Université Paris XI

— Thèse de doctorat —

soutenue par

Samuel Caillerie

Spécialité : *Astrophysique et Méthodes Associées*

Effets de la Topologie de l'Univers sur le Fond Diffus Cosmologique

soutenue le 6/12/2005 devant le jury composé de :

Jean-Loup Puget	**Président**
James Bartlett	**Rapporteur**
François Bouchet	**Rapporteur**
Jean-Pierre Luminet	**Examinateur**
Marc Lachièze-Rey	**Directeur de thèse**

Service d'Astrophysique
DSM/DAPNIA/CEA-Saclay

Table des matières

Notations **10**

Résumé **11**

Remerciements **13**

Introduction: fond diffus cosmologique et topologie **16**

I Fond diffus cosmologique **21**

1 Le modèle standard **23**
1.1 Principe cosmologique 23
1.1.1 Origine 23
1.1.2 Vérifications observationnelles 24
1.2 Métrique de Robertson et Walker 26
1.3 Equations d'Einstein 30
1.4 Conservation de l'énergie 31
1.5 Evolution de l'Univers 33
1.6 Rayonnement fossile 36

2 Evolution des perturbations dans un cadre relativiste **39**
2.1 Perturbations en relativité générale 40
2.2 Métrique perturbée 41
2.3 Transformation des coordonnées 42
2.3.1 Exemple : perturbation spatiale 42
2.3.2 Lois de transformation des tenseurs 43
2.3.3 Application aux perturbations de la métrique 45
2.4 Choix d'une jauge 46
2.4.1 Jauge synchrone 46
2.4.2 Jauge longitudinale 47
2.5 Quantités perturbées 47

2.6 Equations de conservation perturbées 49
2.6.1 Equation de continuité 49
2.6.2 Equation d'Euler 49
2.7 Equations d'Einstein perturbées 50

3 Thermodynamique de l'Univers 53
3.1 Equation de Liouville 53
3.1.1 Fonction de distribution 53
3.1.2 Espace non-perturbé 55
3.1.3 Espace perturbé 56
3.2 Collisions 57
3.3 Equation de Boltzmann 59

4 Spectres de puissance 61
4.1 Harmoniques sphériques 61
4.2 Fluctuations de température 62
4.3 Anisotropies primaires 65
4.3.1 Formule de Sachs-Wolfe 65
4.3.2 Effet Doppler 67
4.3.3 Effet Sachs-Wolfe ordinaire 68
4.3.4 Effet Sachs-Wolfe intégré 70

II Topologie de l'Univers 73

5 Topologie : cadre général 75
5.1 Motivation 75
5.2 Exemples préliminaires 76
5.3 Outils de base 79
5.3.1 Homéomorphismes 79
5.3.2 Connexité 79
5.3.3 Espace de revêtement universel 80
5.3.4 Domaine fondamental 81
5.3.5 Groupe d'holonomies 81
5.4 Espaces sphériques 83
5.5 Contraintes sur les topologies possibles 84

6 Premières approches 87
6.1 Cristallographie cosmique 87
6.1.1 Méthode directe 87
6.1.2 Histogramme de séparation de paires 88
6.2 Recherche de cercles 91
6.3 Effet Sachs-Wolfe 93

7 Modes propres du laplacien **97**
7.1 Modes propres du laplacien 97
7.2 Harmoniques hypersphériques 98
7.3 Harmoniques toroïdales 100
7.3.1 Définition 100
7.3.2 Fonctions de Wigner 101
7.3.3 Fonctions de Wigner et harmoniques toroïdales 103
7.3.4 Action sur la composée de deux rotations 103
7.4 Applications aux espaces sphériques 104
7.4.1 Générateurs des groupes d'holonomies 104
7.4.2 Modes propres du laplacien 105
7.5 Changement de base 108

8 Simulations numériques **111**
8.1 Spectres de puissance 112
8.1.1 A partir des cartes 112
8.1.2 A partir des multiplicités des modes 115
8.2 Fonction de corrélation à deux points 117
8.3 Quantités statistiques 118
8.3.1 Corrélations croisées 118
8.3.2 Isotropie statistique 120
8.4 Pour aller plus loin 121

Conclusion: quelle forme pour notre Univers ? **122**

Annexes **125**

A Tenseur de Riemann et connection affine **129**
A.1 Connection affine 129
A.2 Tenseur de Riemann 131
A.3 Application au modèle de Friedmann-Lemaître 132
A.4 Application à la jauge longitudinale 133

B Fonctions spéciales **135**
B.1 Polynômes de Legendre 135
B.2 Harmoniques sphériques 136
B.2.1 Définition 136
B.2.2 Propriétés 137
B.3 Fonctions de Bessel 138
B.4 Polynômes de Jacobi 140
B.5 Polynômes de Gegenbauer 140
B.6 Coefficients de Clebsch-Gordan 141

