v-u) b(v) b(u) \right].\end{aligned}\quad (5.13)$$

*Limite thermodynamique.* La fonction  $\Delta(t)$  se simplifie dans la limite thermodynamique, c'est à dire quand  $\beta \rightarrow \infty$ . On trouve alors

$$\Delta(t) = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \frac{e^{i\kappa t}}{\kappa^2 + \omega^2}.\quad (5.14)$$

## 5.2 Corrélations gaussiennes. Théorème de Wick

Dérivant deux fois l'expression (5.13), on trouve la fonction de corrélation à deux points

$$\langle q(t)q(u) \rangle = \mathcal{Z}_0^{-1}(\beta) \frac{\delta^2}{\delta b(t)\delta b(u)} \mathcal{Z}_G(b, \beta) \Big|_{b=0} = \Delta(t-u).\quad (5.15)$$

En général

$$\left[ \prod_{j=1}^p \frac{\delta}{\delta b(t_j)} \right] \mathcal{Z}_G(b, \beta) \Big|_{b=0} = \int [dq] \left[ \prod_{j=1}^p q(t_j) \right] \exp[-\mathcal{S}_0(q)]\quad (5.16a)$$

$$= \mathcal{Z}_0(\beta) \langle q(t_1)q(t_2) \dots q(t_p) \rangle.\quad (5.16b)$$

Dans le membre de droite de l'équation (5.16b), nous remplaçons maintenant  $\mathcal{Z}_G(b, \beta)$  par le résultat explicite (5.13) et obtenons

$$\langle q(t_1)q(t_2) \dots q(t_p) \rangle = \prod_{j=1}^p \frac{\delta}{\delta b(t_j)} \exp \left[ \frac{1}{2} \int du dv \Delta(v-u) b(v) b(u) \right] \Big|_{b=0}.$$

La dérivée fonctionnelle en agissant sur l'exponentielle de la forme quadratique fait apparaître un facteur  $b$ :

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta b(t_1)} \exp \left[ \frac{1}{2} \int du dv \Delta(v-u) b(v) b(u) \right] &= \int du_1 \Delta(t_1 - u_1) b(u_1) \\ &\times \exp \left[ \frac{1}{2} \int du dv \Delta(v-u) b(v) b(u) \right].\end{aligned}$$

Les arguments de la section 2.2 s'appliquent de nouveau. Les seuls termes qui survivent dans la limite  $b \equiv 0$  correspondent à des appariements de toutes les dérivées fonctionnelles. C'est une propriété générale de la mesure gaussienne que toutes les autres fonctions de corrélation s'expriment en termes de la fonction à deux points, ce qu'exprime le théorème de Wick:

$$\begin{aligned} \langle q(t_1)q(t_2)\dots q(t_\ell) \rangle &= \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{possibles } P \text{ de } \{1,2,\dots,\ell\}}} \Delta(t_{P_1} - t_{P_2}) \dots \Delta(t_{P_{\ell-1}} - t_{P_\ell}) \\ &= \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{possibles } P \text{ de } \{1,2,\dots,\ell\}}} \langle q(t_{P_1})q(t_{P_2}) \rangle \dots \langle q(t_{P_{\ell-1}})q(t_{P_\ell}) \rangle . \end{aligned} \quad (5.17)$$

### 5.3 Mesure gaussienne perturbée

Dans différentes situations, nous serons à amener à étudier l'effet d'une perturbation sur une mesure gaussienne. Par ailleurs, nous avons indiqué en section 4.8 comment des limites continues plus générales pouvaient être engendrées.

Ainsi, la fonction de partition avec conditions aux limites périodiques, correspondant dans la limite continue à l'hamiltonien quantique

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{\mathbf{Q}}^2 + V_I(\hat{\mathbf{Q}}), \quad (5.18)$$

est donnée par l'intégrale de chemin

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int [dq] \exp \left\{ - \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \left[ \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2 q^2(t) + V_I(q(t)) \right] dt \right\} \quad (5.19)$$

avec  $q(-\beta/2) = q(\beta/2)$ .

Dans ce qui suit nous supposons que la perturbation

$$V_I(q) = \sum_{n=1} v_n q^n$$

est un polynôme dans la variable  $q$ , même si certains résultats se généralisent au cas de toute fonction développable en puissances de  $q$ .

L'intégrant (5.19) peut être développé en puissances de  $V_I(q)$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{Z}(\beta)}{\mathcal{Z}_0(\beta)} &= \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \left[ \int dt V_I(q(t)) \right]^k \right\rangle_0 \\ &= \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!} \int dt_1 dt_2 \dots dt_k \langle V_I(q(t_1)) \dots V_I(q(t_k)) \rangle_0 , \end{aligned}$$

où  $\langle \bullet \rangle_0$  signifie moyenne par rapport à la mesure gaussienne  $e^{-S_0}$  (équation (5.1)) avec conditions aux limites périodiques. Les arguments donnés en section 2.2 s'appliquent immédiatement ici aussi. Si  $V_I(q)$  est un polynôme, les termes successifs du développement peuvent être calculés systématiquement en utilisant le théorème de Wick (2.17) sous la forme (5.17). Ceci fournit la base de la théorie des perturbations.

*Développement perturbatif et minimum du potentiel.* L'intégrale de chemin ne dépend en réalité que de la somme

$$V(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + V_I(q),$$

appelée potentiel dans le contexte quantique. À toute décomposition d'une fonction  $V(q)$  en une somme d'un terme quadratique et d'un reste  $V_I(q)$  est associé un développement perturbatif. Toutefois, l'intégrand est maximum dans le voisinage des chemins qui minimisent l'action. Clairement, les fonctions périodiques qui minimisent l'action sont les fonctions constantes  $q(t) \equiv q_0$ , pour minimiser le terme  $\int \dot{q}^2$ , dont la valeur  $q_0$  minimise le potentiel  $V(q)$  et donc

$$V'(q_0) = 0, \quad V''(q_0) > 0.$$

La décomposition optimale consiste alors à poser

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2}V''(q_0)(q - q_0)^2 + V_I(q),$$

Des problèmes particuliers sont associés à la dégénérescence du minimum du potentiel  $V(q)$ .

*Fonction génératrice.* La fonction génératrice des fonctions de corrélation correspondant à la mesure gaussienne perturbée est alors donnée par l'intégrale de chemin

$$\mathcal{Z}(b, \beta) = \int_{q(\beta/2)=q(-\beta/2)} [dq(t)] \exp[-S(q, b)] \quad (5.20)$$

avec

$$S(q, b) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) + V(q(t)) - b(t)q(t) \right]. \quad (5.21)$$

De nouveau la fonction

$$\mathcal{W}(b, \beta) = \ln \mathcal{Z}(b, \beta)$$

engendre les fonctions de corrélation connexes qui ont des propriétés d'amas (section 4.4) dans la limite thermodynamique  $\beta \rightarrow \infty$ .

## 5.4 Calculs perturbatifs: Exemples

Calculons d'abord la fonction de partition

$$\mathcal{Z}(\beta, \lambda) = \int [dq] \exp[-\mathcal{S}(q)]$$

avec

$$\mathcal{S}(q) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) + \frac{1}{4!} \lambda q^4(t) \right], \quad (5.22)$$

à l'ordre  $\lambda^2$ , et dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$ . Nous faisons le calcul avec des conditions aux limites périodiques.

L'algèbre est la même qu'en section 2.3. Appliquant le théorème de Wick, à l'ordre  $\lambda$ , on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta, \lambda) &= \mathcal{Z}_0(\beta) [1 - (\lambda/24) \times 3 \times \beta \Delta^2(0)] + O(\lambda^2) \\ &= \frac{1}{2 \sinh(\beta/2)} [1 - \beta(\lambda/32) (\cotanh^2(\beta/2))] + O(\lambda^2), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'expression (5.12) de la fonction à deux points gaussienne.

Dans la limite thermodynamique, on peut négliger tous les termes qui décroissent exponentiellement pour  $\beta \rightarrow \infty$  et l'expression se simplifie beaucoup:

$$\mathcal{Z}(\beta, \lambda) = e^{-\beta/2} \left( 1 - \frac{1}{32} \beta \lambda \right) + O(\lambda^2).$$

En particulier,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta, \lambda) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \lambda + O(\lambda^2).$$

À l'ordre suivant on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta, \lambda) / \mathcal{Z}_0(\beta) &= 1 - \frac{1}{8} \lambda \beta \Delta^2(0) + \frac{1}{128} \lambda^2 \beta^2 \Delta^4(0) + \frac{1}{16} \beta \lambda^2 \Delta^2(0) \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \Delta^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{48} \lambda^2 \beta \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \Delta^4(t) + O(\lambda^3), \end{aligned} \quad (5.23)$$

où la périodicité de  $\Delta(t)$  a été utilisée.

Pour  $\beta \rightarrow \infty$ , on peut remplacer la fonction  $\Delta$  par sa forme asymptotique (5.14) car les corrections sont exponentiellement petites. De plus on peut intégrer sur  $t \in (-\infty, +\infty)$  avec de nouveau des erreurs exponentielles car  $\Delta(t)$  décroît exponentiellement pour  $t \rightarrow \infty$ . On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta, \lambda) e^{\beta/2} &= 1 - \frac{1}{32} \beta \lambda + \frac{1}{2} \frac{1}{32^2} \beta^2 \lambda^2 + \frac{1}{256} \beta \lambda^2 + \frac{1}{1536} \beta \lambda^2 + O(\lambda^3) \\ &= 1 - \frac{1}{32} \beta \lambda + \frac{1}{2} \frac{1}{32^2} \beta^2 \lambda^2 + \frac{7}{1536} \beta \lambda^2 + O(\lambda^3). \end{aligned}$$

Cette expression contient des termes d'ordre  $\beta$  et d'ordre  $\beta^2$  ( $\beta$  est le volume). Le terme proportionnel à  $\beta^2$  correspond à une contribution non connexe. Prenant le logarithme des deux membres, on voit que le terme en  $\beta^2$  se compense comme attendu, et on obtient

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}(\beta, \lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{32} \lambda - \frac{7}{1536} \lambda^2 + O(\lambda^3).$$

*La fonction à deux points.* Nous calculons maintenant la fonction à deux points  $\langle q(t)q(u) \rangle_\lambda$  correspondant à la mesure spécifiée par la fonction (5.22), à l'ordre  $\lambda$ , et dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$ . Nous faisons le calcul avec les mêmes conditions aux limites périodiques.

L'algèbre est la même qu'en section 2.4.1. Le développement à l'ordre  $\lambda$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} Z^{(2)}(t, u) &\equiv \langle q(t)q(u) \rangle_\lambda \\ &= \frac{\mathcal{Z}(\beta, 0)}{\mathcal{Z}(\beta, \lambda)} \left[ \Delta(t-u) - \frac{1}{24} \lambda \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \langle q(t)q(u)q^4(\tau) \rangle_0 \right] + O(\lambda^2), \end{aligned}$$

où la fonction de partition  $\mathcal{Z}(\beta, \lambda)$  a été calculée à cet ordre plus haut et  $\Delta(t)$  est donnée en (5.12).

L'application du théorème de Wick entraîne

$$\langle q(t)q(u)q^4(\tau) \rangle_0 = 3\Delta(t-u)\Delta^2(0) + 12\Delta(t-\tau)\Delta(u-\tau)\Delta(0).$$

Nous reconnaissons dans la première contribution le produit de la fonction à deux points gaussienne par la correction à la fonction de partition. Ce terme disparaît dans le rapport

$$\begin{aligned} Z^{(2)}(t, u) &= \left[ 1 - \frac{1}{8} \lambda \beta \Delta^2(0) \right]^{-1} \\ &\times \left[ \Delta(t-u) \left( 1 - \frac{1}{8} \lambda \beta \Delta^2(0) \right) - \frac{1}{2} \lambda \Delta(0) \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \Delta(t-\tau)\Delta(u-\tau) \right] \end{aligned}$$

et donc

$$Z^{(2)}(t, u) = \Delta(t-u) - \frac{1}{2} \lambda \Delta(0) \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \Delta(t-\tau)\Delta(\tau-u) + O(\lambda^2).$$

Dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$ , on trouve

$$Z^{(2)}(t, u) = \frac{1}{2} e^{-|t-u|} \left[ 1 - \frac{1}{8} \lambda (1 + |t-u|) \right] + O(\lambda^2). \quad (5.24)$$

On a montré de façon générale en section 4.3.3 que, pour  $|t-u| \rightarrow \infty$ ,

$$Z^{(2)}(t, u) \underset{|t-u| \rightarrow \infty}{\sim} A e^{-|t-u|/\xi}.$$

On en déduit

$$\xi^{-1} = 1 + \frac{1}{8} \lambda + O(\lambda^2).$$

On conclut que la fonction à deux points peut, à cet ordre, s'écrire

$$Z^{(2)}(t, u) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{8} \lambda) e^{-|t-u|/\xi} + O(\lambda^2).$$

## Exercices

### Exercice 5.1

On considère la mesure déterminée par la fonction

$$S(q) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) + \lambda \gamma q^3(t) + \frac{1}{2} \lambda^2 q^4(t) \right],$$

où  $\gamma$  une constante arbitraire. Déterminer l'énergie libre par unité de longueur dans la limite thermodynamique (qui est l'opposée de l'énergie du fondamental de l'hamiltonien quantique correspondant) à l'ordre  $\lambda^2$ .

*Solution.*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(3 - 11\gamma^2)\lambda^2 + O(\lambda^4).$$

### Exercice 5.2

Déterminer l'énergie libre par unité de longueur dans la limite thermodynamique à l'ordre  $\lambda^2$  pour

$$S(q) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) + \lambda q^6(t) \right].$$

*Solution.*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) = \frac{1}{2} + \frac{15}{8}\lambda + O(\lambda^2).$$

### Exercice 5.3

Même question avec

$$S(\mathbf{q}) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2(t) + \frac{1}{2} \mathbf{q}^2(t) + \frac{1}{4} \lambda (\mathbf{q}^2)^2 \right],$$

où  $\mathbf{q}$  dénote le vecteur à deux composantes  $q_1, q_2$  et  $\mathbf{q}^2$  le carré scalaire.

*Solution.*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) = 1 + \lambda/2 + O(\lambda^2).$$

## Chapitre 6

### Systemes ferromagnétiques. Corrélations

Nous généralisons maintenant un certain nombre d'outils et de concepts que nous avons développés dans les chapitres précédents à des modèles de physique statistique classique (c'est à dire non quantique) plus généraux, en particulier, en dimension d'espace arbitraire.

Le concept de fonctions (ou fonctionnelles) génératrices de fonctions de corrélation sera de nouveau très utile. Ce chapitre contient donc quelques rappels techniques sur différents types de fonctions de corrélation et les fonctions génératrices correspondantes.

En section 4.4 nous avons déjà mentionné que les fonctions de corrélation connexes, en une dimension d'espace pour des systèmes avec interaction de portée finie, ont une propriété d'amas. Cette propriété se généralise en dimension arbitraire pour des systèmes avec interactions de courte portée (une notion que nous expliciterons plus loin).

Il est particulièrement commode, pour l'étude des transitions de phase, d'introduire aussi la transformée de Legendre de la fonction génératrice des fonctions de corrélation connexe. La transformation de Legendre correspondante généralise la relation entre deux quantités thermodynamiques, l'énergie libre et le potentiel thermodynamique. À cette transformée de Legendre sont associées des fonctions dites fonctions de vertex ou fonctions 1PI (pour une particule irréductible). Les transformées de Fourier de ces fonctions ont a des propriétés de régularité bien meilleures que celles des fonctions de corrélations connexes dont elles se déduisent, ce qui en fait des objets d'étude privilégiés.

À partir de maintenant nous adoptons, par commodité, un langage ferromagnétique, même si beaucoup de systèmes physiques, auxquels ces toutes considérations s'appliquent aussi, n'ont rien de ferromagnétique.

#### 6.1 Systemes ferromagnétiques: définition

Nous considérons des modèles statistiques définis sur réseau, nous limitant au réseau  $\mathbb{Z}^d$  des points de coordonnées entières (la généralisation des réseaux carré et cubique) de l'espace à  $d$  dimensions.

À chaque point (ou site) du réseau sont associées une ou plusieurs variables aléatoires réelles, appelées maintenant spins (mais non quantiques) et notées  $S_i$  où l'indice  $i$  caractérise un point du réseau ( $i$  est une écriture symbolique pour les  $d$  coordonnées entières). Nous notons  $\mathcal{E}(S)$  l'énergie de configuration des spins en champ nul,  $\beta$  l'inverse de la température et  $\rho(S)$  la distribution de spin (normalisée) qui pondère les configurations de spin à chaque site.

L'énergie de configuration contient des termes d'interaction qui corrélient les spins sur des sites différents. Nous supposons que les interactions sont à courte portée ou locales, une notion que nous précisons plus tard, mais dont les interactions de proches voisins fournissent l'exemple le plus simple.

Par ailleurs, nous supposons l'énergie de configuration invariante par translation sur le réseau.

Dans ce qui suit toutes les expressions sont écrites pour une variable par site du réseau, mais la généralisation à plusieurs variables est simple.

La fonction de partition, dans un champ magnétique uniforme  $H$  et pour un sous-réseau fini  $\mathcal{C}$  (typiquement un carré, cube ou hypercube) contenant  $\Omega$  sites, s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_{i \in \mathcal{C}} \rho(S_i) dS_i \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(S) + H \sum_i S_i \right], \quad (6.1)$$

où la variable  $H$  de champ magnétique inclut un facteur de température,  $\beta H \mapsto H$ .

Nous supposons que le poids statistique est tel que la fonction de partition existe, sur un réseau fini, pour toute valeur de  $H$ . Alors, la fonction de partition  $\mathcal{Z}(H)$  est une fonction entière en  $H$ .

### 6.1.1 Distribution de spin moyen et énergie libre

Sur un réseau fini à  $\Omega$  sites, les moments de la distribution du spin moyen  $\sigma$  sur le réseau,

$$\sigma = \frac{1}{\Omega} \sum_i S_i,$$

sont alors donnés par

$$\langle \sigma^n \rangle_H = \Omega^{-n} \mathcal{Z}^{-1}(H) \frac{\partial^n \mathcal{Z}(H)}{(\partial H)^n},$$

où valeur moyenne  $\langle \bullet \rangle_H$  signifie valeur moyenne en présence du champ  $H$ . La valeur moyenne  $\langle \sigma \rangle_H$  est l'aimantation.

L'énergie libre par unité de volume  $W(H)$  correspondante (notre définition de l'énergie libre diffère ici et plus tard par un facteur de température, pour nous sans importance, des définitions usuelles) est définie par

$$W(H) = \frac{1}{\Omega} \ln \mathcal{Z}(H). \quad (6.2)$$

À cause de la positivité de la fonction de partition, la fonction  $W(H)$  aussi est indéfiniment différentiable sur un réseau fini. Ses dérivées sont proportionnelles aux cumulants de la distribution de spin moyen.

*Positivité.* Notons que la dérivée seconde  $\partial^2 W / (\partial H)^2$  de  $W(H)$  est strictement positive. En effet la dérivée seconde peut être écrite

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{(\partial H)^2} &= \Omega^{-1} \mathcal{Z}^{-1}(H) \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{(\partial H)^2} - \Omega^{-1} \left( \mathcal{Z}^{-1}(H) \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H} \right)^2 \\ &= \Omega \left\langle (\sigma - \langle \sigma \rangle)^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (6.3)$$

La dérivée seconde ne s'annule que pour une valeur de  $\sigma$  certaine, situation triviale que nous excluons.

### 6.1.2 Transformation de Legendre

Comme nous le montrons au chapitre 7 dans l'étude des transitions de phase, il est plus commode de travailler à aimantation fixée qu'à champ magnétique fixé. Cela correspond à passer de l'énergie libre au potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$ . Les deux fonctions  $W(H)$  et  $\mathcal{G}(M)$  sont reliées par une transformation de Legendre, une transformation qui sera discutée de façon plus générale en section 6.2.

Le concept de transformée de Legendre apparaît dans d'autres domaines de la physique, comme la mécanique analytique où elle relie hamiltonien et lagrangien, et la mécanique statistique. Les variables conjuguées sont alors le vecteur vitesse  $\dot{q}(t)$  et le vecteur impulsion conjuguée  $p(t)$ :

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) + H(p, q) = p(t)\dot{q}(t), \quad p(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(t)}.$$

*Potentiel thermodynamique.* Soit  $W(H)$  une fonction de  $H$ , partout définie et admettant une dérivée bornée. On appelle transformée de Legendre de  $W(H)$ , la fonction  $\mathcal{G}(M)$ , définie de la manière suivante

$$W(H) + \mathcal{G}(M) = HM, \quad (6.4a)$$

$$M = \frac{\partial W(H)}{\partial H}. \quad (6.4b)$$

Cette transformation est involutive. En effet, la première relation entraîne

$$\frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial M} = H + \frac{\partial H}{\partial M} \frac{\partial}{\partial H} [HM - W(H)].$$

L'équation (6.4b) entraîne alors que le deuxième terme s'annule. Donc

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial M}. \quad (6.5)$$

Notons, cependant, qu'à la différence de  $W(H)$ , la fonction  $\mathcal{G}(M)$  n'est pas nécessairement définie pour toute valeur de  $M$ .

*Autre propriété.* Une propriété algébrique importante de la transformation de Legendre est la suivante: supposons que  $W(H)$  dépende de façon dérivable d'un paramètre  $\varepsilon$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sum HM - W(H) \right] \\ &= -\frac{\partial W(H)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial H} [HM - W(H)] \end{aligned}$$

et donc à cause de (6.4b)

$$\frac{\partial W(H)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (6.6)$$

En particulier, supposons que  $W(H)$  soit développable à  $\varepsilon = 0$ :

$$W(H) = W_0(H) + \varepsilon W_1(H) + O(\varepsilon^2).$$

Soient  $\mathcal{G}_0(M)$  la transformée de Legendre de  $W_0(H)$  et  $H^{(0)}(M)$  sa dérivée. Alors

$$\mathcal{G}(M) = \mathcal{G}_0(M) - \varepsilon W_1(H^{(0)}(M)).$$

*Application.* Dans le problème qui nous intéresse, la variable  $M$  est la valeur moyenne du spin, ou aimantation:

$$M = \langle \sigma \rangle. \quad (6.7)$$

Parce que la dérivée seconde  $W''(H)$  de l'énergie libre est partout définie et positive, la transformation de Legendre, dans son domaine de définition, est toujours bijective.

De la transformation de Legendre on déduit une relation entre dérivées secondes. Dérivant l'équation (6.4b) par rapport à  $M$  et utilisant l'équation (6.5), on trouve

$$\frac{\partial^2 W}{(\partial H)^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{(\partial M)^2} = 1. \quad (6.8)$$

La dérivée seconde du potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$  est donc aussi positive.

*Limite thermodynamique.* Dans le cas d'interactions locales, dans la limite du volume  $\Omega$  infini (ou limite thermodynamique), l'énergie libre par unité de volume a une limite finie, une propriété qui généralise le résultat obtenu à une dimension. La fonction  $W(H)$  est reliée à la fonction génératrice des cumulants  $\langle \sigma^n \rangle_c$  de la distribution du spin moyen. On trouve

$$\langle \sigma^n \rangle_c = \Omega^{1-n} \frac{\partial^n W(H)}{(\partial H)^n}.$$

En particulier, le spin tend vers une valeur certaine  $\langle \sigma \rangle_H$ . De plus, pour les valeurs de  $H$  pour lesquelles les dérivées de  $W(H)$  sont finies, les cumulants de la distribution de  $\sigma$  ont le comportement prédit par le théorème centrale, même si les spins ne sont pas des variables indépendantes.

Nous avons vu (section 4.3.4) que pour  $n = 2$  cette condition implique que la longueur de corrélation soit finie.

Cette question a un rapport direct avec l'inversibilité de la transformation de Legendre et est intimement liée aux problèmes de transitions de phase. Si en effet la dérivée seconde de  $W(H)$  diverge pour certaines valeurs de  $H$  (en particulier si la longueur de corrélation diverge),  $\mathcal{G}''(M)$  s'annule et la relation (6.5)

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial M},$$

n'a plus nécessairement une solution unique en  $M$ .

Une autre situation peut être réalisée où la dérivée de  $W(H)$  a des discontinuités, et le domaine de définition de  $\mathcal{G}(M)$  n'est pas connexe. Alors la transformation de Legendre n'est plus bijective: c'est la situation réalisée dans les systèmes ayant une transition de phase, dans la région à plusieurs phases.

## 6.2 Fonctions de corrélation

Nous considérons à nouveau la fonction de partition  $\mathcal{Z}(\mathbf{H})$  d'un système ferromagnétique classique du type défini en section 6.1 (équation (6.1)), mais en champ magnétique variable, c'est à dire dont l'amplitude varie de site en site,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \prod_{i \in \mathcal{C}} \rho(S_i) dS_i \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(S) + \sum_i H_i S_i \right], \quad (6.9)$$

où  $S_i$  est un spin classique sur le site  $i$  d'un réseau,  $\mathcal{E}(S)$  l'énergie de configuration des spins en champ nul,  $\beta$  l'inverse de la température et  $\rho(S)$  la distribution de spin (normalisée) en chaque site. Nous supposons que le poids statistique est tel que la fonction de partition existe pour toute valeur de  $\mathbf{H}$ .

La fonction de partition  $\mathcal{Z}(\mathbf{H})$  en champ magnétique arbitraire variable dans l'espace est une fonction génératrice des fonctions de corrélation de spin:

$$\langle S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_n} \rangle = \mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{H}) \frac{\partial^n \mathcal{Z}(\mathbf{H})}{\partial H_{i_1} \partial H_{i_2} \dots \partial H_{i_n}}.$$

En prenant la limite  $H_i = H$  on trouve les fonctions de corrélation en champ uniforme, et pour  $H_i = 0$  en champ nul.

### 6.2.1 Fonctions connexes et propriété d'amas

L'énergie libre associée  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  (nous rappelons que notre définition de l'énergie libre diffère par un facteur de température, pour nous sans importance, des définitions usuelles)

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) = \ln \mathcal{Z}(\mathbf{H})$$

est alors la fonction génératrice des fonctions de corrélation connexes  $W^{(n)}$  (cf. section 4.4)

$$W_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} = \langle S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_n} \rangle_{\text{connexe}} = \frac{\partial^n \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial H_{i_1} \partial H_{i_2} \dots \partial H_{i_n}}.$$

En champ constant la fonction  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  diffère de la fonction  $W(H)$  définie en section 6.1 par un facteur de volume.

*Propriété d'amas.* Nous considérons maintenant la limite thermodynamique, c'est à dire de volume infini:  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}^d$ . Dans la fonction à  $n$  points connexe  $W_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ ,  $n > 1$ , nous séparons les points  $i_1 i_2 \dots i_n$  en deux sous-ensembles disjoints non vides  $E, E'$ . Nous définissons la distance  $D$  entre ces sous-ensembles par

$$D = \min_{i \in E, i' \in E'} |i - i'|,$$

où nous avons noté  $|i - i'|$  la distance entre les points  $i$  et  $i'$ . Alors la corrélation tend vers zéro quand la séparation  $D$  tend vers l'infini:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} W_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} = 0.$$

En l'absence de transition de phase, ou bien dans la phase de haute température au-dessus de la transition de phase, la décroissance est exponentielle quand la séparation tend vers l'infini: on appelle *longueur de corrélation* l'inverse du plus petit taux de décroissance. En terme de la fonction à deux points connexe

$$\frac{1}{\xi} = \max \lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \frac{\ln |\langle S_i S_j \rangle_{\text{conn.}}|}{|i-j|}. \quad (6.10)$$

À la température de transition et dans la région à plusieurs phases la décroissance peut n'être qu'algébrique.

### 6.2.2 Invariance par translation et représentation de Fourier

Dans ce qui suit nous supposons que la limite thermodynamique a été prise. Par ailleurs, il est commode de noter par  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{Z}^d$  les points sur le réseau  $d$ -dimensionnel. Nous utilisons maintenant explicitement l'invariance par translation du modèle statistique, ce qui implique que pour tout  $a \in \mathbb{Z}^d$ , la fonction de corrélation connexe à  $n$  points satisfait

$$W^{(n)}(x_1 + a, \dots, x_n + a) = W^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Nous introduisons sa transformée de Fourier

$$F^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{x_1, \dots, x_n} W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j \cdot p_j \right),$$

où la fonction  $F^{(n)}$  est périodique dans toutes les composantes des vecteurs  $p_i$ .

Utilisant l'invariance par translation, nous prenons comme arguments  $x_1$  et  $y_i = x_i - x_1$  pour  $i > 1$ :

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = W^{(n)}(0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1) = W^{(n)}(0, y_2, \dots, y_n).$$

Après ce changement de variables la somme devient

$$\begin{aligned} F^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \sum_{x_1} \sum_{y_2, \dots, y_n} W^{(n)}(0, y_2, \dots, y_n) \\ &\quad \times \exp \left( i \sum_{j=2}^n y_j \cdot p_j + i x_1 \cdot \sum_{j=1}^n p_j \right). \end{aligned}$$

Au sens des distributions

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} = 2\pi \delta(\theta),$$

où ici  $\delta(\theta)$  est la distribution de Dirac sur le cercle, concentrée à  $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ .

En  $d$  dimensions

$$\sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} e^{ix_1 \cdot P} = (2\pi)^d \delta^{(d)}(P) \quad \text{avec } P = \sum_i p_i,$$

où la fonction  $\delta$  signifie pour chaque composante  $P_\mu$  de  $P$  que  $P_\mu = 0 \pmod{2\pi}$ .

Nous factorisons alors la distribution de Dirac  $\delta^{(d)}(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ , qui est donc une conséquence directe de l'invariance par translation, et posons

$$F^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n),$$

où la fonction

$$\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{x_2, \dots, x_n} W^{(n)}(0, x_2, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=2}^n x_j \cdot p_j \right), \quad (6.11)$$

n'est définie que pour  $\sum_i p_i = 0$ .

Comme un point est fixé, la fonction connexe  $W^{(n)}(0, x_2, \dots, x_n)$  décroît quand  $x_i$  tend vers l'infini et  $\widetilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  a des propriétés de régularités dans les variables  $p_i$ .

Enfin, la relation entre fonction à  $n$  points et sa transformée de Fourier peut se récrire

$$\begin{aligned} & (2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \widetilde{W}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j \cdot p_j \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

### 6.3 Transformation de Legendre et fonctions de vertex

Il est utile de généraliser la transformation de Legendre au cas du champ magnétique ou de l'aimantation variable spatialement, et donc de définir la transformée de Legendre pour un nombre quelconque de variables. Cela permet, en particulier de définir des fonctions de corrélation généralisées appelées fonctions de vertex qui rôle technique important en théorie statistique ou quantique des champs à cause de leurs propriétés de régularité.

#### 6.3.1 Transformation de Legendre: généralisation

Soit  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  une fonction des variables  $H_i$ , partout définie et admettant des dérivées partielles bornées. On appelle transformée de Legendre de  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  la fonction  $\Gamma(\mathbf{M})$ , définie de la manière suivante,

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) + \Gamma(\mathbf{M}) = \sum_i H_i M_i \quad (6.13a)$$

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial H_i}. \quad (6.13b)$$

On vérifie immédiatement que cette transformation est involutive. En effet la première relation entraîne

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_i} = H_i + \sum_j \frac{\partial H_j}{\partial M_i} \frac{\partial}{\partial H_j} \left[ \sum_k H_k M_k - \mathcal{W}(\mathbf{H}) \right].$$

Utilisant (6.13b) on trouve que le deuxième terme s'annule. Donc

$$H_i = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_i}. \quad (6.14)$$

Notons cependant qu'à la différence de  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$ , la fonction  $\Gamma(\mathbf{M})$  n'est pas nécessairement définie pour toute valeur de  $\mathbf{M}$ .

*Stationarité.* La propriété algébrique (6.6) de la transformation de Legendre se généralise sans difficulté. Supposons que  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  dépende de façon dérivable d'un paramètre  $\varepsilon$ . Alors

$$\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (6.15)$$

### 6.3.2 Matrice des dérivées secondes et inversibilité

Nous ajoutons maintenant l'hypothèse supplémentaire que  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  a des dérivées partielles secondes continues et que la matrice

$$W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_i \partial H_j} \quad (6.16)$$

est positive:

$$\forall \mathbf{X} \text{ avec } |\mathbf{X}| > 0 \quad \sum_{ij} X_i W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) X_j > 0.$$

Avec cette hypothèse la transformation de Legendre, dans son domaine de définition, est toujours bijective.

En effet, supposons que deux valeurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$  correspondent à la même valeur de  $\mathbf{M}$ . Nous en déduisons l'identité

$$\int_0^1 dt \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\mathbf{H}(t))}{\partial H_i \partial H_j} \frac{dH_j(t)}{dt} = 0,$$

avec

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}(1) = \mathbf{H}'.$$

Spécialisant à

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H} + t(\mathbf{H}' - \mathbf{H}),$$

et prenant le produit scalaire avec  $(\mathbf{H}' - \mathbf{H})$ , on trouve

$$\int_0^1 dt \sum_{ij} (H'_i - H_i) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}(t)) (H'_j - H_j) = 0,$$

ce qui est impossible puisque  $W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H})$  est une matrice positive.

De la transformation de Legendre on déduit une relation entre dérivées secondes. Dérivant l'équation (6.13b) par rapport à  $M_j$  et utilisant l'équation (6.14), on trouve

$$\sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_i \partial H_k} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_k \partial M_j} = \delta_{ij}. \quad (6.17)$$

La matrice des dérivées secondes de  $\Gamma(\mathbf{M})$  est donc aussi positive.

*Physique statistique.* Sur un réseau fini toutes les hypothèses précédentes sont satisfaites. La fonction  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  est indéfiniment différentiable. Par ailleurs, la fonction à deux points connexe, obtenue à partir de l'expression dans l'exemple (6.9), peut être écrite (cf. aussi section 3.3)

$$\begin{aligned} W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) &= \mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{H}) \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial H_i \partial H_j} - \mathcal{Z}^{-2}(\mathbf{H}) \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H_i} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial H_j} \\ &= \langle (S_i - \langle S_i \rangle) (S_j - \langle S_j \rangle) \rangle, \end{aligned}$$

où valeur moyenne  $\langle \bullet \rangle$  signifie valeur moyenne en présence du champ  $H_i$ . Prenant la valeur moyenne de cette matrice symétrique dans un vecteur  $X_i$  on trouve

$$\sum_{ij} X_i X_j W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H}) = \left\langle \left[ \sum_i X_i (S_i - \langle S_i \rangle) \right]^2 \right\rangle \geq 0, \quad (6.18)$$

l'égalité n'étant possible que pour une valeur de  $S$  certaine, situation triviale que nous excluons. La matrice  $W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H})$  est donc définie positive, ce qui équivaut à dire que toutes ses valeurs propres sont positives.

La relation (6.17) montre que, dans l'exemple statistique (6.9), la dérivée seconde de  $\Gamma(\mathbf{M})$  est la matrice inverse de la fonction à deux points connexe.

La matrice des dérivées secondes de  $\Gamma(\mathbf{M})$  est donc aussi définie positive.

*Limite thermodynamique.* Dans la limite thermodynamique la question devient plus subtile et est intimement liée au problèmes de transitions de phase. En effet  $W_{ij}^{(2)}(\mathbf{H})$  peut avoir des valeurs propres qui s'accumulent à l'infini pour certaines valeurs de  $\mathbf{H}$ . Dans ces conditions  $\partial^2 \Gamma(\mathbf{M}) / \partial M_i \partial M_j$  peut avoir des valeurs propres nulles et la relation (6.14)

$$H_i = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_i},$$

n'a pas nécessairement une solution unique.

Une autre situation peut être réalisée où les dérivées partielles de  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  ont des discontinuités, et le domaine de définition de  $\Gamma(\mathbf{M})$  n'est pas convexe. Alors la transformation de Legendre n'est plus bijective: c'est la situation réalisée dans les systèmes ayant une transition de phase dans la région à plusieurs phases.

### 6.3.3 Fonctions de vertex

Les coefficients du développement du potentiel thermodynamique dans l'aimantation variable

$$\Gamma(\mathbf{M}) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} \Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) M(x_1) M(x_2) \dots M(x_n) \quad (6.19)$$

sont appelés *fonctions de vertex* ou fonctions de corrélation *un-irréductibles* (pour des raisons qui seront précisées dans le chapitre 12).

Dans des modèles à interactions de courte portée (c'est à dire les modèles statistiques qui nous intéressent) ces fonctions ont de meilleures propriétés de décroissance que les fonctions de corrélation connexes et donc, pour des systèmes invariants par translation, leurs transformées de Fourier

$$(2\pi)^d \delta \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{x_1, \dots, x_n} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j \right) \quad (6.20)$$

ont de meilleures propriétés de régularité.

*Fonctions à deux points.* Dans un système invariant par translation, appliquant la relation (6.11) au cas  $n = 2$ , on trouve

$$\tilde{W}^{(2)}(p) = \sum_x W^{(2)}(0, x) e^{ix \cdot p}, \quad (6.21)$$

où le deuxième argument  $-p$  est généralement omis.

La condition de positivité devient simplement

$$\tilde{W}^{(2)}(p) > 0.$$

De même

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \sum_x \Gamma^{(2)}(0, x) e^{ix \cdot p}. \quad (6.22)$$

La relation entre les transformées de Fourier est alors algébrique:

$$\tilde{W}^{(2)}(p) \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = 1. \quad (6.23)$$

*Remarque.* Cette propriété se généralise à la fonction à  $n$  points. Dans un système invariant par translation, en représentation de Fourier les relations entre fonctions connexes et fonctions de vertex sont algébriques.

*Exemple gaussien.* Considérons la fonction de partition donnée par l'intégrale gaussienne

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \prod_i dS_i \exp \left[ -\mathfrak{S}(S) + \sum_i H_i S_i \right]$$

avec

$$\mathfrak{S}(S) = \sum_{ij} \mathfrak{S}_{ij} S_i S_j, \quad (6.24)$$

où la matrice  $\mathfrak{S}_{ij}$  est définie positive. Alors

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) - \mathcal{W}(0) = \ln(\mathcal{Z}(\mathbf{H})/\mathcal{Z}(0)) = \frac{1}{4} \sum_{ij} H_i [\mathfrak{S}^{-1}]_{ij} H_j.$$

L'aimantation locale  $\mathbf{M}_i$  devient

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{H})}{\partial H_i} = \frac{1}{2} \sum_j [\mathfrak{S}^{-1}]_{ij} H_j \Rightarrow H_i = 2 \sum_j \mathfrak{S}_{ij} M_j.$$

Enfin le potentiel thermodynamique est donné par

$$\Gamma(\mathbf{M}) = -\mathcal{W}(0) + \sum_{ij} M_i \mathfrak{S}_{ij} M_j.$$

La transformée de Legendre d'une forme quadratique est aussi une forme quadratique. De plus nous notons, qu'à une constante additive près, nous avons retrouvé la forme quadratique initiale (6.24), puisque

$$\Gamma(\mathbf{M}) = -\mathcal{W}(0) + \mathfrak{S}(\mathbf{M}).$$

## 6.4 Transformation de Legendre et méthode du col

La relation entre transformation de Legendre et méthode du col explique en grande partie le rôle important joué par le potentiel thermodynamique.

Considérons la fonction de partition en champ externe  $H_i$ :

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left( \prod_i dS_i \right) e^{-\mathfrak{S}(S) + \sum_i H_i S_i},$$

où  $\mathfrak{S}$ , comme fonction des variables  $S_i$ , a des propriétés d'analyticité telles que la méthode du col soit applicable au calcul de l'intégrale.

Les fonctionnelles  $\mathcal{W}(\mathbf{H})$  et  $\Gamma(\mathbf{M})$  peuvent alors être développées à tous les ordres dans la méthode du col:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{H}) &= \sum_{\ell=0} \mathcal{W}_\ell(\mathbf{H}), \\ \Gamma(\mathbf{M}) &= \sum_{\ell=0} \Gamma_\ell(\mathbf{M}). \end{aligned}$$

Nous verrons en section 12.5 que, du point de vue des diagrammes de Feynman,  $\ell$  compte alors le nombre de boucles des diagrammes.

Le col est donné par (cf. section 2.6.2)

$$H_i = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial S_i}. \quad (6.25)$$

L'ordre dominant est obtenu en remplaçant  $S$  dans l'intégrant par sa valeur au col. On trouve

$$\mathcal{W}(\mathbf{H}) = \mathcal{W}_0(\mathbf{H}) = -\mathfrak{G}(\mathbf{S}) + \sum_i H_i S_i, \quad (6.26)$$

où  $\mathbf{S}$  est une fonction de  $\mathbf{H}$  à travers l'équation du col. Nous observons que la relation entre  $\mathfrak{G}$  et  $\mathcal{W}$  est une transformation de Legendre. Par ailleurs

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_i} = S_i(\mathbf{H})$$

et donc

$$\Gamma(\mathbf{M}) = \Gamma_0(\mathbf{M}) = \mathfrak{G}(\mathbf{M}).$$

Le deuxième ordre de la méthode du col est ensuite donné par l'intégration gaussienne (équation (2.46)). Négligeant les facteurs  $2\pi$ , on obtient

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{H}) = -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial S_i \partial S_j}.$$

Utilisant la propriété de stationarité (6.15), on en déduit

$$\Gamma_1(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\partial^2 \mathfrak{G}(\mathbf{M})}{\partial M_i \partial M_j}. \quad (6.27)$$

Appliquée à l'exemple gaussien, la méthode du col est évidemment exacte.

## 6.5 Transformation de Legendre: fonction à quatre points

Nous avons exhibé la relation entre fonction à deux points connexe et le coefficient du terme quadratique dans le développement du potentiel thermodynamique en aimantation inhomogène. Etablissons, comme un exercice qui sera utile pour la suite, la relation entre fonction à quatre points et les dérivées quatrièmes du potentiel thermodynamique dans le cas de distributions de spin invariantes par réflexion:  $S_i \mapsto -S_i$ .

On part de l'identité obtenue précédemment

$$\sum_k \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_k} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_k \partial H_j} = \delta_{ij}.$$

On dérive par rapport à  $M_l$

$$\sum_k \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial M_l \partial M_i \partial M_k} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_k \partial H_j} + \sum_{k,m} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_k} \frac{\partial^3 \mathcal{W}}{\partial H_m \partial H_k \partial H_j} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_m \partial M_l} = 0, \quad (6.28)$$

où nous avons de nouveau utilisé

$$H_m = \frac{\partial \Gamma}{\partial M_m} \Rightarrow \frac{\partial H_m}{\partial M_l} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_m \partial M_l}.$$

L'identité (6.28) peut être réécrite

$$\frac{\partial^3 \Gamma}{\partial M_{i_1} \partial M_{i_2} \partial M_{i_3}} = - \sum_{j_1, j_2, j_3} \frac{\partial^3 \mathcal{W}}{\partial H_{j_1} \partial H_{j_2} \partial H_{j_3}} \prod_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_{j_k} \partial M_{i_k}}. \quad (6.29)$$

Introduisons la notation

$$W_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} = \left. \frac{\partial^4 \mathcal{W}}{\partial H_{i_1} \partial H_{i_2} \partial H_{i_3} \partial H_{i_4}} \right|_{H=0},$$

$$\Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} = \left. \frac{\partial^4 \Gamma}{\partial M_{i_1} \partial M_{i_2} \partial M_{i_3} \partial M_{i_4}} \right|_{M=0}.$$

Nous dérivons à nouveau (6.29) par rapport à  $M$  et nous prenons la limite  $M = 0$ . À cause de la symétrie de réflexion, les fonctions de corrélation en champ nul d'un nombre impair de spins s'annulent dans la phase symétrique. Nous utilisons ici cette propriété pour la fonction à trois points. Nous en déduisons

$$\Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} = - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4} W_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{(4)} \prod_{k=1}^4 \Gamma_{i_k j_k}^{(2)}, \quad (6.30)$$

ou de façon équivalente

$$W_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{(4)} = - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} \prod_{k=1}^4 W_{i_k j_k}^{(2)}.$$

Cette identité a une représentation graphique donnée dans la section 12.1 (figure 13).

*Exemple.* En section 2.4 nous avons calculé le développement perturbatif à l'ordre  $\lambda^2$  des fonctions de corrélation à deux et quatre points connexes avec le poids  $e^{-\mathfrak{S}(x)}$ ,

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \frac{1}{4!} \lambda \sum_{i=1}^n x_i^4.$$

Nous l'avons exprimé en termes de la fonction à deux points  $\Delta$  de la limite gaussienne, inverse de la matrice  $A$  d'éléments  $A_{ij}$ :

$$\Delta = A^{-1}.$$

L'application de l'identité (6.30) aux développements perturbatifs (2.27,2.32) des fonctions à deux et quatre points conduit à

$$\begin{aligned} \Gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} = & \lambda \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_1 i_4} - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \Delta_{i_1 i_3}^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \Delta_{i_1 i_4}^2 \\ & - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \Delta_{i_1 i_2}^2 + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Si les indices représentent les sites d'un réseau cubique et si nous supposons invariance par translation,

$$A_{ij} \equiv A(x(i) - x(j)) \Rightarrow \Delta_{ij} \equiv \Delta(x(i) - x(j)),$$

cette équation peut se récrire

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \lambda \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) \\ & - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) \Delta^2(x_1 - x_3) \\ & - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4) \Delta^2(x_1 - x_4) \\ & - \frac{1}{2} \lambda^2 \delta(x_1 - x_4) \delta(x_2 - x_3) \Delta^2(x_1 - x_2) + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Introduisant la représentation de Fourier de la fonction à deux points gaussienne:

$$\Delta(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{ik \cdot (x-y)} \tilde{\Delta}(k),$$

(les composantes du vecteur  $k$  varie sur un intervalle  $2\pi$ ), on peut récrire ce développement en représentation de Fourier

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \lambda - \frac{1}{2} \lambda^2 [B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) + B(p_1 + p_4)] + O(\lambda^3) \quad (6.33)$$

avec

$$B(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\Delta}(k) \tilde{\Delta}(p - k). \quad (6.34)$$

## Exercices

### Exercice 6.1

*Fonctions à deux points.* Calculer  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  à l'ordre  $\lambda^2$  dans l'exemple de la section 6.5.

*Solution.* Introduisant la transformée de Fourier de  $A_{ij} = A(x(i) - x(j))$ ,

$$A(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{ik \cdot (x-y)} \tilde{A}(k),$$

et donc

$$\tilde{A}(p)\tilde{\Delta}(p) = 1,$$

on trouve (équations (2.27,6.23))

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \tilde{A}(p) + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\Delta}(k) + O(\lambda^2).$$

La contribution d'ordre  $\lambda^2$  est alors

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int d^d k \tilde{\Delta}(k) \int d^d k \tilde{\Delta}^2(k) \\ & -\frac{1}{6} \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int d^d k_1 d^d k_2 \tilde{\Delta}(k_1) \tilde{\Delta}(k_2) \tilde{\Delta}(p - k_1 - k_2). \end{aligned}$$

### Exercice 6.2

Retrouver les expressions des fonctions à deux et quatre points en développant l'expression (6.27) en puissances de  $\lambda$ .

## Chapitre 7

### Transitions de phase: Généralités et exemples

Avant de commencer l'étude des propriétés des transitions de phase continues ou du second ordre dans des systèmes classiques (non quantiques), que nous aborderons ensuite, nous voulons d'abord rappeler quelques subtilités de la notion de transition du point de vue de la mécanique statistique. Nous supposons dans ce qui suit que la phénoménologie élémentaire des transitions de phase dans les systèmes simples comme les transitions liquide-vapeur ou les transitions magnétiques est connue.

Une première remarque importante est que les transitions de phase ne sont possibles que dans des systèmes de volume infini, c'est à dire des systèmes ayant un nombre infini de degrés de liberté. Ceci montre déjà que le concept de transitions de phase n'est en soi pas quelque chose d'évident.

Les modèles que nous examinerons, et qui exhibent des transitions de phase, ont la propriété suivante: suivant la valeur d'un paramètre de contrôle, en général la température, le système peut être dans une région à une ou au contraire à plusieurs phases. Ses phases se distinguent par des sensibilités différentes aux conditions aux limites. La région à une seule phase ne garde pas trace de la manière spécifique dont la limite thermodynamique, c'est à dire de volume infini, est atteinte. Il n'en est pas de même dans la région à plusieurs phases où, par exemple, certaines fonctions de corrélation dépendent de la façon dont la limite thermodynamique est prise. Chaque limite distincte correspond à une phase.

Pour les modèles simples que nous allons étudier, il est possible de trouver des observables locales dont les valeurs discriminent entre les phases. Nous appelons une telle observable *paramètre d'ordre*. C'est, par exemple, le spin dans l'exemple de systèmes ferromagnétiques.

De plus, dans ces modèles, la transition de phase est associée à une brisure *spontanée* de symétrie.

Par exemple, l'énergie de configuration du modèle d'Ising ne change pas quand on change le signe de tous les spins. On s'attend donc à ce que la valeur moyenne du spin soit nulle. Si maintenant on ajoute à l'énergie de configuration un terme qui brise explicitement la symétrie du système (un terme de champ magnétique

pour un système ferromagnétique), qu'on prend la limite de volume infini et qu'on fait tendre ensuite l'amplitude du terme de brisure vers zéro, deux cas peuvent se présenter: dans la région de paramètre à une phase unique la symétrie est restaurée en ce sens que toutes les fonctions de corrélation ont la symétrie du modèle; dans la région de brisure de symétrie spontanée au contraire, la limite thermodynamique et la limite de brisure nulle ne commutent pas. Dans le cas des spins, on trouve une valeur moyenne du spin non-nulle, c'est à dire une aimantation spontanée. Le signe de aimantation spontanée dépend du signe du champ magnétique.

Une autre caractérisation simple et assez générale d'une transition de phase est dynamique. On appelle ici espace de phase l'ensemble des configurations possibles d'un système. Par exemple, si nous considérons le modèle d'Ising, un modèle de spins classiques sur réseau où chaque spin ne peut prendre que deux valeurs, alors l'espace de phase pour  $N$  spins est un ensemble de  $2^N$  éléments.

Considérons alors une dynamique aléatoire ou déterministe qui admet, comme distribution asymptotique (on parle de distribution d'équilibre), le poids de Boltzmann d'un modèle exhibant une transition de phase. Un exemple d'une telle dynamique est l'équation d'évolution (3.16) de la marche au hasard qui conduit à une distribution gaussienne (mais qui n'exhibe pas de transition de phase). Les transitions que nous allons considérer ont alors le caractère suivant: aussi longtemps que le volume du système est fini, tout élément de l'espace de phase a une probabilité non nulle d'être atteint au cours de l'évolution temporelle et ceci quelle que soit la température (si le système n'est pas discret comme le modèle d'Ising *tout élément* doit être remplacé par élément de volume de l'espace des phases aussi petit soit-il) et quel que soit le point de départ. On dit que le système est *ergodique*. Si le système converge alors vers un état d'équilibre thermodynamique, c'est à dire une distribution de probabilité invariante par la dynamique, les moyennes temporelles tendent vers les moyennes calculées avec un poids de Boltzmann en sommant sur toutes les configurations de l'espace de phase.

Par contre, dans la limite du volume infini (à densité fixée pour un systèmes de particules), suivant les valeurs de la température, le système peut soit rester ergodique, ou au contraire subir une brisure d'ergodicité. Dans ce dernier cas, l'espace de phase se décompose en sous-ensembles disjoints. Quand le système est préparé initialement dans un de ces sous-ensembles, il y reste. Par exemple pour un système de type Ising en dessous de la température critique, les deux sous-ensembles correspondent aux deux valeurs possibles de l'aimantation spontanée.

Notre but est d'analyser le comportement de quantités thermodynamiques dans le voisinage d'une transition, en particulier leurs singularités comme fonction de la température. Toutefois avant de discuter les transitions de phase par des méthodes plus élaborées, nous illustrons certains aspects élémentaires des propriétés générales décrites ci-dessus dans l'exemple de simples systèmes ferromagnétiques sur réseau.

Comme l'analyse du chapitre 6 le suggère, il sera souvent plus commode d'examiner d'abord les propriétés du potentiel thermodynamique fonction de l'aimantation, valeur moyenne du spin que l'énergie libre correspondante (l'équivalent de cumulants d'une distribution) fonction du champ extérieur.

Nous commençons l'étude des transitions de phase par un modèle simple, mais un peu pathologique, correspondant suivant l'interprétation à une limite de dimension d'espace infinie ou de forces à longue portée. Ce modèle peut être résolu par des méthodes élémentaires et présente une transition de phase de type *champ moyen* ayant certaines propriétés du modèle quasi-gaussien, comme on le verra par la suite.

Nous mettons en évidence les propriétés universelles des comportements des quantités thermodynamiques à la transition (dits comportements critiques).

Nous examinons ensuite les propriétés d'un système ferromagnétique avec interaction de proches voisins et dimension d'espace fixé. Un tel système n'admet pas en général de solution exacte. Cependant dans la limite du volume infini, des considérations de basse et haute température permettent de montrer de façon convaincante l'existence de transitions de phase dans des systèmes de type Ising, c'est à dire avec une symétrie de réflexion. En particulier, une matrice de transfert peut être définie. La limite thermodynamique (de volume infinie) est alors dominée par la valeur propre la plus grande de la matrice. La possibilité d'une transition de phase est reliée à la divergence de la longueur de corrélation, et donc à une valeur propre dominante dégénérée (multiple).

Nous étendons ensuite l'analyse à des systèmes ferromagnétiques à symétries continues.

Une conclusion importante qui se dégage des arguments intuitifs (mais qui peuvent être rendus rigoureux) que nous présentons, est la suivante: les transitions de phase avec interactions de courte portée et brisure spontanée de symétrie, qui nous intéressent particulièrement, ne sont possibles qu'à partir de la dimension 2 pour les brisures de symétrie correspondant à des groupes discrets et 3 pour des groupes continus.

*Modèles ferromagnétiques.* Les exemples que nous étudions dans ce chapitre appartiennent de nouveau à la classe des modèles ferromagnétiques classiques introduits au chapitre 6. Les variables aléatoires (réelles) sont des spins classiques  $S_i$  où l'indice  $i$  caractérise le site d'un réseau cubique ( $i$  est une écriture symbolique pour les  $d$  coordonnées entières, c'est à dire un élément de  $\mathbb{Z}^d$ ). La fonction de partition dans un champ magnétique  $H$  (défini en (6.1)) s'écrit

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_i \rho(S_i) dS_i \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) + H \sum_i S_i \right], \quad (7.1)$$

où l'échelle de champ magnétique inclut un facteur de température,  $\beta H \mapsto H$ ,  $\mathcal{E}(\mathbf{S})$  est l'énergie de configuration des spins en champ nul,  $\beta$  l'inverse de la température et  $\rho(S)$  la distribution de spin (normalisée) à chaque site.

Nous supposons, de plus, que le modèle en champ nul a une symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ , et donc  $\mathcal{E}(\mathbf{S}) = \mathcal{E}(-\mathbf{S})$  ainsi que  $\rho(S) = \rho(-S)$ . La distribution de spin  $\rho(S)$  est paire et décroît pour  $|S| \rightarrow \infty$  plus vite qu'une gaussienne:

$$\int_S^\infty \rho(S') dS' \leq K e^{-\mu S^\alpha}, \quad \mu > 0, \quad \alpha > 2. \quad (7.2)$$

## 7.1 Température infinie ou spins indépendants

Pour établir des notations et mettre en oeuvre les concepts théoriques précédents, nous considérons d'abord un modèle à température infinie ( $\beta = 0$ ) ou sans interaction. Nous sommes alors ramenés à un ensemble de spins indépendants et donc à une situation analogue au théorème de la limite centrale (section 3.1), mais dans un cadre plus spécifique.

### 7.1.1 Modèle à un site

Il est utile de discuter les propriétés de la distribution en un site. La fonction

$$z(h) = \int ds \rho(s) e^{sh}, \quad z(0) = 1, \quad (7.3)$$

est une transformée de type Laplace de la distribution de spin, fonction génératrice des moments de la distribution en champ  $h$ .

Par exemple, pour le modèle d'Ising où  $s = \pm 1$ , on trouve

$$z(h) = \cosh h.$$

La condition de décroissance (7.2) implique que l'intégrale converge pour tout  $h$  réel ou complexe et la fonction  $z(h)$  est donc entière. Elle est paire, à cause de la symétrie  $S \mapsto -S$  de la distribution, et positive pour  $h$  réel. De plus

$$z'(h) = \int ds \rho(s) s e^{sh} = \int ds \rho(s) s \sinh(sh) \Rightarrow h z'(h) \geq 0.$$

La fonction  $z(h)$  est croissante pour  $h > 0$  et décroissante pour  $h < 0$ .

Enfin la borne (7.2) implique que l'intégrale

$$K(\lambda) = \int ds \rho(s) e^{\lambda |s|^\alpha}$$

converge pour  $\lambda < \mu$ . Donc

$$\begin{aligned} z(h) &= \int ds \rho(s) e^{\lambda |s|^\alpha} e^{-\lambda |s|^\alpha + hs} \leq K(\lambda) \max_{\{s\}} e^{-\lambda |s|^\alpha + |h||s|} \\ &\leq K(\lambda) \exp\left(\text{cste } |h|^{\alpha/(\alpha-1)}\right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Puisque  $\alpha > 2$ , on a l'inégalité

$$\alpha/(\alpha - 1) < 2.$$

Il est commode d'introduire aussi la fonction génératrice des cumulants

$$A(h) = \ln z(h), \quad (7.5)$$

qui est paire et, puisque  $z(h)$  est strictement positive, holomorphe dans un voisinage de l'axe réel. Sa dérivée est impaire et s'annule à  $h = 0$ . De plus, la remarque (6.3) implique  $A''(h) > 0$  et la fonction  $A(h)$  est donc convexe. Elle est croissante pour  $h > 0$ .

Enfin, comme conséquence de la condition (7.2), pour une grande classe de distributions  $\rho(s)$ , la variable aléatoire  $s$  tend vers une valeur certaine  $s(h)$  quand  $|h| \rightarrow \infty$  et le second cumulant en champ  $A''(h)$  tend donc vers zéro:

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} A''_0(h) = 0. \quad (7.6)$$

Nous nous limiterons à cette classe par la suite.

Pour ce qui suit, nous paramétrons le développement de  $A$  à  $h = 0$  sous la forme

$$A(h) = \sum_{p=1} \frac{a_{2p}}{2p!} h^{2p}, \quad a_2 > 0. \quad (7.7)$$

La valeur  $m = A'(h)$  est l'aimantation en champ.

En plus de ces fonctions déjà introduites en section 3.1, nous définissons aussi la transformée de Legendre  $B(m)$  de  $A(h)$ :

$$B(m) + A(h) = mh, \quad m = A'(h), \quad (7.8)$$

Dans l'exemple du modèle d'Ising ( $s = \pm 1$ ), on trouve

$$B(m) = \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) + \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m). \quad (7.9)$$

La fonction  $B(m)$  est paire. L'aimantation  $m$  a le signe de  $h$ .

La relation (6.8) implique

$$B''(m) = 1/A''(h). \quad (7.10)$$

Parce que  $A(h)$  est une fonction convexe de  $h$ ,  $B(m)$  est aussi convexe. Elle est analytique dans un voisinage de l'origine. Nous pouvons donc la paramétrer sous la forme

$$B(m) = \sum_{p=1} \frac{b_{2p}}{2p!} m^{2p}, \quad b_2 > 0. \quad (7.11)$$

Les coefficients  $b_p$  sont reliés aux coefficients (7.7) du développement de  $A(h)$ . Par exemple

$$b_2 = 1/a_2, \quad b_4 = -a_4/a_2^4.$$

Dans le modèle d'Ising, on trouve

$$b_2 = 1, \quad b_4 = 2.$$

Enfin la condition (7.6) entraîne soit que  $|m|$  est borné soit que  $B(m)$  croît plus vite que  $m^2$  pour  $|m| \rightarrow \infty$ .

### 7.1.2 Spins indépendants

*Fonction de partition.* En l'absence d'interactions ( $\mathcal{E} = 0$ ), ou pour  $\beta = 0$  (c'est à dire à température infinie), la fonction de partition (7.1) se calcule immédiatement:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0(H) &= \int \prod_i dS_i \rho(S_i) \exp\left(H \sum_i S_i\right) = \int \prod_i dS_i \rho(S_i) e^{HS_i} \\ &= \prod_i \int dS_i \rho(S_i) e^{HS_i} = (z(H))^\Omega, \end{aligned} \quad (7.12)$$

où  $\Omega$  est le nombre de sites et  $z(h)$  la fonction (7.3).

*Energie libre.* L'énergie libre par unité de volume est alors

$$W_0(H) = \frac{1}{\Omega} \ln \mathcal{Z}_0(H) = A(H), \quad (7.13)$$

où  $A(h)$  est définie en (7.5). L'aimantation s'en déduit:

$$M = \frac{1}{\Omega} \sum_i \langle S_i \rangle = A'(H).$$

*Potentiel thermodynamique.* Le potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}_0(M)$ , transformé de Legendre de  $W_0(H)$ , est donné par

$$\mathcal{G}_0(M) = MH - W_0(H), \quad M = W_0'(H), \quad (7.14)$$

et donc  $\mathcal{G}_0(M) = B(M)$  (définition (7.8)).

*Distribution du spin moyen et potentiel thermodynamique.* Il est utile de rappeler ici le rapport entre le potentiel thermodynamique et la distribution du spin moyen ou de l'aimantation. Considérons  $N$  spins indépendants ayant la distribution  $\rho(S)$ , et soit  $M$  leur valeur moyenne. Suivant les arguments du théorème de la limite centrale (section 3.1), nous introduisons la transformée de Fourier de la distribution:

$$e^{\tilde{w}(k)} = \int ds \rho(s) e^{-iks}.$$

Nous en déduisons la distribution  $R_N(M)$  de la valeur moyenne  $M$  (équation (3.8))

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \Rightarrow R_N(M) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{iMk + N\tilde{w}(k/N)},$$

ou, changeant  $k \mapsto Nk$ ,

$$R_N(M) = \frac{N}{2\pi} \int dk \exp N [iMk + \tilde{w}(k)].$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , l'intégrale peut être évaluée par la méthode du col (section 2.5). Le col est donnée par l'équation

$$iM + \tilde{w}'(k) = 0$$

et donc, à l'ordre dominant, la distribution  $R_N(M)$  peut s'écrire

$$R_N(M) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \left( -\frac{N}{2\pi \tilde{w}''(k)} \right)^{1/2} \exp N [iMk + \tilde{w}(k)].$$

Comparant ces expressions avec les équations (7.3,7.13,7.14), on en déduit un résultat intéressant:

$$R_N(M) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{N \mathcal{G}_0''(M)/2\pi} e^{-N \mathcal{G}_0(M)}. \quad (7.15)$$

Le potentiel thermodynamique, du moins dans le cas de spins découplés, est directement lié à la distribution du spin moyen dans la limite où le nombre de spins tend vers l'infini.

Evidemment, comme la fonction  $\mathcal{G}(M)$  est convexe, avec son minimum à  $M = 0$ , nous retrouvons que la distribution est concentrée autour de  $M = 0$  et peut donc être approximée par une distribution gaussienne.

## 7.2 Transition de phase en dimension infinie

Il existe un modèle simple, mais un peu pathologique, qui peut être résolu exactement. Dans ce modèle tous les spins sont couplés deux à deux. Ce modèle a deux interprétations. À dimension d'espace finie, c'est un modèle avec des interactions de portée infinie, c'est à dire très différentes de celles qui nous intéressent réellement. Mais il peut aussi être interprété comme un modèle avec des interactions de portée finie, dans une limite où la dimension de l'espace tend vers l'infini. En effet, à dimension infinie, un site sur un réseau a un nombre infini de voisins.

Dans ce modèle, chaque spin est soumis à l'action d'un nombre infini d'autres spins. Cette interaction peut être remplacée par l'action d'un champ magnétique moyen, et dans un tel modèle, l'approximation dite de *champ moyen* est exacte.

*Le modèle.* L'énergie de configuration du modèle, en champ nul, est donnée par

$$\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) = - \sum_{i,j=1}^N \frac{v}{N} S_i S_j,$$

où le paramètre  $v$  est proportionnel à  $\beta$ , l'inverse de la température. Nous choisissons  $v > 0$  ce qui favorise des spins de même signe: on dit que l'interaction est ferromagnétique.

Dans ce modèle, la distribution spatiale des spins ne joue aucun rôle de sorte que nous les avons simplement numérotés  $i = 1, \dots, N$ . Par ailleurs, parce que le nombre de termes qui couplent les spins est d'ordre  $N^2$ , il faut, pour que la limite thermodynamique existe, diviser l'interaction par un facteur  $N$ .

Nous supposons une distribution de spin en chaque site paire,  $\rho(S) = \rho(-S)$ , normalisée, et qui a toutes les propriétés décrites en section 7.1, en particulier qui décroît plus vite qu'une gaussienne pour  $|S| \rightarrow \infty$ .

Comme la distribution spatiale des spins ne joue aucun rôle, la seule quantité physique intéressante est la fonction de partition  $\mathcal{Z}(H)$  dans un champ magnétique externe  $H$  que nous allons calculer exactement dans la limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$ .

### 7.2.1 Calcul de la fonction de partition

La fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z}_N(H, v) = \int \prod_i dS_i \rho(S_i) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) + H \sum_{i=1}^N S_i \right]. \quad (7.16)$$

L'identité

$$e^{-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S})} = \sqrt{N/4\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp \left[ -N\lambda^2/4v + \lambda \sum_i S_i \right],$$

permet de ramener la moyenne sur les spins dans l'expression (7.16), à une moyenne sur des spins indépendants (équation (7.12))

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_N(H, v) &= \sqrt{N/4\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-N\lambda^2/4v} \int \prod_i dS_i \rho(S_i) \exp \left[ (\lambda + H) \sum_i S_i \right] \\ &= \sqrt{N/4\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-N\lambda^2/4v} \mathcal{Z}_0^N(\lambda + H). \end{aligned}$$

Introduisant la transformée (7.3) de la distribution et son logarithme (équation (7.5)),

$$z(h) = \int ds \rho(s) e^{hs}, \quad A(h) = \ln z(h),$$

on peut récrire la fonction de partition (cf. équation (7.12))

$$\mathcal{Z}_N(H, v) = \sqrt{N/4\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp[-N\Sigma(\lambda)] \quad (7.17)$$

avec

$$\Sigma(\lambda) = \lambda^2/4v - A(\lambda + H).$$

La propriété  $A(\lambda)/\lambda^2 \rightarrow 0$  (équation (7.4)) pour  $|\lambda| \rightarrow \infty$  assure la convergence de l'intégrale (7.17).

Pour  $|\lambda| \rightarrow 0$ , nous utilisons le développement (7.7):

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}a_2\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad a_2 \gg 0.$$

*Limite thermodynamique et méthode du col.* Dans la limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$ , l'intégrale peut être évaluée par la méthode du col. L'équation du col est

$$\frac{\partial \Sigma(\lambda)}{\partial \lambda} = \lambda/2v - A'(\lambda + H) = 0. \quad (7.18)$$

La contribution d'un col est alors

$$\mathcal{Z}_N(H, v) \sim \frac{e^{-N\Sigma(\lambda)}}{\sqrt{2v\Sigma''(\lambda)}}.$$

S'il y a plusieurs cols dégénérés (comme c'est possible), cela ne change le résultat que d'un facteur entier.

Reportant la solution dans l'intégrant, on trouve la densité d'énergie libre à l'ordre dominant

$$W(H) \equiv \frac{1}{N} \ln \mathcal{Z}_N(H, v) \sim -\Sigma(\lambda).$$

La valeur moyenne  $M$  du spin, ou aimantation, est alors (utilisant l'équation (7.18))

$$M = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle = W'(H) = A'(\lambda + H) = \lambda/2v. \quad (7.19)$$

Le potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$ , transformée de Legendre de  $W(H)$ , s'en déduit:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(M) &= HM - W(H) = -vM^2 + (H + \lambda)M - A(\lambda + H) \\ &= -vM^2 + B(M), \end{aligned} \quad (7.20)$$

où  $B(m)$  est la transformée de Legendre (7.8) de  $A(h)$ , c'est à dire le potentiel thermodynamique des spins indépendants (équation (7.14)).

L'aimantation  $M$ , ou valeur moyenne du spin, est aussi solution de

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M} = -2vM + B'(M), \quad (7.21)$$

appelée *équation d'état*.

Enfin, utilisant (7.19) et l'équation de col (7.18), on trouve

$$W''(H) = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{A''(\lambda + H)}{1 - 2vA''(\lambda + H)} = \frac{1}{-2v + B''(M)}.$$

Nous analysons maintenant les solutions de l'équation de col et discutons leur interprétation physique, en fonction des deux paramètres  $v$  et  $H$ .

### 7.2.2 Limites de basse et haute température

*Haute température* ( $v \rightarrow 0$ ). La dérivée seconde au col est donnée par

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{(\partial \lambda)^2} = \frac{1}{2v} - A''(\lambda + H).$$

La fonction  $A''(\lambda)$  est positive, continue, et tend vers zéro quand  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Elle est donc bornée.

Pour  $v \rightarrow 0$  (c'est à dire à haute température du point de vue physique) et plus précisément pour

$$v \leq \min_{\lambda} 1/A''(\lambda),$$

la dérivée seconde est toujours positive et l'équation de col a une solution unique, qui correspond au maximum de l'intégrant.

Pour  $H = 0$ , elle se réduit à la solution triviale  $\lambda = 0$ . Pour  $H \rightarrow 0$ , la position du col devient (dans la paramétrisation (7.7))

$$\lambda_c(H) = \frac{a_2}{1/2v - a_2} H + O(H^2).$$

On en déduit l'aimantation

$$M = \langle S_i \rangle = \lambda_c(H)/2v = \frac{a_2}{1 - 2va_2} H + O(H^2),$$

qui donc s'annule en champ nul. Notons que les limites  $H \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$  commutent.

*Basse température.* Pour  $H = 0$ , la solution  $\lambda = 0$  reste un maximum local de l'intégrant aussi longtemps que

$$v < v_c, \quad v_c = 1/2a_2,$$

mais, pour  $v > v_c$ , cette solution devient un minimum. Au voisinage de  $\lambda = 0$  la dérivée seconde est donc négative. Par contre, pour  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $A''(\lambda)$  tend vers zéro et la dérivée seconde est toujours positive. Donc pour  $v > v_c$ ,  $\partial^2 \Sigma(\lambda)/(\partial \lambda)^2$  a au moins un zéro et comme c'est une fonction paire elle en a au moins deux. Une paire de zéros opposés correspond à un maximum de l'intégrant. Il y a deux cols dominants dégénérés  $\pm \lambda_c$  qui donnent la même contribution à  $\mathcal{Z}$ .

Pour  $H \neq 0$ , les deux solutions  $\pm \lambda_c$  sont déplacés, mais le point essentiel est que les deux cols ne sont plus à la même hauteur aussi petit que soit  $|H|$ . Pour  $N \rightarrow \infty$ , un seul col contribue et l'on trouve une valeur moyenne non-nulle pour  $S_i$ . Prenant ensuite la limite  $H \rightarrow 0$ , on trouve

$$\lim_{H \rightarrow 0} M \equiv \langle S_i \rangle = \lim_{H \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial W(H)}{\partial H} = \text{signe}(H) |\lambda_c|/2v.$$

Cette fois les limites ne commutent plus puisque les limites prises dans l'ordre inverse conduisent à une valeur nulle par symétrie.

Les conditions physiques du problème privilègent le résultat non trivial: en effet le point symétrique est l'équivalent d'un point d'équilibre instable en mécanique rationnelle. N'importe quelle brisure de symétrie, aussi faible soit-elle, choisit une des deux solutions non-nulles.

Ce modèle présente donc une transition de phase qui a lieu pour une valeur de  $v \leq v_c$  entre une situation avec une phase unique et symétrique, et une situation à deux phases différentes symétriques l'une de l'autre. On parle, dans ce dernier cas, de *brisure spontanée de symétrie*.

Notons que dans cette situation la fonction  $\mathcal{G}(M)$  apparemment n'est pas convexe, en contradiction avec les résultats généraux (6.3,6.8). En réalité la fonction n'est pas définie pour les valeurs de  $M$  telles que  $\mathcal{G}''(M) < 0$ . En effet

$$\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{\partial^2 W}{(\partial H)^2} > 0.$$

Par conséquent  $|M(H)| \geq |M(0)|$  et les valeurs intermédiaires  $|M| < |M(0)|$  ne peuvent pas être atteintes.

Avec cette restriction, toute l'étude plus détaillée des propriétés physiques du modèle peut être menée à partir de la fonction  $\mathcal{G}(M)$  (équation (7.20)) et de l'équation d'état (7.21) qui donne l'aimantation (la valeur moyenne du spin  $S_i$ ) en fonction du champ  $H$  et de la température qui est proportionnelle à  $1/v$ .

### 7.2.3 Potentiel thermodynamique et transitions de phase

En champ magnétique nul, l'aimantation *spontanée* est donnée par un extremum du potentiel thermodynamique. De plus, puisque la fonction de partition en champ nul est  $\exp[-N\mathcal{G}(M)]$ , dans la limite thermodynamique la fonction de partition est dominée par les minima de  $\mathcal{G}(M)$ .

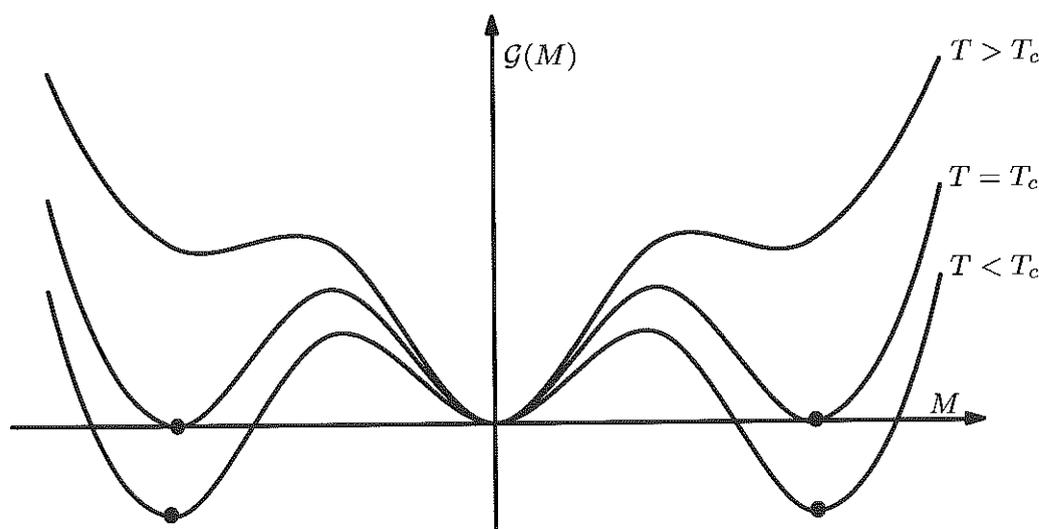


FIG. 7 – Potentiel thermodynamique: transition de phase du premier ordre.

Trouvons maintenant les minima de  $\mathcal{G}(M)$  quand la température, et donc aussi  $v$ , varie. La propriété (7.6) implique que pour  $|M|$  assez grand,  $\mathcal{G}(M)$  dans l'équation (7.20) est une fonction croissante. Pour  $v$  faible (haute température)  $vM^2$  est négligeable, et le membre de droite de l'équation (7.20) est convexe. Le minimum de  $\mathcal{G}(M)$  est  $M = 0$ ; l'aimantation s'annule. Quand  $v$  croît, en général on rencontre une valeur de  $v$  pour laquelle d'autres minima locaux apparaissent qui ensuite deviendront des minima absolus de  $\mathcal{G}(M)$ . Quand cela arrive, la valeur de l'aimantation  $M$  saute de façon discontinue de zéro à une valeur finie correspondant à ces nouveaux minima absolus. Le système subit une *transition de phase du premier ordre*. Les fluctuations autour du col sont gouvernées par la valeur de la dérivée seconde du potentiel au minimum. Dans cette situation la dérivée seconde est strictement positive.

Bien que les transitions de phase du premier ordre soient communes, elles ne nous intéressent pas particulièrement ici. En même temps l'approximation de champ moyen ou modèle quasi-gaussien (chapitre 8, et plus particulièrement la section 8.10) qui partage nombre de propriétés avec ce modèle en dimension infinie, donne une description qualitative satisfaisante de la physique.

Au contraire, si aucun minimum absolu n'apparaît à une distance finie de l'origine, finalement à une critique température  $T_c$ , correspondant à la valeur  $v_c$  de  $v$ :

$$2v_c = B''(0), \quad (7.22)$$

l'origine cesse d'être un minimum du potentiel, et au dessous de cette température deux minima s'éloignent continûment de l'origine. Puisque l'aimantation reste continue à  $v_c$ , la transition de phase est appelée *continue ou du second ordre*.

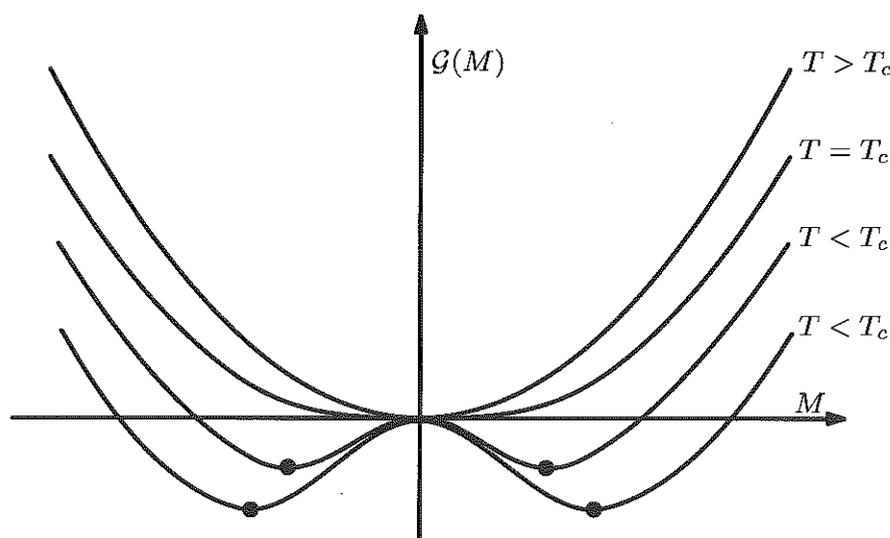


FIG. 8 – Potentiel thermodynamique: transition de phase du second ordre.

C'est la situation que nous analysons systématiquement maintenant.

*Remarque.* Dans cette situation, exactement à la transition, la méthode du col simple ne s'applique plus puisque la fonction  $\Sigma(\lambda)$  est d'ordre  $\lambda^4$ . Mais ceci n'affecte pas la fonction  $\mathcal{G}(M)$  à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$ , mais seulement les corrections.

### 7.3 Universalité en champ moyen

Nous examinons maintenant le comportement de quelques quantités thermodynamiques importantes quand la température  $T$  s'approche de  $T_c$ , c'est à dire  $v$  s'approche de  $v_c$ . Puisque la transition est continue, l'aimantation tend vers zéro pour  $T \rightarrow T_c$  et  $H \rightarrow 0$ . Dans cette limite nous pouvons donc développer  $\mathcal{G}(M)$  (équation (7.20)), qui comme  $B(M)$  est une fonction régulière paire, en séries de Taylor en  $M$ . Nous introduisons la paramétrisation (7.11):

$$\mathcal{G}(M) = -vM^2 + \frac{b_2}{2!}M^2 + \frac{b_4}{4!}M^4 + \dots \quad (7.23)$$

La convexité de  $B(M)$  implique que  $b_2$  est positif. Le paramètre  $b_4$  est aussi génériquement positif, parce que nous avons supposé qu'aucune transition du premier ordre n'a eu lieu à des températures plus élevées (la limite  $b_4 = 0$  mais avec  $b_6 > 0$  demande une analyse particulière et correspond à un point dit tricritique).

Pour  $v$  proche de  $v_c$  et champ magnétique appliqué  $H$  uniforme et faible, les premiers termes contribuant à l'équation d'état (7.21) sont

$$H = 2(v_c - v)M + \frac{1}{6}b_4M^3 + O(M^5). \quad (7.24)$$

*Aimantation spontanée.* Pour  $v > v_c$ , en champ nul, apparaît une aimantation spontanée  $M$ :

$$\frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial M} = 0 \Rightarrow M \sim [12(v - v_c)/b_4]^{1/2} \quad \text{pour } |v - v_c| \rightarrow 0. \quad (7.25)$$

Près de la température critique  $T_c$ , l'aimantation a donc un comportement en loi de puissances avec un exposant magnétique  $\beta$ :

$$M \sim (T_c - T)^\beta, \quad \beta = 1/2. \quad (7.26)$$

La valeur  $\beta = \frac{1}{2}$  est appelée valeur de champ moyen ou "classique" de l'exposant.

*Susceptibilité magnétique.* L'inverse de la susceptibilité magnétique  $\chi$  (c'est à dire la réponse de l'aimantation à un changement de champ magnétique) est donnée par

$$\chi^{-1} = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)^{-1} = \frac{\partial H}{\partial M} = 2(v_c - v) + \frac{1}{2}b_4M^2 + O(M^4).$$

En champ nul on trouve

$$\begin{aligned}\chi_+^{-1} &= 2(v_c - v) & T > T_c, \\ \chi_-^{-1} &= 4(v - v_c) & T < T_c,\end{aligned}\tag{7.27}$$

où l'équation (7.25) a été utilisée en dessous de  $T_c$ . La susceptibilité magnétique diverge donc à  $T_c$  avec des exposants de susceptibilité  $\gamma, \gamma'$ :

$$\begin{aligned}\chi_+ &\sim C_+ (T - T_c)^{-\gamma}, & \gamma = 1, \\ \chi_- &\sim C_- (T_c - T)^{-\gamma'}, & \gamma' = 1,\end{aligned}\tag{7.28}$$

et le rapport des amplitudes des singularités a la valeur universelle

$$C_+/C_- = 2.\tag{7.29}$$

*Equation d'état.* Revenons à l'équation générale (7.24). À  $T_c$  ( $v = v_c$ ) pour  $H \rightarrow 0$ , on trouve

$$H \propto M^3.\tag{7.30}$$

On caractérise, plus généralement, le comportement de  $H$  à  $T_c$  pour  $M \rightarrow 0$  par l'exposant critique  $\delta$ :

$$H \propto M^\delta.\tag{7.31}$$

Ici

$$\delta = 3,\tag{7.32}$$

qui est la valeur de champ moyen ou "classique" de l'exposant.

Plus généralement, pour  $H, T - T_c \rightarrow 0$  et donc  $M \rightarrow 0$ , après un changement de normalisation de champ, température et aimantation, l'équation d'état peut être mise sous une forme d'échelle universelle

$$H = M^\delta f((T - T_c)M^{-1/\beta}),\tag{7.33}$$

ce qui signifie que le rapport  $H/M^\delta$  n'est pas fonction des variables  $T$  et  $M$  indépendamment, mais seulement de la combinaison  $(T - T_c)/M^{1/\beta}$ .

La fonction  $f(x)$  est simplement:

$$f(x) = 1 + x.\tag{7.34}$$

La valeur  $x = -1$ , où  $H$  s'annule avec  $M$  non nul, correspond à la courbe de coexistence dans la région à deux phases, et redonne l'aimantation spontanée.

*Chaleur spécifique.* En champ nul la dérivée de l'énergie libre par unité de volume par rapport à  $\beta$  (l'inverse de la température) donne l'énergie moyenne.

Comme  $v$  est proportionnel à  $\beta$ , on peut dériver par rapport à  $v$  (un changement d'unité de température). Nous avons démontré (équation (6.6)) pour tout paramètre, et donc cela s'applique à  $v$ , la relation

$$\frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial v} + \frac{\partial W(H)}{\partial v} = 0.$$

On en déduit

$$\left. \frac{\partial W(H)}{\partial v} \right|_{H=0} = M^2(H=0).$$

On trouve qu'au dessus de  $T_c$  l'énergie moyenne s'annule et au dessous de  $T_c$  elle est proportionnelle au carré de l'aimantation spontanée. La dérivée de l'énergie moyenne par rapport à la température est la chaleur spécifique  $\mathcal{C}$ . Calculant la dérivée par rapport à  $v$  à  $v_c$ , on obtient un résultat proportionnel à la chaleur spécifique. Utilisant l'expression (7.25), on trouve

$$\mathcal{C}(T \rightarrow T_{c+}) = 0, \quad \mathcal{C}(T \rightarrow T_{c-}) = 12/b_4. \quad (7.35)$$

Dans ce modèle, comme dans l'approximation de champ moyen, la chaleur spécifique a donc une discontinuité à  $T_c$  dont la valeur n'est pas universelle.

*Autres modèles.* D'autres modèles peuvent être résolus en dimension infinie par la même méthode. Par exemple, le spin peut être un vecteur dans  $\mathbb{R}^\nu$  et le modèle invariant par les transformations du groupe orthogonal  $O(\nu)$  des rotations-réflexion de l'espace à  $\nu$  dimensions. On vérifie que la plupart des propriétés d'universalité reste inchangée. En champ moyen, les quantités universelles ne dépendent pas du groupe de symétrie.

## 7.4 Transformations, points fixes et universalité

Comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, nous associons maintenant les propriétés d'universalité aux points fixes d'une transformation. Comme toutes les propriétés des modèles sont déterminées par le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$ , nous pouvons exprimer la transformation sur  $\Gamma$  directement. Nous procédons de la manière suivante, nous regroupons les spins deux par deux, et pour chaque paire nous intégrons sur un spin, la moyenne des deux étant fixée. Nous utilisons la représentation (7.17) qui ramène la fonction de partition à une intégrale sur un modèle de spins indépendants. Nous avons déjà noté que, dans ce cas, la fonction génératrice des cumulants avait une transformation simple (cf. section 3.2). Ici on trouve

$$T : N \mapsto N/2, \quad v \mapsto 2v, \quad A(\lambda) \mapsto 2A(\lambda/2).$$

La transformée de Legendre  $B(M)$  de  $A$  est alors multipliée par un facteur 2. On en déduit la transformée du potentiel thermodynamique

$$[T\mathcal{G}](M) = 2\mathcal{G}(M).$$

Comme en section 3.2, nous combinons cette décimation du nombre de variables aléatoires avec une dilatation de l'aimantation:  $M \mapsto \zeta M$ , et la transformation générale devient

$$[\mathcal{T}\mathcal{G}](M) = 2\mathcal{G}(\zeta M).$$

L'équation de point fixe est donc

$$\mathcal{G}_*(M) = 2\mathcal{G}_*(\zeta M).$$

*Point fixe gaussien.* Comme la fonction  $\mathcal{G}(M)$  est holomorphe à  $M = 0$ , elle est développable en série de Taylor. Identifiant les coefficients de  $M^2$ , on trouve

$$v - b_2/2 = 2(v - b_2/2)\zeta^2.$$

Pour  $v \neq v_c = b_2/2$  et choisissant  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ , on trouve le point fixe

$$\mathcal{G}_*(M) = (b_2/2 - v)M^2.$$

La distribution de spin correspondant à ce point fixe est une distribution gaussienne, qui est une limite singulière des distributions que nous avons supposées. Par ailleurs, le point fixe n'est pertinent que pour  $v < v_c$ , domaine où l'aimantation spontanée s'annule.

Ce point fixe est stable en ce sens que le coefficient  $b_{2p}$  du terme d'ordre  $M^{2p}$  est multiplié par  $2^{1-p} < 1$  pour  $p > 1$ .

*Point fixe à la température critique.* Pour  $v = v_c$ , il faut développer jusqu'à l'ordre 4 et pour  $\zeta = 2^{-1/4}$  on trouve le point fixe

$$\mathcal{G}_*(M) = \frac{b_4}{4!}M^4.$$

Notons que dans les deux cas  $\zeta < 1$ , ce qui permet de comprendre pourquoi le point fixe correspond au premier terme du développement en puissances de  $M$ .

Le coefficient  $b_{2p}$  devient

$$\mathcal{T}b_{2p} = 2^{1-p/2}b_{2p}.$$

L'analyse de stabilité montre donc:

- (i) Un terme en  $M^2$  est une perturbation essentielle.
- (ii) Un terme en  $M^4$  est redondant.
- (iii) Tous les autres termes sont inessentiels.

Par ailleurs si nous interprétons le système comme un modèle de spin en dimension  $d$  avec interaction de portée infinie, alors le nombre de spins est proportionnel à  $L^d$  où  $L$  caractérise la dimension linéaire du réseau. Diviser le nombre de spins

par deux correspond à diviser  $L$  par  $2^{1/d}$ . Il est alors commode d'exprimer le comportement des différentes variables en inverse d'unité de longueur (pour que la dimension des variables essentielles soit positive). Dans cette unité, l'aimantation a une dimension  $d/4$  et  $v - v_c$  a dimension  $d/2$ .

*Universalité dans le domaine critique.* Suivant une stratégie qui a déjà utilisée en section 4.7.2, il est possible d'établir des propriétés d'universalité en dehors du point fixe de la manière suivante. On itère la transformation  $\mathcal{T}$   $m$  fois mais partant d'une valeur initiale  $v_m$  du coefficient du terme d'interaction de la forme

$$v_m = v_c + (v - v_c)2^{-m/2}.$$

Dans ces conditions, quand  $m \rightarrow \infty$ , le coefficient de  $M^2$  garde une valeur fixe alors que les coefficients des termes inessentiels tendent vers zéro:

$$\mathcal{G}(M) = (v_c - v)M^2 + \frac{b_4}{4!}M^4.$$

Ceci conclut l'analyse pour  $H = 0$ .

*Transformation en champ  $H \neq 0$ .* Il faut rajouter à l'énergie libre le terme  $HM$  qui devient  $2\zeta HM$  et donc

$$\mathcal{T}H = 2\zeta H = 2^{3/4}H.$$

Le champ magnétique est donc essentiel. Il a une dimension  $3d/4$ . De nouveau, en prenant un champ initial en  $2^{-3m/4}H$ , après  $m$  transformations on trouve une contribution fixe.

Enfin, prenant en compte les dimensions de  $H, v - v_c, M$ , la propriété d'échelle (7.33) de l'équation d'état s'interprète comme résultant d'une analyse dimensionnelle.

## 7.5 Interactions de portée finie: le modèle d'Ising

Nous examinons maintenant le problème des transitions de phases pour des modèles avec interactions de portée finie. Comme il n'est plus possible de résoudre en général exactement, nous utilisons d'abord des arguments de basse et haute température pour établir l'existence de transitions et en déduire quelques unes de leurs propriétés.

Nous considérons d'abord un système sur un réseau fini dans lequel, en dimension  $d > 1$ , nous distinguons une direction que nous appelons direction de temps par commodité, quand aucune confusion n'est possible. Le réseau correspond alors aux points de coordonnées entières  $\mathbf{r} = (t, \rho)$  avec

$$0 \leq t \leq \ell, \quad 0 \leq \rho_\mu \leq L \quad \text{pour } 1 \leq \mu \leq d - 1.$$

Il est commode de prendre des conditions aux limites périodiques dans les  $d - 1$  dimensions transverses.

*Matrice de transfert.* Lorsque les interactions sont de portée finie, il est possible d'utiliser le formalisme de la matrice de transfert, que nous avons déjà introduit en section 4.1.2 dans le cas particulier de modèles statistiques à une seule dimension d'espace.

Nous définissons la matrice de transfert dans la direction de temps. La fonction de partition, en dimension  $d$  arbitraire, avec condition aux limites périodiques dans la direction de temps, peut alors s'écrire

$$\mathcal{Z}(\ell, L) = \text{tr } \mathbf{T}^\ell, \quad (7.36)$$

où  $\mathbf{T}$  est la matrice de transfert. Dans la suite, pour illustrer le formalisme par un exemple concret, nous considérons le modèle d'Ising avec une interaction de proches voisins sur le réseau, mais les résultats que nous obtiendrons seront plus généralement valables pour tout système avec une symétrie de réflexion  $S \rightarrow -S$  et interactions de portée finie. L'isotropie des interactions nous permettra toujours de choisir une matrice de transfert symétrique.

### 7.5.1 Modèle d'Ising: Matrice de transfert

Dans l'exemple du modèle d'Ising à  $d$  dimensions avec interactions de proches voisins (en anglais *nearest neighbours*, n.n.), la partition fonction s'écrit

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{S_{\mathbf{r}} = \pm 1\}} \exp\left(\beta \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \text{ n.n.}} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}\right), \quad (7.37)$$

où  $\beta$ , l'inverse de la température, inclut aussi un facteur caractérisant l'intensité de l'interaction supposée ferromagnétique.

Les éléments de la matrice de transfert correspondante sont

$$[\mathbf{T}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = \exp\left[\beta \left(\sum_{\rho} S_{\rho} S'_{\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\rho, \rho' \text{ n.n.}} (S_{\rho} S_{\rho'} + S'_{\rho} S'_{\rho'})\right)\right], \quad (7.38)$$

où  $\rho$  est la position sur le réseau transverse à  $d - 1$  dimensions et  $\mathbf{S}$  représente l'ensemble des spins du réseau transverse. Un vecteur est associé à une distribution de spins dans l'espace transverse qui a  $d - 1$  dimensions. Pour un réseau de taille transverse  $L$ , l'espace vectoriel est de dimension  $2^{L^{d-1}}$ .

*Symétrie  $\mathbb{Z}_2$ .* Le modèle d'Ising est caractérisé par une symétrie discrète  $\mathbb{Z}_2$ , une réflexion, correspondant à changer le signe de tous les spins. Agissant sur l'espace vectoriel précédent, la réflexion est représentée par une matrice  $\mathbf{P}$ , dont les éléments de matrice, dans la notation (7.38), sont

$$[\mathbf{P}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = \prod_{\rho} \delta_{S_{\rho}, -S'_{\rho}}. \quad (7.39)$$

Elle satisfait  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{1}$  et ses valeurs propres sont  $\pm 1$ .

La matrice  $\mathbf{P}$  commute avec la matrice de transfert,

$$[\mathbf{T}, \mathbf{P}] = 0,$$

et donc  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{T}$  peuvent être diagonalisés simultanément. Les vecteurs propres de  $\mathbf{T}$  peuvent aussi être choisis vecteurs propres de  $\mathbf{P}$ .

Notons  $\tau_{\pm, n}$  les valeurs propres de  $\mathbf{T}$  correspondant aux vecteurs propres  $\psi_{\pm, n}$  tels que

$$\mathbf{P} \psi_{\pm, n} = \pm \psi_{\pm, n}, \quad \mathbf{T} \psi_{\pm, n} = \tau_{\pm, n} \psi_{\pm, n}.$$

La fonction de partition peut alors s'écrire

$$\mathcal{Z}(\ell, L, \beta) = \sum_{n=0}^{\ell} (\tau_{+, n}^{\ell} + \tau_{-, n}^{\ell}). \quad (7.40)$$

Il est utile pour la discussion qui suit de considérer aussi la fonction de partition

$$\mathcal{Z}_a(\ell, L, \beta) = \text{tr } \mathbf{P} \mathbf{T}^{\ell} = \sum_{n=0}^{\ell} (\tau_{+, n}^{\ell} - \tau_{-, n}^{\ell}). \quad (7.41)$$

Elle correspond à imposer des conditions aux limites anti-périodiques dans la direction de temps.

*Paramètre d'ordre.* Le spin  $S_{\sigma}$  au site  $\sigma$  du réseau transverse est, d'après la définition donnée dans l'introduction, un paramètre d'ordre. En effet la matrice correspondante  $\mathbf{S}_{\sigma}$ , dont les éléments de matrice entre deux configurations de spin sont

$$[\mathbf{S}_{\sigma}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = S_{\sigma} \prod_{\rho} \delta_{S_{\rho}, S'_{\rho}}, \quad (7.42)$$

est impaire par réflexion:

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_{\sigma} \mathbf{P} = -\mathbf{S}_{\sigma}. \quad (7.43)$$

*Limite  $L$  fini,  $\ell \rightarrow \infty$ .* Aussi longtemps que la dimension transverse du réseau reste finie, l'analyse générale de la section 4.1.2 reste valable. Le vecteur propre unique de la matrice de transfert associé à la plus grande valeur propre est symétrique

$$\mathbf{P} \psi_{+, 0} = \psi_{+, 0}.$$

En effet le vecteur propre  $\psi_{+, 0}$  a toutes ses composantes positives et l'équation (7.39) montre que  $\mathbf{P}$  ne change pas le signe des vecteurs de base.

En conséquence, la valeur moyenne du spin est nulle:

$$\langle S \rangle = (\psi_{+, 0}, \mathbf{S}_{\sigma} \psi_{+, 0}) = -(\psi_{+, 0}, \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_{\sigma} \mathbf{P} \psi_{+, 0}) = -(\psi_{+, 0}, \mathbf{S}_{\sigma} \psi_{+, 0}) = 0. \quad (7.44)$$

La symétrie  $S \rightarrow -S$  n'est brisée à aucune température.

De plus, aucun croisement de niveaux ne peut se produire et l'énergie libre  $\mathcal{W}$ , qui dans la limite  $\ell \rightarrow \infty$  est donnée par:

$$\mathcal{W} \sim \ell \ln \tau_{+,0}, \quad (7.45)$$

est une fonction régulière de la température  $T = 1/\beta$  pour  $T > 0$ . On conclut de cette analyse que dans un modèle de spin avec interactions de portée finie et symétrie de réflexion aucune transition de phase n'est possible même sans brisure de symétrie; l'énergie libre est une fonction régulière de la température, et la longueur de corrélation  $\xi$  ne peut diverger qu'à température nulle. Ces résultats se généralisent à toutes les interactions de courte portée.

### 7.5.2 Limite de dimension transverse infinie: transitions de phase

Quand la dimension transverse  $L$  tend vers l'infini, de nouveaux phénomènes peuvent se produire que nous examinons sur l'exemple du modèle d'Ising. Nous étudions pour cela les limites de haute et basse températures.

*Haute température.* À haute température ( $\beta \rightarrow 0$ ), les spins sur des sites différents se découplent. À température infinie les spins sont des variables indépendantes; tous les éléments de matrice de  $\mathbf{T}$  deviennent égaux et  $\mathbf{T}$  devient un projecteur sur le vecteur propre  $\psi_0$  qui a des composantes égales sur toutes les configurations de spin. Toutes les valeurs propres sauf une s'annulent. La longueur de corrélation est donc nulle également. Ces propriétés sont indépendantes du volume et donc les résultats précédents restent vrais même pour  $L$  infini. À haute température on trouve, comme attendu, une phase désordonnée où  $\langle S \rangle = 0$  et la symétrie de réflexion n'est pas brisée.

*Basse température.* À basse température, c'est à dire pour  $\beta \rightarrow \infty$ , les contributions dominantes à la fonction de partition correspondent aux deux configurations où tous les spins égaux soit à  $+1$  soit à  $-1$ :

$$S_{\mathbf{r}} = S = \pm 1 \quad \forall \mathbf{r}.$$

On en déduit

$$\mathcal{Z}(\ell, L, \beta) = \text{tr } \mathbf{T}^\ell \sim 2 e^{\beta d \ell L^{d-1}}, \quad (7.46)$$

où le facteur 2 correspond aux deux configurations.

À basse température, les contributions dominantes à la fonction de partition avec conditions aux limites anti-périodiques (7.41) correspondent à une région avec spins  $+1$  séparée de spins  $-1$ . Par rapport aux contributions uniformes qui dominent  $\mathcal{Z}(\ell, L, \beta)$ , la variation d'énergie est proportionnelle à l'aire de la surface qui sépare les deux régions. L'aire minimale est une surface plane  $t = t_0$  avec  $1 \leq t_0 \leq \ell$ . Le rapport  $\mathcal{Z}_a/\mathcal{Z}$  est alors

$$r(\ell, L) = \frac{\text{tr } \mathbf{P} \mathbf{T}^\ell}{\text{tr } \mathbf{T}^\ell} = \frac{\mathcal{Z}_a(\ell, L, \beta)}{\mathcal{Z}(\ell, L, \beta)} \sim \ell e^{-\beta L^{d-1}}, \quad (7.47)$$

où le facteur  $\ell$  correspond à toutes les positions possibles de la surface de séparation.

Pour  $\ell \rightarrow \infty$ , les fonctions de partitions sont dominées par les valeurs propres les plus grandes de la matrice de transfert. L'expression (7.46) montre que deux valeurs propres dominent la somme (7.40). Comme  $Z_a(\ell, L, \beta)$  est plus petit que  $Z(\ell, L, \beta)$ , ces deux valeurs propres sont asymptotiquement égales et correspondent à des vecteurs propres pair et impair. Donc

$$r(\ell, L) = \frac{Z_a(\ell, L, \beta)}{Z(\ell, L, \beta)} \sim \frac{\tau_{+,0}^\ell - \tau_{-,0}^\ell}{\tau_{+,0}^\ell + \tau_{-,0}^\ell}. \quad (7.48)$$

En terme de la longueur de corrélation  $\xi_L = 1/\ln(\tau_{+,0}/\tau_{-,0})$ ,

$$\frac{\tau_{+,0}}{\tau_{-,0}} - 1 \underset{\xi_L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\xi_L}$$

et donc

$$r(\ell, L) \sim \frac{\ell}{2\xi_L} \sim \ell e^{-\beta L^{d-1}}.$$

On en déduit

$$\xi_L \sim \frac{1}{2} e^{\beta L^{d-1}}. \quad (7.49)$$

Partant des configurations où tous les spins sont alignés, et prenant en compte des configurations où un nombre fini de spins a été retourné, on peut ensuite obtenir les valeurs et vecteurs propres comme un développement de basse température. Mais les comportements ne sont pas modifiés qualitativement.

*Transitions de phase.* Aussi longtemps que  $L$  reste fini, la longueur de corrélation ne diverge qu'à température nulle, comme à une dimension. Toute transition de phase est impossible.

Par contre, pour  $d > 1$ , à température suffisamment basse fixée, la longueur de corrélation diverge dans la limite  $L \rightarrow \infty$ , et la valeur propre maximale de la matrice de transfert est double. La limite thermodynamique dépend alors des conditions aux limites. En particulier, une brisure infinitésimale de symétrie sélectionne non pas un vecteur propre pair mais un des vecteurs propres correspondant à des spins alignés. Dans ce cas, l'aimantation est différente de zéro. Les deux phases possibles correspondent aux deux valeurs possibles opposées de l'aimantation.

Clairement dans la limite du volume infini, il n'y a pas de prolongement analytique possible entre une région à une phase à haute température et à une région à deux phases à basse température, et donc les quantités thermodynamiques doivent avoir au moins une singularité en  $\beta$  à une valeur finie  $\beta_c$ .

Notons que la longueur de corrélation  $\xi_L$  n'a de sens qu'en volume fini. En effet elle suppose qu'on moyenne sur toutes les configurations possibles. Or si

le système se trouve dans une des phases de symétrie brisée (une phase pure), on doit calculer la fonction de partition en ne sommant que sur une partie des configurations, les configurations d'aimantation de signe donné. La divergence de  $\xi_L$  est un précurseur de la propriété que la fonction de corrélation à deux spins en volume infini ne tend plus vers zéro à grande distance, mais vers le carré de l'aimantation spontanée.

*Remarques*

(i) Cette analyse de la limite du volume infini est qualitativement correcte dans tout la phase de basse température. À  $\beta_c$  la situation change; un nombre infini de valeur propres s'accumule à la même valeur  $\tau_{+,0}$ .

(ii) Nous avons vu que le rapport (7.47) fournit un critère de de brisure spontanée de symétrie. Cette analyse peut être généralisée à d'autres groupes de symétrie. On considère le rapport

$$r_L = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\text{tr } \mathbf{P} \mathbf{T}^\ell}{\text{tr } \mathbf{T}^\ell}, \quad (7.50)$$

où  $\mathbf{P}$  est un élément du groupe de symétrie.

Dans la phase symétrique le vecteur propre dominant de la matrice de transfert est invariant par les transformations du groupe de symétrie, et donc  $r_L = 1$ .

Au contraire, si la symétrie est brisée spontanément,  $\mathbf{P}$  échange les vecteurs propres dégénérés et donc  $r_L$  s'annule dans la limite du volume infini.

Comme nous le montrons ci-dessous, une autre limite de ce rapport est intéressante,  $r(L, L)$  pour  $L \rightarrow \infty$ . Elle correspond à la limite thermodynamique qui est prise en faisant tendre toutes les dimensions vers l'infini de la même manière. On est alors ramené à calculer le rapport de deux fonctions de partition sur un réseau à  $d$  dimensions de dimension linéaire  $L$  avec des conditions aux limites différentes: le dénominateur correspond à des conditions aux limites périodiques dans la direction de temps, le numérateur correspond à des conditions aux deux bords qui diffèrent par des transformations du groupe de symétrie. Dans des systèmes de type Ising le seul élément du groupe est la réflexion  $\mathbf{P}$ , et donc ces conditions aux limites sont anti-périodiques. Cette limite fournit, à basse température, un critère direct de brisure spontanée de symétrie.

### 7.5.3 Brisure d'ergodicité

Il est facile de construire des dynamiques probabilistes qui admettent la distribution correspondant au modèle d'Ising comme limite asymptotique. Chaque configuration est alors visitée au cours du temps avec une probabilité correspondant au poids de Boltzmann. La propriété importante, qui est vérifiée par toutes les dynamiques dites locales, est que la probabilité d'aller d'une configuration à une autre configuration de plus haute énergie est, à basse température, de l'ordre de  $e^{-\beta \Delta \mathcal{E}}$ , où  $\Delta \mathcal{E}$  est la différence d'énergie.

C'est pourquoi, à basse température, si la configuration initiale correspond à tous les spins égaux par exemple à  $+1$ , la probabilité de créer une bulle de

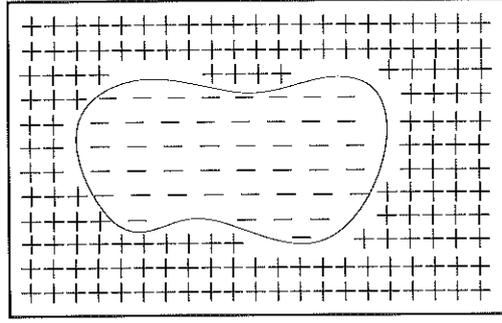


FIG. 9 – Bulle de spins – dans un environnement de spins +.

spins -1 est proportionnelle à  $e^{-\beta A}$ , où  $A$  est l'aire de la surface de la bulle (comme la figure 9 l'illustre pour la dimension 2). À  $d$  dimensions une bulle d'aire minimale est une sphère. Si nous appelons  $L$  son rayon, l'aire est d'ordre  $L^{d-1}$  et la probabilité est d'ordre  $e^{-\sigma L^{d-1}}$ , où  $\sigma$  est la tension de surface et à basse température  $\sigma \propto \beta = 1/T$ .

Dans la limite thermodynamique, pour pouvoir passer à une configuration où les spins sont majoritairement -1, il faut que cette probabilité reste finie quand  $L \rightarrow \infty$ .

Pour  $d = 1$ , le système reste donc ergodique, et aucune transition de phase n'est possible.

Pour  $d > 1$ , cette probabilité tend vers zéro pour  $L \rightarrow \infty$  et donc, à basse température dans la région à deux phases, une brisure d'ergodicité apparaît.

Une autre façon d'obtenir ce résultat est de noter que pour passer, dans un cube, d'une configuration initiale où les spins sont majoritairement égaux à +1 à la configuration de spins opposés, il faut passer par une configuration intermédiaire symétrique. La probabilité est alors d'ordre

$$r(L, L) = \frac{\text{tr} \mathbf{P} \mathbf{T}^L}{\text{tr} \mathbf{T}^L} \sim e^{-\beta L^{d-1}}, \quad (7.51)$$

c'est à dire de nouveau le rapport de deux fonctions de partition dans le cube.

## 7.6 Symétries continues

Discutons brièvement maintenant une famille de modèles qui ont une symétrie continue, pour exhiber quelques différences importantes avec le cas des symétries discrètes.

Nous considérons de nouveau un système de spins classiques, mais les spins  $\mathbf{S}_r$  sont maintenant des vecteurs à  $\nu$  composantes de longueur unité qui ont des interactions à deux spins ferromagnétiques de proches voisins.

La fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z} = \int \prod_r d\mathbf{S}_r \delta(\mathbf{S}_r^2 - 1) \exp[-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S})] \quad (7.52)$$

avec

$$\mathcal{E}(\mathbf{S}) = - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \text{ n.n.}} \mathbf{S}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{r}'}$$

Le modèle a alors une symétrie continue correspondant au groupe orthogonal  $O(\nu)$  des rotations-réflexions de l'espace à  $\nu$  dimensions.

*Matrice de transfert.* Ici aussi nous pouvons écrire la fonction de partition (7.52) en fonction d'une matrice de transfert  $\mathbf{T}$ , dont les éléments sont

$$[\mathbf{T}](\mathbf{S}', \mathbf{S}) = \exp \left[ \beta \left( \sum_{\rho} \mathbf{S}_{\rho} \cdot \mathbf{S}'_{\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\rho, \rho' \text{ n.n.}} (\mathbf{S}_{\rho} \cdot \mathbf{S}_{\rho'} + \mathbf{S}'_{\rho} \cdot \mathbf{S}'_{\rho'}) \right) \right], \quad (7.53)$$

où  $\rho$  est la position dans l'espace transverse à  $d - 1$  dimensions.

À haute température ( $\beta \rightarrow 0$ ), comme dans le cas du modèle d'Ising, le vecteur propre de la matrice de transfert correspondant à la valeur propre maximale a des composantes uniformes sur toutes les configurations et est donc invariant par les transformations du groupe  $O(\nu)$ .

Pour discuter la phase de basse température, instruit par l'exemple du modèle d'Ising, nous introduisons la généralisation du rapport (7.47). L'opération de symétrie est ici une rotation  $R(\alpha)$  d'angle  $\alpha$ . Nous définissons

$$\mathcal{Z}(\alpha, \ell, L, \beta) = \text{tr} \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{T}^{\ell} \quad (7.54)$$

avec un choix de conditions aux limites périodiques dans toutes les directions transverses. Nous examinons le comportement du rapport

$$r(\alpha, \ell, L) = \frac{\mathcal{Z}(\alpha, \ell, L, \beta)}{\mathcal{Z}(0, \ell, L, \beta)} \quad (7.55)$$

pour  $\beta \gg 1$  dans la limite  $L \rightarrow \infty$ .

La fonction de partition  $\mathcal{Z}(\alpha, \ell, L, \beta)$  est la fonction de partition sur un réseau à  $d$  dimensions, avec conditions aux limites modifiées dans la direction de temps où l'on impose

$$\mathbf{S}_{t=\ell, \rho} \cdot \mathbf{S}_{t=0, \rho} = \cos \alpha. \quad (7.56)$$

À basse température, les configurations d'énergie minimales correspondent à prendre tous les spins alignés dans  $d - 1$  dimensions, et tournant d'un angle  $\alpha/\ell$  entre deux sites adjacents le long de l'axe de temps. Ceci doit être contrasté avec le cas d'une symétrie discrète, où la transition entre les configurations imposées par les conditions aux limites se passe entre deux sites (ou plus généralement un nombre fini de sites) seulement.

La variation d'énergie  $\Delta \mathcal{E}$  due à la rotation est alors

$$\Delta \mathcal{E} = \ell \times L^{d-1} \times [\cos(\alpha/\ell) - 1] \quad (7.57)$$

et donc

$$r(\alpha, \ell, L) \propto \exp [\beta \ell L^{d-1} (\cos(\alpha/\ell) - 1)].$$

Pour  $\ell \gg 1$ , on peut développer

$$r(\alpha, \ell, L) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta L^{d-1} \alpha^2 / \ell \right]. \quad (7.58)$$

Ce résultat est le même que pour un modèle  $O(\nu)$  à une dimension, à basse température, avec  $\beta \mapsto \beta L^{d-1}$ . L'exercice 7.2 présente le calcul de la longueur de corrélation correspondante. On trouve ici

$$\xi_L \sim \frac{\beta L^{d-1}}{2(\nu - 1)}. \quad (7.59)$$

Un calcul équivalent consiste à remplacer, à basse température, tous les spins  $\mathbf{S}_\rho$  et les spins  $\mathbf{S}'_\rho$  dans la matrice de transfert par deux spins constants. Le résultat est de nouveau la matrice de transfert du modèle unidimensionnel, avec une interaction  $\beta \mapsto \beta L^{d-1}$ .

Ce résultat semble indiquer, de nouveau, que la longueur de corrélation diverge à partir de la dimension 2, comme dans le cas discret. Ce résultat n'est correct qu'en dimension plus grande que 2.

En dimension 2, l'estimation prédit que la longueur de corrélation croît comme  $L$ , c'est à dire que  $\xi_L/L$  reste constant. C'est un cas assez subtil où les fluctuations autour des configurations constantes influent sur le calcul même à basse température et qui doit être étudié avec des arguments plus fins. En fait, ce résultat n'est valable que pour  $\nu = 2$  (cas où le groupe des rotations  $SO(2)$  est abélien). Pour  $\nu > 2$  la longueur de corrélation ne diverge qu'à température nulle.

Par ailleurs, même pour  $\nu = 2$ , bien que la longueur de corrélation diverge, parce que  $\xi_L/L$  reste fini l'aimantation dans la phase de basse température est nulle,  $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ , et la symétrie  $O(2)$  n'est pas brisée. On trouve une phase de basse température caractérisée par une décroissance algébrique des fonctions de corrélations connexes (phase dite de Kosterlitz-Thouless). Ainsi que l'argument ergodique le suggère, pour que la valeur moyenne soit différente de zéro, il faut que  $\xi_L/L \rightarrow \infty$  pour  $L \rightarrow \infty$ .

*Ergodicité.* On peut définir des dynamiques probabilistes qui conduisent dans des temps physiques (pour distinguer du temps fictif correspondant à la matrice de transfert) asymptotiques aux distributions de type (7.52).

Pour comprendre la structure des phases de basse température, on peut alors évaluer la probabilité maximum pour que dans une configuration de spins alignés, une sphère au centre de laquelle les spins sont tournés d'un angle  $\alpha$  soit créée. De façon équivalente, on peut utiliser le rapport des fonctions de partition (7.58) pour  $\ell = L$ . On trouve

$$r(\alpha, L, L) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta L^{d-2} \alpha^2 \right]. \quad (7.60)$$

Ainsi, dans le cas d'une symétrie continue, il est plus facile de passer d'un minimum de l'énergie à un autre. Cette propriété a comme conséquence directe qu'il est plus difficile de briser la symétrie et que des modes de Goldstone apparaissent dans la phase de symétrie brisée (voir section 8.8). Pour  $d \leq 2$ ,  $r(\alpha, L, L)$  a une limite finie et la symétrie n'est jamais brisée. Ce résultat, pour lequel nous avons donné des arguments heuristiques, peut être démontré rigoureusement (théorème de Mermin–Wagner–Coleman).

Pour  $d > 2$ , au contraire la symétrie est brisée à basse température. Il existe une température finie  $T_c$ , où une transition de phase a lieu.

## Exercices

### Exercice 7.1

*Le modèle d'Ising: une dimension.* Dans le cas du modèle d'Ising à une dimension avec interaction de proches voisins, et en présence d'un champ magnétique  $h$ , la fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z}_\ell = \sum_{\{S_i = \pm 1\}} \exp[-\beta \mathcal{E}(S)] \quad (7.61)$$

avec une énergie de configuration

$$\mathcal{E}(S) = - \sum_{i=1}^{\ell} JS_i S_{i+1} - hS_i, \quad J > 0. \quad (7.62)$$

Résoudre ce modèle par la méthode de la matrice de transfert. Calculer la longueur de corrélation.

*Solution.* La matrice de transfert est une matrice  $2 \times 2$  qui peut être écrite

$$[\mathbf{T}](S', S) = \exp \left[ \beta (JSS' + \frac{1}{2}h(S + S')) \right]. \quad (7.63)$$

La limite thermodynamique correspond à faire tendre  $\ell$  vers l'infini. Comme nous l'avons déjà expliqué, la fonction de partition est reliée à la plus grande valeur propre de la matrice de transfert. Les deux valeurs propres sont

$$\tau_{\pm} = e^{\beta J} \left[ \cosh(\beta h) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}} \right].$$

La longueur de corrélation est elle liée au rapport des deux valeurs propres (les plus grandes, mais il n'y a que deux)

$$\xi^{-1} = \ln(\tau_+/\tau_-) = 2 \tanh^{-1} \left[ \frac{(\sinh^2 \beta h + e^{-4\beta J})^{1/2}}{\cosh \beta h} \right]. \quad (7.64)$$

La longueur ne diverge qu'en champ nul, à température nulle:  $\xi \propto e^{4\beta J}$ .

*Exercice 7.2*

*Le modèle  $O(\nu)$ : une dimension.* Dans le cas du modèle de spins avec symétrie  $O(\nu)$  et interaction de proches voisins, la fonction de partition à une dimension peut s'écrire

$$Z_\ell = \int \prod_i d\mathbf{S}_i \delta(\mathbf{S}_i^2 - 1) \exp[-\beta\mathcal{E}(\mathbf{S})] \quad (7.65)$$

( $\mathbf{S}$  appartient à la sphère  $S_{\nu-1}$ ) avec une énergie de configuration

$$\mathcal{E}(\mathbf{S}) = -J \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}, \quad J > 0. \quad (7.66)$$

Trouver les deux valeurs propres dominantes de la matrice de transfert à basse température.

*Solution.* Le vecteur propre correspondant à la valeur la plus grande est invariant par le groupe  $O(\nu)$  et donc une constante. La valeur propre correspondante est (posant  $v = \beta J$ )

$$\tau_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{\nu-2} e^{v \cos \theta},$$

où  $\cos \theta = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}'$ .

Pour  $v \rightarrow \infty$ , cette intégrale (reliée aux fonctions de Bessel) s'évalue par la méthode du col légèrement adaptée. On trouve

$$\tau_0(v) \sim \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu-1)\right) \left(\frac{2}{v}\right)^{(\nu-1)/2} e^v \left[1 - \frac{1}{8}(\nu-1)(\nu-3)/v + O(1/v^2)\right].$$

La seconde valeur propre correspond à un vecteur propre proportionnel au vecteur  $\mathbf{S}$ . On en déduit la valeur propre

$$\begin{aligned} \tau_1(v) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{\nu-2} \cos \theta e^{v \cos \theta} = \tau_0'(v) \\ &= \tau_0 \left[1 - \frac{1}{2}(\nu-1)/v + O(1/v^2)\right]. \end{aligned}$$

Cela permet d'obtenir le comportement de la longueur de corrélation:

$$\xi \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \frac{v}{2(\nu-1)}.$$

*Exercice 7.3*

*Modèle avec symétrie  $O(\nu)$  en dimension infinie.* Généraliser l'étude de la section 7.2 à un modèle avec des spins  $\mathbf{S}$  appartenant de nouveau à la sphère  $S_{\nu-1}$  avec la même distribution isotrope que dans l'exercice précédent, mais avec une énergie de configuration

$$-\beta\mathcal{E}(\mathbf{S}) = \frac{v}{N} \sum_{i,j=1}^N \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad v > 0,$$

et un terme de champ magnétique

$$\mathbf{H} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i.$$

On généralisera l'identité gaussienne en introduisant un vecteur  $\lambda$  à  $\nu$  composantes.

*Solution.* Quelques éléments. L'identité utile est maintenant

$$e^{-\beta\mathcal{E}(\mathbf{S})} = \left(\frac{N}{4\pi v}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu \lambda \exp \left[ -N\lambda^2/4v + \lambda \cdot \sum_i \mathbf{S}_i \right],$$

qui permet de ramener la moyenne sur les spins à une moyenne sur des spins indépendants (équation (7.12)):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_N(H, v) &= \left(\frac{N}{4\pi v}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu \lambda e^{-N\lambda^2/4v} \int \prod_i d\mathbf{S}_i \delta(\mathbf{S}_i^2 - 1) \\ &\quad \times \exp \left[ (\lambda + \mathbf{H}) \cdot \sum_i \mathbf{S}_i \right] \\ &= \left(\frac{N}{4\pi v}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu \lambda e^{-N\lambda^2/4v} e^{-N\lambda^2/4v} z^N(\lambda + \mathbf{H}), \end{aligned}$$

où  $z(h)$  est la fonction de partition à un site:

$$z(h = |\mathbf{h}|) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{\nu-2} e^{h \cos \theta}.$$

En terme de  $A(h) = \ln z(h)$ , on peut récrire la fonction de partition

$$\mathcal{Z}_N(H, v) = \left(\frac{N}{4\pi v}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu \lambda \exp[-N\Sigma(\lambda)] \quad (7.67)$$

avec

$$\Sigma(\lambda) = \lambda^2/4v - A(|\lambda + \mathbf{H}|).$$

Pour  $N \rightarrow \infty$  cette intégrale peut de nouveau être calculée par la méthode du col.

## Chapitre 8

### Approximation quasi-gaussienne: universalité et dimension critique

Dans ce chapitre, nous continuons l'étude des transitions de phase commencée dans le chapitre 7. Nous utilisons encore le langage ferromagnétique. Ceci n'est partiellement qu'une restriction de langage. En effet, comme conséquence de la propriété d'*universalité* des phénomènes critiques, une propriété que nous allons décrire et analyser, les résultats que nous allons obtenir s'appliquent à de nombreux autres systèmes physiques qui n'ont rien de magnétiques, comme la transition liquide-vapeur, les transitions de démixion des mélanges binaires, la transition superfluide de l'Hélium *etc...* À cette liste il convient d'ajouter un problème qui ne semble pas, à première vue, relever des phénomènes critiques, les propriétés statistiques des polymères, ou du point de vue théorique des chemins aléatoires sur réseau, sans intersection ou auto-évitant (SAW ou self-avoiding walk).

Pour des raisons que nous avons déjà évoquées, nous ne nous intéressons qu'aux transitions de phase du second ordre, au voisinage de la température de transition. Pour ces transitions la longueur de corrélation, qui caractérise la décroissance à grande distance des fonctions de corrélation connexes, diverge au point de transition (la température critique par exemple). Ainsi une échelle de distance, grande par rapport à l'échelle des des longueurs microscopiques (portée des forces, maille de réseau), est engendrée dynamiquement. Alors une physique macroscopique ou de grande distance apparaît qui a des propriétés d'*universalité*, c'est à dire des propriétés indépendantes dans une large mesure des détails des interactions microscopiques.

Nous avons déjà montré qu'aussi longtemps que la longueur de corrélation reste finie, c'est à dire dans la phase de haute température, les quantités macroscopiques, comme l'aimantation moyenne, ont le comportement prédit par le théorème de la limite centrale; à volume infini, elles tendent vers des valeurs certaines avec des fluctuations gaussiennes. Ce résultat se comprend dans la mesure où les degrés de liberté microscopiques peuvent être remplacés par des spins moyens indépendants, attachés à des volumes ayant la longueur de corrélation

comme dimension linéaire. Dans un premier temps nous étudions donc les propriétés des modèles gaussiens.

À la température de transition  $T_c$ , et en dessous de  $T_c$ , ces arguments ne sont plus valables. Néanmoins, on peut se demander si la mesure gaussienne asymptotique peut être simplement remplacée par une mesure gaussienne perturbée c'est à dire si les corrélations résiduelles entre des spins moyens peuvent être traitées perturbativement. Une telle approximation peut être qualifiée de *quasi-gaussienne*. L'approximation quasi-gaussienne conduit à des propriétés de longue distance remarquablement universelles, indépendantes dans une large mesure de la géométrie, de la dimension d'espace... Pour les quantités homogènes, elles coïncident avec celles du modèle en dimension infinie que nous avons étudié en section 7.2. Mais on trouve, de plus, que le comportement singulier de fonctions de corrélation pour  $T \rightarrow T_c$  et en faible champ est également *universel*.

Dans la première partie de cette étude, nous nous limitons à des modèles avec symétrie discrète. Cependant, en dessous de  $T_c$  ou en champ magnétique, les modèles avec symétries continues ont des propriétés particulières, dues en particulier à l'apparition de modes de Goldstone, qui nécessitent une discussion spéciale.

Un calcul systématique des corrections à l'approximation quasi-gaussienne permet de vérifier sa cohérence et son domaine de validité. Nous mettons ainsi en évidence le rôle de la dimension 4, qui sépare les dimensions supérieures, où l'approximation est justifiée, des dimensions inférieures où elle ne peut pas être valable.

La description la plus ancienne et la plus simple des transitions de phase est la théorie du champ moyen (TCM). On suppose que l'infinité de degrés de liberté microscopiques peut être remplacée par un petit nombre de degrés de liberté macroscopiques, les effets résiduels pouvant être traités de façon perturbative. L'approximation de champ moyen peut être qualifiée de quasi-gaussienne, en ce sens qu'elle prédit les mêmes résultats universels. L'approximation de champ moyen peut être introduite par plusieurs méthodes: sommation partielle du développement de haute température, principe variationnel, ordre dominant de la méthode du col. Cette dernière méthode permet de calculer les corrections à l'approximation de champ moyen et donc de discuter son domaine de validité, qui en effet est le même que celui de l'approximation quasi-gaussienne.

*Systèmes ferromagnétiques de type Ising.* Nous considérons de nouveau un système de spins classiques  $S_i$  sur le réseau  $d$ -dimensionnel des points de coordonnées entières,  $i$  dénotant un site du réseau. Nous imaginons que les spins classiques sont en réalité des spins moyens dans un volume physique grand à l'échelle des interactions microscopiques, mais petit à l'échelle des phénomènes que nous voulons étudier. Ceci conduit à admettre aussi des spins ayant une distribution continue. Par ailleurs, nous supposons que les spins fluctuent peu autour de  $S = 0$  et donc que la distribution de spin  $\rho(S)$  en chaque site satisfait les conditions de la section 7.1 et décroît pour  $|S| \rightarrow \infty$  plus vite qu'une gaussienne

(condition (7.2)). Nous supposons enfin que le système a une symétrie de réflexion (de type Ising)  $S \mapsto -S$ . La distribution de spin est donc paire,  $\rho(S) = \rho(-S)$ . Comme dans les exemples (7.16,7.37), nous choisissons une interaction à deux spins ferromagnétique avec l'énergie de configuration de spins plus générale,

$$-\beta\mathcal{E}(S) = \sum_{ij} V_{ij} S_i S_j, \quad (8.1)$$

caractérisée maintenant par une matrice  $V_{ij}$  à coefficients positifs, invariante par translation, de courte portée.

La fonction de partition (6.9), dans un champ magnétique local  $H_i$  qui brise la symétrie explicitement, s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(S) + \sum_i H_i S_i \right], \quad (8.2)$$

où de nouveau  $H$  inclut un facteur  $\beta$ .

Grâce à la condition de décroissance (7.2) la fonction de partition est définie, au moins dans un volume fini, pour toute interaction de paires et toute température.

## 8.1 Interactions à deux spins de courte portée

Dans le modèle 7.2 l'espace ne joue aucun rôle, l'interaction ayant une portée infinie. En réalité les systèmes qui nous intéressent ont des interactions à courte portée, une notion que nous précisons ici dans le cas d'interactions à deux spins, et dont nous décrivons quelques propriétés.

Nous ne considérons que des interactions dites ferromagnétiques, c'est à dire telles que  $V_{ij} = V_{ji} \geq 0$ . Nous supposons que l'interaction de paires  $V_{ij}$  est invariante par translation:

$$V_{ij} \equiv V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = V(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \geq 0,$$

où  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$  sont les vecteurs joignant les sites  $i$  et  $j$  à l'origine.

Nous définissons maintenant plus précisément ce que nous entendons par interaction de courte portée: les interactions décroissent exponentiellement quand la séparation entre les spins tend vers l'infini. Pour l'interaction à deux spins ceci implique

$$V(\mathbf{r}) \leq M e^{-\kappa|\mathbf{r}|},$$

où  $M, \kappa$  sont deux constantes positives.

Il est commode d'introduire le paramètre

$$v = \sum_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) > 0, \quad (8.3)$$

qui est proportionnel à  $\beta$ , l'inverse de la température (dans ce qui suit nous caractériserons la température par la valeur de  $1/v$ ) et la fonction

$$U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})/v. \quad (8.4)$$

Nous nous limitons à des potentiels ayant la symétrie du réseau (définie en (3.36)), parce que c'est plus simple. Le potentiel normalisé, c'est à dire la fonction  $U(\mathbf{r})$ , appartient donc à la classe des probabilités de saut de la marche au hasard 3.3.4. Cette hypothèse de symétrie n'est cependant pas essentielle; la symétrie par réflexion  $V(\mathbf{r}) = V(-\mathbf{r})$  suffit puisqu'il est toujours facile de faire des transformations linéaires sur les coordonnées.

Le potentiel étant invariant par translation, il est naturel d'introduire sa transformée de Fourier

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = v \tilde{U}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} V(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (8.5)$$

La fonction  $\tilde{V}(\mathbf{k})$  est paire et périodique dans toutes les composantes  $k_\mu$  du vecteur  $\mathbf{k}$ . On peut donc restreindre ces composantes à ce qu'on appelle une zone de Brillouin:  $|k_\mu| < \pi$ . Le vecteur  $\mathbf{k}$  est parfois appelé vecteur *impulsion* en analogie avec la mécanique quantique où position et impulsion sont liées par la transformation de Fourier.

Puisque le potentiel  $V_{ij}$  est à courte portée, les transformées de Fourier  $\tilde{V}(\mathbf{k})$  et  $\tilde{U}(\mathbf{k})$  sont holomorphes pour  $|\text{Im } \mathbf{k}| < \kappa$ . La positivité du potentiel de paires entraîne, de plus,

$$|\tilde{U}(\mathbf{k})| \leq \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} U(\mathbf{r}) = \tilde{U}(0) = 1. \quad (8.6)$$

La fonction  $\tilde{U}(\mathbf{k})$  admet alors, pour  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , un développement de la forme

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = 1 - a^2 k^2 + O(k^4), \quad (8.7)$$

où  $k^2$  est le carré de la longueur du vecteur  $\mathbf{k}$ , et  $a$  une constante positive.

*Exemple: interaction de proches voisins.* Calculons la fonction  $\tilde{V}(\mathbf{k})$  dans le cas d'une interaction de proches voisins sur le réseau. Appelant  $\mathbf{e}_\mu$  les  $d$  vecteurs unitaires correspondant aux liens du réseau, nous pouvons écrire

$$V(\mathbf{r}) = \frac{v}{2d} \sum_{\mu=1}^d (\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{e}_\mu} + \delta_{\mathbf{r}, -\mathbf{e}_\mu}),$$

où  $\delta$  est ici le symbole de Kronecker. Donc

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} V(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \frac{v}{2d} \sum_{\mu} [\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\mu) + \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\mu)] \\ &= \frac{v}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos k_\mu, \end{aligned}$$

où  $k_\mu$  sont les composantes du vecteurs  $\mathbf{k}$ .

Pour  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ ,

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = 1 - \frac{k^2}{2d} + \sum_{\mu} \frac{k_{\mu}^4}{24d} + O(k_{\mu}^6).$$

*Développement de haute température.* Il est possible de calculer la fonction de partition et les fonctions de corrélation en développant l'expression (8.2) en puissances de l'interaction  $V_{ij}$  et en évaluant les termes successifs (développement de haute température). Le développement s'exprime en fonction des moments de la distribution locale (section 7.1)

$$\langle S_i^n \rangle = z^{-1} (H_i) \left( \frac{\partial}{\partial H_i} \right)^n z (H_i). \quad (8.8)$$

Comme dans le cas des perturbations à la mesure gaussienne, l'énergie libre a un développement plus simple que la fonction de partition car les contributions "non connexes" se compensent

$$\mathcal{W}(H) - \mathcal{W}_0(H) = \sum_{ij} V_{ij} \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle + \frac{1}{2!} \sum_{ijkl} V_{ij} V_{kl} \langle S_i S_j S_k S_l \rangle_c + \dots, \quad (8.9)$$

où par exemple

$$\sum_{ijkl} V_{ij} V_{kl} \langle S_i S_j S_k S_l \rangle_c = \sum_{ijkl} V_{ij} V_{kl} [\langle S_i S_j S_k S_l \rangle - \langle S_i S_j \rangle \langle S_k S_l \rangle].$$

Dans la différence tous les termes avec les quatre indices  $i, j, k, l$  différents se compensent. Cette propriété est liée à l'extensivité de l'énergie libre.

Le développement de haute température diverge à la température critique où les fonctions thermodynamiques sont singulières. À condition d'être capable de calculer assez de termes du développement, on peut l'utiliser, combiné avec des méthodes numériques d'analyse de séries (méthode de rapports, extrapolation par table de Neuville et ses généralisations, approximants de Padé logarithmique, approximants différentiels,...) pour obtenir des informations quantitatives sur le comportement critique.

*Remarque.* Il est techniquement commode dans le cadre du développement de haute température comme de l'approximation de champ moyen (cf. section 8.10) de supposer que  $V_{ii}$  s'annule (par invariance par translation  $V_{ii}$  est indépendant du site  $i$ ), une telle contribution à un site pouvant être incluse dans la mesure  $\rho(S)$ .

## 8.2 Le modèle gaussien: la fonction à deux points

Considérons d'abord les systèmes ferromagnétiques dans la phase désordonnée  $T > T_c$ . Comme nous l'avons déjà expliqué, parce que la longueur de corrélation est alors finie, on s'attend à pouvoir décrire leurs propriétés macroscopiques en termes de spins classiques  $\sigma_i$ , qui sont déjà des moyennes des spins microscopiques dans des petits volumes. On peut espérer, dans l'esprit du théorème de la limite centrale, que les fluctuations des spins  $\sigma$  sont faibles et que leur distribution est en première approximation gaussienne. Cette idée nous conduit au modèle gaussien que nous présentons maintenant.

Une mise en oeuvre formelle plus précise de cette idée sera présentée en section 8.10.

*Modèle gaussien.* Comme dans la phase désordonnée les spins fluctuent autour d'une valeur moyenne nulle par symétrie  $\sigma \rightarrow -\sigma$ , une distribution gaussienne en chaque site a la forme

$$\rho(\sigma) = e^{-b_2\sigma^2/2}, \quad b_2 > 0.$$

L'interaction à deux spins de type (8.1) est directement quadratique. Elle peut être considérée comme le premier terme d'un développement en puissances de  $\sigma$ . Avec cette interaction la fonction de partition gaussienne s'écrit

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \prod_i d\sigma_i \exp \left[ -\mathfrak{S}(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i \right], \quad (8.10)$$

où

$$\mathfrak{S}(\sigma) = \sum_{ij} \mathfrak{S}_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad \mathfrak{S}_{ij} = \frac{1}{2} b_2 \delta_{ij} - V_{ij}. \quad (8.11)$$

Le modèle n'est défini que si la matrice  $\mathfrak{S}_{ij}$  est définie positive.

Nous pouvons alors utiliser les résultats de la section 6.3. Le potentiel thermodynamique est simplement

$$\Gamma(M) = \Gamma(0) + \frac{b_2}{2} \sum_i M_i^2 - \sum_{ij} M_i M_j V_{ij}. \quad (8.12)$$

### 8.2.1 Quantités homogènes

En champ magnétique uniforme  $H_i = H$ , l'aimantation  $M$  est uniforme. La fonction  $\Gamma(M)$  est alors proportionnelle au nombre de sites  $\Omega$ , et nous posons

$$\Omega^{-1} [\Gamma(M) - \Gamma(0)] \equiv \mathcal{G}(M) = \frac{1}{2} (b_2 - 2v) M^2, \quad (8.13)$$

où la définition (8.3) a été utilisée.

On note la valeur particulière

$$v_c = b_2/2. \quad (8.14)$$

Pour  $v < v_c$ ,  $\mathcal{G}(M)$  est minimum à  $M = 0$ , et donc l'aimantation s'annule en champ nul:

$$M = \langle \sigma_i \rangle_{H=0} = 0.$$

La phase de haute température est une phase désordonnée.

Pour  $v = v_c$ , l'aimantation est indéterminée, et à plus basse température le modèle n'a plus de sens car  $\Gamma(M)$  n'est pas bornée inférieurement.

L'équation d'état est linéaire

$$H = \mathcal{G}'(M) = (v_c - v)M.$$

La susceptibilité magnétique  $\chi$  est la dérivée de l'aimantation par rapport au champ magnétique:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{v_c - v}.$$

La susceptibilité magnétique diverge donc pour  $v = v_c$ , qui peut être interprété comme un point de transition correspondant à une température critique  $T_c$ . Le comportement

$$\chi \propto (T - T_c)^{-1},$$

coïncide avec celui obtenu en champ nul dans le modèle avec interactions à longue portée en section 7.3.

On ne s'attend, en général, à une telle divergence qu'en champ nul mais, dans le modèle gaussien, la susceptibilité ne dépend pas du champ appliqué.

### 8.2.2 Fonction à deux points

La fonction à deux points en champ nul, pour  $v < v_c$ ,

$$\Delta_{ij} \equiv \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\text{conn.}} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{W}(H)}{\partial H_i \partial H_j} \right|_{H=0},$$

est l'inverse de la matrice  $2\Sigma$ :

$$\sum_k \Delta_{ik} [b_2 \delta_{kj} - 2V_{kj}] = \delta_{ij}. \quad (8.15)$$

À cause de l'invariance par translation, à la fois  $V_{ij}$  et  $\Delta_{ij}$  ne dépendent que de  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , où  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  sont les positions des sites  $i$  et  $j$ . L'équation précédente est donc une équation de convolution qui devient simple après transformation de Fourier. La transformée de Fourier

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Delta(\mathbf{r})$$

est donnée en termes des transformées de Fourier (8.5) par

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \left[ b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{k}) \right]^{-1}. \quad (8.16)$$

Pour  $v < v_c$ , le dénominateur ne s'annule pas dans un voisinage de l'axe réel. La fonction  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  reste donc analytique dans une bande et la fonction  $\Delta(\mathbf{r})$  décroît exponentiellement pour  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ , confirmant que la longueur de corrélation est finie.

Par contre, pour  $v = v_c$  (c'est à dire à la température de transition  $T = T_c$ ), le dénominateur se comporte pour  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$  comme (utilisant la paramétrisation (8.7))

$$2v_c(1 - \tilde{U}(\mathbf{k})) = 2v_c a^2 k^2 + O(k^4).$$

C'est le seul point d'ailleurs où le dénominateur peut s'annuler (à cause de la borne (8.6)). La longueur de corrélation est infinie, en accord avec l'interprétation de ce point comme associée à une température de transition. La fonction  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  est singulière,

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \underset{|\mathbf{k}| \rightarrow 0}{\sim} \frac{D}{k^2}, \quad D = 1/2v_c a^2, \quad (8.17)$$

et cela conduit à une décroissance algébrique de  $\Delta(\mathbf{r})$  pour  $d > 2$ .

Pour  $d = 2$  et  $v = v_c$ , l'intégrale

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k})$$

diverge à  $\mathbf{k} = 0$  et donc le modèle gaussien ne peut pas décrire le point de transition  $T = T_c$  en dimension 2.

### 8.2.3 Le comportement critique

Bien que certaines propriétés du point de transition  $v = v_c$  soient un peu pathologiques, examinons le comportement de la fonction à deux points

$$\Delta(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{-i\lambda\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}),$$

pour  $d > 2$ , au point critique  $v = v_c$  quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Le calcul explicite de l'intégrale est présenté en section 8.4.3, mais le comportement peut être obtenu par des arguments simples.

Après le changement  $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}/\lambda$ , l'intégrale devient

$$\Delta(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \lambda^{2-d} \int d^d k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \lambda^{-2} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}/\lambda),$$

où maintenant les composantes  $k_\mu$  du vecteur  $\mathbf{k}$  varient dans l'intervalle  $-\lambda\pi \leq k_\mu \leq \lambda\pi$ .

À cause de la régularité de  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  pour  $\mathbf{k} \neq 0$ , on peut prendre la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  dans l'intégrant et les bornes d'intégration, et donc

$$\Delta(\lambda\mathbf{r}) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{\lambda^{2-d}}{2v_c a^2} \int \frac{d^d k}{k^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

L'intégrale a une propriété importante: elle n'est fonction que de  $r = |\mathbf{r}|$ . On en déduit

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{r=|\mathbf{r}| \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{r^{d-2}}.$$

La fonction à deux points a une décroissance algébrique et la longueur de corrélation est infinie.

De plus, asymptotiquement,  $\Delta(\mathbf{r})$  a une symétrie de rotation  $O(d)$  (celle de l'espace continu), plus étendue que les symétries discrètes du réseau (une propriété analogue a été obtenue pour la marche au hasard en section 3.3.6).

On suppose en général que la transformée de Fourier de la fonction à deux points à la température critique  $T = T_c$  se comporte, pour  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , comme

$$\Delta(\mathbf{k}) \underset{k \rightarrow 0}{\propto} 1/k^{2-\eta}, \quad (8.18)$$

ce qui correspond à un comportement à longue distance

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty}{\propto} 1/|\mathbf{r}|^{d-2+\eta}. \quad (8.19)$$

Ici, de la forme (8.17) de la fonction à deux points, on déduit

$$\eta = 0, \quad (8.20)$$

qui est la valeur gaussienne ou classique de l'exposant  $\eta$ .

### 8.2.4 Comportement au voisinage de $T_c$

Pour  $v < v_c$ , mais  $v_c - v \rightarrow 0$  et  $\mathbf{k}$  d'ordre  $(v_c - v)^{1/2}$ , le terme dominant de  $1/\Delta(\mathbf{k})$  est

$$2v_c - 2v\tilde{U}(\mathbf{k}) = 2(v_c - v) + 2v_c a^2 k^2 + O(k^4, (v - v_c)k^2), \quad (8.21)$$

et donc

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \sim \frac{1}{2} (v_c - v + v_c a^2 k^2)^{-1}.$$

À cause du développement (8.7), dans cette limite aussi  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$  a la symétrie de rotation  $O(d)$ , plus étendue que les symétries du réseau.

De plus, dans cette limite, la fonction à deux points a une forme d'Ornstein-Zernike ou de champ libre (voir section 8.4).

On en déduit que  $\Delta(\mathbf{r})$  décroît exponentiellement (équations (8.36,8.38)) avec le comportement asymptotique

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{r^{(d-1)/2}} e^{-r/\xi},$$

où la longueur de corrélation diverge pour  $T \rightarrow T_c$  comme

$$\xi \underset{v \rightarrow v_c}{\sim} a(1 - v/v_c)^{-1/2} \propto (T - T_c)^{-1/2}.$$

En général on postule

$$\xi(T) \propto (T - T_c)^{-\nu}. \quad (8.22)$$

On trouve ici  $\nu = 1/2$ , qui est la valeur gaussienne de l'exposant.

Dans le cadre restreint de la théorie gaussienne sur réseau, nous avons obtenu des comportements universels de la fonction à deux points à grande distance à  $T_c$  et près de  $T_c$  quand la longueur de corrélation est grande par rapport à l'échelle microscopique, ainsi que la singularité universelle de la longueur de corrélation.

Tous les comportements *universels* ainsi obtenus sont également ceux qu'on retrouvera dans l'approximation quasi-gaussienne (section 8.5), qu'on déduit des hypothèses générales de la théorie de Landau (section 8.7), ou qui apparaissent très généralement dans l'approximation de champ moyen (section 8.10).

### 8.3 Modèle gaussien et marche au hasard

Montrons, à titre d'exercice et parce qu'une telle propriété a des généralisations, comment la fonction à deux points gaussienne peut être reliée à un processus de marche au hasard, tel qu'il est défini en section 3.3.4.

Nous partons de l'expression (8.16):

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \left[ 2v_c - 2v\tilde{U}(\mathbf{k}) \right]^{-1},$$

que nous développons en puissances de  $v$ :

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2v_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{v}{v_c} \right)^n \tilde{U}^n(\mathbf{k}). \quad (8.23)$$

Inversant la représentation (8.5), nous remplaçons maintenant  $\tilde{U}(\mathbf{k})$  par sa transformée de Fourier

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} U(\mathbf{r}).$$

Alors,

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2v_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{v}{v_c} \right)^n \sum_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n} U(\mathbf{r}_1) \dots U(\mathbf{r}_n) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_n)}.$$

Nous introduisons maintenant un point initial  $\mathbf{q}_0$  arbitraire sur le réseau et changeons de variables, posant

$$\mathbf{r}_\ell = \mathbf{q}_\ell - \mathbf{q}_{\ell-1}, \quad 1 \leq \ell \leq n.$$

L'expression devient

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2v_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v}{v_c}\right)^n \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} U(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \dots U(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_0)}. \quad (8.24)$$

Nous avons déjà noté que la fonction  $U(\mathbf{r})$  a toutes les propriétés des fonctions de saut de la marche au hasard invariante par translation. Définissons alors le processus correspondant (équation (3.33)) par l'équation d'évolution

$$P_n(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}' \in \mathbb{Z}^d} U(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) P_{n-1}(\mathbf{q}'),$$

où  $P_n(\mathbf{q})$  est la probabilité pour le marcheur d'être au point  $\mathbf{q}$  au temps  $n$ , avec le point de départ  $\mathbf{q}_0$  au temps 0.

L'itération de cette équation donne

$$P_n(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-2}, \mathbf{q}_{n-1}} U(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{n-1}) U(\mathbf{q}_{n-1} - \mathbf{q}_{n-2}) \dots U(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0).$$

L'expression (8.24) peut donc s'écrire ( $\mathbf{q}_n \mapsto \mathbf{q}$ )

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2v_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v}{v_c}\right)^n \sum_{\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)}. \quad (8.25)$$

Le coefficient de  $v^n$  est donc une fonction génératrice des moments de la distribution au temps  $n$ . De façon générale, le comportement de la distribution  $P_n(\mathbf{q})$  pour  $n \rightarrow \infty$  est lié à la singularité de  $\tilde{\Delta}(\mathbf{k})$ , comme fonction de  $v$ , la plus proche de l'origine. Ici, comparant avec l'expression (8.23), on obtient directement

$$\tilde{U}^n(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)}.$$

On peut ensuite développer en puissances de  $\mathbf{k}$ . Par exemple, le second moment est le coefficient de  $\mathbf{k}^2$ :

$$na^2 \mathbf{k}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0))^2$$

et donc,

$$\sum_{\mathbf{q}} P_n(\mathbf{q}) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)_\alpha (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)_\beta = 2na^2 \delta_{\alpha\beta}.$$

Comme nous l'avons déjà démontré, la distribution asymptotique de  $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  est isotrope et  $(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2$  croît en moyenne linéairement avec le temps.

## 8.4 Modèle gaussien et intégrale de champ

Au chapitre 5, nous avons montré que les propriétés de longue distance de modèles sur réseau unidimensionnel, pouvaient être décrites, quand la longueur de corrélation diverge, par une intégrale de chemin. En dimension arbitraire, les propriétés universelles du modèle gaussien sur réseau peuvent être déduites d'une théorie statistique des champs (qui remplacent les configurations de spin) dans l'espace continu et isotrope.

Soit  $\sigma(x)$  un champ dans l'espace continu  $\mathbb{R}^d$  et  $H(x)$  un champ magnétique arbitraire. Nous considérons l'*intégrale de champ*, ou *intégrale fonctionnelle*, gaussienne

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\sigma(x)] \exp \left[ -\mathcal{S}(\sigma) + \int d^d x \sigma(x) H(x) \right]$$

avec

$$\mathcal{S}(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x \left[ \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \sigma(x))^2 + m^2 \sigma^2(x) \right], \quad (8.26)$$

( $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ ) où  $m > 0$  est un paramètre lié à la déviation à la température critique, comme nous le vérifions plus loin. La fonctionnelle  $\mathcal{S}(\sigma)$  est souvent appelée *hamiltonien* dans ce contexte (une dénomination empruntée à la théorie statistique des gaz classiques).

L'intégrale de champ généralise à  $d$  dimensions l'intégrale de chemin, et le symbole  $[d\sigma(x)]$  signifie qu'on intègre sur tous les champs  $\sigma(x)$ . Le cas gaussien correspond, dans le cadre de la théorie des interactions fondamentales, à une théorie de champs libres. La forme quadratique dans les champs (8.26) est alors appelée *action euclidienne* et le paramètre  $m$  est la masse de la particule associée au champ  $\sigma$ .

Comme dans le cas du réseau, quand cela s'avère nécessaire, nous définissons la limite de volume infini ou thermodynamique en partant d'un cube avec des conditions aux limites périodiques.

### 8.4.1 Maximum de l'intégrand et fonction à deux points

Le calcul de l'intégrale gaussienne est une généralisation simple du calcul de l'intégrale de chemin (5.9). On cherche d'abord le maximum de l'intégrand et donc le minimum de

$$\mathcal{S}(\sigma, H) = \mathcal{S}(\sigma) - \int d^d x \sigma(x) H(x). \quad (8.27)$$

Pour cela on pose

$$\sigma(x) = \sigma_c(x) + \varepsilon(x), \quad (8.28)$$

où la fonction  $\sigma_c(x)$  est déterminée par la condition que le terme linéaire en  $\varepsilon$  s'annule:

$$- \int d^d x \left[ \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu \sigma_c(x) \partial_\mu \varepsilon(x) + m^2 \sigma_c(x) \varepsilon(x) \right] + \int d^d x \varepsilon(x) H(x) = 0.$$

On intègre le terme linéaire en  $\partial_\mu \varepsilon(x)$  par parties (par rapport à  $x_\mu$ ):

$$\int d^d x \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu \sigma_c(x) \partial_\mu \varepsilon(x) = - \int d^d x \sum_{\mu=1}^d \varepsilon(x) (\partial_\mu)^2 \sigma_c(x).$$

Les termes tout intégrés s'annulent à cause des conditions aux limites périodiques. On trouve alors l'équation

$$(-\nabla_x^2 + m^2)\sigma_c(x) = H(x),$$

où  $\nabla_x^2$  est le laplacien à  $d$  dimensions:

$$\nabla_x^2 = \sum_{\mu} \partial_\mu^2.$$

La solution peut s'écrire

$$\sigma_c(x) = \int d^d y \Delta(x-y) H(y),$$

où  $\Delta(x-y)$  est aussi la fonction à deux points gaussienne en champ nul (équations (2.9,2.16)):

$$\langle \sigma(x)\sigma(y) \rangle_{H=0} = \Delta(x-y).$$

Elle satisfait

$$(-\nabla_x^2 + m^2)\Delta(x) = \delta(x),$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac, comme on le vérifie en appliquant  $-\nabla_x^2 + m^2$  à  $\sigma_c$ . Cette équation se résout par transformation de Fourier. Dans la limite du volume infini, on trouve

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{ik \cdot x} \tilde{\Delta}(k) \quad (8.29)$$

avec

$$\tilde{\Delta}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad (8.30)$$

comme on le vérifie en appliquant  $-\nabla_x^2 + m^2$  à  $\Delta(x)$  ( $\int d^d k e^{ik \cdot x} = (2\pi)^d \delta(x)$ ).

Enfin, la fonctionnelle (8.27) pour  $\sigma = \sigma_c$ , après une intégration par parties, prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\sigma_c, H) &= \int d^d x \sigma_c(x) \left[ -\frac{1}{2} \nabla_x^2 + \frac{1}{2} m^2 - H(x) \right] \sigma_c(x) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x \sigma_c(x) H(x) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y H(x) \Delta(x-y) H(y). \end{aligned} \quad (8.31)$$

### 8.4.2 Intégration gaussienne

On fait maintenant le changement de variable (8.28),  $\sigma(x) \mapsto \varepsilon(x)$ . La fonctionnelle (8.27) devient

$$\mathcal{S}(\sigma, H) = \mathcal{S}(\sigma_c, H) + \mathcal{S}(\varepsilon),$$

et donc

$$\mathcal{Z}(H) = e^{-\mathcal{S}(\sigma_c, H)} \int [d\varepsilon(x)] e^{-\mathcal{S}(\varepsilon)}.$$

L'intégrale gaussienne résiduelle sur  $\varepsilon(x)$  donne une constante,

$$\mathcal{Z}(0) = \int [d\varepsilon(x)] e^{-\mathcal{S}(\varepsilon)},$$

indépendante de  $H$ .

La fonction génératrice des fonctions de corrélation connexes est donc (équation (8.31))

$$\mathcal{W}(H) = \ln \mathcal{Z}(H) = \mathcal{W}(0) + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y H(x) \Delta(x-y) H(y). \quad (8.32)$$

En champ uniforme, la densité d'énergie libre devient

$$W(H) = \frac{1}{2} H^2 \int d^d x \Delta(x) = \frac{1}{2} H^2 \tilde{\Delta}(0) = \frac{1}{2} H^2 / m^2,$$

d'où l'on déduit la densité de potentiel thermodynamique

$$\mathcal{G}(M) = \frac{1}{2} m^2 M^2. \quad (8.33)$$

Comparant ces expressions avec la partie asymptotique universelle des expressions sur réseau, par exemple  $\mathcal{G}(M)$  avec l'expression (8.13), on identifie le paramètre  $m^2$ :

$$m^2 \sim 2(v_c - v) \propto T - T_c. \quad (8.34)$$

### 8.4.3 Calcul explicite de la fonction à deux points

Nous calculons maintenant la fonction à deux points dans l'espace continu explicitement.

À  $T_c$ , il faut évaluer

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, nous utilisons l'identité

$$\frac{1}{k^2} = \int_0^\infty dt e^{-tk^2}.$$

L'intégrale sur  $k$  devient alors gaussienne. Après intégration

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{d/2}} e^{-r^2/4t}.$$

Après le changement de variables  $u = r^2/4t$ , l'intégration sur  $u$  donne

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \frac{1}{r^{d-2}}. \quad (8.35)$$

Pour la fonction  $1/(k^2 + m^2)$  la stratégie est la même. On trouve alors

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{d/2}} e^{-r^2/4t - m^2 t} = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} K_{1-d/2}(mr),$$

où  $K_\nu(r)$  est appelée fonction de Bessel de troisième espèce. Cette fonction peut être évaluée pour  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  par la méthode du col. Le col  $t_c$  est donné par

$$m^2 - \frac{r^2}{4t_c^2} = 0, \Rightarrow t_c = r/2m.$$

Développant autour du col et faisant l'intégrale gaussienne, on obtient

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2m} \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{(d-1)/2} \frac{e^{-mr}}{r^{(d-1)/2}}. \quad (8.36)$$

La constante  $\xi = 1/m$  qui caractérise la décroissance exponentielle de la fonction à deux points est la longueur de corrélation.

*Remarque.* Pour avoir une idée de la classe des champs typiques qui contribuent à l'intégrale fonctionnelle, on peut évaluer la fonction à deux points dans la limite des points coïncidants:

$$\langle \sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y}) \rangle_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \rightarrow 0} \sim \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}, m = 0) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2}}.$$

On voit que cette classe de fonctions est si singulière que la valeur moyenne de  $\sigma^2(\mathbf{x})$  diverge, et ce d'autant plus vite que la dimension d'espace  $d$  est plus grande. Cette singularité de la mesure gaussienne correspondant à l'action euclidienne (8.26) ne manquera pas de poser des problèmes par la suite.

#### 8.4.4 Réseau et limite continue

Nous étudions maintenant comment, quand la longueur de corrélation est grande, la fonction à deux points sur le réseau converge, à grande distance, vers la fonction du continu.

À  $T_c$  la fonction sur le réseau s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \int_{|k_\mu| \leq \pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{2} \int_{|k_\mu| \leq \pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_0^\infty dt e^{-t[v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})]}.\end{aligned}\quad (8.37)$$

Si nous restreignons l'intégrale sur  $t$  à un intervalle fini  $t < t_{\max}$ , la fonction

$$\int_0^{t_{\max}} dt e^{-t[v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})]}$$

est analytique dans une bande et suivant l'analyse de la section A1.3.2, sa transformée de Fourier décroît exponentiellement pour  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ . Donc le voisinage de  $t = \infty$ , qui engendre la singularité à  $\mathbf{k} = 0$ , donne la contribution dominante à grande distance. On se retrouve alors dans la situation de la méthode du col. Le col se trouve à  $\mathbf{k} = 0$ . On développe donc  $v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})$  pour  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , et le terme dominant est proportionnel à  $k^2$ . De plus on peut intégrer sans restriction sur  $\mathbf{k}$ . On retrouve donc le résultat du continu (8.35).

L'analyse se généralise à la situation  $|v - v_c| \ll 1$ . Après le changement de variables  $\mathbf{k} = (1 - v/v_c)^{1/2} \mathbf{k}'/a$  et donc (équation (8.21))

$$2v_c - 2v\tilde{U}(\mathbf{k}) = 2(v_c - v)(1 + k'^2) + O((v_c - v)^2),$$

l'intégrale (8.37) devient

$$\Delta(\mathbf{r}) \underset{v \rightarrow v_c}{\sim} (1 - v/v_c)^{d/2-1} \frac{1}{2v_c a^d} \int_{|k_\mu| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/\xi}}{1 + k^2}, \quad (8.38)$$

où nous avons posé

$$\Lambda = \pi a (1 - v/v_c)^{-1/2}, \quad \xi = a (1 - v/v_c)^{-1/2}. \quad (8.39)$$

Quand  $v \rightarrow v_c$ , la borne  $\Lambda \rightarrow \infty$  et on peut donc intégrer sans restrictions sur les composantes du vecteur  $\mathbf{k}$ . Le calcul devient alors identique au calcul du continu et  $\xi$  s'identifie bien à la longueur de corrélation.

## 8.5 Approximation quasi-gaussienne

En dessous du point de transition, le modèle gaussien n'est certainement plus valable puisque la forme quadratique (8.11) n'est plus positive et donc l'intégrale gaussienne (8.10) n'est plus définie. On remarque aussi que le potentiel thermodynamique dans cette limite quadratique n'est plus borné inférieurement.

Cependant, même dans le cadre du théorème de la limite centrale, la distribution gaussienne n'est qu'asymptotique. L'analyse du modèle gaussien montre qu'en dessous du point de transition, les corrections à la distribution gaussienne, c'est à dire les termes de degré plus élevé dans la distribution effective de spin, même si elles sont petites, ne peuvent plus être négligées.

*Modèle effectif.* Pour aller au delà du modèle gaussien, nous considérons donc une distribution en chaque site plus générale

$$\rho(\sigma) = e^{-B(\sigma)}$$

où, suivant l'analyse en fin de section 7.1.2 (cf. équation (7.15)), nous choisissons une fonction  $B(\sigma)$  de la forme (7.11), c'est le potentiel thermodynamique d'un modèle à un site. Nous avons montré qu'une telle fonction est analytique et nous paramétrons son développement à  $\sigma = 0$  sous la forme

$$B(\sigma) = \sum_{p=1} \frac{b_{2p}}{2p!} \sigma^{2p}, \quad b_2 > 0. \quad (8.40)$$

Nous supposons aussi  $b_4 > 0$  puisque nous voulons étudier des transitions continues.

La fonction génératrice des fonctions de corrélation s'écrit alors

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_i d\sigma_i \exp \left[ -\mathcal{S}(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i \right] \quad (8.41)$$

avec

$$\mathcal{S}(\sigma) = - \sum_{ij} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i B(\sigma_i). \quad (8.42)$$

*Approximation quasi-gaussienne.* Comme l'intégrale (8.41) n'est plus gaussienne, elle ne peut plus être calculée exactement. Mais puisque  $B(\sigma)$  est analytique, nous pouvons évaluer l'intégrale sur les spins par la méthode du col. Si nous supposons que les fluctuations autour du col restent faibles, nous pouvons approximer l'intégrale par la contribution dominante, une approximation qu'on peut qualifier de quasi-gaussienne. Une telle hypothèse implique, en particulier, que les spins  $\sigma_i$  sont la somme d'une valeur moyenne  $M_i$  et d'une partie fluctuante faiblement corrélée. Cette hypothèse va au-delà d'une idée de théorème de

la limite centrale en ce sens que la valeur moyenne  $M_i$  n'est plus liée seulement à la distribution en chaque site mais est aussi un résultat des interactions.

*Méthode du col.* Le maximum de l'intégrand dans l'intégrale (8.41) est donné par une solution de l'équation de col

$$H_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \sigma_i} \quad (8.43)$$

et, à l'ordre dominant,

$$\mathcal{W}(H) = -\mathcal{S}(\sigma) + \sum_i \sigma_i H_i,$$

où  $\sigma$  est une fonction de  $H$  à travers (8.43).

Comme nous l'avons déjà noté,  $\mathcal{W}(H)$  est la transformée de Legendre de  $\mathcal{S}(\sigma)$ . En conséquence, le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$ , transformé de Legendre de  $\mathcal{W}(H)$ , est simplement

$$\Gamma(M) = \mathcal{S}(M) = - \sum_{ij} V_{ij} M_i M_j + \sum_i B(M_i). \quad (8.44)$$

Dans le cas des modèles invariants par translation que nous étudions, l'aimantation en champ uniforme est uniforme. La densité de potentiel thermodynamique est alors

$$\mathcal{G}(M) = \Omega^{-1} \Gamma(M) = -vM^2 + B(M), \quad (8.45)$$

où  $v$  est le paramètre (8.3).

L'équation d'état, la relation entre champ magnétique, aimantation et température, s'en déduit:

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M} = -2vM + B'(M). \quad (8.46)$$

Nous retrouvons exactement les expressions (7.20,7.21) du modèle en dimension infinie, et la discussion du comportement universel des quantités homogènes est identique à celle présentée en sections 7.2,7.3. Cependant, dans le cadre de l'approximation quasi-gaussienne, et à la différence du modèle en dimension infinie, nous pouvons étudier aussi le comportement des fonctions de corrélation à la transition.

## 8.6 La fonction à deux points: Universalité

*Divergence de la longueur de corrélation et transition continue.* Une transition continue est caractérisée par la propriété

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{(\partial M)^2} \right|_{M=0} = 0 \quad (8.47)$$

et donc la divergence de la susceptibilité  $\chi = \partial^2 W / (\partial H)^2$  en champ nul. Par ailleurs,

$$\frac{\partial W(H)}{\partial H} = \left. \frac{\partial W}{\partial H_i} \right|_{H_i=H}$$

et donc

$$\frac{\partial^2 W(H)}{(\partial H)^2} = \sum_j \left. \frac{\partial^2 W}{\partial H_i \partial H_j} \right|_{H_i=H} = \sum_j W_{ij}^{(2)}$$

où  $W_{ij}^{(2)}$  est la fonction à deux points connexe. À cause de l'invariance par translation en champ uniforme

$$W_{ij}^{(2)} = W^{(2)}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

où  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$  sont les vecteurs joignant les points  $i$  et  $j$  à l'origine. Donc

$$\frac{\partial^2 W(H)}{(\partial H)^2} = \sum_{\mathbf{r}} W^{(2)}(\mathbf{r}).$$

Nous introduisons maintenant les transformées de Fourier de la fonctions connexe et de la fonction de vertex

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{r}} W^{(2)}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \\ \widetilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{r}} \Gamma^{(2)}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\partial^2 W(H)}{(\partial H)^2} = \sum_{\mathbf{r}} W^{(2)}(\mathbf{r}) = \widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k} = 0) = 1/\widetilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k} = 0), \quad (8.48)$$

où la dernière équation découle de l'équation (6.23).

La somme  $\sum_{\mathbf{r}} W^{(2)}(\mathbf{r})$  ne diverge que si la longueur de corrélation diverge. La condition de transition continue (8.47) entraîne donc la divergence de la longueur de corrélation en aimantation nulle.

*La fonction à deux points.* De façon générale, de l'équation (8.44) on déduit la relation entre champ magnétique et aimantation locales

$$H_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial M_i} = -2 \sum_j V_{ij} M_j + B'(M_i). \quad (8.49)$$

En dérivant à nouveau, on obtient la fonction de vertex à deux points à aimantation fixée

$$\Gamma_{ij}^{(2)} \equiv \left. \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_j} \right|_{M_i=M} = -2V_{ij} + B''(M)\delta_{ij},$$

ou en notation plus explicite

$$\Gamma^{(2)}(\mathbf{r}) = -2V(\mathbf{r}) + B''(M)\delta(\mathbf{r}). \quad (8.50)$$

Sa transformation de Fourier est donnée par

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = B''(M) - 2\tilde{V}(\mathbf{k}). \quad (8.51)$$

La transformée de Fourier de la fonction à deux points connexe s'en déduit (équation (6.23)):

$$\widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) = 1/\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = [B''(M) - 2\tilde{V}(\mathbf{k})]^{-1}. \quad (8.52)$$

En champ nul, au-dessus de  $T_c$ , l'aimantation s'annule et l'on retrouve la forme (8.16) du *modèle gaussien*

$$\widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}[v_c - \tilde{V}(\mathbf{k})]^{-1}, \quad (8.53)$$

où  $v_c = b_2/2$ . Si la transition est du second ordre, cette expression reste valable jusqu'à  $v = v_c$  ( $T = T_c$ ) où la longueur de corrélation diverge parce la dérivée seconde de  $\Gamma(M)$  s'annule, et c'est la source de propriétés d'universalité spatiales. En particulier, on retrouve les valeurs gaussiennes ou classiques des exposants (définitions (8.18,8.22)),  $\eta = 0$ ,  $\nu = 1/2$ .

Plus généralement pour  $|v - v_c|$ ,  $|\mathbf{k}|$ ,  $M \ll 1$  (ce qui implique aussi champ magnétique faible), dans la paramétrisation (7.11), on trouve

$$\widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) \sim [2v_c + \frac{1}{2}b_4M^2 - 2v(1 - a^2k^2)]^{-1}. \quad (8.54)$$

La fonction de corrélation garde une forme d'Ornstein-Zernike ou de champ libre. Les équations (8.38,8.39) se généralisent immédiatement, et la longueur de corrélation pour  $M \neq 0$  s'en déduit:

$$\xi^{-2} = \frac{1}{2v_c a^2} (2v_c - 2v + \frac{1}{2}b_4M^2). \quad (8.55)$$

En champ magnétique nul, utilisant en dessous de  $T_c$  l'expression (7.25) de l'aimantation spontanée, on trouve

$$\begin{aligned} \xi_+^{-2} &= a^{-2} (1 - v/v_c) && \text{pour } T > T_c, \\ \xi_-^{-2} &= 2a^{-2} (v/v_c - 1) && \text{pour } T < T_c. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Introduisant en général aussi un exposant de longueur de corrélation  $\nu'$  pour  $T \rightarrow T_{c-}$ , et définissant les amplitudes critiques  $f_{\pm}$  pour  $|T - T_c| \rightarrow 0$  par

$$\xi_+ \sim f_+ (T - T_c)^{-\nu'}, \quad \xi_- \sim f_- (T_c - T)^{-\nu'}, \quad (8.57)$$

on déduit de la relations (8.56) la valeur quasi-gaussienne de l'exposant

$$\nu' = \frac{1}{2},$$

et le rapport d'amplitudes

$$f_+ / f_- = \sqrt{2}. \quad (8.58)$$

Notons qu'on définit parfois la longueur de corrélation à partir du second moment  $\xi_1^2$  de  $W_{ij}^{(2)}$  qui est proportionnel à  $\xi^2$ , et qui a donc les mêmes propriétés universelles

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = \left[ \widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k}) \right]^{-1} \sim \tilde{\Gamma}^{(2)}(0) (1 + k^2 \xi_1^2 + Ok^2). \quad (8.59)$$

Il y a encore d'autres rapports d'amplitudes universels. Par exemple, si pour  $v = v_c$ ,  $H \rightarrow 0$ , on pose

$$\chi \sim C^c / H^{2/3}, \Rightarrow 3C^c = (6/b_4)^{1/3},$$

et en champ nul

$$M \sim M_0(v - v_c)^{1/2}, \Rightarrow M_0^2 = 12/b_4,$$

on trouve que la combinaison

$$R_\chi = C^+ M_0^2 (3C^c)^{-3} = 1$$

et est donc universelle.

## 8.7 Approximation quasi-gaussienne et théorie de Landau

Les résultats universels que nous avons obtenu dans le cadre de l'approximation quasi-gaussienne découlent également de la théorie de Landau que nous rappelons ici. La théorie de Landau est basée sur des hypothèses très générales concernant les propriétés des systèmes avec interactions à courte portée, dont nous avons utilisé certains aspects pour justifier l'approximation quasi-gaussienne.

Nous supposons qu'en champ nul le système physique est invariant par translation d'espace. La théorie de Landau prend alors la forme de plusieurs conditions de régularité du potentiel thermodynamique fonction de la température et de l'aimantation locale (plus généralement d'un paramètre d'ordre local):

(i) Le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$  est développable en puissances de  $M$  autour  $M = 0$ .

(ii) Les coefficients du développement sont des fonctions régulières de la température pour  $T$  proche de  $T_c$ , la température à laquelle le coefficient de  $M^2$  s'annule.

(iii) Considérons le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$  en aimantation variable dans l'espace (engendré par un champ magnétique variable). Nous introduisons la transformée de Fourier de l'aimantation locale  $M(\mathbf{r})$ :

$$M(\mathbf{r}) = \int d^d k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{M}(\mathbf{k}).$$

Nous développons alors le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$  en puissances de  $\tilde{M}(\mathbf{k})$  (cf. les définitions sur réseau (6.19,6.20))

$$\begin{aligned} \Gamma(M) &= \sum_n \frac{1}{n!} \int d^d k_1 \dots d^d k_n \tilde{M}(\mathbf{k}_1) \dots \tilde{M}(\mathbf{k}_n) \\ &\quad \times (2\pi)^d \delta^d \left( \sum_i \mathbf{k}_i \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n), \end{aligned}$$

où les fonctions  $\delta$  de Dirac sont la conséquence directe de l'invariance par translation qui implique que la somme des variables de Fourier doit s'annuler.

Alors les fonctions de vertex  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ , qui apparaissent dans ce développement, sont régulières à  $\mathbf{k}_i = 0$ .

Notons enfin une condition nécessaire pour que la transition soit du second ordre: il faut que  $\tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0)$  soit positif.

Ces conditions sont motivées par quelques hypothèses générales: les spins effectifs sont des moyennes de variables microscopiques faiblement couplées dont les fluctuations peuvent être traitées de façon perturbative. Ceci conduit à un découplage des différentes échelles de physique, et à la conclusion que les phénomènes critiques peuvent être décrits, à l'ordre dominant, en termes d'un nombre fini de variables macroscopiques effectives, comme dans la théorie du champ moyen.

Ces remarques rendent encore un plus troublante la constatation empirique que les résultats universels du champ moyen sont en désaccord quantitatif (et parfois même qualitatif) avec les résultats expérimentaux et ceux, exacts ou numériques, provenant de modèles sur réseau. Un examen des corrections principales à la théorie gaussienne va nous fournir quelques indications sur les origines de cette difficulté.

## 8.8 Symétries continues et modes de Goldstone

Si la variable initiale de spin  $S_i$  est un vecteur à  $N$  composantes, et si à la fois l'interaction et la distribution de spin ont une symétrie continue (associée à un groupe de Lie compact), les résultats précédents restent largement inchangés. Cependant, l'existence de plusieurs fonctions et longueurs de corrélation quand l'aimantation est différente de zéro, induit quelques propriétés nouvelles. En particulier en champ nul, à toute température au dessous de  $T_c$ , certaines longueurs de corrélation, associées à des modes appelés *modes de Goldstone* divergent.

Nous illustrons ces remarques par l'exemple de modèles ayant une symétrie orthogonale  $O(N)$  ( $N > 1$ ), c'est à dire invariant par le groupe des rotations-réflexions de l'espace à  $N$  dimensions agissant sur les  $N$  composantes du vecteur  $S$ . Nous considérons ci-dessous  $N$  arbitraire et sans lien avec la dimension  $d$  de l'espace.

### 8.8.1 Modes de Goldstone: symétrie $O(N)$

Rappelons d'abord brièvement, dans ce contexte, la généralité du concept de modes de Goldstone, dans la phase ordonnée, en champ nul.

La symétrie orthogonale  $O(N)$  implique que la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(\mathbf{M})$  en champ uniforme n'est qu'une fonction du carré du vecteur aimantation, et donc peut s'écrire ( $|\mathbf{M}| = M$ )

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}) = G(M^2/2).$$

En conséquence la relation entre composantes  $H_\alpha$  et  $M_\alpha$  du champ magnétique et de l'aimantation, respectivement, prend la forme

$$H_\alpha = M_\alpha G'(M^2/2), \quad (8.60)$$

et donc en module

$$|\mathbf{H}| \equiv H = M G'(M^2/2). \quad (8.61)$$

La fonction à deux points connexe est maintenant une matrice

$$W_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle S_\alpha(\mathbf{r}) S_\beta(\mathbf{r}') \rangle_{\text{conn.}}$$

La fonction de vertex, inverse de la fonction à deux points, en représentation de Fourier, à argument nul, est donnée par

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k} = 0) = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial M_\alpha \partial M_\beta} = M_\alpha M_\beta G''(M^2/2) + \delta_{\alpha\beta} G'(M^2/2). \quad (8.62)$$

La matrice  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k} = 0)$  a deux sous-espaces propres correspondant au vecteur  $M_\alpha$  et aux  $N - 1$  vecteurs  $X_\alpha$  orthogonaux à  $M_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(0) M_\beta &= M_\alpha [M^2 G''(M^2/2) + G'(M^2/2)], \\ \sum_{\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(0) X_\beta &= X_\alpha G'(M^2/2). \end{aligned}$$

Notant les valeurs propres  $\tilde{\Gamma}_L^{(2)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_T^{(2)}$ , respectivement, nous trouvons

$$\tilde{\Gamma}_L^{(2)}(0) = M^2 G''(M^2/2) + G'(M^2/2), \quad (8.63)$$

$$\tilde{\Gamma}_T^{(2)}(0) = G'(M^2/2) = H/M, \quad (8.64)$$

où dans (8.64) nous avons utilisé l'équation (8.61).

Les valeurs propres de la fonction à deux points connexe  $\widetilde{W}^{(2)}(\mathbf{k} = 0)$  sont les inverses de celles de  $\widetilde{\Gamma}^{(2)}$ . La valeur propre transverse de la fonction à deux points connexe à argument nul est donc

$$\widetilde{W}_T^{(2)}(k = 0) = \left[ \widetilde{\Gamma}_T^{(2)}(k = 0) \right]^{-1} = M/H. \quad (8.65)$$

*Modes de Goldstone.* Au dessus de  $T_c$ , l'aimantation s'annule linéairement en  $H$  et la fonction à deux points a une limite finie pour  $H \rightarrow 0$ . Au contraire, en dessous de  $T_c$ , quand  $H$  tend vers zéro  $M$  tend vers l'aimantation spontanée qui est non nulle, et donc la fonction à deux points transverse diverge. Ceci implique la divergence de la longueur de corrélation transverse correspondant à  $N - 1$  modes appelés *modes de Goldstone* (des particules de masse nulle au sens de la théorie des interactions fondamentales).

*Autre point de vue.* Ce résultat peut aussi être obtenu de la manière suivante. En champ nul, au-dessous de  $T_c$ , l'aimantation est non nulle alors que le potentiel est symétrique. Si un vecteur  $\mathbf{M}$  correspond à un minimum, tout vecteur déduit de  $\mathbf{M}$  par une rotation (une transformation orthogonale), correspond aussi à un minimum. Cela entraîne que le potentiel thermodynamique, par symétrie, a une sphère de minima  $|\mathbf{M}| = M$ . Une rotation infinitésimale correspond à l'addition à  $\mathbf{M}$  d'un vecteur tangent à la sphère et donc orthogonal à  $\mathbf{M}$ . Appelons  $\mathbf{X}$  un tel vecteur,  $|\mathbf{X}| \ll 1$ . Alors, développant la condition d'extremum au premier ordre en  $\mathbf{X}$ , nous obtenons la condition

$$0 = \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{M} + \mathbf{X})}{\partial M_\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial^2 \mathcal{G}(\mathbf{M})}{\partial M_\alpha \partial M_\beta} X_\beta.$$

Nous retrouvons les  $N - 1$  vecteurs propres de valeur propre nulle, correspondant aux modes de Goldstone.

*Note mathématique.* De façon plus générale, considérons un modèle ayant une symétrie correspondant à un groupe continu (groupe de Lie)  $\mathfrak{G}$ , et tel que cette symétrie soit brisée spontanément par une valeur moyenne non-nulle  $\mathbf{M}$  du paramètre d'ordre. Soit  $\mathfrak{H}$  le sous-groupe de  $\mathfrak{G}$  qui laisse le vecteur  $\mathbf{M}$  invariant (le groupe de symétrie résiduel). Dans l'exemple précédent,  $\mathfrak{G} \equiv O(N)$  et  $\mathfrak{H} \equiv O(N - 1)$ . Enfin, soit  $g$  le nombre de générateurs de l'algèbre de Lie de  $\mathfrak{G}$  et  $h$  celui de  $\mathfrak{H}$ . Une généralisation simple de l'argument précédent montre qu'il existe  $g - h$  modes de Goldstone, associés aux générateurs de  $\mathfrak{G}$  qui ne sont pas dans  $\mathfrak{H}$ . Dans l'exemple orthogonal

$$g = \frac{1}{2}N(N - 1), \quad h = \frac{1}{2}(N - 1)(N - 2) \Rightarrow g - h = N - 1.$$

### 8.8.2 Approximation quasi-gaussienne

Il est facile d'examiner les propriétés de l'approximation quasi-gaussienne dans ce cas plus général. Le potentiel thermodynamique a la même structure générale que précédemment, à la différence près que l'aimantation locale  $\mathbf{M}_i$  est maintenant un vecteur à  $N$  composantes et que le potentiel thermodynamique est invariant par les transformations orthogonales agissant sur le vecteur  $\mathbf{M}_i$ .

L'invariance par le groupe  $O(N)$  implique que le potentiel thermodynamique s'exprime en termes de produits scalaires et donc peut s'écrire

$$\Gamma(\mathbf{M}) = - \sum_{ij} V_{ij} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j + \sum_i \mathcal{B}(\mathbf{M}_i^2), \quad (8.66)$$

où la fonction  $\mathcal{B}$  est une fonction développable de  $M^2$  avec des propriétés semblables à la fonction (7.11):

$$\mathcal{B}(X) = \frac{b_2}{2} X + \frac{b_4}{4!} X^2 + \dots \text{ avec } b_2 > 0,$$

où l'hypothèse de transition continue implique aussi  $b_4 > 0$ .

*Equation d'état.* En champ uniforme, la densité de potentiel thermodynamique s'écrit alors

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}) = -vM^2 + \mathcal{B}(M^2).$$

L'équation d'état s'en déduit:

$$H_\alpha = \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{M})}{\partial M_\alpha} = M_\alpha (-2v + \mathcal{B}'(M^2)).$$

Prenons le module des deux membres, on obtient une forme analogue à la forme (7.24):

$$H = M(-2v + \mathcal{B}'(M^2)), \quad (8.67)$$

où  $H$ ,  $M$  sont maintenant les longueurs des vecteurs  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$ .

La discussion de l'existence d'une transition de phase continue à  $v_c = b_2/2$  et des propriétés universelles correspondantes de l'équation d'état est alors en tout point identique à la discussion déjà donnée en section 7.3 dans le cas de la symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ .

*Fonction à deux points.* Dérivant une fois l'expression (8.66), on trouve

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_{\alpha,i}} = -2 \sum_j V_{ij} M_{\alpha,j} + 2M_{\alpha,i} \mathcal{B}'(\mathbf{M}_i^2), \quad (8.68)$$

où  $M_{\alpha,i}$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) sont les composantes du vecteur aimantation  $\mathbf{M}_i$ .

La dérivée de l'équation (8.68) donne, pour  $\mathbf{M}$  uniforme, la fonction de vertex, inverse de la fonction connexe à deux points,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta,ij}^{(2)} &= \left. \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{M})}{\partial M_{\alpha,i} \partial M_{\beta,j}} \right|_{\mathbf{M}_i = \mathbf{M}} \\ &= (-2V_{ij} + 2\delta_{ij} \mathcal{B}'(M^2)) \delta_{\alpha\beta} + 4\delta_{ij} M_\alpha M_\beta \mathcal{B}''(M^2).\end{aligned}\quad (8.69)$$

Après transformation de Fourier

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k}) = (-2\tilde{V}(\mathbf{k}) + 2\mathcal{B}'(M^2)) \delta_{\alpha\beta} + 4M_\alpha M_\beta \mathcal{B}''(M^2).\quad (8.70)$$

La fonction  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k})$  reste une matrice dans l'espace des composantes vectorielles, et la fonction de corrélation connexe  $\tilde{W}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k})$  son inverse au sens des matrices.

Introduisons un vecteur unité le long de la direction de l'aimantation:

$$\tilde{\mathbf{M}} = M\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}^2 = 1.$$

La matrice  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}$  a deux sous-espaces propres correspondant au vecteur  $\mathbf{u}$  et au sous-espace orthogonal à  $\mathbf{u}$ . La fonction (8.69) peut alors être décomposée en parties transverse et longitudinale:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)} = u_\alpha u_\beta \tilde{\Gamma}_L^{(2)} + (\delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) \tilde{\Gamma}_T^{(2)},\quad (8.71)$$

où  $\tilde{\Gamma}_L^{(2)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_T^{(2)}$  sont les deux valeurs propres, respectivement. Elles sont données par

$$\tilde{\Gamma}_L^{(2)}(\mathbf{k}) = 2\mathcal{B}'(M^2) + 4M^2 \mathcal{B}''(M^2) - 2\tilde{V}(\mathbf{k}),\quad (8.72a)$$

$$\tilde{\Gamma}_T^{(2)}(\mathbf{k}) = 2\mathcal{B}'(M^2) - 2\tilde{V}(\mathbf{k}).\quad (8.72b)$$

Les expressions (8.72a) et (8.54) sont similaires. Utilisant l'équation (8.67), on peut récrire

$$\tilde{\Gamma}_T^{(2)}(\mathbf{k}) = H/M + 2 \left[ \tilde{V}(0) - \tilde{V}(\mathbf{k}) \right].\quad (8.73)$$

Ce résultat est clairement cohérent avec le résultat général (8.64). Comme  $\tilde{\Gamma}_L^{(2)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_T^{(2)}$  sont les valeurs propres de la matrice  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ , la matrice des fonctions connexes a comme valeurs propres les inverses

$$\tilde{W}_L^{(2)}(\mathbf{k}) = \left[ \tilde{\Gamma}_L^{(2)}(\mathbf{k}) \right]^{-1}, \quad \tilde{W}_T^{(2)}(\mathbf{k}) = \left[ \tilde{\Gamma}_T^{(2)}(\mathbf{k}) \right]^{-1}.$$

À toute température  $T < T_c$ , le rapport  $H/M$  tend vers zéro pour  $H \rightarrow 0$ . Cette équation montre alors qu'en champ nul dans la phase ordonnée, la fonction de corrélation à deux points transverse diverge comme  $1/k^2$  pour  $k \rightarrow 0$ , ce qui cohérent avec le résultat général de la section 8.8 qui implique l'existence de  $N - 1$  modes de Goldstone.

## 8.9 Corrections à l'approximation quasi-gaussienne

Pour décrire la phase de basse température, il a été nécessaire d'aller au delà du modèle gaussien. Mais l'approximation quasi-gaussienne n'est justifiée que si la méthode du col est justifiée. Formellement cette condition semble réalisée si tous les coefficients  $b_{2p}$  sauf le coefficient  $b_2$  du terme quadratique, du développement (7.11) sont "petits".

Il faut cependant que les corrections inévitables au résultat de l'ordre dominant ne changent que les coefficients du développement du potentiel thermodynamique, sans affecter ses propriétés de régularité.

C'est ce que nous voulons vérifier en calculant les premières corrections à la dérivée seconde de la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}''(M)$  à aimantation nulle, c'est à dire dans la phase désordonnée au-dessus de  $T_c$  ( $v < v_c$ ), et en champ nul.

Nous déterminons d'abord la valeur de  $v$  pour laquelle  $\mathcal{G}''(0)$  s'annule, de façon à trouver la première correction à  $v_c$  et donc à la température critique. La valeur  $v_c$  n'étant pas universelle, cette correction ne joue pas de rôle. Nous en déduisons ensuite la première correction au comportement de  $\mathcal{G}''(0)$ , qui est aussi l'inverse de la susceptibilité magnétique  $\chi$  en champ nul, pour  $v \rightarrow v_c$ , ce qui est le résultat intéressant.

### 8.9.1 Calcul de la correction

Dans la phase désordonnée, en champ nul, l'aimantation  $M = \langle \sigma \rangle$  s'annule et le col dominant est juste  $\sigma = 0$ . La première correction à la méthode du col est alors aussi la première correction au modèle gaussien.

La dérivée seconde du potentiel thermodynamique est aussi l'inverse de la fonction à deux points connexe en représentation de Fourier à argument nul. La première correction au résultat gaussien est obtenue en développant et en calculant la correction d'ordre  $b_4$ . De plus, comme l'aimantation est nulle, la fonction à deux points connexe est égale à la fonction à deux points complète. On peut donc utiliser le résultat général (2.27) avec  $\lambda \equiv b_4$

$$W_{ij}^{(2)} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \Delta_{ij} - \frac{1}{2} b_4 \sum_k \Delta_{ik} \Delta_{kk} \Delta_{kj} + O(b_4^2).$$

À cause de l'invariance par translation,  $\Delta_{kk}$  est indépendant de  $k$ :

$$\Delta_{kk} \equiv \Delta(\mathbf{r} = 0).$$

L'inverse de la fonction à deux points connexe (au sens des matrices) est la fonction de vertex  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  (équation (6.17)). On trouve ici

$$\Gamma_{ij}^{(2)} = \Delta_{ij}^{-1} + \frac{1}{2} b_4 \Delta(\mathbf{r} = 0) \delta_{ij} + O(b_4^2) = \Delta_{ij}^{-1} + \frac{1}{2} b_4 \delta_{ij} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(\mathbf{p}) + O(b_4^2)$$

ou, en représentation de Fourier,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}b_4 \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{p})} + O(b_4^2). \quad (8.74)$$

Le coefficient de  $M^2$  dans le développement de la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$ , qui est aussi l'inverse de la susceptibilité magnétique en champ nul (cf. aussi l'équation (6.17)), est donné par

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(M=0) &= \left. \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{(\partial M)^2} \right|_{M=0} = \sum_j \Gamma_{ij}^{(2)} = \tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}=0) \\ &= -2v + b_2 + \frac{b_4}{2(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{p})} + O(b_4^2), \end{aligned} \quad (8.75)$$

où nous avons introduit la fonction (8.4).

Alternativement, on peut se servir du résultat général (6.27), qui donne la première correction de la méthode du col, et qui ici prend la forme

$$\Gamma(M) = - \sum_{ij} V_{ij} M_i M_j + \sum_i B(M_i) + \frac{1}{2} \text{tr} \ln [-2V_{ij} + B''(M_i)\delta_{ij}]. \quad (8.76)$$

Si  $M$  est constant, la matrice  $-2V_{ij} + B''(M)\delta_{ij}$ , à cause de l'invariance par translation, se diagonalise par transformation de Fourier (équation (8.51)). On obtient alors

$$\mathcal{G}(M) = -vM^2 + B(M) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left( -2\tilde{V}(\mathbf{p}) + B''(M) \right)$$

et pour la dérivée seconde à  $M=0$ :

$$\chi^{-1}(M=0) = \mathcal{G}''(0) = -2v + b_2 + \frac{b_4}{2(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{p})} + O(b_4^2), \quad (8.77)$$

ce qui coïncide avec le résultat (8.75).

### 8.9.2 Discussion

La condition de criticalité est maintenant

$$\mathcal{G}''(0) = -2v + b_2 + \frac{b_4}{2(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{b_2 - 2v\tilde{U}(\mathbf{p})} + O(b_4^2) = 0, \quad (8.78)$$

où la paramétrisation (8.5) a été utilisée. Le premier effet du terme correctif est de modifier la valeur critique  $v_c$ , et donc la température critique. Dans le terme

d'ordre  $b_4$  nous pouvons remplacer  $v_c$  par  $b_2/2$ , sa valeur à l'ordre dominant, et l'équation devient

$$2v_c = b_2 + \frac{b_4}{2b_2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{1 - \tilde{U}(\mathbf{p})} + O(b_4^2),$$

Pour  $\mathbf{p} \rightarrow 0$  (équation (8.7)):

$$1 - \tilde{U}(\mathbf{p}) \sim a^2 p^2.$$

Nous notons de nouveau le caractère pathologique de la dimension  $d = 2$  où l'intégrale diverge à  $\mathbf{p} = 0$ . Les transitions de phase continue en dimension 2 ne peuvent pas être décrites par le modèle gaussien, et donc gaussien perturbé.