C Quaternions **143**
C.1 Définition . . . 143
C.2 Isomorphisme SO(3)∼SU(2)/$\mathbb{Z}_2$ . . . 144
C.3 Isomorphisme SO(4)∼SO(3)×SU(2) . . . 144

Articles **146**

$\mathfrak{A}$ Laplacian eigenmodes for spherical spaces **149**
$\mathfrak{A}$.1 Introduction . . . 150
$\mathfrak{A}$.1.1 Cosmic Topology . . . 150
$\mathfrak{A}$.1.2 Spherical spaces . . . 150
$\mathfrak{A}$.2 Eigenmodes of $\mathcal{S}^3$ . . . 151
$\mathfrak{A}$.2.1 Basis ($\mathcal{B}_1$): hyperspherical harmonics . . . 152
$\mathfrak{A}$.2.2 The parabolic basis ($\mathcal{B}_2$) . . . 152
$\mathfrak{A}$.2.3 The Wigner D-functions . . . 153
$\mathfrak{A}$.2.4 Change of basis . . . 154
$\mathfrak{A}$.3 SO(4) rotations . . . 155
$\mathfrak{A}$.3.1 General case . . . 155
$\mathfrak{A}$.3.2 Single action rotations . . . 156
$\mathfrak{A}$.3.3 Invariant functions . . . 156
$\mathfrak{A}$.4 Eigenmodes of spherical spaces . . . 158
$\mathfrak{A}$.4.1 Diagonal matrices . . . 158
$\mathfrak{A}$.4.2 A general procedure . . . 158
$\mathfrak{A}$.5 Application to the spherical spaces . . . 160
$\mathfrak{A}$.5.1 Dodecahedral space . . . 160
$\mathfrak{A}$.5.2 Other multi-connected spherical spaces . . . 161
$\mathfrak{A}$.6 Conclusion . . . 161
$\mathfrak{A}$.7 Appendices . . . 163

$\mathfrak{B}$ Constraining Cosmic Topology with CMB Polarization **167**
$\mathfrak{B}$.1 Introduction . . . 167
$\mathfrak{B}$.2 CMB physics and correlation between matched points in temperature maps . . . 169
$\mathfrak{B}$.3 A quick reminder of CMB polarization . . . 172
$\mathfrak{B}$.4 Correlation in polarization maps . . . 174
$\mathfrak{B}$.5 Simulated maps and results . . . 174
$\mathfrak{B}$.6 Possible sources of blurring of the circles . . . 177
$\mathfrak{B}$.7 Conclusion . . . 180

$\mathfrak{C}$ A new analysis of Poincaré dodecahedral spacetime model **181**
$\mathfrak{C}$.1 Introduction . . . 181
$\mathfrak{C}$.2 Eigenmodes of the laplacian . . . 184
$\mathfrak{C}$.3 Temperature maps . . . 186

$\mathfrak{C}$.3.1 Maps 187
$\mathfrak{C}$.3.2 Circles in the sky 187
$\mathfrak{C}$.4 Harmonic analysis 188
$\mathfrak{C}$.4.1 Power spectrum 188
$\mathfrak{C}$.4.2 The temperature correlation function 190
$\mathfrak{C}$.5 Conclusion 191

Table des figures

1.1 Répartition du nombre de galaxies en fonction de leur luminosité . 25
1.2 Relevé 2dF de la répartition de galaxies dans l'Univers 25
1.3 Relevé 2dF de la répartition des quasars 26
1.4 Représentation des fluctuations de densité suivant les échelles . . . 27
1.5 Synchronisation d'horloges 29
1.6 Les différents modèles de Friedmann-Lemaître 35
1.7 Les différentes phases d'évolution de l'Univers 36

2.1 Perturbation fictive 40

4.1 Représentation de quelques harmoniques sphériques 63
4.2 Composantes du spectre de puissance 68
4.3 Spectre de puissance pour l'effet Sachs-Wolfe 70

5.1 Construction d'un tore 77
5.2 Espace euclidien équivalent à un tore pour l'observateur repéré sur ce schéma 77
5.3 Construction de la bouteille de Klein 78
5.4 Espace euclidien équivalent à une bouteille de Klein pour l'observateur indiqué 78
5.5 Homéomorphismes 79
5.6 Tores 80
5.7 Construction du tore à partir d'un domaine fondamental général . 81
5.8 Construction du domaine de Dirichlet du tore 82
5.9 Construction de domaines de Dirichlet pour la bouteille de Klein . 82
5.10 Représentation schématique de l'espace de Poincaré 84

6.1 Images fantômes 88
6.2 Pics du tore 89
6.3 Histogramme des paires corrélées d'un tore cubique 90
6.4 Sphère de dernière diffusion vue dans l'espace de revêtement universel 92
6.5 Fluctuations de température sur la sphère de dernière diffusion . . 93
6.6 Cercles du tore 94
6.7 Modes autorisés pour le tore 95
6.8 Effet Sachs-Wolfe dans un Univers multi-connexe 96

7.1 Représentation schématique des coordonnées toroïdales 101
7.2 Multiplicité des modes dans les espaces sphériques 109

8.1 Spectres de puissance de l'espace de Poincaré suivant le nombre de modes utilisés 113
8.2 Spectres de puissance comparés d'un espace de Poincaré et des données WMAP 113
8.3 Comparaison des spectres de puissance des différents polyèdres . . 114
8.4 Effet de la courbure 114
8.5 Comparaison à un spectre ΛCDM 115
8.6 Séparation en composantes du spectre de puissance d'un espace de Poincaré 117
8.7 Fonction de corrélation à deux points 118
8.8 Corrélations croisées 119
8.9 Corrélations croisées 120
8.10 Isotropie statistique 121

B.1 Fonctions de Bessel sphériques 139

$\mathfrak{B}$.1 Orientations and points of view 171
$\mathfrak{B}$.2 The CMB scalar E polarization anisotropies in a flattened toroidal universe 175
$\mathfrak{B}$.3 Sachs-Wolfe anisotropies in a flattened toroidal universe 176
$\mathfrak{B}$.4 Comparison of the circle matching for a scalar polarization E map and a temperature map 178

$\mathfrak{C}$.1 Temperature map for a PDS with $\Omega_{\rm tot} = 1.02$ (up to $k = 230$ giving a resolution of $6\,^\circ$. 188
$\mathfrak{C}$.2 Circles in the sky for a PDS with $\Omega_{\rm tot} = 1.02$ (up to $k = 230$ giving a resolution of $6\,^\circ$. 189
$\mathfrak{C}$.3 Comparative power spectrum for WMAP3 (errorbars), Λ-CDM (dotted curve) and PDS (dashed curve) for $\Omega_{\rm tot} = 1.018$. 190
$\mathfrak{C}$.4 Comparative angular correlation resulting from WMAP data (full line) compared to Λ-CDM (long dashed) and models of PDS for 2 different $\Omega_{\rm tot}$: 1.018 (dot) and 1.02 (short dashed). 191

Notations

η	.....	temps conforme
τ	.....	temps propre
a	.....	facteur d'échelle
P	....	pression
ρ	.....	densité
E	....	énergie
p	.....	impulsion
S	....	action

Tab. 1 – Paramètres

$\mathrm{d}s^2$	.....	élément de longueur infinitésimal
$g_{\mu\nu}$	.....	tenseur métrique
$g \overset{\text{déf}}{=} \det(g_{\mu\nu})$	.....	déterminant de la matrice métrique
$\gamma_{\mu\nu}$	.....	tenseur métrique de Minkowski (espace plat de la relativité restreinte)
$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$	.....	tenseur de Riemann
$R_{\mu\nu} \overset{\text{déf}}{=} R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}$	.....	tenseur de Ricci
$R \overset{\text{déf}}{=} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$	.....	scalaire de Ricci
$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$	.....	symbole de connection affine
$G_{\mu\nu}$	.....	tenseur d'Einstein
$T_{\mu\nu}$	.....	tenseur énergie-impulsion
δ^{μ}_{ν}	.....	symbole de Kronecker

Tab. 2 – Tenseurs

$T_{,\mu} \overset{\text{déf}}{=} \partial_\mu T \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial T}{\partial x^\mu}$	.....	dérivée partielle
$T_{;\mu} \overset{\text{déf}}{=} D_\mu T \overset{\text{déf}}{=} \nabla_\mu T$	.....	dérivée covariante
$T^{\mu\nu} \overset{\text{déf}}{=} (T^{-1})_{\mu\nu}$	.....	matrice inverse
$g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} \overset{\text{déf}}{=} T^{\mu}{}_{\nu}$	.....	montée des indices d'un tenseur
$\mathrm{tr}(T) \overset{\text{déf}}{=} T^{\sigma}{}_{\sigma} \overset{\text{déf}}{=} g^{\sigma\rho} T_{\rho\sigma}$	....	trace d'un tenseur

Tab. 3 – Opérations sur les tenseurs

$c = 299\,792\,458$ m.s^{-1}	.....	vitesse de la lumière
$H_0 \simeq 75$ km.s^{-1}.Mpc^{-1}	.....	constante de Hubble
$G \simeq 6,672.10^{-8}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}	.....	constante universelle de la gravitation
$h \simeq 6,626.10^{-34}$ m^2.kg.s^{-1}	.....	constante de Planck

Tab. 4 – Constantes

$\mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$ / $\mathbb{H}$	.....	corps des réels/complexes/quaternions
$\mathbb{E}$	.....	quaternions purs
$\mathbb{Z}_2 \overset{\text{déf}}{=} \{-1, 1\}$	....	groupe multiplicatif à deux éléments
$\mathbb{R}^3$ / $\mathcal{S}^3$ / $\mathcal{H}^3$	.....	espaces maximalement symétriques de Friedmann-Lemaître
$\mathcal{S}^2$	.....	sphère
SU(n)	.....	groupe spécial unitaire
SO(n)	.....	groupe spécial orthogonal