Nous exprimons maintenant  $\mathcal{G}''(0)$  en terme de cette nouvelle valeur de  $v_c$ . Pour cela nous soustrayons l'équation (8.78) de (8.75) et trouvons

$$\begin{aligned} \mathcal{G}''(0) &= 2(v_c - v) + \frac{b_4}{2b_2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{1 - (v/v_c)\tilde{U}(\mathbf{p})} - \frac{1}{1 - \tilde{U}(\mathbf{p})} \right] \\ &= 2(v_c - v) + \frac{b_4}{2b_2} (v/v_c - 1) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{U}(\mathbf{p})}{\left(1 - (v/v_c)\tilde{U}(\mathbf{p})\right) \left(1 - \tilde{U}(\mathbf{p})\right)}, \end{aligned}$$

où nous avons identifié  $v_c$  avec  $b_2/2$  dans le terme d'ordre  $b_4$ .

Si l'intégrale a une limite finie quand  $v \rightarrow v_c$ , la correction à la contribution gaussienne est proportionnelle à  $v - v_c$ . Dans ces conditions  $\mathcal{G}''(0)$  s'annule toujours comme  $v - v_c$  ou  $T - T_c$ , seul le coefficient, non universel, est légèrement modifiée:

$$\lim_{v \rightarrow v_c} \frac{\mathcal{G}''(0)}{1 - v/v_c} = 2v_c - \frac{b_4}{v_c} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{U}(\mathbf{p})}{\left(1 - \tilde{U}(\mathbf{p})\right)^2} + O(b_4^2).$$

Pour  $p \rightarrow 0$ , le numérateur tend vers 1 et le dénominateur se comporte comme  $p^4$ . L'intégrale ne converge donc que pour  $d > 4$ . Cette analyse montre donc le rôle particulier de la dimension 4:

Pour  $d > 4$ , la perturbation à la théorie gaussienne est petite, et ne modifie que des quantités non universelles. La susceptibilité magnétique continue à diverger comme  $1/(T - T_c)$  et l'exposant critique  $\gamma$  (définition (7.28)) conserve sa valeur gaussienne:  $\gamma = 1$ .

Pour  $2 < d \leq 4$ , au contraire l'intégrale diverge quand  $v \rightarrow v_c$ . Ainsi, aussi petit que soit l'amplitude  $b_4$  du terme correctif à la distribution gaussienne, pour  $d \leq 4$  quand la longueur de corrélation  $\xi$  diverge la contribution d'ordre  $b_4$  finit par l'emporter sur le terme gaussien. Donc le développement perturbatif ne peut

pas être valable au voisinage de  $T_c$ , et les prédictions universelles du modèle gaussien et du modèle gaussien perturbé ne sont pas confirmées.

Il est instructif d'évaluer plus soigneusement le comportement de l'intégrale quand  $v \rightarrow v_c$ . Nous voyons que la contribution principale vient du voisinage de  $\mathbf{p} = 0$ . Nous pouvons donc approximer  $1 - \tilde{U}(\mathbf{p})$  par  $a^2 p^2$ :

$$\int \frac{d^d p \tilde{U}(\mathbf{p})}{\left(1 - (v/v_c)\tilde{U}(\mathbf{p})\right) \left(1 - \tilde{U}(\mathbf{p})\right)} \underset{v \rightarrow v_c}{\sim} \int \frac{d^d p}{[1 - (v/v_c) + a^2 p^2] a^2 p^2}.$$

Pour  $d < 4$ , l'intégrale ainsi approximée converge à l'infini. Une intégration jusqu'à l'infini modifie le résultat d'une constante négligeable pour  $v \rightarrow v_c$ . Nous faisons alors le changement de variable  $\mathbf{p} = \mathbf{p}' \sqrt{v_c/v - 1}/a$ , ce qui donne

$$\int \frac{d^d p}{[1 - (v/v_c) + a^2 p^2] a^2 p^2} = ((v_c/v) - 1)^{d/2-2} a^{-d} \int \frac{d^d p}{(1 + p^2) p^2}.$$

Calculant l'intégrale et introduisant la longueur de corrélation (8.39) à l'ordre gaussien,  $\xi = a/\sqrt{v_c/v - 1}$ , on en déduit

$$\mathcal{G}''(0) = \chi^{-1} \underset{\xi \gg 1}{=} 2(v_c - v) \left[ 1 + \frac{b_4}{8v_c^2 a^d} \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{\xi}{a}\right)^{4-d} \right] + O(b_4^2). \quad (8.79)$$

Pour  $d = 4$ , la correction a une divergence logarithmique:

$$\mathcal{G}''(0) = \chi^{-1} \underset{\xi \gg 1}{=} 2(v_c - v) \left[ 1 - \frac{b_4}{64\pi^2 v_c^2 a^4} \ln(\xi/a) \right] + O(b_4^2).$$

En résumé:

(i) Pour les dimensions  $d > 4$ , la correction ne modifie pas les prédictions universelles de l'approximation quasi-gaussienne. On trouve bien des corrections singulières mais elles sont sous-dominantes.

(ii) Pour les dimensions  $d \leq 4$ , des singularités "infrarouges" (IR) dues au comportement à grande distance de la fonction à deux points gaussienne (appelée aussi propagateur), ou à argument nul de sa transformée de Fourier, entraînent que les prédictions gaussiennes ne peuvent pas être correctes en général.

Une inspection des corrections d'ordre plus élevé confirme ces résultats. Pour  $d \leq 4$ , les corrections sont de plus en plus singulières quand l'ordre augmente, alors que pour  $d > 4$  elles le sont de moins en moins, ce qui confirme la validité de l'analyse du premier ordre.

Les termes perturbatifs responsables de cette difficulté font intervenir le rapport  $\xi/a$  entre la longueur de corrélation et l'échelle microscopique. Ceci donne une indication sur le mécanisme responsable de l'échec d'approximation quasi-gaussienne: la physique à l'échelle microscopique ne se découple pas de la physique à longue distance.

En effet, pour  $d > 4$ , la contribution d'arguments  $|\mathbf{p}| \leq \xi^{-1}$  est négligeable quand  $\xi$  diverge, ce qui signifie que dans l'espace direct les degrés de liberté correspondant à des distances d'ordre de la longueur de corrélation ou plus grande jouent un rôle négligeable. Au contraire, pour  $d \leq 4$ , à  $T_c$  toutes les échelles contribuent. C'est cette propriété qui met en échec l'idée du théorème de la limite centrale, à savoir qu'un petit nombre de degrés de liberté effectif avec une distribution quasi-gaussienne peut remplacer l'infinité des degrés de liberté microscopiques initiaux.

C'est pour résoudre ce problème de couplage entre toutes les échelles qu'un outil nouveau est nécessaire, le *groupe de renormalisation*.

Notons enfin que la première contribution singulière ne dépend que du coefficient de  $\sigma^4$  dans le développement (8.40) et de la forme asymptotique de type Ornstein-Zernike du propagateur (la fonction à deux points gaussienne). L'effet du réseau s'est limité à borner le domaine d'intégration en  $\mathbf{p}$  à la zone de Brillouin.

On vérifie alors que les termes les plus singuliers à chaque ordre du développement de la méthode du col peuvent être reproduits, dans la limite critique, par une théorie statistique des champs avec interaction de type  $\sigma^4$ , dans l'espace euclidien continu. En conséquence, si la somme des termes les plus divergents suffit pour déterminer les propriétés critiques des modèles que nous étudions, alors des propriétés de limite continue et d'universalité en découlent puisque qu'on démontre que la théorie des champs correspondante ne dépend que d'un petit nombre de paramètres.

## 8.10 Approximation de champ moyen et corrections

Nous présentons maintenant un formalisme systématique qui permet de retrouver à partir d'un modèle microscopique sur réseau assez général de type (8.2) avec l'interaction (8.1) les résultats précédents.

À l'ordre dominant il conduit à l'approximation du champ moyen qui reproduit les résultats de l'approximation quasi-gaussienne. Les termes suivants du développement permettent une étude des corrections au champ moyen. De nouveau les corrections les plus importantes dans le domaine critique ont la forme exhibée par les corrections à l'approximation quasi-gaussienne.

Nous considérons la fonction de partition en champ variable, ou fonction génératrice des fonctions de corrélation,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left( \prod_i \rho(S_i) dS_i \right) \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) + \sum_i H_i S_i \right], \quad (8.80)$$

avec une interaction à deux spins:

$$-\beta \mathcal{E}(\mathbf{S}) = \sum_{ij} V_{ij} S_i S_j.$$

Notons qu'ici, comme pour le développement de haute température, il est techniquement commode de supposer que  $V_{ii}$  s'annule, une telle contribution à un site pouvant être incluse dans la mesure  $\rho(S)$ . Dans le cas contraire il est nécessaire de modifier la méthode qui est expliquée ci-dessous.

### 8.10.1 Représentation de spins moyens et méthode du col

Puisque la fonction de partition peut facilement être calculée quand tous les sites sont découplés, une idée simple est d'écrire le facteur qui dans la somme sur les configurations couple les spins en différents sites comme une intégrale sur un poids de Boltzmann de spins découplés. Plus explicitement, nous introduisons la fonction  $\delta$ , dans sa représentation de Fourier,

$$\delta(\sigma_i - S_i) = \frac{1}{2i\pi} \int d\lambda_i e^{\lambda_i(S_i - \sigma_i)},$$

où l'intégrale sur  $\lambda_i$  se fait le long de l'axe imaginaire, dans la représentation (8.80) de la fonction de partition. Remplaçant  $S_i$  par  $\sigma_i$  dans l'interaction, on obtient

$$\mathcal{Z}(H) \propto \int \prod_i \rho(S_i) dS_i d\sigma_i d\lambda_i \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i + \lambda_i (S_i - \sigma_i) \right]. \quad (8.81)$$

L'intégration sur les variables  $S_i$  est alors immédiate. Introduisant l'énergie libre du modèle à un site  $A(h)$  définie en (7.5) (qui est une fonction analytique), on trouve

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_i d\sigma_i d\lambda_i \exp \left[ -\beta \mathcal{E}(\sigma) + \sum_i (H_i - \lambda_i) \sigma_i + A(\lambda_i) \right], \quad (8.82)$$

*Méthode du col.* Nous évaluons alors l'intégrale (8.82) par la méthode du col, malgré l'absence de paramètre associé.

Les dérivées par rapport à  $\lambda_i$  et  $\sigma_i$  donnent les deux équations de col

$$\sigma_i = A'(\lambda_i), \quad (8.83a)$$

$$\lambda_i = 2 \sum_j V_{ij} \sigma_j + H_i. \quad (8.83b)$$

L'énergie libre, dans l'approximation du champ moyen, est alors

$$\mathcal{W}(H) \equiv \ln \mathcal{Z}(H) = \sum_{ij} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i ((H_i - \lambda_i) \sigma_i + A(\lambda_i)), \quad (8.84)$$

$$= - \sum_{ij} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i A(\lambda_i), \quad (8.85)$$

où  $\sigma_i, \lambda_i$  sont les solutions des équations de col (8.83).

Comme l'expression (8.84) est stationnaire par rapport aux variations de  $\sigma_i$  et  $\lambda_i$ , l'aimantation locale  $M_i$  dans l'approximation du champ moyen est donnée par la dérivée explicite par rapport à  $H$ :

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_i} = \sigma_i. \quad (8.86)$$

*Discussion.* Comparant les équations (7.19) et (8.83a), on remarque que  $\lambda_i$  a un sens de champ magnétique effectif. L'équation (8.83b) le détermine alors comme la somme du champ appliqué et d'un champ moyen dû aux autres spins. Le sens de cette approximation est que l'interaction entre spins a été remplacée par un champ magnétique moyen. Une analyse détaillée montre que cette approximation devient exacte quand la dimension  $d$  d'espace devient grande, de sorte que l'action d'un grand nombre de sites sur un site donné peut en effet être remplacée par un champ magnétique moyen. On retrouve alors un modèle limite de type 7.2.

L'avantage de cette formulation algébrique de l'approximation de champ moyen est qu'elle permet une discussion systématique des corrections, à la différence d'autres méthodes comme, par exemple, celles basées sur des principes variationnels.

*Potentiel thermodynamique et transition de phase.* Des équations (8.84,8.86) on déduit le potentiel thermodynamique, transformé de Legendre de  $\mathcal{W}(H)$ :

$$\Gamma(M) = \sum_i M_i H_i - \mathcal{W}(H) = - \sum_{ij} M_i V_{ij} M_j + \sum_i B(M_i), \quad (8.87)$$

où  $B(M)$  est la transformée de Legendre (7.14) de  $A(H)$ . Nous reconnaissons une expression identique à l'expression (8.44). L'approximation de champ moyen a donc les mêmes propriétés que l'approximation quasi-gaussienne, en particulier les mêmes propriétés universelles.

### 8.10.2 Méthode du col: un paramètre de développement

Avant de discuter les corrections à l'approximation de champ moyen, il est utile d'introduire un paramètre qui caractérise le développement autour du champ moyen. Remplaçons donc les coefficients  $V_{ij}$  dans l'expression (8.1) par  $V_{ij}/\ell$  et le spin  $S_i$  par la somme de  $\ell$  spins indépendants avec la même distribution  $\rho(S)$ :

$$S_i = \sum_{k=1}^{\ell} S_i^{(k)}.$$

Le cas  $\ell = 1$  correspond à la distribution initiale. Cette modification réalise l'idée que  $S_i$  est un spin macroscopique effectif, moyenne locale de nombreux spins microscopiques faiblement couplés.

Alors

$$\int \rho(s) ds e^{hs} \mapsto \left[ \int \rho(s) ds e^{hs} \right]^\ell = z^\ell(h) = e^{\ell A(h)}.$$

Nous imposons la contrainte

$$\delta(S_i - \ell \sigma_i) = \frac{1}{2i\pi} \int d\lambda_i \exp \left[ \lambda_i \left( \sum_{k=1}^{\ell} S_i^{(k)} - \ell \sigma_i \right) \right].$$

La fonction de partition devient (à un changement de normalisation trivial près):

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_i d\sigma_i d\lambda_i \exp \left\{ -\ell \beta \mathcal{E}(\sigma) + \ell \sum_i [(H_i - \lambda_i) \sigma_i + A(\lambda_i)] \right\}. \quad (8.88)$$

Cette expression montre que la méthode du col semble justifiée *a priori* dans la limite  $\ell \rightarrow \infty$ : le calcul de la fonction de partition par la méthode du col engendre un développement formel en puissances de  $1/\ell$ .

Il est commode de définir l'énergie libre par

$$\mathcal{W}(H) \equiv \frac{1}{\ell} \ln \mathcal{Z}(H), \quad (8.89)$$

de sorte que les résultats à l'ordre dominant sont indépendants de  $\ell$ .

*Développement perturbatif.* Il est maintenant possible de calculer systématiquement les corrections au champ moyen en développant autour du col. Il est commode de poser

$$\int d\lambda e^{\ell[A(\lambda) - \lambda \sigma]} = e^{-\ell \Sigma(\sigma, \ell)}. \quad (8.90)$$

L'ordre dominant de la méthode du col fait intervenir la transformée de Legendre de  $A$ . Donc

$$\Sigma(\sigma, \ell) = B(\sigma) + O(1/\ell).$$

À l'ordre  $1/\ell$  nous trouvons deux types de corrections, d'une part des modifications aux coefficients  $b_2$  et  $b_4$  qui apparaissent dans  $\Gamma(M)$ . En particulier la température critique est modifiée. Mais les propriétés universelles que nous avons exhibées sont indépendantes de ces valeurs explicites et restent donc inchangées.

Pour calculer les autres corrections nous pouvons remplacer  $\Sigma(\sigma, \ell)$  par  $B(\sigma)$ . Dans cette approximation

$$\mathcal{Z}(H) = \int \prod_i d\sigma_i \exp \ell \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \sum_i H_i \sigma_i \right] \quad (8.91)$$

avec

$$\mathcal{H}(\sigma) = - \sum_{ij} V_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i B(\sigma_i). \quad (8.92)$$

Nous reconnaissons dans  $\mathcal{H}(\sigma)$  le potentiel thermodynamique dans l'approximation de champ moyen, qui est aussi un potentiel thermodynamique qui a les propriétés postulées dans la théorie de Landau.

Pour  $\ell = 1$  nous retrouvons aussi le modèle (8.42), que nous avons étudié dans l'approximation quasi-gaussienne. Pour  $\ell \neq 1$ , faisant le changement de variables  $\sigma_i \mapsto \sigma_i/\sqrt{\ell}$ , nous reconnaissons aussi le modèle (8.42) où la fonction  $B(\sigma)$  a des coefficients modifiés  $b_{2p} \mapsto \ell^{1-p}b_{2p}$ . Tous les coefficients sauf le terme gaussien  $b_2$  tendent vers zéro pour  $\ell \rightarrow \infty$ , ce qui justifie formellement le traitement perturbatif.

Au-dessus de  $T_c$ , en champ nul, l'aimantation s'annule et le col est  $\sigma = 0$ . Le développement de la méthode du col correspond à la théorie des perturbations et la correction provient uniquement du terme quartique d'ordre  $\sigma^4$  dans  $B(\sigma)$ , traité au premier ordre. Par exemple, l'expression (8.74) de la transformée de Fourier  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k})$  de l'inverse de la fonction à deux points devient

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) = b_2 - 2\tilde{V}(\mathbf{k}) + \frac{b_4}{2\ell} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(\mathbf{p}) + O\left(\frac{1}{\ell^2}\right). \quad (8.93)$$

Pour  $v$  proche de  $v_c$  et  $2 < d < 4$ , la contribution dominante (8.79) à la susceptibilité magnétique est remplacée par

$$\chi^{-1} = 2(v_c - v) \left[ 1 + \frac{b_4}{8v_c^2 a^d \ell} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{\xi}{a}\right)^{4-d} \right] + O\left(\frac{1}{\ell^2}\right).$$

## 8.11 Points tricritiques

Jusqu'ici nous avons supposé que nous ne pouvions ajuster qu'un seul paramètre de contrôle, la température, et que, donc, le coefficient  $b_4$  du terme  $M^4$  dans le développement de  $\Gamma(M)$  était générique c'est à dire un nombre d'ordre unité. Toutefois, il existe des situations où d'autres paramètres physiques peuvent être variés, et à la fois les coefficients  $b_2$  et  $b_4$  de  $M^2$  et  $M^4$  peuvent être annulés. Cela arrive, par exemple, dans les mélanges  $\text{He}^3$ - $\text{He}^4$  ou certains systèmes métamagnétiques. Dans les modèles de type Ising que nous avons étudié jusqu'ici cela peut être obtenu en ajustant la distribution de spin. Si le coefficient  $b_6$  de  $M^6$  est positif, on trouve un point appelé tricritique et une nouvelle analyse doit être faite. De façon plus générale, on peut étudier le voisinage du point tricritique, où à la fois les coefficients de  $M^2$  et  $M^4$  sont petits:

$$\Gamma(M) = - \sum_{ij} V_{ij} M_i M_j + \sum_i \left( \frac{b_2}{2!} M_i^2 + \frac{b_4}{4!} M_i^4 + \frac{b_6}{6!} M_i^6 + \dots \right). \quad (8.94)$$

En particulier pour  $v = v_c = b_2/2$ , si à partir d'une valeur positive  $b_4$  décroît, on trouve une ligne de points critiques ordinaires jusqu'à ce que  $b_4$  s'annule au

point tricritique. Après le point tricritique,  $b_4$  devient négatif et la transition de phase devient du premier ordre.

Les exposants du point tricritique ont des valeurs différentes de celles trouvées pour un point critique ordinaire, par exemple  $\beta = 1/4$ ,  $\delta = 5$ .

Les corrections à la théorie tricritique peuvent être étudiées par des méthodes similaires à celle de la section 8.9. Analysant le développement perturbatif, on trouve maintenant qu'au dessus de trois dimensions la théorie du champ moyen prédit correctement les quantités universelles alors qu'elle n'est définitivement pas valable en trois dimensions et en dessous: la dimension critique supérieure est 3. De plus pour  $d \leq 3$ , les corrections les plus singulières sont reproduites par une théorie des champs dans l'espace continu avec interaction  $\phi^6$ .

## Exercices

### Exercice 8.1

Le modèle  $O(2)$ . Déterminer le potentiel thermodynamique du modèle à un site avec symétrie  $O(2)$ , c'est à dire pour un spin  $\mathbf{S}$  à deux composantes appartenant au cercle  $\mathbf{S}^2 = 1$  avec une mesure uniforme sur le cercle.

### Exercice 8.2

Avec la même distribution en chaque site et dans le cas d'une interaction à deux spins

$$-\beta\mathcal{E}(\mathbf{S}) = \sum_{ij} V_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j,$$

calculer le potentiel thermodynamique dans l'approximation de champ moyen.

### Exercice 8.3

Calculer dans le même modèle, pour la fonction à deux points dans la limite  $T \leq T_{c+}$  la première correction au champ moyen.

### Exercice 8.4

On considère de nouveau un spin à deux composantes sur réseau. On suppose que le modèle statistique a la symétrie du carré, c'est à dire est invariant par les trois transformations

$$S_1 \leftrightarrow -S_1, \quad S_2 \leftrightarrow -S_2, \quad S_1 \leftrightarrow S_2.$$

$$S_1 \leftrightarrow S_2, \quad S_1 \mapsto -S_1.$$

Montrer que les densités d'énergie libre  $W(H_1, H_2)$  et de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M_1, M_2)$  ont alors les mêmes symétries.

Se plaçant dans le cadre de l'approximation quasi-gaussienne ou de champ moyen, écrire la densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M_1, M_2)$ , en champ

uniforme, ayant la symétrie du carré, la plus générale, développée jusqu'à l'ordre 4 dans l'aimantation  $\{M_1, M_2\}$  pour  $|M| \rightarrow 0$ .

On considère un exemple particulier d'un tel potentiel thermodynamique

$$\mathcal{G}(M_1, M_2) = \frac{1}{2}\tau(M_1^2 + M_2^2) + \frac{1}{4}g(M_1^4 + M_2^4 + 2\cos\theta M_1^2 M_2^2),$$

avec  $\tau \propto T - T_c$ ,  $g > 0$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ . Calculer l'aimantation spontanée en champ magnétique nul pour  $\tau < 0$ . En déduire la matrice des dérivées secondes

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial M_\alpha \partial M_\beta}$$

dans cette situation. On rappelle que la matrice des susceptibilités magnétiques  $\chi_{\alpha\beta}$

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 W}{\partial H_\alpha \partial H_\beta},$$

est l'inverse de la matrice  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ . En déduire la matrice  $\chi_{\alpha\beta}$  en champ magnétique nul pour  $\tau < 0$ . Montrer qu'il existe une valeur de  $\theta$  pour laquelle une des valeurs propres de  $\chi_{\alpha\beta}$  diverge pour tout  $\tau < 0$ . Que peut-on dire du modèle pour cette valeur spéciale?

*Solution.* Aimantation spontanée:

$$M_1^2 = M_2^2 = -\frac{\tau}{g(1 + \cos\theta)}.$$

Matrice des dérivées secondes

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = -\frac{2\tau}{1 + \cos\theta} \begin{pmatrix} 1 & \pm \cos\theta \\ \pm \cos\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont

$$-2\tau, \quad -2\tau \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}.$$

## Chapitre 9

### Groupe de renormalisation: Formulation générale

Au chapitre 8 nous avons étudié des systèmes de type Ising (et plus généralement des systèmes ferromagnétiques avec symétrie  $O(N)$ ) avec interactions de courte portée et déterminé le comportement des fonctions thermodynamiques près d'une transition de phase continue, dans le cadre des approximations quasi-gaussienne ou de champ moyen. Nous avons montré que ces approximations prédisent un ensemble de propriétés *universelles*, c'est à dire des propriétés qui sont indépendantes de la structure détaillée de l'énergie de configuration ou de l'hamiltonien microscopique.

Toutefois, diverses observations expérimentales et des résultats venant de systèmes modèle montrent que de tels résultats ne peuvent pas être quantitativement corrects, du moins en dimensions deux ou trois. Par exemple la solution exacte du modèle d'Ising en 2D donne des exposants comme  $\beta = 1/8$ ,  $\eta = 1/4$  ou  $\nu = 1$  clairement différents des prédictions du modèle quasi-gaussien.

En examinant les corrections à l'approximation gaussienne, nous avons identifié l'origine de la difficulté. Nous avons trouvé qu'au dessus de quatre dimensions ces corrections ne changent pas les quantités universelles; au contraire en dessous de quatre dimensions les corrections divergent à la température critique et donc les hypothèses qui sont à la base de l'approximation quasi-gaussienne (ou de champ moyen) ne peuvent certainement pas être correctes.

Cette analyse de plus indique que le couplage des degrés de liberté correspondant à différentes échelles de physique joue un rôle essentiel: il est impossible de ne considérer que des degrés de liberté effectifs macroscopiques. On pourrait craindre dans ces conditions qu'en dimension  $d \leq 4$  la physique, même de longue distance, ne soit sensible à la structure microscopique détaillée des systèmes. De façon assez surprenante, toutefois, il a été découvert, d'abord empiriquement, que des propriétés universelles survivent, quoique différentes de celles du modèle quasi-gaussien. Mais ces propriétés sont moins universelles dans le sens suivant: Les systèmes statistiques qui ont les mêmes propriétés dans l'approximation gaussienne, sont divisés en *classes d'universalité* caractérisées par la dimension de l'espace, les symétries et quelques autres propriétés qualitatives.

Pour expliquer ce phénomène quelque peu paradoxal, un outil tout à fait nouveau, d'abord suggéré par Kadanoff (1966), a été développé par Wilson (1971), Wegner, et ensuite nombre d'autres physiciens, le *Groupe de Renormalisation* (GR). Dans l'approche de Wilson, l'idée fondamentale est d'intégrer successivement sur les degrés de liberté correspondant aux échelles les plus courtes. On obtient ainsi une suite de poids de Boltzmann qui tous décrivent la même physique de longue distance mais dans lesquels la structure de courte distance est progressivement éliminée. Si cette suite a une limite, ce qui suppose que les transformations de groupe de renormalisation admettent des *points fixes*, alors les propriétés d'universalité sont expliquées: tous les modèles statistiques qui, après ces transformations, convergent vers le même point fixe, appartiennent à la même classe d'universalité.

Nous décrivons d'abord les idées fondamentales du groupe de renormalisation dans un cadre quelque peu abstrait. La formulation sera plutôt imprécise et les arguments largement heuristiques. Le rôle des points fixes sera souligné.

Dans la pratique, ce groupe de renormalisation est très difficile à construire puisqu'il agit dans l'espace de dimension infinie des modèles statistiques possibles. Seules les mesures gaussiennes peuvent être discutées de façon générale. Nous identifierons donc le point fixe le plus simple, le *point fixe gaussien*, qui appartient à la classe des modèles gaussiens décrits précédemment. De plus une analyse locale complète au voisinage de ce point fixe est possible. Elle permet de classer les interactions additionnelles en *essentiels* (relativement au point fixe gaussien), celles qui introduites, deviennent de plus en plus importantes à longue distance, *inessentiels* (c'est le contraire) et *marginales* dans la situation limite.

Les idées générales de groupe de renormalisation, quoique *a priori* un peu vagues, sont extrêmement suggestives, et en effet ont été mises en oeuvre sous beaucoup de formes approchées et ont induites une grande variété de calculs pratiques. Notre but ici n'est pas de les passer en revue. Toutefois, dans le contexte plus spécifique de la Théorie Quantique des Champs (TQC), les hypothèses à la base du groupe de renormalisation ont été clarifiées et vérifiées dans beaucoup de cas d'intérêt physique, confirmant de manière très directe les relations profondes, d'abord reconnue par Wilson, entre la théorie quantique des champs décrivant la physique des interactions fondamentales à l'échelle microscopique et la théorie des phénomènes critiques.

## 9.1 Hamiltonien de Landau général

Dans ce qui suit nous nous plaçons directement dans l'espace continu, plutôt que sur un réseau. En effet, nous avons vu que même pour des modèles initialement définis sur réseau, les propriétés universelles du modèle quasi-gaussien sont liées à l'existence d'une limite continue. Il en est de même des corrections les plus singulières qui ne font intervenir que les propriétés de la fonction à deux points gaussienne à grande distance. Dans ces conditions les modèles sur réseau peuvent être remplacés par une Théorie Statistique des Champs. En fait le réseau n'est

intervenir que pour borner les arguments des transformées de Fourier dans les intégrales. Au sens de la théorie statistique des champs, il joue le rôle de “cut-off”, c’est à dire de facteur de coupure des grandes impulsions.

### 9.1.1 Théorie statistique des champs effective

Comme dans la théorie des champs gaussienne de la section 8.4, le paramètre d’ordre local est donc un champ, que nous notons  $\sigma(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^d$ ), équivalent des variables sur réseau  $\sigma_i$  des sections 8.2 et 8.5. Le champ  $\sigma$  est un spin moyen local et donc une variable continue même si le spin microscopique initial a des valeurs discrètes comme dans le modèle d’Ising.

Le modèle statistique est alors défini par une fonctionnelle locale  $\mathcal{H}(\sigma)$  du champ  $\sigma$ , généralisation de la forme quadratique (8.26), et de la forme sur réseau (8.42) du modèle quasi-gaussien. La fonction de partition  $\mathcal{Z}$  correspondante est obtenue en intégrant sur les champs  $\sigma(x)$  avec le poids  $e^{-\mathcal{H}(\sigma)}$  (pour plus de détails voir le chapitre 12). Les fonctions de corrélation peuvent être calculées en dérivant (fonctionnellement) la fonction de partition dans un champ externe variable  $H(x)$ :

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\sigma] \exp \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \int d^d x H(x) \sigma(x) \right].$$

Les fonctions de corrélation complètes sont alors données par

$$\langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle = \mathcal{Z}^{-1}(0) \left. \frac{\delta^n \mathcal{Z}(H)}{\delta \sigma(x_1) \dots \delta \sigma(x_n)} \right|_{H(x) \equiv 0}.$$

La fonctionnelle  $\mathcal{H}(\sigma)$  est souvent appelée *hamiltonien* (une terminologie empruntée à la théorie statistique des gaz) dans le contexte statistique. Elle est aussi une généralisation de l’*action euclidienne*, c’est à dire l’action classique en temps imaginaire, de la théorie des interactions fondamentales.

### 9.1.2 Hamiltonien de Landau

L’hamiltonien  $\mathcal{H}(\sigma)$  est une fonction du champ  $\sigma(x)$  que nous supposons avoir les propriétés générales du potentiel thermodynamique de la théorie de Landau (section 8.7). Il généralise donc l’hamiltonien du modèle quasi-gaussien ou l’hamiltonien effectif qui conduit à l’approximation de champ moyen.

Cette hypothèse est cohérente avec l’analyse de la section 8.10. Nous avons montré que l’hamiltonien effectif (8.92) dans l’expression (8.91) a les propriétés du potentiel thermodynamique du champ moyen, de sorte que celui-ci est l’approximation dominante de la méthode du col.

Nous supposons donc les propriétés suivantes:

(i) L’hamiltonien  $\mathcal{H}$  est une fonction régulière des paramètres thermodynamiques comme la température (sauf à température nulle).

(ii) Il est développable en puissances du champ  $\sigma$ :

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 d^d x_2 \dots d^d x_n \mathcal{H}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n). \quad (9.1)$$

Comme nous ne discutons, en général, que des systèmes invariants par translation

$$\mathcal{H}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{H}^{(n)}(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) \quad \forall a \in \mathbb{R}^d.$$

(iii) Par ailleurs, les transformées de Fourier  $\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}$  des coefficients (fonctions ou distributions)  $\mathcal{H}^{(n)}$ , après factorisation d'une fonction  $\delta$  de la somme des impulsions résultant de l'invariance par translation (cf. chapitre 6),

$$(2\pi)^{d\delta} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int d^d x_1 \dots d^d x_n \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j \right) \times \mathcal{H}^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (9.2)$$

sont holomorphes dans des bandes du type  $|\operatorname{Im} p_i| < \kappa$ , ce qui correspond à une hypothèse de courte portée des forces (avec décroissance exponentielle) ou de localité au sens de la théorie des champs.

Notons qu'en termes des composantes de Fourier du champ  $\sigma$ :

$$\sigma(x) = \int d^d k e^{ikx} \tilde{\sigma}(k),$$

le développement de  $\mathcal{H}$  s'écrit

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^d k_1 \dots d^d k_n (2\pi)^{d\delta} \left( \sum_{i=1}^n k_i \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) \tilde{\sigma}(k_1) \dots \tilde{\sigma}(k_n). \quad (9.3)$$

*Remarque.* On peut se demander pourquoi tout de suite considérer des hamiltoniens aussi généraux, alors que nous n'avons pas encore réussi à déterminer le comportement critique de systèmes beaucoup plus simples. Bien sûr, il est possible ainsi de représenter une classe de systèmes plus large. Mais c'est surtout parce que, comme nous le verrons, les transformations du groupe de renormalisation engendrent de tels hamiltoniens, même quand l'hamiltonien initial est beaucoup plus simple. Dans ce contexte on parle aussi d'hamiltonien de Landau–Ginzburg–Wilson

### 9.1.3 Fonctions de corrélation connexes

Nous avons introduit en section 6.2.1 la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation connexes (qui ont des propriétés de décroissance à longue distance, dites propriétés d'amas), qui est aussi l'énergie libre en champ variable  $\mathcal{W}(H) = \ln \mathcal{Z}(H)$  (comme précédemment nous omettons un facteur de température dans cette relation). Dans la suite nous ne considérons que les fonctions connexes

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \mathcal{W}(H)}{\delta \sigma(x_1) \dots \delta \sigma(x_n)} \Big|_{H(x) \equiv 0} = \langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle_{\text{connexe}} . \quad (9.4)$$

*Représentation de Fourier.* Nous avons supposé que la théorie des champs est invariante par translation. Cette hypothèse implique que pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ , la fonction de corrélation connexe à  $n$  points satisfait

$$W^{(n)}(x_1 + a, \dots, x_n + a) = W^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

La relation entre fonction à  $n$  points et sa transformée de Fourier peut s'écrire

$$(2\pi)^d \delta \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \widetilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int d^d x_1 \dots d^d x_n W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j \right), \quad (9.5)$$

qui est la forme dans le continu de la représentation (6.12). Quand un point est fixé, par exemple  $x_1 = 0$ , la fonction  $W^{(n)}(0, x_2, \dots, x_n)$  décroît quand  $x_i$  tend vers l'infini et donc  $\widetilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  a des propriétés de régularité dans les variables  $p_i$ .

## 9.2 Le groupe de renormalisation: Idée générale

Nous avons vu dans le chapitre précédent que des propriétés d'universalité émergent dans l'étude du comportement asymptotique à grandes distances de la fonction connexe à deux points gaussienne au voisinage du point critique. Dans le cadre d'un modèle général, nous voulons donc explorer les propriétés du comportement à grande distance des fonctions de corrélation connexes.

### 9.2.1 Equations de groupe de renormalisation

Techniquement, nous voulons déterminer le comportement des fonctions à  $n$  points connexes  $W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ , au point critique, quand le paramètre de dilatation  $\lambda > 0$  tend vers l'infini.

L'idée du GR est de construire un hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda(\sigma)$  dépendant du paramètre de dilatation  $\lambda$ , tel que

$$\mathcal{H}_{\lambda=1}(\sigma) \equiv \mathcal{H}(\sigma),$$

et dont les fonctions de corrélation  $W_\lambda^{(n)}(x_i)$  satisfont:

$$W_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) - Z^{-n/2}(\lambda)W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = R_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (9.6)$$

Pour des raisons qui apparaîtront plus tard (mais qui ne sont pas sans rapport avec la remarque de la fin de la section 8.4.3), il est nécessaire de supposer que *tous les points  $x_i$  sont distincts*.

L'hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda(\sigma)$  est aussi appelé *hamiltonien effectif* à l'échelle  $\lambda$ .

Cette équation fait intervenir des fonctions  $R^{(n)}$  qui ne satisfont qu'une condition: elles décroissent pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , par exemple plus vite que toute puissance de  $\lambda$ . En l'absence d'un tel terme on parle d'un groupe de renormalisation linéaire.

Les fonctions  $Z^{-n/2}(\lambda)W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$  sont les fonctions de corrélation connexes du champ  $\sigma(\lambda x)/\sqrt{Z(\lambda)}$ : Le facteur  $\sqrt{Z(\lambda)}$  renormalise (change la normalisation) le champ  $\sigma(x)$ . On note ici une différence avec les situations que nous avons rencontrées précédemment, nous admettons *a priori* des fonctions quelconques de  $\lambda$  et pas uniquement une puissance.

La transformation  $\mathcal{H}(\sigma) \mapsto \mathcal{H}_\lambda(\sigma)$  est appelée transformation de GR.

Diverses transformations de GR peuvent différer par la forme des fonctions  $R^{(n)}$  et la fonction  $Z(\lambda)$ . Dans les constructions explicites les  $R^{(n)}$  sont engendrés par l'intégration sur les modes de grande impulsion de  $\sigma(x)$ . Quand  $R^{(n)} \equiv 0$  et à la fois l'espace et les champs sont des variables continues, la transformation de GR peut être réalisée, en particulier, par un changement d'échelle d'espace et des champs. Toutefois, en dehors des modèles gaussiens, une telle transformation n'a pas, en général, de point fixe et donc il est nécessaire de considérer des transformations plus générales. Ci-dessous nous omettrons les termes  $R^{(n)}$  et donc les égalités entre fonctions de corrélation devront être comprises modulo des termes décroissants plus vite que toute puissance.

L'équation (9.6), après transformation de Fourier, s'écrit aussi

$$\widetilde{W}_\lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z^{-n/2}(\lambda)\lambda^{(1-n)d}\widetilde{W}^{(n)}(p_1/\lambda, \dots, p_n/\lambda) + \widetilde{R}_\lambda^{(n)}, \quad (9.7)$$

où la puissance de  $\lambda$  supplémentaire provient de la mesure d'intégration  $\prod d^d x_i$  et de la factorisation de la fonction  $\delta$  de la somme des impulsions  $p_i$ .

En particulier, négligeant  $\widetilde{R}_2$ ,

$$\widetilde{W}_\lambda^{(2)}(p) = Z^{-1}(\lambda)\lambda^{-d}\widetilde{W}^{(2)}(p/\lambda). \quad (9.8)$$

*Fonctions de vertex.* Un peu d'algèbre basée sur la transformation de Legendre permet de vérifier qu'aux fonctions  $Z^{-n/2}(\lambda)W^{(n)}(\lambda x_i)$  correspondent les fonctions de vertex  $\lambda^{nd}Z^{n/2}(\lambda)\Gamma^{(n)}(\lambda x_i)$  et donc

$$\Gamma_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = Z^{n/2}(\lambda)\lambda^{nd}\Gamma^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

La transformée de Fourier de la fonction de vertex à  $n$  points  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  est définie par (cf. la définition (6.20))

$$(2\pi)^{d\delta} \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int dx_1 \dots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \times \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j p_j \right). \quad (9.9)$$

Les mêmes arguments que pour les fonction connexes conduisent alors à la relation

$$\tilde{\Gamma}_\lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z^{n/2}(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1/\lambda, \dots, p_n/\lambda). \quad (9.10)$$

En particulier, pour la fonction de vertex à deux points

$$\tilde{\Gamma}_\lambda^{(2)}(p) = Z(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda), \quad (9.11)$$

ce qui cohérent avec la relation (9.8) puisque  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  est l'inverse de  $\widetilde{W}^{(2)}(p)$ .

### 9.2.2 Hamiltonien de point fixe

Les paramètres qui apparaissant dans  $\mathcal{H}_\lambda$  sont maintenant toutes des fonctions explicites de  $\lambda$ . Supposons que nous ayons trouvé une transformation de GR telle que, quand  $\lambda \rightarrow \infty$ , l'hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda(\sigma)$  ait une limite  $\mathcal{H}^*(\sigma)$ , un hamiltonien de point fixe. Nous notons  $W_*^{(n)}$  les fonctions de corrélation correspondantes. Alors l'équation (9.6) implique

$$W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} Z^{n/2}(\lambda) W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (9.12)$$

Introduisons un seconde dilatation  $\mu > 0$  et calculons  $W^{(n)}(\lambda \mu x_i)$  à partir de l'équation (9.12) de deux manières différentes

$$\begin{aligned} W^{(n)}(\lambda \mu x_1, \dots, \lambda \mu x_n) &\underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} Z^{n/2}(\lambda) W_*^{(n)}(\mu x_1, \dots, \mu x_n) \\ &\underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} Z^{n/2}(\lambda \mu) W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Eliminant  $W^{(n)}(\lambda \mu x_i)$ , nous obtenons la relation

$$W_*^{(n)}(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = Z_*^{n/2}(\mu) W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

avec

$$Z_*(\mu) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Z(\lambda \mu) / Z(\lambda). \quad (9.13)$$

L'équation (9.16) étant valable pour  $\mu$  arbitraire, cela implique immédiatement que  $Z_*(\lambda)$  forme une représentation du semi-groupe des dilatations:

$$Z_*(\lambda_1)Z_*(\lambda_2) = Z_*(\lambda_1\lambda_2). \quad (9.14)$$

Donc, avec des hypothèses raisonnables,  $Z_*(\lambda)$  a un comportement en loi de puissances:

$$Z_*(\lambda) = \lambda^{-2d_\sigma}. \quad (9.15)$$

On en déduit le comportement d'échelle

$$W_*^{(n)}(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \lambda^{-nd_\sigma} W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (9.16)$$

Le nombre positif  $d_\sigma$ , qui caractérise le comportement en loi de puissances des fonctions de corrélation au point fixe, est appelé dimension du paramètre d'ordre  $\sigma(x)$ , exprimée en inverse d'unité de longueur.

Retournant maintenant à l'équation (9.13), nous concluons que  $Z(\lambda)$  a aussi asymptotiquement un comportement en loi de puissances. L'équation (9.12) montre alors que les fonctions de corrélation  $W^{(n)}$  ont un comportement d'échelle à grande distance:

$$W^{(n)}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\propto} \lambda^{-nd_\sigma} W_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (9.17)$$

déterminé par le point fixe. De plus le membre de droite de l'équation, qui détermine le comportement critique des fonctions de corrélation, ne dépend que de l'hamiltonien de point fixe. Donc les fonctions de corrélation correspondant à tous les hamiltoniens qui convergent après des transformations de GR vers le même point fixe, ont le même comportement critique. Cette propriété est appelée *universalité*. L'espace des hamiltoniens est donc divisé en *classes d'universalité*. L'universalité, au delà de la TCM, est liée à l'existence de points fixes de longue distance (IR) du groupe de renormalisation dans l'espace des hamiltoniens.

Appliquée à la fonction à deux points, ce résultat montre en particulier que si  $2d_\sigma < d$ , la longueur de corrélation  $\xi$  diverge et donc que les hamiltoniens correspondants sont nécessairement critiques. Les hamiltoniens critiques définissent dans l'espace des hamiltoniens la *surface critique* qui est invariante par le GR. Dans le cas générique où  $\xi$  est finie, la longueur de corrélation  $\xi/\lambda$  correspondant à  $\mathcal{H}_\lambda$  tend vers zéro. Les composantes de Fourier des fonctions de corrélation deviennent indépendantes des impulsions et donc les fonctions de corrélation deviennent des fonctions  $\delta$  dans l'espace direct. Ce point fixe trivial correspond à  $2d_\sigma = d$ .

### 9.3 Flots des hamiltoniens: points fixes et stabilité

Essayons maintenant d'écrire la transformation du GR, conséquence de l'équation (9.12), pour l'hamiltonien lui-même. Dans ce but nous supposons que  $\lambda$ , le paramètre de dilatation, peut être varié continûment (c'est ici que nous avons besoin de l'hypothèse d'espace continu, puisque sur un réseau ceci ne peut être réalisé qu'approximativement) et faisons une petite dilatation supplémentaire qui mène de l'échelle  $\lambda$  à l'échelle  $\lambda(1 + d\lambda/\lambda)$ .

Nous voulons contruire des transformations de GR qui rapproche l'hamiltonien transformé d'un point fixe. Cette condition ne fait intervenir que  $\mathcal{H}_\lambda$  et non le chemin qui a conduit de  $\mathcal{H}$  à  $\mathcal{H}_\lambda$ . C'est pourquoi nous pouvons écrire la transformation de GR sous une forme différentielle en termes d'une transformation  $\mathcal{T}$  de l'espace des hamiltoniens sur lui-même et d'une fonction réelle  $D_\sigma$  définie sur l'espace des hamiltoniens sous la forme

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{T} [\mathcal{H}_\lambda], \quad (9.18)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = 2D_\sigma [\mathcal{H}_\lambda]. \quad (9.19)$$

La propriété caractéristique de ces équations qui explique bien des résultats qui vont suivre, est que le membre de droite ne dépend que de  $\mathcal{H}_\lambda$  (en particulier pas de  $\lambda$  explicitement). Le fait qu'apparaisse la dérivée  $\lambda d/d\lambda = d/d \ln \lambda$  reflète le caractère multiplicatif des dilatations ou changements d'échelle. Comme fonction du "temps"  $\ln \lambda$ , ces équations définissent un processus de Markov. Par ailleurs nous supposons, et c'est aussi une hypothèse très importante, que l'application  $\mathcal{T}$  est suffisamment différentiable (par exemple infiniment différentiable).

#### 9.3.1 Point fixe et flot linéarisé

Un hamiltonien de point fixe  $\mathcal{H}^*$  est nécessairement une solution de l'équation de point fixe

$$\mathcal{T} [\mathcal{H}^*] = 0. \quad (9.20)$$

La dimension  $d_\sigma$  du champ  $\sigma$  est alors

$$d_\sigma = D_\sigma [\mathcal{H}^*]. \quad (9.21)$$

Pour comprendre, au moins localement, quels hamiltoniens convergent vers le point fixe il est nécessaire d'étudier la stabilité du point fixe. Nous linéarisons donc l'EGR près du point fixe.

*EGR linéarisées.* La transformation de GR étant déterminée, appliquons la à un hamiltonien  $\mathcal{H}$  proche du point fixe  $\mathcal{H}^*$ . Posant  $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}^* + \Delta\mathcal{H}_\lambda$ , nous linéarisons les EGR:

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \Delta\mathcal{H}_\lambda = L^* (\Delta\mathcal{H}_\lambda), \quad (9.22)$$

où  $L^*$  est un opérateur linéaire indépendant de  $\lambda$ , agissant sur l'espace des hamiltoniens. La solution formelle de cette équation est

$$\Delta\mathcal{H}_\lambda = \lambda^{L^*} \Delta\mathcal{H}_1. \quad (9.23)$$

Supposons que  $L^*$  ait un spectre discret avec des valeurs propres  $l_i$ , correspondant à un ensemble vecteur propres  $\mathcal{O}_i$ . On voit que pour  $\lambda \rightarrow \infty$  le résultat va être dominé par les valeurs propres les plus grandes (de partie réelle la plus grande si elles sont complexes). Développons alors  $\Delta\mathcal{H}_\lambda$  sur les vecteurs propres  $\mathcal{O}_i$ :

$$\Delta\mathcal{H}_\lambda = \sum h_i(\lambda) \mathcal{O}_i. \quad (9.24)$$

La transformation (9.22) devient

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_i(\lambda) = l_i h_i(\lambda). \quad (9.25)$$

L'intégration alors donne

$$h_i(\lambda) = \lambda^{l_i} h_i(1). \quad (9.26)$$

Aucun résultat général n'implique que toutes les valeurs propres soient réelles. Néanmoins pour la classe de modèles que nous étudions, il se trouve empiriquement qu'il en est ainsi. Dans la suite nous ne discutons donc que cette situation.

### 9.3.2 Classification des vecteurs propres

Les vecteurs propres  $\mathcal{O}_i$  peuvent alors être classés en quatre familles suivant les domaines auxquels appartiennent les valeurs propres  $l_i$ :

(i) Valeurs propres positives. Les vecteurs propres correspondants sont appelés *essentiels* (relevant en anglais). Si  $\mathcal{H}_\lambda$  a une composante sur un de ces vecteurs, cette composante croîtra avec  $\lambda$ , et  $\mathcal{H}_\lambda$  s'éloignera de  $\mathcal{H}^*$ . Les vecteurs associés à des déviations de la criticalité sont clairement essentiels puisqu'une dilatation décroît la longueur de corrélation effective.

(ii) Valeurs propres nulles. Les vecteurs propres correspondant à une valeur propre nulle sont appelés *marginiaux*. Dans la section 9.4 nous montrons que  $\int dx \sigma^4(x)$  est marginal à quatre dimensions. Pour résoudre l'EGR (9.18) et déterminer le comportement de la composante correspondante il est nécessaire de développer au delà de l'approximation linéaire. Génériquement on trouve

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_i(\lambda) \sim B h_i^2(\lambda). \quad (9.27)$$

Suivant le signe de la constante  $B$  et le signe de  $h_i$ , le point fixe est alors marginalement instable ou stable. Dans ce dernier cas la solution prend pour  $\lambda \rightarrow \infty$  la forme

$$h_i(\lambda) \sim -1/(B \ln \lambda). \quad (9.28)$$

Un vecteur propre marginal généralement mène à une approche logarithmique du point fixe.

Un exemple exceptionnel nous est fourni par le modèle XY en deux dimensions (modèle avec symétrie  $O(2)$ ) qui, au lieu d'un point fixe isolé, a une ligne de points fixes. Le vecteur propre qui correspond au mouvement le long de la ligne est évidemment marginal.

(iii) Valeurs propres négatives. Les vecteurs propres correspondant sont appelés *inessentiels* (en anglais irrelevant). Les composantes effectives sur ces vecteurs propres convergent vers zéro à grande dilatation.

Toutes ces valeurs propres, qui sont caractéristiques des points fixes, peuvent apparaître aussi dans le développement asymptotique à grande distance des fonctions de corrélation correspondant à un hamiltonien presque critique.

(iv) Enfin quelques vecteurs propres n'affectent pas la physique. Un exemple est donné par le vecteur propre réalisant une renormalisation multiplicative constante des variables dynamiques  $\sigma(x)$ . Ces vecteurs propres sont appelés *redundants*.

*Classification des point fixes.* Les points fixes peuvent être classés d'après leurs propriétés de stabilité locale, c'est à dire le nombre de vecteurs propres essentiels. Ce nombre est aussi le nombre de paramètres qu'il est nécessaire de fixer pour imposer à un hamiltonien général d'être sur la surface qui forme le bassin d'attraction du point fixe. Pour un point fixe non trivial correspondant à des hamiltoniens critiques, il est la co-dimension de la surface critique.

### 9.3.3 Le domaine critique

Dans l'étude du modèle quasi-gaussien nous avons trouvé que des propriétés universelles émergeaient non seulement à la température critique où la longueur de corrélation est infinie, mais aussi dans ce qu'on appelle le domaine critique, c'est à dire près de  $T_c$  en faible champ quand la longueur de corrélation est grande par rapport à l'échelle microscopique. On s'attend qu'une telle universalité apparaisse aussi pour des points fixes généraux du GR. En effet, si la longueur de corrélation  $\xi$  est finie, on peut faire des transformations d'échelle jusqu'à des  $\lambda$  d'ordre  $\xi$ . Après ces transformations, la longueur de corrélation est ramenée à une taille d'ordre 1. L'hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda$  transformé n'est plus critique, et le modèle peut être résolu de façon perturbative. Mais en même temps toutes les composantes de  $\mathcal{H}_\lambda$  sur des vecteurs propres inessentiels s'annulent asymptotiquement pour  $\xi \rightarrow \infty$ . Donc  $\mathcal{H}_\lambda$  ne dépend plus que d'un nombre de paramètres égal au nombre de vecteurs propres essentiels (cf. aussi les sections 4.7.2, 7.4).

L'universalité est la conséquence de la disparition pour  $\lambda = O(\xi) \gg 1$  de toutes les composantes sur les vecteurs propres inessentiels.

### 9.3.4 Equations du groupe de renormalisation: Autre forme

L'équation (9.6) peut être écrite de façon équivalente (négligeant le reste  $R_n$ )

$$Z^{n/2}(\lambda)W_\lambda^{(n)}(x_1/\lambda, \dots, x_n/\lambda) = W^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (9.29)$$

Supposons maintenant que l'hamiltonien  $\mathcal{H}_\lambda$  soit paramétrisé en termes de constantes  $h_i(\lambda)$ . Alors on peut changer de notation et écrire

$$W_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1, \dots, x_n),$$

où ici  $\{h(\lambda)\}$  représente l'ensemble des  $h_i(\lambda)$ . Nous dérivons alors l'équation (9.29) par rapport à  $\lambda$ . Le membre de droite n'en dépend pas et donc

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ Z^{n/2}(\lambda) W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1/\lambda, \dots, x_n/\lambda) \right] = 0. \quad (9.30)$$

Introduisons l'opérateur différentiel

$$D_{\text{RG}} \equiv \sum_{\ell=1}^n x_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} + \sum_i \beta_i(h) \frac{\partial}{\partial h_i} + nD_\sigma(h),$$

avec les définitions

$$\beta_i(h) = -\lambda \frac{d}{d\lambda} h_i(\lambda), \quad (9.31)$$

$$2D_\sigma(h) = -\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda). \quad (9.32)$$

Ces deux équations sont équivalentes aux équations (9.18,9.19). Leur propriété markovienne implique que  $\beta_i$  et  $D_\sigma$  ne dépendent pas de  $\lambda$  explicitement, mais seulement à travers des  $h_i(\lambda)$ . L'équation (9.30) peut alors être écrite (par utilisation de la propriété de dérivée en chaîne)

$$\begin{aligned} & -Z^{-n/2}(\lambda) \lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ Z^{n/2}(\lambda) W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1/\lambda, \dots, x_n/\lambda) \right] \\ & = D_{\text{RG}} W^{(n)}(\{h(\lambda)\}; x_1/\lambda, \dots, x_n/\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, puisque dans la nouvelle équation  $\lambda$  ne joue plus de rôle explicite, nous pouvons poser  $\lambda = 1$ . L'équation devient une équation aux dérivées partielles pour les fonctions de corrélation:

$$\left[ \sum_{\ell} x_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} + \sum_i \beta_i(h) \frac{\partial}{\partial h_i} + nD_\sigma(h) \right] W^{(n)}(\{h\}; x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (9.33)$$

autre forme très fréquente des équations de groupe de renormalisation. Dans ce formalisme, un point fixe est défini par la solution simultanée de toutes les équations

$$\beta_i(h^*) = 0,$$

et l'équation (9.33) implique alors le comportement d'échelle déjà obtenu directement.

## 9.4 Le point fixe gaussien

Dans un cadre assez général, nous avons relié l'apparition de propriétés d'universalité du comportement critique à l'existence de points fixes de transformations d'un groupe de renormalisation dans l'espace des hamiltoniens. Il reste maintenant à construire explicitement ces transformations et déterminer leurs points fixes. Une analyse globale de ce problème n'a jamais été faite. Mais, dans les cas favorables, il a été possible d'exhiber quelques points fixes et d'étudier leur stabilité locale.

Il existe cependant un sous-espace de l'espace des hamiltoniens qui peut être exploré complètement et dans lequel les transformations du GR peuvent être construites explicitement: le sous-espace des hamiltoniens quadratiques qui correspond aux modèles gaussiens. Dans ce cas on peut prendre  $R^{(n)} \equiv 0$  dans les transformations de GR.

Les points fixes peuvent être identifiés: les hamiltoniens critiques convergent vers le *point fixe gaussien* dont les prédictions au-dessus de  $T_c$  coïncident avec l'approximation de champ moyen. Comme nous allons le montrer, la discussion a beaucoup de points en commun avec celle de la marche au hasard en section 3.3.7. Notons, enfin, qu'une seule fonction de corrélation connexe est différente de zéro, la fonction à deux points, ce qui simplifie notablement l'analyse.

### 9.4.1 Le point fixe gaussien

Nous avons montré en section 8.4 que les prédictions universelles du modèle gaussien pouvaient être déduites de l'hamiltonien

$$\mathcal{H}_G(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x \left[ \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \sigma(x))^2 + m^2 \sigma^2(x) \right], \quad m^2 \propto T - T_c,$$

défini dans l'espace continu à  $d$  dimensions.

À  $T_c$ , l'hamiltonien se réduit à

$$\mathcal{H}_G(\sigma)|_{m=0} = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \sigma(x))^2,$$

et  $W^{(2)}(x)$ , la fonction à deux points, est donnée par (équation (8.35))

$$W^{(2)}(x) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \frac{1}{|x|^{d-2}}.$$

Dans une dilatation d'échelle  $\lambda$ , la fonction devient

$$W^{(2)}(\lambda x) = \lambda^{2-d} W^{(2)}(x).$$

Elle a donc un comportement d'échelle (9.16) caractéristique d'un hamiltonien de point fixe. La renormalisation du champ s'en déduit:

$$Z(\lambda) = \lambda^{-(d-2)}, \quad (9.34)$$

ainsi que la dimension  $d_\sigma$  du champ gaussien critique:

$$d_\sigma = \frac{1}{2}(d-2). \quad (9.35)$$

L'hamiltonien

$$\mathcal{H}_G^*(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma)|_{m=0}, \quad (9.36)$$

dont la seule fonction de corrélation connexe non nulle a un comportement d'échelle, est donc un hamiltonien de point fixe: le *point fixe gaussien*. Il est invariant dans les transformations d'un groupe de renormalisation ici linéaire:

$$x_\mu \mapsto \lambda x_\mu \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mapsto \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \sigma \mapsto Z^{1/2}(\lambda)\sigma = \lambda^{(2-d)/2}\sigma, \quad (9.37)$$

comme on le vérifie directement.

Nous avons donc identifié le point fixe gaussien, dont les prédictions coïncident aussi avec les prédictions universelles de l'approximation de champ moyen.

#### 9.4.2 Hamiltonien quadratique isotrope général

Nous considérons maintenant un hamiltonien général quadratique en  $\sigma$  du type envisagé en section 8.2. Dans le cas de forces à courte portée, la transformée de Fourier du coefficient du terme quadratique en  $\sigma$  est régulière et peut être développée en série de Taylor. Dans l'espace direct, cela signifie que le terme quadratique en  $\sigma$  peut être développé en puissances de l'opérateur dérivée. Dans l'espace continu, un hamiltonien invariant par rotations-réflexions d'espace ne peut dépendre que du carré scalaire de l'opérateur gradient  $\nabla_x$  et prend donc la forme

$$\mathcal{H}_G(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{r=0} u_r^{(2)} \sigma(x) (-\nabla_x^2)^r \sigma(x), \quad (9.38)$$

où les coefficients  $u_r^{(2)}$  sont des constantes et le carré scalaire de  $\nabla_x$  est le laplacien

$$\nabla_x^2 \equiv \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu^2 \equiv \sum_{\mu=1}^d \frac{\partial^2}{(\partial x_\mu)^2}.$$

Un hamiltonien de réseau contiendrait aussi des termes ayant la symétrie du réseau mais non isotrope de type  $\sum_\mu \partial_\mu^4$  par exemple.

Les transformations de groupe de renormalisation (9.37), qui ont conduit au point fixe gaussien, entraînent maintenant

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\lambda(\sigma) &= \frac{1}{2}Z(\lambda)\lambda^d \int d^d x \sum_{r=0} u_r^{(2)} \lambda^{-2r} \sigma(x) (-\nabla_x^2)^r \sigma(x) \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{r=0} u_r^{(2)} \lambda^{2-2r} \sigma(x) (-\nabla_x^2)^r \sigma(x).\end{aligned}$$

Cette expression est donc directement un développement sur les vecteurs propres. Le coefficient du terme avec  $2r$  dérivées est multiplié par

$$u_r^{(2)} \mapsto u_r^{(2)}(\lambda) = \lambda^{2-2r} u_r^{(2)}. \quad (9.39)$$

Enfin dérivant  $u_r^{(2)}(\lambda)$  (équation (9.39)) par rapport à  $\lambda$ , on trouve l'équivalent de l'équation (9.18), qui est aussi l'équation (9.22) car la transformation  $\mathcal{T}$  est linéaire, sous la forme (9.25):

$$\lambda \frac{du_r^{(2)}(\lambda)}{d\lambda} = (2-2r)u_r^{(2)}(\lambda).$$

Le flot complet du groupe de renormalisation s'en déduit. En particulier, pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , ce sont les vecteurs propres avec le moins de dérivées qui dominent.

*Vecteur propre essentiel.* Le coefficient du terme  $r = 0$  croît ce qui n'est pas surprenant. Le vecteur propre est essentiel pour le point fixe gaussien car il induit une longueur de corrélation finie, qui éloigne du point fixe.

*Vecteur propre redondant.* Le vecteur propre  $r = 1$  est proportionnel à l'hamiltonien de point fixe. Il correspond à un simple changement de la normalisation de  $\sigma$ , sans effet physique et est donc redondant.

*Vecteurs propres inessentiels.* Tous les termes avec  $r > 1$  décroissent pour  $\lambda \rightarrow \infty$  et sont donc inessentiels.

La conclusion est la suivante: Le point fixe gaussien est stable dans la classe des modèles critiques gaussiens. Dans la classe générale des modèles gaussiens il n'y a qu'une seule direction d'instabilité: elle correspond à la déviation de la température critique.

*Brisure de la symétrie de réflexion.* Notons enfin que si l'on élargit la discussion à des termes linéaires en  $\sigma$  qui brise la symétrie d'Ising, on peut ajouter un terme  $H \int d^d x \sigma(x)$ . Ce terme de champ magnétique dans une dilatation devient

$$H \int d^d x \sigma(x) \mapsto H Z^{1/2}(\lambda) \lambda^d \int d^d x \sigma(x) = H \lambda^{d/2+1} \int d^d x \sigma(x), \quad (9.40)$$

et est donc également essentiel avec valeur propre  $d/2 + 1$ .

*Opérateurs.* Dans le cadre de la théorie quantique des champs, aux polynômes dans le champ  $\sigma(x)$  sont associés des *opérateurs* quantiques. Pour cette raison on appelle souvent ces polynômes opérateurs bien qu'ici les champs sont classiques. Ainsi on parle d'opérateurs essentiels, marginaux, inessentiels, un langage traditionnel que nous utiliserons parfois aussi.

## 9.5 Vecteurs propres: analyse générale

Nous étudions maintenant les propriétés de transformation de fonctions locales générales de  $\sigma$  paires, c'est à dire ayant la symétrie du modèle d'Ising. Il n'est plus question ici d'étudier le groupe de renormalisation général, mais seulement la version linéarisée au voisinage du point fixe gaussien.

### 9.5.1 Vecteurs propres

L'analyse de la section précédente ainsi que la propriété d'interactions de courte portée nous amène à faire un développement en dérivées. On considère donc une perturbation  $\Delta\mathcal{H}(\sigma)$  de la forme générale

$$\Delta\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma),$$

où les  $\mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma)$  sont des intégrales de monômes  $V_{\alpha}^{n,r}(\sigma)$  dans  $\sigma(x)$  et ses dérivées, de degré  $n$  (pair) en  $\sigma$  et avec exactement  $r$  dérivées ( $r$  également pair):

$$\mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma) = \int d^d x V_{\alpha}^{n,r}(\sigma(x), \partial_{\mu}\sigma(x), \dots).$$

L'indice  $\alpha$  est là pour rappeler qu'il y a en général plusieurs polynômes homogènes à  $n, r$  fixés.

En plus des termes quadratiques déjà étudiés, les termes  $V_{\alpha}^{n,r}(\sigma)$  de degré le moins élevé sont, par exemple,

$$\sigma^4(x), \quad \sigma^6(x), \quad \sigma^2(x)(\partial_{\mu}\sigma(x))^2, \quad \sigma^5(x)\partial^2\sigma(x) \dots$$

Appliquant la transformation du groupe de renormalisation, on trouve

$$\mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\lambda, \sigma) = Z^{n/2}(\lambda) \lambda^{d-r} \mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma) = \lambda^{d-n(d-2)/2-r} \mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma). \quad (9.41)$$

Nous voyons que les  $\mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma)$  sont des vecteurs propres que nous pouvons classer suivant les valeurs décroissantes de  $l_{n,r} = d - n(d-2)/2 - r$ :

(i) Pour  $n = 2, r = 0, l_{2,0} = 2$ , et donc le vecteur propre  $\int \sigma^2(x) d^d x$ , est essentiel, et correspond à une déviation de la température critique.

(ii) Le vecteur propre quadratique  $n = 2, r = 2$  est redondant; il ne correspond qu'à une simple renormalisation du champ  $\sigma$ .

(iii) Au dessus de la dimension 4, tous les autres vecteurs propres sont inessentiels (irrelevant): sur la surface critique ( $T = T_c$ ) le point fixe gaussien est donc stable.

En dimension 4, le vecteur propre  $n = 4, r = 0$ , c'est à dire  $\int \sigma^4(x) d^d x$  devient marginal, et tous les autres vecteurs propres restent inessentiels. L'analyse linéaire ne permet pas de déterminer les propriétés de stabilité du point fixe

gaussien. Pour cela il faut construire un groupe de renormalisation qui prennent en compte les déviations à la théorie gaussienne de façon à pouvoir aller au delà de l'approximation linéaire. Si le point fixe gaussien est stable on s'attend à une convergence logarithmique.

Au dessous de la dimension 4,  $l_{4,0} = 4 - d > 0$  et donc  $\int \sigma^4(x) d^d x$  est essentiel: le point fixe gaussien est instable. Quand la dimension décroît, de nouveaux vecteurs propres deviennent également essentiels. Par exemple en dimension 3,  $\int \sigma^6(x) d^d x$  est marginal et pour  $d < 3$  essentiel. Il est important de se souvenir que cette analyse est spécifique du point fixe gaussien et n'a aucune raison d'être valable pour un autre point fixe.

Nous remarquons alors que cette analyse conduit aux mêmes conclusions que le calcul des corrections dominantes à l'approximation gaussienne en section 8.9.2.

*Forme différentielle.* Une autre façon d'écrire l'équation (9.41) est de développer  $\Delta \mathcal{H}_\lambda$  sur une base fixe, par exemple les vecteurs propres  $\mathcal{O}_\alpha^{n,r}(\sigma)$ , avec des coefficients variables:

$$\Delta \mathcal{H}_\lambda(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\alpha} h_{\alpha}^{(n,r)}(\lambda) \mathcal{O}_{\alpha}^{n,r}(\sigma),$$

où les coefficients  $h_{\alpha}^{(n,r)}(\lambda)$ , comme conséquence de l'équation (9.41), satisfont

$$h_{\alpha}^{(n,r)}(\lambda) = \lambda^{d-n(d-2)/2-r} h_{\alpha}^{(n,r)}(1).$$

La forme différentielle

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_{\alpha}^{(n,r)} = L^* h_{\alpha}^{(n,r)} = l_{n,r} h_{\alpha}^{(n,r)} \quad (9.42)$$

avec

$$l_{n,r} = d - \frac{1}{2}n(d-2) - r \quad (9.43)$$

est un exemple de l'équation (9.25).

### 9.5.2 Représentation de Fourier

En passant en représentation de Fourier, on obtient une autre expression des équations de groupe de renormalisation sous forme différentielle. Introduisons la représentation de Fourier du champ

$$\sigma(x) = \int d^d k e^{ikx} \tilde{\sigma}(k).$$

Nous développons  $\Delta \mathcal{H}$  alors en puissances de  $\tilde{\sigma}$  (cf. équation (9.3)):

$$\Delta \mathcal{H}(\sigma) = \sum_2^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d k_1 \dots d^d k_n \tilde{\sigma}(k_1) \dots \tilde{\sigma}(k_n) (2\pi)^d \delta^{(d)} \left( \sum k_i \right) u^{(n)}(k_i). \quad (9.44)$$

Répétant le raisonnement précédent, on vérifie que l'équation (9.6) mène aux transformations  $k_i \mapsto k_i/\lambda$  et donc

$$u^{(n)}(k_i)\delta^d\left(\sum k_i\right) \mapsto u^{(n)}(k_i/\lambda)\lambda^d\delta^{(d)}\left(\sum k_i\right),$$

ainsi que

$$\tilde{\sigma}(k) \mapsto Z^{1/2}(\lambda)\tilde{\sigma}(k) = \lambda^{-(d-2)/2}\tilde{\sigma}(k).$$

On en déduit

$$u_\lambda^{(n)}(k_i) = \lambda^d Z^{n/2}(\lambda)u^{(n)}(k_i/\lambda) = \lambda^{d-n(d-2)/2}u^{(n)}(k_i/\lambda). \quad (9.45)$$

Dérivant par rapport à  $\lambda$ , on trouve l'équivalent de l'équation (9.22), développée en puissances de  $\tilde{\sigma}(k)$ . Notant

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} u^{(n)}(k/\lambda) = - \sum_i k_i \frac{d}{dk_i} u^{(n)}(k/\lambda),$$

on obtient

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} u_\lambda^{(n)}(k) = \left( - \sum_i k_i \frac{\partial}{\partial k_i} + d - \frac{1}{2}n(d-2) \right) u_\lambda^{(n)}(k). \quad (9.46)$$

Cette équation est écrite pour la transformation du GR qui admet le point fixe (9.34,9.36). L'équation aux valeurs propres est alors

$$L^* u_\lambda^{(n)}(k) = \left( - \sum_i k_i \frac{\partial}{\partial k_i} + d - \frac{1}{2}n(d-2) \right) u_\lambda^{(n)}(k) = l u_\lambda^{(n)}(k). \quad (9.47)$$

L'équation (9.47) montre que les vecteurs propres sont des fonctions homogènes des variables dynamiques  $\sigma$  (les  $u_\lambda^{(n)}(k)$  pour différentes valeurs de  $n$  ne sont pas couplés) et des impulsions  $k_i$  (l'équivalent du nombre de dérivées dans l'espace direct).

Nous avons supposé que les fonctions  $u_\lambda^{(n)}(k)$  sont régulières (hypothèse de courte portée des interactions). Elles peuvent donc être développées sur une base de polynômes homogènes  $P_\alpha^{(n,r)}$  de degré  $r$  en  $k$ :

$$\sum_i k_i \frac{\partial}{\partial k_i} P_\alpha^{(n,r)}(k) = r P_\alpha^{(n,r)}(k),$$

l'indice  $\alpha$  rappelant qu'il y a en général plusieurs polynômes homogènes de degré  $r$ . Posant

$$u_\lambda^{(n)}(k) = \sum_{r,\alpha} h_\alpha^{(n,r)}(\lambda) P_\alpha^{(n,r)}(k),$$

on trouve alors que les coefficients  $h_\alpha^{(n,r)}$  satisfont l'équation (9.42) avec les valeurs propres  $l_{n,r}$  donnés par l'équation (9.43).

## 9.6 Au delà du point fixe gaussien: le développement en $\varepsilon$

Nous avons montré que le point fixe gaussien est instable pour  $d < 4$ . Nous supposons maintenant qu'au moins dans un sens perturbatif du type développement autour du point fixe gaussien, nous avons le droit de considérer la dimension  $d$  de l'espace comme un paramètre continu (pour plus de détails voir la section 12.6). Nous nous plaçons alors dans le voisinage immédiat de la dimension 4, considérant la déviation  $\varepsilon = 4 - d$  de la dimension 4 comme un paramètre de développement. Par ailleurs, nous ajustons un paramètre pour que le système que nous étudions reste critique ( $T = T_c$ ) ce qui a comme effet de supprimer la composante sur le vecteur propre essentiel  $n = 2, r = 0$ .

Nous faisons une hypothèse supplémentaire, dont nous vérifierons par des calculs explicites au moins la cohérence:

Nous avons déjà supposé que l'équation de groupe de renormalisation (9.18) était développable dans les perturbations au point fixe, et donc ici dans les déviations à la théorie gaussienne. Nous supposons, de plus, que l'équation de groupe de renormalisation est développable dans le paramètre  $\varepsilon = 4 - d$ .

### 9.6.1 Points fixes

Nous supposons que l'hamiltonien initial est critique ( $T = T_c$ ) et appartient à un voisinage du point fixe gaussien tel que pour des petites dilatations  $\lambda$ , l'équation (9.18) puisse être développée dans la déviation au point fixe gaussien. Dans ces conditions, le flot est initialement dominé par l'approximation linéaire. En particulier, les composantes  $h_\alpha(\lambda)$  sur tous les vecteurs propres inessentiels décroissent. Seule la composante sur  $\int d^d x \sigma^4(x)$ , que nous notons maintenant  $g(\lambda)$ , croît. Cependant, pour  $\varepsilon \ll 1$ ,  $g(\lambda) \sim g(1)\lambda^\varepsilon$  croît lentement. Il existe donc des valeurs de  $\lambda$  suffisamment grandes telles que toutes les composantes  $h_\alpha(\lambda)$  deviennent négligeables par rapport à  $g(\lambda)$  avant que  $g(\lambda)$  lui-même ne devienne si grand que le développement de l'équation (9.18) ne soit plus utilisable.

Remarquons que pour de telles valeurs de  $\lambda$ ,  $g(\lambda)$  doit être positif pour que  $\mathcal{H}(\sigma)$  soit positif pour  $\sigma$  grand et que la mesure sur  $\sigma$  soit définie.

Nous pouvons donc développer l'équation (9.18), projetée sur le vecteur propre correspondant, en puissances de  $g(\lambda)$ :

$$\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = (4 - d)g(\lambda) - \beta_2(d)g^2(\lambda) + O(gh_\alpha, g^3), \quad (9.48)$$

et nous redéfinissons  $\lambda$  de telle sorte que pour  $\lambda = 1$  ces équations asymptotiques soient déjà valables. Les termes négligés les plus importants sont le terme d'ordre  $g^3$  et des termes quadratiques proportionnels à  $h_\alpha g$ . Avec nos hypothèses les termes proportionnels à  $h_\alpha h_\beta$  sont encore plus petits.

En particulier, si les coefficients  $h_\alpha$  sont initialement nuls, leurs dérivées sont dominées par des termes d'ordre  $g^2$  ou plus. Les termes négligés  $gh_\alpha$  sont donc au moins d'ordre  $g^3$ .

Le coefficient  $\beta_2$  dépend de la dimension  $d$ . Nous avons supposé qu'il était régulier au voisinage de la dimension 4 et donc, à l'ordre dominant pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous pouvons le remplacer par sa valeur à  $d = 4$ .

Nous remarquons immédiatement que le signe de  $\beta_2(4)$  joue un rôle crucial. Examinons les différents cas:

(i)  $\beta_2(4) < 0$ . Dans ce cas, pour  $d \leq 4$ , les deux termes ont le même signe, la dérivée de  $g(\lambda)$  est positive et le point fixe gaussien est instable. Si initialement  $g(1)$  n'est pas nul  $g(\lambda)$  croît avec  $\lambda$  jusqu'à ce que le développement  $g(\lambda)$  ne soit plus valable, et on ne peut rien conclure de plus. En dimension 4, cependant, le flot est plus lent qu'en dimensions supérieures. Si initialement  $g(1)$  est voisin de zéro,  $g(\lambda)$  n'augmente d'abord que logarithmiquement:

$$g(\lambda) = g(1) + |\beta_2(4)| g^2(1) \ln \lambda + O(g^3(1)).$$

Pour  $d > 4$ , et donc  $\varepsilon < 0$ , on trouve un point fixe non gaussien

$$g^* = \varepsilon / \beta_2(4) + O(\varepsilon^2),$$

qui est un point fixe instable. Si initialement  $g(1) < g^*$ ,  $g(\lambda)$  converge vers le point fixe gaussien. Si  $g(1) = g^*$ ,  $g(\lambda) = g^*$  pour tout  $\lambda$ . Si  $g(1) > g^*$   $g(\lambda)$  croît et de nouveau nous ne pouvons rien conclure de plus dans ce cadre.

Un cas particulièrement intéressant est  $g(1) < g^*$  avec  $g^* - g(1) \ll 1$ . La couplage effectif  $g(\lambda)$  s'éloigne d'abord très lentement du point fixe instable. On trouve dans ces conditions une transition lente (crossover) entre un comportement des fonctions de corrélations dominé par le point fixe instable, et un comportement dominé par le point fixe stable.

(ii)  $\beta_2(4) = 0$ . Dans ce cas exceptionnel il vaut aller à l'ordre suivant et prendre en compte le terme d'ordre  $g^3$ .

(iii)  $\beta_2(4) > 0$ . Dans ce cas nous ne trouvons pour  $d > 4$  que le point fixe gaussien qui est stable.

En dimension 4,  $\int d^4x \sigma^4(x)$  est marginal. Le point fixe gaussien est maintenant stable car  $g(1)$  est positif et l'approche au point fixe est alors logarithmique,

$$g(\lambda) \sim \frac{1}{\beta_2(4) \ln \lambda},$$

en accord avec la discussion générale du groupe de renormalisation.

Ce cas est académique pour le problème que nous étudions, mais pas pour la physique des interactions microscopiques fondamentales.

Par contre, pour  $d < 4$ , le point fixe gaussien est instable, mais, pour  $\varepsilon$  petit, nous trouvons un autre point fixe

$$g^* = \varepsilon / \beta_2(4),$$

qui lui est stable. En effet si initialement  $g < g^*$ , alors  $g(\lambda)$  croît, et si au contraire  $g > g^*$  alors  $g(\lambda)$  décroît. Cette situation est particulièrement intéressante, et permet d'envisager de calculer des quantités universelles sous forme d'un développement en  $\varepsilon$ . En fait, pour les modèles que nous avons étudiés, les modèles de type Ising et les modèles avec symétries  $O(N)$ , c'est la situation qui est réalisée (Wilson et Fisher 1972). On peut s'en convaincre en calculant les premières corrections à la théorie quasi-gaussienne des fonctions à deux et quatre points (cf. section 10).

Linéarisant l'équation (9.48) au voisinage du point fixe, on trouve

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} (g(\lambda) - g^*) \sim -\omega (g(\lambda) - g^*), \quad (9.49)$$

avec (propriété de la parabole)

$$\omega = \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (9.50)$$

Donc, au moins pour  $\varepsilon$  petit,  $\omega$  est positif et

$$g(\lambda) - g^* \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\propto} \lambda^{-\omega}$$

tend vers zéro pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , ce qui confirme que le nouveau point fixe est stable par rapport à une perturbation de type  $\int d^d x \sigma^4(x)$  à la différence du point fixe gaussien.

L'exposant  $\omega$  caractérise la décroissance des corrections les plus importantes au comportement universel prédit par l'hamiltonien de point fixe. C'est aussi une quantité universelle.

Enfin, dans l'approximation quadratique, l'équation de flot (9.48) s'intègre exactement:

$$\frac{dg}{\varepsilon g - \beta_2 g^2} = \frac{d\lambda}{\lambda} \Rightarrow \ln \lambda = \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\varepsilon g' - \beta_2 g'^2},$$

et donc, pour  $g^* \propto \varepsilon \ll 1$ ,

$$g(\lambda) = \frac{g^* g}{g + \lambda^{-\varepsilon} (g^* - g)}.$$

*Dimension du paramètre d'ordre.* Une fois la valeur de point fixe  $g^*$  déterminé, on obtient la dimension du paramètre d'ordre  $d_\sigma = D_\sigma(g^*)$ . Le calcul de la fonction à deux points au second ordre dans le paramètre  $g$  montre que la déviation

$$\eta(g) = 2D_\sigma(g) - d + 2 \quad (9.51)$$

à la valeur gaussienne commence à l'ordre  $g^2$ , et donc la correction à la dimension de champ moyen ou du point fixe gaussien commence à l'ordre  $\varepsilon^2$ .

### 9.6.2 Autres vecteurs propres

Pour  $\beta_2(4) > 0$ , nous avons trouvé un point fixe stable avec  $g^* = O(\varepsilon)$ . Mais nous avons complètement négligé les composantes sur les vecteurs propres inessentiels. Les plus importants près de la dimension 4 sont ceux tels que le total du nombre de dérivées et de facteurs  $\sigma$  est 6, comme  $\int d^d x \sigma^6(x)$ .

Nous observons que les équations correspondant aux composantes des vecteurs propres inessentiels  $h_\alpha^{(n,r)}$  peuvent dépendre de  $g$  à partir de l'ordre quadratique. Considérons un paramètre  $h_\alpha$  pour lequel c'est le cas. L'équation d'évolution prend alors la forme

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_\alpha(\lambda) = l_\alpha h_\alpha(\lambda) - \beta_{hg^2} g^2(\lambda) + \dots, \quad (9.52)$$

( $l_\alpha < 0$ ) où les termes négligés les plus importants sont proportionnels à  $h_\alpha g$ . À l'ordre dominant en  $\varepsilon$ , on trouve la solution de point fixe

$$h_\alpha^* = -\beta_{hg^2} \varepsilon^2 / \beta_2^2 / l_\alpha + O(\varepsilon^3),$$

où  $\beta_{hg^2}$ ,  $\beta_2$  et la valeur propre gaussienne  $l_\alpha$  peuvent être remplacés par leurs valeurs en dimension 4. Donc les coefficients des termes inessentiels au point fixe sont au moins d'ordre  $\varepsilon^2$ . Revenant à l'équation (9.48), qui prend la forme plus générale

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\beta(g, \{h\}),$$

on remarque que les termes négligés comme  $g^3$  et  $gh_\alpha$  sont tous au moins d'ordre  $\varepsilon^3$  et donc les corrections à  $g^*$  et à la pente  $\omega$  sont d'ordre  $\varepsilon^2$ : Le développement en  $\varepsilon$  est au moins une procédure cohérente, et le point fixe peut être déterminé comme un développement en  $\varepsilon$ .

On note cependant que l'hamiltonien de point fixe ne se réduit en général à une combinaison du terme gaussien et du terme  $\int d^d x \sigma^4(x)$  qu'à l'ordre dominant en  $\varepsilon$  puisque les autres coefficients  $h_\alpha$  ne s'annulent pas au point fixe.

On peut calculer ensuite les valeurs propres correspondant au flot dans le voisinage de ce nouveau point fixe. On vérifie que les valeurs propres diffèrent des valeurs propres associées au point fixe gaussien à l'ordre  $\varepsilon$ . Donc pour  $0 \leq \varepsilon \ll 1$ , la classification des vecteurs propres reste celle du cas gaussien à  $d = 4$  pour tous les vecteurs sauf un. Un seul vecteur propre est très sensible au changement de dimension: le vecteur propre qui à l'ordre dominant est  $\int d^d x \sigma^4(x)$ , parce qu'il est marginal à  $d = 4$ . Essentiel du point de vue du point fixe gaussien, il devient inessentiel pour le nouveau point fixe.

*Groupe de renormalisation perturbatif.* Cette analyse suggère qu'il doit être possible de déterminer les équations de flot perturbativement, dans une développement autour du modèle gaussien, alors que nous savons que c'est impossible pour les fonctions de corrélation.

*Flot entre points fixes.* Il est possible de construire perturbativement la trajectoire du GR qui relie le point fixe gaussien au point fixe stable non gaussien. Dans ce but on peut éliminer dans les équations de flot des paramètres  $h_\alpha$  le paramètre de dilatation  $\lambda$  au profit de la constante  $g$ .

Reprenons l'exemple de l'équation (9.52). Sur une trajectoire du GR  $h_\alpha$  peut être considéré comme une fonction de  $g$  et donc utilisant la propriété de dérivée en chaîne

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} h_\alpha = \lambda \frac{d}{d\lambda} g \frac{\partial}{\partial g} h_\alpha = -\beta(g, \{h\}) \frac{\partial}{\partial g} h_\alpha.$$

Le membre de gauche de l'équation (9.52) est d'ordre  $\varepsilon^2$  puisque la fonction  $\beta$  est d'ordre  $\varepsilon^2$ ,  $\partial/\partial g$  d'ordre  $1/\varepsilon$  et  $h_\alpha$  d'ordre  $\varepsilon^2$  au moins. À l'ordre dominant on peut le négliger, et on trouve simplement

$$h_\alpha(\lambda) = -g^2(\lambda)/l_{nr}(4) + O(\varepsilon^3).$$

La dérivée ne contribue qu'à l'ordre suivant. Il est ainsi possible de calculer perturbativement les amplitudes des vecteurs propres inessentiels en fonction de  $g$ . Substituant les développements correspondants dans la fonction  $\beta$ , on trouve une équation unique pour  $g(\lambda)$ :

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\beta(g(\lambda)), \quad (9.53)$$

où  $\beta(g)$  est maintenant une série formelle en  $g$  seulement. La solution de cette dernière équation détermine complètement le flot de l'hamiltonien. Cette solution ne dépend que d'un paramètre puisque les conditions aux limites à  $\lambda = 1$  pour les amplitudes des termes inessentiels sont toutes reliées à la valeur de  $g(1)$ .

Le zéro  $g^*$  de la fonction  $\beta$  détermine alors le point fixe et sa dérivée au point fixe  $\omega$  est une quantité universelle qui caractérise les corrections les plus importantes au comportement d'échelle.

C'est une stratégie de ce type qui est utilisée dans les calculs pratiques.

## 9.7 Valeurs propres et dimensions des polynômes locaux

Ayant déterminé le comportement asymptotique des fonctions de corrélation par dilatation, on pourrait croire qu'on connaît aussi le comportement de valeurs moyennes de polynômes locaux dans les champs, comme par exemple  $\sigma^k(x)$  ou  $[\nabla\sigma(x)]^2$ , qu'on peut obtenir en prenant la limite d'un produit de champs, par exemple

$$\langle \sigma^2(y)\sigma(x_1)\dots\sigma(x_n) \rangle = \lim_{y' \rightarrow y} \langle \sigma(y)\sigma(y')\sigma(x_1)\dots\sigma(x_n) \rangle.$$

Il n'en est rien car les fonctions de corrélation correspondant à l'hamiltonien de point fixe (équation (9.16)) sont en général singulières quand des arguments

coïncident comme des exemples le montrerons (cf. aussi la remarque de la fin de la section 8.4.3).

Il existe cependant un point fixe exceptionnel où cette propriété est vraie, c'est le point fixe gaussien que nous avons étudié en section 9.5.

En général les valeurs moyennes de  $\sigma^2(y)$  ne sont pas définies, et il faut soustraire au produit  $\sigma(y)\sigma(y')$  une fonction singulière de  $y - y'$  pour obtenir une limite finie (on parle de renormalisation). Cette procédure se généralise à des puissances supérieures, ou des fonctions locales impliquant des dérivées de  $\sigma$ .

En section 9.3 nous avons discuté les vecteurs propres du GR en un point fixe. L'étude du cas gaussien indique que ces vecteurs propres ont la forme d'une intégrale d'une fonction locale des champs. En fait, à cause de la localité de la théorie, il existe aussi des vecteurs propres locaux  $\mathcal{O}_\alpha(\sigma, x)$  de la forme de séries en  $\sigma(x)$  et ses dérivées. Ils correspondent à des perturbations qui brisent l'invariance par translation. Leurs intégrales sur tout l'espace redonnent les vecteurs propres que nous avons discuté. Ces fonctions locales  $\mathcal{O}(\sigma, x)$  des champs ont la propriété suivante: les fonctions de corrélation

$$W_{\mathcal{O}}^{(n)}(y; x_1, \dots, x_n) = \langle \mathcal{O}(\sigma, y) \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle_{\text{conn.}},$$

ont un comportement en loi de puissance pour grande dilatation:

$$W_{\mathcal{O}}^{(n)}(\lambda y; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \propto \lambda^{-nd_\sigma - d_{\mathcal{O}}} W_{\mathcal{O}}^{*(n)}(y; x_1, \dots, x_n), \quad (9.54)$$

où par définition  $d_{\mathcal{O}}$  est la *dimension* de l'opérateur  $\mathcal{O}(\sigma, x)$ .

Considérons alors l'intégrale d'espace

$$\mathcal{V}(\sigma) = \int d^d x \mathcal{O}(\sigma, x).$$

Ses fonctions de corrélation sont obtenues par intégration:

$$\int d^d y W_{\mathcal{O}}^{(n)}(y; x_1, \dots, x_n) = \langle \mathcal{V}(\sigma) \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle_{\text{conn.}}.$$

Avec des hypothèse raisonnables, mais à vérifier explicitement dans les exemples, de la relation

$$\int d^d y W_{\mathcal{O}}^{(n)}(\lambda y; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{-d} \int d^d y W_{\mathcal{O}}^{(n)}(y; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

on déduit, en utilisant le comportement asymptotique (9.54),

$$\langle \mathcal{V}(\sigma) \sigma(\lambda x_1) \dots \sigma(\lambda x_n) \rangle_{\text{conn.}} \propto \lambda^{d - nd_\sigma - d_{\mathcal{O}}}.$$

Le membre de droite est la variation de la fonction à  $n$  points au premier ordre quand on ajoute un terme proportionnel à  $\mathcal{V}$  à l'hamiltonien:

$$\int [d\sigma] \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) e^{-\mathcal{H} - \theta \mathcal{V}} = \int [d\sigma] \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) e^{-\mathcal{H}} (1 - \theta \mathcal{V} + O(\theta^2)).$$

Comparant ce terme au terme d'ordre zéro, nous observons que la perturbation  $\mathcal{V}$  a engendré un facteur  $\lambda^{d-d_{\mathcal{O}}}$  supplémentaire dans le comportement à grande distance. Ce facteur est donc lié à la valeur propre  $l_{\mathcal{V}}$  associée au vecteur propre  $\mathcal{V}$ . Nous avons obtenu ainsi une relation générale entre dimension d'un opérateur propre local et valeur propre de la perturbation à l'hamiltonien correspondante:

$$l_{\mathcal{V}} + d_{\mathcal{O}} = d. \tag{9.55}$$

## Chapitre 10

### Groupe de renormalisation perturbatif: calculs explicites

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'au moins au voisinage de la dimension 4, avec certaines hypothèses sur l'existence d'un prolongement dimensionnel et sur la régularité des transformations du groupe de renormalisation, on peut ramener, près de la dimension 4, l'étude du flot d'un hamiltonien général au flot du coefficient  $g$  du terme essentiel:  $\int d^d x \sigma^4(x)$ . Nous voulons dans ce chapitre donner une première idée des calculs nécessaires pour déterminer le coefficient  $\beta_2$  du développement de la fonction  $\beta(g)$  qui gouverne le flot de  $g$  (cf. équation (9.53)), et dont le signe est si important pour établir l'existence d'un point fixe.

Le résultat peut être obtenu par un calcul perturbatif des fonctions à deux et quatre points au premier ordre non trivial en  $g$ , correspondant à l'intégration gaussienne dans la méthode du col (cf. l'expression (6.27)) et donc à des diagrammes de Feynman à une boucle.

#### 10.1 Hamiltonien critique et développement perturbatif

On part donc de l'hamiltonien, ou énergie de configuration, dans l'espace continu ne prenant en compte que la correction indispensable au modèle gaussien, qui est aussi la perturbation dominante près de la dimension 4:

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma) + \int d^d x \left[ \frac{1}{2} r_c(g) \sigma^2(x) + \frac{1}{4!} g \sigma^4(x) \right] \quad (10.1)$$

avec

$$\mathcal{H}_G(\sigma) = \frac{1}{2} \int d^d x \left[ \sum_{\mu} (\partial_{\mu} \sigma(x))^2 + \sum_{k=1} u_{k+1} \sum_{\mu} \partial_{\mu} \sigma(x) (-\nabla^2)^k \partial_{\mu} \sigma(x) \right]. \quad (10.2)$$

La fonction  $r_c(g)$  est déterminée ordre par ordre en  $g$  par la condition que le modèle reste critique pour toute valeur de  $g$ , c'est à dire

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p=0, g) = 0.$$

Nous avons vu en effet qu'un effet trivial de la perturbation quartique est de modifier la température critique et donc  $r_c(g) = O(g)$  ou  $T_c = O(g)$ .

*Comportement à courte distance ou à grande impulsion: divergences "ultra-violettes".* L'hamiltonien (10.2) diffère du hamiltonien du point fixe gaussien (9.36) par l'ajout de termes quadratiques en  $\sigma$  avec plus de deux dérivées du type  $\sigma(x)\nabla^{2k}\sigma(x)$ , qui sont inessentiels à grande distance. C'est un substitut nécessaire dans le continu à la structure de réseau qui borne les composantes de Fourier du champ à une zone de Brillouin. En effet, pour pouvoir définir, au moins perturbativement, des valeurs moyennes de monômes locaux dans les champs, il faut que les limites de fonctions de corrélation de produits de champs à points coïncidants existent (cf. la discussion en section 9.7). On vérifie que ceci implique que  $\Delta(x-y)$ , la fonction à deux points gaussienne appelée aussi *propagateur*, soit suffisamment régulière à courte distance, et donc que sa transformée de Fourier  $\tilde{\Delta}(q)$  décroisse suffisamment vite à grande impulsion.

Or, comme nous l'avons déjà remarqué en fin de section 8.4.3, le choix correspondant au point fixe gaussien,

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \frac{e^{ipx}}{p^2},$$

conduit à des singularités de courte distance puisque

$$\langle \sigma(x)\sigma(y) \rangle_{\text{gaus.}} \underset{|x-y| \rightarrow 0}{\propto} |x-y|^{2-d}.$$

En représentation de Fourier, cette difficulté se traduit par une divergence à grande impulsion (appelée ultraviolette pour des raisons historiques):

$$\langle \sigma(x)\sigma(x) \rangle_{\text{gaus.}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{p^2}.$$

Ce problème est engendré par le passage au continu puisque, sur le réseau, les points sont séparés au moins d'une maille et, en représentation de Fourier, les impulsions sont bornées par la zone de Brillouin.

On choisit donc une fonction à deux points gaussienne de la forme

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{ipx} \tilde{\Delta}(p) \quad (10.3a)$$

$$\frac{1}{\tilde{\Delta}(p)} = p^2 + \sum_{k=2} u_k p^{2k}, \quad (10.3b)$$

c'est à dire à laquelle des termes négligeables à grande distance ont été ajoutés. De plus, la fonction  $1/\tilde{\Delta}(p)$  doit être positive pour tout  $p \neq 0$ , pour que l'intégrale sur les champs existe.

Pour les calculs perturbatifs qui suivent une décroissance en  $1/p^6$  suffit. Si l'on veut construire un groupe de renormalisation perturbatif exact, il est nécessaire de prendre des fonctions à deux points gaussiennes régulières pour  $p$  réel et décroissant plus vite que toute puissance pour  $|p| \rightarrow \infty$ .

La nécessité de considérer des propagateurs ainsi modifiés est un autre signe du non découplage de la physique aux différentes échelles de distance.