Tab. 5 – Groupes

C_l	.....	spectre de puissance
j_l	.....	fonctions de Bessel sphériques de première espèce
Y_{lm}	.....	harmoniques sphériques
$\mathcal{Y}_{klm}$	.....	harmoniques hypersphériques
$\langle j_1 m_1; j_2 m_2 \vert jm \rangle$	....	coefficients de Clebsch-Gordan

Tab. 6 – Fonctions spéciales

Résumé

L'Univers est de mieux en mieux compris, mais de nombreux points restent encore à être éclaircis ! Notamment, en Cosmologie, si les problèmes géométriques, liés à la forme locale de l'Univers, sont bien décrits, la topologie de l'Univers est encore bien mal connue !

Dans ce manuscrit, après quelques rappels de Cosmologie, nous essaierons de mieux cerner ce problème de topologie. Nous allons donc expliquer comment la topologie peut être décrite, à travers l'image classique des "objets fantômes" puis nous verrons que la topologie intervient au niveau des modes propres des différentes quantités physiques décrivant le contenu de l'Univers en les discrétisant. Ainsi nous pouvons réinterpréter le comportement du spectre de puissance et notamment le quadrupôle faible en un effet topologique lié au manque de modes pour cette échelle.

Cependant, le problème de la forme de l'Univers reste encore ouvert, puisque peu d'estimateurs sont vraiment fiables avec les observations actuelles, mais nous pourrons au moins rejeter certains modèles (comme les modèles euclidiens non simplement connexes), et nous pourrons obtenir des contraintes fortes sur les modèles restants.

Remerciements

Un travail de thèse ne s'effectuant jamais seul, de nombreuses personnes ont participé directement ou indirectement à cette thèse, que je ne pourrais donc pas ne pas citer dans ce document !

Tout d'abord, je voudrais remercier mon directeur de thèse, *Marc Lachièze-Rey*, d'avoir accepté de me prendre d'abord en stage de DEA puis de m'avoir proposé une thèse devant initialement être dans la continuité du stage, mais dont l'objectif a été modifié en cours de route, pour prendre une direction aussi intéressante, sinon plus ; de m'avoir encadré en me proposant toujours plus de nouvelles pistes pour avancer dans ce sujet assez vaste qu'est la topologie de l'Univers ; de m'avoir fait rencontrer un grand nombre de personnes avec qui j'ai pu être amené à travailler par la suite.

Les nombreuses collaborations que j'ai eu, ont également été enrichissantes, d'abord avec *François Bouchet* et *Didier Vibert*, puis surtout l'équipe de topologie avec *Jean-Pierre Luminet*, *Roland Lehoucq*, *Alain Riazuelo*, *Jeff Weeks*. Je remercie plus particulièrement ces deux derniers, le premier pour m'avoir permis d'utiliser son code `CMBSlow` qui m'a été tout particulièrement utile et le second pour m'avoir transmis le code de son outil de visualisation de la surface de dernière diffusion et de l'influence de la topologie sur celle-ci (`CMBVisualization`).

Il me faut également citer mes collègues de thèse, notamment *Yann Rasera* dont les interminables discussions sur principalement la Cosmologie sont toujours passionnantes et instructives, mais aussi mes nombreux (puisque les déménagements ont été fréquents !) collègues de bureau *Renaud Belmont*, toujours prêt à répondre à mes questions, théoriques ou d'informatique, *Pierrick Abrial*, qui attend désespérément (!) que je me penche sur le code de WorldWind, mais qui a pu m'éclairer sur de nombreux points informatiques et sur les pixellisations de la sphère, et *Savita Mathur* qui a enduré les discussions de ses deux collègues de bureau sans broncher ! ! !

Ma famille a également été adorable et m'a permis de bien me reposer lorsque je rentrais à Laval les retrouver ! Et puis je ne peux conclure ces remerciements sans

remercier ma fiancée, *Claire Meunier*, qui m'a souvent aidé au cours de cette thèse et n'a pas hésité à discuter avec moi des problèmes de physique et mathématiques, voire métaphysiques, que j'ai pu rencontrer au cours de mon travail et m'a souvent apporté des réponses concrètes ! Elle a également relu en entier ce long manuscrit (et détecté de nombreuses erreurs. . .) ! Sa présence a été particulièrement un bon soutien puisque elle a dû me supporter pendant ces 3 années de thèse et elle l'a fait toujours avec le même enthousiasme !

Introduction

Fond diffus cosmologique et topologie

Le *fond diffus cosmologique* est l'un des outils de prédilection de la cosmologie moderne. En effet, il représente l'information électromagnétique la plus ancienne que nous pouvons recevoir de notre Univers. Ce fond diffus cosmologique va ainsi nous informer sur ce qu'était l'Univers primordial, l'Univers à ses origines et dans sa globalité, ce qui nous donnera de nombreuses contraintes sur les physiques possibles de l'Univers.