*Groupe de renormalisation perturbatif asymptotique.* Nous utilisons maintenant l'analyse de la section 9.6. De plus, nous exprimons les équations de groupe de renormalisation en termes des fonctions de vertex en représentation de Fourier  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ . Nous partons donc de l'équation (9.10), où nous négligeons dans le membre de gauche toute dépendance autre que le coefficient  $g(\lambda)$  de  $\sigma^4$ . Dans le voisinage du point fixe gaussien et dans la logique du développement en  $\varepsilon$ , cela correspond à négliger toute contribution au comportement asymptotique des termes inessentiels (au sens du point fixe gaussien), c'est à dire qui décroît au moins comme  $1/\lambda^2$  à des puissances de  $\ln \lambda$  près, à tout ordre fini en  $g$  et  $\varepsilon$ . L'équation (9.10) se simplifie alors en

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &\sim \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; g(\lambda)) \\ &\underset{|p_i| \rightarrow 0}{\sim} Z^{n/2}(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1/\lambda, \dots, p_n/\lambda; g), \end{aligned} \quad (10.4)$$

où les variables  $p_i$  sont petites comme résultat d'une première dilatation qui a éliminé les termes inessentiels. Par ailleurs (équation (9.32))

$$-\lambda \frac{d \ln Z}{d\lambda} = 2D_\sigma(g(\lambda)). \quad (10.5)$$

## 10.2 Détermination du point fixe

Puisqu'il n'y a que deux fonctions inconnues,  $\beta(g)$  gouvernant le flot de  $g(\lambda)$  et

$$\eta(g) = 2D_\sigma(g) - d + 2$$

(introduit en (9.51)) relié à  $Z(\lambda)$ , il suffit de calculer deux fonctions de vertex. Il est commode de choisir les fonctions à deux et quatre points. Plus de détails sur les calculs perturbatifs peuvent être trouvés au chapitre 12.

### 10.2.1 La fonction à deux points

Le calcul de la fonction à deux points de la section 8.9 reste valable, à condition d'utiliser le propagateur  $\tilde{\Delta}(q)$  du continu et d'intégrer sur les variables de Fourier sans restriction. On trouve (cf. équation (8.74))

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g) = p^2 + O(p^4) + (r_c)_1 g + \frac{g}{2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q) + O(g^2).$$

La première correction à la fonction de vertex à deux points  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  est une constante. À  $T_c$ , la fonction  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g)$  s'annule à  $p = 0$  ce qui fixe la valeur de  $(r_c)_1$ :

$$(r_c)_1 = -g \frac{1}{2(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q). \quad (10.6)$$

La fonction à deux points garde donc à l'ordre  $g$  pour  $p \rightarrow 0$  son comportement gaussien

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g) = p^2 + O(p^4) + O(g^2).$$

Utilisant, pour  $p \rightarrow 0$ , l'équation de groupe de renormalisation (10.4) pour  $n = 2$ ,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g(\lambda)) \sim Z(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; g),$$

qui donne à cet ordre

$$p^2 = Z(\lambda) \lambda^d p^2 / \lambda^2 + O(g^2),$$

on trouve que la renormalisation  $Z(\lambda)$  garde sa forme gaussienne

$$Z(\lambda) = \lambda^{2-d} + O(g^2),$$

et donc, utilisant l'équation (10.5),

$$2D_\sigma(g) = d - 2 + \eta(g) = -\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = d - 2 + O(g^2).$$

La fonction  $\eta(g)$  est d'ordre  $g^2$ .

### 10.2.2 La fonction à quatre points

Après un peu d'algèbre (théorème de Wick et transformation de Legendre, cf. section 6.5), on obtient la première correction à l'approximation quasi-gaussienne ou de champ moyen de la fonction à quatre points (en représentation de Fourier):

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g - \frac{1}{2} g^2 (B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) + B(p_1 + p_4)) + O(g^3)$$

avec

$$B(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q) \tilde{\Delta}(p + q). \quad (10.7)$$

Cette expression peut aussi être obtenue en développant la version continue de l'équation (6.27) (voir ci-dessous).

La différence de signe entre le terme d'ordre  $g$  et le terme d'ordre  $g^2$  reflète l'alternance de signe dans le développement de l'exponentielle  $\exp[-g\sigma^4]$ .

À  $T_c$  pour  $q \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\Delta}(q)$  qui est la transformée de Fourier de la fonction à deux points gaussienne, se comporte comme  $1/q^2$ . C'est pourquoi, pour  $d \leq 4$ , la fonction  $B(p)$  tend vers l'infini pour  $p \rightarrow 0$ .

Après le changement de variables  $q = |p|q'$ :

$$1/\tilde{\Delta}(q) = p^2(q'^2 + O(p^2)), \quad 1/\tilde{\Delta}(p+q) = p^2((\hat{p} + q')^2 + O(p^2)),$$

où  $\hat{p}$  est un vecteur de longueur unité colinéaire à  $p$ . Alors, pour  $d < 4$ , dans la limite  $p \rightarrow 0$ ,

$$B(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} b(\varepsilon)p^{-\varepsilon} \quad (10.8)$$

avec

$$b(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{q^2(\hat{p} + q)^2}, \quad (10.9)$$

où la limite  $p \rightarrow 0$  a été prise dans l'intégrant parce que l'intégrale limite est convergente.

Pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $b(\varepsilon)$  tend vers l'infini à cause de sa divergence de l'intégrale pour  $|q| \rightarrow \infty$  à  $d = 4$ . Pour extraire la partie divergente, il suffit donc d'évaluer la contribution venant des valeurs  $|q| \gg 1$ ,

$$b(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|q| > 1} \frac{d^d q}{q^4}.$$

Dans l'intégrale on peut introduire une variable radiale  $q$  et des variables angulaires. L'intégrale sur les variables angulaires donne l'aire  $A_d$  de la sphère à  $d$  dimensions qui par les règles du prolongement dimensionnel (cf. section 12.6) vaut

$$A_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = 2\pi^2 + O(\varepsilon).$$

Enfin,

$$\int_1^\infty \frac{q^{d-1} dq}{q^4} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on trouve donc

$$b(\varepsilon) = \frac{K}{\varepsilon} + O(1), \quad K = \frac{1}{8\pi^2} > 0.$$

Notons que l'intégrale initiale (10.7) n'est pas divergente à  $d = 4$  pour  $p \neq 0$ , l'évaluation (10.8) n'étant valable que pour  $d < 4$ . Pour  $d = 4$ , on trouve

$$B(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} -K \ln(p/\Lambda), \quad (10.10)$$

où la constante  $\Lambda$  dépend de la forme explicite de  $\tilde{\Delta}(p)$  et donc de la structure de courte distance. Par contre la variation de la fonction  $B$  entre deux valeurs  $p$  et  $\lambda p$  a un comportement uniforme quand  $d \rightarrow 4$ , qui est donné par

$$B(p/\lambda) - B(p) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\underset{p \rightarrow 0}{\sim}} b(\varepsilon) (\lambda^\varepsilon - 1) p^{-\varepsilon} \sim K \ln \lambda + O(\varepsilon), \quad (10.11)$$

un résultat indépendant de la forme explicite de  $\tilde{\Delta}$ , à la différence de (10.10).

*Diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle.* Donnons quelques indications sur le calcul des fonctions de vertex à partir de la version continue de l'équation (6.27). La première correction à la méthode du col (qui engendre les diagrammes 1-irréductibles à une boucle) devient (cf. aussi l'équation (12.24))

$$\Gamma_1(M) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta M(x_1) \delta M(x_2)} - \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta M \delta M} \Big|_{M(x)=0} \right].$$

Dans la théorie  $\sigma^4$ , cela donne

$$\begin{aligned} \Gamma_1(M) &= \frac{1}{2} \text{tr} \ln [1 + \frac{1}{2} g \Delta M^2] \\ &= \frac{1}{4} g \text{tr} \Delta M^2 - \frac{1}{16} g^2 \text{tr} (\Delta M^2)^2 + O(g^3), \end{aligned}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur associé au noyau  $\Delta(x-y)$  défini en (10.3), et  $M^2$  est l'opérateur associé au noyau  $M^2(x)\delta(x-y)$ . Plus explicitement

$$\begin{aligned} \text{tr} \Delta M^2 &= \Delta(0) \int d^d x M^2(x), \\ \text{tr} (\Delta M^2)^2 &= \int d^d x d^d y M^2(x) \Delta^2(x-y) M^2(y). \end{aligned}$$

Par dérivées fonctionnelles successives par rapport à  $M(x)$ , on en déduit les contributions à une boucle aux fonctions à deux et quatre points:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(2)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} g \Delta(0) \delta(x_1 - x_2), \\ \Gamma_1^{(4)}(x_1, \dots, x_4) &= -\frac{1}{2} g^2 [\Delta^2(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4) + 2 \text{ termes}]. \end{aligned}$$

Après transformation de Fourier, on retrouve les expressions que nous avons utilisées.

*Prolongement dimensionnel.* Le prolongement dimensionnel peut être défini à partir des intégrales gaussiennes. Ici nous n'avons utilisé que la propriété

$$\int d^d x e^{-x^2} = \pi^{d/2}.$$

En effet

$$\int d^d x e^{-x^2} = A_d \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} = \frac{1}{2} A_d \Gamma(d/2),$$

et donc  $A_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ .

### 10.2.3 Point fixe

Nous utilisons maintenant la relation (10.4) entre fonctions de vertex des hamiltoniens initial et effectif à l'échelle  $\lambda$  dans le cas de la fonction à quatre points:

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, \dots, p_4; g(\lambda)) \sim Z^2(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1/\lambda, \dots, p_4/\lambda; g). \quad (10.12)$$

Comme nous venons de le voir (section 10.2.1)  $Z(\lambda) = \lambda^{2-d} + O(g^2)$  et donc

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, \dots, p_4; g(\lambda)) \sim \lambda^{4-d} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1/\lambda, \dots, p_4/\lambda, g) + O(g^3), \quad (10.13)$$

où l'erreur est d'ordre  $g^3$  puisque la fonction  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  est d'ordre  $g$ .

Dans le membre de droite la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1/\lambda, p_2/\lambda, p_3/\lambda, p_4/\lambda; g) &= g - \frac{1}{2}g^2 [B((p_1 + p_2)/\lambda) + B((p_1 + p_3)/\lambda) \\ &\quad + B((p_1 + p_4)/\lambda)] + O(g^2), \end{aligned}$$

peut être réécrite pour  $|p_i| \rightarrow 0$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en utilisant l'évaluation (10.11), sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1/\lambda, p_2/\lambda, p_3/\lambda, p_4/\lambda; g) &\sim g - \frac{3}{2}Kg^2 \ln \lambda - \frac{1}{2}g^2 [B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) \\ &\quad + B(p_1 + p_4)] + O(g^3, g^2\varepsilon). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, \dots, p_4; g(\lambda)) &= g(\lambda) - \frac{1}{2}g^2(\lambda) [B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) + B(p_1 + p_4)] \\ &\quad + O(g^3). \end{aligned}$$

À l'ordre dominant en  $g$ , à  $\varepsilon$  fixé, l'équation (10.13) implique

$$g(\lambda) = \lambda^\varepsilon g,$$

qui est en effet le flot gaussien (section 9.5).

À l'ordre  $g^2$ , après avoir fait passer tous les termes dépendants de  $B(p)$  dans le membre de droite, on trouve

$$\begin{aligned} g(\lambda) - \lambda^\varepsilon (g - \frac{3}{2}Kg^2 \ln \lambda) \\ = \frac{1}{2} (g^2(\lambda) - \lambda^\varepsilon g^2) [B(p_1 + p_2) + B(p_1 + p_3) + B(p_1 + p_4)] + O(g^3, g^2\varepsilon). \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le coefficient de  $B$  est d'ordre  $\varepsilon g^2$  et donc

$$g(\lambda) = \lambda^\varepsilon (g - \frac{3}{2}Kg^2 \ln \lambda) + O(g^3, g^2\varepsilon).$$

La dépendance possible dans les variables  $p_i$  a donc disparu.

Dérivant par rapport à  $\lambda$ , on en déduit

$$\begin{aligned}\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} &= \varepsilon g(\lambda) - \frac{3}{2} K g^2 + O(g^3, g^2 \varepsilon) \\ &= \varepsilon g(\lambda) - \frac{3}{16\pi^2} g^2(\lambda) + O(g^3(\lambda), g^2(\lambda) \varepsilon),\end{aligned}$$

où nous avons de nouveau utilisé la propriété que  $g(\lambda) - g = O(g^2, \varepsilon g)$ .

En particulier nous vérifions que le membre de droite ne dépend de  $\lambda$  qu'à travers  $g(\lambda)$ , en accord avec l'hypothèse (9.18).

Introduisant la notation traditionnelle (9.53), on définit la fonction

$$\beta(g(\lambda)) = -\lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda}. \quad (10.14)$$

Alors

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \frac{3}{16\pi^2} g^2 + O(g^3, g^2 \varepsilon). \quad (10.15)$$

On se trouve donc dans le cas (iii) envisagé en section 9.6.1: le coefficient de  $g^2$  est positif. Pour  $d < 4$ , il existe donc un point fixe non gaussien stable, correspondant au zéro d'ordre  $\varepsilon$  de la fonction  $\beta(g)$ :

$$g^* = \frac{16\pi^2 \varepsilon}{3} + O(\varepsilon^2). \quad (10.16)$$

On peut alors démontrer des propriétés d'universalité des fonctions de corrélation et fonctions thermodynamiques, et calculer les quantités universelles sous forme d'un développement en série en  $\varepsilon$  déduit du développement perturbatif autour du modèle gaussien, suivant la méthode introduite par Wilson et Fisher.

En particulier, la relation (10.4) implique

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1/\lambda, \dots, p_n/\lambda; g) \sim \lambda^{-d+n d_\sigma} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; g^*),$$

où  $d_\sigma = D_\sigma(g^*) = \frac{1}{2}(d-2+\eta)$  ne diffère de sa valeur gaussienne qu'à l'ordre  $\varepsilon^2$ .

Dans le cas particulier de la fonction de vertex à deux points, on obtient

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; g) \sim \lambda^{-2+\eta} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g^*) \Rightarrow \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; g) \underset{|p| \rightarrow 0}{\propto} p^{2-\eta}, \quad (10.17)$$

et donc pour la fonction de corrélation connexe

$$W^{(2)}(x) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\propto} \int d^d p e^{ipx} p^{\eta-2} \propto \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}}. \quad (10.18)$$

### 10.3 Le domaine critique

Dans la discussion générale du GR, nous avons noté que des propriétés d'universalité apparaissent dans le cas de points fixes non seulement pour le hamiltonien critique mais aussi dans le cas des hamiltoniens critiques perturbés de façon infinitésimale par des opérateurs essentiels. Dans le système ferromagnétique que nous étudions ici, les deux opérateurs essentiels correspondent à  $\int \sigma(x)dx$  qui est couplé au champ magnétique, et brise la symétrie de réflexion  $\sigma \mapsto -\sigma$ , et à l'opérateur  $\int \sigma^2(x)dx$  qui est couplé à la température. Nous considérons ici le second exemple et ajoutons à l'hamiltonien critique (10.1) un terme proportionnel à  $\int \sigma^2(x)dx$ :

$$\mathcal{H}_t(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma) + \frac{t}{2} \int \sigma^2(x) d^d x, \quad (10.19)$$

où le paramètre  $t$ , qui caractérise la déviation à la température critique est infinitésimal, dans un sens que nous avons déjà expliqué: sa valeur initiale est telle qu'après une grande dilatation  $\lambda$  sa valeur effective  $t(\lambda)$  soit d'ordre 1. Nous choisissons  $t \propto T - T_c$  positif, ce qui correspond à la phase de haute température.

#### 10.3.1 Fonction à deux points

La transformée de Fourier de la fonction à deux points connexe gaussienne  $\tilde{\Delta}(q, t)$  est maintenant donnée par

$$1/\tilde{\Delta}(q, t) = t + 1/\tilde{\Delta}(q) = t + q^2 + O(q^4),$$

où  $\tilde{\Delta}(q) \equiv \tilde{\Delta}(q, 0)$  est la fonction définie par l'équation (10.3b).

À l'ordre  $g$ , le calcul est presque identique, à la paramétrisation près, au calcul de la section 8.9. La fonction de vertex à deux points devient

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = t + p^2 + O(p^4) + \frac{1}{2} g \bar{\Omega}(t) + O(g^2),$$

avec

$$\bar{\Omega}_d(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q (\tilde{\Delta}(q, t) - \tilde{\Delta}(q, 0)),$$

où  $(r_c)_1$  a été remplacé par sa valeur (équation (10.6)).

Dans l'intégrale nous faisons le changement de variable  $q = q'\sqrt{t}$  et faisons tendre  $t$  vers zéro. Puisque

$$1/\tilde{\Delta}(q\sqrt{t}, t) = t(1 + q^2) + O(t^2), \quad 1/\tilde{\Delta}(q\sqrt{t}, 0) = tq^2 + O(t^2),$$

on trouve

$$\bar{\Omega}_d(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -a(\varepsilon)t^{d/2-1} \quad (10.20)$$

avec

$$a(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{q^2(q^2 + 1)}, \quad (10.21)$$

parce que, pour  $d < 4$ , l'intégrale converge pour  $|q| \rightarrow \infty$  et donc on peut prendre la limite  $t \rightarrow 0$  dans l'intégrant.

À  $d = 4$ , l'intégrale diverge pour  $|q| \rightarrow \infty$  et donc  $a(\varepsilon)$  tend vers l'infini pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Le comportement dominant est le même que celui de  $b(\varepsilon)$  (équation (10.9)) et donc

$$a(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{8\pi^2\varepsilon}.$$

Cependant, pour  $d = 4$ , l'intégrale initiale est finie pour  $t \neq 0$ , et l'expression (10.20) est remplacée par

$$\bar{\Omega}_d(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{16\pi^2} t \ln(t/\Lambda'^2), \quad (10.22)$$

où, de nouveau,  $\Lambda'$  est une constante qui dépend de la forme explicite de  $\tilde{\Delta}$  et donc de la physique de courte distance.

Par contre, la variation de  $\bar{\Omega}_d(t)/t$  entre deux valeurs de  $t$  a un comportement uniforme:

$$\bar{\Omega}_d(t)/t - \bar{\Omega}_d(t')/t' \underset{t, t' \rightarrow 0}{\sim} -a(\varepsilon) \left( t^{-\varepsilon/2} - t'^{-\varepsilon/2} \right) = \frac{1}{16\pi^2} \ln(t/t') + O(\varepsilon). \quad (10.23)$$

### 10.3.2 Groupe de renormalisation

À l'ordre dominant en  $\varepsilon$ , il faut maintenant prendre en compte le flot de  $g$  et  $t$  et donc l'équation (9.11) devient

$$\tilde{\Gamma}_\lambda^{(2)}(p) \equiv \tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t(\lambda); g(\lambda)) = Z(\lambda) \lambda^d \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; t; g). \quad (10.24)$$

À l'ordre  $g$ ,  $Z(\lambda)$  est gaussien et l'équation de GR devient

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t(\lambda); g(\lambda)) = \lambda^2 \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; t; g) + O(g^2).$$

À l'ordre  $g^0$  (l'approximation gaussienne),

$$t(\lambda) + p^2 = \lambda^2 (t + p^2/\lambda^2).$$

On retrouve donc  $t(\lambda) = \lambda^2 t$ , en accord avec l'analyse de la section 9.5.

À l'ordre  $g$ , pour  $p = 0$ , la relation devient

$$t(\lambda) + \frac{1}{2}g(\lambda)\bar{\Omega}_d(t(\lambda)) = \lambda^2 \left[ t + \frac{1}{2}g\bar{\Omega}_d(t) \right] + O(g^2, g\varepsilon).$$

Séparant les termes d'ordre 1 et d'ordre  $g$  et utilisant, dans le terme d'ordre  $g$ ,  $g(\lambda) = g + O(\varepsilon g)$ ,  $t(\lambda) = t\lambda^2 + O(g)$ , nous pouvons récrire cette relation

$$\begin{aligned} t(\lambda) - \lambda^2 t &= \frac{1}{2}g \left[ \lambda^2 \bar{\Omega}_d(t) - \bar{\Omega}_d(t\lambda^2) \right] + O(g^2, g\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2}gt\lambda^2 \left[ \bar{\Omega}_d(t)/t - \bar{\Omega}_d(t\lambda^2)/t\lambda^2 \right] + O(g^2, g\varepsilon). \end{aligned}$$

Nous n'avons besoin de la différence dans le membre de droite que dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Utilisant alors l'évaluation (10.23), on en déduit

$$t(\lambda) = \lambda^2 t \left( 1 - \frac{g}{16\pi^2} \ln \lambda \right) + O(g^2, g\varepsilon).$$

Sous forme différentielle cette équation de flot peut s'écrire

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} t(\lambda) = t(\lambda) \left( 2 - \frac{g(\lambda)}{16\pi^2} + O(g^2(\lambda)) \right).$$

Le second membre ne dépend donc de  $\lambda$  qu'à travers les fonctions  $g(\lambda)$  et  $t(\lambda)$ , de nouveau en accord avec l'hypothèse (9.18).

Notons que l'équation de flot est linéaire en  $t$  parce que  $t$  est le coefficient d'une perturbation essentielle et nous ne considérons que des valeurs de  $t$  infinitésimales.

Introduisant la notation traditionnelle

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} t(\lambda) = t(\lambda) [2 + \eta_2(g(\lambda))], \quad (10.25)$$

on trouve

$$\eta_2(g) = -\frac{g}{16\pi^2} + O(g^2).$$

Pour  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $g(\lambda)$  tend vers  $g^*$  et donc

$$t(\lambda) \propto t \lambda^{d_t}, \quad (10.26)$$

où  $d_t$  est la valeur propre correspondant à l'opérateur propre  $\int d^d x \sigma^2(x)$  (à l'ordre dominant) associé à une déviation de la température critique:

$$d_t = 2 - \frac{1}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (10.27)$$

Nous remarquons que le résultat est *universel*, en ce sens qu'il est indépendant de tous les paramètres du hamiltonien comme les coefficients  $u_k$  de l'expression (10.2) et  $g$ .

La relation générale (9.55) permet d'en déduire la dimension de l'opérateur  $\sigma^2(x)$ :

$$d_{\sigma^2} = d - d_t = 2 - \frac{2}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (10.28)$$

On note, en particulier

$$d_{\sigma^2} - 2d_\sigma = \frac{1}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \neq 0,$$

ce qui confirme que pour un point fixe non-gaussien les dimensions des polynômes locaux dans les champs ne sont plus liées de façon simple à la dimension des champs (cf. section 9.7).

### 10.3.3 Fonction à deux points: Comportement d'échelle dans le domaine critique

Le résultat (10.26) combiné avec le comportement général attendu (9.15) de  $Z(\lambda)$ :

$$Z(\lambda) \propto \lambda^{-2d_\sigma} = \lambda^{-(d-2+\eta)},$$

et l'équation de GR (10.24) pour  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ , entraîne

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t(\lambda); g^*) \propto \lambda^{2-\eta} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; t; g)$$

ou, changeant  $p$  en  $\lambda p$ ,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p/\lambda; t; g) \propto \lambda^{\eta-2} \tilde{\Gamma}^{(2)}(\lambda p; t(\lambda); g^*).$$

Choisissant le paramètre de dilatation tel que

$$t(\lambda) = 1 \Rightarrow \lambda \propto t^{-1/d_t} \quad (10.29)$$

(équation (10.26)), on obtient la relation

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t; g) \underset{t \rightarrow 0; |p| \rightarrow 0}{\propto} t^\gamma F^{(2)}(pt^{-\nu}), \quad (10.30)$$

où

$$F^{(2)}(p) = \tilde{\Gamma}^{(2)}(\text{const.} \times p; 1; g^*),$$

et nous avons introduit les exposants  $\nu$  et  $\gamma$ :

$$\nu = 1/d_t = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon/6) + O(\varepsilon^2), \quad \gamma = \nu(2 - \eta) = 1 + \frac{1}{6}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Nous obtenons le résultat remarquable qu'une fonction de trois variables  $p, t, g$  ne dépend en réalité que d'une fonction à une variable. On appelle cette propriété *comportement d'échelle*.

Comme  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p = 0; t; g)$  est l'inverse de la susceptibilité magnétique, nous reconnaissons dans  $\gamma$  l'exposant de susceptibilité magnétique défini en (7.28).

Par ailleurs, la forme (10.30) entraîne que la fonction de corrélation connexe

$$W^{(2)}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p e^{ipx}}{\tilde{\Gamma}^{(2)}(p; t; g)} \underset{|x| \rightarrow \infty}{\propto} t^{-\gamma} \int \frac{d^d p e^{ipx}}{F^{(2)}(pt^{-\nu})} = t^{\nu d_\sigma} \int \frac{d^d p e^{ipxt^\nu}}{F^{(2)}(p)}.$$

Elle ne dépend donc de la distance  $x$  qu'à travers le produit  $xt^\nu \propto x/\xi(t)$ . La longueur de corrélation  $\xi$  diverge donc comme  $t^{-\nu}$  et, en accord avec la définition (8.22),  $\nu$  est donc l'exposant de corrélation.

En particulier, nous vérifions que la dilatation maximum (10.29) est de l'ordre de grandeur de la longueur de corrélation, en accord avec des arguments intuitifs.

## 10.4 Modèle avec symétrie $O(N)$

L'analyse précédente se généralise facilement à un modèle avec un paramètre d'ordre à  $N$  composantes,  $\sigma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , invariant par le groupe orthogonal  $O(N)$  (groupe des rotations-réflexion dans l'espace à  $N$  dimensions). En effet la symétrie  $O(N)$  entraîne qu'il n'existe sur la surface critique  $T = T_c$  qu'un opérateur essentiel pour  $d < 4$ .

Les propriétés de modèles avec symétrie  $O(N)$  ont déjà été étudiées, dans le cadre de l'approximation quasi-gaussienne en section 8.8.

L'hamiltonien effectif avec symétrie  $O(N)$  a la forme

$$\mathcal{H}(\sigma) = \int \left\{ \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma(x)]^2 + \frac{1}{2} (r_c + t) \sigma^2(x) + \frac{1}{4!} g (\sigma^2)^2(x) \right\} d^d x, \quad (10.31)$$

où nous avons omis d'écrire les termes quadratiques avec plus de deux dérivées.

Dans le cas d'une aimantation nulle ( $T > T_c$ ,  $H = 0$ ), les équations de groupe de renormalisation ont exactement la même forme que pour les modèles  $N = 1$  de type Ising. Les résultats explicites ne diffèrent du cas  $N = 1$  que par des facteurs polynomiaux en  $N$  devant les différentes contributions.

Ainsi, la fonction à deux points dans le domaine critique prend la forme

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(p) = \delta_{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$$

avec

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = t + p^2 + O(p^4) + \frac{N+2}{6} g \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q (\tilde{\Delta}(q, t) - \tilde{\Delta}(q, 0)) + O(g^2),$$

et donc  $Z(\lambda)$  garde sa forme gaussienne à cet ordre.

La fonction à quatre points critique avec quatre indices égaux s'écrit

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g - \frac{N+8}{18} g^2 (B(p_1+p_2) + B(p_1+p_3) + B(p_1+p_4)) + O(g^3).$$

*Fonction  $\beta$  et point fixe.* Dans les calculs de la section 10.2.3, il suffit de changer le coefficient de  $g^2$ . On en déduit la fonction  $\beta$  qui décrit le flot du paramètre  $g(\lambda)$  à l'ordre  $g^2$ :

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \frac{N+8}{48\pi^2} g^2 + O(g^3, g^2\varepsilon). \quad (10.32)$$

Au premier ordre en  $\varepsilon$ , le zéro non trivial de la fonction  $\beta(g)$  est alors

$$g^* = \frac{48\pi^2}{N+8} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \Rightarrow \omega \equiv \beta'(g^*) = \varepsilon + O(\varepsilon^2) > 0. \quad (10.33)$$

Le point fixe correspondant est donc stable. Des propriétés d'universalité pour tous les modèles à  $N$  composantes avec symétrie  $O(N)$  s'en déduisent.

*Domaine critique.* De nouveau le calcul du cas  $N = 1$  se généralise en changeant le coefficient du terme d'ordre  $g$ , Le flot du coefficient  $t$  de la perturbation essentielle  $\int dx \sigma^2(x)$  est décrit par la fonction

$$\frac{1}{\nu(g)} = 2 + \eta_2(g) = 2 - \frac{(N+2)}{48\pi^2}g + O(g^2),$$

et donc

$$d_t = \frac{1}{\nu} = 2 - \frac{N+2}{N+8}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \Rightarrow d_{\sigma^2} = d - d_t = 2 - \frac{6}{N+8}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

*Dimension du champ: correction à la valeur gaussienne.* La première correction à la dimension  $d_\sigma$  du paramètre d'ordre nécessite un calcul de la fonction à deux points à l'ordre  $g^2$  (deux boucles au sens des diagrammes de Feynman). Seul le diagramme (e) de la figure 15 contribue. De son comportement pour  $p \rightarrow 0$  et  $d \rightarrow 4$ , on

$$\eta(g) = \frac{N+2}{18} \frac{1}{(4\pi)^4} g^2 + O(g^3), \quad (10.34)$$

et donc

$$\eta \equiv \eta(g^*) = \frac{N+2}{2(N+8)^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$d_\sigma = \frac{1}{2}(d-2+\eta) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{N+2}{4(N+8)^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Pour  $N = 1$ ,

$$\eta(g) = \frac{1}{6} \frac{1}{(4\pi)^4} g^2 + O(g^3).$$

On en déduit la valeur de l'exposant

$$\eta = \frac{1}{54} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

et donc la dimension du champ  $\sigma$

$$d_\sigma = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{108}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

## 10.5 Groupe de renormalisation près de la dimension 4

Pour aller plus loin dans l'analyse, il faut utiliser les méthodes de théorie quantique des champs que nous décrivons brièvement aux chapitres 12 et 13. Ces méthodes permettent, dans le cadre du développement en  $\varepsilon = 4 - d$ , de démontrer des équations de groupe de renormalisation, de confirmer l'existence d'un point fixe stable non gaussien au delà du calcul du premier ordre que nous avons présenté ici (Brézin, Le Guillou et Zinn-Justin (1972–1974)). Un ensemble de propriétés d'universalité s'en déduisent, comme les relations d'échelle dans le domaine critique (par exemple la forme (10.30) de la fonction à deux points) ou les relations entre exposants critiques, qui avaient été proposées comme un conjecture dans le cadre de relations d'échelle phénoménologiques: tous les exposants critiques qui avaient été introduits auparavant comme  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu$  ne sont fonctions que de deux d'entre eux, par exemple,

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad \beta = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta), \quad \gamma = \nu(2 - \eta), \quad \beta(\delta - 1) = \gamma,$$

relations valables uniquement pour un point fixe non-gaussien, donc pour  $d < 4$ .

Nous décrivons brièvement dans cette section les équations de groupe de renormalisation satisfaites par les fonctions de corrélation connexes, formes asymptotiques à grande distance, dans le cadre d'un développement double en dans le coefficient  $g$  de  $\int dx \sigma^4(x)$  et  $\varepsilon$ , des équations générales (9.33).

### 10.5.1 Hamiltonien critique

On définit d'abord un développement perturbatif autour de la théorie gaussienne, à partir de l'hamiltonien (10.1),

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}_G(\sigma) + \frac{g}{4!} \int d^d x \sigma^4(x),$$

c'est à dire un développement en puissances du paramètre  $g$ , en dimensions non entières quelconques. Pour le hamiltonien critique on démontre alors, à tous les ordres dans un développement double en puissances de  $g$  et  $\varepsilon = 4 - d$ , des équations de la forme (9.33) mais avec un seul paramètre  $g$  qui décrit la trajectoire qui interpole entre le point fixe gaussien et le point fixe  $g^*$  stable:

$$\left[ \sum_{\ell} x_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2} D_{\sigma}(g) \right] W^{(n)}(g; x_1, \dots, x_n) \sim 0, \quad (10.35)$$

où le symbole  $\sim$  signifie que des contributions qui tendent vers zéro plus vite à grande distance ont été négligées.

L'équation de groupe de renormalisation (9.6) exacte, le paramètre  $g(\lambda)$  et la renormalisation  $Z(\lambda)$  à l'échelle  $\lambda$  solutions de

$$\beta(g(\lambda)) = -\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda), \quad (10.36)$$

$$-2D_{\sigma}(g(\lambda)) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda), \quad (10.37)$$

apparaissent alors dans la solution de l'équation (10.35) par la méthode des caractéristiques (cf. section 13.4).

La solution de l'équation  $\beta(g^*) = 0$  donne la valeur de point fixe et  $d_\sigma = D_\sigma(g^*)$  la dimension du paramètre d'ordre.

Dans le cas d'un point fixe attractif ( $\omega = \beta'(g^*) > 0$ ), le comportement asymptotique des fonctions de corrélations est déterminé par les fonctions de la théorie de point fixe  $g = g^*$  qui satisfont

$$\left[ \sum_{\ell} x_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} + n d_{\sigma} \right] W^{(n)}(g^*; x_1, \dots, x_n) = 0$$

et donc

$$W^{(n)}(g^*; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \frac{1}{\lambda^{n d_{\sigma}}} W^{(n)}(g^*; x_1, \dots, x_n).$$

### 10.5.2 Domaine critique

Mais comme nous l'avons déjà indiqué, tout le domaine critique  $\xi \gg 1$  exhibe des propriétés d'universalité. Les quantités universelles sont obtenues à partir de l'hamiltonien

$$\mathcal{H}_t(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma) + \frac{t}{2} \int d^d x \sigma^2(x), \quad (10.38)$$

où le paramètre  $|t| \ll 1$  représente la déviation par rapport à la température critique. On démontre alors une équation plus générale:

$$D_{\text{RG}} W^{(n)}(g, t; x_1, \dots, x_n) \sim 0, \quad (10.39)$$

$$D_{\text{RG}} = \sum_{\ell} x_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - (2 + \eta_2(g)) t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{2} D_{\sigma}(g), \quad (10.40)$$

où la fonction supplémentaire  $\eta_2(g)$  est directement liée au flot du coefficient  $t(\lambda)$  du terme  $\int d^d x \sigma^2(x)$ . Au point fixe  $g = g^*$ , l'équation se simplifie puisque

$$D_{\text{RG}} = \sum_{\ell} x_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} - d_t t \frac{\partial}{\partial t} + n d_{\sigma}$$

avec

$$d_t = 2 + \eta_2(g^*) \equiv \frac{1}{\nu}.$$

Elle implique une propriété d'homogénéité plus générale:

$$W^{(n)}(g^*, t \lambda^{d_t}; \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \frac{1}{\lambda^{n d_{\sigma}}} W^{(n)}(g^*, t; x_1, \dots, x_n).$$

Choisissant  $\lambda$  tel que  $t \lambda^{d_t} = 1$  on peut écrire cette relation

$$W^{(n)}(g^*, t; x_1, \dots, x_n) = t^{n \nu d_{\sigma}} W^{(n)}(g^*, 1; t^{\nu} x_1, \dots, t^{\nu} x_n).$$

Cette relation démontre que les fonctions de corrélation au point fixe, et donc toutes les fonctions de corrélation asymptotiquement dans le domaine critique, ne dépendent pas des  $x_i$  et du paramètre  $t$  indépendamment mais uniquement à travers le produit  $xt^\nu$ . C'est la forme générale de la loi d'échelle que nous avons déjà exhibée dans le cas de la fonction à deux points:

$$W^{(2)}(g^*, t; x) = t^{2\nu d_\sigma} W^{(2)}(g^*, 1; t^\nu x),$$

comme conséquence directe de l'équation (10.30). En représentation de Fourier,

$$\tilde{W}^{(2)}(g, t; p) \sim t^{-\gamma} \tilde{W}^{(2)}(g^*, 1; p/t^\nu)$$

avec

$$\gamma = \nu(2 - \eta).$$

Au dessus de  $T_c$ , la fonction à deux points décroît exponentiellement et cette relation d'homogénéité entraîne que la longueur de corrélation  $\xi$  est proportionnelle à  $t^{-\nu}$ . Elle diverge donc à  $T_c$  comme

$$\xi(t) \underset{t \propto T - T_c \rightarrow 0}{\propto} t^{-\nu}.$$

*Equations en champ ou en dessous de  $T_c$ .* Il est encore possible d'inclure les effets d'un faible champ magnétique, l'opérateur essentiel qui détruit la symétrie de réflexion, ou d'une aimantation finie. Les équations correspondantes permettent alors de relier de façon continue les phases ordonnées et la phase désordonnée, et de démontrer les mêmes lois d'échelle en dessous de  $T_c$ . À aimantation  $M$  fixée, on trouve

$$D_{\text{RG}} = \sum_{\ell} x_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - (2 + \eta_2(g)) t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} D_{\sigma}(g) \left( n + M \frac{\partial}{\partial M} \right).$$

*Chaleur spécifique.* Une différence qualitative avec le modèle quasi-gaussien est le comportement de la chaleur spécifique  $\mathcal{C}$  qui est la somme d'une partie régulière non universelle et d'une partie singulière universelle

$$\mathcal{C}_{\text{sing.}} \sim A^{\pm} |t|^{-\alpha}, \quad (10.41)$$

où  $\alpha = 2 - d\nu$  est l'exposant de chaleur spécifique.

## 10.6 Quantités universelles: Quelques résultats numériques

Au delà de résultats généraux sur les propriétés d'universalité, les méthodes de théorie des champs et le groupe de renormalisation ont aussi permis des calculs précis d'un certain nombre de quantités universelles, comme les exposants critiques du modèle avec symétrie  $O(N)$ , des rapports d'amplitude, et l'équation d'état dans la limite d'échelle pour les modèles à symétrie d'Ising.

Il importe de signaler ici que les résultats les plus précis ne proviennent pas du développement en  $\varepsilon$ , mais de la théorie des perturbations non-critique à  $d = 3$  directement (suivant une suggestion de Parisi (1973)), parce que les calculs analytiques et numériques des termes successifs du développement perturbatif sont plus simples. Ainsi les fonctions  $\beta(g)$ ,  $\eta(g)$  et  $\eta_2(g)$  sont connues jusqu'à l'ordre  $g^7$  à  $d = 3$ , alors que les exposants ne sont connus que jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^5$  dans le développement en  $\varepsilon$ . Cette méthode repose sur une hypothèse supplémentaire, que nous ne décrivons pas ici. Elle suppose, en particulier, de résoudre d'abord l'équation de point fixe  $\beta(g) = 0$  numériquement.

Par ailleurs, quelle que soit la méthode, il faut affronter le problème de la divergence du développement perturbatif en théorie des champs (cf. table 1). On dit que le développement perturbatif est un développement *asymptotique*. On note, ce qui est typique de développement asymptotique, que les sommes partielles semblent d'abord converger, avant de diverger avec des oscillations d'amplitude croissante.

Table 1

Sommes partielles du développement en  $\varepsilon$  pour les exposants  $\gamma$  and  $\eta$  pour  $\varepsilon = 1$ ,  $N = 1$ .

$k$	0	1	2	3	4	5
$\gamma$	1.000	1.1667	1.2438	1.1948	1.3384	0.8918
$\eta$	0.0...	0.0...	0.0185	0.0372	0.0289	0.0545

Des méthodes de resommation sont nécessaires pour extraire des résultats finis de ces développements. Les résultats les plus précis ont été obtenus en effectuant une transformation de Borel sur le développement, suivi d'un prolongement analytique basé sur une transformation conforme (cf. tableau 2).

Dans les tableaux 3,4, nous donnons les valeurs des exposants critiques déduites de la théorie des champs en fonction de l'entier  $N$  correspondant au groupe de symétrie  $O(N)$ . Les résultats que nous présentons sont les valeurs obtenues par Guida et Zinn-Justin (1998), améliorant les résultats plus anciens de Le Guillou et Zinn-Justin (1977–1980).

Nous rappelons ici que  $N = 0$  correspond aux propriétés statistiques des polymères ou des chemins aléatoires avec auto-évitement,  $N = 1$  à la transi-

Table 2

Résultats successifs obtenus par transformation de Borel et transformation conforme: le zéro  $\tilde{g}^*$  de la fonction  $\beta(g)$  et les exposants  $\gamma$  and  $\nu$  pour  $d = 3$ ,  $N = 1$ .

$k$	2	3	4	5	6	7
$\tilde{g}^*$	1.8774	1.5135	1.4149	1.4107	1.4103	1.4105
$\nu$	0.6338	0.6328	0.62966	0.6302	0.6302	0.6302
$\gamma$	1.2257	1.2370	1.2386	1.2398	1.2398	1.2398

tion liquide-vapeur, aux transitions de séparation de fluides miscibles ou aux transitions anti-ferromagnétiques uniaxes. Le représentant le plus important du cas  $N = 2$  est la transition superfluide de l'Hélium. Enfin  $N = 3$  correspond à des transitions ferromagnétiques.

Le tableau 3 est basé sur le développement perturbatif à dimension  $d = 3$  fixé. C'est pourquoi nous présentons les valeurs successives de  $g^*$  obtenues par solution numérique de l'équation  $\beta(g) = 0$ . Par ailleurs, pour donner une meilleure idée de la grandeur du paramètre de développement, les valeurs de la combinaison

$$\tilde{g}_{Ni}^* = (N + 8)g/(48\pi),$$

qui est ajustée pour que les deux premiers termes du développement soient égaux, sont aussi reproduites.

Table 3

Exposants critiques du modèle  $O(N)$ ,  $d = 3$ , obtenus par la théorie des champs  $\sigma_3^4$ .

$N$	0	1	2	3
$\tilde{g}_{Ni}^*$	$1.413 \pm 0.006$	$1.411 \pm 0.004$	$1.403 \pm 0.003$	$1.390 \pm 0.004$
$g^*$	$26.63 \pm 0.11$	$23.64 \pm 0.07$	$21.16 \pm 0.05$	$19.06 \pm 0.05$
$\gamma$	$1.1596 \pm 0.0020$	$1.2396 \pm 0.0013$	$1.3169 \pm 0.0020$	$1.3895 \pm 0.0050$
$\nu$	$0.5882 \pm 0.0011$	$0.6304 \pm 0.0013$	$0.6703 \pm 0.0015$	$0.7073 \pm 0.0035$
$\eta$	$0.0284 \pm 0.0025$	$0.0335 \pm 0.0025$	$0.0354 \pm 0.0025$	$0.0355 \pm 0.0025$
$\beta$	$0.3024 \pm 0.0008$	$0.3258 \pm 0.0014$	$0.3470 \pm 0.0016$	$0.3662 \pm 0.0025$
$\alpha$	$0.235 \pm 0.003$	$0.109 \pm 0.004$	$-0.011 \pm 0.004$	$-0.122 \pm 0.010$
$\omega$	$0.812 \pm 0.016$	$0.799 \pm 0.011$	$0.789 \pm 0.011$	$0.782 \pm 0.0013$
$\theta = \omega\nu$	$0.478 \pm 0.010$	$0.504 \pm 0.008$	$0.529 \pm 0.009$	$0.553 \pm 0.012$

À titre de comparaison, nous donnons aussi dans le tableau 4 les résultats tirés du développement en  $\varepsilon$  resommé. Les deux versions "libre" et "cont." cor-

respondent l'une à une sommation libre, l'autre à une méthode de sommation où des informations sur les comportements exacts quand  $d \rightarrow 2$  ont été utilisées explicitement.

Table 4

*Exposants critiques du modèle  $O(N)$ ,  $d = 3$ , obtenus par le développement en  $\varepsilon$ .*

$N$	0	1	2	3
$\gamma$ (libre)	$1.1575 \pm 0.0060$	$1.2355 \pm 0.0050$	$1.3110 \pm 0.0070$	$1.3820 \pm 0.0090$
$\gamma$ (cont.)	$1.1571 \pm 0.0030$	$1.2380 \pm 0.0050$	1.317	1.392
$\nu$ (libre)	$0.5875 \pm 0.0025$	$0.6290 \pm 0.0025$	$0.6680 \pm 0.0035$	$0.7045 \pm 0.0055$
$\nu$ (cont.)	$0.5878 \pm 0.0011$	$0.6305 \pm 0.0025$	0.671	0.708
$\eta$ (libre)	$0.0300 \pm 0.0050$	$0.0360 \pm 0.0050$	$0.0380 \pm 0.0050$	$0.0375 \pm 0.0045$
$\eta$ (cont.)	$0.0315 \pm 0.0035$	$0.0365 \pm 0.0050$	0.0370	0.0355
$\beta$ (libre)	$0.3025 \pm 0.0025$	$0.3257 \pm 0.0025$	$0.3465 \pm 0.0035$	$0.3655 \pm 0.0035$
$\beta$ (cont.)	$0.3032 \pm 0.0014$	$0.3265 \pm 0.0015$		
$\omega$	$0.828 \pm 0.023$	$0.814 \pm 0.018$	$0.802 \pm 0.018$	$0.794 \pm 0.018$
$\theta$	$0.486 \pm 0.016$	$0.512 \pm 0.013$	$0.536 \pm 0.015$	$0.559 \pm 0.017$

La comparaison des résultats obtenus avec les valeurs obtenus par d'autres méthodes, soit numériques (séries de haute température, simulations numériques de type Monte-Carlo), soit extraites d'expérience, montrent un excellent accord général. À titre d'illustration, nous présentons donc une courte compilation de résultats tirés de l'étude numérique de modèles particuliers sur réseau dans le tableau 5.

Table 5

*Exposants critiques du modèle  $O(N)$  à partir de modèles sur réseau.*

$N$	0	1	2	3
$\gamma$	$1.1575 \pm 0.0006$	$1.2385 \pm 0.0025$	$1.322 \pm 0.005$	$1.400 \pm 0.006$
$\nu$	$0.5877 \pm 0.0006$	$0.631 \pm 0.002$	$0.674 \pm 0.003$	$0.710 \pm 0.006$
$\alpha$	$0.237 \pm 0.002$	$0.103 \pm 0.005$	$-0.022 \pm 0.009$	$-0.133 \pm 0.018$
$\beta$	$0.3028 \pm 0.0012$	$0.329 \pm 0.009$	$0.350 \pm 0.007$	$0.365 \pm 0.012$
$\theta$	$0.56 \pm 0.03$	$0.53 \pm 0.04$	$0.60 \pm 0.08$	$0.54 \pm 0.10$

Enfin, citons quelques résultats expérimentaux particulièrement précis:

De l'étude des propriétés des longues chaînes polymériques, qui correspond au cas  $N = 0$ , a été déduit

$$\nu = 0.586 \pm 0.004.$$

Des mesures sur les transitions de séparation de mélanges binaires de liquides ( $N = 1$ ), on conclut par exemple

$$\nu = 0.625 \pm 0.010, \quad \beta = 0.325 \pm 0.005.$$

C'est dans le cas de la transition superfluide de l'Hélium, correspondant à  $N = 2$ , que les résultats les plus précis ont pu être obtenus (par des expériences en microgravité), par exemple,

$$\nu = 0.6807 \pm 0.0005.$$

*Rapports universels d'amplitudes critiques.* Le tableau 6 présente un certain nombre de rapports universels d'amplitudes critiques pour  $v - v_c \sim t \rightarrow 0$ , dans le cas de la classe d'universalité du modèle d'Ising ( $N = 1$ ) à trois dimensions (Guida et Zinn-Justin 1996), et une comparaison avec d'autres résultats disponibles. Les différentes définitions ont été données en (7.28,10.41) et en sections 8.6,10.5.1. De plus  $R_c = \alpha A^+ C^+ / M_0^2$ .

Les deux premières lignes correspondent à des calculs de théorie des champs. Les séries de haute température (HT) sont obtenues à partir de modèles sur réseau. Les trois dernières lignes correspondent à des résultats expérimentaux, transition de séparation de mélanges binaires de liquides, transitions liquide-vapeur et de systèmes magnétiques anisotropes.

Table 6

*Rapports d'amplitude pour  $N = 1$ , la classe du modèle d'Ising.*

	$A^+/A^-$	$C^+/C^-$	$R_c$	$R_x$
devt. en $\varepsilon$ ,	$0.527 \pm 0.037$	$4.73 \pm 0.16$	$0.0569 \pm 0.0035$	$1.648 \pm 0.036$
$d = 3$	$0.537 \pm 0.019$	$4.79 \pm 0.10$	$0.0574 \pm 0.0020$	$1.669 \pm 0.018$
séries de HT	$0.523 \pm 0.009$	$4.95 \pm 0.15$	$0.0581 \pm 0.0010$	1.75
	$0.560 \pm 0.010$	$4.75 \pm 0.03$		
mél. bin.	$0.56 \pm 0.02$	$4.3 \pm 0.3$	$0.050 \pm 0.015$	$1.75 \pm 0.30$
liqu. - vap.	0.48-0.53	4.8-5.2	$0.047 \pm 0.010$	$1.69 \pm 0.14$
syst. magn.	0.49-0.54	$4.9 \pm 0.5$		

## Chapitre 11

### Paramètre d'ordre à $N$ composantes

Nous étudions maintenant le flot des paramètres essentiels à  $T_c$  en dimension  $4 - \varepsilon$  engendré par le groupe de renormalisation (GR) dans des modèles plus généraux avec un paramètre d'ordre (ou champ)  $\sigma_\alpha$  à  $N$  composantes. Il existe en effet des systèmes physiques intéressants pour lesquels l'hamiltonien n'a pas la symétrie  $O(N)$  du modèle étudié en section 10.4.

Une première catégorie de tels modèles comprend les systèmes qui ont plusieurs longueurs de corrélation: dans le modèle gaussien les termes en  $\sigma_\alpha^2$  ont plusieurs coefficients distincts indépendants. De manière générique dans de telles situations, lorsque la température varie, une seule longueur de corrélation devient infinie à la fois. Alors les composantes du paramètre d'ordre qui ne sont pas critiques se découplent et peuvent être ignorées dans l'étude du comportement asymptotique à longue distance. On peut donc se restreindre aux théories avec une seule longueur de corrélation, comme dans le cas du modèle  $O(N)$ .

Les modèles génériques avec une seule longueur de corrélation possèdent tous une invariance par un groupe de symétrie tel qu'il n'existe qu'un seul invariant quadratique dans le champ et donc que la fonction à deux points dans la phase désordonnée est proportionnelle à l'identité:

$$\langle \sigma_\alpha(x) \sigma_\beta(y) \rangle = \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta} \sum_\gamma \langle \sigma_\gamma(x) \sigma_\gamma(y) \rangle. \quad (11.1)$$

Les hamiltoniens effectifs de ces modèles ont donc la même partie quadratique que l'hamiltonien (10.31), mais en diffèrent par les termes quartiques: Ils contiennent plusieurs termes de type  $\int dx \sigma^4(x)$  indépendants, l'un d'entre eux étant toujours le terme isotrope dans (10.31).

#### 11.1 Anisotropie cubique

Avant d'étudier des modèles généraux avec paramètre d'ordre à  $N$  composantes, nous examinons d'abord un modèle simple mais d'intérêt physique avec symétrie cubique.

Nous considérons un hamiltonien dépendant d'un champ  $\sigma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , invariant par le groupe de transformations engendré par

$$\sigma_\alpha \mapsto -\sigma_\alpha, \quad \sigma_\alpha \leftrightarrow \sigma_\beta \quad \text{pour tous } \alpha \text{ et } \beta.$$

On espère ainsi modéliser un système de spins classiques dont les interactions sont modulées par un réseau cubique sous-jacent (cf. section 3.3.4).

Le groupe de symétrie cubique admet un seul invariant quadratique mais deux invariants indépendants de type  $\sigma^4$ . Utilisant ces propriétés de symétrie, il est facile de vérifier que le hamiltonien critique dans l'espace continu, et tronqué à l'ordre  $\sigma^4$  comme conséquence de l'analyse des opérateurs essentiels au voisinage de la dimension 4, a la forme générale

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c(\sigma) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_\alpha [\nabla \sigma_\alpha(x)]^2 + \dots + \frac{1}{2} r_c(g) \sum_\alpha \sigma_\alpha^2(x) \right. \\ \left. + \frac{g}{24} \left( \sum_\alpha \sigma_\alpha^2(x) \right)^2 + \frac{h}{24} \sum_\alpha \sigma_\alpha^4(x) \right\}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Comme il n'existe qu'un invariant quadratique, la condition (11.1) est satisfaite et la fonction à deux points dans la phase désordonnée est proportionnelle à l'identité.

L'apparition de deux termes de degré 4 entraîne que, sur la surface critique, le GR en dimension  $d = 4 - \varepsilon$  fait maintenant intervenir deux paramètres  $g, h$  correspondant aux deux opérateurs essentiels quartiques.

*Positivité.* On notera que les deux constantes  $g, h$  doivent satisfaire les deux conditions  $g + h \geq 0$ ,  $Ng + h \geq 0$  pour que l'hamiltonien soit positif pour  $\sigma \rightarrow \infty$  et donc que la transition puisse être du second ordre. La première condition est obtenue en prenant tous les  $\sigma_\alpha$  nuls sauf un, la deuxième en les prenant tous égaux.

Ces conditions impliquent, en particulier, que si le flot du GR entraîne les paramètres  $g(\lambda), h(\lambda)$  en dehors de cette région, les termes de degré supérieur, *a priori* négligeables, du développement du potentiel thermodynamique deviennent importants et la transition, en désaccord avec l'approximation quasi-gaussienne ou de champ moyen, est en fait génériquement faiblement du premier ordre.

### 11.1.1 Groupe de renormalisation et points fixes

Les équations de flot, pertinente pour un calcul à l'ordre dominant, ont alors la forme générale

$$\begin{aligned} \lambda \frac{dg}{d\lambda} &= -\beta_g(g(\lambda), h(\lambda)), \\ \lambda \frac{dh}{d\lambda} &= -\beta_h(g(\lambda), h(\lambda)). \end{aligned}$$

Avec ces conventions, une dilatation  $\lambda \rightarrow \infty$  correspond au comportement à longue distance.

Un calcul simple, analogue au calcul présenté en section 10.2, détermine les deux fonctions  $\beta$  à l'ordre dominant pour  $g, h = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\beta_g(g, h) = -\varepsilon g + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{N+8}{6} g^2 + gh \right),$$

$$\beta_h(g, h) = -\varepsilon h + \frac{1}{8\pi^2} \left( 2gh + \frac{3}{2} h^2 \right).$$

Il s'agit alors d'étudier le flot des paramètres  $g$  et  $h$  en fonction du paramètre de dilatation  $\lambda$ . En particulier, il faut trouver les différents points fixes pour  $\varepsilon = 4-d > 0$  et déterminer la symétrie des hamiltoniens correspondants, discuter leur stabilité pour  $\lambda \rightarrow \infty$  comme fonction de l'entier  $N$  et en déduire la symétrie de l'hamiltonien de point fixe stable, enfin déterminer la nature de la transition en fonction des valeurs initiales de  $g$  et  $h$ .

*Points fixes.* Les équations  $\beta_g = \beta_h = 0$  sont ici très simples à résoudre. On trouve quatre points fixes:

(i) Le point fixe gaussien

$$g = h = 0.$$

(ii) Le point fixe découplé

$$g = 0, \quad h = 16\varepsilon\pi^2/3,$$

qui correspond à  $N$  copies identiques et découplées du modèle avec symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$  de type Ising.

(iii) Le point fixe isotrope

$$h = 0, \quad g = 48\varepsilon\pi^2/(N+8),$$

qui a une symétrie  $O(N)$  plus grande que la symétrie cubique du hamiltonien initial.

(iv) Enfin, le dernier point fixe

$$g = \frac{16\pi^2\varepsilon}{N}, \quad h = \frac{16\pi^2(N-4)\varepsilon}{3N},$$

est nouveau et est appelé point fixe *cubique*.

Tous les points fixes sont dans le demi-plan  $g \geq 0$ . Seul le point fixe cubique pour  $N < 4$  est tel que  $h < 0$ . Cependant, pour  $N \geq 1$ , il satisfait la condition de positivité  $g + h \geq 0$  (et donc aussi  $Ng + h \geq 0$ ). Donc tous les points fixes satisfont aux conditions de positivité.

### 11.1.2 Valeurs propres et flot

Les propriétés de stabilité locale des quatre points fixes sont déterminées par les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{L}^*$  des dérivées partielles par rapport à  $g$  et  $h$  des fonctions  $-\beta_g, -\beta_h$ . On trouve

$$\mathbf{L}^* = \varepsilon \mathbf{1} - \frac{1}{8\pi^2} \begin{pmatrix} \frac{N+8}{3}g + h & g \\ 2h & 2g + 3h \end{pmatrix}.$$

Pour les différents points fixes, les valeurs propres correspondantes de la matrice  $\mathbf{L}^*$  sont

$$\begin{aligned} \text{Point fixe gaussien:} & \quad \varepsilon, & \quad \varepsilon, \\ \text{Point fixe découplé (Ising):} & \quad \frac{1}{3}\varepsilon, & \quad -\varepsilon, \\ \text{Point fixe isotrope:} & \quad \frac{N-4}{N+8}\varepsilon, & \quad -\varepsilon, \\ \text{Point fixe cubique:} & \quad \frac{4-N}{3N}\varepsilon, & \quad -\varepsilon. \end{aligned}$$

L'existence d'une valeur propre  $-\varepsilon$  est une propriété générale de tous les points fixes non gaussiens (cf. section 11.2.1).

Le point fixe gaussien a deux directions d'instabilité. Le point fixe de type Ising a toujours une direction d'instabilité.

Pour le point fixe isotrope, on trouve un exemple particulier d'un résultat qu'on peut démontrer de façon plus générale (cf. section 11.2.3): le point fixe isotrope est stable pour  $N < N_c$  avec  $N_c = 4 + O(\varepsilon)$ . Enfin, le point fixe cubique n'est stable que si  $N > N_c$ . À  $N = N_c$  les deux points fixes coalescent et échangent leur rôle.

*Remarque.* Pour  $N < N_c$ , le point fixe stable a une symétrie  $O(N)$ . Le comportement asymptotique des fonctions de corrélations dans le domaine critique, les singularités des quantités thermodynamiques à  $T_c$ , exhibent donc plus de symétrie que le modèle microscopique initial.

Nous avons déjà rencontré un phénomène similaire: la symétrie cubique du réseau engendre une symétrie spatiale  $O(d)$  continue à grande distance ou dans le domaine critique (cf. sections 3.3.6, 8.2). Seul un examen des corrections au comportement critique asymptotique révèle la symétrie plus restreinte du modèle microscopique.

*Le flot du GR.* Les trajectoires du GR ne peuvent donc se couper qu'en un point fixe. Les droites  $h = 0$  et  $g = 0$  et la droite joignant l'origine au point fixe cubique sont des droites stables par le GR, un cas particulier d'une propriété générale que nous démontrons en section 11.2.1, et ne peuvent donc pas être traversées. Dans ce cas planaire, ces conditions fixent complètement la topologie des trajectoires du GR.

En particulier, il existe des paramètres initiaux  $g, h$  pour lesquels les trajectoires du GR ne peuvent atteindre aucun point fixe, mais au contraire évoluent

vers des régions non physiques, comme  $g < 0$  pour tout  $N$  et  $h < 0$  pour  $N > 4$  ou  $h < (N - 4)/3g$  pour  $N < 4$ . Ces paramètres correspondent génériquement à des transitions faiblement du premier ordre: la longueur de corrélation reste finie quand  $T \rightarrow T_{c+}$  et, dans l'unité de l'échelle microscopique, prend une valeur qui est de l'ordre du paramètre de dilatation maximum tel que les paramètres  $g, h$  soient encore dans la région permise.

## 11.2 Etude générale: Groupe de renormalisation

Nous étudions maintenant des modèles plus généraux dans lesquels le paramètre d'ordre est toujours un vecteur  $\sigma_i(x)$  à  $N$  composantes. Ces modèles sont tels que l'hamiltonien est invariant sous l'action d'un groupe de symétrie  $G$  agissant sur le vecteur  $\sigma$ , qui est un sous-groupe du groupe  $O(N)$  (dont nous supposons cependant qu'il contient le groupe de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\sigma \mapsto -\sigma$ , comme sous-groupe), et qui admet un unique invariant quadratique  $\sum_i \sigma_i^2$ , mais plusieurs invariants quartiques indépendants de type  $\sigma^4$  comme dans l'exemple de l'anisotropie cubique étudié précédemment. Ceci implique, en particulier, que le champ  $\sigma$  se transforme par une représentation irréductible du groupe  $G$ .

De ces seules hypothèses découlent un certain nombre de propriétés que nous allons démontrer.

### 11.2.1 Flot de l'hamiltonien: Quelques remarques générales

Quand l'hamiltonien contient plusieurs termes quartiques indépendants de type  $\sigma^4(x)$  avec des coefficients  $g_a$ , les équations de flot à l'ordre  $g^2$  prennent la forme générale

$$\lambda \frac{dg_a}{d\lambda} = -\beta_a(g(\lambda)). \quad (11.3)$$

Le vecteur tangent à une trajectoire du GR en un point  $g$  est proportionnel à  $\beta_a(g)$ . Il est unique en tout point où il est défini. Les trajectoires du GR ne peuvent donc se couper qu'en un point fixe. Par ailleurs, elles ne peuvent pas être tangentes parce que l'équation différentielle est du premier ordre.

À l'ordre dominant les fonctions  $\beta$  peuvent s'écrire

$$\beta_a(g) = -\varepsilon g_a + B_a(g), \quad (11.4)$$

où  $B_a(g)$  est un polynôme homogène du second degré. Il satisfait donc l'identité

$$\sum_b g_b \frac{\partial B_a(g)}{\partial g_b} = 2B_a(g). \quad (11.5)$$

*Points fixes et stabilité.* Si le nombre de paramètres  $g_a$  est  $p$ , le nombre maximum de solutions  $g_a^*$  des équations de point fixe

$$\beta_a(g^*) \equiv -\varepsilon g_a^* + B_a(g^*) = 0, \quad (11.6)$$

est  $2^p$ . La stabilité locale de ces points fixes peut être étudiée en linéarisant les équations (11.3):

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} (g_a - g_a^*) = \sum_b L_{ab}^* (g_b - g_b^*)$$

avec

$$L_{ab}^* = -\frac{\partial \beta_a(g^*)}{\partial g_b} = \varepsilon \delta_{ab} - \frac{\partial B_a(g^*)}{\partial g_b}.$$

Elle dépend donc des signes des valeurs propres (dont on démontre qu'elles sont réelles, voir section 11.3.1) de la matrice des dérivées  $\mathbf{L}^*$ . Si toutes les valeurs propres de  $L^*$  sont négatives, le point fixe est localement stable. Les propriétés globales dépendent des solutions complètes de l'équation (11.3) qui détermine dans l'espace des paramètres  $g$  le bassin d'attraction de chaque point fixe stable.

*Valeur propre  $-\varepsilon$ .* De la propriété d'homogénéité (11.5) résulte la conséquence simple

$$\sum_b L_{ab}^* g_b^* = \varepsilon g_a^* - 2B_a(g^*) = -\varepsilon g_a^*,$$

où l'équation de point fixe (11.6) a été utilisée.

On en conclut que tous les points fixes non gaussiens ont au moins une direction de stabilité correspondant au vecteur propre  $g^*$ , avec valeur propre  $-\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ .

En fait on peut obtenir un résultat plus précis. Cherchons des solutions particulières de l'équation (11.6) de la forme

$$g_a(\lambda) = \rho(\lambda) g_a^*, \quad g^* \neq 0.$$

Introduisant cet Ansatz dans l'équation et utilisant l'équation de point fixe (11.6), on en déduit

$$\begin{aligned} g_a^* \lambda \frac{d}{d\lambda} \rho(\lambda) &= \varepsilon \rho(\lambda) g_a^* - B_a(g^* \rho(\lambda)) = \varepsilon \rho(\lambda) g_a^* - \rho^2(\lambda) B_a(g^*) \\ &= \varepsilon \rho(\lambda) g_a^* - \varepsilon g_a^* \rho^2(\lambda). \end{aligned}$$

L'équation de flot est donc compatible avec l'Ansatz et la fonction  $\rho(\lambda)$  satisfait

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \rho(\lambda) = \varepsilon \rho(\lambda) (1 - \rho(\lambda)).$$

Dans l'approximation (11.4), les demi-droites joignant le point fixe gaussien aux autres points fixes sont des trajectoires du GR, et sur ces trajectoires les points fixes non gaussiens sont stables.

### 11.2.2 Groupe de renormalisation: Expressions explicites

Un hamiltonien général satisfaisant aux hypothèses peut s'écrire

$$\mathcal{H}(\sigma) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \sigma_i)^2 + (r_c + t) \sigma_i^2 \right] + \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N g_{ijkl} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \right\}, \quad (11.7)$$

où  $g_{ijkl}$  est un tenseur symétrique dans ses quatre indices  $ijkl$ .

De plus la condition de positivité de  $\mathcal{H}$  pour  $|\sigma| \rightarrow \infty$  est équivalente à

$$\sum_{ijkl} g_{ijkl} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l > 0 \quad \forall \sigma_i \text{ tel que } |\sigma| > 0. \quad (11.8)$$

À cause de la condition (11.1), c'est à dire que la fonction de corrélation à deux points connexe dans la phase désordonnée est proportionnelle à la matrice unité:

$$\langle \sigma_i(x) \sigma_j(y) \rangle_{\text{conn.}} = W_{ij}^{(2)}(x, y) = \delta_{ij} W^{(2)}(x, y), \quad (11.9)$$

le tenseur  $g_{ijkl}$  a des propriétés spéciales qui impliquent des contraintes successives sur le tenseur  $g_{ijkl}$  dans le développement perturbatif.

*Groupe de renormalisation.* L'équation de flot des paramètres  $g_{ijkl}(\lambda)$  dans l'hamiltonien (11.7) s'écrit maintenant

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g_{ijkl}(\lambda) = -\beta_{ijkl}(g(\lambda)). \quad (11.10)$$

Les propriétés à longue distance de telles théories sont gouvernées par les points fixes solutions de l'équation

$$\beta_{ijkl}(g^*) = 0. \quad (11.11)$$

Les propriétés de stabilité locale des points fixes sont reliées aux valeurs propres de la matrice

$$L_{ijkl, i'j'k'l'}^* = -\frac{\partial \beta_{ijkl}(g^*)}{\partial g_{i'j'k'l'}}. \quad (11.12)$$

*Les fonctions du GR dans le développement en  $\varepsilon$ .* Il n'est pas difficile de calculer les fonctions de GR correspondant à une théorie  $\sigma^4$  générale. Comme dans le cas avec symétrie  $O(N)$ , les calculs ne diffèrent du cas  $N = 1$  que par des facteurs géométriques.

La fonction  $\beta$ , à l'ordre dominant, est donnée par

$$\begin{aligned} \beta_{ijkl}(g) &= -\varepsilon g_{ijkl} + \frac{1}{16\pi^2} \sum_{mn} (g_{ijmn} g_{mnkl} + g_{ikmn} g_{mnjl} + g_{ilmn} g_{mnkj}) \\ &+ O(g^3). \end{aligned} \quad (11.13)$$

La dimension du champ se déduit de la fonction

$$\eta(g) = \frac{1}{6N(4\pi)^4} \sum_{ijkl} g_{ijkl} g_{ijkl} + O(g^3), \quad (11.14)$$

et l'équation de flot pour la déviation  $t$  de la température critique peut s'écrire

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln t(\lambda) = \frac{1}{\nu(g(\lambda))}$$

avec

$$\frac{1}{\nu(g)} = 2 - \frac{1}{16\pi^2 N} \sum_{ij} g_{iijj} + O(g^2). \quad (11.15)$$

Dans les deux équations (11.14,11.15), nous avons explicité la condition (11.9) qui entraîne

$$\sum_k g_{ijkk} = \frac{\delta_{ij}}{N} \sum_{kl} g_{kkll}, \quad \sum_{klm} g_{iklm} g_{jklm} = \frac{\delta_{ij}}{N} \sum_{klmn} g_{klmn} g_{klmn}. \quad (11.16)$$

### 11.2.3 Stabilité du point fixe isotrope

Parmi les points fixes possibles, on trouve toujours, en plus du point fixe gaussien, le point fixe invariant par le groupe  $O(N)$ . Il est possible d'étudier sa stabilité locale à l'ordre dominant en  $\varepsilon$ .

On peut tout d'abord spécialiser les expressions (11.13–11.15) au cas de la théorie des champs  $(\sigma^2)^2$  de symétrie  $O(N)$ . Pour cela on substitue dans ces équations

$$g_{ijkl} = \frac{g}{3} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (11.17)$$

Après un bref calcul, on retrouve les expressions (10.32) et (10.34) des fonctions  $\beta(g)$  et  $\eta(g)$  et la valeur de  $g^*$  correspondante.

Les conditions de stabilité sont données par les valeurs propres de la matrice  $L^*$  (équation (11.12)). Posant

$$g_{ijkl} = g_{ijkl}^* + s_{ijkl}, \quad (11.18)$$

on trouve à l'ordre dominant

$$(L^*s)_{ijkl} = \varepsilon s_{ijkl} - \frac{\varepsilon}{N+8} \left( \delta_{ij} \sum_m s_{mmkl} + 5 \text{ termes} + 12s_{ijkl} \right), \quad (11.19)$$

où les cinq termes sont obtenus par permutation de  $ijkl$ .

En prenant  $s_{ijkl}$  proportionnel à  $g_{ijkl}^*$ , on retrouve l'exposant  $\omega = \beta'(g^*)$  du modèle isotrope. Plus généralement, les vecteurs propres peuvent être classés suivant leurs propriétés de trace. Nous paramétrons donc  $s_{ijkl}$  sous la forme

$$s_{ijkl} = u g_{ijkl}^* + (v_{ij} \delta_{kl} + 5 \text{ termes}) + w_{ijkl}, \quad (11.20)$$

où les tenseurs  $v_{ij}$  et  $w_{ijkl}$  sont de trace nulle:

$$\sum_i v_{ii} = 0; \quad \sum_k w_{ijkl} = 0. \quad (11.21)$$

Les trois valeurs propres correspondant aux composantes  $u, w, v$  sont, respectivement,  $-\omega$ ,  $-\omega_{\text{anis.}}$  et  $-\omega'$  avec

$$\omega = \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \omega_{\text{anis.}} = \varepsilon \frac{4-N}{N+8} + O(\varepsilon^2), \quad \omega' = \frac{8\varepsilon}{N+8} + O(\varepsilon^2). \quad (11.22)$$

Notons que la perturbation proportionnelle à  $v_{ij}$  ne satisfait pas la première condition (11.16). Elle lève donc la dégénérescence entre les longueurs de corrélation des différentes composantes du paramètre d'ordre. Ceci induit une transition vers une situation où quelques composantes se découplent. Cependant, on vérifie facilement que la valeur propre correspondante  $\omega'$  produit, pour  $\varepsilon$  petit, des effets sous-dominants par rapport à la valeur propre correspondant à l'opérateur quadratique en  $\sigma$ .

Pour l'ensemble des modèles satisfaisant la condition (11.16), la valeur propre dominante est  $\omega_{\text{anis.}}$ . On trouve alors le résultat très intéressant suivant (qui généralise un résultat obtenu pour l'anisotropie cubique): le point fixe invariant par le groupe  $O(N)$  est stable par rapport à toutes les perturbations pour  $N$  plus petit qu'une certaine valeur  $N_c$ . Le calcul de  $\omega_{\text{anis.}}$  à l'ordre  $\varepsilon$  fournit:

$$N_c = 4 - 2\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (11.23)$$

C'est un nouvel exemple de symétrie engendrée dynamiquement: pour  $N < N_c$ , dans le domaine critique, les fonctions de corrélation du point fixe stable exhibent plus de symétrie que dans la théorie microscopique initiale.

### 11.3 Flots de gradients: Points fixes et stabilité

On vérifie que l'expression (11.13) de la fonction  $\beta$  dérive d'un potentiel. En effet,

$$\beta_{ijkl}(g) = \frac{\partial U(g)}{\partial g_{ijkl}}$$

avec

$$U(g) = -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{ijkl} g_{ijkl} g_{ijkl} + \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{ijklmn} g_{ijkl} g_{klmn} g_{mnij}. \quad (11.24)$$

*Flots de gradient.* En fait il a été vérifié jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^5$  (c'est à dire à tous les ordres connus) que les fonctions  $\beta$  peuvent s'écrire (notant  $g_a$  l'ensemble de toutes les paramètres  $g_{ijkl}$ )

$$\beta_a(g) = \sum_b T_{ab}(g) \frac{\partial U}{\partial g_b}, \quad (11.25)$$

où  $T_{ab}$  est une matrice symétrique positive. L'équation (11.3) définit alors un flot de gradients. Cette propriété de flot de gradients ne peut être vérifiée dans ce cadre qu'au voisinage du point fixe gaussien  $g_a = 0$ .

La formule générale (11.25) est ce qu'on peut espérer de mieux, si on prend en compte les propriétés de transformations de la fonction  $\beta$  par reparamétrisation de l'espace des coefficients  $g_a$  (des difféomorphismes).

En effet, introduisons de nouveaux paramètres  $\theta_a$  et faisons le changement  $g_a = g_a(\theta)$  dans les équations de flot. Pour que la reparamétrisation soit compatible avec le développement en  $\varepsilon$ , il faut que la matrice  $\partial\theta_b/\partial g_a$  soit inversible pour  $g = 0$ .

Les règles de dérivées en chaîne conduisent alors à

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g_a = \sum_b \frac{\partial g_a}{\partial \theta_b} \lambda \frac{d}{d\lambda} \theta_b, \quad \frac{\partial U}{\partial g_a} = \sum_b \frac{\partial \theta_b}{\partial g_a} \frac{\partial U}{\partial \theta_b}.$$

Par ailleurs, les matrices  $\partial\theta_b/\partial g_a$  et  $\partial g_a/\partial\theta_b$  sont inverses l'une de l'autre et donc

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \theta_a = - \sum_{bcd} \frac{\partial \theta_a}{\partial g_d} T_{dc} \frac{\partial \theta_b}{\partial g_c} \frac{\partial U}{\partial \theta_b}.$$

On vérifie donc que si la matrice  $\mathbf{T}$  est symétrique positive, la matrice transformée  $\mathbf{T}'$  d'éléments

$$T'_{ab} = \sum_{cd} \frac{\partial \theta_a}{\partial g_d} T_{dc} \frac{\partial \theta_b}{\partial g_c},$$

est encore symétrique et positive.

En particulier, même si la matrice  $\mathbf{T}$  est identique à la matrice identité dans un paramétrisation particulière, cela n'est plus vrai dans une paramétrisation arbitraire.

Enfin, on note que  $\mathbf{T}$ , à cause de sa positivité et de ses propriétés de transformation par reparamétrisation, a les propriétés d'un tenseur métrique.

### 11.3.1 Flots et variation du potentiel

La propriété de flot de gradients a des conséquences importantes:

- (i) Le potentiel diminue le long d'une trajectoire du GR et donc les points fixes sont des extrema du potentiel, les points fixes stables étant des minima locaux.
- (ii) Les valeurs propres de la matrice des dérivées en un point fixe sont *réelles*.

*Démonstration.* Calculons la variation du potentiel  $U$  le long d'une trajectoire:

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} U(g) = \sum_b \frac{\partial U}{\partial g_a} \lambda \frac{d}{d\lambda} g_a = - \sum_b \frac{\partial U}{\partial g_a} T_{ab} \frac{\partial U}{\partial g_b}.$$

Comme la matrice  $\mathbf{T}$  est positive, le membre de droite, qui est la valeur moyenne d'une matrice négative, est négatif. Donc le potentiel diminue le long d'une trajectoire. Les points fixes sont des extrema de la fonction  $U$ :

$$\beta_a(g^*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(g^*)}{\partial g_a} = 0.$$

Un point fixe stable est un minimum local de  $U(g)$ .

À un point fixe, la matrice  $L^*$  des dérivées des fonctions  $-\beta$  est donnée par

$$L_{ab}^* = - \frac{\partial \beta_a(g^*)}{\partial g_b} = - \sum_c T_{ac}(g^*) \frac{\partial^2 U(g^*)}{\partial g_c \partial g_b}, \quad (11.26)$$

relation que nous écrivons symboliquement

$$\mathbf{L}^* = -\mathbf{T}\mathbf{U}'' . \quad (11.27)$$

L'équation aux valeurs propres  $\ell$  s'écrit alors

$$\mathbf{T}\mathbf{U}''\mathbf{h} = -\ell\mathbf{h} .$$

Comme la matrice  $\mathbf{T}$  est positive, elle peut s'écrire comme le carré d'une matrice  $\mathbf{X}$  également symétrique et positive:

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}^2 .$$

Posons alors

$$\mathbf{h} = \mathbf{X}\theta ,$$

où le vecteur  $\theta$  paramétrise maintenant le voisinage du point fixe. L'équation aux valeurs propres devient

$$\mathbf{X}^2\mathbf{U}''\mathbf{X}\theta = -\ell\mathbf{X}\theta \Leftrightarrow \mathbf{X}\mathbf{U}''\mathbf{X}\theta = -\ell\theta .$$

La matrice  $\mathbf{U}''$  est symétrique. La matrice  $\mathbf{L}^*$  a donc les mêmes valeurs propres que la matrice symétrique réelle  $-\mathbf{X}\mathbf{U}''\mathbf{X}$  dont les valeurs propres sont *réelles*.

Cette relation montre aussi que si la matrice  $\mathbf{U}''$  est positive, la matrice  $\mathbf{X}\mathbf{U}''\mathbf{X}$  l'est aussi (et réciproquement), et le point fixe correspondant est stable.

### 11.3.2 Points fixes et stabilité

Nous démontrons maintenant deux autres conséquences de la propriété de flot de gradient: Il existe au plus un point fixe stable. Le point fixe stable correspond à la plus petite valeur du potentiel.

En effet, supposons l'existence de deux points fixes  $g^*$  et  $g'^*$ . Considérons alors des paramètres  $g$  de la forme

$$g(s) = sg^* + (1-s)g'^*, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

et le potentiel correspondant

$$u(s) = U(g(s)).$$

Notons que la condition de positivité (11.8) du terme quartique en  $\sigma$  dans l'hamiltonien est vérifiée pour toutes les paramètres  $g(s)$  pour  $0 \leq s \leq 1$  si elle est vérifiée pour  $s = 0$  et  $s = 1$ . La condition de positivité donne à l'espace des paramètres  $g$  une structure de cône convexe.

De nouveau, nous utilisons la notation  $g_a$  où  $a$  représente l'ensemble des indices  $i, j, k, l$ .

La dérivée

$$u'(s) = \sum_a g'_a(s) \frac{\partial U}{\partial g_a} = \sum_{ab} (g_a^* - g_a'^*) T_{ab}^{-1} \frac{\partial \beta}{\partial g_b},$$

qui est un polynôme du second degré, s'annule à cause des conditions de point fixe pour  $s = 0$  et  $s = 1$ :

$$u'(0) = u'(1) = 0.$$

La dérivée seconde  $u''(s)$  est donnée en termes de la matrice  $\mathbf{U}''(g(s))$  des dérivées partielles secondes de  $U$ , et donc des dérivées partielles des fonctions  $\beta$ , par

$$u''(s) = \sum_{ab} (g_a^* - g_a'^*) \mathbf{U}''_{ab}(g(s)) (g_b^* - g_b'^*),$$

Nous notons alors que la matrice  $\mathbf{U}''$  correspondant au potentiel (11.24) est une fonction affine de  $g_{ijkl}$  et donc

$$\mathbf{U}''(g) = s\mathbf{U}''(g^*) + (1-s)\mathbf{U}''(g'^*).$$

Nous en déduisons

$$u''(s) = sA + (1-s)B$$

avec

$$A = \sum_{ab} (g_a^* - g_a'^*)_a \mathbf{U}''_{ab}(g^*) (g_b^* - g_b'^*)_b, \quad B = \sum_{ab} (g_a^* - g_a'^*)_a \mathbf{U}''_{ab}(g'^*) (g_b^* - g_b'^*)_b.$$

En particulier, comme nous l'avons montré en section 11.3.1, en tout point fixe stable la matrice  $\mathbf{U}''$  des dérivées partielles secondes de  $U$  est positive. Donc si  $g^*$  et  $g'^*$  sont des points fixes stables, les valeurs moyennes  $A$  et  $B$  sont positives.

Nous intégrons maintenant sur  $s$  utilisant la propriété  $u'(0) = 0$ :

$$u'(s) = \frac{1}{2}As^2 + \frac{1}{2}(2s - s^2)B.$$

La dérivée doit satisfaire la contrainte supplémentaire

$$u'(1) = 0 = A + B.$$

Les deux quantités ne peuvent donc pas être toutes deux positives, et les deux points fixes ne peuvent être tous deux stables. De façon générale, les signes de  $A$  et  $B$  caractérisent en quelque sorte la stabilité relative de ces deux points fixes. Supposons, par exemple,  $A > 0$  et éliminons  $B$ . Alors

$$u'(s) = -As(1 - s) < 0$$

et donc

$$U(g^*) < U(g'^*).$$

En particulier si  $g^*$  est un point fixe stable, il correspond, parmi tous les points fixes, à la plus petite valeur du potentiel.

### 11.3.3 Stabilité du point fixe et exposant $\eta$

Nous allons maintenant montrer que, dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , le point fixe stable (ou du moins le plus stable) correspond à la plus grande valeur de l'exposant  $\eta$  et donc aux fonctions de corrélation qui décroissent le plus vite à grande distance.

Pour tout point fixe  $g^*$ , l'annulation des fonctions  $\beta$  implique la relation

$$\sum_{ijkl} g_{ijkl} \beta_{ijkl} = 0 \Rightarrow \varepsilon \sum_{ijkl} g_{ijkl} g_{ijkl} = \frac{3}{(4\pi)^2} \sum_{ijklmn} g_{ijkl} g_{klmn} g_{mnij},$$

et donc

$$U(g^*) = -\frac{1}{6}\varepsilon \sum_{ijkl} g_{ijkl} g_{ijkl} + O(g^4),$$

une valeur négative et donc plus faible que celle du point fixe gaussien

$$g^* \neq 0 \Rightarrow U(g^*) < U(0),$$

en accord avec l'analyse de la section précédente.

Par ailleurs, pour un système avec une seule longueur de corrélation, l'exposant  $\eta$  à l'ordre dominant est donc donné par l'équation (11.14) et donc

$$\eta = \frac{1}{6N} \frac{1}{(4\pi)^4} \sum_{ijkl} g_{ijkl} g_{ijkl} = -\frac{1}{N\varepsilon} U(g^*), \quad (11.28)$$

ce qui est, en particulier, en accord avec le résultat général de théorie quantique des champs  $\eta \geq 0$ .

Comme nous l'avons montré, le point fixe stable correspond à la plus petite valeur de  $U$ . Il correspond donc aussi à la plus grande valeur de l'exposant  $\eta$ , c'est à dire de la dimension  $d_\sigma$  du champ  $\sigma$ : les fonctions de corrélations du point fixe stable ont la décroissance la plus rapide.

La validité de cette propriété au delà du développement en  $\varepsilon$  reste une conjecture.

*Une borne sur l'exposant  $\eta$ .* Démontrons, en exercice, une borne générale sur le coefficient dominant d'ordre  $\varepsilon^2$  de  $\eta$ .

La première condition (11.16) peut s'écrire

$$\sum_k g_{ijkk} = 8\pi^2 G \delta_{ij}, \quad G = \frac{1}{8\pi^2 N} \sum_{jk} g_{jjkk}. \quad (11.29)$$

La fonction  $\nu(g)$  s'exprime à cet ordre en fonction de  $G$  (équation (11.15)):

$$\frac{1}{\nu(g)} = 2 - \frac{1}{2} G + O(g^2). \quad (11.30)$$

Prenant une moyenne gaussienne de l'inégalité (11.8) avec la mesure  $e^{-\sum \sigma_i^2/2}$ , on obtient (utilisant le théorème de Wick)

$$\sum_{ijkl} g_{ijkl} \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \rangle = 3 \sum_{ik} g_{ikik} > 0,$$

et donc

$$G > 0. \quad (11.31)$$

Par ailleurs,  $\eta$  est donné par l'équation (11.14):

$$\eta = \frac{1}{6N(4\pi)^4} \sum_{ijkl} (g_{ijkl})^2. \quad (11.32)$$

De l'équation de point fixe  $\beta_{ijkl}(g^*) = 0$ , où  $\beta_{ijkl}$  est donné par l'équation (11.13), on déduit à l'ordre dominant

$$0 = \frac{1}{8\pi^2} \sum_k \beta_{ijkk}(g) = -\varepsilon G \delta_{ij} + \frac{1}{2} G^2 \delta_{ij} + \frac{1}{(8\pi^2)^2} \sum_{klm} g_{iklm} g_{jklm}. \quad (11.33)$$

À cet ordre l'exposant  $\eta$  s'exprime donc aussi uniquement en fonction de  $G$  (et donc de  $\nu$ ):

$$\eta = \frac{1}{24} (\varepsilon G^* - \frac{1}{2} G^{*2}) + O(\varepsilon^3).$$

Cette expression entraîne en particulier que le coefficient d'ordre  $\varepsilon$  de  $G^*$  est borné,  $0 < G^* < 2\varepsilon$ . On peut améliorer cette borne en posant

$$g_{ijkl}^* = \frac{8\pi^2 G^*}{N+2} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) + \tilde{g}_{ijkl}^*,$$

où  $\sum_i \tilde{g}_{iikl}^* = 0$ . Alors

$$\sum_{ijkl} g_{ijkl}^* g_{ijkl}^* = \frac{3N(8\pi^2)^2}{N+2} G^{*2} + \sum_{ijkl} \tilde{g}_{ijkl}^* \tilde{g}_{ijkl}^*,$$

et combinant cette expression avec l'équation (11.33):

$$\varepsilon G^* - \frac{1}{2} G^{*2} - \frac{3}{N+2} G^{*2} \geq 0.$$

On en déduit

$$0 < G^* \leq \frac{2(N+2)}{N+8} \varepsilon \leq 2\varepsilon. \quad (11.34)$$

La borne correspond à un point fixe tel que  $\tilde{g}_{ijkl}^* = 0$  et donc au point fixe avec symétrie  $O(N)$ .

Enfin, l'expression (11.32) montre que  $\eta$  est borné par sa valeur pour  $G^* = \varepsilon$ , si cette valeur est permise, et sinon par sa valeur pour la valeur maximale de  $G^*$ . On en conclut

$$\begin{cases} \eta \leq \frac{N+8}{2(N+8)^2} \varepsilon^2 & \text{pour } N \leq 4, \\ \eta \leq \frac{\varepsilon^2}{48} & \text{pour } N \geq 4. \end{cases}$$

La borne pour  $N \leq 4$  correspond au point fixe isotrope, c'est à dire avec symétrie  $O(N)$ . Elle découle aussi directement des propriétés de stabilité du point fixe isotrope (section 11.2.3) et de la correspondance entre point fixe stable et plus grande valeur de  $\eta$ .

## 11.4 Exercice: modèle général à deux paramètres

Pour vérifier dans une situation plus simple les résultats précédents, nous considérons un modèle général à deux paramètres, dont un exemple particulier est le modèle avec anisotropie cubique examiné en section 11.1. Nous supposons de plus que nous avons trouvé deux points fixes non gaussiens  $g_1^*$  et  $g_2^*$ , dont l'un nécessairement est le point fixe  $O(N)$ , par exemple  $g_1^*$ . L'espace des paramètres  $g$  étant linéaire,  $g$  peut prendre toutes les valeurs contenues dans le plan  $sg_1^* + tg_2^*$ .

Les conditions de positivité sont au moins satisfaites dans le quart de plan  $s, t \geq 0$ .

Calculons le potentiel  $U(g)$  dans ce plan à l'ordre dominant et exprimons les conditions de point fixe pour  $s = 1, t = 0$  et  $s = 0, t = 1$ : quatre conditions qui fixent quatre paramètres. Nous trouvons

$$U(s, t) = -\left(\frac{1}{2}as^2 + bst + \frac{1}{2}ct^2\right) + \frac{1}{3}as^3 + bst(s+t) + \frac{1}{3}ct^3, \quad (11.35)$$

où  $a, b, c$  sont trois constantes qui, à cause de la positivité de

$$\sum_{ijkl} g_{ijkl}g_{ijkl} > 0 \quad \text{pour } g_{ijkl} \neq 0,$$

satisfont les conditions

$$a > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - ac < 0.$$

Par exemple, pour le modèle avec anisotropie cubique, on trouve

$$(8\pi^2)^2 a = \frac{12N(N+2)\varepsilon^3}{(N+8)^2}, \quad (8\pi^2)^2 b = \frac{4N\varepsilon^3}{N+8}, \quad (8\pi^2)^2 c = \frac{4N\varepsilon^3}{9},$$

et donc

$$(8\pi^2)^4 (ac - b^2) = \frac{16N^2(N-1)\varepsilon^6}{3(N+8)^2}.$$

Exprimant qu'au point fixe gaussien la valeur propre dégénérée est  $\varepsilon$ , on obtient la matrice  $\mathbf{T}$ , qui est ici une matrice constante car la transformation  $g \mapsto \{s, t\}$  est linéaire et dans la paramétrisation (11.7)  $\mathbf{T} = \mathbf{1}$ .

On en déduit les équations de flot

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \lambda \frac{ds}{d\lambda} &= s - s^2 + \frac{2b(b-c)}{ac-b^2} st, \\ \frac{1}{\varepsilon} \lambda \frac{dt}{d\lambda} &= t - t^2 + \frac{2b(b-a)}{ac-b^2} st. \end{aligned}$$

Posons

$$\alpha_1 = \frac{2b(c-b)}{ac-b^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2b(a-b)}{ac-b^2}.$$

Dans le modèle avec anisotropie cubique

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{12}{N+8}.$$

On trouve alors un quatrième point fixe

$$s = s_4 \equiv \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2}, \quad t = t_4 \equiv \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2}.$$

La matrice  $\mathbf{L} = -\partial\beta/\partial g$  des dérivées partielles est

$$\mathbf{L} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 - 2s - \alpha_1 t & -\alpha_1 s \\ -\alpha_2 t & 1 - 2t - \alpha_2 s \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres aux différents points fixes sont

$$\varepsilon \times \begin{cases} 1, 1 & \text{pour } s = t = 0 \\ -1, 1 - \alpha_2 & \text{pour } s = 1, t = 0 \\ -1, 1 - \alpha_1 & \text{pour } s = 0, t = 1 \\ -1, 1 - \alpha_3 & \text{pour } s = s_4, t = t_4, \end{cases}$$

où nous avons posé

$$1 - \alpha_3 = -\frac{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)}{1 - \alpha_1\alpha_2} \Leftrightarrow 2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0. \quad (11.36)$$

On voit que du point de vue algébrique les trois points fixes jouent un rôle complètement symétrique.

La condition de stabilité d'un point fixe est

$$\alpha_i > 1.$$

Vérifions qu'en accord avec le résultat général les conditions  $\alpha_1 > 1$  et  $\alpha_2 > 1$  sont incompatibles. Par exemple  $\alpha_1 > 1$  implique

$$2b(c - b) > ac - b^2 \Rightarrow c(c - a) > (b - c)^2 \Rightarrow c > a.$$

Il est clair que la condition  $\alpha_2 > 1$  implique  $a > c$  qui est incompatible.

Par ailleurs les valeurs du potentiel aux points fixes  $g_1^*$  et  $g_2^*$ , respectivement, sont  $-a/6$  et  $-c/6$ , et donc le point stable correspond bien au potentiel le plus bas.

Nous utilisons maintenant la propriété que le point fixe isotrope est toujours présent. Supposons que ce soit  $g_1^*$ . Alors

$$(g_1^*)_{ijkl} = \frac{16\pi^2\varepsilon}{N + 8} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}).$$

La valeur de  $a$  est celle du modèle avec anisotropie cubique. Le paramètre  $b$  est donné par

$$b = \varepsilon \sum_{ijkl} (g_1^*)_{ijkl} (g_2^*)_{ijkl} = (8\pi^2)^2 \frac{6\varepsilon^2}{N + 8} N G_2^*,$$

et enfin

$$c = \varepsilon \sum_{ijkl} (g_2^*)_{ijkl} (g_2^*)_{ijkl} = (8\pi^2)^2 N \varepsilon \left( \varepsilon G_2^* - \frac{1}{2} G_2^{*2} \right).$$

À cet ordre tout s'exprime en fonction de  $G_2^*$ . Les paramètres  $\alpha_i$  deviennent

$$\alpha_1 = G_2^*/\varepsilon, \quad \alpha_2 = \frac{12}{N+8}$$

On voit que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont positifs et, à cause de la borne (11.34),

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 2.$$

Ensuite l'équation (11.36) implique

$$\alpha_3 > 0, \quad \alpha_i + \alpha_j < 2 \text{ pour } i \neq j.$$

Enfin l'équation (11.36) montre que réciproquement que  $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$  entraîne  $\alpha_3 > 1$ . Donc il existe toujours un point fixe stable. Comme dans le cas du modèle avec anisotropie cubique si le quatrième point fixe est stable,  $s_4, t_4 > 0$ .

Notons enfin que la plupart de ces considérations se généralise à l'ordre suivant en  $\varepsilon$ .

## Chapitre 12

### Calculs perturbatifs en théorie statistique des champs

L'analyse des corrections dominantes à l'approximation quasi-gaussienne, ou du champ moyen, ainsi que des arguments de groupe de renormalisation, ont montré qu'au moins en dimension  $d = 4 - \varepsilon$ , c'est à dire dans un voisinage infinitésimal de la dimension 4, les propriétés universelles des transitions de phase du second ordre peuvent être entièrement décrites par une théorie statistique des champs dans l'espace continu. Au chapitre 10, nous avons utilisé cette idée pour déterminer les fonctions de groupe de renormalisation au premier ordre non trivial en  $\varepsilon$ . Ce calcul était basé sur des hypothèses qu'il est nécessaire de justifier. Nous donnons donc dans ce chapitre consacré au calcul perturbatif, et dans le suivant où nous relierons théorie de la renormalisation et équations de groupe de renormalisation, quelques indications sur les méthodes de théorie des champs qui permettent de démontrer, dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , c'est à dire au sens des séries formelles, les résultats du groupe de renormalisation et de faire des calculs précis des quantités universelles.

Dans l'espace continu, comme sur le réseau, les objets utiles sont les fonctions génératrices des fonctions de corrélation complètes, connexes ou fonctions de vertex. Elles s'expriment en termes d'intégrales de champ ou intégrales fonctionnelles. Elles peuvent se calculer par un développement systématique autour de modèles gaussiens. Les contributions successives à ce développement perturbatif sont des valeurs moyennes gaussiennes qui s'obtiennent par le théorème de Wick et s'expriment en termes de diagrammes de Feynman. La partie algébrique de ces calculs se distingue peu des calculs présentés en section 2.3 pour les intégrales ordinaires, et en section 5.3 dans le cas de l'intégrale de chemin.

Par ailleurs, le calcul de l'intégrale de champ par la méthode du col organise le développement perturbatif comme un développement en nombre de boucles au sens des diagrammes de Feynman.

Enfin, nous avons déjà introduit l'idée de prolongement dimensionnel des diagrammes de Feynman. Nous précisons ici la définition du prolongement dimensionnel.

## 12.1 Fonctionnelles génératrices de fonctions de corrélation

Comme nous l'avons déjà expliqué au chapitre 6, du point de vue algébrique il est particulièrement commode d'introduire les fonctionnelles génératrices des fonctions de corrélation. Nous nous contentons donc de récrire les définitions et relations entre fonctionnelles génératrices dans l'espace continu, une majeure partie de la discussion du chapitre 6 s'appliquant aussi ici.

Soit  $\sigma(x)$  un paramètre d'ordre ou champ classique aléatoire muni d'une loi de probabilité, une mesure positive normalisée sur l'espace des champs  $\rho(\sigma)[d\sigma]$ , de la forme

$$\rho(\sigma) = \mathcal{N} e^{-\mathcal{H}(\sigma)},$$

où  $\mathcal{H}(\sigma)$  est l'hamiltonien et  $\mathcal{N}$  une normalisation qui assure  $\int \rho(\sigma)[d\sigma] = 1$ .

La fonction de corrélation à  $n$  points,

$$Z^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots\sigma(x_n) \rangle,$$

où  $\langle \bullet \rangle$  signifie valeur moyenne avec la mesure  $\rho(\sigma)[d\sigma]$ , peut se déduire de la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation

$$\mathcal{Z}(H) = \left\langle \exp \int dx \sigma(x)H(x) \right\rangle. \quad (12.1)$$

La fonctionnelle  $\mathcal{Z}(H)$  est aussi, au sens de la physique statistique, la fonction de partition dans un champ classique externe  $H(x)$ . Il découle de la définition de la dérivée fonctionnelle que

$$\frac{\delta}{\delta H(y)} \exp \left[ \int dx \sigma(x)H(x) \right] = \sigma(y) \exp \left[ \int dx \sigma(x)H(x) \right]. \quad (12.2)$$

Par conséquent,

$$Z^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \left( \prod_i \frac{\delta}{\delta H(y_i)} \right) \mathcal{Z}(H) \Big|_{H=0}. \quad (12.3)$$

Les fonctions  $Z^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont des fonctions de corrélation complètes. La fonctionnelle

$$\mathcal{W}(H) = \ln \mathcal{Z}(H), \quad (12.4)$$

proportionnelle à l'énergie libre dans un champ externe, engendre les fonctions de corrélation connexes:

$$\mathcal{W}(H) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) H(x_1) \dots H(x_n).$$

Dans les théories des champs locales (équivalent de systèmes statistiques avec forces à courte portée) les fonctions connexes satisfont à la propriété d'amas: elles décroissent quand les points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont séparés en deux sous-ensembles non vides qu'on éloigne l'un de l'autre, de façon algébrique ou exponentielle (section 6.2.1).

*Fonctionnelle génératrice des fonctions de vertex.* On définit encore par transformation de Legendre la fonctionnelle génératrice  $\Gamma(M)$  (cf. section 6.3):

$$\mathcal{W}(H) + \Gamma(M) = \int dx H(x)M(x), \quad (12.5a)$$

$$M(x) = \frac{\delta \mathcal{W}(H)}{\delta H(x)}. \quad (12.5b)$$

En mécanique statistique  $\Gamma(M)$  est le potentiel thermodynamique fonction de l'aimantation locale. Mais  $\Gamma(M)$  joue aussi un rôle central dans l'analyse de la théorie des perturbations en théorie des champs. Les fonctions à  $n$  points que  $\Gamma(M)$  engendre,

$$\Gamma(M) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) M(x_1) \dots M(x_n),$$

sont techniquement appelées *fonctions de vertex*.

## 12.2 La théorie des champs gaussienne. Théorème de Wick

En théorie des champs, comme pour d'autres processus aléatoires, la mesure la plus simple est la mesure gaussienne, du type considéré en section 8.4.

### 12.2.1 Théorie gaussienne

Dans le cas gaussien et invariant par translation, l'hamiltonien est quadratique et peut s'écrire en toute généralité

$$\mathcal{H}_0(\sigma) = \frac{1}{2} \int dx dy \sigma(x) \mathcal{H}^{(2)}(x-y) \sigma(y). \quad (12.6)$$

Le noyau  $\mathcal{H}^{(2)}(x-y)$  est symétrique, positif et local. Dans les cas les plus simples  $\mathcal{H}^{(2)}(x-y)$  est un opérateur différentiel polynôme en  $\nabla_x^2$  (cf. expression (10.2)) de la forme

$$\begin{aligned} & \int dx dy \sigma(x) \mathcal{H}^{(2)}(x-y) \sigma(y) \\ & \equiv \int dx \left\{ \sum_{\mu} \partial_{\mu} \sigma(x) \left( 1 + \sum_{k=1} u_{k+1} (-\nabla_x^2)^k \right) \partial_{\mu} \sigma(x) + m^2 \sigma^2(x) \right\}. \end{aligned}$$

La limite  $m = 0$  correspond à une théorie critique (ou théorie de masse nulle au sens des interactions fondamentales). Pour  $m > 0$  (théorie massive), la longueur de corrélation  $\xi$  est finie:  $\xi \propto 1/m$ .

La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation est alors donnée par l'intégrale fonctionnelle

$$\begin{aligned} Z_G(H) &= \mathcal{N} \int [d\sigma] \exp[-\mathcal{H}_0(\sigma)] \exp \left[ \int dx \sigma(x) H(x) \right] \\ &= \mathcal{N} \int [d\sigma] \exp \left[ -\mathcal{H}_0(\sigma) + \int dx \sigma(x) H(x) \right]. \end{aligned}$$

Le calcul de cette intégrale fonctionnelle est une simple généralisation du calcul présenté en section 8.4. En particulier nous pouvons translater  $\sigma(x)$  d'un champ indépendant de  $\sigma$ , pour éliminer le terme linéaire en  $\sigma$ . Nous notons  $\Delta$  l'inverse de  $\mathcal{H}^{(2)}$ :

$$\int dz \Delta(x-z) \mathcal{H}^{(2)}(z-y) = \delta(x-y). \quad (12.7)$$

Nous posons

$$\sigma(x) = \sigma'(x) + \int dy \Delta(x-y) H(y). \quad (12.8)$$

La mesure est invariante dans ce changement de variable et l'intégrand devient

$$Z_G(H) = \mathcal{N} \int [d\sigma'] \exp[-\mathcal{H}_0(\sigma')] \exp \left[ \frac{1}{2} \int dy H(x) \Delta(x-y) H(y) \right].$$

La dépendance en  $H$  est maintenant explicite. L'intégrale résiduelle ne donne que la normalisation. Son calcul peut être source de difficulté mais est également ici sans intérêt. En effet la mesure doit être normalisée de telle sorte que  $\langle 1 \rangle = 1$  et donc

$$\mathcal{N} \int [d\sigma'] \exp[-\mathcal{H}_0(\sigma')] = Z_G(0) = 1.$$

Nous concluons

$$Z_G(H) = \exp \left[ \frac{1}{2} \int dx dy H(x) \Delta(x-y) H(y) \right]. \quad (12.9)$$

Le noyau  $\Delta(x-y)$ , inverse de  $\mathcal{H}^{(2)}$ , est donc la fonction à deux points gaussienne, appelé aussi *propagateur*. Dans une théorie invariante par translation, il est commode d'introduire la représentation de Fourier:

$$\mathcal{H}^{(2)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{-ip \cdot x} \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p), \quad \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) = \int d^d x e^{ip \cdot x} \mathcal{H}^{(2)}(x), \quad (12.10a)$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{ip \cdot x} \tilde{\Delta}(p), \quad \tilde{\Delta}(p) = \int d^d x e^{ip \cdot x} \Delta(x). \quad (12.10b)$$

Pour que l'intégrale fonctionnelle existe il faut que  $\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p)$  soit positif pour  $p \neq 0$ . La fonction à deux points  $\tilde{\Delta}(p)$  est simplement l'inverse de  $\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p)$ .

Si  $\mathcal{H}^{(2)}(x)$  est invariant par rotation d'espace (par le groupe  $O(d)$ ), la fonction  $\Delta(x)$  n'est fonction que de  $|x|$  et  $\tilde{\Delta}(p)$  que de  $|p|$ .

*Fonctions connexes.* La fonctionnelle  $\mathcal{W}_G = \ln \mathcal{Z}_G$  est alors particulièrement simple, comme nous l'avons déjà noté:

$$\mathcal{W}_G(H) = \frac{1}{2} \int dx dy H(x) \Delta(x-y) H(y).$$

Dans le cas gaussien, les fonctions connexes à plus de deux points sont nulles.

*Fonctions de vertex.* Enfin la transformée de Legendre  $\Gamma_G(M)$  est directement liée à l'hamiltonien (section 6.1) puisque

$$\Gamma_G(M) = \mathcal{H}_0(M).$$

### 12.2.2 Théorème de Wick

De l'expression (12.9), et utilisant les arguments du chapitre 2.2, nous obtenons une généralisation immédiate des équations (2.13–2.17) or (5.17), qui exprime le théorème de Wick en théorie des champs:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_1^{2s} \sigma(z_i) \right\rangle_0 &= \left[ \prod_{i=1}^{2s} \frac{\delta}{\delta H(z_i)} \exp[\mathcal{W}_G(H)] \right] \Big|_{H=0} \\ &= \sum_{\substack{\text{tous les appariements} \\ \text{de } \{1,2,\dots,2s\}}} \Delta(z_{i_1} - z_{i_2}) \dots \Delta(z_{i_{2s-1}} - z_{i_{2s}}), \end{aligned} \quad (12.11)$$

où  $\langle \bullet \rangle_0$  signifie valeur moyenne gaussienne (ou de champ libre du point de vue de la théorie quantique des champs).

Graphiquement, chaque terme peut être représenté par un ensemble de contractions correspondant à un choix particulier d'appariements. Par exemple, pour  $s = 2$  on trouve

$$\begin{aligned} \langle \sigma(z_1)\sigma(z_2)\sigma(z_3)\sigma(z_4) \rangle_0 &= \overbrace{\sigma(z_1)\sigma(z_2)} \overbrace{\sigma(z_3)\sigma(z_4)} + 2 \text{ termes} \\ &= \Delta(z_1 - z_2)\Delta(z_3 - z_4) + \Delta(z_1 - z_3)\Delta(z_2 - z_4) \\ &\quad + \Delta(z_1 - z_4)\Delta(z_2 - z_3). \end{aligned}$$

## 12.3 Développement perturbatif

Nous considérons maintenant un hamiltonien plus général de la forme

$$\mathcal{H}(\sigma) = \frac{1}{2} \int dx dy \sigma(x) \mathcal{H}^{(2)}(x-y) \sigma(y) + \mathcal{V}_1(\sigma), \quad (12.12)$$

où  $\mathcal{V}_1(\sigma)$  est un polynôme local dans le champ, c'est à dire de la classe que nous avons introduit dans les chapitres précédents, intégrale d'une fonction du champ et de ses dérivées:

$$\mathcal{V}_1(\sigma) = \int dx V_1[\sigma(x), \partial_\mu \sigma(x), \dots].$$

Notons qu'en théorie quantique des champs, l'hamiltonien  $\mathcal{H}(\sigma)$  est appelée *action euclidienne* en ce sens qu'il est formellement obtenue à partir d'une action classique par le passage à une variable de temps imaginaire.

Bien que la plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont illustrés par des hamiltoniens de type (10.1), ces résultats s'appliquent à des théories plus générales.

La fonctionnelle génératrice prend la forme

$$\mathcal{Z}(H) = \mathcal{N} \int [d\sigma] \exp \left[ -\mathcal{H}(\sigma) + \int dx H(x) \sigma(x) \right] \quad (12.13)$$

où, à cause de la condition de normalisation  $\mathcal{Z}(0) = 1$ ,  $\mathcal{N}$  est l'inverse de la fonction de partition en champ nul:

$$\mathcal{N}^{-1} = \int [d\sigma] e^{-\mathcal{H}(\sigma)}.$$

Utilisant la propriété (12.2),

$$\frac{\delta}{\delta H(x)} \exp \left[ \int dy H(y) \sigma(y) \right] = \sigma(x) \exp \left[ \int dy H(y) \sigma(y) \right],$$

nous pouvons exprimer  $\mathcal{Z}(H)$  en termes de la fonctionnelle gaussienne  $\mathcal{Z}_G(H)$  sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(H) &= \mathcal{N} \exp \left[ -\mathcal{V}_1 \left( \frac{\delta}{\delta H} \right) \right] \mathcal{Z}_G(H) = \mathcal{N} \exp \left[ -\mathcal{V}_1 \left( \frac{\delta}{\delta H} \right) \right] \exp [\mathcal{W}_G(H)] \\ &= \mathcal{N} \exp \left[ -\mathcal{V}_1 \left( \frac{\delta}{\delta H} \right) \right] \exp \left[ \frac{1}{2} \int dx dy H(x) \Delta(x-y) H(y) \right]. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Combinant les identités (12.3,12.14), on peut calculer toutes les fonctions de corrélation du champ  $\sigma$  comme des séries formelles en puissances du *potentiel d'interaction*  $\mathcal{V}_1$ , pour utiliser le langage de la théorie quantique des champs.

L'interaction  $\mathcal{V}_1$  est une somme de monômes appelés *vertex d'interaction*. À chaque monôme correspond un opérateur différentiel: un produit de dérivées  $\delta/\delta H$  qui engendre un produit de propagateurs  $\Delta$ .

Les mêmes résultats sont obtenus en développant l'expression (12.13) en puissances de  $\sigma$ , ne gardant que le terme quadratique en  $\sigma$  dans l'exponentielle, et en appliquant le théorème de Wick. La théorie des perturbations, c'est à dire le développement en puissances de  $\mathcal{V}_1$ , réduit alors tous les calculs à des valeurs moyennes gaussiennes de produits de champs. La théorie des perturbations s'exprime donc en premier lieu en termes de la fonction à deux points gaussienne ou propagateur  $\Delta$  (équation (12.7)). Chaque contribution comporte des intégrations agissant sur un produit de propagateurs  $\Delta$  (théorème de Wick), et a une représentation graphique en termes de diagrammes de Feynman.

*Remarque.* Comme nous l'avons déjà noté dans le chapitre 10, le noyau  $\mathcal{H}^{(2)}(x-y)$  ne peut pas être celui du point fixe gaussien  $-\nabla^2\delta(x-y)$ , car le développement perturbatif contient alors des divergences de courte distance. C'est de nouveau une manifestation de couplage entre les différentes échelles de physique. Ces divergences n'ont pas de signification physique dans la théorie des transitions de phase puisque la fonction à deux points du point fixe n'est qu'une forme asymptotique à grande distance et le réseau régularise la théorie à courte distance.

Dans le continu il faut donc ajouter des termes inessentiels correspondant à des dérivées d'ordre supérieur, de façon à ce que le propagateur  $\Delta(x-y)$  soit suffisamment régulier quand  $|x-y| \rightarrow 0$ , en contraste avec la fonction à deux points gaussienne (section 8.4.3).

Les divergences de courte distance deviennent des divergences de grande impulsion, ou *ultraviolettes*, en représentation de Fourier. Sur le réseau elles n'existent pas puisqu'on n'intègre sur les impulsions que dans un domaine borné, une zone de Brillouin. Pour que la théorie des perturbations existe il faut que  $\tilde{\Delta}(p)$  décroisse suffisamment vite quand  $p \rightarrow \infty$ .

Nous supposons donc, dans la suite de ce chapitre, que le propagateur décroît suffisamment vite à grande impulsion dans l'espace de Fourier pour rendre la théorie convergente à tous les ordres du développement.

## 12.4 Diagrammes de Feynman et fonctions génératrices

*Diagrammes de Feynman.* Quand les interactions sont locales, c'est à dire des intégrales de polynômes dans le champ  $\sigma(x)$  et ses dérivées, toute contribution perturbative à la fonction de corrélation à  $n$  points est une valeur moyenne gaussienne de la forme

$$\left\langle \sigma(x_1) \cdots \sigma(x_n) \int dy_1 \sigma^{p_1}(y_1) \int dy_2 \sigma^{p_2}(y_2) \cdots \int dy_k \sigma^{p_k}(y_k) \right\rangle_0 .$$

(Les dérivées possibles n'ont pas été indiquées.) C'est donc une somme de produits de propagateurs intégrés sur tous les points qui correspondent à des vertex



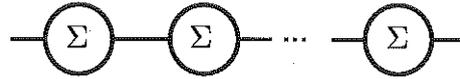


FIG. 11 – Contribution à la fonction à deux points connexe  $W^{(2)}$ .

où nous avons séparé la contribution gaussien de la somme  $\Sigma$ , appelée opérateur de masse, des contributions dues aux interactions engendrées par  $\mathcal{V}_1$ . Alors le développement perturbatif de  $W^{(2)}$  peut être organisé comme une série géométrique (figure 11):

$$W^{(2)}(x-y) = \Delta(x-y) - \int dz_1 dz_2 \Delta(x-z_1) \Sigma(z_1-z_2) \Delta(z_2-y) + \dots,$$

où  $\Sigma$  est une somme de termes 1-irréductibles. La représentation de  $W^{(2)}$  dans la figure 10 est un substitut pour cette somme.

En termes de ces représentations, les représentations graphiques des fonctions de corrélation  $W^{(3)}$  et  $W^{(4)}$ , par exemple, en termes des fonctions de vertex correspondantes et de  $W^{(2)}$  sont alors données par les figures 12 et 13, respectivement.

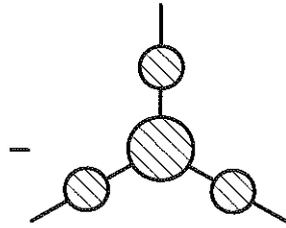


FIG. 12 – La fonction connexe à trois points  $W^{(3)}$ .

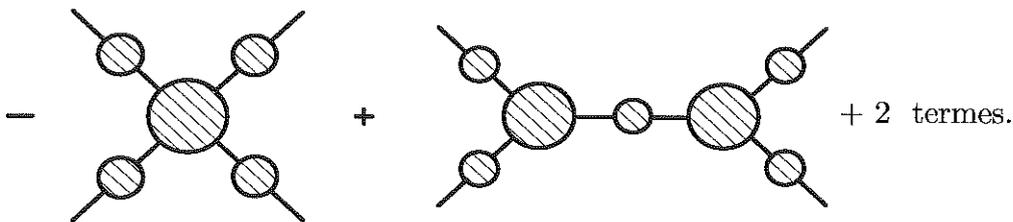


FIG. 13 – La fonction connexe à quatre points  $W^{(4)}$ .

*Remarque.* Pour tout diagramme 1-irréductible on démontre (par exemple par récurrence) la relation entre nombres de boucles  $L$ , nombre de lignes internes ou de propagateurs  $I$  et nombre de vertex  $n$ :

$$L = I - n + 1. \quad (12.15)$$

En représentation de Fourier,  $L$  est aussi le nombre d'impulsions libres dans le diagramme de Feynman sur lesquelles il reste à intégrer. En effet ce nombre est

égal au nombre de propagateurs moins le nombre de vertex à cause de la conservation de l'impulsion à chaque vertex plus un, car la conservation de l'impulsion totale rentrant dans le diagramme est déjà satisfaite.

*Exemple.* Considérons l'exemple particulièrement utile du point de vue des phénomènes critiques de l'interaction

$$\mathcal{V}_1(\sigma) \equiv \frac{1}{4!} g \int dx \sigma^4(x). \quad (12.16)$$

Pour déterminer le premier ordre non trivial en  $g$  des fonctions de groupe de renormalisation, il faut développer les fonctions à deux et quatre points jusqu'à l'ordre  $g^2$ . On trouve alors des expressions directement adaptées des résultats (2.27) et (2.31).

*Fonction à deux points.* La fonction à deux points à l'ordre  $g^2$  est donnée par

$$\langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle = (a) - \frac{1}{2} g (b) + \frac{1}{4} g^2 (c) + \frac{1}{4} g^2 (d) + \frac{1}{6} g^2 (e) + O(g^3).$$

Notons que trois contributions supplémentaires qui se factorisent en

$$\begin{aligned} & \langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle_0 \langle \sigma^4(y) \rangle_0, \quad \langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \sigma^4(y_1) \rangle_0 \langle \sigma^4(y_2) \rangle_0 \text{ et} \\ & \langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle_0 \langle \sigma^4(y_1) \sigma^4(y_2) \rangle_0, \end{aligned}$$

se compensent après multiplication par le facteur de normalisation  $\mathcal{N}$ . En théorie quantique des champs, les diagrammes contribuant à  $\mathcal{N}$  sont aussi appelés diagrammes du vide, dans la mesure où du point de vue quantique ils contribuent à l'énergie de l'état fondamental, appelé aussi vide.

Dans ce développement (a) est le propagateur:

(a):  $x_1$  —————  $x_2$

(b), le diagramme de Feynman qui apparaît à l'ordre  $g$ , est exhibé en figure 14:

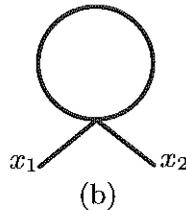


FIG. 14 – Fonction à deux points à l'ordre  $g$ .

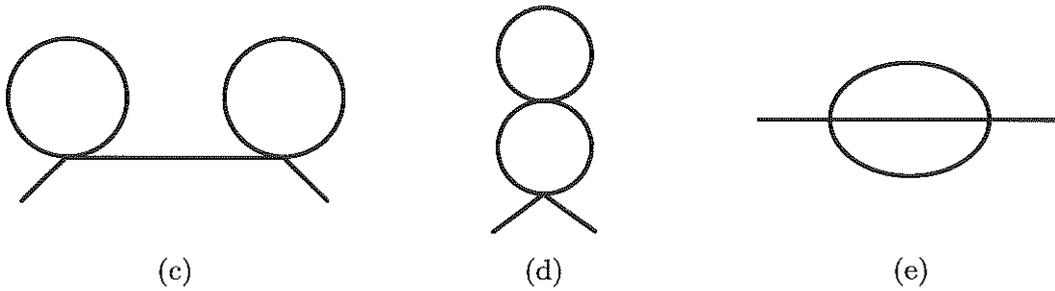


FIG. 15 – Contributions d'ordre  $g^2$  à la fonction à deux points.

et les diagrammes (c),(d),(e) sont montrés en figure 15:

Justifions, par exemple, le facteur  $1/6$  devant le diagramme (e). Développant l'exponentielle au second ordre, nous devons calculer la valeur moyenne gaussienne de

$$\frac{g^2}{2! (4!)^2} \int d^d y_1 \int d^d y_2 \langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \sigma^4(y_1) \sigma^4(y_2) \rangle_0,$$

que nous obtenons par le théorème de Wick.

D'abord,  $\sigma(x_1)$  peut être apparié à un facteur  $\sigma$  du terme d'interaction; il y a huit choix équivalents et un des deux vertex d'interaction est distingué. Ensuite  $\sigma(x_2)$  doit être apparié avec un facteur  $\sigma$  du vertex restant: quatre choix. Les trois champs restants dans les deux vertex peuvent être appariés de toutes les façons possibles:  $3!$  possibilités équivalentes. Prenant en compte tous les facteurs, on trouve

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(4!)^2} \times 8 \times 4 \times 3! = \frac{1}{6}.$$

Notons aussi que ce facteur  $1/6$  multipliant le diagramme a une interprétation en termes des isomorphismes du graphe. Il s'interprète comme l'inverse du nombre  $3!$  de permutations qui échangent les trois lignes qui joignent les deux vertex. Il existe des expressions générales qui relient les facteurs qui apparaissent devant chaque diagramme aux symétries du graphe.

Enfin une remarque pratique est la suivante: la somme de tous les facteurs à un ordre donné peut être calculée à partir d'une théorie des champs à *zéro dimension* obtenue en supprimant tous les arguments des champs et toutes les intégrales, normalisant le propagateur à 1. Par exemple, dans le cas de l'interaction  $\sigma^4$  considéré ci-dessus

$$\mathcal{H}(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{g}{4!} \sigma^4.$$

La fonction à deux points est donnée par

$$Z^{(2)} = \frac{\int d\sigma \sigma^2 \exp[-\mathcal{H}(\sigma)]}{\int d\sigma \exp[-\mathcal{H}(\sigma)]} = 1 - \frac{g}{2} + \frac{2}{3} g^2 + O(g^3),$$

où les intégrales ne portent que sur une seule variable  $\sigma$ .

Vérifions notre calcul de l'ordre  $g^2$ :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}.$$

De façon plus explicite, on trouve donc (ici  $W^{(2)} = Z^{(2)}$ )

$$\begin{aligned} W^{(2)}(x_1 - x_2) &= \Delta(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}g \int dy \Delta(x_1 - y)\Delta(0)\Delta(y - x_2) \\ &\quad + g^2 \int dy_1 dy_2 \left[ \frac{1}{4}\Delta^2(0)\Delta(x_1 - y_1)\Delta(y_1 - y_2)\Delta(y_2 - x_2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{4}\Delta(0)\Delta^2(y_1 - y_2)\Delta(x_1 - y_2)\Delta(x_2 - y_2) \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}\Delta(x_1 - y_1)\Delta^3(y_1 - y_2)\Delta(y_2 - x_2) \right] + O(g^3). \end{aligned}$$

Seul le diagramme (c) est 1-réductible, et il disparaît dans la transformation de Legendre. Par ailleurs il faut ôter les propagateurs externes. On trouve alors

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x_1 - x_2) &= \mathcal{H}^{(2)}(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}g\delta(x_1 - x_2)\Delta(0) \\ &\quad - \frac{1}{4}g^2\Delta(0) \int dy \Delta^2(y)\delta(x_1 - x_2) - \frac{1}{6}g^2\Delta^3(x_1 - x_2) + O(g^3), \end{aligned}$$

qui est une expression plus simple.

*Transformée de Fourier.* Comme nous l'avons déjà noté, dans une théorie invariante par translation les relations entre différents types de fonctions de corrélation ont des formes plus simples en représentation de Fourier. Nous introduisons donc les fonctions définies en (9.5,9.9) et les représentations (12.10b), (12.10a) du propagateur et de son inverse. Avec ces notations la fonction de vertex à deux points devient

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) &= \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p) + \frac{1}{2}g \frac{1}{(2\pi)^d} \int dq \tilde{\Delta}(q) - \frac{1}{4}g^2 \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int dq_1 \tilde{\Delta}(q_1) \int dq_2 \Delta^2(q_2) \\ &\quad - \frac{1}{6}g^2 \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int dq_1 dq_2 \Delta(q_1)\Delta(q_2)\Delta(p - q_1 - q_2) + O(g^3). \end{aligned}$$

La fonction à deux points s'en déduit alors en développant la relation

$$\tilde{W}^{(2)}(p)\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = 1.$$

*La fonction à quatre points.* La fonction à quatre points à l'ordre  $g^2$  est donnée par

$$\begin{aligned} \langle \sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma(x_3)\sigma(x_4) \rangle &= [(a)_{12} (a)_{34} + 2 \text{ termes}] - \frac{g}{2} [(a)_{12} (b)_{34} \\ &\quad + 5 \text{ termes}] - g(f) + g^2 \left\{ (a)_{12} \left[ \frac{1}{4} ((c)_{34} + (d)_{34}) + \frac{1}{6}(e)_{34} \right] + 5 \text{ termes} \right\} \\ &\quad + \frac{g^2}{4} [(b)_{12} (b)_{34} + 2 \text{ termes}] + \frac{g^2}{2} [(g) + 3 \text{ termes}] + \frac{g^2}{2} [(h) + 2 \text{ termes}] \\ &\quad + O(g^3). \end{aligned}$$

Les nouveaux diagrammes (f), (g), (h) sont montrés sur la figure 16. La notation par exemple  $(a)_{12}$  signifie le diagramme (a), contribuant à la fonction à deux points, avec comme arguments  $x_1$  et  $x_2$ . Enfin, les termes qu'il faut ajouter sont obtenus en échangeant les arguments externes de façon à restaurer la symétrie par permutation de la fonction à quatre points.

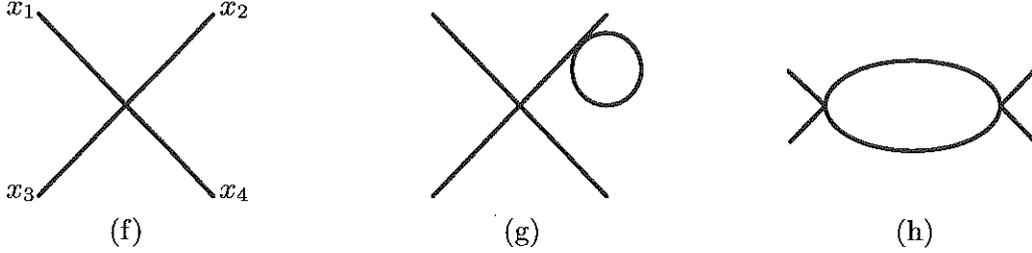


FIG. 16 – Nouveaux diagrammes de Feynman contribuant à la fonction à quatre points.

Les diagrammes tels  $a_{12}a_{34}$ , qui s'expriment en termes de la fonction à deux points, sont disconnectés, c'est à dire se factorisent en un produit de fonctions qui dépendent de sous-ensembles disjoints de variables. L'origine de cette propriété a déjà indiqué en section 2.3.

De nouveau, comme dans le cas de la fonction à deux points, nous avons omis les diagrammes non connexes dans lesquels un facteur n'a pas d'arguments externes. Ces diagrammes sont compensés par les contributions perturbatives du facteur de normalisation  $\mathcal{N}$  dans l'expression (12.13).

La fonction à quatre points connexe en notation plus explicite se réduit à

$$\begin{aligned}
 W^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -g \int dy \Delta(x_1 - y) \Delta(y - x_2) \Delta(x_3 - y) \Delta(x_4 - y) \\
 &+ \frac{1}{2} g^2 \int dy_1 dy_2 \Delta(x_1 - y_1) \Delta(x_2 - y_1) \Delta(x_3 - y_2) \Delta(x_4 - y_2) \Delta^2(y_1 - y_2) \\
 &+ 2 \text{ termes} \\
 &+ \frac{1}{2} g^2 \int dy_1 dy_2 \Delta(y_1 - y_1) \Delta(y_1 - y_2) \Delta(x_1 - y_1) \Delta(x_2 - y_2) \Delta(x_3 - y_2) \\
 &\times \Delta(x_4 - y_2) + 3 \text{ termes} + O(g^3).
 \end{aligned}$$

La transformation de Legendre est simple aussi pour les fonction à quatre points dans cette théorie: ici il suffit d'enlever les propagateurs des lignes externes, et de changer de signe. On trouve

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= g \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) - \frac{1}{2} g^2 \delta(x_1 - x_2) \\
 &\times \delta(x_3 - x_4) \Delta^2(x_1 - x_3) + 2 \text{ termes} + O(g^3).
 \end{aligned}$$

Les transformées de Fourier respectives sont alors données par

$$\widetilde{W}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \widetilde{\Delta}(p_1) \widetilde{\Delta}(p_2) \widetilde{\Delta}(p_3) \widetilde{\Delta}(p_4) \left[ -g \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}g^2 \frac{1}{(2\pi)^d} \int dq \tilde{\Delta}(p_1 + p_2 - q) \tilde{\Delta}(q) + 2 \text{ termes} \\
& + \frac{1}{2}g^2 \tilde{\Delta}(p_1) \frac{1}{(2\pi)^d} \int dq \tilde{\Delta}(q) + 3 \text{ termes} \Big] + O(g^3),
\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g - g^2 \frac{1}{2(2\pi)^d} \int dq \tilde{\Delta}(p_1 + p_2 - q) \tilde{\Delta}(q) + 2 \text{ termes} + O(g^3). \quad (12.17)$$

## 12.5 Développement en nombre de boucles

Il existe une autre manière d'organiser le calcul perturbatif de l'intégrale fonctionnelle qui est basée sur l'application de la méthode du col (cf. section 2.5) aux intégrales fonctionnelles. On cherche le minimum  $\sigma_c$  de la fonctionnelle

$$\mathcal{H}(\sigma, H) = \mathcal{H}(\sigma) - \int dx H(x)\sigma(x),$$

qui est solution de l'équation

$$\frac{\delta \mathcal{H}(\sigma, H)}{\delta \sigma(x)} = 0.$$

Faisant le changement de variables  $\sigma \mapsto \chi$ :

$$\sigma(x) = \sigma_c(H; x) + \chi(x),$$

on développe alors  $\mathcal{H}(\sigma, H)$  autour de la solution  $\sigma_c$ :

$$\mathcal{H}(\sigma, H) = \mathcal{H}(\sigma_c, H) + \frac{1}{2!} \int dx_1 dx_2 \chi(x_1) \frac{\delta^2 \mathcal{H}(\sigma)}{\delta \sigma(x_1) \delta \sigma(x_2)} \Big|_{\sigma=\sigma_c} \chi(x_2) + O(\chi^3).$$

On garde le terme quadratique en  $\chi$  dans l'exponentielle et développe les termes d'ordres supérieurs en  $\chi$ . On ramène ainsi le calcul à des intégrales gaussiennes. Les deux premiers termes d'un tel développement ont déjà été donnés dans le formalisme avec variables discrètes en section 6.4.

### 12.5.1 Ordre dominant: Diagrammes en arbre

Approximant l'intégrale de champ par sa valeur au col, on trouve la contribution dominante à la fonctionnelle connexe

$$\mathcal{W}_0(H) = -\mathcal{H}(H, \sigma_c) = -\mathcal{H}(\sigma_c) + \int dx H(x)\sigma_c(x). \quad (12.18)$$

On vérifie alors que la transformée de Legendre  $\Gamma_0$  de  $\mathcal{W}_0(H)$  est donnée par (section 6.4)

$$\Gamma_0(M) = \mathcal{H}(M). \quad (12.19)$$

On remarque que la théorie des perturbations ordinaire est obtenue en développant la solution  $\sigma_c(H)$  en puissance de  $H$ . Les diagrammes ainsi obtenus sont des diagrammes en arbre (sans boucle). Pour l'hamiltonien (12.12), le développement prend la forme

$$\begin{aligned} \sigma_c(x) &= \int dy \Delta(x-y)H(y) - \int dy \Delta(x-y) \frac{\delta \mathcal{V}_I(\sigma_c)}{\delta \sigma(y)} \\ &= \int dy \Delta(x-y)H(y) - \int dy \Delta(x-y) \frac{\delta \mathcal{V}_I}{\delta \sigma_c(y)}(\Delta H) + \dots, \end{aligned} \quad (12.20)$$

où l'argument  $\Delta H$  de  $\mathcal{V}_I$  représente la substitution

$$\sigma_c(x) \mapsto \Delta H \equiv \int dy \Delta(x-y)H(y).$$

Si, par exemple,

$$\mathcal{V}_I(\sigma) = \frac{g}{4!} \int dx \sigma^4(x),$$

$\sigma_c$  a le développement en diagrammes de Feynman:

$$\sigma_c = \text{---} H - \frac{g}{3!} \text{---} \begin{array}{l} \diagup H \\ \text{---} H \\ \diagdown H \end{array} + \dots$$

FIG. 17

### 12.5.2 Ordre suivant: diagrammes à une boucle

Ne gardant que le terme quadratique en  $\chi$  dans le développement de  $\mathcal{H}(\sigma)$ , on calcule l'intégrale gaussienne et on trouve (cf. équation (6.27))

$$\mathcal{Z}(H) \propto \mathcal{Z}_0(H) \left[ \det \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \sigma_c(x_1) \delta \sigma_c(x_2)} \right]^{-1/2}, \quad (12.21)$$

où la normalisation est fixée par la condition  $\mathcal{Z}(H=0) = 1$ . Posant

$$\mathcal{W}(H) = \mathcal{W}_0(H) + \mathcal{W}_1(H) + \dots, \quad (12.22)$$

on trouve la contribution suivante à la fonctionnelle connexe normalisée (utilisant l'identité classique  $\ln \det = \text{tr} \ln$ )

$$\mathcal{W}_1(H) = -\frac{1}{2} \left[ \text{tr} \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \sigma_c(x_1) \delta \sigma_c(x_2)} \Big|_H - \text{tr} \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \sigma_c(x_1) \delta \sigma_c(x_2)} \Big|_{H=0} \right]. \quad (12.23)$$

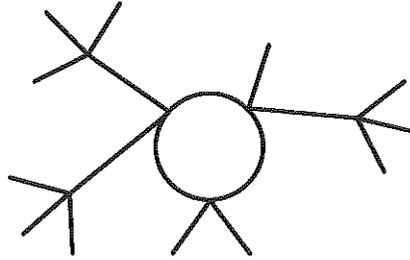


FIG. 18

On remarque que la fonctionnelle  $\mathcal{W}_1(H)$  développée en puissances de  $H$  engendre tous les diagrammes connexes à une boucle. La figure 18 montre une contribution typique à  $\mathcal{W}_1(J)$ .

Enfin, comme conséquence de la propriété (6.15), les corrections dominantes à  $\mathcal{W}$  et  $\Gamma$  sont opposées. Les contributions à une boucle à la fonctionnelle  $\Gamma$  sont donc engendrées par (cf. équation (6.27))

$$\Gamma_1(M) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta M(x_1) \delta M(x_2)} - \ln \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta M \delta M} \Big|_{M(x)=M} \right], \quad (12.24)$$

où  $M$  est l'aimantation spontanée (l'aimantation en champ nul).

Plus généralement, le développement par la méthode du col organise les diagrammes de Feynman par nombre de boucles croissantes. On l'appelle d'ailleurs développement en nombre de boucles.

Pour établir cette propriété, on introduit un paramètre  $\hbar$  et remplace  $\mathcal{H}(\sigma, H)$  par  $\mathcal{H}(\sigma, H)/\hbar$ . La méthode du col produit un développement en puissances de  $\hbar$ . Il est commode de définir  $\mathcal{W} = \hbar \ln \mathcal{Z}$  de façon à ce que les contributions en arbre à  $\mathcal{W}$  et  $\Gamma$  soient d'ordre  $\hbar^0$ . L'introduction du paramètre  $\hbar$  a pour effet de remplacer le propagateur  $\Delta$  par  $\hbar \Delta$  (on inverse le coefficient de  $\sigma^2$ ) et de diviser tous les vertex par  $\hbar$ . Pour un diagramme 1-irréductible, appelant  $I$  le nombre de propagateurs,  $n$  le nombre total de vertex, on trouve donc un facteur  $\hbar^{I-n+1}$ , le dernier facteur  $\hbar$  venant de la définition de  $\mathcal{W}$ . Utilisant la relation (12.15), on reconnaît le facteur  $\hbar^L$  où  $L$  est le nombre de boucles.

*Exemple.* Considérons de nouveau la théorie  $\sigma^4$  (équation (12.16)). Alors

$$\Gamma_1(M) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[ 1 + \frac{1}{2} g \Delta M^2 \right].$$

Développant en puissance de  $g$ , on engendre les diagrammes 1-irréductibles à une boucle de la figure 19:

$$\Gamma_1(M) = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{g^n}{n 2^{n+1}} \int \prod_{i=1}^n dx_i M^2(x_i) \Delta(x_i - x_{i+1}),$$

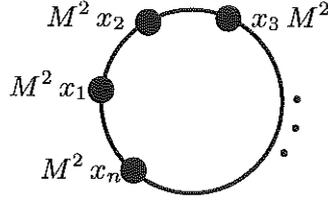


FIG. 19

où  $x_{n+1} = x_1$ .

Introduisant les représentations de Fourier (12.10b) et

$$M(x) = \int dp e^{ipx} \tilde{M}(p),$$

on peut récrire ce développement

$$\Gamma_1(M) = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{g^n}{n 2^{n+1}} \int \left( \prod_{i=1}^{2n} dp_i \tilde{M}(p_i) \right) \delta\left(\sum_i p_i\right) \int dq \prod_{j=1}^n \tilde{\Delta}(q_j)$$

avec

$$q_1 = q, \quad q_{j+1} - q_j = p_{2j-1} + p_{2j}.$$

## 12.6 Prolongement et régularisation dimensionnels

Une technique s'est révélée particulièrement utile à la fois du point de vue de la théorie quantique des champs telle qu'elle s'applique à la théorie des interactions fondamentales que dans l'étude des phénomènes critiques, le prolongement dimensionnel des diagrammes de Feynman. Il conduit à une définition, mais qui est purement perturbative, de la théorie des champs en dimension  $d$  non entière. La régularisation dimensionnelle et donc la soustraction minimale en sont issues, mais aussi les formes variées du développement en  $\varepsilon$  que nous avons discutées au chapitre 10.

### 12.6.1 Prolongement dimensionnel

L'idée essentielle, qui permet d'aboutir à un prolongement dimensionnel des diagrammes de Feynman, consiste à représenter le propagateur comme une transformée de Laplace de la forme

$$\tilde{\Delta}(p) = \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) e^{-t(p^2+m^2)}, \quad (12.25)$$

où  $\Lambda$  est un paramètre caractérisant l'échelle de courte distance et la fonction  $\varrho(t)$  est positive et satisfait la condition

$$|1 - \varrho(t)| < C e^{-\sigma t} \quad (\sigma > 0) \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty.$$

Un exemple simple est

$$\begin{cases} \varrho(t) = 0 & \text{pour } t < 1, \\ \varrho(t) = 1 & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

Dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on retrouve la fonction à deux points du point fixe gaussien pour  $m = 0$  et en général la fonction à deux points gaussienne dans le domaine critique correspondant à l'hamiltonien (8.26).

On suppose dans un premier temps que le propagateur  $\tilde{\Delta}(p)$  pour  $|p| \rightarrow \infty$  tend vers zéro suffisamment vite (c'est à dire plus vite que toute puissance) pour que les diagrammes de Feynman soient finis en toute dimension pour  $m \neq 0$  et au dessus d'une dimension  $d_{\min} > 2$  pour la théorie critique. Ceci implique que la fonction  $\varrho(t)$  s'annule plus vite que toute puissance pour  $t \rightarrow 0$ .

Dans les diagrammes de Feynman, les intégrations sur les impulsions libres correspondant aux boucles deviennent des intégrations gaussiennes qui peuvent être effectuées en toute dimension  $d$ . La dépendance dans la variable  $d$  devient alors explicite.

À cause de la condition de décroissance rapide du propagateur, on obtient des fonctions méromorphes de  $d$ , analytiques pour  $\text{Re } d > d_{\min}$  pour des théories critiques ( $m = 0$ ) et entières si la longueur de corrélation est finie (théories massives).

### 12.6.2 Régularisation dimensionnelle

Après prolongement dimensionnel, on choisit  $d$  complexe,  $\text{Re } d < d_c$  tel que naïvement toutes les intégrales convergent au sens du comptage de puissances. Alors les intégrales ont des limites *indépendantes de la fonction  $\varrho(t)$*  pour  $\Lambda \rightarrow \infty$  et définissent des fonctions méromorphes de la dimension, qui ont maintenant des pôles simples ou multiples sur l'axe réel, correspondant aux divergences des diagrammes avec propagateur de la forme  $1/(p^2 + m^2)$ . Cette construction est appelée *régularisation dimensionnelle*.

Le prolongement et la régularisation dimensionnels satisfont aux importantes propriétés formelles suivantes:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int d^d p F(p+q) = \int d^d p F(p) && \text{translation} \\ \text{(ii)} \quad & \int d^d p F(\lambda p) = |\lambda|^{-d} \int d^d p F(p) && \text{dilatation} \\ \text{(iii)} \quad & \int d^d p d^{d'} q f(p)g(q) = \int d^d p f(p) \int d^{d'} q g(q) && \text{factorisation} \end{aligned}$$

Les deux premières conditions impliquent l'invariance par changement de variables affines. Cette invariance joue un rôle essentiel dans la préservation des symétries de certaines théories des champs.

Dans le cas de la théorie  $\sigma^4$  en dimension  $d$  cette méthode correspond en particulier à éliminer automatiquement les déviations au point critique. Elle élimine aussi tous les contributions inessentiels. Mais elle introduit des divergences sous forme de pôles simples ou multiples quand  $\varepsilon = 4-d \rightarrow 0$ , qui remplacent des contributions qui divergent logarithmiquement quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , et qu'il faut éliminer par une opération de *renormalisation*, un sujet discuté au chapitre 13.

*Une conséquence curieuse.* On rencontre parfois l'intégrale

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k k^{-2\alpha},$$

en particulier dans les théories de masse nulle. Les propriétés de la régularisation dimensionnelle (invariance par dilatation) impliquent

$$\int d^d k k^{-2\alpha} = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq d/2 \Rightarrow \int d^d k k^{-2\alpha} \equiv 0.$$

Examinons l'intégrale avec un facteur de coupure  $\varrho(t)$  qui la rend initialement convergente

$$D_\alpha(\Lambda, d) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int d^d k \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) t^{\alpha-1} e^{-tk^2}.$$

On voit qu'en remplaçant  $\varrho(t)$  par 1 on retrouve bien l'intégrale de départ après intégration sur  $t$ . Intégrant sur  $k$  d'abord on trouve

$$D_\alpha(\Lambda, d) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) t^{\alpha-1-d/2}.$$

On voit maintenant que l'intégrale converge pour  $\text{Re } d > 2\alpha$ , domaine dans lequel la fonction de  $d$  est holomorphe. Changeant  $t\Lambda^2$  en  $t$  on obtient

$$D_\alpha(\Lambda, d) = \Lambda^{d-2\alpha} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \varrho(t) t^{\alpha-1-d/2}.$$

La singularité de l'intégrale est due au comportement à  $t \rightarrow \infty$ . On peut séparer les différentes contributions

$$\begin{aligned} D_\alpha(\Lambda, d) &= \frac{\Lambda^{d-2\alpha}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ \int_0^1 dt \varrho(t) t^{\alpha-1-d/2} + \int_1^\infty dt (\varrho(t) - 1) t^{\alpha-1-d/2} \right] \\ &+ \frac{\Lambda^{d-2\alpha}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2}{d-2\alpha}. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Les deux intégrales sont des fonctions entières de  $d$  et donc cette représentation définit la fonction dans tout le plan complexe. La seule singularité est le pôle simple à  $d = 2\alpha$ . Suivant la procédure indiquée plus haut, nous choisissons  $d$  complexe,  $\text{Re } d < 2\alpha$  et faisant tendre  $\Lambda \rightarrow \infty$ : Le limite est nulle.

On peut vérifier sur un exemple que ce résultat est bien cohérent avec la régularisation dimensionnelle, puisque cette propriété peut paraître quelque peu étrange. L'intégrale

$$I = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{p^2 (p^2 + 1)}$$

peut être calculée de deux façons différentes. La première s'appuie sur la décomposition

$$\int d^d p \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) = - \int \frac{d^d p}{p^2 + 1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \int_0^\infty dt e^{-t(p^2+1)} \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt t^{-d/2} e^{-t} = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2). \end{aligned}$$

D'un autre côté on peut faire le calcul direct. Le résultat se déduit immédiatement du premier calcul de la section 12.6.3 et confirme le résultat ci-dessus.

*Régularisation dimensionnelle et théories critiques.* Cette propriété doit conduire à une certaine prudence dans l'utilisation de la régularisation dimensionnelle dans des théories critiques, c'est à dire de masse nulle. Dans ces modèles (comme le modèle  $\sigma$  non linéaire du chapitre 15), on rencontre une intégrale de ce type:  $\int d^d k/k^2$ . En dimension 2 cette intégrale est à la fois divergente pour  $k \rightarrow 0$  et  $k \rightarrow \infty$ . Dans ce cas une utilisation naïve de la régularisation dimensionnelle conduit à un résultat indésirable.

Pour s'en convaincre, prenons le point de vue du prolongement dimensionnel et partons de  $d > 2$  avec un facteur de coupure (12.25). De l'expression (12.26), on déduit

$$\int \frac{d^d k}{k^2} \propto \frac{\Lambda^{d-2}}{d-2}.$$

Quand  $d \rightarrow 2$  cette intégrale diverge. Cette divergence pour  $k \rightarrow 0$  a un sens physique: elle interdit l'existence de bosons de Goldstone (des champs de masse nulle) à deux dimensions, et donc d'une brisure de symétrie continue (section 7.6).

Si, au contraire, on introduit une masse  $m$  et on part de  $d < 2$ , alors quand  $d \rightarrow 2$  on trouve

$$\int^\Lambda \frac{d^d k}{k^2 + m^2} = S_d \frac{\pi}{2 \sin(\pi d/2)} m^{d-2} \underset{d \rightarrow 2}{\sim} -S_d \frac{m^{d-2}}{d-2}, \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Cette fois nous avons procédé à une régularisation dimensionnelle et le pôle à  $d = 2$  est une divergence pour  $k \rightarrow \infty$  d'ailleurs de signe opposé à la divergence précédente. En dimension 2, la régularisation dimensionnelle naïve conduit à compenser une divergence UV ( $k \rightarrow \infty$ ) par une divergence IR ( $k \rightarrow 0$ ) ce qui est physiquement absurde. Dans les théories critiques il ne faut utiliser la régularisation dimensionnelle que pour des dimensions sans divergence de longue distance ou faible impulsion.

### 12.6.3 Exemples

*Fonction à deux points à une boucle.* Le seul diagramme à une boucle qui contribue à la fonction de vertex à deux points dans la théorie  $\sigma^4$  est le diagramme (b) de la figure 14:

$$(b) \equiv \Omega_d(m) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{k^2 + m^2}.$$

À ce diagramme il faut soustraire sa valeur à  $m = 0$  de façon à ce que la théorie reste critique pour  $m = 0$ . Par ailleurs, on modifie le propagateur à courte distance comme indiqué en (12.25):

$$\Omega_d(m) - \Omega_d(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) e^{-tk^2} (e^{-tm^2} - 1). \quad (12.27)$$

Après intégration sur  $k$ , on obtient la forme prolongée en dimension

$$\Omega_d(m) - \Omega_d(0) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt \varrho(t\Lambda^2) t^{-d/2} (e^{-tm^2} - 1).$$

Cette intégrale converge pour  $\text{Re } d > 2$  où elle définit une fonction analytique. Nous ne nous intéressons qu'au comportement dans la limite  $m \rightarrow 0$ , qui est aussi le comportement  $\Lambda \rightarrow \infty$ , pour  $d = 4 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  positif et infinitésimal. Pour  $d < 4$  fixé, la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  existe et on peut donc remplacer  $\varrho$  par 1. Mais la correction dominante est d'ordre  $\Lambda^{-\varepsilon}$  qu'on ne peut pas négliger dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il nous faut donc les deux premiers termes du développement:

$$\begin{aligned} \Omega_d(m) - \Omega_d(0) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt t^{-d/2} (e^{-tm^2} - 1) \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt (\varrho(t\Lambda^2) - 1) t^{-d/2} (e^{-tm^2} - 1). \end{aligned}$$

La première intégrale converge pour  $2 < \text{Re } d < 4$  et après intégration par parties se ramène à une fonction  $\Gamma$ . La deuxième intégrale est une fonction de  $m^2$  holomorphe à  $m = 0$ . Nous n'avons besoin que du premier terme, et donc

$$\Omega_d(m) - \Omega_d(0) = \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2} + a(d) m^2 \Lambda^{d-4} + O(m^4 \Lambda^{d-6})$$

avec

$$a(d) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt (1 - \varrho(t)) t^{1-d/2}. \quad (12.28)$$

Le terme dominant pour  $m \rightarrow 0$  ne dépend pas de la fonction  $\varrho$  et donc de la structure de courte distance. La fonction  $a(d)$  dépend de la fonction  $\varrho$  explicite,

mais pour  $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$  a un pôle dont le résidu est indépendant de  $\varrho$ , qui compense le pôle du coefficient de  $m^{d-2}$ :

$$a(d) \underset{d \rightarrow 4}{\sim} \frac{1}{8\pi^2 \varepsilon}.$$

Dans un développement en  $\varepsilon$ , on trouve

$$\begin{aligned} \Omega_d(m) - \Omega_d(0) &\underset{m \rightarrow 0, d \rightarrow 4}{\sim} \frac{N_d m^2}{\varepsilon} (\Lambda^{-\varepsilon} - m^{-\varepsilon} + \text{const.}) \\ &\underset{m \rightarrow 0, d \rightarrow 4}{\sim} N_d m^2 \ln(m/\Lambda) + O(\varepsilon) + O(m^4), \end{aligned}$$

où  $N_d$  est un facteur fonction entière de  $d$  qu'il n'est pas utile de développer

$$N_d = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} = \frac{1}{8\pi^2} + O(\varepsilon).$$

En effet le rapport  $N_d/N_4$  peut être absorbé dans une redéfinition du paramètre de développement.

Le facteur  $\ln(\Lambda/m)$  est directement lié au facteur  $\ln(t/\Lambda'^2)$  de l'équation (10.22).

Notons enfin qu'en régularisation dimensionnelle le résultat se réduit au terme proportionnel à  $m^{d-2}$ :

$$\Omega_d(m) - \Omega_d(0) = \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2}.$$

La fonction  $\Gamma$  étant méromorphe, cette expression est bien une fonction méromorphe de  $d$  avec un pôle simple à  $d = 2$  correspondant à la soustraction du terme avec propagateur critique, et des pôles à  $d = 4, 6, \dots$  qui sont conséquences directes de la divergence à grande impulsion (ultraviolette, UV), ou courte distance du diagramme de Feynman limite pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Dans le développement en  $\varepsilon$ , le terme  $m^2 \ln m$  n'est pas affecté, mais un terme singulier en  $m^2/\varepsilon$  s'y ajoute, qu'il faut compenser par *renormalisation*.

*Fonction à quatre points à une boucle.* Considérons le diagramme à une boucle contribuant à la fonction de vertex à quatre points dans la théorie  $\sigma^4$  (diagramme (h) de la figure 16). En régularisation dimensionnelle on trouve

$$\begin{aligned} B_d(p) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(q^2 + m^2)[(p - q)^2 + m^2]} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_0^\infty dt_1 dt_2 \exp[-t_1(q^2 + m^2) - t_2((p - q)^2 + m^2)] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 + t_2)^{d/2}} \exp[-p^2 t_1 t_2 / (t_1 + t_2) - m^2(t_1 + t_2)]. \end{aligned}$$

La dépendance en  $d$  est maintenant explicite et l'intégrant défini pour tout  $d$ . L'intégrale sur les variables restantes, par contre, ne converge que pour  $\text{Re } d < 4$  en l'absence de facteurs de convergence.

Nous pouvons faire le calcul explicite pour  $m = 0$ . Après le changement de variables  $t_1, t_2 \mapsto t, s$ :

$$t_1 = ts, \quad t_2 = (1-t)s,$$

l'expression devient

$$B_d(p) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dt \int_0^\infty ds s^{1-d/2} e^{-st(1-t)\mathbf{p}^2},$$

expression définie pour  $2 < d < 4$ . L'intégrale sur  $s$  donne

$$B_d(p) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (\mathbf{p}^2)^{(d/2)-2} \Gamma(2-d/2) \int_0^1 dt [t(1-t)]^{(d/2)-2},$$

et enfin l'intégrale sur  $t$  conduit au résultat explicite

$$B_d(p) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \frac{\Gamma^2(d/2-1)}{\Gamma(d-2)} (\mathbf{p}^2)^{(d/2)-2}. \quad (12.29)$$

Cette expression est de nouveau une fonction méromorphe de  $d$  avec un pôle à  $d = 2$  correspondant à des divergences de longue distance ou petite impulsion parce que nous avons spécialisé le calcul à la théorie critique  $m = 0$ , et des pôles à  $d = 4, 6, \dots$  qui sont conséquences directes de la divergence à grande impulsion du diagramme de Feynman.

Le développement en  $\varepsilon$  conduit à

$$B_d(p) \sim N_d \left( \frac{1}{\varepsilon} - \ln p \right) + O(\varepsilon).$$

De nouveau le simple prolongement dimensionnel avec propagateur modifié conduit à compenser le pôle en  $\varepsilon$  et à le remplacer par  $\ln \Lambda$ , à une constante numérique dépendant de  $\rho$  près.

Le résultat obtenu ici confirme le calcul de la fonction (10.8).

*Fonction à deux points à deux boucles.* Pour obtenir la correction dominante à la dimension du champ  $\sigma$ , il faut calculer le diagramme (e) contribuant à la fonction à deux points  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$ , dans la théorie critique:

$$(e) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \frac{d^d q_1 d^d q_2}{q_1^2 q_2^2 (p - q_1 - q_2)^2}.$$

Il est commode ici de faire le calcul en deux étapes. On peut d'abord calculer le propagateur  $\Delta$  comme fonction de variables d'espace. On trouve en dimension arbitraire la forme (8.35):

$$\Delta(x) = \frac{2^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) |x|^{2-d}.$$

Alors

$$(e) = \int e^{ikx} \Delta^3(x) d^d x.$$

Il faut donc calculer l'intégrale

$$\Phi = \int d^d x \frac{e^{ipx}}{|x|^\alpha}.$$

On utilise la représentation

$$\frac{1}{|x|^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty dt t^{\alpha/2-1} e^{-tx^2},$$

et donc, après intégration sur  $x$ ,

$$\Phi = \frac{\pi^d}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty dt t^{\alpha/2-1-d/2} e^{-p^2/4t}.$$

Le changement de variables  $s = p^2/4t$  ramène de nouveau l'intégrale à une représentation de la fonction  $\Gamma$ .

Le résultat final est

$$(e) = -N_d^2 \frac{3\Gamma(d/2 - 1)\Gamma(2 - d)}{2\Gamma(3d/2 - 2)} |p|^{2d-6} = N_d^2 p^2 \left( -\frac{1}{8\varepsilon} + \frac{1}{4} \ln p \right) + O(\varepsilon). \quad (12.30)$$

Le résultat est une fonction méromorphe de  $d$ , avec un pôle double à  $d = 2$  qui correspond à des singularités de longue distance, et des pôles simples à  $d = 3, 4, \dots$  correspondant à des singularités de courte distance.

## Chapitre 13

### Théorie des champs près de la dimension 4

Au chapitre 10, nous avons montré comment des calculs perturbatifs basés sur une théorie statistique locale des champs de type  $\int dx \sigma^4(x)$ , combinés avec les arguments de groupe de renormalisation de la section 9.6, permettent de déterminer certaines propriétés critiques universelles de modèles ferromagnétiques au moins au voisinage de la dimension 4. Nous avons ainsi exhibé un point fixe non gaussien et obtenu les exposants critiques correspondants au premier ordre dans la déviation  $\varepsilon = 4 - d > 0$  à la dimension 4.

En section 10.5, nous avons décrit, sans justification précise, la forme des équations de groupe de renormalisation asymptotiques que satisfont les fonctions de corrélation connexes, à grande distance et à tous les ordres dans un développement double dans le coefficient de  $\int dx \sigma^4(x)$  et  $\varepsilon$ . Ces équations permettent alors, quand il existe un point fixe stable, de démontrer l'universalité des comportements critiques. Elles indiquent que les méthodes qui ont permis de calculer des quantités universelles au premier ordre en  $\varepsilon$ , se généralisent à tous les ordres.

Nous allons dans ce chapitre décrire avec quelles hypothèses de telles équations, et les propriétés des phénomènes critiques qui s'en déduisent, peuvent être démontrées dans le cadre de la théorie statistique des champs.

#### 13.1 Hamiltonien effectif

Le point de départ de notre analyse est l'hamiltonien critique (10.1) de la section 10.1, et plus généralement l'hamiltonien (10.19) de la section 10.3. Il correspond à une théorie statistique locale des champs dont l'hamiltonien est la somme de l'hamiltonien de point fixe gaussien, des perturbations essentielles au modèle gaussien, et de termes quadratiques dans le champ avec un nombre suffisant de dérivées, destinés à régulariser les divergences à grande impulsion, ou à courte distance (hamiltonien dit de Landau–Ginzburg–Wilson). Ces divergences ne sont pas présentes dans les modèles sur réseau parce que les impulsions sont bornées par la zone de Brillouin.

À l'ordre dominant, un tel hamiltonien reproduit tous les résultats du modèle quasi-gaussien ou de l'approximation de champ moyen. Au-delà, il conduit à un développement double, perturbatif et dimensionnel, fini pour les fonctions de corrélation, fini sauf à  $T_c$  à impulsion nulle.

L'hamiltonien de la théorie des champs prend alors la forme (10.19) qui est un exemple de hamiltonien de type (12.12) avec une interaction spécifique:

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}^{(2)}(\sigma) + \frac{1}{4!}g \int d^d x \sigma^4(x) \quad (13.1)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)}(\sigma) &= \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{\mu} (\partial_{\mu} \sigma(x))^2 + \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{k=1} u_{k+1} \sum_{\mu} \partial_{\mu} \sigma(x) (-\nabla^2)^k \partial_{\mu} \sigma(x) \\ &+ \frac{1}{2} u_0 \int d^d x \sigma^2(x). \end{aligned}$$

Le paramètre  $u_0$  est ici la somme de la contribution  $r_c(g)$  qui assure que le hamiltonien reste critique, et d'une déviation essentielle infinitésimale  $t \propto T - T_c$  à la théorie critique. Basée sur les résultats empiriques précédents nous supposons que tous les paramètres  $u_k$  et  $g$  sont des fonctions *régulières* de la température pour  $T$  proche de  $T_c$ .

On appelle aussi une telle théorie des champs *théorie des champs effective* pour souligner qu'il ne s'agit pas d'un modèle microscopique, mais seulement d'un modèle qui reproduit correctement les comportements asymptotiques à longue distance (cette dénomination est aujourd'hui presque un pléonasme dans la mesure où presque toutes les théories des champs qui apparaissent en physique ont cette interprétation).

Les méthodes de la Théorie Quantique des Champs (TQC) perturbative, permettent alors de clarifier les hypothèses à la base du groupe de renormalisation et de démontrer de nombreux résultats généraux comme les propriétés d'universalité et les lois d'échelles (Brézin, Le Guillou, Zinn-Justin 1972-1974). La théorie des perturbations est aussi à la base de calculs précis de quantités universelles pour une large classe de modèles statistiques.

Les équations du groupe de renormalisation (EGR), qui sont une forme particulière des EGR générales (9.33) introduites en section 9.1 dans la limite où le hamiltonien est caractérisé par un petit nombre de paramètres, y apparaissent comme une conséquence de la nécessité de la renormalisation dans les théories locales des champs. La renormalisabilité d'une théorie locale des champs exprime, d'une manière un peu formelle, sa relative insensibilité à la structure de courte distance, et est donc directement liée à l'universalité des phénomènes critiques.

La dimension 4 trouve une interprétation simple dans le cadre de la TQC. En effet pour  $d < 4$  le point fixe gaussien devient instable pour le comportement

à faible impulsion (comportement infrarouge) et donc stable pour le comportement à grande impulsion (comportement ultraviolet). Ce phénomène cesse à  $d = 4$ , donc  $d = 4$  est la dimension où, par définition, la TQC est simplement *renormalisable*.

Nous allons écrire des EGR directement pour les fonctions de corrélation. La limitation de la méthode réside dans son caractère perturbatif: elle n'est applicable que lorsqu'il existe un point fixe qui, dans un sens qui deviendra progressivement plus clair, est proche du point fixe gaussien.

Dans le chapitre 10, utilisant l'idée du développement en  $\varepsilon = 4 - d$  introduite par Wilson et Fisher, nous avons déterminé le point fixe non trivial du groupe de renormalisation au premier ordre en  $\varepsilon$  dans l'hypothèse où un groupe de renormalisation pouvait être formulé.

Les EGR satisfaites par les fonctions de corrélation en théorie des champs peuvent également être résolues en dimension  $d = 4 - \varepsilon$ , et conduisent au calcul des quantités universelles sous la forme d'un développement en  $\varepsilon$ .

Dans ce chapitre nous nous restreignons à des systèmes de type Ising et le champ  $\sigma$  n'a qu'une composante. La généralisation au modèle à  $N$  composantes de symétrie  $O(N)$  est simple.

*Remarque.* La physique que l'on essaie de décrire correspond à des valeurs entières de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = 1, 2$ . Bien qu'on ne sache démontrer la validité des résultats du groupe de renormalisation que dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , on suppose cependant que leur validité s'étend au-delà du voisinage infinitésimal de la dimension 4. La comparaison des résultats, obtenus par le développement une fois sommé, avec des données expérimentales ou numériques fournit dans ces conditions un test crucial pour la théorie.

## 13.2 Théorie des champs: renormalisation

Tout d'abord il est commode de faire un changement d'échelle,

$$x = \Lambda x', \quad (13.2)$$

où  $\Lambda$  est un paramètre qui a des dimensions d'une impulsion et qu'on va faire tendre vers l'infini. On peut imaginer  $1/\Lambda$  comme représentant la maille du réseau du modèle statistique initial. Ce changement a pour but de prendre comme référence l'échelle macroscopique de distance pertinente pour la physique que nous voulons étudier, plutôt que l'échelle microscopique initiale.

Nous avons vu que la dimension du  $\sigma(x)$  dans le modèle gaussien est  $(d-2)/2$ . Nous changeons donc la normalisation du champ de façon correspondante  $\sigma \mapsto \sigma'$ :

$$\sigma(x) = \Lambda^{(2-d)/2} \sigma'(x), \quad (13.3)$$

de façon à ce que le hamiltonien du point fixe gaussien reste inchangé. On reconnaît les transformations (9.37) du groupe de renormalisation qui conduisent au point fixe gaussien.

Dans ces nouvelles variables le hamiltonien s'écrit alors (omettant maintenant les primes)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\sigma) &= \mathcal{H}^{(2)}(\sigma) + \frac{1}{4!}g\Lambda^{4-d} \int d^d x \sigma^4(x), \\ \mathcal{H}^{(2)}(\sigma) &= \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{\mu} (\partial_{\mu}\sigma(x))^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2 u_0 \int d^d x \sigma^2(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{k=1} u_{k+1} \Lambda^{-2k} \sum_{\mu} \partial_{\mu}\sigma(x) (-\nabla^2)^k \partial_{\mu}\sigma(x).\end{aligned}\tag{13.4}$$

Dans le langage de la théorie quantique des champs on appelle le paramètre  $\Lambda$ , qui est le reflet de la structure microscopique initiale, paramètre de coupure ou "cut-off" en français).

Cette opération en fait correspond à la première phase de la construction en section 9.6.1, où une première dilatation supprime (à l'ordre dominant) les termes qui sont inessentiels du point de vue du point fixe gaussien, le flot du groupe de renormalisation étant dominé par le flot local auprès du point fixe gaussien.

### 13.2.1 Analyse dimensionnelle

Après l'introduction du paramètre  $\Lambda$  toutes les quantités ont une dimension en unité  $\Lambda$ . Les impulsions ont dimension 1, les coordonnées d'espace dimension -1, le champ  $\sigma$  a une dimension  $\frac{1}{2}(d-2)$  qui est égale à sa dimension du point de vue du point fixe gaussien, et de façon générale, nous notons que les puissances de  $\Lambda$  qui affectent maintenant tous les termes du hamiltonien, et donc leurs dimensions, sont exactement données par les valeurs propres des opérateurs correspondant dans l'analyse de la stabilité du point fixe gaussien. Il est facile de vérifier que cette propriété s'étend à des interactions avec des puissances plus élevées de  $\sigma$  et plus de dérivées, que nous avons omises puisque les transformations (13.2,13.3) sont analogues aux transformations (9.37). Par l'introduction du paramètre  $\Lambda$ , nous avons ramené le calcul de la dimension du champ et l'analyse de la stabilité du point fixe gaussien à de l'analyse dimensionnelle. En particulier, le point fixe gaussien est stable et le modèle quasi-gaussien valable si les coefficients de tous les termes sauf les deux premiers de  $\mathcal{H}^{(2)}$  tendent vers zéro pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Pour les termes quadratiques à plus de deux dérivées cette condition est toujours vérifiée.

De plus nous posons

$$\Lambda^2 u_0 = \Lambda^2 u_{0c}(g) + t,$$

où  $u_{0c}(g)$  correspond à la valeur de  $u_0$  pour laquelle la théorie est critique ( $T = T_c$ ), c'est à dire à laquelle la longueur de corrélation diverge ou la masse s'annule:

$$u_0 = u_{0c}(g) \Leftrightarrow \tilde{\Gamma}^{(2)}(p=0) = 0.$$

Cette paramétrisation correspond à faire un changement d'échelle adaptée au point fixe gaussien

$$u_0 - u_{0c} \mapsto t/\Lambda^2,$$

de façon à compenser le facteur d'échelle engendré par le groupe de renormalisation, puisque le terme en  $\sigma^2$  est essentiel et a dimension 2. Après ce changement les fonctions de corrélations ont une limite finie quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  à  $\{p_i, t\}$  fixés si le point fixe gaussien est stable. Cette propriété s'étend aux fonctions de corrélation à aimantation fixée.

Il est facile de vérifier cette propriété pour  $d > 4$  par le calcul perturbatif. Reprenons par exemple le calcul du diagramme (b) de la figure 14 soustrait de sa valeur à  $t = 0$  (équation (12.27)). Pour  $d > 4$  la contribution principale est maintenant linéaire en  $t$

$$\Omega_d(\sqrt{t}) - \Omega_d(0) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty ds \varrho(s\Lambda^2) s^{1-d/2} (t\Lambda^{d-4}) + O(t^{d/2-1}).$$

Cette contribution est multipliée par  $-\frac{1}{2}g\Lambda^{4-d}$  et donc

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{=} p^2 + t - gt \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty ds \varrho(s\Lambda^2) s^{1-d/2} + O(g^2).$$

De la même façon on vérifie que la contribution d'ordre  $g^2$  à la fonction à quatre points tend vers une limite finie. L'effet de l'interaction quartique pour  $d > 4$  est de modifier les paramètres du modèle quasi-gaussien et d'engendrer les corrections prévues par l'analyse des perturbations dues aux opérateurs inessentiels.

Pour  $d < 4$  au contraire on ne s'attend pas à ce que la limite soit finie puisque les dimensions du champ ainsi que de  $u_0 - u_{0c}$  changent. C'est ce qu'on observe puisque, par exemple,  $\Omega_d(\sqrt{t}) - \Omega_d(0)$  a une limite finie quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , mais le diagramme est multiplié par  $g\Lambda^{4-d}$  qui diverge.

À quatre dimensions dans un développement en puissances de  $g$  et plus généralement dans un développement double en  $g$  et  $\varepsilon = 4 - d$ , ces divergences prennent la forme de puissances de  $\ln \Lambda$ , le degré augmentant avec l'ordre en  $g$  et en  $\varepsilon$ . Ce sont ces divergences que le théorème de renormalisation permet de contrôler.

### 13.2.2 Théorème de renormalisation

Nous décrivons d'abord le théorème de renormalisation pour la théorie critique  $t = 0$ , qu'il est possible de définir formellement ordre par ordre comme un développement double en série de puissances du coefficient  $g$  de l'interaction et de  $\varepsilon$ .

Pour formuler le théorème de renormalisation, il est nécessaire d'introduire une échelle  $\mu$ , dite de renormalisation, et le paramètre d'interaction effective  $g_r$  à l'échelle  $\mu$  appelé interaction renormalisée. Ce paramètre  $g_r$  dans le formalisme du groupe de renormalisation, joue le rôle de  $g(\Lambda/\mu)$ , où  $\Lambda/\mu$  est le paramètre de dilatation.

Il existe alors deux fonctions  $Z(\Lambda/\mu, g_r)$  et  $Z_g(\Lambda/\mu, g_r)$  avec

$$\Lambda^{4-d}g = \mu^{4-d}Z_g(\Lambda/\mu, g_r)g_r = \mu^{4-d}g_r + O(g_r^2), \quad (13.5)$$

$$Z(\Lambda/\mu, g_r) = 1 + O(g_r), \quad (13.6)$$

calculables ordre par ordre dans un développement double en puissances de  $g_r$  et  $\varepsilon$ , telles que les fonctions de corrélation  $\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; g_r, \mu, \Lambda)$  dites *renormalisées*:

$$\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; g_r, \mu, \Lambda) = Z^{n/2}(g_r, \Lambda/\mu) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda), \quad (13.7)$$

ont, ordre par ordre, des limites finies  $\tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; g_r, \mu)$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  à  $p_i, \mu, g_r$  fixés.

*Remarques.*

(i) Il y a un certain arbitraire dans le choix des *constantes de renormalisation*  $Z$  et  $Z_g$  puisqu'elles peuvent être multipliées par des fonctions développables arbitraires de  $g_r$  et  $\Lambda/\mu$ . Ces fonctions peuvent être complètement déterminées par des *conditions de renormalisation*, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p = \mu, \mu, g_r) &= 1, \\ \tilde{\Gamma}_r^{(2)}(p_i = \mu\theta_i, \mu, g_r) &= \mu^{4-d} g_r, \end{aligned}$$

où les  $\theta_i$  sont quatre vecteurs de somme nulle, et tels que

$$\theta_i \cdot \theta_j = \frac{4}{3} \delta_{ij} - \frac{1}{3}.$$

On montre alors que les fonctions  $\tilde{\Gamma}_r^{(n)}$  sont uniques, c'est à dire indépendantes du choix particulier de la forme de  $\mathcal{H}^{(2)}(\sigma)$ . Ce résultat implique que les contributions des termes inessentiels du point de vue du point fixe gaussien peuvent être négligées, ordre par ordre dans un développement en puissances de  $g$  et  $\varepsilon$ . Dans ce sens il peut être généralisé et on peut démontrer qu'au sens de ce développement formel les contributions de toutes les interactions inessentiels pour le point fixe gaussien tendent vers zéro.

Bien entendu le théorème de renormalisation n'a d'implications pour le comportement à longue distance des modèles statistiques que si la propriété reste vraie à dimension fixée.

(ii) Dans le langage de la théorie quantique des champs, les paramètres ou fonctions de corrélation de la théorie initiale sont les paramètres ou fonctions de corrélation *nus*.

(iii) Au delà du développement perturbatif, l'interprétation des fonctions de corrélation renormalisées est un peu subtile. Dans la théorie formelle de la renormalisation ce sont les paramètres de la théorie renormalisée qui sont fixés, et les paramètres initiaux, qui sont les coefficients de tous les opérateurs essentiels ou marginaux par rapport au point fixe gaussien, qui sont des paramètres ajustables et qui donc varient quand le facteur d'échelle  $\Lambda/\mu$  varie. Ceci correspond à appliquer au voisinage du point fixe gaussien une généralisation de la stratégie que nous avons déjà utilisée pour le coefficient de  $\sigma^2$  et que nous a permis de définir des propriétés d'universalité dans le domaine critique.

En ce sens les fonctions renormalisées décrivent les propriétés d'universalité dans le domaine critique le plus général possible autour du point fixe gaussien.

Cependant il n'est pas sûr qu'un tel domaine critique existe toujours, au delà du développement perturbatif. L'étude des EGR nous donnera quelques informations sur ce problème.

*Théories des champs superrenormalisables.* À dimension  $d < 4$  fixée, la théorie des perturbations n'a pas de sens pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ce qui se reflète dans le coefficient  $\Lambda^{4-d}$  de l'interaction essentielle  $\sigma^4$ . En fait on peut facilement montrer que même à  $\Lambda$  fixé la théorie critique ou de masse nulle n'a pas de développement perturbatif. Pour  $d = 3$  il existe un diagramme d'ordre  $g^4$  contribuant à la fonction à deux points divergent. Dans le cadre du prolongement dimensionnel, quel que soit  $\varepsilon = 4 - d > 0$ , il existe un ordre  $k = O(1/\varepsilon)$  du développement en puissances de  $g$  tel que certains diagrammes divergent.

Par contre pour  $t > 0$  et  $g_0 = g\Lambda^{4-d}/t^{2-d/2} \sim g\Lambda^{4-d}\xi^{4-d}$  fixé ( $\xi$  est la longueur de corrélation), les fonctions de corrélation ont une limite pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Cette condition conduit à faire tendre  $g$  vers zéro en fonction du paramètre de dilatation avec une puissance appropriée au point fixe gaussien, de façon à compenser le facteur de dilatation, comme nous l'avons fait systématiquement pour la déviation à la théorie critique et l'opérateur  $\sigma^2$ . On obtient alors une théorie perturbative finie, et la théorie des champs correspondante est appelée superrenormalisable.

La théorie intéressante du point de vue de la physique statistique correspond alors en général à la limite  $g_0 \rightarrow \infty$ . Il y a cependant des situations exceptionnelles où une telle théorie des champs trouve une application pratique, par exemple dans la physique des gaz ultrafroids et très dilués, où le paramètre  $g$  est naturellement très petit et en même temps les coefficients de tous les termes d'interaction de degré plus élevé sont encore plus négligeables.

### 13.3 Les équations du groupe de renormalisation

Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , c'est à dire dans un développement double en série de puissances de couplage  $g$  et de  $\varepsilon$ , le comportement critique ne diffère du comportement quasi-gaussien que par des puissances de logarithme. Ce sont ces logarithmes qu'organisent les équations de groupe de renormalisation.

#### 13.3.1 EGR pour la théorie critique

Nous partons de l'équation (13.7) et exprimons l'existence de la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  en dérivant l'équation par rapport à  $\Lambda$  à  $\mu, g_r$  fixés

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g_r, \mu \text{ fixés}} Z^{n/2}(g, \Lambda/\mu) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = O(\Lambda^{-2}(\ln \Lambda)^L), \quad (13.8)$$

où nous avons exprimé le facteur de renormalisation  $Z$  en fonction de  $g$  plutôt que  $g_r$ .

En accord avec la philosophie perturbative, nous négligeons dans un premier temps toutes les contributions qui, ordre par ordre, décroissent comme des puissances de  $\Lambda$ . Dans la suite  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda)$  et  $Z(g, \Lambda/\mu)$  seront les sommes des contributions perturbatives qui ne tendent pas vers zéro. Dans ces conditions le membre de droite de l'équation (13.8) s'annule exactement.

Alors, utilisant la règle de dérivées en chaîne nous déduisons de l'équation (13.8),

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g, \Lambda/\mu) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \eta(g, \Lambda/\mu) \right] \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = 0. \quad (13.9)$$

Les fonctions  $\beta$  et  $\eta$ , qui sont sans dimension et ne peuvent donc dépendre que de  $g$  and  $\Lambda/\mu$ , sont définies par

$$\beta(g, \Lambda/\mu) = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g, \mu} g, \quad (13.10a)$$

$$\eta(g, \Lambda/\mu) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g, \mu} \ln Z(g, \Lambda/\mu). \quad (13.10b)$$

Toutefois, les fonctions  $\beta$  et  $\eta$  peuvent aussi être calculées directement en utilisant l'équation (13.9) en termes des fonctions  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  qui ne dépendent pas de  $\mu$ . Les fonctions  $\beta$  et  $\eta$  ne peuvent donc pas dépendre du rapport  $\Lambda/\mu$ . L'équation (13.9) se simplifie donc et nous trouvons (Zinn-Justin 1973)

$$\left( \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \eta(g) \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = 0. \quad (13.11)$$

Cette équation est équivalente à l'équation (10.35), que nous avons postulé au chapitre 10.

Traduit dans le formalisme avec paramètre de coupure  $\Lambda$ , l'idée fondamentale du groupe de renormalisation devient la suivante: il est possible de modifier le paramètre  $\Lambda$  et de façon corrélée la normalisation du champ  $\sigma$  et les coefficients de toutes les interactions de telle sorte que les fonctions de corrélations ne soient pas changées.

L'équation (13.11) est satisfaite asymptotiquement dans la limite  $|p_i| \ll \Lambda$ . Il est possible de vérifier qu'à tout ordre fini du développement en  $g$  et  $\varepsilon$  les termes négligés sont de la forme  $(\ln \Lambda)^L / \Lambda^2$ , comme dans l'équation (13.8), où le degré  $L$  augmente avec l'ordre. L'équation (13.11) est donc exacte pour des fonctions de corrélation asymptotiques obtenues en ne gardant à chaque ordre que les termes divergents où finis quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . On peut montrer que de telles fonctions de corrélations peuvent aussi être obtenues en ajoutant au hamiltonien tous les termes inessentiels possibles et en ajustant ordre par ordre leurs coefficients comme fonction de  $g$  de façon à éliminer systématiquement les contributions qui tendent vers zéro. Ceci correspond à la stratégie évoquée en fin de section 9.6 et qui conduit à l'équation unique (9.53).

Dans ce qui suit les fonctions de vertex seront implicitement ces fonctions sans corrections qui satisfont les EGR exactement.

### 13.3.2 Solution perturbative de l'EGR

Il est en fait instructif, au vu de la discussion qui précède, de résoudre perturbativement l'EGR (13.11) pour la fonction de vertex à deux points  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$ , à  $d = 4$  pour simplifier. Il est commode d'introduire la fonction  $\zeta(g)$ :

$$\ln \zeta(g) = \int_0^g dg' \frac{\eta(g')}{\beta(g')}.$$

Comme on le verra plus loin les fonctions  $\eta$  et  $\beta$  sont d'ordre  $g^2$  et donc cette fonction est développable en puissances de  $g$ .

Nous posons alors

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 \zeta(g) \mathcal{G}^{(2)}(g, p/\Lambda).$$

La fonction  $\mathcal{G}^{(2)}$  satisfait une équation qui exprime que c'est un invariant du GR

$$\left( \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \mathcal{G}^{(2)}(g, p/\Lambda) = 0. \quad (13.12)$$

Nous développons  $\mathcal{G}^{(2)}$  et  $\beta(g)$  en puissances de  $g$ , posant

$$\mathcal{G}^{(2)}(g, p/\Lambda) = 1 + \sum_1^{\infty} g^n \gamma_n(p/\Lambda), \quad \beta(g) = \sum_2^{\infty} \beta_n g^n. \quad (13.13)$$

Introduisant ces développements dans l'équation (13.12) nous trouvons pour  $n \geq 2$ ,

$$-z\gamma'_n(z) + \sum_{m=1}^{n-1} m\gamma_m(z)\beta_{n-m+1} = 0. \quad (13.14)$$

L'équation  $n = 1$  est spéciale:

$$-z\gamma'_1(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1(z) = C_1.$$

Examinons le cas  $n = 2$ :

$$-z\gamma'_2(z) + C_1\beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2(z) = C_1\beta_2 \ln z + C_2.$$

Cet exemple exhibe la structure générale:  $\gamma_n(z)$  est un polynôme de degré  $(n-1)$  en  $\ln z$ :

$$\gamma_n(z) = P_{n-1}(\ln z), \quad (13.15)$$

$$P'_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^{n-1} m P_{m-1}(x) \beta_{n-m+1}. \quad (13.16)$$

Notons, en particulier, que la nouvelle information spécifique à l'ordre  $n$  est caractérisée par deux constantes,  $\beta_n$  qui entre dans le coefficient de  $\ln z$ , et  $C_n$ , qui est une constante d'intégration (auxquelles il faut ajouter un coefficient de  $\eta(g)$ , qui est caché dans la fonction  $\zeta(g)$ ). De plus, le terme de degré le plus élevé de  $P_n$  est entièrement déterminé par le calcul à une boucle, le terme suivant par le calcul à deux boucles, etc... Enfin,  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  est entièrement déterminée par les fonctions  $\beta(g)$  et  $\eta(g)$  et, par exemple,  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(1, g)/\Lambda^2$  qui est une troisième fonction de  $g$ .

Notons enfin que si  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  a une limite pour  $p = 0$ :

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2 = 0) = 0, \quad (13.17)$$

il n'en est pas de même pour sa dérivée  $\partial\tilde{\Gamma}^{(2)}/\partial p^2$  qui diverge à  $p = 0$ . Il est facile de vérifier qu'aucune autre fonction de vertex n'a de limite finie à impulsion nulle.

*Théorie renormalisée et groupe de renormalisation.* Les fonctions de corrélation physiques initiales et les fonctions renormalisées (13.7) sont par construction proportionnelles et par conséquent ont les mêmes comportements pour  $|p_i| \rightarrow 0$ . On peut donc étudier le comportement asymptotique en utilisant les fonctions renormalisées. Grâce à la régularisation dimensionnelle et la renormalisation par soustraction minimale des pôles en  $1/\varepsilon$ , les fonctions renormalisées sont les plus faciles à calculer. Par ailleurs, les fonctions renormalisées satisfont aussi à des EGR obtenues à partir de l'équation (13.7) (qui fait jouer un rôle symétrique aux fonctions de corrélation asymptotiques de la théorie initiale et aux fonctions renormalisées) en dérivant par rapport à  $\mu$  à  $\Lambda$  et  $g$  fixés. On trouve

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_r(g_r) \frac{\partial}{\partial g_r} - \frac{1}{2} n \eta_r(g_r) \right) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g_r, \mu) = 0. \quad (13.18)$$

Une fois la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  prise, cette équation est exacte. Son étude est très semblable à celle de l'équation (13.11) que nous présentons ci-dessous.

Mais en se restreignant aux fonctions renormalisées deux types d'informations sont perdues, le comportement des paramètres de la théorie renormalisée en termes des paramètres initiaux, la nature des corrections au comportement asymptotique.

### 13.4 Solution des EGR: le développement en $\varepsilon$

*Méthode des caractéristiques.* L'équation (13.11) peut être résolue par la méthode des caractéristiques. On introduit un paramètre de dilatation  $\lambda$  et on cherche des fonctions  $g(\lambda)$  et  $Z(\lambda)$  telles que (on utilise ici la convention usuelle pour  $\lambda$ , différente de celle utilisée jusqu'à présent,  $\lambda \mapsto 1/\lambda$ )

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \lambda\Lambda) \right] = 0. \quad (13.19)$$

En dérivant explicitement par rapport à  $\lambda$ , on trouve que l'équation (13.19) est compatible avec l'équation (13.11) à condition que:

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = \beta(g(\lambda)), \quad g(1) = g; \quad (13.20a)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = \eta(g(\lambda)), \quad Z(1) = 1. \quad (13.20b)$$

Les équations (13.19) et (13.20) impliquent alors:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \lambda\Lambda). \quad (13.21)$$

*Remarques.*

(i) Nous observons la similarité entre cette équation et l'équation (13.7) si l'on choisit  $\lambda = \mu/\Lambda$ . On identifie alors  $g_r$  avec  $g(\mu/\Lambda)$  est le couplage effectif à l'échelle  $\mu$  et  $Z(\mu/\Lambda)$  avec la renormalisation du champ. On peut alors se demander quelle est l'intérêt du détour par l'équation aux dérivées partielles. La raison principale est la suivante: cela nous a permis de montrer que les coefficients de l'EGR ne dépendent pas du rapport  $\mu/\Lambda$ , contrairement aux constantes de renormalisation. Cette propriété des constantes de renormalisation n'était contenue dans l'équation (13.7) que de façon implicite. Elle démontre le caractère markovien des équations de flot (13.20), que nous avons postulé pour les EGR générales (9.18,9.19).

(ii) Les équations (13.20),(13.21) réalisent asymptotiquement (parce que les termes sous-dominants en puissances de  $\Lambda$  ont été négligés) les idées générales du groupe de renormalisation. Le paramètre  $g(\lambda)$  définit l'hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_\lambda$  à l'échelle  $\lambda$  et ainsi l'équation (13.20a) caractérise le flot des hamiltoniens. La fonction  $Z(\lambda)$  définie en (13.20b) diffère cependant de la fonction (9.19) par un facteur  $\lambda^{d-2}$ . Ceci correspond à la renormalisation initiale du champ  $\sigma$  effectuée en section 13.2 qui est le changement d'échelle adaptée au point fixe gaussien. La fonction définie ici correspond au rapport entre la renormalisation générale (9.19) et la renormalisation gaussienne. Cette factorisation est bien adaptée à une situation où un opérateur est marginal ou faiblement essentiel (du point de vue du point fixe gaussien), comme c'est le cas dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ .

*Discussion.* Résolvons les équations (13.20):

$$\int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} = \ln \lambda, \quad (13.22a)$$

$$\int_1^\lambda \frac{ds}{s} \eta(g(s)) = \ln Z(\lambda). \quad (13.22b)$$

L'équation (13.11) est celle du groupe de renormalisation (GR) sous sa forme différentielle. Les équations (13.21) et (13.22) sont les EGR intégrées. Dans ce

qui suit nous supposons explicitement que les fonctions du GR,  $\beta(g)$  et  $\eta(g)$ , sont des fonctions *régulières* de  $g$ , pour  $g > 0$ .

Il est en fait commode de multiplier  $\Lambda$  par un facteur  $1/\lambda$  dans l'équation (13.21):

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda/\lambda) = Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda). \quad (13.23)$$

Dans l'équation (13.23) on voit qu'il est équivalent d'augmenter  $\Lambda$  ou de diminuer  $\lambda$ . Afin d'examiner la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on étudie donc le comportement de l'amplitude  $g(\lambda)$  de l'interaction effective lorsque  $\lambda$  tend vers zéro. L'équation (13.22a) montre que  $g(\lambda)$  augmente si la fonction  $\beta$  est négative, ou diminue dans le cas contraire. Les points fixes correspondent aux zéros  $g^*$  de la fonction  $\beta$  qui par conséquent jouent un rôle essentiel dans l'analyse du comportement critique. Ceux pour lesquels la fonction  $\beta$  a une pente négative sont des points fixes répulsifs dans l'IR:  $g(\lambda)$  s'éloigne de tels zéros, sauf si initialement  $g(1) = g^*$ . Au contraire ceux pour lesquels la pente est positive sont des points fixes attractifs du point de vue des comportements à longue distance.

### 13.4.1 Calculs à l'ordre d'une boucle: point fixe et propriété d'échelle

*Les fonctions  $\beta$  et  $\eta$ .* Les fonctions  $\beta$  et  $\eta$  du groupe de renormalisation peuvent être calculées perturbativement en exprimant que les fonctions à deux et quatre points satisfont aux EGR (il suffit de calculer les diagrammes (e) et (h) des figures 15 et 16). La correction à la fonction à deux points est une constante et donc n'induit qu'une modification du paramètre critique  $u_{0c}$

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 + O(g^2) \Rightarrow \eta(g) = O(g^2). \quad (13.24)$$

Les facteurs combinatoires de la fonction de vertex à quatre points ont été expliqués au chapitre 12. Avec les normalisations de la théorie des champs on trouve ( $\varepsilon = 4 - d$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &\underset{\Lambda \rightarrow \infty}{=} \Lambda^\varepsilon g - \frac{3g^2}{32\pi^4} \int_{|q|=1}^{|q|=O(\Lambda)} \frac{d^4q}{q^4} + O(g^2 \times 1, g^2\varepsilon) \\ &\underset{\Lambda \rightarrow \infty}{=} \Lambda^\varepsilon g - \frac{3g^2}{16\pi^2} \ln \Lambda + O(g^2 \times 1, g^2\varepsilon). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\varepsilon \Lambda^\varepsilon g - \frac{3g^2}{16\pi^2} + \beta(g) \Lambda^\varepsilon = O(g^3, g^2\varepsilon),$$

et on retrouve donc un résultat cohérent avec l'expression (10.15):

$$\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + \frac{3g^2}{16\pi^2} + O(g^3, g^2\varepsilon).$$

En dessous de quatre dimensions, si  $g$  est initialement petit, l'expression (10.15) montre que  $g(\lambda)$  augmente dans un premier temps reflétant l'instabilité du point

fixe gaussien. Mais, au sens du développement en  $\varepsilon$ ,  $\beta(g)$  a un autre zéro  $g^*$  (équation (10.16)):

$$\beta(g^*) = 0 \quad \text{pour} \quad g^* = \frac{16\pi^2}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Alors l'équation (13.22a) montre que la limite asymptotique de  $g(\lambda)$  est  $g^*$ . Notons  $\omega$  la pente de  $\beta(g)$  au point fixe  $g^*$ :

$$\omega = \beta'(g^*) = \varepsilon + O(\varepsilon^2) > 0, \quad (13.25)$$

(équation (9.50)) et linéarisons l'équation (13.22a) autour du point fixe:

$$\int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\omega(g' - g^*)} \sim \ln \lambda. \quad (13.26)$$

On obtient en intégrant:

$$|g(\lambda) - g^*| \underset{\lambda \rightarrow 0}{\propto} \lambda^\omega. \quad (13.27)$$

En-dessous de quatre dimensions, au moins pour des  $\varepsilon$  infinitésimaux, ce point fixe non gaussien est stable dans l'IR. À quatre dimensions, ce point fixe est confondu avec le point fixe gaussien et la valeur propre  $\omega$  s'annule indiquant l'apparition d'un opérateur marginal.

Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ ,  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(g^*)$  et que  $\eta(g^*)$  sont finis. Bien entendu là aussi il faut supposer que cette propriété reste satisfaite au delà du développement en  $\varepsilon$ . De l'équation (13.22b) on déduit alors le comportement de  $Z(\lambda)$  pour  $\lambda$  petit. L'intégrale dans le membre de droite de l'égalité est dominée par le voisinage de  $s = 0$ . Par conséquent

$$\ln Z(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \eta \ln \lambda, \quad (13.28)$$

où l'on a posé:

$$\eta = \eta(g^*).$$

L'équation (13.23) détermine alors le comportement de  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda)$  pour  $\Lambda$  grand:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda/\lambda) \sim \lambda^{-n\eta/2} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g^*, \Lambda). \quad (13.29)$$

### 13.4.2 Analyse dimensionnelle

Nous avons besoin maintenant de la dimension des fonctions de de vertex en transformée de Fourier. Pour calculer cette dimension les remarques suivantes sont utiles. La dimension des composantes de Fourier  $\tilde{\sigma}$  du champ est:

$$\sigma(x) = \int d^d p e^{ipx} \tilde{\sigma}(p) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma}(p) \sim \Lambda^{-(d+2)/2}.$$

Les fonctions de vertex  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ , sont obtenues en développant le potentiel thermodynamique (la transformée de Legendre de l'énergie libre) en puissances de l'aimantation  $M(x) = \langle \sigma(x) \rangle$  dépendante de l'espace ou plutôt de sa transformée de Fourier  $\tilde{M}(p)$

$$\Gamma(M) = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^d p_1 \dots d^d p_n \delta^{(d)}(p_1 + \dots + p_n) \tilde{M}(p_1) \dots \tilde{M}(p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i).$$

On en déduit les dimensions:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i) \sim \Lambda^{-nd+n(d+2)/2+d} = \Lambda^{d-n(d-2)/2}. \quad (13.30)$$

Comme nous l'avons souligné en section 13.2 le but de cette analyse dimensionnelle est de rétablir les facteurs de renormalisation du point fixe gaussien.

*Application.* Les considérations dimensionnelles appliquées à l'équation (13.30) impliquent:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g, \Lambda/\lambda) = \lambda^{-d+(n/2)(d-2)} \tilde{\Gamma}^{(n)}(\lambda p_i; g, \Lambda). \quad (13.31)$$

En combinant cette équation avec l'équation (13.29) on obtient:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(\lambda p_i; g, \Lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda^{d-(n/2)(d-2+\eta)} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; g^*, \Lambda). \quad (13.32)$$

Cette équation montre que les fonctions de corrélation critiques ont un comportement en loi de puissance, pour les petites impulsions, qui ne dépend pas de la valeur initiale du coefficient  $g$  de  $\sigma^4$ .