Ce fond diffus cosmologique trouve son origine dans la théorie du *Big-Bang chaud*, théorie qui a été entrevue par Lemaître dès 1927 grâce à son modèle (*cf.* section 1.2), en notant que :

- sauf cas isolés, tel le modèle d'Einstein où la constante cosmologique a été ajustée de sorte à obtenir un Univers statique, l'Univers a dû commencer dans une singularité initiale, appelée *Big-Bang* ;
- la densité devait être initialement très élevée, en fait infinie, puisqu'elle croît en inverse du facteur d'échelle.

Il a cependant fallu attendre les années 30 avec Tolman[1] pour entrevoir les aspects thermodynamiques de ce modèle puis Gamow[2], vers 1946, pour mettre au point un scénario élaboré, scénario qui sera repris en 1948 avec Alpher et Bethe[3], prédisant ce fameux fond diffus cosmologique.

Cependant, ce modèle n'est resté que théorique jusqu'en 1965 où Penzias et Wilson[4], grâce à leur antenne micro-onde des laboratoires Bell, détectent accidentellement un rayonnement à 3K qu'ils ne parviennent pas à identifier. Mais grâce à l'intervention de Burke, ils seront mis en contact avec Dicke qui travaillait avec son équipe sur de tels rayonnements. Dicke confirmera ainsi la présence de la signature du fond diffus cosmologique dans cette observation[5].

Ce rayonnement sera étudié plus précisément dans la suite, d'abord avec des instruments au sol, telle l'expérience de Roll et Wilkinson en 1966[6], mais il faudra attendre l'avènement des observations spatiales, avec des expériences telles que COBE[7] ou plus récemment WMAP[8], pour pouvoir s'affranchir des rayonnements parasites au sol. Cela permettra ainsi de détecter les *anisotropies* en température de ce rayonnement, par rapport au spectre de corps noir. Ce sont ces anisotropies qui contiendront la majorité de l'information essentielle pour la physique.

Dans cet exposé, ce rayonnement, et en particulier, donc, ses anisotropies vont nous servir à estimer la forme de l'Univers, autrement dit, sa *topologie*. En effet, la relativité générale, qui décrit l'Univers à grande échelle, n'est paradoxalement qu'une théorie locale et ne peut donc rien dire sur sa forme, tandis que le fond diffus cosmologique peut, quant à lui, contenir la signature de la topologie de l'Univers et nous dire en particulier si l'Univers est simplement connexe ou non, tout au

[1] *cf.* Tolman, 1934.
[2] *cf.* Gamow, 1946.
[3] *cf.* Alpher *et al.*, 1948.
[4] *cf.* Penzias et Wilson, 1965.
[5] *cf.* Dicke *et al.*, 1965.
[6] *cf.* Roll et Wilkinson, 1966.
[7] *cf.* Smoot *et al.*, 1992; Wright *et al.*, 1992; Kogut *et al.*, 1992.
[8] *cf.* Hinshaw *et al.*, 2003; Komatsu *et al.*, 2003; Spergel *et al.*, 2003.

moins, pour des tailles pas trop grandes du motif de base décrivant éventuellement l'Univers.

Cet exposé s'articulera autour de deux parties principales. Dans la première, nous étudierons le cadre général de la cosmologie et la façon d'obtenir les différentes observables à partir d'un modèle théorique donné et de conditions initiales précises, ce qui nous permettra d'étudier par la suite les effets de la topologie.

Nous nous intéresserons en particulier à l'obtention de cartes de fluctuations de température et à la dérivation du spectre de puissance qui en découle. Pour cela, il nous faudra résoudre un certain nombre d'équations différentielles qui nous donneront l'évolution des perturbations au cours du temps, équations qui se subdivisent en deux ensembles : les équations d'Einstein et les équations de Boltzmann.

Dans la deuxième partie, nous entrerons dans le vif du sujet en décrivant ce qu'est la topologie et comment nous pouvons obtenir la forme de l'Univers. Pour cela, nous effectuerons d'abord un bref survol de ce qu'est la topologie d'une manière générale, puis nous verrons quelles applications en découlent pour l'étude de la forme de l'Univers.

Nous évoquerons d'abord les méthodes directes, telles que la recherche d'images fantômes qui donnent principalement des résultats négatifs et nous donnent ainsi des limitations sur les choix possibles de topologie. Enfin, grâce à une étude plus précise de la décomposition des modes dans l'Univers, nous pourrons étudier la forme de l'Univers par diverses analyses des données de température sur la sphère de dernière diffusion et voir ainsi quelles sont les contraintes actuelles et quels sont les modèles qui semblent privilégiés.