Pour  $n = 2$  l'équation (13.32) donne en particulier le comportement de l'inverse de la fonction à deux points pour les petites impulsions. Pour la fonction de corrélation  $\tilde{W}^{(2)}(p)$  on trouve donc:

$$\tilde{W}^{(2)}(p) \equiv \left[ \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \right]^{-1} \underset{|p| \rightarrow 0}{\sim} 1/p^{2-\eta}. \quad (13.33)$$

On vérifie donc que la définition de l'équation (13.28) coïncide avec la définition usuelle de l'exposant critique  $\eta$ . La représentation spectrale de la fonction à deux points implique que  $\eta > 0$ .

### 13.4.3 La fonction $\eta(g)$ à deux boucles et l'exposant $\eta$

Calculons maintenant la fonction à deux points à l'ordre  $g^2$  (les éléments du calcul peuvent être trouvés en section 12.6). On détermine d'abord  $u_{0c}$  à l'ordre  $g^2$  par la condition  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(0) = 0$ . Dans l'expression (12.30) obtenue par régularisation dimensionnelle, l'addition des termes dépendant de  $\Lambda$  supprime le pôle et remplace  $p$  par  $p/\Lambda$  à une constante près. On trouve cette fois une contribution non triviale:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 + \frac{1}{24} \frac{g^2}{(8\pi^2)^2} p^2 \ln(\Lambda/p) + O(g^2 \times 1, g^2 \varepsilon).$$

L'EGR (13.11) implique alors

$$\frac{1}{24} \frac{g^2}{(8\pi^2)^2} p^2 - \eta(g) p^2 = 0,$$

et donc

$$\eta(g) = \frac{1}{24} \frac{1}{(8\pi^2)^2} g^2 + O(g^3),$$

en accord avec l'expression (10.34) pour  $N = 1$ .

Substituant la valeur de  $g^*$  on trouve la première correction à l'exposant  $\eta$ :

$$\eta = \frac{\varepsilon^2}{54} + O(\varepsilon^3). \quad (13.34)$$

Le champ  $\sigma(x)$ , qui au point fixe gaussien a la dimension canonique  $(d-2)/2$ , a acquis maintenant une dimension anormale  $d_\sigma$ :

$$d_\sigma = \frac{1}{2}(d-2+\eta).$$

*Universalité.* Tous ces résultats appellent quelques commentaires. Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ , on démontre que toutes les fonctions de corrélation ont, pour  $d < 4$ , un comportement à longue distance différent de celui prédit par le modèle quasi-gaussien. De plus le comportement critique ne dépend pas de la valeur initiale du coefficient  $g$  de  $\sigma^4$ . Au moins pour des petits  $\varepsilon$ , on peut espérer que l'analyse des singularités IR dominantes reste valable et par conséquent qu'il ne dépende d'aucun autre paramètre du hamiltonien. Le comportement critique est donc *universel*, quoique moins universel que dans le modèle quasi-gaussien ou l'approximation de champ moyen, dans la mesure où il ne dépend que d'un nombre limité de caractéristiques qualitatives du système considéré.

Par ailleurs les fonctions de corrélation obtenues en négligeant, dans la théorie des perturbations et pour le développement en  $\varepsilon$ , les corrections en loi de puissance lorsque le cut-off est grand, et qui satisfont exactement aux EGR (13.11), définissent implicitement une famille à un paramètre d'hamiltoniens critiques. Ils correspondent à une trajectoire du GR qui va d'un voisinage du point fixe gaussien  $g = 0$ , qui est instable pour des dimensions plus petites que 4, à un point fixe  $g^*$  non trivial et stable.

Enfin la cohérence de cette analyse basée sur le développement en  $\varepsilon$  repose sur l'observation suivante: les divergences trouvées dans la théorie des perturbations à dimension fixée sont engendrées par un développement autour d'un point fixe inadapté, puisqu'il est répulsif. Le développement en  $\varepsilon$  nous permet d'échanger les limites et de suivre perturbativement le point fixe stable.

### 13.5 EGR et interaction renormalisée

Nous avons indiqué que le paramètre renormalisé  $g_r$  (équation (13.5)) jouait le rôle de l'interaction effective à l'échelle  $\mu$ . Nous pouvons maintenant rendre cette remarque plus précise. Récrivons l'équation (13.5)

$$g_r = G(\Lambda/\mu, g). \quad (13.35)$$

Alors dérivant par rapport à  $\Lambda$  à  $g_r, \mu$  fixés nous trouvons

$$\left( \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) G(\Lambda/\mu, g) = 0,$$

négligeant les mêmes contributions qu'ailleurs, c'est à dire que dans le développement de  $G(\Lambda/\mu, g)$  nous ne retenons que les contributions qui divergent ou restent finies quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Introduisant un paramètre de dilatation  $\lambda$  nous trouvons

$$G(\Lambda/\mu, g) = G(\lambda\Lambda/\mu, g(\lambda)).$$

Nous choisissons  $\lambda = \mu/\Lambda$  et donc dans la limite  $\Lambda/\mu \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  tend vers zéro et  $g(\lambda)$  vers  $g^*$ . Nous concluons

$$\Lambda/\mu \rightarrow \infty \Rightarrow g_r = G(\Lambda/\mu, g) \rightarrow G(1, g^*).$$

À  $g$  fixé (ce qui est la situation générique) le paramètre renormalisé n'est pas une quantité variable, mais prend une valeur de point fixe. Puisque à  $g^*$  la théorie est invariante d'échelle, on déduit de l'EGR (13.18) de la théorie renormalisée que la valeur de  $g_r$  est aussi solution de

$$\beta_r(g_r^*) = 0 \Leftrightarrow g_r^* = G(1, g^*).$$

Plus précisément

$$g_r - g_r^* = O(\mu/\Lambda)^\omega.$$

En particulier à quatre dimensions le point fixe reste gaussien, et donc  $g_r \rightarrow 0$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ce qui conduit au problème dit de *trivialité* dans le cadre de la théorie quantique des champs.

Réciproquement on peut se demander s'il est réellement possible, au delà de la théorie des perturbations, de trouver une valeur de  $g$  pour toute valeur de  $g_r$ . Cela conduit à remplacer l'équation (13.22a) par

$$\int_{g(\mu/\Lambda)}^{g(1)} \frac{dg'}{\beta(g')} = \ln(\mu/\Lambda).$$

Cette équation implique que pour  $\Lambda/\mu \rightarrow \infty$ , le paramètre initial  $g$  maintenant fonction à  $g_r$  fixé du rapport  $\mu/\Lambda$  s'éloigne du point fixe de longue distance (ou

IR) et converge vers un point fixe dit UV, c'est à dire un zéro de  $\beta(g)$  avec une pente négative, s'il existe.

Si initialement  $g(1) < g^*$ ,  $g(\mu/\Lambda)$  converge donc vers  $g = 0$ , ce qui n'est pas surprenant puisque cela consiste à compenser l'effet des dilatations sur un paramètre essentiel au voisinage du point fixe gaussien:

$$g(\mu/\Lambda) \propto (\mu/\Lambda)^\varepsilon.$$

Notons que  $g(1) < g^*$  implique aussi  $g_r < g_r^*$ . Si par contre initialement  $g_r > g_r^*$ ,  $g(\mu/\Lambda)$  croît et l'existence de solutions dépend de la possibilité de continuer à utiliser un groupe de renormalisation à un seul paramètre, et de l'existence d'un éventuel point fixe UV supplémentaire. Comme des arguments empiriques confortés par des analyses numériques semblent exclure un tel point fixe, on est tenté de conclure que  $g_r$  est toujours plus petit ou égal à  $g_r^*$ . En particulier, à quatre dimensions cela semble exclure une solution au problème de la trivialité ( $g_r = 0$ ) basée sur une valeur exceptionnelle de  $g$ .

### 13.6 Lois d'échelles dans le domaine critique au-dessus de $T_c$

Nous voulons maintenant étudier tout le domaine critique  $t \neq 0$ . Nous modifions donc le hamiltonien critique en rajoutant un terme:

$$\mathcal{H}(\sigma) \mapsto \mathcal{H}(\sigma) + \frac{t}{2} \int d^d x \sigma^2(x),$$

où  $t$  caractérise la déviation à la température critique  $t \propto T - T_c$ .

Le théorème de renormalisation s'étend aux fonctions de corrélation de  $\sigma(x)$  et de  $\sigma^2(x)$ , et entraîne l'apparition d'un nouveau facteur de renormalisation  $Z_2(\Lambda/\mu, g_r)$  associé au paramètre  $t$ . Par les mêmes arguments que dans le cas critique on en déduit une EGR plus générale de la forme

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \eta(g) - \eta_2(g) t \frac{\partial}{\partial t} \right] \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, g, \Lambda) = 0, \quad (13.36)$$

où une nouvelle fonction  $\eta_2(g)$  apparaît. Le terme additionnel est de la forme proportionnel à  $t$  car il doit s'annuler pour  $t = 0$ . La fonction sans dimension  $\eta_2(g)$  pourrait encore dépendre du rapport  $t/\Lambda^2$ , mais nous pouvons négliger cette dépendance éventuelle comme nous avons négligé tous les autres contributions du même ordre.

Pour calculer perturbativement  $\eta_2(g)$  on peut calculer la fonction à deux points à l'ordre  $g$  et lui appliquer l'EGR. On trouve

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 + t + \frac{g}{32\pi^4} \int^\Lambda d^4 q \left( \frac{1}{q^2 + t} - \frac{1}{q^2} \right) + \dots$$

Utilisant

$$\frac{1}{32\pi^2} \int^\Lambda d^4q \left( \frac{1}{q^2 + t} - \frac{1}{q^2} \right) \sim -\frac{t}{16\pi^2} \ln(\Lambda/\sqrt{t}),$$

et appliquant l'EGR nous trouvons

$$-\frac{gt}{16\pi^2} - \eta_2(g)t = 0,$$

et donc

$$\eta_2(g) = -\frac{g}{16\pi^2}. \quad (13.37)$$

### 13.6.1 Solution des EGR

Examinons le comportement critique au-dessus de  $T_c$ . Comme on l'a fait déjà pour les EGR précédentes, on intègre l'équation (13.36) par la méthode des caractéristiques. En plus des fonctions  $g(\lambda)$  et  $Z(\lambda)$  des équations (13.22), nous avons maintenant besoin d'une fonction  $t(\lambda)$  qui est déterminée en imposant que l'équation (13.36) soit compatible avec l'équation suivante:

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[ Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t(\lambda), g(\lambda), \lambda\Lambda) \right] = 0. \quad (13.38)$$

La condition de compatibilité est équivalente à l'ensemble des équations:

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = \beta(g(\lambda)), \quad g(1) = g, \quad (13.39)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln t(\lambda) = -\eta_2(g(\lambda)), \quad t(1) = t, \quad (13.40)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = \eta(g(\lambda)), \quad Z(1) = 1. \quad (13.41)$$

L'analyse dimensionnelle montre que

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t(\lambda), g(\lambda), \lambda\Lambda) = (\lambda\Lambda)^{d-n(d-2)/2} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i/\lambda\Lambda; t(\lambda)/\lambda^2\Lambda^2, g(\lambda), 1). \quad (13.42)$$

La région critique est définie en particulier par  $|t| \ll \Lambda^2$ , et ceci est la source du comportement singulier IR qui apparaît dans la théorie des perturbations. Supposons que l'équation pour  $\lambda$ :

$$t(\lambda) = \lambda^2 \Lambda^2, \quad (13.43)$$

possède une solution. Alors la théorie à l'échelle  $\lambda$  aura une longueur de corrélation d'ordre un. Ceci correspond aussi, en reliant les valeurs du paramètre de dilatation et de  $t$ , à choisir la valeur initiale (pour  $\lambda = 1$ ) du coefficient du terme essentiel  $\sigma^2$  pour que la valeur à l'échelle  $\lambda$  soit d'ordre un. ■

En combinant les équations (13.38–13.43) on trouve:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, g, \Lambda) = Z^{-n/2}(\lambda) m^{(d-n(d-2)/2)} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i/m; 1, g(\lambda), 1), \quad (13.44)$$

où l'on a introduit la notation:

$$m = \lambda \Lambda. \quad (13.45)$$

La solution de l'équation (13.40) peut être écrite:

$$t(\lambda) = t \exp \left[ - \int_1^\lambda \frac{d\sigma}{\sigma} \eta_2(g(\sigma)) \right]. \quad (13.46)$$

En substituant cette relation dans l'équation (13.43) on obtient alors:

$$\ln(t/\Lambda^2) = \int_1^\lambda \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{1}{\nu(g(\sigma))}, \quad (13.47)$$

où pour relier la fonction  $\eta_2(g)$  aux exposants standards nous avons introduit la fonction  $\nu(g)$ :

$$1/\nu(g) = \eta_2(g) + 2. \quad (13.48)$$

On cherche une solution  $\lambda$  dans la limite  $t/\Lambda^2 \ll 1$ . Puisque  $\nu(g)$  est une fonction positive, au moins pour  $g$  assez petit, comme les équations (13.37,13.48) le montrent, l'équation (13.47) implique que la valeur du paramètre  $\lambda$  est petite, et donc que  $g(\lambda)$  est proche du point fixe IR  $g^*$ . Dans cette limite  $\nu(g(\sigma))$  peut être remplacée, à l'ordre dominant, par l'exposant critique  $\nu$

$$\nu = \nu(g^*) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{6}\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (13.49)$$

(utilisant le développement (13.37)). L'équation (13.47) peut être réécrite:

$$\ln t/\Lambda^2 \sim \frac{1}{\nu} \ln \lambda, \quad (13.50)$$

L'équation (13.41) fournit alors:

$$Z(\lambda) \sim \lambda^\eta. \quad (13.51)$$

En prenant la limite des grands  $\Lambda$ , ou bien des petits  $\lambda$ , et en utilisant les équations (13.50,13.51) ainsi que (13.44) on obtient finalement:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, g, \Lambda = 1) \underset{\substack{t \ll 1 \\ |p_i| \ll 1}}{\sim} m^{d-n(d-2+\eta)/2} F_+^{(n)}(p_i/m), \quad (13.52)$$

où:

$$m(\Lambda = 1) = \xi^{-1} \sim t^\nu. \quad (13.53)$$

En plus du comportement général d'échelle, un autre résultat à été obtenu. De l'équation (13.52) on déduit que la quantité  $m$  est proportionnelle à la masse physique ou à l'inverse de la longueur de corrélation. L'équation (13.53) montre alors que la divergence de la longueur de corrélation  $\xi = m^{-1}$  à  $T_c$  est caractérisé par l'exposant  $\nu$ .

Pour  $t \neq 0$ , les fonctions de corrélation sont finies à impulsion nulle et se comportent donc comme:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(0; t, g, \Lambda) \propto t^{\nu(d-n(d-2+\eta)/2)}. \quad (13.54)$$

En particulier pour  $n = 2$  on obtient l'inverse de la susceptibilité magnétique:

$$\chi^{-1} = \tilde{\Gamma}^{(2)}(p = 0; t, g, \Lambda) \propto t^{\nu(2-\eta)}. \quad (13.55)$$

L'exposant qui caractérise la divergence de  $\chi$  est noté habituellement  $\gamma$ . L'équation (13.54) établit la relation entre les exposants:

$$\gamma = \nu(2 - \eta). \quad (13.56)$$

Notons finalement que, puisque nous avons supposé que la théorie critique existe lorsque  $t$  tend vers zéro, les différentes puissances de  $t$  doivent se compenser dans l'équation (13.52). À partir de cette observation, on retrouve immédiatement l'équation (13.32) sous la forme:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(\lambda p_i; t, g, \Lambda = 1) \underset{t^\nu \ll \lambda |p_i| \ll 1}{\propto} \lambda^{d-n(d-2+\eta)/2}. \quad (13.57)$$

### 13.6.2 Fonctions à aimantation fixée ou au-dessous de $T_c$

Il est facile de généraliser les EGR avec pour des fonctions de corrélation à champ extérieur  $H$  fixé, ou à des fonctions de vertex à aimantation  $M = \langle \sigma(x) \rangle$  fixé. En particulier, en présence d'un champ extérieur uniforme  $H$  il existe une relation (l'équation d'état) entre champ extérieur  $H$ , aimantation  $M$ , et déviation de la température critique  $t$ . Elle satisfait l'EGR

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} \eta(g) \left( 1 + M \frac{\partial}{\partial M} \right) - \eta_2(g) t \frac{\partial}{\partial t} \right] H(M, t, g, \Lambda) = 0. \quad (13.58)$$

L'équation peut se résoudre par les mêmes méthodes. Comme il n'y a pas de fonction coefficient nouvelle, la solution peut s'exprimer entièrement en termes des fonctions (13.39,13.40,13.41). Asymptotiquement dans la limite  $M, t, H \ll 1$ ,

on peut remplacer  $g$  par  $g^*$ . Par ailleurs l'analyse dimensionnelle nous apprend que  $H$  a dimension  $\frac{1}{2}(d+2)$  et donc

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} = \frac{1}{2}(d+2) - 2t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(d-2)M \frac{\partial}{\partial M},$$

de sorte l'équation satisfaite par l'équation asymptotique peut s'écrire

$$\left[ (2 + \eta_2)t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}(d-2 + \eta)M \frac{\partial}{\partial M} \right] H(M, t) = \frac{1}{2}(d+2 - \eta)H(M, t).$$

La solution implique une forme d'échelle asymptotique universelle pour l'équation d'état :

$$H = M^\delta f(t/M^{1/\beta}),$$

où la fonction  $f(x)$  est universelle et les exposants  $\beta$  et  $\delta$  sont reliés à  $\eta$  et  $\nu$  par

$$\delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta} = \frac{d}{d_\sigma} - 1, \quad \beta = \nu d_\sigma = \frac{1}{2}\nu(d-2+\eta).$$

Le champ externe  $H$  permet, ensuite, de passer continûment de la phase désordonnée ( $T > T_c, H = 0$ ) à la phase ordonnée ( $T < T_c, H = 0$ ). Les EGR satisfaites par les fonctions de corrélation,

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2}\eta(g) \left( n + M \frac{\partial}{\partial M} \right) - \eta_2(g)t \frac{\partial}{\partial t} \right] \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, M, g, \Lambda) = 0, \quad (13.59)$$

permettent alors de démontrer les lois d'échelle en champ ou aimantation, et dans la limite  $H \rightarrow 0, T < T_c$  toutes les lois d'échelles dans la phase ordonnée.

## Chapitre 14

### La théorie $(\phi^2)^2$ avec symétrie $O(N)$ dans la limite $N \rightarrow \infty$

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment établir par des méthodes de théorie des champs les propriétés universelles des systèmes critiques dans le cadre du développement formel en  $\varepsilon = 4 - d$ . Il est rassurant de pouvoir vérifier au moins dans une limite particulière que les résultats obtenus par cette méthode restent valables même quand  $\varepsilon$  n'est plus infinitésimal. Nous montrons dans ce chapitre, que dans le cas de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  avec symétrie  $O(N)$  (nous notons le champ à  $N$  composantes  $\phi$  plutôt que  $\sigma$  à la différence des chapitres précédents), les mêmes propriétés sont aussi vraies, à dimension fixée, dans le cas d'un autre schéma d'approximation, la limite  $N \rightarrow \infty$ . Plus généralement, mais nous ne le ferons pas ici, on peut démontrer toutes les propriétés de groupe de renormalisation ordre par ordre dans un développement en  $1/N$ .

Enfin remarquons que l'étude de la limite  $N \rightarrow \infty$  peut aussi se faire directement pour un modèle de spins à  $N$  composantes avec symétrie  $O(N)$ . Le choix de l'espace continu est une simplification technique mais n'affecte pas les résultats universels.

#### 14.1 Préliminaires algébriques

Nous considérons d'abord un problème plus général avec un hamiltonien  $\mathcal{H}(\phi)$  invariant par le groupe  $O(N)$  de la forme

$$\mathcal{H}(\phi) = \int \left[ \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x)]^2 + NU(\phi^2(x)/N) \right] d^d x, \quad (14.1)$$

où  $U(\rho)$  est un polynôme en  $\rho$  avec, pour  $\rho \geq 0$ , un minimum unique à  $\rho \neq 0$  où sa dérivée seconde ne s'annule pas. Bien entendu un facteur de coupure  $\Lambda$ , compatible avec la symétrie  $O(N)$ , est sous-entendu.

Nous voulons étudier le comportement pour  $N \rightarrow \infty$  de la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi(x)] \exp[-\mathcal{H}(\phi)], \quad (14.2)$$

et des fonctions de corrélation.

La solution de ces modèles pour  $N \rightarrow \infty$  repose sur une idée du genre théorème de la limite centrale ou de champ moyen. Pour  $N \rightarrow \infty$  on s'attend à ce que les quantités invariantes par le groupe  $O(N)$  comme

$$\phi^2(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i^2(x),$$

s'auto-moyennent et donc fluctuent peu, ce qui signifie par exemple,

$$\langle \phi^2(x)\phi^2(y) \rangle_{N \rightarrow \infty} \sim \langle \phi^2(x) \rangle \langle \phi^2(y) \rangle.$$

Par conséquent, il paraît judicieux d'essayer de prendre  $\rho(x) = \phi^2(x)$  comme variable dynamique plutôt que  $\phi(x)$ . Dans ce but nous introduisons deux champs supplémentaires  $\lambda(x)$  et  $\rho(x)$  (cf. section 8.10), et imposons la contrainte  $\rho(x) = \phi^2(x)/N$  par une intégrale sur  $\lambda(x)$ . En chaque point  $x$  de l'espace, nous utilisons l'identité

$$\frac{N}{4i\pi} \int d\rho \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda e^{\lambda(\phi^2 - N\rho)/2} = N \int d\rho \delta(\phi^2 - N\rho) = 1,$$

où l'intégrale de gauche est la représentation de Fourier de la distribution  $\delta$ , car on intègre sur les  $\lambda$  imaginaires. L'insertion de cette identité dans l'intégrale (14.2) conduit à une nouvelle représentation de la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi][d\rho][d\lambda] \exp[-\mathcal{H}(\phi, \rho, \lambda)] \quad (14.3)$$

avec

$$\mathcal{H}(\phi, \rho, \lambda) = \int \left[ \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x)]^2 + NU(\rho(x)) + \frac{1}{2} \lambda(x) (\phi^2(x) - N\rho(x)) \right] d^d x. \quad (14.4)$$

L'intégrale fonctionnelle (14.3) est alors gaussienne en  $\phi$ . Les intégrales sur les différentes composantes se factorisent et chaque intégrale donne le même résultat:

$$\int [d\phi] \exp \left\{ - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} \lambda(x) \phi^2(x) \right] \right\} \propto (\det [-\nabla^2 + \lambda(\bullet)])^{-N/2},$$

ce qui rend la dépendance de la fonction de partition en  $N$  explicite.

En fait il est commode de séparer les composantes de  $\phi$  en une composante  $\sigma$ , et  $N - 1$  composantes  $\pi$ , et de n'intégrer que sur  $\pi$  (pour  $T < T_c$  on peut même avoir intérêt à n'intégrer que sur  $N - 2$  composantes). Cette modification n'affecte pas la limite  $N \rightarrow \infty$  mais permet de calculer directement les fonctions

de corrélation de la composante  $\sigma$  du champ  $\phi$ . Dans ce but nous ajoutons un terme de champ extérieur  $H\sigma$  à l'hamiltonien:

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\sigma][d\rho][d\lambda] \exp \left[ -\mathcal{H}_N(\sigma, \rho, \lambda) + \int d^d x H(x)\sigma(x) \right] \quad (14.5)$$

avec ( $\text{tr} \ln = \ln \det$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(\sigma, \rho, \lambda) = \int & \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + NU(\rho) + \frac{1}{2} \lambda(x) (\sigma^2(x) - N\rho(x)) \right] d^d x \\ & + \frac{1}{2} (N-1) \text{tr} \ln [-\nabla^2 + \lambda(\bullet)]. \end{aligned} \quad (14.6)$$

*Fonctions de corrélation du champ  $\phi^2(x)$ .* Dans ce formalisme il est facile d'engendrer les fonctions de corrélation impliquant le champ  $\rho$ , qui, par construction, sont proportionnelles aux fonctions de corrélation de  $\phi^2$ .

## 14.2 Intégrale sur le champ $\phi$ : le déterminant

Dans la section 14.1 nous avons procédé de façon formelle sans trop nous interroger sur l'existence des différentes expressions qui apparaissent dans le calcul. En particulier, l'intégrale sur chaque composante de  $\phi$  a engendré le déterminant d'un opérateur différentiel, qui n'est pas un objet simple puisque  $\lambda(x)$  est un champ fluctuant. En fait nous n'aurons besoin que d'une définition perturbative que nous allons maintenant préciser, valable quand  $\lambda(x)$  fluctue peu autour d'une valeur moyenne constante positive  $m^2$ .

Posant

$$\lambda(x) = m^2 + \mu(x),$$

on peut définir le déterminant par

$$\begin{aligned} \ln \det [-\nabla^2 + \lambda(\bullet)] &= \text{tr} \ln [-\nabla^2 + \lambda(\bullet)] \\ &= \text{tr} \ln [-\nabla^2 + m^2] + \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{tr}(\Delta\mu)^n \end{aligned}$$

où

$$\text{tr}(\Delta\mu)^n \equiv \int \prod_{i=1}^n dx_i \mu(x_i) \Delta(x_i - x_{i-1}), \quad x_n = x_0,$$

et  $\Delta$  est le propagateur inverse de l'opérateur  $-\nabla^2 + m^2$ . On reconnaît une somme de diagrammes à une boucle du type discuté en section 12.5.

Le terme correspondant à  $\mu = 0$  diverge pour deux raisons: parce que nous n'avons pas normalisé l'intégrale sur le champ  $\phi$ , parce qu'il faut ajouter des

termes dérivatifs inessentiels à l'hamiltonien. Ceci conduit à remplacer le propagateur  $\Delta$  par un propagateur  $\Delta_\Lambda$  régularisé. En représentation de Fourier:

$$\tilde{\Delta}_\Lambda(p) = \frac{1}{m^2 + p^2 D(p^2/\Lambda^2)} \quad (14.7)$$

La fonction  $D(t)$  satisfait aux conditions habituelles. Elle est normalisée:  $D(0) = 1$ , strictement positive et analytique pour  $t \geq 0$ . Enfin elle croît plus vite que  $t^{(d-2)/2}$  pour  $t \rightarrow +\infty$  pour que le développement perturbatif soit défini.

La normalisation de la fonction de partition a comme effet de multiplier le déterminant par une constante qui doit être choisie pour que le produit soit fini. Cela correspond à soustraire à son logarithme une constante pour le rendre fini. Il est commode de choisir la normalisation indépendante de  $m^2$ . Dans ces conditions on peut d'abord définir la dérivée logarithmique par rapport à  $m^2$ :

$$\frac{d}{dm^2} \text{tr} \ln(-\nabla^2 + m^2)_\Lambda = \frac{d}{dm^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(k^2 + m^2)_\Lambda = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_\Lambda(k).$$

Il est commode de poser

$$\Omega_d(m) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_\Lambda(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{m^2 + k^2 D(k^2/\Lambda^2)}. \quad (14.8)$$

Intégrant  $\Omega_d(m)$  sur  $m^2$  nous obtenons une expression finie pour la contribution du déterminant:

$$\text{tr} \ln [-\nabla^2 + m^2]_\Lambda - \text{tr} \ln(-\nabla^2)_\Lambda = \int_0^m 2s ds \Omega_d(s). \quad (14.9)$$

Pour la suite nous avons besoin de quelques propriétés de la fonction  $\Omega_d(m)$ , en particulier des premiers termes du développement de  $\Omega_d(m)$  pour  $m^2 \rightarrow 0$ . Par un simple changement de variables nous voyons qu'elle est de la forme:

$$\Omega_d(m) = \Lambda^{d-2} \omega_d(m/\Lambda). \quad (14.10)$$

La fonction  $\omega_d(z)$  admet pour  $z \rightarrow 0$  et  $d > 2$  un développement que nous paramétrons comme (pour plus de détails voir l'appendice A1.7.1)

$$\omega_d(z) = \omega_d(0) - K(d)z^{d-2} + a(d)z^2 + O(z^4, z^d). \quad (14.11)$$

La constante  $K(d)$  est universelle, c'est à dire indépendante de la fonction de coupure

$$N_d = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \quad (14.12a)$$

$$K(d) = -\frac{\pi}{2 \sin(\pi d/2)} N_d = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2), \quad (14.12b)$$

où nous avons introduit de nouveau le facteur de boucle  $N_d$ . La constante  $a(d)$  qui, pour  $d < 4$ , caractérise la correction dominante dans l'équation (14.11), dépend explicitement de la régularisation, c'est à dire de la forme explicite du propagateur,

$$a(d) = N_d \int_0^\infty k^{d-5} dk \left( 1 - \frac{1}{D^2(k^2)} \right), \quad (14.13)$$

(forme valable pour  $2 < d < 4$ ) mais pour  $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$  diverge comme:

$$a(d) \underset{\varepsilon=4-d \rightarrow 0}{\sim} N_4 \int_1^\infty k^{d-5} dk \sim 1/(8\pi^2\varepsilon). \quad (14.14)$$

Pour  $d = 4$ , le comportement de  $\omega_d(z)$  fait intervenir un logarithme:

$$\omega_d(z) - \omega_d(0) \sim \frac{1}{8\pi^2} z^2 \ln z. \quad (14.15)$$

Le terme  $\text{tr} \ln$  peut être évalué pour  $\Lambda \rightarrow \infty$  en utilisant l'expression régularisée (14.9), et exprimé en termes des quantités définies en (14.11). On trouve

$$\begin{aligned} \text{tr} \ln [-\nabla^2 + m^2]_\Lambda - \text{tr} \ln (-\nabla^2)_\Lambda &= -2 \frac{K(d)}{d} m^d + \Omega_d(0) m^2 + \frac{a(d)}{2} m^4 \Lambda^{4-d} \\ &+ O(m^6 \Lambda^{d-6}, m^{d+2} \Lambda^{-2}). \end{aligned} \quad (14.16)$$

### 14.3 Limite $N \rightarrow \infty$ : domaine critique

Nous étudions maintenant la limite  $N \rightarrow \infty$ , la fonction  $U(\rho)$  étant supposée indépendante de  $N$ . Avec l'ansatz  $\sigma = O(N^{1/2})$ ,  $\rho = O(1)$ ,  $\lambda = O(1)$  tous les termes dans  $\mathcal{H}_N$  sont d'ordre  $N$  et l'intégrale peut dans cette limite s'évaluer par la méthode du col. Nous cherchons un col qui correspond à des champs classiques  $\sigma(x), \rho(x), \lambda(x)$  constants:

$$\sigma(x) = \sigma, \quad \rho(x) = \rho, \quad \lambda(x) = m^2,$$

où nous avons explicité la positivité de  $\lambda$  au col (cf. (14.7)).

La densité d'hamiltonien  $\mathcal{E}$  en champ  $H$  nul s'écrit alors

$$\mathcal{E} = NU(\rho) + \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 - N\rho) + \frac{1}{2} N \frac{1}{(2\pi)^d} \int^\Lambda d^d k \ln[(k^2 + m^2)/k^2], \quad (14.17)$$

où l'intégrale doit être interprétée dans le sens régularisé (14.9). Dérivant  $\mathcal{E}$  par rapport à  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $m^2$  nous trouvons les équations de col (utilisant la définition (14.8))

$$m^2 \sigma = 0, \quad (14.18a)$$

$$\frac{1}{2} m^2 = U'(\rho), \quad (14.18b)$$

$$\sigma^2/N - \rho + \Omega_d(m) = 0. \quad (14.18c)$$

*Discussion.* Le terme  $\text{tr} \ln$  dans l'expression (14.6) provient de l'intégration sur les  $N - 1$  composantes  $\pi$ . La valeur moyenne  $m^2$  du champ  $\lambda$  provient du terme de masse du champ  $\pi$  et donc, à l'ordre dominant,  $m$  est la masse des  $N - 1$  composantes  $\pi$ . L'équation (14.18a) implique soit  $\sigma = 0$  soit  $m = 0$ . Cette alternative est une manifestation du phénomène de Goldstone: si  $\sigma = 0$  la symétrie  $O(N)$  n'est pas brisée et les  $N$  composantes du champ ont la même masse  $m$ ; si, au contraire,  $\sigma \neq 0$  la symétrie  $O(N)$  est brisée spontanément,  $m = 0$  et le champ  $\pi$  a une masse nulle, en correspondance avec les  $N - 1$  modes de Goldstone attendus.

Nous considérons maintenant les équations de col dans les deux phases.

(i) *Phase ordonnée.* Notons que l'équation (14.18c) n'est compatible avec une solution  $m = 0$  que pour  $d > 2$ , puisque pour  $m = 0$  l'intégrale diverge pour  $d \leq 2$ . Cette propriété est directement liée au théorème de Mermin–Wagner–Coleman: dans un modèle statistique n'impliquant que des forces à courte portée, une symétrie continue ne peut pas être brisée pour  $d \leq 2$ , dans la mesure où la moyenne  $\sigma$  du paramètre d'ordre s'annule nécessairement. Dans le présent contexte les modes de Goldstone sont à l'origine de cette propriété: étant de masse nulle, comme on le sait par des arguments généraux et comme le calcul à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$  l'a confirmé, ils induisent des divergences à impulsion nulle pour  $d \leq 2$ .

Les équations de col (14.18) se réduisent alors à  $U'(\rho) = 0$  et ( $d > 2$ )

$$\sigma^2/N - \rho + \Omega_d(0) = 0.$$

La première équation exprime que  $\rho$  est donné par le minimum de  $U$ , que nous avons supposé unique, et la deuxième équation détermine alors la valeur moyenne du champ. Une solution n'existe que si la position  $\rho$  du minimum satisfait

$$\rho > \rho_c = \Omega_d(0), \quad (14.19)$$

et alors

$$\sigma = \sqrt{N(\rho - \rho_c)}. \quad (14.20)$$

(ii) *La phase symétrique.* Alors  $\sigma = 0$  et les équations de col (14.18) peuvent s'écrire

$$m^2 = 2U'(\rho), \quad \rho - \rho_c = \Omega_d(m) - \Omega_d(0). \quad (14.21)$$

La deuxième équation implique  $\rho \leq \rho_c$ . La valeur  $\rho = \rho_c$  correspond donc à une transition entre une phase ordonnée  $\rho > \rho_c$  et une phase symétrique  $\rho \leq \rho_c$ . La condition

$$U'(\rho_c) = 0, \quad (14.22)$$

détermine les interactions  $U(\rho)$  critiques.

Le paramètre  $m$  est maintenant la masse du champ  $\phi$  et  $\xi = 1/m$  la longueur de corrélation. La condition  $m \ll \Lambda$ , ce qui est équivalent à  $\xi \gg 1/\Lambda$ , définit le

domaine critique. Elle implique que  $\rho$  est proche de  $\rho_c$  par la deuxième équation (14.21). La première équation entraîne que  $U'(\rho)$  est petit et donc  $\rho$  est proche de la position du minimum de  $U(\rho)$ . Nous développons alors  $U(\rho)$  à  $\rho_c$ :

$$U(\rho) = U'(\rho_c)(\rho - \rho_c) + \frac{1}{2}U_c''(\rho - \rho_c)^2 + O((\rho - \rho_c)^3), \quad (14.23)$$

et posons

$$U'(\rho_c) = \frac{1}{2}\tau, \quad |\tau| \ll 1. \quad (14.24)$$

Avec cette paramétrisation

$$m^2 = 2U_c''(\rho - \rho_c) + \tau + O((\rho - \rho_c)^2).$$

Nous avons supposé que  $U''(\rho)$  ne s'annule pas au minimum, et donc  $U''$  ne s'annule pas dans un voisinage. Comme  $\rho$  est proche de  $\rho_c$ ,  $U_c''$  est strictement positif. Alors  $\tau$  est positif dans la phase symétrique et négatif dans la phase brisée.

Sans cette hypothèse le point critique pourrait être un point multicritique, une situation que nous n'examinons pas dans ce contexte.

Pour étudier les comportements au voisinage du point critique seul le développement jusqu'au second ordre est utile. Nous pouvons donc réduire  $U(\rho)$  à un polynôme quadratique, comme dans le modèle quasi-gaussien, et le problème se réduit à la discussion de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  qui dans le cadre du développement en  $\varepsilon = 4 - d$  aussi décrit les comportements critiques universels.

#### 14.4 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ pour $N \rightarrow \infty$

À partir de maintenant la discussion est spécifique à la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ . En termes du champ initial à  $N$  composantes  $\phi$  nous écrivons l'hamiltonien

$$\mathcal{H}(\phi) = \int \left\{ \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} r \phi^2(x) + \frac{1}{4!} \frac{u}{N} [\phi^2(x)]^2 \right\} d^d x, \quad (14.25)$$

où les termes inessentiels ont été omis.

À l'hamiltonien (14.25) correspond la fonction

$$U(\rho) = \frac{1}{2} r \rho + \frac{u}{4!} \rho^2. \quad (14.26)$$

La limite  $N \rightarrow \infty$  est prise à  $U(\rho)$  fixé et ceci implique avec nos conventions que  $u$ , le coefficient de  $\phi^4/N$ , est fixé.

Le potentiel  $U$  étant quadratique (équation (14.26)), l'intégrale sur  $\rho(x)$  dans (14.5) est gaussienne et peut donc dans ce cas être effectuée explicitement. L'effet de l'intégration est de relier  $\rho(x)$  à  $\lambda(x)$  par l'équation de champ:

$$\frac{\delta \mathcal{H}_N(\sigma, \rho, \lambda)}{\delta \rho(x)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} u \rho(x) + r = \lambda(x). \quad (14.27)$$

Notons, toutefois, que le champ  $\rho$  a une interprétation physique plus directe que le champ  $\lambda(x)$ .

*Interprétation diagrammatique.* Dans la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  les termes dominants du développement perturbatif quand  $N \rightarrow \infty$  viennent des chaînes de diagrammes en “bulle” de la forme représentée dans la figure 20. Ces diagrammes asymptotiquement forment une série géométrique que les techniques algébriques précédentes permettent de sommer.



FIG. 20 – Les diagrammes dominants pour  $N \rightarrow \infty$ .

*La phase de basse température.* Dans la phase ordonnée  $\rho > \rho_c$ , la valeur moyenne non nulle  $\sigma$  du champ est donnée par l'équation (14.20):

$$\sigma = \sqrt{N(\rho - \rho_c)},$$

(nous rappelons  $\rho_c = \Omega_d(0)$ , équation (14.19)) et la symétrie  $O(N)$  est brisée spontanément. La constante  $\rho$  est alors donnée par l'équation (14.18b) qui se réduit à  $U'(\rho) = 0$ . La condition (14.22) détermine le potentiel critique  $U$

$$U'(\rho_c) = 0 \Rightarrow r = r_c = -u\rho_c/6. \quad (14.28)$$

La valeur moyenne du champs s'annule pour  $r = r_c$ , qui donc correspond à la température critique  $T_c$ . Introduisant le paramètre  $\tau$  qui caractérise la déviation à la température critique (défini par l'équation (14.24))

$$\tau = 2U'(\rho_c) = r - r_c,$$

nous obtenons

$$U'(\rho) = 0 \Rightarrow \rho - \rho_c = -(6/u)\tau. \quad (14.29)$$

La symétrie  $O(N)$  est brisée pour  $\tau < 0$ , c'est à dire à basse température, et nous pouvons récrire l'équation (14.20):

$$\sigma^2 = -(6/u)\tau \propto (-\tau)^{2\beta} \quad \text{avec } \beta = \frac{1}{2}. \quad (14.30)$$

Nous en concluons que dans la limite  $N \rightarrow \infty$  l'exposant  $\beta$  reste quasi-gaussien en toutes dimensions.

*La phase de haute température .* Pour  $\tau > 0$ , au-dessus de  $T_c$ ,  $\sigma$  s'annule. De l'expression (14.6) on déduit le propagateur du champ  $\sigma$ . Asymptotiquement il prend la forme (négligeant les corrections venant des termes inessentiels)

$$\tilde{\Delta}_\sigma \underset{|p|, m \ll \Lambda}{\sim} \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (14.31)$$

Par conséquent  $m$  est la masse physique du champ  $\sigma$  (et donc de toutes les composantes du champ  $\phi$ ), ou l'inverse de la longueur de corrélation  $\xi$ :

$$\xi = 1/m. \quad (14.32)$$

L'équation (14.18c) implique que  $\partial\rho/\partial m$  est négative et que  $r$  est une fonction croissante de  $m$ . Le minimum de  $r$ , obtenu pour  $m = 0$ , est  $r_c$ . Utilisant les définitions (14.24,14.28) dans les équations (14.21), nous trouvons alors:

$$m^2 = (u/6)(\rho - \rho_c) + \tau, \quad (14.33a)$$

$$\rho - \rho_c = \Omega_d(m) - \Omega_d(0) \quad (14.33b)$$

(i) Pour  $d > 4$  le développement (14.11) implique que la contribution principale à  $\rho - \rho_c$  est proportionnelle à  $m^2$ , comme le membre de gauche de l'équation (14.33a), et donc

$$m^2 = \xi^{-2} \sim \tau \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad (14.34)$$

ce qui est le résultat gaussien ou de champ moyen.

(ii) Pour  $2 < d < 4$  par contre, le terme principal est d'ordre  $m^{d-2}$

$$\rho - \rho_c \sim -K(d)m^{d-2}.$$

La contribution dominante pour  $m \rightarrow 0$ , dans l'équation (14.33a) provient maintenant de  $\rho - \rho_c$ . Ne gardant que le terme dominant dans (14.11) nous obtenons ( $\varepsilon = 4 - d$ ):

$$m = \xi^{-1} \sim \tau^{1/(2-\varepsilon)}, \quad (14.35)$$

ce qui montre que l'exposant  $\nu$  n'est plus gaussien:

$$\nu = \frac{1}{2-\varepsilon} = \frac{1}{d-2}. \quad (14.36)$$

(iii) Pour  $d = 4$  la contribution principale dans l'équation (14.33a) provient encore de  $\rho - \rho_c$

$$m^2 \sim \frac{48\pi^2}{u} \frac{\tau}{\ln(\Lambda/m)} \sim \frac{96\pi^2}{u} \frac{\tau}{\ln(\Lambda^2/\tau)}. \quad (14.37)$$

La longueur de corrélation n'a plus un comportement en loi de puissance mais plutôt un comportement de type gaussien modifié par un logarithme. C'est un comportement typique dans une situation où le point fixe gaussien est stable en présence d'un opérateur marginal.

(iv) Si l'on examine l'équation (14.18b) pour  $\sigma = 0$  et  $d = 2$  on trouve que la longueur de corrélation ne peut devenir grande que pour  $r \rightarrow -\infty$ . Cette

situation particulière sera étudiée dans le cadre du modèle  $\sigma$  non linéaire en section 14.9.

Enfin, dans la limite critique  $\tau = 0$ ,  $m$  s'annule et donc de la forme (14.31) du propagateur du champ  $\sigma$  on déduit que l'exposant critique  $\eta$  reste gaussien pour tout  $d$

$$\eta = 0 \Rightarrow d_\phi = \frac{1}{2}(d - 2). \quad (14.38)$$

On vérifie donc que pour  $d \leq 4$  les exposants  $\beta, \nu, \eta$  satisfont la relation d'échelle démontrée dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ :

$$\beta = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta) = \nu d_\phi.$$

## 14.5 Partie singulière de l'énergie libre et forme d'échelle de l'équation d'état

En présence d'un champ magnétique constant  $H$  dans la direction  $\sigma$ , la densité d'énergie libre  $W(H)$  (à cet ordre l'opposée de la densité d'hamiltonien  $\mathcal{E}$  dans laquelle les équations de col ont utilisées) est donnée par

$$\begin{aligned} W(H) &= \ln \mathcal{Z} / \text{volume} = -\mathcal{E} \\ &= N \left[ \frac{3}{2u} m^4 - \frac{3r}{u} m^2 - \frac{1}{2} m^2 \sigma^2 / N + H\sigma / N - \frac{1}{2} \text{tr} \ln(-\nabla^2 + m^2)_\Lambda \right], \end{aligned}$$

où  $\rho$  a été éliminé grâce à l'équation (14.18c). Les valeurs au col  $m^2, \sigma$  sont données par l'équation (14.18b) et l'équation de col (14.18a) modifiée:

$$m^2 \sigma = H. \quad (14.39)$$

L'aimantation  $M$ , valeur moyenne de  $\phi$ , est:

$$M = \frac{\partial W}{\partial H} = \sigma,$$

puisque les dérivées partielles de  $W$  par rapport à  $m^2, \sigma$  s'annulent comme conséquence des équations de col. La densité de potentiel thermodynamique  $\mathcal{G}(M)$ , transformée de Legendre de  $W(H)$ , est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(M) &= HM - W(H) \\ &= N \left[ -\frac{3}{2u} m^4 + \frac{3r}{u} m^2 + \frac{1}{2} m^2 M^2 / N + \frac{1}{2} \text{tr} \ln(-\nabla^2 + m^2)_\Lambda \right]. \end{aligned}$$

Comme conséquence des propriétés de la transformation de Legendre, l'équation de col correspondant à  $m^2$  est maintenant obtenue en exprimant que la dérivée de  $\mathcal{G}$  par rapport à  $m^2$  s'annule.

Le développement pour  $m \rightarrow 0$  du terme en  $\text{tr ln}$  est donné par l'équation (14.16). Le potentiel thermodynamique prend alors la forme

$$\mathcal{G}(M)/N = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{u^*} - \frac{1}{u} \right) m^4 + \frac{3(r-r_c)}{u} m^2 + \frac{1}{2} m^2 M^2/N - \frac{K(d)}{d} m^d, \quad (14.40)$$

où nous avons défini

$$u^* = \frac{6}{a(d)} \Lambda^\varepsilon. \quad (14.41)$$

Notons que pour  $d < 4$  le terme proportionnel à  $m^4$  est négligeable pour  $m \rightarrow 0$  par rapport au terme singulier  $m^d$ . Donc, à l'ordre dominant dans le domaine critique

$$\mathcal{G}(M)/N = \frac{3}{u} \tau m^2 + \frac{1}{2} m^2 M^2/N - \frac{K(d)}{d} m^d, \quad (14.42)$$

où  $\tau$  a été défini en (14.24).

Exprimant que la dérivée par rapport à  $m^2$  s'annule:

$$(6/u)\tau + M^2/N - K(d)m^{d-2} = 0,$$

nous obtenons

$$m = \left[ \frac{1}{K(d)} \left( (6/u)\tau + M^2/N \right) \right]^{1/(d-2)}.$$

Nous en déduisons la contribution dominante au potentiel thermodynamique dans le domain critique:

$$\frac{1}{N} \mathcal{G}(M) \sim \frac{d-2}{2d(K(d))^{2/(d-2)}} \left[ (6/u)\tau + M^2/N \right]^{d/(d-2)}. \quad (14.43)$$

Différentes quantités peuvent être calculées à partir de  $\mathcal{G}(M)$ . Par exemple, en dérivant par rapport à  $M$  on trouve l'équation d'état dans la limite d'échelle:

$$H = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M} = h_0 M^\delta f(a_0 \tau / M^2), \quad (14.44)$$

où  $h_0$  and  $a_0$  sont deux constantes de normalisation. L'exposant  $\delta$  est donné par:

$$\delta = \frac{d+2}{d-2}, \quad (14.45)$$

en accord avec la relation générale entre exposants  $\delta = d/d_\phi - 1$ , et la fonction  $f(x)$  par:

$$f(x) = (1+x)^{2/(d-2)}. \quad (14.46)$$

La forme asymptotique de  $f(x)$  pour  $x \rightarrow +\infty$  implique  $\gamma = 2/(d-2)$ , ce qui est à nouveau en accord avec la relations d'échelle  $\gamma = \nu(2-\eta)$ . Prenant en compte les valeurs des exposants critiques  $\gamma$  et  $\beta$ , il est alors facile de vérifier que la fonction  $f$  satisfait toutes les propriétés requises comme par exemple l'analyticité de Griffith. En particulier l'équation d'état peut être mise sous une forme paramétrique  $\{M, \tau\} \mapsto \{R, \theta\}$ :

$$\begin{aligned} M &= (a_0)^{1/2} R^{1/2} \theta, \\ \tau &= 3R(1 - \theta^2), \\ H &= h_0 R^{\delta/2} \theta (3 - 2\theta^2)^{2/(d-2)}. \end{aligned}$$

*Corrections dominantes aux lois d'échelles.* Le terme proportionnel à  $m^4$  est la correction dominante à la forme d'échelle asymptotique. Le comparant au terme principal on trouve

$$m^4/m^d = O(\tau^{(4-d)/(d-2)}).$$

L'exposant qui caractérise les corrections dominantes à la forme asymptotique dans la variable température, est  $\omega\nu$  ( $\omega$  est défini par l'équation (13.25)) et donc

$$\omega\nu = (4-d)/(d-2) \Rightarrow \omega = 4-d. \quad (14.47)$$

Remarquons que pour la valeur particulière  $u = u^*$  cette correction s'annule.

*Exposant de chaleur spécifique. Rapports d'amplitudes.* Dérivant  $\mathcal{G}(M)$  deux fois par rapport à  $\tau$ , on obtient la chaleur spécifique à aimantation  $M$  fixée (  une constante additive près)

$$\mathcal{C} \propto [(6/u)\tau + M^2/N]^{(4-d)/(d-2)}. \quad (14.48)$$

Pour  $M = 0$  la partie singulière de la chaleur spécifique s'annule donc comme  $\tau^{(4-d)/(d-2)}$

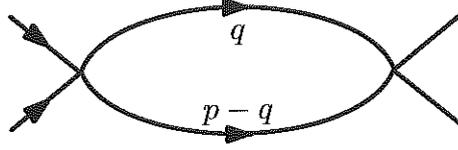
$$\mathcal{C} \sim A^\pm |\tau|^{-\alpha}, \quad (14.49)$$

avec comme exposant de chaleur spécifique

$$\alpha = \frac{4-d}{d-2}, \quad (14.50)$$

qui est bien égal à  $2-d\nu$ , en accord avec les prédictions du groupe de renormalisation.

Notons que dans le cas de la chaleur spécifique pour  $N \rightarrow \infty$  le terme dominant quand  $\tau \rightarrow 0$  n'est pas la partie singulière universelle qui s'annule mais la partie régulière en  $\tau$  qui a une limite finie, et dont la valeur n'est pas universelle (par exemple elle dépend de  $u$ ).

FIG. 21 – Le diagramme “bulle”  $B_\Lambda(p, m)$ .

Parmi les rapports d’amplitudes critiques on peut calculer, par exemple,  $R_\xi^+ = f_1^+(\alpha A^+)^{1/d}$  et  $R_c = \alpha A^+ C^+ / M_0^2$  (cf. équation (7.28) et section 8.6)

$$(R_\xi^+)^d = \frac{4N}{(d-2)^3} \frac{\Gamma(3-d/2)}{(4\pi)^{d/2}}, \quad R_c = \frac{4-d}{(d-2)^2}. \quad (14.51)$$

## 14.6 Les fonctions à deux points $\langle \lambda \lambda \rangle$ and $\langle \phi^2 \phi^2 \rangle$

Dans la phase de haute température, dérivant deux fois l’hamiltonien (14.6) par rapport à  $\lambda(x), \rho(x)$ , et remplaçant le champ  $\lambda(x)$  par sa valeur moyenne  $m^2$ , nous obtenons la fonction à deux points  $\langle \lambda \lambda \rangle$ , qui est aussi le propagateur du champ  $\lambda$  dans le développement en  $1/N$ :

$$\langle \lambda(x) \lambda(y) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{ikx} \Delta_\lambda(k), \quad \Delta_\lambda(p) = -\frac{2}{N} \left[ \frac{6}{u} + B_\Lambda(p, m) \right]^{-1}, \quad (14.52)$$

où  $B_\Lambda(p, m)$  est le diagramme bulle de la figure 21:

$$B_\Lambda(p, m) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int^\Lambda \frac{d^d q}{(q^2 + m^2) [(p-q)^2 + m^2]}, \quad (14.53)$$

et la borne  $\Lambda$  signifiant que le propagateur a la forme régularisée (14.7).

Le propagateur  $\Delta_\lambda(p)$  est négatif parce que le champ  $\lambda$  est imaginaire. Utilisant la relation (14.27) nous obtenons la fonction à deux points  $\langle \rho \rho \rangle$  (en représentation de Fourier la translation par une constante ne produit qu’une distribution  $\delta$  à  $p=0$ ) et donc suivant la remarque en section 14.4, la fonction à deux points de  $\phi^2(x)$  en représentation de Fourier

$$\int d^d x e^{ipx} \langle \phi^2(x) \phi^2(0) \rangle = N^2 \int d^d x e^{ipx} \langle \rho(x) \rho(0) \rangle = -\frac{12N/u}{1 + (u/6)B_\Lambda(p, m)}. \quad (14.54)$$

À impulsion nulle nous retrouvons la chaleur spécifique. Le développement pour  $m \rightarrow 0$  de  $B_\Lambda(0, m)$  peut être déduit du développement (14.11). On trouve

$$\begin{aligned} B_\Lambda(0, m) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int^\Lambda \frac{d^d q}{(q^2 + m^2)^2} \\ &= -\frac{\partial}{\partial m^2} \Omega_d(m) \Big|_{m \ll \Lambda} = (d/2 - 1)K(d)m^{-\varepsilon} - a(d)\Lambda^{-\varepsilon} + \dots \end{aligned} \quad (14.55)$$

La partie singulière de la chaleur spécifique s'annule donc comme  $m^\varepsilon$ , en accord avec l'équation (14.48) pour  $M = 0$ .

Dans la théorie critique ( $m = 0$  à cet ordre) pour  $2 \leq d \leq 4$ , le dénominateur est aussi dominé quand l'impulsion  $p$  tend vers zéro par l'intégrale:

$$B_\Lambda(p, 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int^\Lambda \frac{d^d q}{q^2(p-q)^2} \underset{2 < d < 4}{=} b(d)p^{-\varepsilon} - a(d)\Lambda^{-\varepsilon} + O(\Lambda^{d-6}p^2, \Lambda^{-2}p^{d-2}) \quad (14.56)$$

où

$$b(d) = -\frac{\pi}{\sin(\pi d/2)} \frac{\Gamma^2(d/2)}{\Gamma(d-1)} N_d, \quad (14.57)$$

et donc:

$$\Delta_\lambda(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2}{Nb(d)} p^\varepsilon. \quad (14.58)$$

On vérifie à nouveau la cohérence avec les relations d'échelle. De plus, nous notons que la dimension  $[\lambda]$  du champ  $\lambda$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$  est

$$[\lambda] = [\rho] = [\phi^2] = d - 1/\nu = \frac{1}{2}(d + \varepsilon) = 2, \quad (14.59)$$

un résultat important pour la théorie des perturbations en  $1/N$ .

*Remarques.*

(i) Pour  $d = 4$  l'intégrale a un comportement logarithmique:

$$B_\Lambda(p, 0) \underset{p \ll \Lambda}{\sim} \frac{1}{8\pi^2} \ln(\Lambda/p) + \text{const.}, \quad (14.60)$$

et domine encore le comportement du propagateur  $\Delta_\lambda(p) \propto 1/\ln(\Lambda/p)$ .

(ii) Notons que, par conséquent, pour  $d \leq 4$  les contributions engendrées par le terme proportionnel à  $\lambda^2(x)$  dans (14.6) ont toujours été négligeables dans le domaine critique.

*La fonction  $\langle \sigma \sigma \rangle$  à basse température.* Dans la phase de symétrie brisée l'hamiltonien, après translation des valeurs moyennes, inclut un terme proportionnel à  $\sigma \lambda$  et donc les propagateurs des champs  $\sigma$  et  $\lambda$  sont les éléments d'une matrice  $\mathbf{M} 2 \times 2$ :

$$\mathbf{M}^{-1}(p) = \begin{pmatrix} p^2 & \\ \sigma & -3N/u - \frac{\sigma}{2} N B_\Lambda(p, 0) \end{pmatrix}, \quad (14.61)$$

où  $\sigma = \langle \sigma(x) \rangle$  et  $B_\Lambda$  est donnée par l'équation (14.56). Pour  $d < 4$  asymptotiquement le déterminant est donné par

$$1/\det \mathbf{M}(p) \sim -N [b(d)p^{d-2} + 6\tau/u].$$

Cette expression définit une échelle de masse  $m_{\text{cr}}$

$$m_{\text{cr}} = (-\tau/u)^{1/(d-2)} \propto \Lambda((r_c - r)/\Lambda^2)^{1/(d-2)} = \Lambda((r_c - r)/\Lambda^2)^\nu, \quad (14.62)$$

à laquelle est associée un changement de régime (crossover en anglais) entre un comportement dominé par les modes de Goldstone et un comportement critique.

À  $d = 4$   $B_\Lambda(p, 0)$  est donné par l'expression (14.60) et

$$m_{\text{cr}}^2 \propto \frac{r_c - r}{\ln[\Lambda^2/(r_c - r)]}. \quad (14.63)$$

Enfin pour  $d > 4$ ,  $B_\Lambda(p, 0)$  a une limite finie à  $p = 0$  et donc

$$m_{\text{cr}} \propto \sqrt{r_c - r}. \quad (14.64)$$

En toute dimension  $m_{\text{cr}}$  a le même comportement d'échelle pour  $r \rightarrow r_c$  que la masse physique (en fonction de  $|r - r_c|$ ).

## 14.7 Fonctions de GR et corrections dominantes aux lois d'échelles

*Les fonctions du GR.* Pour aller plus loin dans la vérification de la cohérence avec le schéma du GR, calculons à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$  les fonctions du GR. Nous posons (équation (14.41)):

$$u = Ng\Lambda^\varepsilon, \quad g^* = u^* \Lambda^{-\varepsilon}/N = 6/(Na), \quad (14.65)$$

où la constante  $a(d)$  a été définie en (14.11) et diverge pour  $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$  comme  $1/(8\pi^2\varepsilon)$  (équation (14.14)). Il est facile de vérifier qu'à l'ordre dominant pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $m$  solution de l'équation (14.33) satisfait une équation qui exprime que c'est un invariant du GR:

$$\left( \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \eta_2(g) \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) m(\tau, g, \Lambda) = 0, \quad (14.66)$$

où, dans le membre de droite, les contributions d'ordre  $1/\Lambda^2$  ont été négligées. Les fonctions du GR  $\beta(g)$  et  $\eta_2(g)$  sont alors

$$\beta(g) = -\varepsilon g(1 - g/g^*), \quad (14.67)$$

$$\nu^{-1}(g) = 2 + \eta_2(g) = 2 - \varepsilon g/g^*. \quad (14.68)$$

Pour les régularisations les plus simples  $a(d)$  est positif en toutes dimensions. Notons toutefois que ceci n'est pas toujours vrai, et dans ce cas, que nous ne discuterons pas ici, la méthode du GR est confrontée à une sérieuse difficulté. Quand  $a(d)$  est positif, on trouve un point fixe IR,  $g^*$ , ainsi que les exposants

$\omega = \varepsilon$  et  $\nu^{-1} = d - 2$ , ce dernier résultat étant cohérent avec les équations (14.47,14.36). Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$ ,  $\omega$  est associée à la correction dominante au comportement d'échelle asymptotique. Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega$  reste plus petit que 2 pour  $\varepsilon < 2$ , ce qui étend cette propriété à toutes les dimensions  $2 \leq d \leq 4$ .

Enfin, en appliquant les équations du GR au propagateur (14.31) on trouve

$$\eta(g) = 0, \quad (14.69)$$

ce qui est cohérent avec la valeur (14.38) de l'exposant  $\eta$ .

*Les corrections dominantes aux relations d'échelle.* De l'analyse générale du RG on s'attend à ce que les corrections principales au comportement d'échelle s'annulent pour  $u = u^*$ . Cette propriété a déjà été vérifiée pour l'énergie libre. Considérons à nouveau la longueur de corrélation ou la masse  $m$  données par les équations (14.33). Si nous gardons maintenant la correction dominante à l'intégrale pour  $m \rightarrow 0$  (équation (14.11)), nous trouvons

$$1 - \frac{u}{u^*} + (u/6)K(d)m^{-\varepsilon} + O(m^{2-\varepsilon}\Lambda^{-2}) = \frac{\tau}{m^2}, \quad (14.70)$$

où l'équation (14.65) a été utilisée. On note que pour la valeur particulière  $u = u^*$ , la correction d'échelle dominante s'annule. En fait on peut vérifier que  $2 < d < 4$  au point fixe toutes les corrections à la relation d'échelle (14.35) décroissant comme des puissances proportionnelles à  $\varepsilon$ , s'annulent, en accord avec les prédictions du GR.

On peut montrer que les corrections dues au fait que  $g \neq g^*$  sont proportionnelles à  $(u - u^*)\tau^{\varepsilon/(2-\varepsilon)}$ . On en déduit que  $\omega\nu = \varepsilon/(2 - \varepsilon)$ , ce qui est cohérent avec les équations (14.47,14.36).

*Le propagateur du champ  $\lambda$ .* De la même manière, si l'on garde les corrections dominantes au propagateur du champ  $\lambda$  dans la théorie critique (équation (14.56)) on trouve:

$$\Delta_\lambda(p) = -\frac{2}{N} \left[ \frac{6}{u} - \frac{6}{u^*} + b(d)p^{-\varepsilon} \right]^{-1}, \quad (14.71)$$

où l'on a négligé les termes d'ordre  $\Lambda^{-2}$  et  $1/N$ . Les corrections d'échelle dominantes s'annulent à nouveau exactement pour  $u = u^*$  comme attendu.

#### *Discussion.*

(i) On peut montrer qu'une perturbation due à des opérateurs inessentiels est équivalente, à l'ordre dominant dans la région critique, à une modification du coefficient de  $(\phi^2)^2$ . Ceci peut être explicitement vérifié ici. L'amplitude de la correction dominante aux relations d'échelle est, comme on l'a vu, proportionnelle à  $6/u - a(d)\Lambda^{-\varepsilon}$  où la valeur de  $a(d)$  dépend de la forme du facteur de coupure

et donc des contributions des opérateurs inessentiels. Notons  $u'$  le coefficient de  $(\phi^2)^2$  dans un autre schéma où  $a$  est remplacé par  $a'$ . En identifiant la correction d'échelle dominante on trouve la relation

$$\frac{6\Lambda^\varepsilon}{u} - a(d) = \frac{6\Lambda^\varepsilon}{u'} - a'(d),$$

qui est une relation homographique cohérente avec la forme spéciale (14.67) de la fonction  $\beta$ .

(ii) *Le signe of  $a(d)$ .* On suppose généralement que  $a(d)$  est positif. C'est d'ailleurs le cas pour les schémas de régularisation les plus simples. On voit par exemple sur l'expression (14.13) qu'une condition suffisante est que  $\varrho(t)$  dans l'expression (14.7) soit monotone. De plus,  $a(d)$  est toujours positif près de la dimension 4 où il diverge comme

$$a(d) \underset{d \rightarrow 4}{\sim} \frac{1}{8\pi^2\varepsilon}.$$

Alors, dans la limite  $N \rightarrow \infty$  il existe bien un point fixe  $u = u^*$  pour la physique de longue distance, zéro non trivial de la fonction  $\beta$ . À cette valeur de  $u$  les corrections principales aux formes asymptotiques d'échelle s'annulent.

Toutefois à  $d$  fixé,  $d < 4$ , ceci n'est pas la situation générale. Il est facile de trouver des régularisations pour lesquelles, par exemple, à  $d = 3$   $a(d)$  est négatif.

Si  $a(d)$  est négatif, la méthode de GR, du moins dans sa version simplifiée réduite à un seul paramètre, est pour  $N \rightarrow \infty$  confrontée à un sérieux problème. En effet le paramètre  $u(\lambda)$  à l'échelle  $\lambda$  croît pour  $\lambda \rightarrow \infty$  jusqu'à ce que le développement en  $1/N$  ne soit plus valable. L'interprétation de ce phénomène n'est pas claire. Cela peut être un effet véritable: les hamiltoniens de départ de ce type n'appartiennent pas au bassin d'attraction du point fixe. Cela peut être un problème de groupe de renormalisation qu'il faut modifier pour assurer cette convergence. Enfin cela peut être simplement une pathologie de la limite  $N \rightarrow \infty$ .

Une autre façon de formuler le problème est d'examiner directement la relation entre interactions nue et renormalisée. Notant  $g_r m^{4-d}$  la fonction à quatre points renormalisée à impulsion nulle, nous trouvons

$$m^{4-d} g_r = \frac{\Lambda^{4-d} g}{1 + \Lambda^{4-d} g N B_\Lambda(0, m)/6}. \quad (14.72)$$

Dans la limite  $m \ll \Lambda$  la relation peut s'écrire

$$\frac{1}{g_r} = \frac{(d-2)NK(d)}{12} + \left(\frac{m}{\Lambda}\right)^{4-d} \left(\frac{1}{g} - \frac{Na(d)}{6}\right). \quad (14.73)$$

Nous voyons que pour  $a(d) < 0$  la valeur de point fixe renormalisée ne peut pas être atteinte en variant  $g > 0$  pour aucune valeur finie de  $m/\Lambda$ . De même les corrections dominantes au comportement de point fixe ne peuvent plus être annulées.

## 14.8 Le développement en $1/N$

Les termes d'ordre supérieur dans le calcul par la méthode du col de l'intégrale fonctionnelle (14.5) engendrent un développement en  $1/N$ . Récrivons d'abord de manière un peu différente l'hamiltonien (14.6). On translate la valeur du champ  $\lambda(x)$  de sa valeur moyenne  $\lambda = m^2$  (équation (14.32)),  $\lambda(x) \mapsto m^2 + \lambda(x)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(\sigma, \lambda) = & \frac{1}{2} \int d^d x \left[ (\partial_\mu \sigma)^2 + m^2 \sigma^2 + \lambda \sigma^2 - \frac{3N}{u} \lambda^2 - \frac{6N}{u} (m^2 - r) \lambda \right] \\ & + \frac{(N-1)}{2} \text{tr} \ln [-\nabla^2 + m^2 + \lambda(\bullet)]. \end{aligned} \quad (14.74)$$

*Le comptage des puissances.* En négligeant tous les termes inessentiels, on peut analyser l'hamiltonien (14.74) du point de vue du comptage de puissances. La dimension du champ  $\sigma(x)$  est  $(d-2)/2$ . Du comportement critique (14.58) du propagateur du champ  $\lambda$ , nous avons déduit la dimension canonique  $[\lambda]$  du champ  $\lambda(x)$ :

$$2[\lambda] - \varepsilon = d \quad \text{i.e.} \quad [\lambda] = 2.$$

Comme nous l'avons remarqué plus haut,  $\lambda^2$  a dimension  $4 > d$  et donc l'opérateur  $\int d^d x \lambda^2(x)$ , qui a une valeur propre  $d-4$ , est inessentiel. Le terme d'interaction  $\int \lambda(x) \sigma^2(x) d^d x$  a dimension zéro. Il est facile de vérifier que les interactions non locales qui dépendent du champ  $\lambda$  et proviennent du développement du déterminant, ont également toutes une dimension canonique nulle:

$$\left[ \text{tr} \left[ \lambda(x) (-\nabla^2 + m^2)^{-1} \right]^k \right] = k[\lambda] - 2k = 0.$$

Par conséquent, dans le cadre du développement en  $1/N$ , la théorie a les propriétés de comptage de puissance d'une théorie renormalisable pour toutes les dimensions  $d$ ,  $2 < d \leq 4$ . Contrairement à la théorie des perturbations usuelle, le développement en  $1/N$  ne génère que des corrections logarithmiques au comportement à longue distance dominant. La situation est donc similaire à celle rencontrée pour le développement en  $\varepsilon$  au point fixe et on s'attend à pouvoir calculer des quantités universelles, telles que les exposants critiques par exemple, comme des séries de puissances en  $1/N$ . Toutefois, comme les interactions sont non locales, la démonstration de cette propriété n'est pas immédiate car les résultats habituels de la théorie de la renormalisation ne s'appliquent pas. Utilisant quelques identités algébriques il est possible de construire une théorie des champs quasi locale qui a les mêmes comportements asymptotiques et à laquelle la théorie de la renormalisation s'applique.

*Application: Développement perturbatif et comportement à grande impulsion.* La correction d'ordre  $1/N$  à la fonction à deux points permet de comprendre le problème des divergences perturbatives dans la théorie de masse nulle pour  $d < 4$ .

Nous avons vu que, dans le cadre du développement en  $1/N$ , on peut faire des calculs à dimension fixée  $d < 4$  dans la limite critique ( $T = T_c, m^2 = 0$ ). Ceci implique que les termes du développement en  $1/N$  ne peuvent pas être développés dans une série de puissances du coefficient  $g$  de  $(\phi^2)^2$ , au moins avec de puissances entières. Notons que puisque le point fixe gaussien est un point fixe UV, les comportements pour  $g \rightarrow 0$  sont liés aux comportements à grandes impulsions.

Pour comprendre ce phénomène, on considère la fonction à deux points  $\langle \sigma \sigma \rangle$  à l'ordre  $1/N$ . À cet ordre un seul diagramme contribue (figure 22), contenant deux vertex  $\lambda^2 \sigma$ . Dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  et après une renormalisation de masse (pour que  $\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p=0) = 0$ ), on trouve

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) = p^2 + \frac{2}{N(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(6/u) + b(d)q^{-\varepsilon}} \left( \frac{1}{(p+q)^2} - \frac{1}{q^2} \right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (14.75)$$

Une étude analytique de l'intégrale montre qu'elle a un développement de la forme

$$\sum_{k \geq 1} \alpha_k(\varepsilon) u^k p^{2-k\varepsilon} + \beta_k(\varepsilon) u^{(2+2k)/\varepsilon} p^{-2k}. \quad (14.76)$$

En fait les coefficients  $\alpha_k, \beta_k$  peuvent être calculés à partir de la transformée de Mellin de l'intégrale considérée comme fonction de  $u$  (cf. appendice A1.7.2). Les termes avec des puissances entières de  $u$  correspondent au développement perturbatif qui existe pour  $\varepsilon$  suffisamment petit en régularisation dimensionnelle.  $\alpha_k$  a des pôles en  $\varepsilon = (2l+2)/k$  pour lesquels la puissance correspondante de  $p^2$  est  $-l$ , c'est-à-dire un entier. On vérifie que  $\beta_l$  a un pôle pour la même valeur de  $\varepsilon$  et que les contributions singulières se compensent dans la somme. Pour ces dimensions particulières correspond aux pôles des logarithmes de  $u$  apparaissent dans le développement.

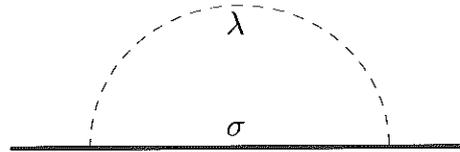


FIG. 22 – Le diagramme contribuant à  $\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}$  à l'ordre  $1/N$ .

## 14.9 Le modèle $\sigma$ non linéaire

Nous avons remarqué que le terme proportionnel à  $\int \lambda^2(x) d^d x$  est négligeable dans le domaine critique pour  $d \leq 4$  et peut donc être omis à l'ordre dominant. L'explication est simple: l'analyse précédente montre que dans le cadre du développement en  $1/N$  l'opérateur  $\lambda^2$  a la dimension quatre, en toutes dimensions, et donc est inessentiel pour  $d < 4$ . Pour  $d = 4$  la situation est plus subtile,

parce qu'il est marginal. Cependant, même dans ce cas, il n'introduit que des corrections logarithmiques au comportement dominant. En fait la partie constante de l'inverse du propagateur, telle qu'elle apparaît dans l'équation (14.71) joue le rôle d'un paramètre de coupure de grande impulsion. Considérons alors l'hamiltonien (14.74) sans le terme en  $\lambda^2$ . Si l'on réintroduit le champ initial  $\phi$  et on intègre sur  $\lambda(x)$  on trouve

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi(x)] \delta \left[ \phi^2(x) - \frac{6}{u} (m^2 - r) \right] \exp \left[ - \int \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^2 d^d x \right]. \quad (14.77)$$

Sous cette forme, nous reconnaissons la fonction de partition du modèle  $\sigma$  non linéaire de symétrie  $O(N)$  dans une paramétrisation inhabituelle. Nous avons par conséquent découvert une correspondance remarquable: à tous les ordres dans un développement en  $1/N$  le modèle  $\sigma$  non linéaire et la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  ont le même comportement asymptotique à longue distance.

*La limite  $N \rightarrow \infty$ .* Nous allons maintenant résoudre le modèle  $\sigma$  directement dans la limite  $N \rightarrow \infty$  pour montrer plus explicitement la correspondance entre les différentes paramétrisations. Nous récrivons la fonction de partition:

$$\mathcal{Z} = \int [d\sigma(x) d\lambda(x)] \exp [-\mathcal{H}(\phi, \lambda)], \quad (14.78)$$

où:

$$\mathcal{H}(\phi, \lambda) = \frac{1}{2T} \int d^d x \left[ (\partial_\mu \phi)^2 + \lambda (\phi^2 - 1) \right]. \quad (14.79)$$

En intégrant, comme on l'a fait à la section 14.1, sur  $N - 1$  composantes de  $\phi$  et en notant  $\sigma$  la composante restante, on obtient:

$$\mathcal{Z} = \int [d\sigma(x) d\lambda(x)] \exp [-\mathcal{H}_N(\sigma, \lambda)], \quad (14.80)$$

où:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(\sigma, \lambda) = & \frac{1}{2T} \int \left[ (\partial_\mu \sigma)^2 + (\sigma^2(x) - 1) \lambda(x) \right] d^d x \\ & + \frac{1}{2} (N - 1) \text{tr} \ln [-\nabla^2 + \lambda(\bullet)]_\Lambda. \end{aligned} \quad (14.81)$$

On prend maintenant la limite  $N \rightarrow \infty$  à  $TN$  fixé. Les équations du col équivalentes aux équations (14.18) sont:

$$m^2 \sigma = 0, \quad (14.82a)$$

$$\sigma^2 = 1 - (N - 1) T \Omega_d(m), \quad (14.82b)$$

ou l'on a posé  $m^2 = \langle \lambda(x) \rangle$  et  $\Omega_d$  a été défini en (14.8). À basse température  $\sigma$  est différent de zéro pour  $d > 2$  et donc  $m$ , qui est la masse du champ  $\pi$ , s'annule. L'équation (14.82b) donne l'aimantation spontanée:

$$\sigma^2 = 1 - (N - 1)T\Omega_d(0). \quad (14.83)$$

Pour  $T = T_c$ ,  $\sigma$  s'annule:

$$\frac{1}{T_c} = (N - 1)\Omega_d(0). \quad (14.84)$$

Par conséquent l'équation (14.83) peut être réécrite:

$$\sigma^2 = 1 - T/T_c. \quad (14.85)$$

Au-dessus de  $T_c$ ,  $\sigma$  s'annule et  $m$ , qui est maintenant la masse commune aux champs  $\pi$  et  $\sigma$ , est donnée pour  $2 < d < 4$  par (équation (14.11)):

$$\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T} = m^{d-2}(N - 1)K(d) + O(m^2\Lambda^{d-4}). \quad (14.86)$$

On retrouve la forme d'échelle de la longueur de corrélation  $\xi = 1/m$ .

Nous verrons au chapitre 15 que les fonctions de corrélation du modèle  $\sigma$  satisfont des EGR qu'on peut démontrer dans un développement double en  $T$  et  $\varepsilon = d - 2$ . Combinant les résultats (14.85,14.86) avec les expressions générales (15.51,15.50), on peut en déduire les fonctions du GR à l'ordre dominant pour  $N \rightarrow \infty$ :

$$\beta(T) = \varepsilon T - \frac{\varepsilon}{T_c} T^2, \quad \zeta(T) = \frac{\varepsilon}{T_c} T. \quad (14.87)$$

Le calcul d'autres quantités physiques et le développement en  $1/N$  découlent des considérations des sections 14.1–14.8.

### 14.10 L'exposant $\eta$ à l'ordre $1/N$

Afin d'illustrer la discussion précédente, calculons l'exposant  $\eta$  à l'ordre  $1/N$  (figure 22). Il suffit pour cela d'évaluer la fonction à deux points du champ  $\sigma$  à l'ordre  $1/N$ , à  $T_c$  et au point fixe IR. L'expression (14.75) devient:

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) = p^2 + \frac{2}{Nb(\varepsilon)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^\varepsilon \left[ \frac{1}{(p+q)^2} - \frac{1}{q^2} \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (14.88)$$

Comme on l'a expliqué ci-dessus, après une renormalisation de masse, l'intégrale en  $q$  diverge logarithmiquement pour toute dimension. On introduit un cut-off  $\Lambda$  dont la forme précise ne joue aucun rôle à cet ordre. L'intégrale se comporte donc pour les grands cut-off, ou les petites impulsions comme:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^\varepsilon [(p+q)^{-2} - q^{-2}] \sim Ap^2 \ln(\Lambda/p). \quad (14.89)$$

En comparant avec le développement de la fonction à deux points au point fixe IR:

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma}^2(p) \sim p^{2-\eta} \sim p^2 (1 - \eta \ln p + O(1/N^2)), \quad (14.90)$$

on conclut:

$$\eta = 2A/(Nb(\varepsilon)).$$

L'expression (14.89) montre que le coefficient de  $\ln p$  peut être obtenu en évaluant la partie divergente de l'intégrale. Celle-ci correspond à des grandes valeurs de la variable d'intégration  $q$  dans (14.88) et est régulière dans l'impulsion  $p$ . On peut donc la développer pour  $p$  petit. On trouve:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^\varepsilon [(p+q)^{-2} - q^{-2}] \sim p^2 \int^\Lambda \frac{d^d q}{q^d (2\pi)^d} \left( \frac{4(p \cdot q)^2}{p^2 q^2} - 1 \right). \quad (14.91)$$

En utilisant l'invariance sous rotation on peut substituer:

$$\frac{4(p \cdot q)^2}{p^2 q^2} \mapsto \frac{4}{d}.$$

La partie divergente de l'intégrale est donc:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^\varepsilon [(p+q)^{-2} - q^{-2}] \sim \frac{2\varepsilon}{4-\varepsilon} \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} p^2 \ln \Lambda. \quad (14.92)$$

Utilisant la définition (14.57) de  $b(\varepsilon)$  on en déduit la valeur de l'exposant  $\eta$ . Il est commode de poser:

$$X_1 = -\frac{2\Gamma(d-1)}{\Gamma^3(d/2)\Gamma(1-d/2)} = \frac{2\sin(\pi\varepsilon/2)\Gamma(3-\varepsilon)}{\pi\Gamma^2(2-\varepsilon/2)}. \quad (14.93)$$

Après un peu d'algèbre on obtient:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{N(4-\varepsilon)} X_1 + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (14.94)$$

## Chapitre 15

### Le modèle $\sigma$ non linéaire

Dans ce chapitre nous discutons le modèle  $\sigma$  non linéaire, un modèle de théorie des champs avec une symétrie  $O(N)$  réalisée non linéairement. Il existe plusieurs motivations pour entreprendre une telle étude. Du point de vue de la physique des interactions fondamentales, le modèle offre, à deux dimensions, l'exemple le plus simple de *liberté asymptotique* et de spectre non perturbatif, qui sont des propriétés aussi présentes dans les théories de jauge à quatre dimensions. Du point de vue de la physique statistique, le modèle apparaît dans la discussion des propriétés à longues distances de la phase ordonnée à basse température de modèles de spins sur réseaux de symétrie  $O(N)$  et interactions à courte portée. Dans le cas des symétries continues toute la phase de basse température a une physique à longue distance non triviale due à l'apparition des modes de Goldstone de masse nulle.

De façon plus surprenante peut-être, le modèle  $\sigma$  fournit des informations supplémentaires concernant le domaine critique en dimension voisine de 2. De tels résultats sont plus compréhensibles quand on se souvient des résultats obtenus dans la limite  $N \rightarrow \infty$  au chapitre 14.9: à tous les ordres du développement en  $1/N$ , dans le domaine critique, les modèles  $(\phi^2)^2$  et  $\sigma$  non linéaire sont équivalents.

#### 15.1 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ à basse température

À basse température c'est à dire à  $T$  fixée,  $T < T_c$ , dans un système dans lequel une symétrie discrète est brisée spontanément les fonctions de corrélation connexes décroissent exponentiellement à grande distance. La situation est tout à fait différente quand la symétrie est continue à cause de la présence de modes de Goldstone. Une physique non triviale de longue distance existe pour toute température dans la phase ordonnée. Cette physique est décrite par le modèle  $\sigma$  non linéaire ainsi que nous allons le montrer en étudiant directement la la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ :

$$\mathcal{H}(\phi) = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} r \phi^2 + \frac{1}{4!} u (\phi^2)^2 \right], \quad (15.1)$$

dans la phase de basse température ( $r < r_c$ ). Dans la représentation fonctionnelle correspondante de la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi(x)] \exp[-\mathcal{H}(\phi)],$$

on fait un changement de variables en posant:

$$\phi(x) = \rho(x)\hat{\phi}(x) \quad \text{avec} \quad \hat{\phi}^2(x) = 1. \quad (15.2)$$

L'intégrale fonctionnelle devient

$$\mathcal{Z} = \int [\rho^{N-1}(x)d\rho(x)] [d\hat{\phi}(x)] \exp[-\mathcal{H}(\rho, \hat{\phi})], \quad (15.3)$$

où

$$\mathcal{H}(\rho, \hat{\phi}) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \rho^2(x) [\partial_\mu \hat{\phi}(x)]^2 + \frac{1}{2} [\partial_\mu \rho(x)]^2 + \frac{1}{2} r \rho^2 + \frac{1}{4!} u \rho^4 \right\}. \quad (15.4)$$

Dans la phase ordonnée, à  $T$  fixé en dessous de  $T_c$ , le champ  $\rho(x)$  a une valeur moyenne non nulle et est massif; sa dynamique n'est donc pas critique. L'intégration sur le champ  $\rho(x)$  génère une action locale effective  $\mathcal{H}_{\text{eff}}(\hat{\phi})$  pour le champ  $\hat{\phi}$ :

$$\exp[-\mathcal{H}_{\text{eff}}(\hat{\phi})] = \int [\rho^{N-1}(x)d\rho(x)] \exp[-\mathcal{H}(\rho, \hat{\phi})]. \quad (15.5)$$

De plus l'intégrale fonctionnelle (15.5) peut être calculée de manière perturbative. Notons  $M$  la valeur moyenne de  $\rho(x)$  au niveau en arbre:

$$\rho(x) = M + \rho'(x). \quad (15.6)$$

En termes de  $\rho'$ , l'action (15.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\rho', \hat{\phi}) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (M^2 + 2M\rho' + \rho'^2) [\partial_\mu \hat{\phi}(x)]^2 + \frac{1}{2} [\partial_\mu \rho'(x)]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} r (M + \rho')^2 + \frac{1}{4!} u (M + \rho')^4 \right\}. \end{aligned}$$

En négligeant toutes les fluctuations du champ  $\rho'$ , on obtient à l'ordre dominant

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(0)}(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} M^2 \int d^d x [\partial_\mu \hat{\phi}(x)]^2. \quad (15.7)$$

On reconnaît l'action classique du modèle  $\sigma$  non linéaire.

Les corrections en boucles provenant de l'intégration sur  $\rho'$  génèrent des interactions supplémentaires en  $\hat{\phi}$ . Cependant tant que l'on explore des impulsions beaucoup plus petites que la masse du champ  $\rho$  ou des distances beaucoup plus grandes que la longueur de corrélation correspondante, l'action effective résultant de l'intégration sur le champ  $\rho$  peut être développée en termes locaux. Le terme dominant pour les grandes distances est le terme ne contenant que deux dérivées. A cause de la symétrie  $O(N)$ , il est proportionnel à l'action effective  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(0)}(\hat{\phi})$  et n'a comme effet que de renormaliser le coefficient  $M^2$  qui apparaît dans l'équation (15.7). Les autres interactions ont quatre dérivées ou plus et correspondent à des opérateurs inessentiels. Notons que pour une température  $T$  près de  $T_c$ , le domaine dans l'espace des impulsions où ces arguments s'appliquent est

$$|p_i| \ll (T_c - T)^\nu.$$

Dans une telle limite le modèle  $\sigma$  non linéaire (15.7) décrit complètement les propriétés à longue distance de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  pour  $T$  fixé,  $T < T_c$ . De plus le coefficient devant l'action effective devient grand à basse température comme dans le modèle sur réseau.

## 15.2 Le modèle $\sigma$ non linéaire

Le modèle  $\sigma$ , comme nous l'avons déjà expliqué, est défini à partir d'un champ  $\hat{\phi}(x)$  à  $N$  composantes qui satisfait une contrainte invariante sous  $O(N)$ :

$$\hat{\phi}^2(x) = 1. \quad (15.8)$$

Notons que le champ  $\hat{\phi}$  peut aussi être identifié à un élément d'un espace (symétrique) homogène  $O(N)/O(N-1)$ .

L'action la plus générale de symétrie  $O(N)$ , qui soit fonction de  $\hat{\phi}$  et de ses dérivées, et qui inclue au plus deux dérivées, est à une constante multiplicative près:

$$\mathcal{H}(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \int d^d x \partial_\mu \hat{\phi}(x) \cdot \partial_\mu \hat{\phi}(x). \quad (15.9)$$

En effet, à cause de la contrainte (15.8), tout terme symétrique sans dérivée se réduit à une constante et  $\hat{\phi} \cdot \partial_\mu \hat{\phi}$  s'annule.

Afin de générer le développement perturbatif de la théorie des champs correspondante, il est nécessaire de paramétrer le champ en termes de variables indépendantes. Une paramétrisation de la sphère (15.8) qui est naturelle du point de vue de la physique statistique et commode pour le GR est:

$$\hat{\phi}(x) = \begin{cases} \sigma(x) \\ \pi(x) \end{cases}, \quad (15.10)$$

où  $\pi(x)$  est un champ à  $(N - 1)$  composantes. Le champ  $\sigma(x)$  est alors une fonction de  $\pi(x)$  par l'équation (15.8). L'équation peut être résolue localement, par exemple si  $\sigma(x)$  est positif:

$$\sigma(x) = (1 - \pi^2(x))^{1/2}. \quad (15.11)$$

La conséquence de la singularité de cette paramétrisation sera discutée plus loin.

Le sous-groupe  $O(N - 1)$  qui laisse  $\sigma$  invariant agit linéairement sur  $\pi(x)$ . On peut décomposer l'ensemble des générateurs de l'algèbre de Lie de  $O(N)$  en l'ensemble des générateurs de l'algèbre de Lie de  $O(N - 1)$  et en son ensemble complémentaire. A cet ensemble complémentaire correspondent les transformations infinitésimales de la forme

$$\delta\pi_i(x) = \omega_i (1 - \pi^2(x))^{1/2}, \quad (15.12)$$

où  $\omega_i$  sont des constantes, paramètres infinitésimaux de la transformation. La loi de transformation du champ  $\sigma$  est alors une conséquence de la transformation (15.12) du champ  $\pi$ :

$$\delta\sigma(x) \equiv \delta(1 - \pi^2(x))^{1/2} = -\omega \cdot \pi(x). \quad (15.13)$$

*La quantification: l'intégrale fonctionnelle.* En termes du champ  $\pi(x)$ , l'action (15.9) prend la forme géométrique suivante:

$$\mathcal{H}(\pi) = \frac{1}{2} \int d^d x G_{ij}(\pi) \partial_\mu \pi_i \partial_\mu \pi_j, \quad (15.14)$$

où  $G_{ij}(\pi)$  est un tenseur métrique sur la sphère:

$$G_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\pi_i \pi_j}{1 - \pi^2}. \quad (15.15)$$

Dans la forme (15.14) l'action est covariante sous une reparamétrisation de la sphère.

La quantification d'actions de la forme (15.14) génère une mesure fonctionnelle mal définie (puisque infinie). La fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation est en effet donnée par:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \left[ \frac{d\pi(x)}{(1 - \pi^2(x))^{1/2}} \right] \exp \left[ -\frac{1}{t} \left( \mathcal{H}(\pi) - \int d^d x \mathbf{H}(x) \cdot \pi(x) \right) \right], \quad (15.16)$$

où  $t$  est la constante de couplage de la théorie quantique des champs.

La mesure fonctionnelle d'intégration à une interprétation géométrique évidente: c'est la mesure invariante sous  $O(N)$  pour la paramétrisation (15.10). Toutefois cette interprétation formelle de la mesure n'élimine pas la difficulté. Nous devons trouver une méthode pour traiter ces contributions supplémentaires infinies à l'action. Formellement en effet:

$$\prod_x (1 - \pi^2(x))^{-1/2} \sim \exp \left[ -\frac{1}{2} \delta^d(0) \int d^d x \ln(1 - \pi^2(x)) \right]. \quad (15.17)$$

Ce problème est directement lié au problème d'ordre des opérateurs qui apparaît dans la quantification.

### 15.3 Théorie des perturbations. Comptage de puissances

Le minimum de l'action classique (15.9) est donné par:

$$|\partial_\mu \hat{\phi}(x)| = 0 \Rightarrow \hat{\phi}(x) = \text{const.} .$$

A cause de l'invariance sous  $O(N)$ , cette action a un ensemble continu de minima dégénérés équivalents. Chaque minimum est le point de départ d'une théorie des perturbations. Si l'on ne calcule que les moyennes des fonctions de corrélation invariantes sous  $O(N)$  avec l'action (15.9) et la mesure invariante de l'intégrale (15.16), tous les minima donnent exactement la même contribution. En sommant sur tous les minima on obtient un facteur, le volume de la sphère  $S_{N-1}$ , qui disparaît dans la normalisation de l'intégrale fonctionnelle. Cependant, pour des fonctions de corrélation non invariantes sous  $O(N)$ , une somme sur tous les minima est équivalente à une moyenne sur le groupe  $O(N)$ . Par conséquent il semblerait que seules fonctions de corrélation invariantes par le groupe  $O(N)$  soient non nulles. Ce problème est directement lié à la possibilité d'une brisure spontanée de symétrie: dans la phase ordonnée, le système statistique n'est plus ergodique et par conséquent on ne doit sommer que sur un sous-ensemble de configurations du champ ayant toutes le même comportement asymptotique.

#### 15.3.1 Développement perturbatif

Dans la paramétrisation (15.10), on choisit le minimum  $\pi(x) = 0$ . Dans l'intégrale fonctionnelle (15.16) la constante de couplage  $t$  joue le rôle formel de  $\hbar$  et par conséquent ordonne la théorie des perturbations. Pour les petits  $t$ , les champs  $\pi(x)$  qui contribuent à l'intégrale fonctionnelle doivent alors être tels que:

$$|\partial_\mu \pi(x)| \sim \sqrt{t} ,$$

et puisqu'on développe autour de  $\pi(x) = 0$ , le champ doit lui-même satisfaire:

$$|\pi(x)| \sim \sqrt{t} . \quad (15.18)$$

Les valeurs de  $\pi(x)$  d'ordre 1 donnent des contributions exponentiellement petites à l'intégrale fonctionnelle (d'ordre  $\exp(-\text{const.}/t)$ ) qui sont négligeables à tous les ordres de la théorie des perturbations.

Ceci a deux conséquences: les restrictions imposées par la paramétrisation (15.11) ( $\sigma(x) > 0$ ) ne sont pas importantes dans la théorie des perturbations et de plus on peut intégrer, dans l'intégrale fonctionnelle, librement sur  $\pi(x)$  de  $+\infty$  à  $-\infty$ , en ne tenant pas compte de la contrainte:

$$|\pi(x)| \leq 1 .$$

La théorie des perturbations repose à nouveau sur l'évaluation de simples intégrales gaussiennes. ■

On peut discuter maintenant la théorie des perturbations formelle, en laissant temporairement de côté le problème des divergences UV ou IR (petites impulsions). Récrivons l'intégrale fonctionnelle (15.16):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int [d\pi] \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \int d^d x \left[ (\partial_\mu \pi(x))^2 + \frac{(\pi \cdot \partial_\mu \pi)^2}{1 - \pi^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta^d(0) \int d^d x \ln(1 - \pi^2(x)) + \frac{1}{g} \int d^d x \mathbf{H}(x) \cdot \pi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

Notons que le terme de mesure ne contient pas de facteur  $1/t$  et ne commence à contribuer qu'à l'ordre d'une boucle. Puisque  $\pi$  est d'ordre  $\sqrt{t}$ , il est commode de normaliser le champ de façon différente:

$$\pi \mapsto \pi \sqrt{t}.$$

Avec normalisation l'intégrale fonctionnelle devient

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int [d\pi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^d x \left[ (\partial_\mu \pi)^2 + t \frac{(\pi \cdot \partial_\mu \pi)^2}{1 - t\pi^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta^d(0) \int d^d x \ln(1 - t\pi^2) + \frac{1}{\sqrt{t}} \int d^d x \mathbf{H}(x) \cdot \pi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (15.20)$$

L'expression (15.20) montre que le terme d'interaction dans l'action, une fois développé en puissances de  $t$ , génère une infinité de vertex différents avec des puissances paires arbitraires de  $\pi$  et deux dérivées. Il est toutefois facile de vérifier qu'à tout ordre fini de la théorie des perturbations et pour une fonction de corrélation donnée, seul un nombre fini de vertex contribue. Formellement le terme de mesure produit des vertex supplémentaires sans dérivées.

Le propagateur  $\Delta_{ij}(p)$  du champ  $\pi$  est:

$$\Delta_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{p^2}. \quad (15.21)$$

Au niveau en arbre le champ  $\pi$  est de masse nulle: à l'ordre dominant de la théorie des perturbations, le modèle  $\sigma$  non linéaire réalise automatiquement la symétrie  $O(N)$  dans la phase de brisure spontanée de symétrie et le champ  $\pi$  correspond aux modes de Goldstone.

Notons que ces propriétés sont indépendantes du choix particulier (15.10) de la paramétrisation de  $\hat{\phi}(x)$ .

Le partenaire massif du champ  $\pi$  dans la réalisation linéaire, la composante  $\sigma$ , a été éliminé par la contrainte (15.8).

### 15.3.2 Comptage de puissances

La forme du propagateur montre que le champ  $\pi$  a la dimension canonique habituelle d'un champ scalaire  $[\pi] = \frac{1}{2}(d-2)$ . Donc la dimension d'un vertex contenant  $2n$  champs  $\pi$  est  $n(d-2) + 2$ . Par conséquent:

- (i) pour  $d < 2$  la théorie est super-renormalisable par comptage de puissances;
- (ii) pour  $d = 2$  elle est juste renormalisable;
- (iii) pour  $d > 2$  la théorie n'est pas renormalisable.