Première partie

Fond diffus cosmologique

Chapitre 1:

Le modèle standard

Si la cosmologie était dans l'Antiquité une discipline descriptive étudiant les propriétés et les lois de la matière, la cosmologie moderne est désormais une science prédictive qui a de nombreuses fois fait ses preuves. La cosmologie moderne s'appuie essentiellement sur deux piliers : la relativité générale, dérivée par Einstein dès 1915, comme théorie décrivant les effets de la gravitation et sur le principe cosmologique qui décrit le comportement global de l'Univers, plus précisément qui affirme qu'aux grandes échelles l'Univers est homogène et isotrope.

Nous partirons donc de ces hypothèses et retrouverons les résultats de Friedmann[1] et Lemaître, notamment en ce qui concerne l'évolution de l'Univers. En particulier, nous pourrons mettre en relief l'existence d'une singularité primordiale pour certains jeux de paramètres, puis de l'évolution des quantités thermodynamiques qui entraîneront l'existence du fond diffus cosmologique.

Ce chapitre va donc fournir le cadre général des propriétés dans un Univers en expansion. Dans le chapitre suivant, nous rajouterons la théorie des perturbations linéaires pour décrire ce qui se passe à des échelles plus petites et pouvoir ainsi interpréter les anisotropies présentes dans le fond diffus cosmologique.

1.1 Principe cosmologique

1.1.1 Origine

Dès le troisième siècle avant notre ère, Aristarque de Samos affirmait que la Terre n'était pas le centre de l'Univers, mais sa théorie fut vite rejetée et oubliée. Bien plus tard, au début du XVIe, Copernic relance l'idée que l'Homme n'a pas une position privilégiée dans le Système Solaire, ce qui ne reste alors qu'une simplification mathématique, mais Galilée le reprendra ensuite pour des raisons plus physiques et progressivement cette idée s'imposera, jusqu'à être formalisée en le

[1] Alexander Friedmann (1888-1925) est un physicien et mathématicien d'origine russe. Ainsi, l'orthographe latine de son nom peut varier, puisque n'est qu'une translitération de Фридман. On trouvera ainsi Friedman ou Fridman, cette dernière graphie étant la translitération la plus proche du russe, mais nous suivrons ici l'usage occidental en utilisant Friedmann.

principe cosmologique sur lequel repose la cosmologie moderne.

Ce principe cosmologique décrit le modèle le plus simple d'Univers "physique". Il repose sur les deux postulats suivants :

- l'Univers est *homogène*, c'est-à-dire que les diverses grandeurs physiques que l'on pourra utiliser seront les mêmes en tout point ;
- l'Univers est *isotrope*, c'est-à-dire que ces grandeurs physiques seront les mêmes quelle que soit la direction dans laquelle l'observation est faite.

Il existe également un *principe cosmologique fort* qui affirme que l'Univers est en plus des deux hypothèses précédentes, immuable dans le temps. Cependant, dans ce contexte, divers faits observationnels sont inexplicables, tel le paradoxe d'Olbers (la nuit serait trop noire pour un Univers sans Big-Bang), ou l'origine du fond diffus cosmologique qui, dans ce cadre, ne pourrait pas être expliqué.

1.1.2 Vérifications observationnelles

A petite échelle, de nombreuses inhomogénéités sont présentes dans l'Univers, telles les planètes, les étoiles, les galaxies, ... Cependant, cela ne contredit pas le principe cosmologique qui, comme son nom l'indique, ne s'applique pas à ces échelles mais bien plutôt à l'Univers dans son ensemble, à des échelles cosmologiques, c'est-à-dire des échelles dont l'ordre de grandeur est supérieure ou égal à quelques centaines de mégaparsecs.

A ce niveau, ce principe est effectivement bien vérifié et ce par de nombreuses expériences. La plus ancienne d'entre elle est l'analyse de la répartition du nombre de galaxies en fonction de leur position sur la sphère céleste. Edwin Hubble[2] fut le premier à utiliser cette méthode et a ainsi obtenu une répartition particulièrement isotrope. Dans le même article, il montrait l'homogénéité de la répartition des galaxies à grande échelle par un comptage de ces objets en fonction de leur magnitude (voir figure (1.1)). En effet, si nous supposons que le flux émis par une galaxie est à peu près le même d'un objet à l'autre, la luminosité observée de ces objets décroît avec le carré de la distance : $L \propto f/4\pi r^2$. Si donc l'Univers est homogène, le nombre de galaxies dans un volume donné est proportionnel à ce volume et donc à r^3, d'où une relation linéaire entre le logarithme du nombre de galaxies de magnitude inférieure où égale à une magnitude donnée et cette magnitude :

$$\frac{\log(N_{\text{gal}}^{<L})}{\log(L_{\max})} = c^{te} \tag{1.1}$$

Une autre méthode, plus directe de la mesure de l'homogénéité, qui permet au passage d'affiner la mesure de Hubble de l'isotropie de l'Univers, consiste à cartographier et à recenser les objets présents dans l'Univers, afin d'obtenir une visualisation tridimensionnelle de la répartition des objets de l'Univers. L'expérience 2dF a ainsi recensé plus de 200 000 galaxies qui sont représentées sur la figure (1.2).

[2] *cf.* Hubble, 1926.

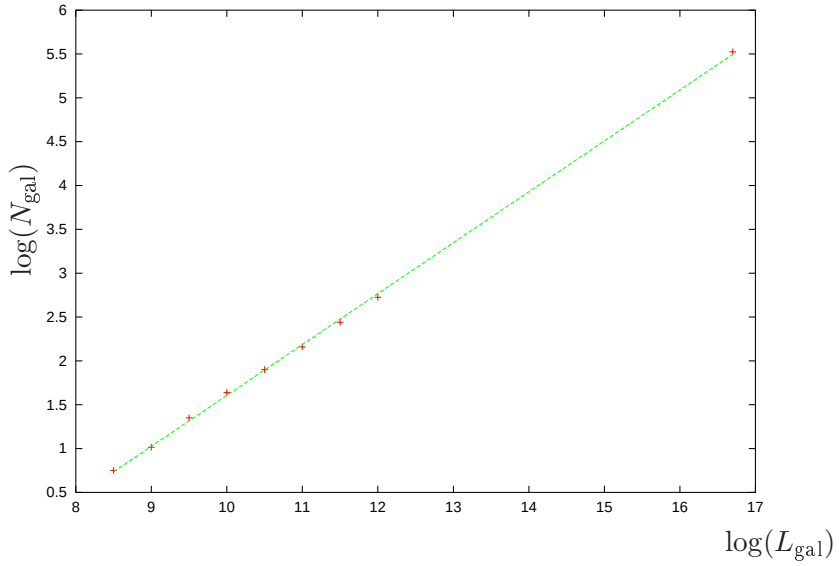


FIG. 1.1 – **Répartition du nombre de galaxies en fonction de leur luminosité.** Cette figure reprend les données de Hubble, 1926.

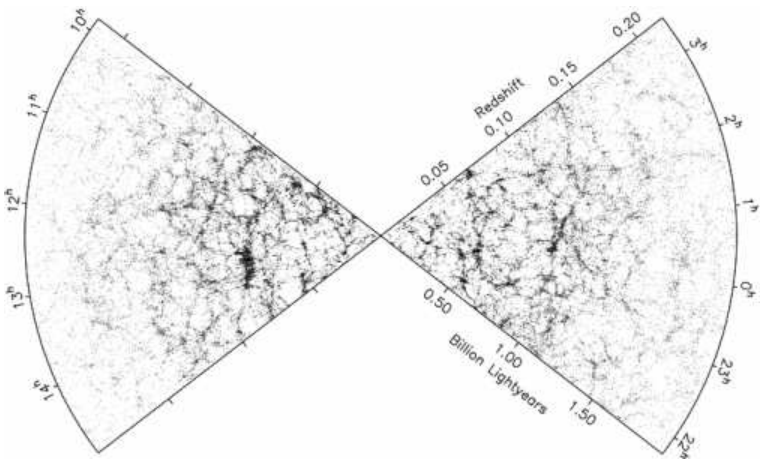


FIG. 1.2 – **Relevé 2dF de la répartition de galaxies dans l'Univers.** Plus de 200 000 galaxies sont représentées ici selon une distribution particulièrement homogène.

Cette expérience a également relevé la position d'objets très lointains, en l'occurrence des quasars, afin de tester l'isotropie de l'Univers. La figure (1.3) montrant le résultat de leurs observations met très nettement en relief cette isotropie. Un autre moyen de mesurer l'isotropie de l'Univers est d'observer encore plus loin : en effet, le fond diffus cosmologique, que nous allons étudier dans cet exposé, est la

source de rayonnement électromagnétique la plus lointaine. De nombreuses expériences (COBE, BOOMERanG, ARCHEOPS, WMAP, ...) ont mesuré la répartition des températures au niveau de la surface de la sphère de dernière diffusion et il a été montré que cette température est particulièrement isotrope puisque les relevés indiquent que le fond est constitué d'un rayonnement de corps noir dont la température est de $2,726$K avec une anisotropie inférieure à 10^{-3}K.

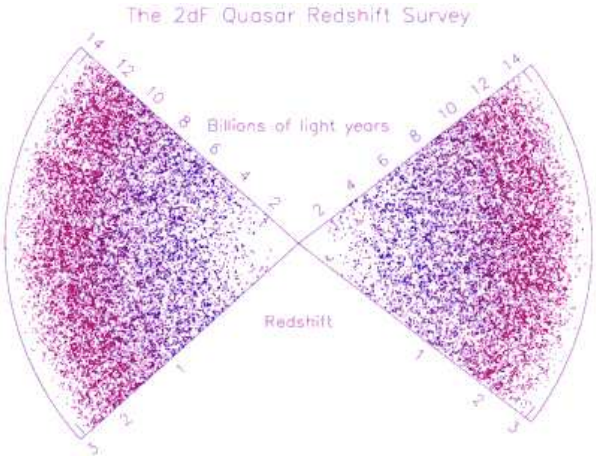


FIG. 1.3 – **Relevé 2dF de la répartition des quasars.** Plus de 25 000 quasars sont représentés sur ce schéma avec des magnitudes dans la bande B inférieures ou égales à 21.