Nous étudierons donc d'abord le modèle à deux dimensions. Une particularité du modèle est la suivante: bien que la théorie soit renormalisable par comptage de puissances, tout monôme local dans le champ contenant au plus deux dérivées et une puissance arbitraire de  $\pi$  peut apparaître *a priori* comme un contre-terme. La symétrie  $O(N-1)$ , qui agit linéairement, ne restreint les contre-terme qu'à la forme générale:

$$(\partial_\mu \pi \cdot \pi)^2 (\pi^2)^n, \quad (\partial_\mu \pi)^2 (\pi^2)^n, \quad (\pi^2)^n.$$

Cependant au niveau en arbre, la symétrie  $O(N)$  non linéaire implique, à une constante de renormalisation près, que l'action est unique. On peut montrer, mais ceci n'est pas un résultat trivial, qu'à cause de certaines identités de WT conséquences de la symétrie non linéaire, la théorie peut être renormalisée avec seulement deux constantes de renormalisation,  $Z$  qui change le rayon de la sphère et  $Z_t$  qui renormalise la constante de couplage  $t$ .

## 15.4 Régularisations perturbatives

*La régularisation de Pauli-Villars.* Dans la construction d'une version régularisée du modèle  $\sigma$  non linéaire, on doit veiller à préserver la symétrie  $O(N)$ . Ceci est moins trivial que dans un cas linéaire puisque, comme conséquence de la symétrie, les termes d'interactions dans l'action (15.14) sont reliés à la partie quadratique. Une méthode simple est de partir de la description du modèle en termes du champ  $\hat{\phi}(x)$  parce que l'action (15.9) est formellement une action de champ libre. Nous remplaçons donc l'action  $\mathcal{H}(\hat{\phi})$  par  $\mathcal{H}_\Lambda(\hat{\phi})$ :

$$\mathcal{H}_\Lambda(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \int d^d x \hat{\phi}(x) \cdot \left( -\Delta + \frac{\alpha_2 \Delta^2}{\Lambda^2} - \frac{\alpha^3}{\Lambda^4} \Delta^2 + \dots \right) \hat{\phi}(x). \quad (15.22)$$

En exprimant alors  $\hat{\phi}(x)$  en termes de  $\pi(x)$ , on découvre que le comportement à grandes impulsions du propagateur a été amélioré, mais en même temps de nouvelles interactions encore plus singulières ont été générées. Une analyse en comptage de puissances révèle alors que tous les diagrammes peuvent être régularisés, exceptés les diagrammes à une boucle dont le comptage de puissance ne change pas. Cette propriété n'est pas indépendante d'une autre limitation de la régularisation de Pauli-Villars: elle ne régularise pas le terme de mesure

divergent. En effet on peut vérifier que les divergences à une boucle engendrées par l'interaction sont nécessaires pour compenser les divergences provenant de la mesure. On peut dire en quelque sorte que les divergences propres à la théorie des champs sont régularisées, mais que ce sont les divergences liées à l'ordre des opérateurs qui subsistent.

La régularisation de Pauli–Villars est utile principalement pour étudier les modèles non linéaires couplés à des fermions chiraux.

*La régularisation dimensionnelle.* La régularisation dimensionnelle préserve la symétrie  $O(N)$  de l'action. De plus comme conséquence de la règle:

$$\int d^d k = 0 \iff \delta^d(0) = 0,$$

le terme de mesure peut être ignoré, et par conséquent la théorie des perturbations n'a pas de divergences à grandes impulsions pour  $d < 2$ . Grâce à sa simplicité technique, c'est la régularisation que l'on utilise généralement dans les calculs explicites. Un inconvénient théorique est que le rôle du terme de mesure est caché. Par conséquent pour la discussion théorique de la renormalisation du modèle  $\sigma$  non linéaire, il est utile de considérer à la fois la régularisation dimensionnelle et celle par le réseau.

## 15.5 Régularisation par le réseau et mécanique statistique

Afin de construire une version régularisée sur réseau du modèle  $\sigma$  non linéaire de symétrie  $O(N)$ , on peut à nouveau partir de l'action (15.9). On remplace alors les dérivées par des différences finies:

$$\partial_\mu \hat{\phi}(x) \mapsto \nabla_\mu \hat{\phi}(x) = \frac{1}{a} \left[ \hat{\phi}(x + a n_\mu) - \hat{\phi}(x) \right],$$

où  $x$  appartient maintenant à un réseau hypercubique de maille  $a$ , et  $n_\mu$  est le vecteur unité dans la direction  $\mu$ .

Finalement on prend en compte la condition (15.8) et la symétrie  $O(N)$  en intégrant sur  $\hat{\phi}(x)$  avec la mesure invariante de la sphère. L'intégrale fonctionnelle régularisée a la forme:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \int \prod_{x \in a\mathbb{Z}^d} \delta(\hat{\phi}^2(x) - 1) d\phi(x) \exp \left[ -\frac{1}{t} \mathcal{H}(\hat{\phi}, \mathbf{H}) \right], \quad (15.23)$$

où:

$$\mathcal{H}(\hat{\phi}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \left[ \nabla_\mu \hat{\phi}(x) \right]^2 - \sum_x \mathbf{H}(x) \cdot \hat{\phi}(x). \quad (15.24)$$

En utilisant la paramétrisation (15.10), on peut alors exprimer le champ du réseau  $\hat{\phi}(x)$  en termes de  $\pi(x)$ . Ceci fournit la forme régularisée de l'intégrale fonctionnelle (15.16). En particulier le terme de mesure génère maintenant des interactions bien définies:

$$\frac{1}{2}\delta^d(0) \int d^d x \ln(1 - \pi^2(x)) \longmapsto \frac{1}{2} \sum_x \ln(1 - \pi^2(x)).$$

Dans l'expression (15.23) on reconnaît la fonction de partition d'un modèle de spins classiques sur réseau avec des interactions ferromagnétiques entre plus proches voisins, et en présence d'un champ magnétique externe  $\mathbf{H}(x)$ . La constante de couplage  $t$  joue le rôle de la température. L'expression (15.23) ne fournit pas seulement une régularisation de la théorie des perturbations mais permet aussi l'utilisation de méthodes non perturbatives pour étudier le modèle  $\sigma$  non linéaire. De plus c'est la seule régularisation qui permet une discussion du rôle du terme de mesure dans la théorie des perturbations.

*Le modèle à  $N$  composantes.* Le modèle régularisé (15.23) fournit un exemple particulier d'une classe de modèles à  $N$  composantes sur réseau. Ceux-ci sont décrits en termes d'un vecteur de spin  $\mathbf{S}_i$ , à  $N$  composantes et de longueur unité, sur chaque site  $i$  du réseau, interagissant par l'intermédiaire d'une interaction ferromagnétique  $V_{ij}$ , de symétrie  $O(N)$ , à deux corps et à courte portée. En champ nul la fonction de partition de tels modèles peut être écrite:

$$\mathcal{Z} = \int \prod_i d\mathbf{S}_i \delta(\mathbf{S}_i^2 - 1) \exp[-\mathcal{H}(\mathbf{S})/T], \quad (15.25)$$

où l'énergie de configuration  $\mathcal{H}$  est:

$$\mathcal{H}(\mathbf{S})/T = - \sum_{ij} V_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j / T. \quad (15.26)$$

Le développement de basse température de ces modèles sur réseaux est le développement perturbatif des modèles  $\sigma$  non linéaires régularisés. ■

Rappelons ici que les propriétés critiques de tels modèles à  $N$  composantes peuvent être déduites de l'analyse par le GR d'une théorie des champs  $(\phi^2)^2$  effective. La correspondance entre cette théorie des champs et les modèles sur réseaux peut être établie par la méthode suivante: on trouve d'abord une approximation pour la fonction de partition, l'approximation du champ moyen, valable pour les dimensions élevées. On caractérise les propriétés critiques de toutes les quantités physiques dans le cadre de ce schéma d'approximation. On montre alors que l'approximation du champ moyen est le premier terme dans un développement systématique. En examinant la première correction, on découvre le rôle de la dimension quatre où la validité de la théorie du champ moyen cesse.

Finalement pour  $d \leq 4$  une somme, à tous les ordres dans le développement, des divergences IR dominantes mène à une théorie des champs  $\phi^4$  effective dont les propriétés critiques peuvent être analysées par les méthodes du GR pour la dimension  $4 - \varepsilon$ , c'est-à-dire près de la dimension critique supérieure, ainsi que nous l'avons montré dans les sections 13.1 et 13.3.1.

L'étude du modèle  $\sigma$  non linéaire du point de vue du GR, fournit des informations supplémentaires sur les propriétés à longues distances de ces modèles, dans toute la phase ordonnée de basse température. Il nous permettra de démontrer des propriétés universelles à température fixée en dessous de  $T_c$ . Cependant puisque la méthode repose sur une analyse des interactions entre les modes de Goldstone, elle ne s'applique qu'aux modèles avec des symétries continues.

De plus dans le cas non abélien  $N > 2$ , une analyse de l'instabilité de la phase ordonnée à basse température et près de deux dimensions, due aux interactions des modes de Goldstone, fournit une information supplémentaire sur les propriétés critiques des modèles sur réseaux.

## 15.6 Divergences infrarouges (IR)

Puisque dans une théorie de masse nulle le propagateur se comporte comme  $p^{-2}$ , il est nécessaire de discuter le modèle du point de vue des divergences IR. En particulier la théorie des perturbations est divergente à petites impulsions (IR) en dimension deux, dimension pour laquelle le modèle  $\sigma$  non linéaire est renormalisable. Par exemple calculons la valeur moyenne du champ  $\sigma$  à l'ordre d'une boucle:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(x) \rangle &= 1 - \frac{1}{2} \langle \pi^2(x) \rangle + O(\pi^4) \\ &= 1 - (N-1)t \int \frac{d^d p}{p^2} + O(t^2). \end{aligned}$$

Cette propriété est directement liée à la physique de la brisure spontanée de symétrie (BSS) dans le cas de symétries continues.

(i) On peut se convaincre que pour  $d > 2$  dans le modèle à  $N$  composantes, la symétrie  $O(N)$  est spontanément brisée à basse température. De manière cohérente la théorie des perturbations pour  $d > 2$ , qui prédit aussi la brisure spontanée de symétrie (BSS), n'est pas divergente dans l'infrarouge. Pour  $T < T_c$  fixé, le comportement à grande distance de la théorie est dominé par les excitations de masse nulle ou ondes de spin. Par contre on ne peut rien dire, en théorie des perturbations, sur une possible région critique  $T \sim T_c$ .

(ii) Pour  $d \leq 2$ , on sait d'après le théorème de Mermin–Wagner–Coleman, que la BSS avec ordre ( $\langle \mathbf{S} \rangle \neq 0$ ) est impossible dans un modèle avec une symétrie continue et seulement des forces à courte portée, et ceci est de nouveau cohérent avec l'apparition de divergences IR dans la théorie des perturbations. Pour  $d \leq 2$ , la température critique  $T_c$  s'annule et la théorie des perturbations n'a de sens qu'en présence d'un cut-off IR qui brise la symétrie explicitement et ordonne les

spins. Par conséquent on ne peut rien dire, sur les propriétés à longue distance, directement à partir de la théorie des perturbations.

Pour engendrer une théorie des perturbations bien définie à deux dimensions, il est donc nécessaire d'introduire un cut-off IR. Puisque l'absence de masse est une conséquence de la brisure spontanée de symétrie  $O(N)$ , il est nécessaire de briser la symétrie explicitement pour donner une masse au champ  $\pi$ . On peut par exemple ajouter à l'action un terme de masse explicite. Cependant l'étude du mécanisme de brisure de symétrie suggère une méthode plus commode qui consiste à ajouter une source constante  $h$  pour le champ  $\sigma$  (un champ magnétique dans le modèle statistique des spins interagissants).

$$\mathcal{H}(\pi) \mapsto \mathcal{H}(\pi) - \frac{h}{t} \int \sigma(x) d^d x, \quad h > 0. \quad (15.27)$$

Une première conséquence de cette modification est que le minimum de l'action n'est plus dégénéré. Nous devons maintenant aussi maximiser le terme de source et ceci implique  $\pi = 0$  au minimum.

De plus, si l'on développe  $\sigma$  en puissances de  $\pi$ :

$$\sigma = (1 - t\pi^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}t\pi^2 + O\left((\pi^2)^2\right), \quad (15.28)$$

et que l'on regroupe les termes quadratiques de l'action, on trouve le nouveau propagateur  $\Delta_{ij}(p)$  du champ  $\pi$  (dans la normalisation de l'équation (15.20)):

$$\Delta_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{p^2 + h}. \quad (15.29)$$

Le terme linéaire  $\sigma$  a donc généré une masse  $h^{1/2}$  pour le champ  $\pi$ . En même temps il a généré de nouvelles interactions sans dérivées.

Rappelons que dans le cas de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ , le terme de brisure  $h\sigma$  est linéaire dans un champ indépendant et par conséquent ne génère pas de nouvelles constantes de renormalisation. Le même résultat peut être démontré ici, bien que le champ  $\sigma$  soit un opérateur composé.

## 15.7 Le modèle $\sigma$ non linéaire: équations du groupe de renormalisation

Nous avons montré que la physique à grande distance du modèle avec symétrie  $O(N)$  peut être décrite en dessous de  $T_c$  par le modèle  $\sigma$  non linéaire. On sait que le modèle de théorie des champs est renormalisable à deux dimensions. On procède donc de manière formellement analogue au cas de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$ , c'est-à-dire qu'on étudie la théorie en dimension  $2 + \varepsilon$  à l'aide d'un développement en une série double en température  $T$  et en  $\varepsilon$ . De cette manière, le développement perturbatif sera renormalisable et des EGR pourront être démontrées.

### 15.7.1 Renormalisation et EGR

Comme on l'a fait pour le modèle  $(\phi^2)^2$ , on introduit une d'échelle d'impulsion  $\Lambda$  (qui joue le rôle de l'inverse de la maille du réseau) qui donne une dimension à toutes les paramètres du modèle. On change aussi de notation, en faisant la substitution  $h \mapsto h/\Lambda^2$ . La fonction de partition dans un champ magnétique externe  $h$  s'écrit alors:

$$Z(h) = \int \left[ (1 - \pi^2(x))^{-1/2} d\pi(x) \right] \exp[-\mathcal{H}(\pi, h)], \quad (15.30)$$

où:

$$\mathcal{H}(\pi, h) = \frac{\Lambda^{d-2}}{t} \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \pi(x))^2 + \frac{(\pi \cdot \partial_\mu \pi(x))^2}{1 - \pi^2(x)} \right] - h \sqrt{1 - \pi^2(x)} \right\}. \quad (15.31)$$

On peut alors montrer que l'action renormalisée prend la forme:

$$\mathcal{H}_r(\pi_r) = \frac{\mu^{d-2} Z}{2t_r Z_t} \int d^d x \left[ (\partial_\mu \pi_r)^2 + (\partial_\mu \sigma_r)^2 \right] - \frac{\mu^{d-2}}{t_r} h_r \int \sigma_r(x) d^d x, \quad (15.32)$$

où  $\mu$  est l'échelle renormalisée et:

$$\sigma_r(x) = [Z^{-1} - \pi_r^2]^{1/2}. \quad (15.33)$$

Notons que dans certains schémas de renormalisation, comme la soustraction minimale, les constantes de renormalisation sont indépendantes de  $h$ .

La relation:

$$\pi_r(x) = Z^{-1/2} \pi(x), \quad (15.34)$$

implique

$$\mu^{d-2} \frac{h_r}{t_r} = \Lambda^{d-2} Z^{1/2} \frac{h}{t}. \quad (15.35)$$

Avec nos conventions, la constante de couplage, qui est proportionnelle à la température, est sans dimension. La relation entre fonctions de corrélation dépendant du cut-off et renormalisées est

$$Z^{n/2} (\Lambda/\mu, t) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, h, \Lambda) = \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(p_i; t_r, h_r, \mu). \quad (15.36)$$

En dérivant par rapport à  $\Lambda$  avec les paramètres renormalisés fixés, on obtient les EGR

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(t) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{n}{2} \zeta(t) + \rho(t) h \frac{\partial}{\partial h} \right] \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, h, \Lambda) = 0. \quad (15.37)$$

Nous avons supposé que les constantes de renormalisation, et donc les fonctions du GR définies par

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\text{ren.fixed}} t &= \beta(t), \\ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\text{ren.fixed}} (-\ln Z) &= \zeta(t), \\ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\text{ren.fixed}} \ln h &= \rho(t), \end{aligned} \quad (15.38)$$

ont été choisies indépendantes de  $h$ .

Le coefficient de  $\partial/\partial h$  peut être déduit de l'équation (15.35) qui implique (en prenant le logarithme des deux membres):

$$0 = h^{-1} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} h + d - 2 - \frac{1}{2} \zeta(t) - \frac{\beta(t)}{t}, \quad (15.39)$$

et par conséquent

$$\rho(t) = 2 - d + \frac{1}{2} \zeta(t) + \frac{\beta(t)}{t}. \quad (15.40)$$

Afin de pouvoir discuter les fonctions de corrélation contenant le champ  $\sigma$ , on a aussi besoin des EGR satisfaites par les fonctions de corrélation connexes  $W^{(n)}$ :

$$\left[ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(t) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{2} \zeta(t) + \left( \frac{1}{2} \zeta(t) + \frac{\beta(t)}{t} - \varepsilon \right) h \frac{\partial}{\partial h} \right] W^{(n)} = 0, \quad (15.41)$$

où l'on a posé:

$$d = 2 + \varepsilon. \quad (15.42)$$

### 15.7.2 Calcul à l'ordre d'une boucle

Les deux fonctions du GR peuvent être obtenues à l'ordre d'une boucle à partir du calcul de la fonction de vertex à deux points (figure 23)

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \frac{\Lambda^\varepsilon}{t} (p^2 + h) + [p^2 + \frac{1}{2}(N-1)h] \frac{1}{(2\pi)^d} \int^\Lambda \frac{d^d q}{q^2 + h} + O(t). \quad (15.43)$$

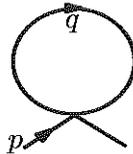


FIG. 23 – Fonction à deux points: contribution à une boucle.

Appliquant l'EGR (15.37) à  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  et en identifiant les coefficients de  $p^2$  et  $h$ , on obtient deux équations qui déterminent  $\beta(t)$  et  $\zeta(t)$  à l'ordre d'une boucle:

$$\beta(t) = \varepsilon t - \frac{(N-2)}{2\pi} t^2 + O(t^3, t^2\varepsilon), \quad (15.44a)$$

$$\zeta(t) = \frac{N-1}{2\pi} t + O(t^2, t\varepsilon). \quad (15.44b)$$

## 15.8 Solution des EGR. Points fixes

La nature des points fixes au voisinage de la dimension 2 est liée aux zéros de la fonction  $\beta(t)$  donnée par l'équation (15.44a). Intégrant alors les EGR, on déduit de l'existence et de la stabilité des points fixes des propriétés d'universalité.

### 15.8.1 Points fixes

Un examen de la fonction  $\beta(t)$  conduit immédiatement aux conclusions suivantes.

Pour  $d \leq 2$  ( $\varepsilon \leq 0$ ),  $t = 0$  est un point fixe IR instable, cette instabilité IR étant induite par la masse nulle des bosons de Goldstone potentiels. Le spectre de la théorie n'est donc pas donnée par la théorie des perturbations et l'hypothèse perturbative de la brisure spontanée de symétrie à basse température est incohérente. Comme on l'a déjà mentionné, ce résultat est en accord avec des arguments plus rigoureux. Notons que puisque le modèle ne dépend que d'une constante de couplage,  $t = 0$  est aussi un point fixe stable dans l'ultraviolet (la propriété de liberté asymptotique pour les grandes impulsions). La section 15.11 contient une brève discussion de la physique à deux dimensions. Il y a, cependant, un cas pour lequel l'analyse ne s'applique pas:  $d = 2$ ,  $N = 2$  qui doit être examiné séparément. Pour  $d > 2$ , c'est-à-dire  $\varepsilon > 0$ ,  $t = 0$  est un point fixe IR stable, la symétrie  $O(N)$  est spontanément brisée à basse température en champ nul. La constante de couplage effective, qui détermine le comportement à grande distance, approche l'origine pour toutes les températures  $t < t_c$ ,  $t_c$  étant le premier zéro non trivial de  $\beta(t)$ . Par conséquent les propriétés à grandes distances du modèle peuvent être obtenues à partir du développement de basse température et du groupe de renormalisation, en remplaçant les paramètres perturbatifs par des paramètres effectifs obtenus en résolvant les EGR.

*La température critique.* On observe finalement que, au moins pour les petits  $\varepsilon$  positifs et pour  $N > 2$ , la fonction  $\beta(t)$  du GR a un zéro non trivial  $t_c$ :

$$t_c = \frac{2\pi\varepsilon}{N-2} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow \beta(t_c) = 0, \text{ et } \beta'(t_c) = -\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (15.45)$$

Puisque  $t_c$  est un point fixe instable dans l'infrarouge, il est par définition une température critique. Les conséquences de ces propriétés seront étudiées plus loin. Notons seulement maintenant que  $t_c$  est aussi un point fixe UV, c'est-à-dire

qu'il gouverne le comportement à grande impulsion de la théorie renormalisée. Par conséquent on ne peut pas faire confiance au résultat perturbatif qui dit que la théorie n'est pas renormalisable pour  $d > 2$ . En effet les fonctions de corrélation ont, pour les grandes impulsions, un comportement non-perturbatif.

Nous allons maintenant discuter de façon plus précise les solutions des EGR.

### 15.8.2 Intégration des équations du groupe de renormalisation: $d > 2$ , $t < t_c$

Nous allons d'abord examiner les implications des EGR pour le comportement à longue distance des fonctions de corrélation pour  $d > 2$  où  $t = 0$  est un point fixe IR. Comme d'habitude on résout l'équation (15.37) en introduisant un paramètre d'échelle  $\lambda$  et en cherchant une solution de la forme:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, t, h, \Lambda) = Z^{-n/2}(\lambda) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, t(\lambda), h(\lambda), \lambda\Lambda). \quad (15.46)$$

La compatibilité avec l'équation (15.37) implique:

$$\ln \lambda = \int_t^{t(\lambda)} \frac{dt'}{\beta(t')}, \quad (15.47a)$$

$$\ln Z(\lambda) = \int_t^{t(\lambda)} dt' \frac{\zeta(t')}{\beta(t')}, \quad (15.47b)$$

$$h(\lambda) = \lambda^{2-d} Z^{1/2}(\lambda) \frac{t(\lambda)}{t} h. \quad (15.47c)$$

Avec nos conventions  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  a la dimension  $d$  et  $h$  la dimension 2. En tenant compte de l'analyse dimensionnelle on récrit alors la relation (15.46):

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, t, h, \Lambda) = Z^{-n/2}(\lambda) (\lambda\Lambda)^d \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i/\Lambda\lambda, t(\lambda), h(\lambda)/(\lambda\Lambda)^2, 1). \quad (15.48)$$

Pour  $h \ll \Lambda^2$  la théorie des perturbations a des singularités IR. En choisissant  $\lambda$  solution de l'équation

$$h(\lambda) = (\lambda\Lambda)^2, \quad (15.49)$$

on s'assure que le développement perturbatif dans la théorie effective à l'échelle  $\lambda$  n'est plus singulier dans l'infrarouge.

Il est facile de vérifier que, au moins pour  $t$  petit,  $h \ll \Lambda^2$  implique  $\lambda \rightarrow 0$ . Introduisons alors trois fonctions de la température  $M_0(t)$ ,  $\xi(t)$  et  $K(t)$ :

$$M_0(t) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\zeta(t')}{\beta(t')} dt' \right], \quad (15.50)$$

$$\xi(t) = \Lambda^{-1} t^{1/\varepsilon} \exp \left[ \int_0^t \left( \frac{1}{\beta(t')} - \frac{1}{\varepsilon t'} \right) dt' \right]. \quad (15.51)$$

$$K(t) = M_0(t) [\Lambda \xi(t)]^{d-2} / t = 1 + O(t). \quad (15.52)$$

En résolvant alors (15.49) on trouve

$$\lambda \sim K^{1/2}(t)h^{1/2}\Lambda^{-1}. \quad (15.53)$$

Comme  $t = 0$  est un point fixe IR, la température dépendante d'échelle  $t(\lambda) \rightarrow 0$  et donc les termes dominants dans la limite des petits  $h$  et des petites impulsions peuvent être calculés de manière perturbative. En utilisant les équations (15.47a, b) on obtient les comportements de  $t(\lambda)$  et de  $Z(\lambda)$ :

$$t(\lambda) \sim \lambda^{d-2}tK(t)M_0^{-1}(t) \sim t[K(t)]^{d/2}M_0^{-1}h^{(d-2)/2}\Lambda^{2-d}, \quad (15.54)$$

$$Z(\lambda) \sim M_0^2(t). \quad (15.55)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, t, h, \Lambda) &\sim M_0^{-n}(t)[K(t)h]^{d/2} \\ &\times \tilde{\Gamma}^{(n)}\left(\frac{p_i}{[K(t)h]^{1/2}}, \frac{t[K(t)]^{d/2}}{M_0(t)}\left(\frac{h}{\Lambda^2}\right)^{(d-2)/2}, 1, 1\right). \end{aligned} \quad (15.56)$$

En fait il est facile de vérifier directement, en utilisant l'analyse dimensionnelle sous la forme

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + 2h \frac{\partial}{\partial h} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i} = d,$$

que l'équation (15.56) donne la solution générale de l'équation (15.37).

Appliquons ce résultat à la détermination des singularités près de la courbe de coexistence, c'est-à-dire à  $t$  fixé en dessous de la température critique lorsque le champ magnétique tend vers zéro.

*La courbe de coexistence.* L'aimantation satisfait:

$$M(t, h, \Lambda) \equiv \langle \sigma(x) \rangle = \Lambda^{-\varepsilon} t \frac{\partial \Gamma^{(0)}}{\partial h} = Z^{1/2}(\lambda) M(t(\lambda), 1, 1), \quad (15.57)$$

( $\Gamma^{(0)}$  est l'énergie libre dépendant du champ magnétique). A l'ordre d'une boucle, dans un champ, elle est donnée par:

$$M = 1 - \frac{N-1}{2} \Lambda^{-\varepsilon} t \frac{1}{(2\pi)^d} \int^\Lambda \frac{d^d q}{q^2 + h} + O(t^2).$$

Utilisant alors la relation (15.57) on trouve:

$$M(t, h, \Lambda = 1) = M_0(t) - \frac{N-1}{2} t [K(t)]^{d/2} h^{(d-2)/2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} + O(h, h^{d-2}).$$

Ce résultat montre que  $M_0(t)$  est l'aimantation spontanée et donne une interprétation de la singularité de l'équation d'état sur la courbe de coexistence.

## 15.9 Forme d'échelle des fonctions de corrélation. Domaine critique

Il est commode d'écrire l'équation (15.56) de la manière suivante

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i; t, h, \Lambda) = \xi^{-d}(t) M_0^{-n}(t) F^{(n)}(p_i \xi(t), h/h_0(t)) \quad (15.58)$$

où

$$h_0(t) = t M_0^{-1}(t) \xi^{-d}(t) \Lambda^{2-d}. \quad (15.59)$$

L'équation (15.58) montre que  $\xi(t)$  a, en champ nul, la nature d'une longueur de corrélation.

Pour les fonctions de corrélation connexes la même analyse mène à:

$$W^{(n)}(p_i; t, H, \Lambda) = \xi^{d(n-1)}(t) M_0^n(t) G^{(n)}(p_i \xi(t), h/h_0(t)). \quad (15.60)$$

Calculons l'aimantation induite:

$$M = \Lambda^{2-d} t \frac{\partial \Gamma^{(0)}}{\partial h} = M_0(t) F^{(0)}(h/h_0(t)). \quad (15.61)$$

En inversant cette relation, on obtient la forme d'échelle de l'équation d'état

$$h = h_0(t) f\left(\frac{M}{M_0(t)}\right), \quad (15.62)$$

et les fonction de vertex peuvent donc être écrites en termes de l'aimantation de la manière suivante:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, t, M, \Lambda) = \xi^{-d}(t) M_0^{-n}(t) F^{(n)}(p_i \xi(t), M/M_0(t)). \quad (15.63)$$

Les formes d'échelle (15.62,15.63) sont cohérentes avec les celles obtenues en résolvant les EGR pour la théorie  $(\phi^2)^2$  (cf. section 13.6): l'apparition de deux fonctions différentes  $\xi(t)$  et  $M_0(t)$  correspond à l'existence des deux exposants critiques indépendants  $\nu, \beta$ , dans la théorie des champs  $\phi^4$ . Elles étendent dans la limite des grandes distances, la forme d'échelle des fonctions de corrélation, valables dans la région critique, à toutes les températures en dessous de  $t_c$ . Il y a cependant une différence importante entre les EGR de la théorie  $(\phi^2)^2$  et celles du modèle  $\sigma$ : la théorie  $(\phi^2)^2$  dépend de deux constantes de couplage, le coefficient de  $\phi^2$  qui joue le rôle d'une température et le coefficient de  $(\phi^2)^2$  qui n'a pas d'équivalent ici. Les fonctions de corrélation de la théorie continue  $(\phi^2)^2$  n'ont une forme exacte d'échelle (15.63) qu'au point fixe IR. Au contraire dans le cas du modèle  $\sigma$ , il a été possible de se débarrasser de toutes les corrections d'échelle, liées aux opérateurs inessentiels, ordre par ordre dans la théorie des perturbations. Nous sommes conduits par conséquent à une conclusion remarquable: les fonctions de corrélation du modèle non linéaire de symétrie  $O(N)$

sont identiques aux fonctions de corrélation de la théorie des champs  $(\phi^2)^2$  au point fixe IR. Cette conclusion sera confirmée par l'analyse du comportement d'échelle effectuée dans le développement en  $1/N$ .

*Le domaine critique: exposants critiques.* Etudions maintenant de manière plus précise ce qui se produit lorsque  $t$  s'approche de  $t_c$  (pour  $N > 2$ ). La fonction  $\xi(t)$  diverge comme:

$$\xi(t) \sim \Lambda^{-1} (t_c - t)^{1/\beta'(t_c)}. \quad (15.64)$$

On en conclut que l'exposant  $\nu$  de la longueur de corrélation est donné par

$$\nu = -\frac{1}{\beta'(t_c)}. \quad (15.65)$$

Pour  $d$  près de 2 l'exposant  $\nu$  se comporte donc comme:

$$\nu \sim 1/\varepsilon. \quad (15.66)$$

La fonction  $M_0(t)$  s'annule à  $t_c$ :

$$\ln M_0(t) = -\frac{1}{2} \frac{\zeta(t_c)}{\beta'(t_c)} \ln(t_c - t) + \text{const.} \quad (15.67)$$

Ceci fournit l'exposant  $\beta$ , et donc aussi  $\eta$ , par la relation d'échelle  $\beta = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta)$ :

$$\eta = \zeta(t_c) - \varepsilon. \quad (15.68)$$

A l'ordre dominant on trouve:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{N-2} + O(\varepsilon^2). \quad (15.69)$$

On note enfin que la singularité de  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  provenant du préfacteur  $\xi^{-d} M_0^{-n}$  concorde en effet, près de  $t_c$ , avec le résultat de obtenue dans la théorie  $\phi^4$ .

*La nature de la longueur de corrélation  $\xi(t)$ .* L'échelle de longueur  $\xi(t)$  est une échelle de transition (de "cross-over") entre deux comportements différents des fonctions de corrélation. Pour des distances grandes par rapport à  $\xi(t)$ , le comportement des fonctions de corrélation est gouvernée par les modes de Goldstone et peut donc être déduit du développement perturbatif de basse température. Cependant lorsque  $t$  s'approche de  $t_c$ ,  $\xi(t)$  diverge. Il existe alors des distances grandes par rapport à l'échelle microscopique mais petites par rapport à  $\xi(t)$  pour lesquelles les fonctions de corrélation ont un comportement critique. Dans cette situation on peut construire dans le continu une théorie des champs cohérente à toutes les échelles, le comportement critique étant aussi le comportement à grandes impulsions des fonctions de corrélation renormalisées.

*Commentaires généraux.* A partir des considérations du développement de basse température nous avons pu décrire, pour les théories avec des symétries continues, non seulement la structure complète de la phase de basse température, ce qu'on attendait, mais aussi dans le cas non abélien le comportement critique près de deux dimensions.

Ce qui est surprenant, dans une certaine mesure, dans ce résultat est que la série des perturbations n'est sensible qu'à la structure locale de la sphère  $\mathbf{S}^2 = 1$  tandis que le rétablissement de la symétrie implique la sphère globalement. Ceci explique la particularité du cas abélien  $N = 2$  parce que localement un cercle ne peut pas être distingué d'une ligne droite non compacte. Pour  $N > 2$  la sphère a par contre une courbure caractéristique locale. Des variétés compactes régulières différentes peuvent toutefois avoir la même métrique locale, et par conséquent la même théorie des perturbations. Elles ont toutes la même physique à basse température. Cependant les résultats précédents, concernant le comportement critique, ne sont physiquement pertinents que s'ils sont encore valables lorsque  $\varepsilon$  n'est pas infinitésimal et que  $t$  approche  $t_c$ , une condition qui ne peut pas être vérifiée directement. En particulier le développement de basse température manque en général des termes décroissants comme  $\exp(\text{const.}/t)$  qui peuvent dans certains cas être essentiels pour la physique. Finalement notons qu'une relation directe entre les modèles  $(\phi^2)^2$  et  $\sigma$ , nous sera fournie par le développement pour  $N$  grand. Ceci donne à penser que les considérations précédentes sont valables pour le modèle à  $N$  composantes, au moins pour les  $N$  suffisamment grands. Par contre, la physique pour  $N = 2$  (la transition de phase de Kosterlitz-Thouless) n'est pas bien reproduite, car elle repose sur des effets invisibles dans la théorie des perturbations à basse température. Cardy et Hamber ont spéculé au sujet du flot du GR pour  $N$  près de 2 et pour la dimension  $d$  près de 2, en incorporant phénoménologiquement la transition de Kosterlitz-Thouless dans leur analyse.

### 15.10 Résultats au-delà d'une boucle

Pour faire des calculs explicites des fonctions du GR au-delà d'une boucle, il est commode d'utiliser l'action renormalisée (15.32), la régularisation dimensionnelle et la soustraction minimale. Par exemple la fonction à deux points renormalisée à une boucle s'écrit:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \frac{\mu^\varepsilon}{t} \left( \frac{Zp^2}{Z_t} + hZ^{1/2} \right) + [p^2 + \frac{1}{2}(N-1)h] \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{q^2 + h} + O(t). \quad (15.70)$$

Cette expression de  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  fournit les constantes de renormalisation à l'ordre d'une boucle. Dans le schéma de soustraction minimale, on trouve:

$$\begin{aligned} Z &= 1 + (N-1) \frac{N_d}{\varepsilon} t + O(t^2), \\ Z_t &= 1 + (N-2) \frac{N_d}{\varepsilon} t + O(t^2), \end{aligned} \quad (15.71)$$

où  $N_d$  est le facteur de boucle usuel:

$$N_d = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} = \frac{1}{2\pi} + O(\varepsilon).$$

Les fonctions du GR dans la théorie renormalisée sont:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \varepsilon t \left( 1 + t \frac{d \ln Z_t}{dt} \right)^{-1} = \varepsilon t - \frac{(N-2)}{2\pi} t^2 + O(t^3), \\ \zeta(t) &= \beta(t) \frac{d \ln Z}{dt} = \frac{(N-1)}{2\pi} t + O(t^2). \end{aligned} \quad (15.72)$$

A l'ordre d'une boucle on retrouve, comme attendu, les expressions (15.44). Nous donnons maintenant directement les deux fonctions du GR et les exposants critiques à l'ordre actuellement disponible, c'est-à-dire à l'ordre de quatre boucles, sans présenter les détails du calcul. Par commodité, on change la normalisation de la constante de couplage  $t$

$$\tilde{t} = t N_d. \quad (15.73)$$

A cet ordre  $\tilde{\beta}$ , la fonction  $\beta$  correspondante, s'écrit:

$$\tilde{\beta}(\tilde{t}) = \varepsilon \tilde{t} - (N-2) \tilde{t}^2 \left[ 1 + \tilde{t} + \frac{(N+2)}{4} \tilde{t}^2 + b \tilde{t}^3 \right] + O(\tilde{t}^6), \quad (15.74)$$

où la grandeur  $b$  est une constante:

$$b = -\frac{1}{12} (N^2 - 22N + 34) + \frac{3}{2} \zeta(3)(N-3). \quad (15.75)$$

Rappelons que la valeur de la constante numérique  $\zeta(3)$  (qui ne doit pas être confondue avec la fonction  $\zeta(t)$  de l'équation (15.44b)) est:

$$\zeta(3) = 1.2020569 \dots$$

La dimension anormale de l'opérateur composé de spin  $l$  est donnée par:

$$\zeta_l(\tilde{t}) = a \tilde{t} \left\{ 1 + (N-2) \tilde{t}^2 \left[ \frac{3}{4} + \left( \frac{5-N}{3} + \frac{1+a}{2} \zeta(3) \right) \tilde{t} \right] \right\}, \quad (15.76)$$

où:

$$a = -(N+l-2)l/2. \quad (15.77)$$

Le cas  $l=1$  correspond au champ lui-même. La fonction  $\zeta(t)$ , donnée à l'ordre d'une boucle par l'équation (15.44b), est reliée à  $\zeta_1$  par:

$$\zeta(t) = -2\zeta_1(t).$$

De ces expressions on peut tirer les valeurs des exposants critiques  $\eta$  et  $\nu$ .  
Définissant:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(N-2), \quad (15.78)$$

on obtient:

$$\eta = \tilde{\varepsilon} + (N-1)\tilde{\varepsilon}^2 \left\{ -1 + \frac{N}{2}\tilde{\varepsilon} + \left[ -b + (N-2) \left( \frac{2-N}{3} + \frac{3-N}{4}\zeta(3) \right) \right] \tilde{\varepsilon}^2 \right\} + O(\tilde{\varepsilon}^5), \quad (15.79)$$

$$\nu = \frac{1}{(N-2)\tilde{\varepsilon}} \left\{ 1 - \tilde{\varepsilon} + \frac{(4-N)}{2}\tilde{\varepsilon}^2 + \frac{1}{4} [N^2 - 10N + 18(3-N)\zeta(3)] \tilde{\varepsilon}^3 \right\} + O(\tilde{\varepsilon}^3). \quad (15.80)$$

## 15.11 Dimension 2

La dimension 2 est d'un intérêt particulier du point de vue de la physique des interactions fondamentales. La fonction  $\beta(t)$  du GR est alors:

$$\beta(t) = -\frac{(N-2)}{2\pi} t^2 + O(t^3). \quad (15.81)$$

Le modèle  $\sigma$  non linéaire pour  $N > 2$  est l'exemple le plus simple d'une théorie des champs asymptotiquement libre (dans l'ultraviolet), puisque le premier coefficient de la fonction  $\beta$  est négatif contrairement à la théorie des champs  $\phi^4$ . Par conséquent le comportement des fonctions de corrélation pour les grandes impulsions est entièrement calculable à partir de la théorie des perturbations et des arguments du GR. Cependant, en contre-partie, la théorie est instable dans l'infrarouge et donc, dans un champ  $h$  nul, le spectre de la théorie n'est pas perturbatif. Contrairement aux indications perturbatives, il se compose de  $N$  états massifs dégénérés puisque la symétrie  $O(N)$  n'est pas brisée.

Si l'on définit maintenant une fonction  $\xi(t)$  par:

$$\xi(t) = \mu^{-1} \exp \left[ \int^t \frac{dt'}{\beta(t')} \right], \quad (15.82)$$

on peut intégrer les EGR de la même manière et on trouve que  $\xi(t)$  est la longueur de corrélation en champ nul. De plus on peut utiliser l'expression explicite de la fonction  $\beta$  (équation (15.74)) pour calculer la longueur de corrélation ou la masse physique pour  $t$  petit:

$$\xi^{-1}(t) = m(t) = K\mu t^{-1/(N-2)} e^{-2\pi/[(N-2)t]} (1 + O(t)). \quad (15.83)$$

Cependant la constante d'intégration  $K$ , qui relie la masse physique à l'échelle du GR, ne peut être calculée que par des techniques non perturbatives.

Finalement les formes d'échelles (15.58,15.60) impliquent que le développement perturbatif à champ magnétique fixé est valable, à petites impulsions ou à grandes distances, et pour  $h/h_0(t)$  grand.

*La conjecture d'Elitzur.* L'action avec symétrie  $O(N)$  (15.7) ( $h = 0$ ) possède une sphère de minima classiques dégénérés. Pour définir une théorie des perturbations nous avons été forcés d'ajouter un terme linéaire de brisure de symétrie dans l'action, qui sélectionne un minimum classique particulier. Nous avons affirmé, et c'est facile de le vérifier, que pour  $d \leq 2$  les fonctions de corrélation ont des divergences IR lorsque le paramètre  $h$  tend vers zéro, une propriété qui est cohérente avec l'absence de BSS pour  $d \leq 2$ . Cependant, pour faire des calculs perturbatifs, un autre méthode existe qui sera utilisé systématiquement dans le cas des instantons: on n'introduit pas un terme de brisure de symétrie mais plutôt un ensemble de *coordonnées collectives* qui paramètrent l'ensemble des minima classiques. On développe alors en théorie des perturbations autour d'un minimum fixé, mais on ne traite de manière perturbative que les modes du champ qui ne correspondent pas à une rotation globale. On somme finalement sur tous les minima classiques. Clairement, après cette dernière somme, seules les fonctions de corrélation invariantes sous  $O(N)$  survivent. Elitzur a émis la conjecture, et David l'a démontrée, qu'à deux dimensions les fonctions de corrélation invariantes sous  $O(N)$  obtenues par cette procédure ont un développement régulier de basse température: cela signifie que si l'on calcule les fonctions de corrélation invariantes sous  $O(N)$  par la théorie des perturbations avec un champ non nul et que l'on prend la limite  $h = 0$ , cette limite est finie dans l'infrarouge. La subtilité de ce problème, comparé au cas de l'instanton, est que, dans un volume infini, la singularité à impulsion nulle due au choix d'un minimum classique n'est pas un pôle isolé.

*Le cas abélien  $N = 2$ .* Nous avons vu que le modèle  $\sigma$  non linéaire de symétrie  $O(2)$  est particulier parce que la fonction  $\beta$  du GR se réduit, près de deux dimensions, dans un développement de basse température, au terme dimensionnel  $(d - 2)t$ . Par conséquent les propriétés, du point de vue du GR sont assez différentes de celles des modèles  $\sigma$  non linéaires de symétrie  $O(N)$  génériques pour  $N > 2$ . En particulier à deux dimensions le modèle de symétrie  $O(2)$  n'est pas libre asymptotiquement. L'origine de cette différence se trouve dans la structure locale de la variété: pour  $N = 2$  la sphère  $O(N)$  se réduit à un cercle qui est localement une variété plate, c'est-à-dire qui ne peut être distinguée d'une ligne droite. Par conséquent si l'on paramètre le spin  $\mathbf{S}(x)$  en  $\{\cos \theta(x), \sin \theta(x)\}$ , l'action euclidienne du modèle  $\sigma$  non linéaire en champ nul devient l'action d'un champ libre de masse nulle:

$$\mathcal{H}(\theta) = \frac{\Lambda^{d-2}}{2t} \int d^d x [\partial_\mu \theta(x)]^2.$$

Dans ces conditions la fonction  $\beta$  est identiquement donnée par son terme dimensionnel  $(d - 2)t$  à tous les ordres. Notons cependant que ce ne sont pas les fonctions de corrélation du champ  $\theta$  qui nous intéressent mais plutôt celles de  $\sin\theta$  ou  $\cos\theta$  ou de manière équivalente de  $e^{\pm i\theta}$ . Même dans une théorie des champs libres ces champs doivent être renormalisés et ont donc une dimension anormale non triviale pour toutes les températures  $t$ .

Puisque  $\theta$  est un champ libre de masse nulle la longueur de corrélation reste infinie pour tous les  $t$ . Par contre une simple analyse de haute température du modèle de spins correspondant montre que la longueur de corrélation est finie pour  $t$  assez grand. Une transition de phase à température finie est nécessaire pour expliquer ce phénomène. L'action du modèle  $\sigma$  ne peut par conséquent pas représenter les propriétés à longues distances du modèle sur réseau pour toutes les températures.

La solution de ce paradoxe repose sur la propriété que  $\theta$  est une variable cyclique, une condition qui n'est pas incorporée dans le modèle  $\sigma$  parce qu'elle ne produit que des contributions exponentiellement petites en  $1/t$ , et ne joue pas de rôle à basse température. Quand cette propriété est prise en compte on trouve que le modèle bidimensionnel a une transition de phase, la fameuse transition de phase Kosterlitz-Thouless (KT), qui sépare une phase de longueur de corrélation infinie *sans ordre* à longue portée (la phase de basse température du modèle  $O(2)$ ) d'une phase à longueur de corrélation finie. Cependant, comme la déduction de ces résultats implique de nouvelles considérations techniques, nous allons d'abord établir dans la section suivante un certain nombre de relations entre des modèles de bosons et de fermions, par une technique appelée bosonisation.

## Chapitre 16

### Groupe de renormalisation fonctionnel

Nous voulons décrire dans ce chapitre de façon relativement brève une approche au groupe de renormalisation plus proche des idées de Wilson, dans une forme développée initialement par Wegner. Nous avons choisi la version proposée ultérieurement par Polchinski. Cette approche, dans ces diverses variantes, a conduit à une nouvelle démonstration de la renormalisabilité et a permis de développer de nouvelles méthodes d'approximation, par exemple sous forme de développements en dérivées.

Dans cette approche, un groupe de renormalisation est engendré par l'intégration partielle sur les modes de grande impulsion du champ. Des équations fonctionnelles de groupe de renormalisation (EGR) expriment de façon générale et exacte, dans le cadre de la théorie statistique locale des champs, l'équivalence entre un changement du paramètre d'échelle lié à la physique microscopique, et les paramètres de l'hamiltonien. Il est facile de vérifier que ces équations ne sont fermées que si toutes les interactions locales possibles sont prises en compte.

Il est alors possible d'en déduire diverses EGR pour les fonctions de corrélation, suivant les cas exactes ou seulement exactes à grande distance ou petites impulsions à des corrections décroissant plus vite que toute puissance du paramètre de dilatation près.

Dans ce chapitre nous ne décrivons pas les différents schémas d'approximation dans lesquels les EGR satisfaites par l'hamiltonien ont été résolus, mais montrons explicitement que les EGR permettent aussi un calcul perturbatif des fonctions de groupe de renormalisation comme la fonction  $\beta$  (dont il faut simplement adapter la définition à ce contexte plus général), même si techniquement les méthodes usuelles de théorie quantique des champs basées sur la régularisation dimensionnelle sont beaucoup plus efficaces.

Le point de départ de toutes les équations est une suite d'identités algébriques qui expriment l'invariance de la fonction de partition dans un changement corrélé du propagateur et des autres paramètres de l'hamiltonien.

## 16.1 Variation de l'hamiltonien et invariance de la fonction de partition

Nous démontrons d'abord par des manipulations simples basées sur l'intégrale de champs, l'égalité des fonctions de partitions pour deux hamiltoniens différents. Cette relation peut être comprise comme le résultat d'une intégration partielle sur certaines composantes du champ. Nous en déduisons une condition suffisante qui exprime comment modifier dans une théorie des champs le propagateur et les interactions de façon corrélée pour que la partition de partition reste invariante.

Nous supposons dans tout ce qui suit que la théorie des champs est invariante par translation, sauf indication contraire, et donc que les propagateurs correspondent à des noyaux de la forme  $\Delta(x - y)$ .

### 16.1.1 Intégration partielle

Nous allons d'abord établir une relation simple entre les fonctions de partition correspondant à deux hamiltoniens de la classe considérée en section 9.1.1.

Le premier hamiltonien à un champ  $\phi$  a la forme

$$\mathcal{H}(\phi) = \frac{1}{2} \int dx dy \phi(x) K_{12}(x - y) \phi(y) + \mathcal{V}(\phi), \quad (16.1)$$

où la fonctionnelle  $\mathcal{V}(\phi)$  est développable en puissances du champ  $\phi$ , locale et invariante par translation. À la partie quadratique explicite est associée une fonction à deux points gaussienne, ou propagateur,  $\Delta_{12}$  inverse de  $K_{12}$ :

$$\int dz K_{12}(x - z) \Delta_{12}(z - y) = \delta(x - y).$$

Le deuxième hamiltonien est une fonction de deux champs  $\phi_1, \phi_2$  de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\phi_1, \phi_2) = & \frac{1}{2} \int dx dy [\phi_1(x) K_1(x - y) \phi_1(y) + \phi_2(x) K_2(x - y) \phi_2(y)] \\ & + \mathcal{V}(\phi_1 + \phi_2). \end{aligned} \quad (16.2)$$

De même, nous définissons

$$\int dz K_1(x - z) \Delta_1(z - y) = \delta(x - y), \quad \int dz K_2(x - z) \Delta_2(z - y) = \delta(x - y).$$

Les noyaux  $K_1, K_2$  et  $K_{12}$  sont positifs que toutes les intégrales de champ existent. Les noyaux  $\Delta_1, \Delta_2$  et  $\Delta_{12}$  (donc également positifs) ont la forme des propagateurs régularisés (12.25) de façon à garantir l'existence des intégrales fonctionnelles au moins au sens d'un développement perturbatif en puissances de l'interaction  $\mathcal{V}$ .

Alors si

$$\Delta_{12} = \Delta_1 + \Delta_2, \quad (16.3)$$

les fonctions de partition

$$\mathcal{Z}_{12} = \int [d\phi_1 d\phi_2] e^{-\mathcal{H}(\phi_1, \phi_2)}, \quad (16.4)$$

et

$$\mathcal{Z}(\phi) = \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi)},$$

sont proportionnelles:

$$\int [d\phi_1 d\phi_2] e^{-\mathcal{H}(\phi_1, \phi_2)} = \left( \frac{\det(\Delta_1 \Delta_2)}{\det \Delta_{12}} \right)^{1/2} \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi)}. \quad (16.5)$$

*Notation.* Dans ce qui suit, nous utilisons la notation

$$\int dx dy \phi(x) K(x-y) \phi(y) \equiv (\phi K \phi).$$

*Démonstration.* Pour démontrer l'identité (16.5), on fait le changement de variables  $\{\phi_1, \phi_2\} \mapsto \{\phi_1, \phi = \phi_2 + \phi_1\}$  dans l'intégrale (16.4), qui devient

$$\mathcal{Z}_{12} = \int [d\phi] e^{-\mathcal{V}(\phi)} \int [d\phi_1] \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\phi_1 K_1 \phi_1) + ((\phi - \phi_1) K_2 (\phi - \phi_1))] \right\}.$$

L'intégration gaussienne sur le champ  $\phi_1$  conduit alors au résultat.

Une interprétation de cette identité est alors qu'elle correspond à l'intégration sur une composante du champ  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ , c'est à dire à une intégration partielle sur  $\phi$ .

### 16.1.2 Application

Nous supposons maintenant que le propagateur  $\Delta$  est une fonction  $C^\infty$  à dérivée positive d'un paramètre réel positif  $s$ :

$$\Delta \equiv \Delta(s), \quad \frac{d\Delta}{ds} > 0.$$

Pour  $s > s'$ , nous identifions

$$\Delta_{12} = \Delta(s), \quad \Delta_1 = \Delta(s') \quad \text{et donc} \quad \Delta_2 = \Delta(s, s') = \Delta(s) - \Delta(s') > 0.$$

De même

$$K_{12} = K(s) = \Delta^{-1}(s), \quad K_1 = K(s'), \quad K_2 = K(s, s') = [\Delta(s, s')]^{-1} > 0.$$

Comme tous les noyaux  $K$  sont positifs, toutes les intégrales gaussiennes existent.

Considérons la fonction de partition ( $\phi_1 \mapsto \phi$ )

$$\mathcal{Z}(s') = \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi, s')},$$

avec ( $\phi_2 \mapsto \varphi$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\phi, s') &= \frac{1}{2}(\phi K(s')\phi) + \mathcal{V}(\phi, s'), \\ e^{-\mathcal{V}(\phi, s')} &= \mathcal{N}(s, s') \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi K(s, s')\varphi) - \mathcal{V}(\phi + \varphi) \right] \end{aligned} \quad (16.6)$$

avec

$$\mathcal{N}(s, s') = \left( \frac{\det \Delta(s') \det \Delta(s, s')}{\det \Delta(s)} \right)^{-1/2}.$$

L'équivalence (16.5) entraîne

$$\mathcal{Z}(s') = \int [d\phi] e^{-\frac{1}{2}(\phi K(s)\phi) - \mathcal{V}(\phi)},$$

et donc la fonction de partition  $\mathcal{Z}(s')$  est indépendante du paramètre  $s'$ .

Nous posons

$$s' = s - \sigma, \quad \sigma > 0,$$

et faisons tendre  $\sigma$  vers zéro. Alors

$$\Delta_2 = \sigma \frac{d\Delta(s)}{ds} + O(\sigma^2).$$

Il est commode de poser

$$D(s) = -\frac{d\Delta(s)}{ds}. \quad (16.7)$$

Dans l'intégrant (16.6), le terme quadratique dans le champ  $\varphi$  est alors multiplié par un facteur  $1/\sigma$  et donc seules les valeurs d'ordre  $\sqrt{\sigma}$  du champ  $\varphi$  contribuent à l'intégrale. Nous changeons donc  $\varphi \mapsto \sqrt{\sigma}\varphi$  et développons  $\mathcal{V}(\phi + \sigma^{1/2}\varphi)$  en puissances de  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\phi + \sigma^{1/2}\varphi) &= \mathcal{V}(\phi) + \sigma^{1/2} \int dx \frac{\delta\mathcal{V}(\phi)}{\delta\phi(x)} \varphi(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma \int dx dy \frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \varphi(x)\varphi(y) + O(\sigma^{3/2}). \end{aligned}$$

L'intégrale (16.6) se calcule perturbativement (théorème de Wick). À l'ordre  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{V}(\phi, s')} &= \left( \frac{\det \Delta(s')}{\det \Delta(s)} \right)^{-1/2} e^{-\mathcal{V}(\phi)} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{2}\sigma \int dx dy \left[ \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\phi(x)} \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\phi(y)} - \frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right] \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle \right\} + O(\sigma^2), \end{aligned}$$

où  $\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle$  est la valeur moyenne gaussienne correspondant, à cet ordre, au propagateur  $-D(s)$ . On en déduit

$$\mathcal{V}(\phi, s) = \mathcal{V}(\phi)$$

et l'équation ( $\ln \det = \text{tr} \ln$ )

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{V}(\phi, s) = \frac{1}{2} \int dx dy D(s; x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \text{tr} \ln \Delta. \quad (16.8)$$

Cette équation exprime donc une condition *suffisante* pour que la fonction de partition

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(s) &= \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi, s)}, \\ \mathcal{H}(\phi, s) &= \frac{1}{2} (\phi K(s) \phi) + \mathcal{V}(\phi, s), \end{aligned} \quad (16.9)$$

soit indépendante du paramètre  $s$ .

Cette équivalence relie une modification du propagateur à une modification de l'interaction, tout à fait dans l'esprit du groupe de renormalisation.

*Remarques.*

(i) Si nous posons

$$\mathcal{V}(\phi, s) = \mathcal{V}(\phi = 0, s) + \mathcal{V}'(\phi, s),$$

le terme  $\mathcal{V}(\phi = 0, s)$  se découple et l'équation se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{V}'(\phi, s) = \frac{1}{2} \int dx dy D(s; x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}'}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}'}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}'}{\delta \phi(y)} \right] - (\phi = 0). \quad (16.10)$$

Dans la suite c'est cette forme que nous utiliserons dans les calculs explicites, les soustractions de  $\mathcal{V}(\phi)$  et de l'équation étant implicites pour ne pas alourdir la notation.

(ii) Il est possible de récrire l'équation (16.8) pour l'hamiltonien complet (16.9). On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{H}(\phi, s) &= \frac{1}{2} \int dx dy D(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] + \frac{d}{ds} \text{tr} \ln \Delta \\ &\quad - \int dx dy \phi(x) \frac{d \ln \Delta}{ds}(x-y) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)}. \end{aligned} \quad (16.11)$$

(iii) Pour que  $\mathcal{Z}$  soit indépendant de  $s$ , il suffit que l'équation (16.8) soit vraie en valeur moyenne avec la mesure  $e^{-\mathcal{H}(\phi, s)}$ . Il est donc possible d'ajouter à l'équation des contributions de valeur moyenne nulle pour obtenir d'autres conditions suffisantes.

### 16.1.3 Solution formelle. Interprétation

Réciproquement, il résulte de la méthode de démonstration et de l'identité (16.6) que si l'on se donne la fonctionnelle  $\mathcal{V}(\phi, s)$  pour une valeur initiale  $s_0$  du paramètre  $s$ , la solution de l'équation (16.8) pour tout  $s < s_0$  est donnée par

$$e^{-\mathcal{V}(\phi, s)} = \mathcal{N}(s_0, s) \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi K(s_0, s)\varphi) - \mathcal{V}(\phi + \varphi, s_0) \right]. \quad (16.12)$$

Nous changeons maintenant de variables  $\phi + \varphi \mapsto \varphi$  ce qui donne

$$e^{-\mathcal{V}(\phi, s)} \propto e^{-\frac{1}{2}(\phi K(s_0, s)\phi)} \times \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi K(s_0, s)\varphi) - \mathcal{V}(\varphi, s_0) + (\phi K(s_0, s)\varphi) \right]. \quad (16.13)$$

Cette expression montre que  $\mathcal{V}(\phi, s)$  est reliée à la fonctionnelle génératrice  $\mathcal{W}(J, s)$  des fonctions de corrélation connexes du champ  $\varphi$ :

$$\mathcal{V}(\phi, s) = \frac{1}{2}(\phi K(s_0, s)\phi) - \mathcal{W}(K\phi), \quad (16.14)$$

( $[K\varphi](x) \equiv \int dy K(s_0 - s; x - y)\varphi(y)$ ) avec

$$e^{\mathcal{W}(J, s)} = \int [d\varphi] \exp \left[ -\frac{1}{2}(\varphi K(s_0, s)\varphi) - \mathcal{V}(\varphi, s_0) + \int dx J(x)\varphi(x) \right].$$

Cette forme suggère une autre démonstration et montre que l'équation (16.10) est en fait une équation de champ, comme les calculs explicites de la section 16.3 le confirmeront.

*Autre démonstration de l'équation (16.8).* Partons en effet de la définition

$$e^{\mathcal{W}(J, s)} = \int [d\varphi] \exp \left[ -\mathcal{H}(\varphi, s) + \int dx J(x)\varphi(x) \right],$$

$$\mathcal{H}(\varphi, s) = \frac{1}{2}(\varphi A(s)\varphi) + \mathcal{V}(\varphi),$$

où nous supposons que le noyau  $A$  dépend d'un paramètre  $s$ . Dérivant les deux membres par rapport à  $s$ , on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s} e^{\mathcal{W}(J, s)} = -\frac{1}{2} \int [d\varphi] \int dx dy \varphi(x) \frac{dA(s; x - y)}{ds} \varphi(y) e^{-\mathcal{H}(\varphi, s) + \int dx J(x)\varphi(x)}$$

Posant

$$\frac{dA}{ds} = D(s),$$

et utilisant la remarque habituelle

$$\varphi(x) = \frac{\delta}{\delta J(x)},$$

on peut récrire cette équation

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s} e^{\mathcal{W}(J,s)} = -\frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{dA(s; x-y)}{ds} \frac{\delta}{\delta J(y)} e^{\mathcal{W}(J,s)},$$

et donc enfin

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s} = -\frac{1}{2} \int dx dy \frac{dA(s; x-y)}{ds} \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta J(x) \delta J(y)} + \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta J(x)} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta J(y)} \right].$$

Utilisant la relation (16.14) avec  $A(s) = K(s_0, s)$  pour exprimer  $\mathcal{W}$  en fonction de  $\mathcal{V}$  on retrouve l'équation (16.10).

Notons enfin que les équations (16.8,16.16) peuvent aussi être démontrées à partir des équations de champ quantiques (voir appendice A1.9.1)

#### 16.1.4 Renormalisation du champ

L'intégrale de champ est invariante (à un facteur de normalisation infini près) dans le changement de variables  $\phi \mapsto Z\phi$ . Par ailleurs

$$\left. \frac{\partial}{\partial Z} \mathcal{H}(Z\phi) \right|_{Z=1} = \int dx \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\phi(x)}, \quad (16.15)$$

et donc, comme une intégration par parties le confirme,

$$\begin{aligned} \int [d\phi] \int dx \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\phi(x)} e^{-\mathcal{H}(\phi)} &= - \int [d\phi] \int dx \phi(x) \frac{\delta}{\phi(x)} e^{-\mathcal{H}(\phi)} \\ &= \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi)} \int dx \frac{\delta}{\phi(x)} \phi(x) \propto \mathcal{Z}, \end{aligned}$$

où la constante de proportionnalité n'est bien définie que sur un réseau.

Si la variation du paramètre  $s$  est combinée à une renormalisation simultanée du champ, l'équation de flot (16.11) est modifiée par l'addition d'un terme proportionnel à (16.15). Nous obtenons ainsi une famille de conditions suffisantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{H}(\phi, s) &= \frac{1}{2} \int dx dy D(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] + \frac{d}{ds} \text{tr} \ln \Delta \\ &\quad - \int dx dy \phi(x) \frac{d \ln \Delta}{ds}(x-y) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} + \frac{1}{2} \eta \int dx \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)}, \quad (16.16) \end{aligned}$$

où  $\eta$  est une fonction arbitraire de  $s$ .

Comme nous l'avons montré plus haut, le coefficient (16.15) de  $\eta$  est une dérivée par rapport au champ (à une constante additive près). Sa valeur moyenne avec la mesure  $e^{-\mathcal{H}(\phi,s)}$  est nulle. Par conséquent la condition (16.11) reste vraie en moyenne ce qui assure l'indépendance de la fonction de partition proprement normalisée.

## 16.2 Intégration partielle sur les modes de grande impulsion et EGR

L'équivalence (16.5) et l'équation (16.8), qui en est conséquence, conduisent à des équations de groupe de renormalisation. En effet, comme nous allons le vérifier, il est possible de formuler l'intégration partielle sur les modes de grande impulsion du champ, ce qui dans l'espace direct correspond à une intégration sur des degrés de liberté de courte distance, en terme de l'équivalence (16.5).

Dans ce qui suit, nous prenons pour  $\Delta$  un propagateur critique. Une déviation possible à la théorie critique est incluse dans  $\mathcal{V}(\phi)$ .

Le propagateur (fonction à deux points gaussienne). Il est commode d'écrire les composantes de Fourier  $\tilde{\Delta}(k)$  du propagateur regularisé  $\Delta$  sous la forme

$$\tilde{\Delta}_\Lambda(k) = \frac{C(k^2/\Lambda^2)}{k^2}, \quad (16.17)$$

où la fonction  $C(t)$  est régulière pour  $t \geq 0$ , positive, décroissante, tend vers 1 pour  $t \rightarrow 0$  et tend vers zéro plus vite que toute puissance pour  $t \rightarrow \infty$  et où le paramètre  $\Lambda$  peut être interprété comme l'inverse de l'échelle microscopique. Les composantes de Fourier du champ correspondant à des impulsions plus grandes que  $\Lambda$  contribuent très peu à l'intégrale de champ.

### 16.2.1 Equations de groupe de renormalisation

Nous identifions maintenant dans l'équation (16.9) le paramètre  $s$  avec  $\ln \Lambda$ , de façon à ce qu'une variation du paramètre  $\Lambda$  corresponde à une dilatation, et exprimons que la fonction de partition est indépendante de  $\ln \Lambda$ . L'équation (16.10) devient

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{V}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right], \quad (16.18)$$

où la transformée de Fourier de  $D_\Lambda(x)$  est donnée par

$$\tilde{D}_\Lambda(k) = -\Lambda \frac{\partial \tilde{\Delta}_\Lambda(k)}{\partial \Lambda} = \frac{2}{\Lambda^2} C'(k^2/\Lambda^2). \quad (16.19)$$

Nous notons la propriété essentielle du propagateur  $-\tilde{D}$ : *il n'a pas de pôle à  $k = 0$  et donc n'est pas critique*. La fonction

$$D_\Lambda(x) = -\Lambda \frac{d\tilde{\Delta}_\Lambda(x)}{d\Lambda} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{ipx} \tilde{D}_\Lambda(p) = \Lambda^{d-2} D_1(\Lambda x), \quad (16.20)$$

décroît donc pour  $|x| \rightarrow \infty$  plus vite que toute puissance si  $C(t)$  est  $C^\infty$ , exponentiellement si  $C(t)$  est analytique, et n'induit que des corrélations à courte portée qui n'affectent pas directement la physique de longue distance.

Ces équations étant exactes, on parle ici aussi de *groupe de renormalisation exact* (GRE).

On note une propriété essentielle: comme  $D_\Lambda(x)$  est une fonction à décroissance rapide, si initialement  $\mathcal{V}(\phi)$  est local, il le reste comme cela apparaîtra plus clairement quand nous développerons cette équation en puissances de  $\phi$ .

Comme cette équation peut aussi être démontrée à partir des équations de champ quantiques (voir appendice A1.9.1), ici l'intégration partielle sur les modes de grande impulsion n'implique pas de perte d'information à la différence de ce qui se passerait sur un réseau avec l'intégration sur les modes de courte distance.

*Remarques.*

(i) Il est facile de linéariser l'équation (16.18). On pose

$$\mathcal{V}(\phi) = -\ln \mathcal{R}(\phi). \quad (16.21)$$

L'équation (16.18) devient alors

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{R}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \frac{\delta^2 \mathcal{R}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}. \quad (16.22)$$

On peut se demander pourquoi ne pas utiliser cette équation beaucoup plus simple car linéaire. La raison est la suivante: alors que  $\mathcal{V}(\phi)$  est par hypothèse une fonctionnelle locale du champ, ce n'est pas le cas de  $\mathcal{R}(\phi)$  et donc il devient difficile d'exprimer la condition de localité. On verra plus loin comment cette condition de localité intervient dans la solution perturbative de l'équation (16.18).

(ii) Les équations (16.18,16.23) se distinguent de l'équation générale (9.18) introduite au chapitre 9 par la propriété que la paramètre d'échelle  $\Lambda$  y figure explicitement à travers la fonction  $D_\Lambda$ . Nous allons éliminer plus loin cette dépendance explicite.

(iii) Pour étudier l'existence de points fixes il faut se donner une interaction initiale critique  $\mathcal{V}_0(\phi)$  à l'échelle  $\Lambda_0$  et utiliser l'équation (16.18) pour calculer l'interaction effective  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  à l'échelle  $\Lambda \ll \Lambda_0$ . Un point fixe est défini par la propriété que  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$ , après une renormalisation du champ  $\phi$  convenablement choisie (ce qui conduit à l'équation (16.16)), tend vers une limite.

### 16.2.2 Représentation de Fourier

En termes des composantes de Fourier  $\tilde{\phi}(k)$  du champ,

$$\phi(x) = \int d^d k e^{ikx} \tilde{\phi}(k) \Leftrightarrow \tilde{\phi}(k) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \phi(x),$$

la dérivée fonctionnelle devient (dérivée en chaîne)

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(k)}.$$

Introduisant cette représentation dans l'équation (16.18), on trouve

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{V}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(k) \delta \tilde{\phi}(-k)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(-k)} \right]. \quad (16.23)$$

Dans les équations (16.18,16.23) nous avons de nouveau soustrait implicitement à  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  et aux équations leurs valeurs à  $\phi = 0$ .

Dans cette équation la localité se traduit par la régularité des composantes de Fourier. Si les coefficients du développement de  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  en puissances de  $\tilde{\phi}$  sont des fonctions régulières, après factorisation de la fonction  $\delta$ , pour la valeur initiale de  $\Lambda$ , ils le restent parce que  $\tilde{D}$  est une fonction régulière.

Enfin l'équation (16.11) pour l'hamiltonien complet exprimé en termes des composantes de Fourier,

$$\mathcal{H}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{2} (2\pi)^d \int d^d k \tilde{\phi}(k) \tilde{\Delta}_\Lambda^{-1}(k) \tilde{\phi}(-k) + \mathcal{V}(\phi, \Lambda), \quad (16.24)$$

prend la forme (omettant le terme indépendant de  $\phi$ )

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{H}(\phi, \Lambda) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(k) \delta \tilde{\phi}(-k)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(-k)} \right] \\ &\quad - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \Lambda \frac{d \ln \tilde{\Delta}_\Lambda(k)}{d\Lambda} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \tilde{\phi}(k). \end{aligned} \quad (16.25)$$

### 16.2.3 Développement en puissances du champ

Nous notons  $V^{(n)}$  et  $\tilde{V}^{(n)}$  les coefficients du développement de  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  en puissances de  $\phi(x)$  et  $\tilde{\phi}(p)$ , la transformée de Fourier du champ, respectivement:

$$\mathcal{V}(\phi, \Lambda) = \sum_n \frac{1}{n!} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (16.26)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \int \prod_i d^d p_i \tilde{\phi}(p_i) (2\pi)^d \delta(p_1 + \dots + p_n) \tilde{V}^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \quad (16.27)$$

L'équation (16.23) peut alors être exprimée en termes de ces composantes:

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} V^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \left[ V^{(n+2)}(x_1, x_2, \dots, x_n, x, y) \right. \\ &\quad \left. - \sum_I V^{(l+1)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}, x) V^{(n-l+1)}(x_{i_{l+1}}, \dots, x_{i_n}, y) \right], \end{aligned} \quad (16.28)$$

où l'ensemble  $I \equiv \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  parcourt tous les sous-ensembles distincts de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

En représentation de Fourier

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{V}^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k) - \frac{1}{2} \sum_I \tilde{D}_\Lambda(p_0) \tilde{V}^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0) \tilde{V}^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0), \quad (16.29)$$

où l'impulsion  $p_0$  est déterminée par la conservation de l'impulsion totale.

Nous remarquons qu'une conséquence de ces équations est que, même si l'interaction initiale à l'échelle initiale  $\Lambda_0$  est proportionnelle à  $u\phi^4$ , l'intégration des EGR engendre une interaction locale générale car toutes les fonctions  $\tilde{V}^{(n)}$  sont couplées. Toutefois, dans l'esprit des méthodes perturbatives de la théorie des champs, il est possible de résoudre l'équation (16.18) dans un développement en puissances de  $u$  avec l'ansatz que les termes de  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  quadratiques et quartiques in  $\phi$  sont d'ordre  $u$  et le terme général de degré  $2n$  d'ordre  $u^{n-1}$ . En section 16.3 nous calculons les premiers termes explicitement.

#### 16.2.4 Fonctions de corrélation

Pour engendrer les fonctions de corrélation, nous ajoutons un terme de champ externe à l'interaction  $\mathcal{V}(\phi)$ :

$$\mathcal{V}(\phi) \mapsto \mathcal{V}(\phi) - \int dx H(x)\phi(x).$$

Toutefois, l'équation (16.18) montre alors que  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$  devient en général une fonctionnelle compliquée du champ externe  $H(x)$ .

Une solution possible à ce problème est la suivante: on prend un champ externe dont les composantes de Fourier  $\tilde{H}(k)$  s'annulent pour  $k^2 \geq \Lambda^2$ , ainsi qu'une fonction  $\tilde{D}_\Lambda(k)$  qui s'annule identiquement pour  $k^2 \leq \Lambda^2$ . Ceci implique que  $C'(t)$  s'annule identiquement pour  $t \leq 1$ . Alors  $\int dx H(x)\phi(x)$  ne contribue pas au membre de droite de l'équation (16.18).

Nous notons, toutefois, qu'alors les transformations de groupe de renormalisation sont telles que les fonctions de corrélation correspondant à des hamiltoniens  $\mathcal{H}(\phi)$  associés à des échelles  $\Lambda$  différentes ne coïncident que quand toutes les impulsions sont inférieures à l'échelle  $\Lambda$  la plus petite. Les différences entre ces fonctions de corrélation sont des fonctions indéfiniment différentiables et donc, après transformation de Fourier, des fonctions décroissant à grande distance plus vite que toute puissance dans une dilatation des variables d'espace, ainsi qu'il avait été supposé dans l'équation (9.6).

De plus la fonction  $C(t)$  ne peut pas être analytique mais seulement indéfiniment dérivable, ce qui affecte le domaine critique  $\xi < \infty$ , et la définition de l'universalité  $y$  devient plus subtile. Enfin de telles fonctions se prêtent mal à des calculs explicites.

Il est aussi possible de choisir des fonctions  $C(t)$  de type analytique, et d'étudier les équations ainsi obtenues. Le problème évident est que si nous ajoutons un terme linéaire en  $\phi$  par exemple dans l'équation (16.25), le membre de droite va impliquer une contribution de la forme

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \tilde{H}(-k).$$

Par itération, l'équation va engendrer une fonctionnelle générale de  $H, \phi$  paire en  $\{H, \phi\} \mapsto \{-H, -\phi\}$ .

Nous remarquons cependant que ce terme est proportionnel à une dérivée fonctionnelle de  $\mathcal{H}$  dont la valeur moyenne avec la mesure  $e^{-\mathcal{H}(\phi)}$  est nulle. Cela suggère de modifier l'équation en ajoutant une contribution de valeur moyenne nulle. Si nous substituons alors

$$\mathcal{H}(\phi) \mapsto \mathcal{H}(\phi, H) = \mathcal{H}(\phi) - \int dx dy \left[ \phi(x) \mathcal{K}(x-y) H(y) - \frac{1}{2} H(x) U(x-y) H(y) \right]$$

et utilisons

$$\left\langle \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, H)}{\delta \phi(y)} \right\rangle_{\mathcal{H}(\phi, H)} = 0 = \left\langle \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(y)} - \int dz \mathcal{K}(y-z) H(z) \right\rangle_{\mathcal{H}(\phi, H)},$$

pour éliminer le terme indésirable, nous voyons que la forme est stable, et

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{\mathcal{K}}(k, \Lambda) &= -\Lambda \frac{\partial \ln \tilde{\Delta}_\Lambda(k)}{\partial \Lambda} \tilde{\mathcal{K}}(k, \Lambda) \\ \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{U}(k, \Lambda) &= \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{\mathcal{K}}^2(k, \Lambda). \end{aligned} \quad (16.30)$$

Avec les conditions aux limites

$$\tilde{\mathcal{K}}(k, \Lambda_0) = 1, \quad \tilde{U}(k, \Lambda_0) = 0,$$

la solution de la première équation est

$$\tilde{\mathcal{K}}(k, \Lambda) = \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k) / \tilde{\Delta}_\Lambda(k),$$

une fonction régulière de  $k$  pour  $k = 0$ . Enfin

$$\tilde{U}(k, \Lambda) = \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}^2(k) / \tilde{\Delta}_\Lambda(k) - \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k).$$

En présence d'un renormalisation du champ, un terme s'ajoute à l'équation (16.30)

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{\mathcal{K}}(k, \Lambda) = -\Lambda \frac{\partial \ln \tilde{\Delta}_\Lambda(k)}{\partial \Lambda} \tilde{\mathcal{K}}(k, \Lambda) + \frac{1}{2} \eta \tilde{\mathcal{K}}(k, \Lambda).$$

Nous rappelons ici que la constante  $\eta$  dépend de  $\Lambda$  à travers l'hamiltonien. Introduisant la fonction  $Z(\Lambda)$  solution de

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} Z(\Lambda) = \eta(\Lambda) Z(\Lambda), \quad Z(\Lambda_0) = 1,$$

et donc

$$\ln Z(\Lambda) = \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} \eta(\Lambda') \frac{d\Lambda'}{\Lambda'},$$

nous pouvons écrire la solution

$$\tilde{\mathcal{K}}(k, \Lambda) = \sqrt{Z(\Lambda)} \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k) / \tilde{\Delta}_{\Lambda}(k). \quad (16.31)$$

### 16.3 Solution perturbative: Théorie $\phi^4$

Nous voulons d'abord montrer ici comment les équations (16.28) ou (16.29) peuvent être résolues de façon perturbative. Nous prenons l'exemple de la théorie  $\phi^4$  et nous allons poursuivre le calcul jusqu'à l'ordre  $u^2$  car l'algèbre de ces calculs nous sera utile plus loin.

*Conditions aux limites.* Nous supposons que l'hamiltonien à l'échelle  $\Lambda_0$  est de la forme

$$\mathcal{V}(\phi, \Lambda_0) = \frac{1}{4!} u \int d^d x \phi^4(x) + \frac{1}{2!} r_c(\Lambda_0, u) \int d^d x \phi^2(x),$$

où la constante  $r_c(\Lambda_0, u)$  est ajustée pour que la théorie initiale à l'échelle  $\Lambda_0$  soit critique:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p=0) = 0.$$

En particulier, à l'ordre  $u^2$ , on trouve

$$\begin{aligned} r_c(\Lambda_0, u) = & -\frac{1}{2} u \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k) + \frac{1}{6} u^2 \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \\ & \times \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k_1) \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k_2) \tilde{\Delta}_{\Lambda_0}(k_1 + k_2) + O(u^3). \end{aligned} \quad (16.32)$$

Nous prenons comme ansatz à l'ordre  $u$ :

$$\mathcal{V}(\phi, \Lambda) = \frac{1}{4!} u \int d^d x \phi^4(x) + \frac{1}{2!} r_{c1} u \int d^d x \phi^2(x) + O(u^2),$$

et utilisons les EGR sous la forme (16.28).

L'équation pour le coefficient de  $\phi\phi$  à l'ordre  $u$  est compatible avec cet ansatz:

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} r_{c1}(\Lambda) = \frac{1}{2} D_{\Lambda}(0)$$

On peut intégrer, utilisant (16.19) et la condition de criticalité à  $\Lambda = \Lambda_0$ :

$$r_{c1}(\Lambda) = -\frac{1}{2}\Delta_\Lambda(0).$$

Nous reconnaissons que cette solution correspond à la condition de criticalité à l'échelle  $\Lambda$ .

L'équation satisfaite par  $V^{(4)}$  à l'ordre  $u^2$  fait intervenir le terme d'ordre  $u^2$  de  $V^{(6)}$  qui s'exprime uniquement en termes de  $V^{(4)}$  à l'ordre  $u$ , en effet ( $\mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2, \dots\}$ )

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V^{(6)}(\mathbf{x}, \Lambda) = -u^2 \frac{6!}{2(3!)^2} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \phi^3(x) \phi^3(y) + O(u^3).$$

*Le vertex à six points.* En composantes de Fourier, notant  $\tilde{V}_2^{(6)}$  le coefficient de  $u^2$ ,

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}_2^{(6)}(p_1, \dots, p_6) = - \sum_I \tilde{D}_\Lambda(p_1 + p_{i_1} + p_{i_2}),$$

où  $I$  représente les 10 sous-ensembles appartenant à  $\{2, 3, \dots, 6\}$ . Pour intégrer cette équation nous introduisons la fonction

$$R_\Lambda(x) = \Delta_{\Lambda_0}(x) - \Delta_\Lambda(x). \quad (16.33)$$

Cette fonction satisfait

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} R_\Lambda = D_\Lambda, \quad R_{\Lambda_0} = 0.$$

La propriété essentielle de sa transformée de Fourier

$$\tilde{R}_\Lambda(k) = \frac{1}{k^2} [C(k^2/\Lambda_0^2) - C(k^2/\Lambda^2)],$$

est d'être régulière à  $k = 0$ .

L'intégration alors est simple et donne

$$\int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V^{(6)}(\mathbf{x}, \Lambda) = -\frac{6!}{2(3!)^2} u^2 \int d^d x d^d y R_\Lambda(x-y) \phi^3(x) \phi^3(y) + O(u^3),$$

En représentation de Fourier

$$\tilde{V}_2^{(6)}(p_i, \Lambda) = - \sum_I \tilde{R}_\Lambda(p_1 + p_{i_1} + p_{i_2}).$$

La fonction  $\tilde{V}^{(6)}$  est donc aussi régulière à  $\mathbf{p} = 0$  et l'hamiltonien reste bien local.

*Le vertex à quatre points.* Ceci permet d'écrire l'équation satisfaite par  $V_2^{(4)}$ , le coefficient de  $V^{(4)}$  à l'ordre  $u^2$ :

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \frac{1}{4!} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V_2^{(4)}(\mathbf{x}, \Lambda) &= - \int d^d x d^d y R_\Lambda(x-y) \\ &\times \left[ \frac{1}{8} D_\Lambda(x-y) \phi^2(x) \phi^2(y) + \frac{1}{12} D_\Lambda(0) \phi(x) \phi^3(y) \right] + \frac{1}{12} \Delta_\Lambda(0) \\ &\times \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \phi(x) \phi^3(y), \end{aligned}$$

où plus explicitement en représentation de Fourier

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}_2^{(4)}(\mathbf{p}, \Lambda) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{V}_2^{(6)}(p_1, p_2, \dots, p_4, k, -k) \\ &+ \frac{1}{2} \Delta_\Lambda(0) \sum_i \tilde{D}_\Lambda(p_i) \\ &= - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \left[ \tilde{R}_\Lambda(k + p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \left[ -D_\Lambda(0) \tilde{R}_\Lambda(p_i) + \Delta_\Lambda(0) \tilde{D}_\Lambda(p_i) \right]. \end{aligned}$$

De nouveau l'intégration est simple, et donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{4!} \int \prod_i d^d x_i \phi(x_i) V_2^{(4)}(\mathbf{x}, \Lambda) &= -\frac{1}{16} \int d^d x d^d y R_\Lambda^2(x-y) \phi^2(x) \phi^2(y) \\ &+ \frac{1}{12} \Delta_\Lambda(0) \int d^d x d^d y R_\Lambda(x-y) \phi(x) \phi^3(y). \end{aligned}$$

En représentation de Fourier

$$\tilde{V}_2^{(4)}(p_i, \Lambda) = -\frac{1}{2} \left[ \bar{B}_\Lambda(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} \right] + \frac{1}{2} \Delta_\Lambda(0) \sum_{i=1}^4 \tilde{R}_\Lambda(p_i)$$

avec

$$\bar{B}_\Lambda(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{R}_\Lambda(k) \tilde{R}_\Lambda(p-k).$$

On vérifie que dans la limite  $\Lambda_0/\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{V}^{(4)}(p_i, \Lambda)$  diverge logarithmiquement pour  $d = 4$ , ce qui correspond à la renormalisation du coefficient de  $\phi^4$  à l'ordre d'une boucle.

Le coefficient  $\tilde{V}^{(2)}(p, \Lambda)$  du terme quadratique à l'ordre  $u^2$ . Terminons cet exercice en calculant le coefficient  $\tilde{V}_2^{(2)}$  de  $\tilde{V}^{(2)}$  d'ordre  $u^2$ . Il satisfait

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}_2^{(2)}(p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{V}_2^{(4)}(p, -p, k, -k) - \frac{1}{4} \tilde{D}_\Lambda(p) \Delta_\Lambda^2.$$

La valeur à  $p = 0$  donne la condition de criticalité

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{V}_2^{(2)}(0) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \tilde{V}_2^{(4)}(0, 0, k, -k) - \frac{1}{4} \tilde{D}_\Lambda(0) \Delta_\Lambda^2.$$

Nous connaissons la valeur de  $\tilde{V}^{(2)}(0) = r_c(\Lambda, u)$  *a priori* par la théorie des perturbations ordinaires. Il y a d'une part la contribution (16.32) à l'échelle  $\Lambda$  à laquelle il faut ajouter les contributions provenant de  $V_2^{(4)}$  et  $V_2^{(6)}$ . On trouve donc

$$\begin{aligned} r_{c2}(\Lambda) &= \frac{1}{6} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_2) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1 + k_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_\Lambda(k) \tilde{V}_2^{(4)}(0, 0, k, -k) \\ &\quad - \frac{1}{8} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{V}_2^{(6)}(0, 0, k_1, -k_1, k_2, -k_2) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_2). \end{aligned} \quad (16.34)$$

On vérifiera que  $r_{c2}(\Lambda)$  satisfait bien l'équation de flot. L'expression peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} r_{c2}(\Lambda) &= \frac{1}{6} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \left[ -\tilde{R}_\Lambda(k_1) \tilde{R}_\Lambda(k_2) \tilde{R}_\Lambda(k_1 + k_2) + \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_2) \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1 + k_2) \right] - \frac{1}{4} \Delta_\Lambda^2(0) \tilde{R}_\Lambda(0) + \frac{1}{4} \Delta_\Lambda(0) \bar{B}_\Lambda(0). \end{aligned} \quad (16.35)$$

Enfin cette condition au limite permet de déterminer  $\tilde{V}_2^{(2)}(p)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2^{(2)}(p) &= \frac{1}{6} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \left[ -\tilde{R}_\Lambda(k_1) \tilde{R}_\Lambda(k_2) \tilde{R}_\Lambda(p + k_1 + k_2) + \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1) \tilde{\Delta}_\Lambda(k_2) \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{\Delta}_\Lambda(k_1 + k_2) \right] - \frac{1}{4} \Delta_\Lambda^2(0) \tilde{R}_\Lambda(p) + \frac{1}{4} \Delta_\Lambda(0) \bar{B}_\Lambda(0). \end{aligned} \quad (16.36)$$

*Remarque.* Il résulte de la discussion de la fin de la section 16.1.3 que les mêmes résultats peuvent être obtenues en calculant perturbativement des fonctions de corrélation connexes avec l'interaction  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda_0)$  et le propagateur  $R$ . L'importance du calcul précédent réside dans la vérification de la propriété que ces EGR exactes, avec des conditions aux limites, déterminent bien la fonctionnelle  $\mathcal{V}(\phi, \Lambda)$ .

## 16.4 Groupe de renormalisation: Forme standard

*Renormalisation du champ.* L'étude empirique nous a montré que pour que le groupe de renormalisation puisse avoir un point fixe, une renormalisation du champ était nécessaire. Pour passer de l'échelle  $\Lambda$  à  $\Lambda(1 + \sigma)$  il faut donc faire la transformation  $\phi \mapsto \phi(1 + \frac{1}{2}\sigma\eta)$ . L'équation (16.18) est ainsi modifiée et prend une forme équivalente à l'équation (16.16):

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{V}(\phi, \Lambda) &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D_\Lambda(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta \int dx \phi(x) \Delta_\Lambda^{-1} \phi(x) + \frac{1}{2} \eta \int dx \phi(x) \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)}, \end{aligned} \quad (16.37)$$

ou, en termes des composantes de Fourier,

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{V}(\phi, \Lambda) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_\Lambda(k) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(k) \delta \tilde{\phi}(-k)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(k)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(-k)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta \int dk \tilde{\phi}(k) \Delta^{-1}(k) \tilde{\phi}(-k) + \frac{1}{2} \eta \int dk \tilde{\phi}(k) \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \tilde{\phi}(k)}. \end{aligned} \quad (16.38)$$

La fonction  $\eta$  est *a priori* arbitraire, avec cependant la restriction, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 9, que la fonction  $\eta$  ne dépende de  $\Lambda$  qu'à travers  $\mathcal{H}(\phi, \Lambda)$ . Cet arbitraire va nous permettre de trouver des transformations qui ont des points fixes.

*EGR en composantes: forme standard.* Pour ramener ces équations à la forme markovienne standard (9.18) il faut éliminer la dépendance explicite en  $\Lambda$  dans le membre de droite. Nous posons donc, pour  $n \neq 2$ ,

$$\begin{aligned} V^{(n)}(x_i, \Lambda) &= \Lambda^{n(d+2)/2} \mathcal{H}^{(n)}(\Lambda x_i, \Lambda), \\ \tilde{V}^{(n)}(p_i, \Lambda) &= \Lambda^{d-n(d-2)/2} \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i/\Lambda, \Lambda). \end{aligned}$$

Prenant alors  $\lambda = \Lambda_0/\Lambda$  comme paramètre d'échelle, et donc

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} = -\lambda \frac{d}{d\lambda},$$

nous trouvons des équations sous une forme standard ( $D_{\Lambda=1} \equiv D$ ) ( $n \neq 2$ ):

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}^{(n)}(x_i, \lambda) &= \left( \frac{1}{2} n(d+2-\eta) + \sum_{j,\mu} x_j^\mu \frac{\partial}{\partial x_j^\mu} \right) \mathcal{H}^{(n)}(x_i, \lambda) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \left[ \mathcal{H}^{(n+2)}(x_1, x_2, \dots, x_n, x, y) \right. \\ &\quad \left. - \sum_I \mathcal{H}^{(l+1)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}, x) \mathcal{H}^{(n-l+1)}(x_{i_{l+1}}, \dots, x_{i_n}, y) \right], \end{aligned} \quad (16.39)$$

où nous avons noté  $x^\mu$  les composantes du vecteurs  $x$ . En représentation de Fourier ces équations prennent la forme

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i, \lambda) &= \left( d - \frac{1}{2}n(d-2+\eta) - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i, \lambda) \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_I \tilde{D}(p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0). \end{aligned} \quad (16.40)$$

Pour  $n = 2$ , il faut distinguer les composantes de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{V}$ . Nous posons donc, par exemple,

$$\tilde{V}^{(2)}(p, \Lambda) = \Lambda^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p/\Lambda, \Lambda), \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p, \Lambda) = \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p, \Lambda) + \tilde{\Delta}^{-1}(p). \quad (16.41)$$

Dans les deux cas on trouve un terme supplémentaire dans l'équation

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p, \lambda) &= \left( 2 - \eta - \sum_{\mu} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p, \lambda) - \eta \tilde{\Delta}^{-1}(p) \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k) + \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p) \right)^2, \end{aligned} \quad (16.42)$$

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p, \lambda) &= \left( 2 - \eta - \sum_{\mu} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p, \lambda) - 2\tilde{D}(p) \tilde{\Delta}^{-1}(p) \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p, \lambda) \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k, \lambda) + \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p, \lambda) \right)^2. \end{aligned} \quad (16.43)$$

Enfin notons

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\lambda) = -\eta[\mathcal{V}],$$

où la comparaison avec l'équation (9.19) montre que  $Z(\lambda)$  est la renormalisation du champ au delà de la renormalisation correspondant au point fixe gaussien.

*Forme fonctionnelle.* Nous avons donné ci-dessous les équations satisfaites par les composantes. Elles peuvent se résumer en une forme globale:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}(\phi, \lambda) &= - \int d^d x \frac{\delta \mathcal{H}(\phi, \lambda)}{\delta \phi(x)} \left[ \frac{1}{2}(d-2+\eta) + \sum_{\mu} x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \phi(x) \\ &- \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(y)} \right] \\ &- \int d^d x d^d y L(x-y) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi(x)} \phi(y) \end{aligned} \quad (16.44)$$

avec

$$L(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{ikx} \tilde{D}(k) \tilde{\Delta}^{-1}(k).$$

## 16.5 Dimension 4

Nous avons établi des EGR extrêmement générales. Nous étudions maintenant de nouveau l'exemple de la théorie  $\phi^4$  dans un cadre perturbatif. Notre but est de montrer explicitement de quelle manière le GR fonctionnel permet de retrouver les résultats obtenus au chapitre 10 dans le cadre du GR perturbatif asymptotique.

Nous commençons par la dimension 4, où le point fixe gaussien est marginalement stable. Les hypothèses perturbatives et les calculs ont beaucoup de points communs avec ceux de la section 16.3.

*Conditions de renormalisation.* En dimension 4, une théorie non triviale peut être obtenue comme une fonction du paramètre  $g(\lambda)$  défini, par exemple, comme la valeur de  $\tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p_i, \lambda)$  pris pour  $p_i = 0$ :

$$g(\lambda) \equiv \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p_i = 0, \lambda). \quad (16.45)$$

Toutes les autres interactions sont alors déterminées perturbativement comme fonction de  $g$ , en les supposant au moins d'ordre  $g^2$ , en résolvant perturbativement les autres équations de flot avec des conditions aux limites appropriées, par la méthode expliquée en fin de section 9.6.2 et comme nous l'avons fait en section 16.3. On supprime ainsi toutes les corrections dues aux opérateurs inessentiels, ne conservant que l'effet de l'opérateur marginal. Dans ces conditions toutes les interactions deviennent des fonctions implicites de  $\lambda$  à travers  $g(\lambda)$  qui satisfait une équation unique (équation (9.53)):

$$\lambda \frac{dg}{d\lambda} = -\beta(g(\lambda)), \quad (16.46)$$

avec, comme nous l'avons déjà vu,  $\beta(g) = O(g^2)$ .

La fonction  $\eta(g)$  est alors déterminée par la condition

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(p; g) \right|_{p=0} = 1 \Rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial p^2} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) \right|_{p=0} = 0, \quad (16.47)$$

qui supprime l'opérateur redondant qui correspond à un changement de normalisation du champ.

Les deux conditions (16.45,16.47) jouent le rôle des conditions de renormalisation dans la théorie de la renormalisation habituelle (cf. section 13.2).

*EGR: Autre forme.* Dans l'équation (16.40), nous exprimons la dérivée par rapport à  $\ln \lambda$  en fonction de la dérivée par rapport à  $g$  et la fonction  $\beta$ , utilisant la définition (16.46),

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} = -\beta(g) \frac{d}{dg},$$

et obtenons pour  $d = 4$  ( $n \neq 2$ )

$$\begin{aligned} \beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; g) &= \left( n - 4 + \frac{1}{2} n \eta(g) + \sum_{j, \mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; g) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k; g) \\ &- \frac{1}{2} \sum_I \tilde{D}(p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0; g) \tilde{\mathcal{H}}^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0; g). \end{aligned} \quad (16.48)$$

Pour  $n = 2$ , l'équation devient

$$\begin{aligned} \beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) &= \left( -2 + \eta(g) + \sum_{\mu} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) + \eta(g) \Delta^{-1}(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; g) - \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) \right)^2. \end{aligned} \quad (16.49)$$

### 16.5.1 Solution des EGR à l'ordre $g$

Utilisant la condition (16.45) dans l'équation (16.48) pour  $n = 4$ ,  $p_i = 0$ , nous trouvons une équation pour la fonction  $\beta(g)$ :

$$\beta(g) = 2g\eta(g) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(6)}(0, 0, 0, 0, k, -k; g) - 4g\tilde{D}(0) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(0; g). \quad (16.50)$$

Comme  $\eta(g)$  est au moins d'ordre  $g$  (en fait il est d'ordre  $g^2$ ) et que nous avons supposé  $\tilde{\mathcal{H}}^{(6)}$  d'ordre  $g^2$ , cette équation confirme que  $\beta(g)$  est d'ordre  $g^2$ .

À l'ordre  $g$ , comme  $\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g)$  est d'ordre  $g$ , le membre de gauche de l'équation (16.49) est négligeable. L'équation se réduit à

$$\left( 2 - \sum_{\mu} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) = \frac{1}{2} g D(0) + \eta \tilde{\Delta}^{-1}(p).$$

Le membre de gauche n'a pas de terme en  $p^2$  dans son développement à  $p = 0$  et donc  $\eta$  s'annule à l'ordre  $g$ . À l'ordre  $g$ , l'équation (16.49) se réduit donc à

$$\left( 2 - \sum_{\mu} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) = \frac{1}{2} g D(0).$$

Nous notons que l'équation homogène a des solutions régulières proportionnelles à  $p^2$  correspondant à l'opérateur redondant qui change la normalisation du champ. La solution générale est donc la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière constante. Le condition (16.47) élimine le terme redondant et conduit à la solution constante

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) = \frac{1}{4} g D(0) + O(g^2).$$

### 16.5.2 Ordre $g^2$

L'équation se résout ensuite inductivement sous la forme

$$\left(2 - \sum_{\mu} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) = -\beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) - \tilde{D}(p) \left(\tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g)\right)^2 \\ + \eta(g) \left(\Delta^{-1}(p) + \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g)\right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; g). \quad (16.51)$$

Pour  $p = 0$ , on obtient la condition de criticalité qui détermine

$$r_c(g) = \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(0; g) = \tilde{\mathcal{H}}^{(2)}(0; g).$$

Mais nous notons aussi que si le membre de droite contient un terme en  $p^2$  dans son développement en séries de Taylor à  $p = 0$ , la solution de l'équation ne peut pas être régulière:

$$\left(2 - \sum_{\mu} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\right) f(p^2) = p^2 \Rightarrow f = -p^2 \ln p + \text{const. } p^2.$$

Dérivant le membre de droite par rapport à  $p^2$ , nous obtenons donc la condition

$$\eta(g) = 2C'''(0)r_c^2(g) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k; g) \Big|_{p=0},$$

qui détermine  $\eta(g)$ . Nous voyons ici la nécessité de l'introduction de la fonction  $\eta(g)$  et donc de la renormalisation du champ  $\phi$ .

Pour  $\tilde{\mathcal{H}}^{(6)}(p_i; g)$  le membre de gauche est d'ordre  $g^3$  qui est négligeable, et donc

$$\left(2 + \sum_{j, \mu} p_j^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_j^{\mu}}\right) \mathcal{H}^{(6)}(p_i; g) = g^2 \left[\tilde{D}(p_1 + p_2 + p_3) + 9 \text{ termes}\right] + O(g^3). \quad (16.52)$$

Par ailleurs ( $\Delta \equiv \Delta_{\Lambda=1}$ )

$$\left(2 + \sum_{\mu} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\right) \tilde{\Delta}(p) = \tilde{D}(p).$$

Dans le membre de gauche on peut remplacer  $\tilde{\Delta}(p)$  par la fonction  $\tilde{R}_*(p)$  régulière à  $p = 0$ :

$$\tilde{R}_*(p) = \frac{1}{p^2} - \Delta(p) \quad \text{et donc} \quad \left(2 + \sum_{\mu} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\right) \tilde{R}_*(p) = -\tilde{D}(p). \quad (16.53)$$

Nous notons que la fonction  $\tilde{R}_*(p)$  est la limite pour  $\Lambda_0 \rightarrow \infty$  de la fonction (16.33).

La solution régulière de l'équation (16.52) peut alors s'écrire

$$\mathcal{H}^{(6)}(p_i; g) = -g^2 \left[ \tilde{R}_*(p_1 + p_2 + p_3) + 9 \text{ termes} \right] + O(g^3).$$

Enfin, comme  $g\eta(g)$  est d'ordre  $g^3$ ,

$$\beta(g) = g^2 \left[ 3\tilde{B}_*(0) - 2D(0)\tilde{R}_*(0) \right] - g^2 D(0)\tilde{D}(0) + O(g^3)$$

avec

$$\tilde{B}_*(p) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{R}_*(p-k). \quad (16.54)$$

Les deux derniers termes se compensent:

$$\tilde{D}(0) = 2C'(0) = -2\tilde{R}_*(0), \quad (16.55)$$

et il reste à évaluer

$$\begin{aligned} \tilde{B}_*(0) &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{R}_*(k) \tilde{D}(k) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk \frac{d}{dk} \left[ \frac{1}{2} k^4 \tilde{R}_*(k) \right] = \frac{1}{16\pi^2}, \end{aligned} \quad (16.56)$$

où nous avons utilisé la relation (16.53) et le comportement asymptotique

$$k^2 \tilde{R}_*(k) \rightarrow 1 \quad \text{pour } k \rightarrow \infty.$$

Nous concluons

$$\beta(g) = \frac{3}{16\pi^2} g^2 + O(g^3). \quad (16.57)$$

Il est alors commode de définir

$$F^{(4)}(p_i, g) = \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p_i; g) - \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(0; g) = O(g^2). \quad (16.58)$$

La fonction  $F^{(4)}$  à l'ordre  $g^2$  est solution de

$$\begin{aligned} \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} F^{(4)}(\mathbf{p}; g) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(6)}(p_1, p_2, p_3, p_4, k, -k; g) \\ &\quad + g \sum_i \tilde{D}(p_i) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p_i; g) - (\mathbf{p} = 0). \end{aligned}$$

Comme le membre de droite de l'équation s'annule pour  $p = 0$  (ce qui en fait est une conséquence de l'équation de flot satisfaite par  $g(\lambda)$ ), l'équation a une solution régulière. Plus explicitement

$$\sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} F^{(4)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}g^2 \left[ D(0)\tilde{R}_*(p_1) + 3 \text{ termes} - 2\tilde{B}_*(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} \right] \\ + \frac{1}{4}D(0)g^2 \sum_i \tilde{D}(p_i) - (\mathbf{p} = 0).$$

Utilisant la remarque que l'équation

$$\sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} X(p) = Y(p), \quad Y(0) = 0,$$

a comme solution

$$X(p) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} Y(\lambda p),$$

après quelques intégrations par parties et manipulations algébriques, on trouve

$$F^{(4)}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2}g^2 \mathcal{B}(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} - \frac{1}{4}g^2 D(0) \left[ \tilde{R}_*(p_1) - \tilde{R}_*(0) + 3 \text{ termes} \right] \quad (16.59)$$

avec

$$\mathcal{B}(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{R}_*(k) \left[ \tilde{R}_*(p+k) - \tilde{R}_*(k) \right].$$

On en déduit alors  $\eta(g)$  à l'ordre  $g^2$ :

$$\eta(g) = \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \mathcal{B}(p+k) \Big|_{p=0}.$$

Le calcul de l'intégrale est simple et on retrouve le résultat (10.34) pour  $N = 1$ :

$$\eta(g) = \frac{1}{6} \frac{1}{(4\pi)^4} g^2 + O(g^3).$$

### *Remarques.*

(i) Il n'est pas difficile de démontrer ensuite que les EGR peuvent être résolues par la même méthode à tous les ordres dans un développement en puissances de  $g$ . On démontre aussi ainsi que la théorie des champs  $\phi^4$  est renormalisable. Comme toutes les fonctions sont régulières à impulsion nulle, il suffit de montrer toutes les intégrales convergent à grande impulsion ce qui n'est pas très difficile. En particulier cette méthode de démonstration évite les problèmes de combinatoire des diagrammes de Feynman des démonstrations usuelles.

(ii) On peut avoir l'impression que nous avons utilisé explicitement la propriété qu'il n'y avait qu'un seul paramètre  $g$  de type  $\phi^4$  pour éliminer  $\lambda$ . En réalité la solution que nous avons obtenue est déterminée par les conditions de degré en  $g(\lambda)$  des fonctions  $\mathcal{H}^{(n)}$ . Par exemple, dans le cas de plusieurs termes de type  $\phi^4$ , et donc plusieurs coefficients  $g_i$ , il suffit de substituer

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} = - \sum_i \beta_i(g) \frac{\partial}{\partial g_i}$$

et d'utiliser la propriété  $\beta_i(g) = O(g^2)$ .

(iii) Il est facile de voir que la même méthode s'applique pour les théories de type  $\phi^n$  dans les dimensions où ces opérateurs sont marginaux (comme la dimension 3 pour  $\phi^6$ ).

## 16.6 Equation de point fixe: Développement en $\varepsilon$

Pour vérifier la cohérence du GRE avec le groupe de renormalisation asymptotique dans sa forme utilisée dans les chapitres 10 et 13, nous considérons maintenant la dimension  $d = 4 - \varepsilon$  et développons les équations (16.40,16.42) en puissances de  $g$  et  $\varepsilon$ .

Au lieu de déterminer le point fixe directement, nous suivons la stratégie de la section précédente, et déterminons l'équation de flot satisfaite par la constante  $g(\lambda)$ . Les calculs sont alors très semblables.

Nous partons de

$$\begin{aligned} \beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; g) &= \left( \frac{1}{2}n(d-2+\eta) - d + \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(p_i; g) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k) \\ &- \frac{1}{2} \sum_I \tilde{D}(p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0) \tilde{\mathcal{H}}^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0). \end{aligned} \quad (16.60)$$

L'équation  $n = 2$  s'écrit

$$\begin{aligned} \beta(g) \frac{d}{dg} \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) &= \left( \eta - 2 + \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p; g) + \eta \Delta^{-1}(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p, -p, k, -k) - \tilde{D}(p) \left( \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(p) \right)^2. \end{aligned} \quad (16.61)$$

*Ordre  $g$ .* La condition (16.45) implique

$$\beta(g) = -\varepsilon g + 2g\eta(g) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{\mathcal{H}}^{(6)}(0, 0, 0, 0, k, -k; g) - 4g \tilde{D}(0) \tilde{\mathcal{V}}^{(2)}(0; g). \quad (16.62)$$

On vérifiera que  $\eta$  reste d'ordre  $g^2$  et donc les termes sont au moins d'ordre  $g^2$  sauf le premier:

$$\beta(g) = -\varepsilon g + O(g^2).$$

Dans ces conditions, à la différence du cas  $d = 4$  le membre de gauche contribue à l'ordre dominant.

À l'ordre  $g$ ,  $\mathcal{V}^{(2)}(p; g)$  est une constante et donc  $\mathcal{V}^{(2)}(p; g) = \mathcal{V}^{(2)}(0; g) = r_c(g)$ :

$$r_c(g) = \frac{D(0)}{2(d-2)}g + O(g^2)$$

Notons la relation

$$(d-2)\Delta(0) + D(0) = 0, \quad (16.63)$$

et donc

$$r_c(g) = -\frac{1}{2}g\Delta(0) + O(g^2).$$

Ordre  $g^2$ . Nous avons besoin ensuite de  $\mathcal{H}_*^{(6)}(p_i)$  qui est d'ordre  $g^2$ . À cet ordre il satisfait

$$\left(2 + \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu}\right) \mathcal{H}^{(6)}(p_i; g) = g^2 \left[ \tilde{D}(p_1 + p_2 + p_3) + 9 \text{ termes} \right] + O(g^3, g^2\varepsilon). \quad (16.64)$$

Introduisant la fonction (16.53), la solution régulière de l'équation (16.64) peut alors s'écrire

$$\mathcal{H}^{(6)}(p_i; g) = -g^2 \left[ \tilde{R}_*(p_1 + p_2 + p_3) + 9 \text{ termes} \right] + O(g^3).$$

La fonction  $\beta$  est maintenant déterminée à l'ordre  $g^2$ :

$$\beta(g) = -\varepsilon g + g^2 \left[ 3\tilde{B}_*(0) - 2D(0)\tilde{R}_*(0) \right] + 2g^2\Delta(0)\tilde{D}(0) + O(g^3)$$

avec

$$\tilde{B}_*(p) = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \tilde{R}_*(p-k).$$

Dans le cadre du développement en  $\varepsilon$  on peut remplacer les contributions d'ordre  $g^2$  par leurs valeurs à  $d = 4$  qui ont déjà été calculées (équation (16.57)). On en déduit

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \frac{3}{16\pi^2}g^2 + O(g^3, g^2\varepsilon).$$

On pose comme à  $d = 4$

$$F^{(4)}(p_i, g) = \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(p_i; g) - \tilde{\mathcal{H}}^{(4)}(0; g) = O(g^2). \quad (16.65)$$

L'équation pour  $F^{(4)}(\mathbf{p}; g)$  à l'ordre  $g^2$  devient

$$\begin{aligned} - \left[ \varepsilon + \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right] F^{(4)}(\mathbf{p}; g) &= \frac{1}{2} g^2 \left[ -D(0) \tilde{R}_*(p_1) + 3 \text{ termes} \right. \\ &\quad \left. + 2 \tilde{B}_*(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} \right] + \frac{1}{2} g^2 \Delta(0) \left[ \tilde{D}(p_1) + 3 \text{ termes} \right] - (\mathbf{p} = 0). \end{aligned}$$

On peut vérifier que la solution régulière est

$$F^{(4)}(\mathbf{p}; g) = -\frac{1}{2} g^2 \mathcal{B}(p_1 + p_2) + 2 \text{ termes} + \frac{1}{2} g^2 \Delta(0) \left[ \tilde{R}_*(p_1) - \tilde{R}_*(0) + 3 \text{ termes} \right], \quad (16.66)$$

avec

$$\mathcal{B}(p) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{R}_*(k) \left[ \tilde{R}_*(p+k) - \tilde{R}_*(k) \right].$$

Les zéros de la fonction  $\beta$  déterminent les points fixes. La valeur de point fixe  $g^*$  du paramètre  $g$  à l'ordre  $\varepsilon$  est donc

$$g^* = \frac{16\pi^2}{3} \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

en accord avec le résultat (10.16).

Il est ensuite possible de calculer  $\eta(g)$  à l'ordre  $g^2$ . À l'ordre  $\varepsilon^2$  il suffit de la valeur de la fonction  $\eta(g)$  à  $d = 4$  qui a déjà été obtenue en fin de section 16.5.

## 16.7 Stabilité locale du point fixe

Une fois un point fixe  $\mathcal{H}_*$  identifié, on peut développer l'équation (16.44) au voisinage du point fixe:

$$\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}_* + \Delta\mathcal{H}(\lambda).$$

On obtient alors

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \Delta\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{L}_* \Delta\mathcal{H}(\lambda),$$

où  $\mathcal{L}_*$  est l'opérateur linéaire:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_* &= \int d^d x \phi(x) \left[ \frac{1}{2}(d+2-\eta) + \sum_{\mu} x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \\ &\quad + \int d^d x d^d y D(x-y) \left[ -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} + \frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\phi(x)} \frac{\delta}{\delta\phi(y)} \right] \\ &\quad - \int d^d x d^d y L(x-y) \phi(x) \frac{\delta}{\delta\phi(y)}. \end{aligned} \quad (16.67)$$

Nous cherchons alors les valeurs propres  $\ell$  et vecteurs propres  $\Delta\mathcal{H}_\ell \equiv \Delta\mathcal{H}_\ell(\lambda = 1)$  de  $\mathcal{L}_*$

$$\mathcal{L}_* \Delta\mathcal{H}_\ell = \ell \Delta\mathcal{H}_\ell, \quad (16.68)$$

et donc

$$\Delta\mathcal{H}_\ell(\lambda) = \lambda^\ell \Delta\mathcal{H}_\ell(1).$$

L'équation (16.68) peut s'écrire de façon explicite en termes des composantes  $\tilde{\Delta}\mathcal{H}_\ell^{(n)}(p_i)$  de  $\Delta\mathcal{H}_\ell$ :

$$\begin{aligned} \ell \Delta\tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(n)}(p_i) &= \left( d - \frac{1}{2}n(d-2+\eta) - \sum_j \tilde{D}(p_j) \tilde{\Delta}^{-1}(p_j) - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \Delta\tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(n)}(p_i) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \Delta\tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k) \\ &\quad + \sum_I \tilde{D}(p_0) \Delta\tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(l+1)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_l}, p_0) \tilde{\mathcal{H}}_*^{(n-l+1)}(p_{i_{l+1}}, \dots, p_{i_n}, -p_0). \end{aligned} \quad (16.69)$$

### 16.7.1 Point fixe gaussien

Au point fixe gaussien  $\eta = 0$  et  $\mathcal{H}_*$  se réduit à l'hamiltonien quadratique:  $\mathcal{V}_*(\phi) = 0$  et l'opérateur  $\mathcal{L}_*$  à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_* &= \int d^d x \phi(x) \left[ \frac{1}{2}(d+2) + \sum_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres correspondent à prendre tous les  $\mathcal{H}^{(n)}$  nuls pour  $n > N$ . Les valeurs propres correspondant à un vecteur propre proportionnel à  $\phi^N$  sont alors données par l'équation homogène pour  $\mathcal{H}^{(N)}$

$$\ell \Delta\tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(N)}(p_i) = \left( d - \frac{1}{2}N(d-2) - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \Delta\tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(N)}(p_i),$$

qui est identique à l'équation (9.47), et a comme solutions des polynômes homogènes dans les impulsions. Si  $r$  est le degré dans les variables  $p_i$ , la valeur propre est donné par

$$\ell = d - \frac{1}{2}N(d-2) - r.$$

Les autres coefficients  $\mathcal{H}^{(n)}$ ,  $n < N$  sont ensuite entièrement déterminés par les équations

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2}(N-n)(d-2) + r - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \right) \Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(n)}(p_i) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(n+2)}(p_1, p_2, \dots, p_n, k, -k). \end{aligned} \quad (16.70)$$

On peut être surpris de ces termes additionnels. En fait on peut vérifier que si l'on pose

$$\Delta \mathcal{H}(\phi) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dx dy \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \right] \Omega(\phi),$$

la fonctionnelle  $\Omega(\phi)$  satisfait l'équation plus simple

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \Omega(\phi, \lambda) = \int d^d x \phi(x) \left[ \frac{1}{2}(d+2) + \sum_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Omega(\phi),$$

dont les solutions sont alors de simples monômes.

L'opérateur linéaire qui fait passer de  $\Omega$  à  $\Delta \mathcal{H}(\phi)$  remplace tous les monômes en  $\phi$  qui contribuent à  $\Omega$  par leurs *produits normaux*. Le produit normal d'un terme de degré  $N$  en  $\phi$  est tel que pour tout  $n < N$  les fonctions de corrélation gaussiennes avec le poids  $e^{-\mathcal{H}_*}$ :

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \Delta \mathcal{H}_\ell(\phi) \right\rangle$$

s'annulent. Notons que le *produit normal* dépend explicitement d'un choix de mesure gaussienne.

Il est utile pour la suite de calculer l'opérateur correspondant à  $\int d^d x \phi^3(x)$  qui dans l'approximation gaussienne correspond à la valeur propre  $\frac{1}{2}(6-d)$ :

$$\frac{1}{3!} \int d^d x \phi^3(x) \mapsto \frac{1}{3!} \int d^d x \phi^3(x) - \frac{1}{2} \Delta(0) \int d^d x \phi(x).$$

De même, pour  $\int d^d x \phi^4(x)$ , on trouve

$$\frac{1}{4!} \int d^d x \phi^4(x) \mapsto \frac{1}{4!} \int d^d x \phi^4(x) - \frac{1}{4} \Delta(0) \int d^d x \phi^2(x) + \frac{1}{8} \Delta^2(0).$$

On reconnaît le terme d'ordre  $\varepsilon$  de l'hamiltonien de point fixe.

### 16.7.2 Dimension $d = 4 - \varepsilon$ : Perturbations $\phi^2$ et $\phi^4$

Pour  $n = 2$ , à l'ordre  $\varepsilon$ , l'équation se réduit à

$$\begin{aligned} \ell \Delta \tilde{\mathcal{V}}_\ell^{(2)}(p) &= \left( 2 + \frac{1}{2} g^* D(0) \tilde{D}(p) - \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \Delta \tilde{\mathcal{V}}_\ell^{(2)}(p) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}(k) \Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(4)}(p, -p, k, -k). \end{aligned}$$

Comme nous nous intéressons à la perturbation qui dans la limite gaussienne est une constante  $t$ , nous posons

$$\Delta \tilde{\mathcal{V}}_\ell^{(2)}(p) = t + O(\varepsilon).$$

Il est cohérent de supposer  $\Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(4)}(p)$  d'ordre  $\varepsilon$  ainsi que  $\Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(6)}(p)$  d'ordre  $\varepsilon^2$ . En conséquence la valeur propre  $\ell$  est de la forme

$$\ell = 2 + O(\varepsilon),$$

et  $\Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(4)}(p)$  satisfait à l'ordre dominant

$$2\Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(4)}(p_i) = - \sum_{j,\mu} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} \Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(4)}(p_i) + g^* t \sum_i \tilde{D}(p_i) + O(\varepsilon^2).$$

L'équation (16.53) nous permet d'intégrrer:

$$\Delta \tilde{\mathcal{H}}_\ell^{(4)}(p_i) = -g^* t \sum_i \tilde{R}_*(p_i) + O(\varepsilon^2).$$

Nous reportons enfin cette expression dans l'équation pour  $\Delta \tilde{\mathcal{V}}_\ell^{(2)}$ . À l'ordre dominant

$$\begin{aligned} \left( 2 - \ell + \frac{1}{2} g^* D(0) \tilde{D}(p) + g^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \left( \tilde{R}_*(p) + \tilde{R}_*(k) \right) \right. \\ \left. - \sum_\mu p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \Delta \tilde{\mathcal{V}}_\ell^{(2)}(p) = 0. \end{aligned}$$

Dans la limite  $p = 0$ , utilisant de nouveau les conditions  $\Delta \tilde{\mathcal{V}}_\ell^{(2)}(p = 0) \neq 0$  et de régularité à  $p = 0$ , on trouve

$$\ell = 2 + \frac{1}{2} g^* D(0) \tilde{D}(0) + g^* D(0) \tilde{R}_*(0) + g^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{R}_*(k).$$

Les deux premiers se compensent et dans l'intégrale on reconnaît  $\tilde{B}_*(0)$ . Donc

$$\ell = 2 - \frac{1}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

en accord avec les résultats précédents obtenus par d'autres méthodes, comme (10.27) ( $d_t = \ell$ ).

*Perturbation  $\phi^4$ .* La même méthode, mais partant cette fois de  $\Delta\tilde{\mathcal{H}}^{(4)} = O(1)$  permet de calculer l'exposant  $\omega$ , qui correspond à une variation de  $g$ , et donc à la dérivée de la fonction  $\beta$  comme dans les EGR de la théorie des champs. L'exposant

$$d_g = -\omega = -\beta'(g^*) = -\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

est la valeur propre correspond à une perturbation de type  $\phi^4$ . On en déduit la dimension  $d_{\phi^4}$  de l'opérateur propre qui est identique à  $\phi^4(x)$  à l'ordre dominant

$$d_{\phi^4} = d - d_g = 4.$$

Comme  $d_{\phi^4}$  est plus grand que  $d$ , cet opérateur est inessentiel.

### 16.7.3 Perturbations brisant la symétrie $\mathbb{Z}_2$

Nous étudions maintenant les valeurs propres associées aux opérateurs essentiels brisant la symétrie de réflexion  $\mathbb{Z}_2$ . Nous allons montrer que ces valeurs propres s'expriment en fonction d'un exposant déjà connu.

Pour cela nous partons de l'équation de point fixe

$$\begin{aligned} 0 = & \int d^d x \phi(x) \left[ \frac{1}{2}(d+2-\eta) + \sum_{\mu} x^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right] \frac{\delta \mathcal{H}_*(\phi)}{\delta \phi(x)} \\ & - \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{H}_*}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta \phi(y)} \right] \\ & - \int d^d x d^d y L(x-y) \frac{\delta \mathcal{H}_*}{\delta \phi(x)} \phi(y), \end{aligned} \quad (16.71)$$

Nous faisons agir sur cette équation l'opérateur  $\int dz \delta / \delta \phi(z)$  et posons

$$\mathcal{D}\mathcal{H}_* = \int dz \frac{\delta}{\delta \phi(z)} \mathcal{H}_*.$$

Nous notons

$$\int d^d x L(x) = \tilde{D}(0)\tilde{\Delta}^{-1}(0) = 0.$$

Après une intégration par parties, le résultat peut s'écrire

$$[\mathcal{L}_* - \frac{1}{2}(d-2+\eta)] \mathcal{D}\mathcal{H}_* = 0.$$

Nous avons donc identifié un vecteur propre  $\mathcal{DH}_*$  et une valeur propre

$$\ell = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta).$$

L'opérateur essentiel correspondant, au premier ordre en  $\varepsilon$ , a la forme

$$\mathcal{DH}_* = r_{c1} g^* \int d^d x \phi(x) + \frac{1}{3!} g^* \int d^d x \phi^3(x) + O(\varepsilon^2).$$

Il correspond à l'opérateur  $\int d^d x \phi^3(x)$  dans la limite gaussienne. Le terme linéaire en  $\phi$  corrige  $\phi^3$  pour éliminer la composante sur  $\phi$  dont nous allons vérifier qu'elle est plus essentielle. Pour cela nous calculons l'action de  $\mathcal{L}_*$  sur un terme linéaire en  $\phi$ :

$$\mathcal{L}_* \int d^d z \phi(z) = \frac{1}{2}(d + 2 - \eta) \int d^d z \phi(z) + \tilde{D}(0) \mathcal{DH}_*.$$

On voit alors qu'il existe une autre valeur propre

$$\ell = \frac{1}{2}(d + 2 - \eta),$$

correspondant au vecteur propre

$$\Delta \mathcal{H}_\ell = (1 - \eta/2) \int d^d x \phi(x) + \frac{1}{2} \tilde{D}(0) \mathcal{DH}_*.$$

Ce vecteur propre correspond dans l'approximation gaussienne à la valeur propre

$$\ell = \frac{1}{2}(d + 2),$$

et au vecteur propre le plus essentiel  $\int d^d z \phi(z)$ .

On en déduit en particulier la dimension  $d_\phi$  de l'opérateur  $\phi$ :

$$d_\phi = d - \frac{1}{2}(d + 2 - \eta) = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta),$$

ce qui est bien cohérent avec l'interprétation initiale de l'exposant  $\eta$  comme étant lié à une renormalisation du champ.

## Notes Bibliographiques

Nous ne donnons ici qu'une bibliographie succincte sur ces développements historiques. Beaucoup de détails intéressants et des références sur l'histoire primitive de la QED et des divergences peuvent être trouvés dans

S. Weinberg, *The Theory of Quantum Fields*, vol. 1, chap. 1, Cambridge 1995 (Cambridge Univ. Press).

Un certain nombre d'articles originaux est contenu dans

J. Schwinger éd., *Selected Papers in Electrodynamics*, (Dover, New-York 1958).

Voir aussi

N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience (New-York 1959).

Une revue de la situation après la découverte du Modèle Standard peut être trouvée dans

*Methods in Field Theory*, Les Houches 1975, R. Balian et J. Zinn-Justin édés., (North-Holland, Amsterdam 1976);

C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New-York 1980).

Pour une présentation des idées de groupe de renormalisation appliquées aux phénomènes critiques voir

L.P. Kadanoff, *Physics* 2 (1966) 263;

K.G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* 12C (1974) 75,

et les contributions à

*Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 6, C. Domb et M.S. Green édés. (Academic Press, London 1976).

En particulier la contribution

*Field Theory Approach to Critical Phenomena* par E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin,

décrit l'application des méthodes de la théorie quantique des champs au calcul de quantités universelles.

Enfin une présentation unifiée de la théorie quantique des champs telle qu'elle apparaît en physique des particules et dans la théorie des phénomènes critiques peut être trouvée dans

J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press 1989, (Oxford 4ème éd. 2002).

Plus de détails peuvent être trouvés dans des articles de revue ou des livres comme par exemple:

*Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 6, C. Domb and M.S. Green édés. (Academic Press, London 1976), auquel les principaux physiciens qui ont participé au développement du sujet ont contribué,

M. Le Bellac, *Des Phénomènes Critiques aux Champs de Jauge*, InterEditions (Paris 1988),

C. Itzykson et J.M. Drouffe; *Statistical field theory*, 2 vol., Cambridge, UK: Univ. Pr. (1989) 1-403.

Comme l'a montré Stanley, la limite  $N$  grand du modèle classique à  $N$  composantes coïncide avec le modèle sphérique résolu par Berlin et Kac

T.H. Berlin et M. Kac, *Phys. Rev.* 86 (1952) 821; H.E. Stanley, *Phys. Rev.* 176 (1968) 718.

On trouve parmi les premiers travaux sur les propriétés critiques

R. Abe, *Prog. Theor. Phys.* 48 (1972) 1414; 49 (1973) 113, 1074, 1877; S.K. Ma, *Phys. Rev. Lett.* 29 (1972) 1311; *Phys. Rev.* A7 (1973) 2172; M. Suzuki, *Phys. Lett.* 42A (1972) 5; *Prog. Theor. Phys.* 49 (1973) 424, 1106, 1440; R.A. Ferrel et D.J. Scalapino, *Phys. Rev. Lett.* 29 (1972) 413; K.G. Wilson, *Phys. Rev.* D7 (1973) 2911.

L'équation d'état à l'ordre  $1/N$  est donnée dans

E. Brézin et D.J. Wallace, *Phys. Rev.* B7 (1973) 1967.

La fonction de corrélation spin-spin en champ nul est obtenue dans

M.E. Fisher et A. Aharony, *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 1238; A. Aharony, *Phys. Rev.* B10 (1974) 2834; R. Abe et S. Hikami, *Prog. Theor. Phys.* 51 (1974) 1041.

L'exposant  $\omega$  a été calculé à l'ordre  $1/N$  dans

S.K. Ma, *Phys. Rev.* A10 (1974) 1818.

Voir aussi les contributions de S.K. Ma et E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin dans

*Phase Transitions and Critical Phenomena* vol. 6, C. Domb et M.S. Green eds. (Academic Press, London 1976).

La cohérence du développement en  $1/N$  à tous les ordres a été prouvée dans

I. Ya Aref'eva, E.R. Nissimov et S.J. Pacheva, *Commun. Math. Phys.* 71 (1980) 213; A.N. Vasil'ev et M.Yu. Nalimov, *Teor. Mat. Fiz.* 55 (1983) 163.

A présent les plus longues séries en  $1/N$  pour les exposants et les amplitudes se trouvent dans

I. Kondor et T. Temesvari, *J. Physique Lett. (Paris)* 39 (1978) L99; Y. Okabe et M. Oku, *Prog. Theor. Phys.* 60 (1978) 1277, 1287; 61 (1979) 443; A.N. Vasil'ev, Yu.M. Pis'mak et Yu.R. Honkonen, *Teor. Mat. Fiz.* 46 (1981) 157; 50 (1982) 195.

Voir aussi

I. Kondor, T. Temesvari et L. Herenyi, *Phys. Rev.* B22 (1980) 1451.

Le cas des forces à longue portée a été discuté dans

S.K. Ma, *Phys. Rev.* A7 (1973) 2172.

Les propriétés du groupe de renormalisation du modèle  $\sigma$  non linéaire ont été discutées dans

A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* 59B (1975) 79; E. Brézin et J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* 36 (1976) 691; *Phys. Rev.* B14 (1976) 3110; W.A. Bardeen, B.W. Lee et R.E. Shrock, *Phys. Rev.* D14 (1976) 985.

Les calculs d'ordres plus élevés des exposants critiques sont dus à

S. Hikami, *Nucl. Phys.* B215[FS7] (1983) 555; W. Bernreuther et F.J. Wegner, *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 1383; F. Wegner, *Nucl. Phys.* B316 (1989) 663.

Des spéculations sur un flot du GR près de la dimension 2, cohérentes avec la transition de Kosterlitz–Thouless pour  $N = 2$  et les résultats du modèle  $\sigma$  non linéaire  $N > 2$  peuvent être trouvées dans

J.L. Cardy et H.W. Hamber, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 499.

Les forces à longue portée ont été discutées dans

E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin, *J. Phys. A: Math. Gen.* 9 (1976) L119.

Pour une introduction au problème de la localisation dans des systèmes d'électrons voir par exemple

E. Fradkin, *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, Les Houches 1982, R. Stora et J.-B. Zuber eds. (North Holland, Amsterdam 1984).

Voir aussi la contribution de G. Parisi dans le même volume et

F. Wegner, *Lecture Notes in Physics* 216 (1985) 141.

Pour les équations du groupe de renormalisation exact voir

J. Polchinski, *Nucl. Phys.* B231 (1984) 269.

Ces équations sont directement basées sur des équations similaires qui avaient été introduites auparavant:

F.J. Wegner and A. Houghton, *Phys. Rev.* A8 (1973) 401; F.J. Wegner, *J. Physics* C7 (1974) 2098; K.G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* 12C (1974) 75.

Voir aussi la revue

F.J. Wegner, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* vol. 6, C. Domb and M.S. Green eds. (Academic Press, New York 1976).

Pour des applications plus récentes de telles idées voir exemple

M. Bonini, M. D'Attanasio and G. Marchesini, *Nucl. Phys.* B409 (1993) 441, *ibidem* B444 (1995) 602; J. Adams, J. Berges, S. Bornholdt, F. Freire, N. Tetradis and C. Wetterich, *Mod. Phys. Lett.* A10 (1995) 2367; *Int.J.Mod.Phys.* A16 (2001) 1951, hep-ph/0101178.

T.R. Morris, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 131 (1998) 395, hep-th/9802039, et références incluses.

## Appendice A1

### Compléments

Nous rassemblons ici quelques résultats techniques supplémentaires utiles.

#### A1.1 Fonctions $\Gamma$ , $\psi$ , $\zeta$ : quelques identités utiles

La fonction  $\Gamma(z)$ , qui interpole  $(z-1)!$  pour  $z$  non entier, peut être définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} . \quad (A1.1)$$

Cette représentation intégrale définit une fonction holomorphe pour  $\operatorname{Re} z > 0$ . Cette fonction satisfait une relation de symétrie

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

qui la prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe avec des pôles simples aux entiers négatifs.

Nous avons utilisé aussi la fonction  $B$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} .$$

Une autre identité est la formule de duplication La fonction  $\psi(z)$  est la dérivée logarithmique de  $\Gamma$  et donc  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$

$$2\psi(2z) = 2\ln 2 + \psi(z) + \psi(z+1/2), \quad \psi(z) - \psi(1-z) + \pi/\tan(\pi z) = 0 \quad (A1.2)$$

Dans les calculs des valeurs spécifiques de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann sont apparus:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} , \quad (A1.3)$$

qui satisfait aussi à une formule de réflexion

$$\zeta(s)\Gamma(s/2) = \pi^{s-1/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s), \quad (A1.4)$$

qui peut être réécrite dans des formes variées utilisant les propriétés de la fonction  $\Gamma$ . De plus,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = (2^{1-s} - 1)\zeta(s), \quad (A1.5)$$

Enfin,

$$\zeta(1+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \psi(1) + O(\varepsilon), \quad (A1.6)$$

$$\zeta(\varepsilon) = -\frac{1}{2}(2\pi)^\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (A1.7)$$

### A1.1.1 Déterminants d'opérateurs

Parfois nous aurons à calculer le déterminant d'un opérateur qui, si nécessaire après quelques transformations, peut être ramené au calcul du déterminant d'un opérateur de la forme  $\mathbf{M} = \mathbf{1} + \mathbf{K}$ . À condition que les traces de toutes puissances de  $\mathbf{K}$  existent, l'identité suivante, valable pour toute matrice  $\mathbf{M}$ ,

$$\ln \det \mathbf{M} \equiv \text{tr} \ln \mathbf{M}, \quad (A1.8)$$

développée en puissance du noyau  $\mathbf{K}$ :

$$\ln \det [\mathbf{1} + \mathbf{K}] = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \text{tr} \mathbf{K}^p, \quad (A1.9)$$

peut se révéler utile. Dans le cas où les opérateurs  $\mathbf{M}$  et donc  $\mathbf{K}$  sont représentés par des noyaux  $M(x, y) = \delta(x - y) + K(x, y)$ , les traces successives s'écrivent explicitement

$$\text{tr} \mathbf{K}^p = \int dx_1 \cdots dx_p K(x_1, x_2)K(x_2, x_3) \cdots K(x_p, x_1).$$

## A1.2 Modèle gaussien

On vérifie alors par calcul explicite l'équation aux dérivées partielles

$$-\Omega \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{T}(\theta)](q, q') = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial^2}{(\partial q)^2} + \Omega^2 q^2 \right] [\mathbf{T}(\theta)](q, q').$$

Cette équation peut être réécrite en termes d'opérateurs sous la forme

$$-\Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{T}(\theta) = \mathbf{H} \mathbf{T}(\theta) \quad (\text{A1.10})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 \hat{\mathbf{Q}}^2 \quad (\text{A1.11})$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} + \frac{1}{2} \Omega \quad (\text{A1.12})$$

En particulier

$$-\Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \text{tr} \mathbf{T}^n = \frac{n}{2} \text{tr} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{T}^n + \frac{n\Omega}{2} \text{tr} \mathbf{T}^n.$$

Utilisant le résultat 4.40bis, on en déduit

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}(n, \varepsilon)}{\partial \theta} = -\frac{n e^{n\theta} + 1}{2 e^{n\theta} - 1},$$

et donc

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) = \frac{\mathcal{N}(n, \Omega)}{\sinh(n\theta/2)}.$$

Pour  $\theta \rightarrow \infty$  les variables  $q_\ell$  sont indépendantes et

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) \underset{\theta \rightarrow \infty}{\sim} e^{-n\theta/2}.$$

Donc

$$\mathcal{Z}(n, \varepsilon) = \frac{2}{\sinh(n\theta/2)}.$$

### A1.3 Transformation de Fourier: décroissance et régularité

Dans cette section nous rappellons à travers quelques exemples utiles pour ce cours la relation entre décroissance asymptotique à grand argument des mesures positives et la régularité de leurs transformées de Fourier. Le lecteur intéressé à plus de détails est renvoyé à la littérature mathématique sur ce sujet.

Nous examinons d'abord le cas des mesures discrètes définies sur  $\mathbb{Z}$  qui est particulièrement simple.

### A1.3.1 Mesures positives discrètes et séries de Fourier

*Décroissance exponentielle.* Nous considérons une mesure positive discrète  $\rho_n$  définie sur le réseau des points entiers de la droite réelle:

$$\rho_n \geq 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n = 1. \quad (\text{A1.13})$$

Nous supposons que pour  $|n| \rightarrow \infty$   $\rho_n$  décroît exponentiellement

$$\rho_n < M e^{-\mu|n|}, \quad \mu > 0.$$

Alors tous les moments  $m_p$  de  $\rho_n$  sont finis

$$m_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^p \rho_n.$$

La fonction analytique donnée par la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n z^{n-1},$$

est holomorphe et uniforme dans l'anneau compris entre deux cercles  $e^{-\mu} < |z| < e^{\mu}$  où la série de Laurent converge.

La fonction périodique  $\tilde{\rho}(\theta)$ , de période  $2\pi$ ,

$$\tilde{\rho}(\theta) = e^{-i\theta} f(e^{-i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\theta} \rho_n \quad \Rightarrow \quad \tilde{\rho}^*(\theta) = \tilde{\rho}(-\theta),$$

est donc holomorphe dans une bande  $|\text{Im } \theta| < \mu$ . La positivité de la mesure entraîne de plus  $|\tilde{\rho}(\theta)| \leq \tilde{\rho}(0) = 1$ .

Réciproquement les coefficients de Fourier  $\rho_n$  sont donnés par

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \tilde{\rho}(\theta). \quad (\text{A1.14})$$

Si la fonction  $f$  est holomorphe et uniforme dans un domaine  $e^{-\mu} < |z| < e^{\mu}$ , les coefficients de sa série de Laurent sont aussi donnés par

$$\rho_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} dz z^{-n} f(z).$$

L'analyticité entraîne la convergence de la série de Laurent. Suivant que  $n$  est positif ou négatif on déforme le cercle dans les cercles de rayon  $e^\mu$  ou  $e^{-\mu}$ . On en déduit

$$\forall R, 0 < R < e^\mu : \lim_{|n| \rightarrow \infty} \rho_n R^n = 0.$$

Ce résultat qui établit une relation entre les propriétés de dérivabilité de la fonction et les propriétés de décroissance des coefficients de la série de Fourier peut se généraliser de nombreuses manières.

*Décroissance rapide.* Supposons, par exemple, que pour  $n \rightarrow \infty$   $\rho_n$  décroisse plus vite que toute puissance de  $n$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \exists A_p \text{ tel que } \rho_n \leq \frac{A_p}{|n|^p + 1}.$$

Alors tous les moments  $m_p$  de  $\rho_n$

$$m_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^p \rho_n.$$

sont finis. C'est d'ailleurs une condition nécessaire et suffisante.

Il est alors simple de vérifier que la fonction périodique  $\tilde{\rho}(\theta)$  est dérivable, et la dérivée obtenue en dérivant terme à terme la représentation (A1.14)

$$\tilde{\rho}'(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-in) e^{-in\theta} \rho_n.$$

La série converge pour tout  $\theta$ , en effet

$$|\tilde{\rho}'(\theta)| \leq |\tilde{\rho}'(0)| \leq \sum_n |n| \rho_n < \infty.$$

La mesure  $n\rho_n$  étant également à décroissance rapide, l'argument se généralise aux dérivées successives

$$\tilde{\rho}^{(p)}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-in)^p e^{-in\theta} \rho_n,$$

et la fonction  $\tilde{\rho}(\theta)$  est donc indéfiniment dérivable. Pour tout  $\theta$

$$\left| \tilde{\rho}^{(p)}(\theta) \right| \leq \left| \tilde{\rho}^{(p)}(0) \right| \leq \sum_n |n|^p \rho_n < \infty.$$

Réciproquement supposons que  $\tilde{\rho}(\theta)$  soit indéfiniment dérivable. Comme  $\tilde{\rho}(\theta)$  est dérivable nous pouvons intégrer par parties (pour  $n \neq 0$ )

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \tilde{\rho}'(\theta).$$

De façon plus générale intégrant  $p$  fois on trouve

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi} \frac{i^p}{n^p} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \tilde{\rho}^{(p)}(\theta),$$

et donc

$$|\rho_n| \leq \frac{1}{n^p} \left| \tilde{\rho}^{(p)}(0) \right|.$$

*Décroissance algébrique.* Simplement la condition de normalisation (A1.13) qui implique la convergence uniforme des séries  $\sum_n e^{in\theta} \rho_n$  entraîne la continuité de  $\tilde{\rho}(\theta)$ . De façon plus générale la condition

$$\sum_n \rho_n |n|^p < \infty, \quad p \in \mathbb{N},$$

entraîne l'existence et la continuité de la dérivée  $p$ -ième de  $\tilde{\rho}(\theta)$ . Cette condition est vérifiée si

$$\rho_n \leq \frac{R}{|n|^{\sigma+1} + 1} \quad \text{avec } \sigma > p.$$

Réciproquement si  $\tilde{\rho}(\theta)$  est une fonction continue périodique de période  $2\pi$ , les coefficients de Fourier tendent vers zéro pour  $|n| \rightarrow \infty$ . En effet (choisissant par exemple  $n > 0$ )

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \tilde{\rho}(\theta) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} d\tau e^{i\tau} \tilde{\rho}(\tau/n) \\ &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{p=1}^n \int_{2\pi(p-1)}^{2\pi p} d\tau e^{i\tau} \tilde{\rho}(\tau/n) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\tau} \frac{2\pi}{n} \sum_{p=1}^n \tilde{\rho}(\tau/n + 2\pi(p-1)/n). \end{aligned}$$

La somme sur  $p$  est une somme de Riemann qui converge pour  $n \rightarrow \infty$  vers une intégrale puisque  $\tilde{\rho}$  est continue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{p=1}^n \tilde{\rho}(\tau/n + 2\pi(p-1)/n) = \int_0^{2\pi} ds \tilde{\rho}(s),$$

et la convergence est uniforme en  $\theta$ . Soustrayant à la somme cette limite ne change pas l'intégrale sur  $\tau$  et donc

$$|\rho_n| \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\tau \left| \frac{2\pi}{n} \sum_{p=1}^n \tilde{\rho}(\tau/n + 2\pi(p-1)/n) - \int_0^{2\pi} ds \tilde{\rho}(s) \right|$$

qui tend vers zéro. On notera que seule la convergence uniforme en  $\theta$  de la somme de Riemann a joué un rôle, ce qui permet de relaxer la condition de continuité.

L'existence d'une dérivée d'ordre  $p$  permet d'intégrer par parties et donc de démontrer une décroissance au moins d'ordre  $|n|^{-p}$ .

Des résultats plus précis peuvent parfois être obtenus. Par exemple si  $\tilde{\rho}(\theta)$  a une singularité isolée à  $\theta = 0$  en  $|\theta|^\sigma$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\rho_n$  décroît comme  $|n|^{-1-\sigma}$

$$\tilde{\rho}(\theta) = A|\theta|^\sigma + \text{partie plus régulière} \Rightarrow \rho_n \underset{|n| \rightarrow \infty}{\propto} |n|^{-1-\sigma}.$$

Ce résultat se démontre par exemple en intégrant par parties  $[\sigma] + 1$  fois,  $[\sigma]$  étant la partie entière de  $\sigma$ . On peut alors calculer la transformée de Fourier de  $|\theta|^{\sigma-[\sigma]-1}$  explicitement.

*Réseau à  $d$  dimensions.* Les résultats précédents se généralisent aux cas des probabilités de transition considérées en section 3.3.

Supposons pour  $\rho(\mathbf{n})$  des propriétés de décroissance exponentielle,

$$\rho(\mathbf{n}) < M e^{-\mu|\mathbf{n}|}, \quad \mu > 0.$$

La fonction  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ :

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} \rho(\mathbf{n}),$$

est holomorphe dans le tube

$$|\text{Im } \mathbf{k}| < \mu.$$

Réciproquement si l'on suppose pour  $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$  le domaine d'holomorphie  $|\text{Im } \mathbf{k}| \leq \mu$  alors dans l'intégrale sur une zone de Brillouin

$$\rho(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}} \tilde{\rho}(\mathbf{k}),$$

on peut déplacer le contour dans le complexe dans la direction

$$\text{Im } \mathbf{k} = \kappa \mathbf{n}, \quad \kappa = \mu/|\mathbf{n}|,$$

et on en déduit la décroissance exponentielle.

### A1.3.2 Transformation de Fourier

Comme les transformées de Fourier de mesures positives et plus généralement de fonctions à décroissance rapide ou exponentielle du type envisagé en section 3.1 jouent un grand rôle dans différentes parties de ce cours, il est utile de rappeler quelques propriétés. La différence technique principale avec la section précédente est que la transformation de Fourier est symétrique. En particulier la fonction initiale et sa transformée de Fourier ont toutes deux des propriétés de régularité et de décroissance à l'infini ce qui complique un peu l'analyse. Comme notre but est faire comprendre la dualité entre régularité et décroissance à l'infini, nous l'illustrons ici uniquement par des exemples où les résultats peuvent être démontrés de façon élémentaire.

Pour les problèmes physiques qui ont été étudiés dans ce cours nous devons admettre comme mesures non seulement des fonctions mais également des distributions au sens mathématique du terme comme les "fonctions"  $\delta$  de Dirac. Dans ce cas les fonctions  $f(q)$  pour être mesurables, c'est à dire que leur valeur moyenne est définie, doivent être *continues*. Il est donc nécessaire de faire appel à la théorie des distributions, et le lecteur intéressé est renvoyé à la littérature mathématique sur ce sujet.

*Fonctions continues.* Dans un but d'illustration nous nous restreignons à des fonctions  $\rho(q)$  continues. L'étude des relations entre décroissance et régularité de la transformée de Fourier devient alors assez semblable au cas discret. Supposons, par exemple, que  $\rho(q)$  soit une fonction à décroissance exponentielle:

$$|\rho(q)| \leq M e^{-\mu|q|}, \quad \mu > 0.$$

Si  $\rho(q)$  caractérise une mesure, non seulement tous les moments de la distribution existent, mais ils satisfont

$$|\langle q^p \rangle| \leq M \int dq e^{-\mu|q|} |q|^p \leq \frac{2M}{\mu^{p+1}} p!.$$

La transformée de Fourier de  $\rho(q)$

$$\tilde{\rho}(k) = \langle e^{-ikq} \rangle \equiv \int dq e^{-ikq} \rho(q) \quad (A1.15)$$

est une fonction analytique, holomorphe pour  $|\operatorname{Im} k| < \mu$ , en effet

$$|\tilde{\rho}(k)| \leq M \int dq e^{-(\mu - |\operatorname{Im} k|)|q|} \leq \frac{2M}{\mu - |\operatorname{Im} k|}, \quad (A1.16)$$

De même si  $\rho(q)$  décroît plus vite que toute puissance sa transformée de Fourier est indéfiniment dérivable.

Enfin si l'intégrale  $\int dq |\rho(q)| |q|^p$  converge,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq |q|^p \rho(q) < \infty,$$

la dérivée  $p$ -ième de  $\tilde{\rho}(k)$  est continue.

*Réciproque.* Par un argument similaire à celui utilisé pour les séries de Fourier on démontre que si l'intégrale donnant sa transformée de Fourier

$$\rho(q) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq} \tilde{\rho}(k),$$

converge absolument, et si  $\tilde{\rho}(k)$  est continue  $\rho(q)$  tend vers zéro pour  $|q| \rightarrow \infty$ . En effet

$$\begin{aligned} \rho(q) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikq} \tilde{\rho}(k) = \frac{1}{2\pi q} \int dk e^{ik} \tilde{\rho}(k/q) \\ &= \frac{1}{2\pi q} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{2\pi(p-1)}^{2\pi p} dk e^{ik} \tilde{\rho}(k/q) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dk e^{ik} \frac{2\pi}{q} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k/q + 2\pi p/q). \end{aligned}$$

Avec nos conditions la somme de Riemann converge pour  $|q| \rightarrow \infty$  uniformément en  $k$  vers l'intégrale qui, intégrée avec  $e^{ik}$ , ne donne pas de contribution.

Si  $\tilde{\rho}(k)$  admet une dérivée  $p$ -ième continue une intégration par parties répétée permet de démontrer que  $q^p \rho(q)$  tend vers zéro, avec l'hypothèse supplémentaire que  $\int dk |\rho^{(p)}(k)|$  converge.

De même dans les cas des fonctions indéfiniment dérivables ou analytiques dans une bande, on peut démontrer la décroissance rapide ou exponentielle de la transformée de Fourier avec quelques conditions de convergence à l'infini.

Pour s'affranchir en partie de ses problèmes de convergence à l'infini il est nécessaire de se placer dans le cadre plus général des distributions.

## A1.4 Matrice de transfert et formalisme quantique

*Notation.* Dans la suite nous distinguerons la notation  $\langle \bullet \rangle$  qui signifiera valeur moyenne de  $\bullet$  par rapport au poids statistique  $e^{-S}$  et  $|\bullet\rangle$  ou  $\langle \bullet|$ , qui représentent un vecteur et le vecteur dual dans la notation des bras et kets de la mécanique quantique.

Dans ces conditions ( $q_0 = q_n$ ), la fonction de partition peut s'écrire

$$\mathcal{Z}_n = \int \prod_{k=1}^n dq_k \mathcal{T}(q_{k-1}, q_k) \equiv \int \prod_{k=1}^n dq_k \langle q_{k-1} | \mathbf{T} | q_k \rangle = \text{tr } \mathbf{T}^n.$$

Dans ces conditions ( $q_0 = q_n$ ), la fonction de partition peut s'écrire

$$Z_n = \int \prod_{k=1}^n dq_k \mathcal{T}(q_{k-1}, q_k) = \text{tr } \mathbf{T}^n.$$

Comme l'opérateur est hermitique, car symétrique réel, il est commode d'utiliser la notation des bras et kets de la mécanique quantique. Nous introduisons la base des vecteurs  $|q\rangle$ , et la base conjuguée  $\langle q|$ , avec  $q$  réel quelconque,

$$\langle q_1 | q_2 \rangle = \delta(q_1 - q_2),$$

$\delta(q)$  étant la distribution de Dirac. La base est complète et satisfait donc la relation de fermeture

$$\int dq |q\rangle \langle q| = \mathbf{1}. \quad (\text{A1.17})$$

Cette base est analogue à la base de la mécanique quantique où l'opérateur position  $\hat{\mathbf{Q}}$  est diagonal:

$$\langle q' | \hat{\mathbf{Q}} | q \rangle = q \delta(q - q'). \quad (\text{A1.18})$$

Le noyau  $\mathcal{T}$  associé à la matrice de transfert s'écrit alors comme un élément de matrice

$$\mathcal{T}(q', q) \equiv \langle q' | \mathbf{T} | q \rangle. \quad (\text{A1.19})$$

Dans cette représentation le produit de deux opérateurs  $\mathcal{O}_1(q', q)$  et  $\mathcal{O}_2(q', q)$

$$\mathcal{O}_1(q', q) \equiv \langle q' | \mathbf{O}_1 | q \rangle, \quad \mathcal{O}_2(q', q) \equiv \langle q' | \mathbf{O}_2 | q \rangle, \quad (\text{A1.20})$$

s'écrit

$$\langle q' | \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_1 | q \rangle = \int dq'' \langle q' | \mathbf{O}_2 | q'' \rangle \langle q'' | \mathbf{O}_1 | q \rangle,$$

où du point de vue du formalisme quantique nous avons intégré sur la variables  $q''$  en utilisant la relation de fermeture (A1.17).

De même la trace de tout opérateur  $\mathcal{O}(q', q)$  est définie par

$$\text{tr } \mathbf{O} = \int dq \langle q | \mathbf{O} | q \rangle.$$

Introduisant la représentation (A1.19) de la matrice de transfert, l'équation devient:

$$\begin{aligned} Z_n^{(1)}(\ell) &= Z_n^{-1} \int dq_\ell q_\ell dq_n \langle q_\ell | \mathbf{T}^{n-\ell} | q_n \rangle \langle q_n | \mathbf{T}^\ell | q_\ell \rangle \\ &= Z_n^{-1} \int dq_\ell q_\ell \langle q_\ell | \mathbf{T}^n | q_\ell \rangle. \end{aligned}$$

Introduisant maintenant l'opérateur  $\hat{\mathbf{Q}}$  (définition (A1.18)) diagonal dans la base des vecteurs  $|q\rangle$

$$\hat{\mathbf{Q}} |q\rangle = q |q\rangle.$$

### A1.4.1 Spectre de la matrice de transfert

En référence au formalisme quantique nous appellerons le vecteur propre correspondant  $|0\rangle$  le *fondamental* de la matrice de transfert.

Nous notons  $\psi_0(q)$  la représentation du fondamental dans la base des vecteurs  $|q\rangle$ :

$$\psi_0(q) \equiv \langle q|0\rangle. \quad (A1.21)$$

Montrons que  $\psi_0(q)$  est une fonction de signe constant, qu'on peut donc choisir positive et que la valeur propre  $\tau_0$  est *positive et non dégénérée*.

Pour toute fonction  $\psi(q)$  de carré sommable nous avons l'inégalité

$$|\tau_0| \geq \frac{1}{\|\psi\|^2} \left| \int dq dq' \psi(q') \mathcal{T}(q', q) \psi(q) \right|,$$

l'égalité n'étant possible que si  $\psi(q)$  appartient à l'espace propre associé à  $\tau_0$ .

Mais par ailleurs puisque  $\mathcal{T}(q', q)$  est une fonction symétrique positive

$$\left| \int dq dq' \psi(q') \mathcal{T}(q', q) \psi(q) \right| \leq \int dq dq' |\psi(q')| \mathcal{T}(q', q) |\psi(q)|,$$

alors que

$$\|\psi\| = \|(|\psi|)\|.$$

Donc si la fonction  $\psi(q)$  n'est de signe constant, la fonction  $|\psi(q)|$  donne une valeur moyenne plus grande. Nous concluons que la fonction  $\psi_0(q)$  est nécessairement de signe constant.

Une conséquence directe de ce résultat est que la valeur propre  $\tau_0$  est positive et non dégénérée. En effet supposons qu'il existe deux vecteurs propres indépendants  $\psi_0(q)$  et  $\tilde{\psi}_0(q)$  correspondant à la valeur propre  $\tau_0$ . Comme  $\mathbf{T}$  est hermitique, on peut toujours les choisir orthogonaux

$$\int dq \psi_0(q) \tilde{\psi}_0(q) = 0.$$

Calculons alors la quantité

$$\int dq' dq \tilde{\psi}_0(q') \mathcal{T}(q', q) \psi_0(q) = \tau_0 \int dq \tilde{\psi}_0(q) \psi_0(q) = 0,$$

où la condition que  $\psi_0(q)$  est vecteur propre avec la valeur propre  $\tau_0$  a été utilisée. Comme l'intégrant dans le membre de droite est le produit de trois fonctions positives, et compte-tenu de la forme (4.7) des noyaux  $\mathcal{T}$  ceci est impossible. En effet  $\mathcal{T}(q', q)$  est strictement positif pour tout couple  $\{q, q'\}$ .

### A1.5 Paramètre d'ordre et propriété d'amas

Quand le fondamental  $|0\rangle$  est dégénéré, la détermination des fonctions de corrélation en volume infini devient une question subtile, qui dépend explicitement de la manière dont la limite thermodynamique est atteinte; en particulier elle peut dépendre des conditions aux limites. Cette sensibilité aux conditions aux limites est une autre caractéristique de la région à plusieurs phases.

Examinons dans ce cas les propriétés de décroissance à grande distance des fonctions de corrélation.

Nous considérons la région à deux phases d'un système de type Ising et appelons  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$  les états fondamentaux de la matrice de transfert qui sont échangés par  $\mathbf{P}$  et orthogonaux. Tout vecteur  $|\alpha\rangle$  de la forme:

$$|\alpha\rangle = \cos \alpha |+\rangle + \sin \alpha |-\rangle, \quad (\text{A1.22})$$

est aussi un vecteur propre de la matrice de transfert avec la même valeur propre. Supposons qu'il soit possible de prendre la limite du volume infini de telle sorte que le vecteur  $|\alpha\rangle$  soit sélectionné. Les fonctions de corrélation font alors intervenir la valeur moyenne de la matrice  $\mathbf{S}$  associée au spin dans l'état  $|\alpha\rangle$ .

Notons  $\mathbf{S}$  la matrice correspondante (définie en (7.42)), omettant l'indice  $\sigma$  dans ce qui suit.

Définissons dans la phase de basse température:

$$\langle + | \mathbf{S} | + \rangle = m, \quad (\text{A1.23})$$

où  $m$  approche la valeur 1 dans le modèle d'Ising dans la limite de température nulle. Alors

$$\langle - | \mathbf{S} | - \rangle = \langle + | \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P} | + \rangle = -m. \quad (\text{A1.24})$$

Nous avons aussi

$$\langle + | \mathbf{S} | - \rangle = \langle - | \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P} | + \rangle = -\langle - | \mathbf{S} | + \rangle. \quad (\text{A1.25})$$

Comme  $\mathbf{S}$  est une matrice symétrique:

$$\langle + | \mathbf{S} | - \rangle = 0. \quad (\text{A1.26})$$

La propriété essentielle utilisée ci-dessous est que la matrice  $\mathbf{S}$ , restreinte au sous-espace  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , est diagonale dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ .

Les équations (A1.23–A1.26) impliquent en particulier:

$$\langle \alpha | \mathbf{S} | \alpha \rangle = m \cos 2\alpha, \quad (\text{A1.27})$$

$$\langle \alpha | \mathbf{S} | \pi/2 + \alpha \rangle = m \sin 2\alpha. \quad (\text{A1.28})$$

Sauf pour  $\alpha = \pi/4 \pmod{\pi/2}$ , la valeur moyenne du spin ne s'annule pas et ceci caractérise la région à plusieurs phases.

Calculons ce que naïvement on s'attendrait à être la fonction de corrélation de spin à deux points connexe (cf. section 4.3.2), c'est à dire la fonction à deux points de  $\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle$ , pour deux points séparés par une distance  $\ell$  dans la direction de temps mais à la même position transverse. Elle est donnée par:

$$W^{(2)}(\ell) = \frac{\langle \alpha | (\mathbf{S} - m \cos 2\alpha) \mathbf{T}^\ell (\mathbf{S} - m \cos 2\alpha) | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \mathbf{T}^\ell | \alpha \rangle}. \quad (\text{A1.29})$$

La matrice de transfert  $\mathbf{T}$  projetée sur les états fondamentaux pour  $\ell \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^\ell &= \tau_0^\ell \left[ (|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|) + O\left(e^{-\ell/\xi}\right) \right], \\ &= \tau_0^\ell \left[ |\alpha\rangle \langle \alpha| + |\pi/2 + \alpha\rangle \langle \pi/2 + \alpha| + O\left(e^{-\ell/\xi}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A1.30})$$

On en déduit

$$W^{(2)}(\ell) \sim m^2 \sin^2 2\alpha + O\left(e^{-\ell/\xi}\right). \quad (\text{A1.31})$$

Ce n'est que pour  $\alpha = n\pi$  que les fonctions de corrélation satisfont à la propriété de *cluster* (cf. section 4.3.2, équation (4.20)). Les vecteurs propres correspondant sont alors  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  qui sont échangés par  $\mathbf{P}$ . La symétrie de réflexion est spontanément brisée.

Notons que les fonctions de corrélation calculées en sommant sur toutes les configurations correspondent à moyenner sur les deux états fondamentaux et ne satisfont donc pas à la propriété de cluster.

Comme nous l'avons observé dans l'exemple 7.2, un des états  $|\pm\rangle$  est sélectionné dans la limite thermodynamique par la procédure suivante: on ajoute à l'énergie de configuration un terme couplé linéairement au paramètre d'ordre (un champ magnétique pour des spins). Ce terme favorise donc une des phases. On fait alors tendre l'amplitude de ce terme vers zéro après avoir pris la limite thermodynamique. Cette procédure choisit un des états  $|+\rangle$  or  $|-\rangle$  suivant le signe du champ. Les fonctions de corrélation du système ainsi obtenues satisfont alors à la propriété de cluster dans la limite du volume infini. Une solution alternative consiste à prendre la limite thermodynamique avec comme conditions aux limites tous les spins aux bords fixés et égaux, soit à  $+1$ , soit à  $-1$ .

On peut bien sûr se demander le sens physique de cette procédure: en section A1.6 nous allons montrer que de tels systèmes dans la phase de symétrie brisée ne sont plus ergodiques. Une fois préparé dans une phase, il y reste. Si l'on veut dans ces conditions que les moyennes temporelles soient égales aux moyennes d'ensemble, il faut restreindre dans la fonction de partition la somme sur les configurations aux configurations qui sont "proches" de la configuration avec tous les spins  $+$  ou tous les spins  $-$ . Le champ magnétique sélectionne les configurations appropriées automatiquement.

## A1.6 Dynamiques stochastiques et transitions de phase

*Modèle de type Ising.* Il est facile de construire une dynamique stochastique qui converge vers la distribution d'équilibre du modèle d'Ising. On peut, par exemple, imposer le principe d'équilibre détaillé et choisir comme probabilité de transition  $p$  d'une configuration  $\{S_{\mathbf{r}}\}$  vers une configuration  $\{S'_{\mathbf{r}}\}$ ,  $\mathbf{r}$  appartenant maintenant à un réseau  $\Omega$  de volume  $L^d$  dans  $\mathbb{Z}^d$ :

$$\begin{cases} p(S_{\mathbf{r}}, S'_{\mathbf{r}}) = e^{-\beta[\mathcal{E}(S'_{\mathbf{r}}) - \mathcal{E}(S_{\mathbf{r}})]} & \text{pour } \mathcal{E}(S_{\mathbf{r}}) < \mathcal{E}(S'_{\mathbf{r}}), \\ p(S_{\mathbf{r}}, S'_{\mathbf{r}}) = 1 & \text{autrement,} \end{cases} \quad (\text{A1.32})$$

où  $\mathcal{E}(S_{\mathbf{r}})$  est l'énergie de configuration:

$$\mathcal{E}(S) = \sum_{\substack{\text{n.n.} \\ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega \subset \mathbb{Z}^d}} -JS_{\mathbf{r}}S'_{\mathbf{r}}. \quad (\text{A1.33})$$

Pour les arguments qui suivent la connaissance précise des configurations qui sont directement reliées par la matrice  $\mathbf{p}$  n'est pas utile pourvu que le système soit globalement connexe, c'est à dire qu'en volume fini il existe une probabilité non nulle de relier deux configurations de spin arbitraires. La propriété importante qui est vérifiée par toutes les dynamiques locales est que la probabilité d'aller d'une configuration à une autre configuration de plus haute énergie est, à basse température, de l'ordre de  $e^{-\beta\Delta\mathcal{E}}$ , où  $\Delta\mathcal{E}$  est la différence d'énergie.

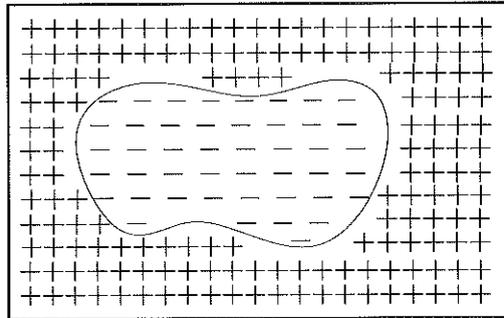


FIG. 24 – Bulle de spins – dans un environnement de spins +.

C'est pourquoi, à basse température, si nous partons d'une configuration où tous les spins valent par exemple +1, la probabilité de créer une bulle de spins -1 est proportionnelle à  $e^{-\beta JA}$ , où  $A$  est l'aire de la surface de la bulle (comme la figure 24 l'illustre pour la dimension deux). À  $d$  dimensions une bulle minimale est une sphère. Si nous appelons  $L$  son rayon, l'aire est d'ordre  $L^{d-1}$  et la probabilité est d'ordre  $e^{-\sigma L^{d-1}}$ , où  $\sigma$  est la tension de surface, à basse température  $\sigma \propto \beta = 1/T$ .

Pour  $d = 1$  le système est donc ergodique, et aucune transition de phase n'est possible.

Pour  $d > 1$  le même mécanisme qui conduit à l'existence de plusieurs phases à basse température est responsable de la brisure d'ergodicité.

*Modèles à symétrie continue.* Prenons de nouveau l'exemple de la symétrie  $O(N)$ . Considérons maintenant une bulle dans le centre de laquelle le vecteur de spin est tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction d'aimantation spontanée. Dans ce cas le bilan d'énergie défavorise les configurations où comme précédemment on a des spins tournés d'un angle  $\theta$  à l'intérieur d'une sphère. Ceci donnerait de nouveau une énergie de surface en  $L^{d-1}$ . Au lieu de cela il est plus avantageux d'interpoler entre  $\theta$  et zéro de façon linéaire sur une distance  $L$ . Le coût en énergie entre proches voisins est maintenant proportionnel à  $1 - \cos(\theta/L) \sim \theta^2/2L^2$ . Cette énergie doit être multipliée par le nombre de spins dans le sphère de rayon  $L$ . On trouve

$$\Delta\mathcal{E} \propto \beta\theta^2 L^{d-2}.$$

Nous concluons qu'en dimensions  $d \leq 2$  cette énergie reste finie quand  $L \rightarrow \infty$ . Il y a donc une probabilité finie de faire tourner tous les spins d'un angle  $\theta$ , et la symétrie  $O(N)$  ne peut pas être brisée. Au contraire pour  $d > 2$  une transition est possible.

*Conclusion.* Ces analyses de haute et basse température, statique et dynamique, nous ont permis de mettre en évidence l'existence d'une transition de phase, et la nature des phases. Toutefois nous n'en avons tiré aucun renseignement sur la transition de phase elle-même, ou sur le comportement des quantités thermodynamiques dans le voisinage de la température critique. Ces problèmes seront examinés dans les chapitres suivants.

## A1.7 Développement en $1/N$ et diagrammes

Nous donnons ici quelques détails supplémentaires sur le calcul détaillé de deux diagrammes qui sont apparus dans le développement en  $1/N$ .

### A1.7.1 Diagramme à une boucle

Le diagramme représenté sur la figure 14, qui est aussi proportionnel à la contribution à une boucle à la fonction à deux points dans la théorie  $\phi^4$ , a joué un rôle essentiel dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Nous allons évaluer son comportement quand la masse  $m$  tend vers zéro (dans l'échelle de coupure  $\Lambda$ ).

*Le diagramme à une boucle régularisé.* Considérons un propagateur régularisé de la forme générale (14.7). Le diagramme 14 prend la forme (14.8):

$$\Omega_d(m) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_\Lambda(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{m^2 + k^2 D(k^2/\Lambda^2)} = \Lambda^{d-2} \omega_d(m/\Lambda), \quad (\text{A1.34})$$

où la fonction  $D(t)$  est positive et régulière pour  $t \geq 0$  et normalisée par  $D(0) = 1$ . En choisissant une fonction  $D(k)$  suffisamment croissante pour  $|k| \rightarrow \infty$ , il est possible rendre tout diagramme convergent et en particulier le diagramme (14.8).

Nous avons besoin des premiers termes du développement de  $\Omega_d(m)$  pour  $m^2 \rightarrow 0$ . Nous allons faire le calcul pour une fonction  $D$  particulière, mais le résultat exhibera la plupart des propriétés du cas général:

$$\omega_d(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{z^2 + k^2 + k^4} = N_d \int_0^\infty \frac{k^{d-1} dk}{z^2 + k^2 + k^4},$$

où la constante  $N_d$  est l'aire de la sphère  $S_{d-1}$  de rayon unité, divisée par  $(2\pi)^d$ . La deuxième intégrale, où l'intégrale angulaire a été effectuée, définit une fonction holomorphe pour  $0 < \operatorname{Re} d < 4$ , ce qui est la situation la plus intéressante. Le dénominateur est un polynôme du second degré en  $k^2$  qui pour  $z = 0$  a comme racines  $k^2 = 0$  et  $k^2 = -1$ . De façon générale factorisons le polynôme

$$z^2 + k^2 + k^4 = (k_1^2 + k^2)(k_2^2 + k^2).$$

Les deux racines sont des fonctions holomorphes en  $z^2$  dans un voisinage de  $z = 0$ . À l'ordre  $z^2$ , par exemple,

$$k_1^2 = z^2 + z^4 + O(z^6), \quad k_2^2 = 1 - z^2 + O(z^4).$$

Nous procédons par prolongement analytique à partir de  $0 < \operatorname{Re} d < 2$  et séparons l'intégrale en deux contributions

$$\omega_d(z) = \frac{N_d}{k_1^2 - k_2^2} \int_0^\infty k^{d-1} dk \left( \frac{1}{k^2 + k_2^2} - \frac{1}{k^2 + k_1^2} \right).$$

Prenant  $k^2$  comme variables ramène chaque intégrale à une intégrale connue. On en déduit

$$\int_0^\infty \frac{k^{d-1} dk}{k^2 + \kappa^2} = \kappa^{d-2} \frac{\pi}{2 \sin(\pi d/2)}.$$

Utilisant ce résultat pour  $\omega_d(z)$  nous reconnaissons la constante  $K_d$  définie en(14.12b):■

$$\omega_d(z) = K(d) \frac{k_2^{d-2} - k_1^{d-2}}{k_2^2 - k_1^2}.$$

Cette expression est maintenant régulière jusqu'à  $\operatorname{Re} d < 4$ . Les premiers termes pour  $z \rightarrow 0$  sont donc

$$\omega_d(z) = \omega_d(0) - K(d)z^{d-2} + a(d)z^2 + O(z^4, z^d),$$

avec

$$a(d) = (3 - d/2)K(d),$$

dont on vérifie qu'il est égal à la valeur (14.13).

De façon générale le terme proportionnel à  $k_2^{d-2}$  engendre un développement régulier en  $z^2$  et le terme proportionnel à  $k_1^{d-2}$  engendre un développement régulier multiplié par  $z^{d-2}$ . On peut vérifier avec un peu d'analyse que cette structure est générale.

### A1.7.2 La fonction à deux points à l'ordre $1/N$ pour $u \rightarrow 0$

À l'ordre  $1/N$  un seul diagramme contribue la fonction à deux points  $\langle \sigma\sigma \rangle$  (figure 22). Dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  et après une renormalisation de masse, on trouve

$$\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p) = p^2 + \frac{2}{N(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(6/u) + b(d)q^{-\varepsilon}} \left( \frac{1}{(p+q)^2} - \frac{1}{q^2} \right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (\text{A1.35})$$

Pour calculer les coefficients du développement de  $\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p)$  pour  $u \rightarrow 0$ :

$$\sum_{k \geq 1} \alpha_k(\varepsilon) u^k p^{2-k\varepsilon} + \beta_k(\varepsilon) u^{(2+2k)/\varepsilon} p^{-2k}. \quad (\text{A1.36})$$

il est commode d'utiliser la transformée de Mellin de l'intégrale considérée comme fonction de  $u$ . En effet si une fonction  $f(u)$  a pour  $u \rightarrow 0$  un comportement de la forme  $u^t$ , alors la transformée de Mellin

$$M(s) = \int_0^\infty du u^{-1-s} f(u)$$

a un pôle à  $s = t$ . Appliquant cette transformation à l'intégrale, et inversant l'ordre des intégrations  $q$  et  $u$  nous sommes ramenés à l'intégrale

$$\int_0^\infty du \frac{u^{-1-s}}{(6/u) + b(d)q^{-\varepsilon}} = \frac{1}{6} \left( \frac{b(d)q^{-\varepsilon}}{6} \right)^{1-s} \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Le résultat de l'intégration restante sur  $q$  se déduit de l'intégrale générique

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(p+q)^{2\mu} q^{2\nu}} = p^{d-2\mu-2\nu} \frac{\Gamma(\mu+\nu-d/2)\Gamma(d/2-\mu)\Gamma(d/2-\nu)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(d-\mu-\nu)}. \quad (\text{A1.37})$$

Les termes avec des puissances entières de  $u$  correspondent au développement perturbatif qui existe pour  $\varepsilon$  suffisamment petit en régularisation dimensionnelle.  $\alpha_k$  a des pôles en  $\varepsilon = (2l+2)/k$  pour lesquels la puissance correspondante de  $p^2$  est  $-l$ , c'est-à-dire un entier. On vérifie que  $\beta_l$  a un pôle pour la même valeur de  $\varepsilon$  et que les contributions singulières se compensent dans la somme. Pour ces dimensions particulières des logarithmes de  $u$  apparaissent dans le développement.

## A1.8 Modèle $\sigma$ non-linéaire: Régularisation dimensionnelle

Nous nous proposons d'étudier une version particulière du modèle  $\sigma$  non-linéaire à l'ordre d'une boucle pour vérifier en particulier qu'il peut être renormalisé avec seulement deux constantes de renormalisation  $Z, Z_f$  comme on l'a montré dans le chapitre 15.

Considérons la fonction de partition du modèle  $\sigma$  non linéaire de symétrie  $O(4) \sim SU(2) \times SU(2)$

$$\mathcal{Z} = \int \left[ (f^2 - \pi^2(x))^{-1/2} d\pi(x) \right] \exp[-\mathcal{H}(\pi, c)], \quad (A1.38)$$

où l'action est donnée par

$$\mathcal{H}(\pi, c) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\partial\pi(x))^2 + \frac{(\pi \cdot \partial\pi(x))^2}{f^2 - \pi^2(x)} \right] - c\sqrt{f^2 - \pi^2(x)} \right\}. \quad (A1.39)$$

Dans ce qui suit il sera commode de poser  $c = \mu^2 f$ .

*Règles de Feynman.* Nous allons avoir besoin du propagateur et aux vertex à 4 et 6 points.

$$\begin{aligned} \Delta_2(p) &= \frac{1}{p^2 + \mu^2}, \\ V^{(4)} &= \frac{1}{8f^2} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \left( (p_1 + p_2)^2 + \mu^2 \right), \\ V^{(6)} &= \frac{1}{16f^4} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{i_5 i_6} \left( (p_1 + p_2)^2 + \mu^2 \right). \end{aligned}$$

*Hamiltonien renormalisé.*

$$\mathcal{H}_r(\pi) = \frac{Z Z_f}{2} \int d^d x \left[ (\partial\pi)^2 + (\partial\sigma)^2 \right] - \mu^2 f \int \sigma(x) d^d x, \quad (A1.40)$$

où  $\sigma$  est maintenant donné par:

$$\sigma(x) = [f^2 Z^{-1} - \pi^2]^{1/2}.$$

Ainsi en termes des champs renormalisés,  $\Delta_2^{-1}$  acquiert un facteur supplémentaire  $Z_f Z$ , de même que  $V^{(4)}$  le facteur  $Z_f Z^2$  et  $V^{(6)}$  le facteur  $Z_f Z^3$ . De plus  $\mu^2$  est remplacé par  $\mu^2 Z^{-1/2} Z_f^{-1}$ .

*Calculs à l'ordre d'une boucle.* Nous allons maintenant déterminer quelques fonctions de corrélation renormalisées à l'ordre d'une boucle. Il est commode de poser  $d = 2 + \varepsilon$ . Pour calculer les constantes de renormalisation, il est utile de définir une constante de couplage sans dimension. On pose donc

$$f^{-2} \Gamma(1 - \varepsilon/2) \mu^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} = g.$$

*Valeur moyenne du champ.* La valeur moyenne  $\langle \sigma \rangle$  est donnée par

$$\langle \sigma \rangle = f Z^{-1/2} - \frac{1}{2} f^{-1} \langle \pi^2 \rangle = f \left( Z^{-1/2} - \frac{3}{2f^2} I \right),$$

où  $I$  est une intégrale qui apparaît partout à l'ordre d'une boucle

$$I = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{p^2 + \mu^2} = \mu^{d-2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2).$$

Si on choisit alors

$$Z = 1 + \frac{3g}{2\pi\varepsilon} + O(g^2),$$

On obtient  $\langle \sigma \rangle = f$ .

*Fonction à deux points.* Calculons l'inverse de la fonction à deux points  $\Gamma_{ij}^{(2)} = [W^{(2)}]_{ij}^{-1}$ . La fonction à deux points est proportionnelle à  $\delta_{ij}$  facteur que l'on omet dans ce qui suit. Alors

$$\Gamma^{(2)}(p) = ZZ_f p^2 + Z^{1/2} \mu^2 + \frac{1}{f^2} (p^2 + \frac{3}{2} \mu^2) \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{q^2 + \mu^2} + O(f^{-4}).$$

On vérifie que la valeur de  $Z$  obtenue ci-dessus rend fini le coefficient de  $\mu^2$ . A partir du coefficient de  $p^2$  on trouve que, si l'on choisit

$$Z_f = 1 - \frac{2g}{2\pi\varepsilon},$$

la fonction à deux points est finie et se réduit à son approximation en arbre

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 + \mu^2 + O(f^{-4}).$$

*La dimension quatre.* Que se passe-t-il lorsque la dimension  $d$  s'approche de 4? On vérifie que les divergences peuvent être compensées par des contre-termes correspondant à de nouvelles interactions de la forme

$$(\partial_\mu \phi \cdot \partial_\nu \phi)^2, \quad (\partial \phi \cdot \partial \phi)^2,$$

où l'on a noté  $\phi$  le vecteur à quatre composantes  $\pi, \sigma$ . Ceci introduit bien sûr de nouveaux paramètres et génère à quatre dimensions un développement de basse énergie dans l'esprit de la théorie des perturbations chirale (voir par exemple Gasser et Leutwyler).

## A1.9 Groupe de renormalisation fonctionnel et équations de champs

Dans cette section nous rappelons la méthode générale qui permet de démontrer les équations de champ pour des théories statistiques ou quantiques. Nous montrons ensuite que les équations de groupe de renormalisation obtenues en section 16 s'en déduisent, ce qui fournit donc une autre démonstration.

Nous montrons enfin que la transformée de Legendre d'une fonctionnelle liée simplement au hamiltonien satisfait une équation de flot plus simple,

### A1.9.1 Equations de champ et de groupe de renormalisation

*Equations de champ.* Nous considérons l'intégrale fonctionnelle générale

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi] e^{-\mathcal{H}(\phi)}.$$

Une méthode simple permet de démontrer les équations de champs, basée sur l'invariance d'une intégrale par changement de variables infinitésimal  $\phi \mapsto \varphi$ :

$$\phi(x) = \varphi(x) + \varepsilon K(\varphi, x),$$

où nous allons développer au premier ordre dans le paramètre constant  $\varepsilon$ .

Le jacobien  $\mathcal{J}$  de la transformation est

$$\mathcal{J} = \det \frac{\delta\phi(x)}{\delta\varphi(y)} = 1 + \varepsilon \int dx \frac{\delta K(\varphi, x)}{\delta\varphi(x)} + O(\varepsilon^2),$$

où nous avons utilisé de nouveau l'identité  $\ln \det = \text{tr} \ln$ .

On en déduit l'équation générale

$$\left\langle \int dx \left[ \frac{\delta K(\phi, x)}{\delta\phi(x)} - K(\phi, x) \frac{\delta\mathcal{H}(\phi)}{\delta\phi(x)} \right] \right\rangle = 0, \quad (\text{A1.41})$$

où  $\langle \cdot \rangle$  signifie valeur moyenne avec le poids  $e^{-\mathcal{H}(\phi)}$ .

Une façon équivalente d'obtenir cette équation est de remarquer que l'intégrale d'une dérivée totale est nulle:

$$\int [d\phi] \frac{\delta}{\delta\phi(x)} K(\phi) e^{-\mathcal{H}(\phi)} = 0.$$

Explicitant la dérivée nous obtenons l'équation

$$\left\langle \frac{\delta K(\phi)}{\delta\phi(x)} - K(\phi) \frac{\delta\mathcal{H}(\phi)}{\delta\phi(x)} \right\rangle = 0.$$

Appliquant cette identité à une fonction  $K(\phi, x)$  et intégrant sur  $x$  nous retrouvons l'équation (A1.41).

On peut bien sûr se demander si ces manipulations formelles sont toujours justifiées. Dans certains cas un processus limite à partir d'une approximation de réseau, et même de réseau fini peut se révéler nécessaire. Mais le plus souvent démontrer directement que ces identités sont vraies à tous les ordres du développement perturbatif.

*Equation de groupe de renormalisation.* On suppose maintenant que le hamiltonien  $\mathcal{H}(\phi)$  dépend d'un paramètre  $s$  mais que la fonction de partition  $\mathcal{Z}$  n'en dépend pas, et donc

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial s} = - \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{H}(\phi, s) \right\rangle = 0.$$

Nous décomposons  $\mathcal{H}(\phi, s)$  en une somme de deux termes

$$\mathcal{H}(\phi, s) = \frac{1}{2} \int dx \phi \Delta^{-1}(s) \phi + V(\phi, s),$$

et donc l'équation devient

$$\left\langle \frac{1}{2} \int dx \phi \Delta^{-1}(s) D_s \Delta^{-1}(s) \phi + \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{V}(\phi, s) \right\rangle = 0, \quad (\text{A1.42})$$

avec

$$D_s = -\frac{\partial \Delta}{\partial s}.$$

L'équation fondamentale (16.8) est alors obtenue avec le choix suivant:

$$K(\phi, x) = \int dy D_s(x-y) \left[ (\Delta^{-1}\phi)_y - \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi(y)} \right].$$

La contribution du jacobien devient

$$\int dx \frac{\delta K(\phi, x)}{\delta \phi(x)} = -\frac{\partial \ln \det \Delta}{\partial s} - \int dx dy D_s(x-y) \frac{\delta^2 V}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}.$$

Le second terme donne

$$\begin{aligned} \int dx K(\phi, x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(x)} &= \int dx dy D_s(x-y) \left[ (\Delta^{-1}\phi)_y - \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi(y)} \right] \\ &\quad \times \left[ (\Delta^{-1}\phi)_x + \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi(x)} \right] \\ &= \int dx dy D_s(x-y) \left[ (\Delta^{-1}\phi)_y (\Delta^{-1}\phi)_x - \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi(x)} \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi(y)} \right]. \end{aligned}$$

Eliminant alors le terme quadratique entre les deux équations (A1.41) et (A1.42) on obtient une équation qui exprime une condition suffisante pour que la fonction de partition soit invariante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{V}(\phi, s) &= \frac{1}{2} \int dx dy D_s(x-y) \left[ \frac{\delta^2 V}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi(x)} \frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi(y)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \det \Delta}{\partial s}. \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation (16.8) et en identifiant le paramètre à  $\ln \Lambda$  on obtient les équations de groupe de renormalisation.

Pour prendre en compte la renormalisation du champ, on ajoute un terme linéaire en  $\phi$ :  $K(\phi, x) \mapsto K(\phi, x) + \frac{1}{2} \eta \phi(x)$ . Cela ajoute une constante infinie au

jacobien, qui est compensée par un changement de normalisation de la fonction de partition, et

$$\int dx K(\phi, x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(x)} \mapsto \int dx K(\phi, x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(x)} + \frac{1}{2} \eta \int dx \phi(x) \frac{\delta \mathcal{H}(\phi)}{\delta \phi(x)}.$$

De façon plus générale, on obtient d'autres équations de groupe de renormalisation en ajoutant à  $K$  d'autres fonctionnelles locales de  $\phi$ . Mais ces manipulations algébriques ne doivent pas faire perdre de vue que le but est un construire un groupe de renormalisation qui a des points fixes.

### A1.9.2 Transformation de Legendre

Nous avons vu en fin de section 16.1 que la fonctionnelle

$$\mathcal{W}(J, s) = \frac{1}{2} \int dx J R_s J - \mathcal{V}(R_s J, s) \quad (A1.43)$$

avait une interprétation de fonctionnelle génératrice de fonctions de corrélation connexes. On vérifie que  $\mathcal{W}(J, s)$  satisfait une équation de flot analogue à l'équation (16.18):

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{W}(J, s) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y [R_s^{-1} D_s R_s^{-1}](x - y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta J(x) \delta J(y)} + \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta J(x)} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta J(y)} \right]. \quad (A1.44)$$

Il est aussi naturel d'introduire la transformée de Legendre de  $\mathcal{W}(J)$ :

$$\mathcal{W}(J, s) + \mathcal{G}(\varphi, s) = \int d^d x J(x) \varphi(x), \quad J(x) = \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \varphi(x)}.$$

Celle-ci satisfait une équation de flot que nous allons établir.

La stationarité de la transformation de Legendre implique

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{W} \right|_J + \left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G} \right|_\varphi = 0.$$

Par ailleurs il est commode de poser

$$\Sigma(\varphi, s, x, y) = \int d^d z R_s^{-1}(x - z) \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta J(z) \delta J(y)}.$$

Alors une autre propriété de la transformation de Legendre entraîne

$$\int d^d z d^d z' \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(z)} R_s(z - z') \Sigma(\varphi, s, z', y) = \delta^{(d)}(x - y). \quad (A1.45)$$

L'équation (A1.44) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}(\varphi, s) &= -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y [R_s^{-1} D_s](x-y) \Sigma(\varphi, s, x, y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^d x d^d y [R_s^{-1} D_s R_s^{-1}](x-y) \varphi(x) \varphi(y). \end{aligned}$$

Avec ces définitions pour  $\mathcal{V} = 0$

$$\mathcal{G}(\varphi, s) = \frac{1}{2} \int d^d x \varphi R_s^{-1} \varphi.$$

Si l'on pose

$$\mathcal{G}(\varphi, s) = \frac{1}{2} \int d^d x \varphi R_s^{-1} \varphi + \mathcal{G}_I(\varphi, s),$$

l'équation devient (omettant un terme indépendant de  $\varphi$ )

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}_I(\varphi, s) = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y L_s(x-y) \Sigma(\varphi, s, x, y), \quad (\text{A1.46})$$

avec

$$L_s = R_s^{-1} D_s = \frac{\partial}{\partial s} \ln R_s.$$

Le noyau  $\Sigma(\varphi, s, x, y)$  est maintenant solution de

$$\Sigma(\varphi, s, x, y) + \int d^d z d^d z' R_s(x-z) \frac{\delta \mathcal{G}_I}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(z')} \Sigma(\varphi, s, z', y) = \delta^{(d)}(x-y). \quad (\text{A1.47})$$

De façon équivalente la transformée de Fourier

$$\tilde{\Sigma}(\varphi, s, p, q) = \int d^d x d^d y e^{ipx+iqy} \Sigma(\varphi, s, x, y)$$

satisfait

$$\tilde{\Sigma}(\varphi, s, p, q) + \tilde{R}_s(p) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\delta \mathcal{G}_I}{\delta \tilde{\varphi}(p) \delta \tilde{\varphi}(-k)} \tilde{\Sigma}(\varphi, s, k, q) = (2\pi)^d \delta(p+q). \quad (\text{A1.48})$$

et l'équation (A1.46) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}_I(\varphi, s) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} s \frac{d \ln \tilde{R}_s(k)}{ds} \tilde{\Sigma}(\varphi, s, k, -k). \quad (\text{A1.49})$$

La fonctionnelle  $\mathcal{G}_I(\varphi, s)$  est locale et satisfait une équation relativement simple.

Pour expliciter ces équations, par exemple, à l'ordre  $\varphi^2$  nous introduisons le noyau  $\Sigma_0$  solution de

$$\Sigma_0(x, y, s) + \int d^d z d^d z' R_s(x - z) \mathcal{G}_1^{(2)}(z - z') \Sigma_0(z', y, s) = \delta^{(d)}(x - y),$$

ou en représentation de Fourier

$$\tilde{\Sigma}_0(k, s) = \left[ 1 + \tilde{R}_s(k) \tilde{\mathcal{G}}_1^{(2)}(k) \right]^{-1}.$$

Alors

$$\Sigma = \Sigma_0 - \frac{1}{2} \Sigma_0 R_s \frac{\delta^2 \mathcal{G}_1^{(4)}}{\delta \varphi \delta \varphi} \varphi \varphi \Sigma_0 + O(\varphi^4),$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{G}_1^{(2)}(k, s) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} D_s(k) \tilde{\Sigma}_0^2(k) \tilde{\mathcal{G}}_1^{(4)}(p, -p, k, -k).$$

*La théorie  $\phi^4$ .* Nous posons maintenant  $s = \ln \Lambda$  et appliquons ces identités à la théorie  $u\phi^4$ . À l'ordre  $u^1$  nous avons

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2} r_{c1} u \int d^d x \phi^2(x) + \frac{1}{4!} u \int d^d x \phi^4(x) + O(u^2).$$

On en déduit

$$\mathcal{W}(J) = \frac{1}{2} \int d^d x J R^{-1} J - \frac{1}{2} r_{c1} u \int d^d x (R J)^2(x) - \frac{1}{4!} u \int d^d x (R J)^4(x) + O(u^2).$$

Par ailleurs

$$\varphi(x) = [R^{-1} J](x) = \phi(x) + O(u)$$

Utilisant la stationarité de la transformation de Legendre qui implique

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u} = 0,$$

on en déduit

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{2} u r_{c1} \int d^d x \varphi^2(x) + \frac{1}{4!} u \int d^d x \varphi^4(x) + O(u^2).$$

À cet ordre on retrouve l'équation donnant  $r_{c1}$  obtenue en section 16.3

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} r_{c1} = \frac{1}{2} D_\Lambda(0).$$

De façon générale les équations (A1.47,A1.49) peuvent être résolues itérativement pour fournir un développement perturbatif. À cause de la transformation de Legendre seuls les diagrammes un-irréductibles contribuent. Ainsi le terme de degré 6 en  $\varphi$  est maintenant d'ordre  $u^3$ .

*EGR en forme standard.* Après élimination de la dépendance explicite en  $\Lambda$  et renormalisation du champ, on obtient l'équation de flot analogue de l'équation (16.44):

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{G}_1(\varphi, \lambda) &= \int d^d x \varphi(x) \left[ \frac{1}{2}(d+2+\eta) + \sum_{\mu} x_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right] \frac{\delta \mathcal{G}_1}{\delta \varphi(x)} \\ &+ \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Lambda \frac{d \ln R_{\Lambda}}{d\Lambda} (x-y) \Sigma(\varphi, \lambda, y, x) \\ &+ \frac{1}{2} \eta \int d^d x d^d y [\Delta_{\Lambda}]^{-1} (x-y) \varphi(x) \varphi(y). \end{aligned}$$

### A1.9.3 Groupe renormalisation fonctionnel et régularisation dimensionnelle

Illustrons la remarque que ce formalisme général permet d'écrire d'autres équations par un exemple.

Dans le cadre de la régularisation dimensionnelle la théorie n'a plus de divergences de grande impulsion au moins pour des dimensions génériques. Par contre la question qui reste ouverte est la question du comportement critique et des divergences possibles associées. Pour écrire un groupe renormalisation exact on peut, par exemple, introduire un facteur de coupure à petite impulsion sous la forme d'un terme de masse. On part donc de

$$\tilde{\Delta}_m(p) = \frac{1}{p^2 + m^2},$$

et on écrit une condition nécessaire pour la fonction de partition soit indépendante de  $m$ . L'expression formelle de l'équation (16.18) n'est pas modifiée, le paramètre  $m$  remplaçant  $\Lambda$

$$m \frac{d}{dm} \mathcal{V}(\phi, m) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y D_m(x-y) \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \phi(y)} \right], \quad (A1.50)$$

avec maintenant

$$\tilde{D}_m(p) = -m \frac{\partial \tilde{\Delta}_m(p)}{\partial m} = \frac{2m^2}{(p^2 + m^2)^2}.$$

Une différence notable correspond aux intégrations, par exemple la fonction  $\tilde{R}(p)$  est identique à  $\tilde{\Delta}(p)$  puisque  $1/(1+p^2)$  est une fonction régulière pour  $p=0$ .

Par contre les manipulations algébriques ne changent pas. Pour l'illustrer nous pouvons calculer la fonction  $\beta(g)$  pour  $d = 4$  à l'ordre  $g^2$ . Le coefficient est donné en terme de  $\tilde{B}_*(0)$  est la fonction  $\tilde{B}_*(p)$  est donnée par l'expression (16.54)

$$\tilde{B}_*(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) \tilde{R}_*(p - k).$$

Ici

$$\begin{aligned} \tilde{B}_*(0) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{(k^2 + 1)^3} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(k^2 + 1)^3} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{s ds}{(s + 1)^3} = \frac{1}{16\pi^2}, \end{aligned}$$

c'est à dire un résultat identique à celui obtenu dans l'autre formalisme.

Le calcul de  $\eta(g)$  est un peu long mais on trouve de nouveau le même résultat.