La figure (1.4) montre la densité moyenne suivant l'échelle d'observation de ces phénomènes. Différentes méthodes sont utilisées suivant la profondeur de l'Univers que l'on veut scruter et les tailles caractéristiques que l'on souhaite observer. Ce diagramme montre donc l'homogénéité qui règne dans l'Univers, notamment aux grandes échelles. Ainsi, l'étude du fond diffus cosmologique permet de montrer que les fluctuations de densité dans l'Univers observable pris dans son ensemble (en fait, jusqu'à la sphère de dernière diffusion) sont de l'ordre de 10^{-4}.

Nous avons donc vu dans cette section que l'Univers, pris dans son ensemble, est remarquablement homogène et isotrope. Nous allons donc supposer dans ce premier chapitre que ces propriétés sont complètement vérifiées, ce qui va nous permettre de dégager des propriétés d'ensemble, puis dans les chapitres suivants, nous prendrons ces quantités moyennes comme Univers de fond pour les calculs. Nous rajouterons ensuite les fluctuations autour de ces quantités comme des perturbations dont l'évolution sera régie par les termes d'ordre 1 des différentes équations que nous serons amené à écrire.

1.2 Métrique de Robertson et Walker

Le principe cosmologique n'est par définition qu'une hypothèse, mais, comme nous l'avons vu dans la section précédente, il semble bien vérifié, tout au moins aux

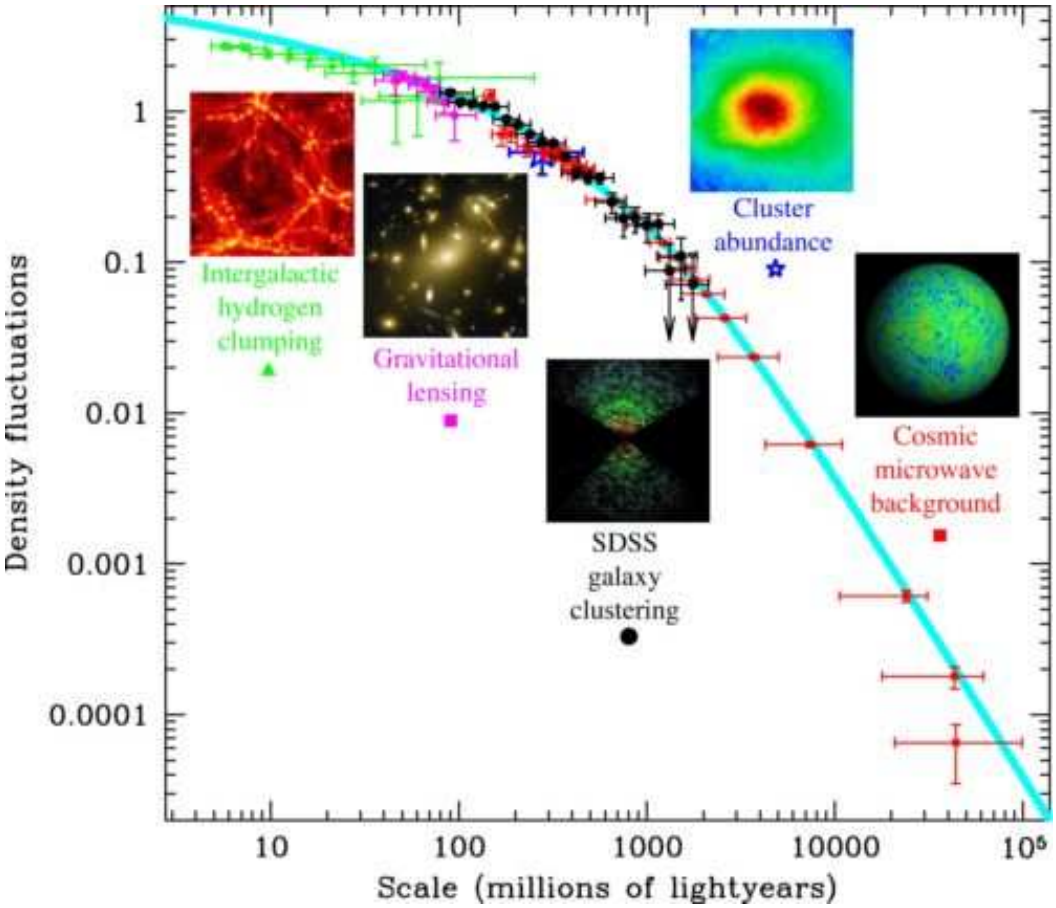


FIG. 1.4 – **Représentation des fluctuations de densité suivant les échelles.** Image tirée du site internet du Sloan Digital Sky Survey (SDSS - `http://www.sdss.org/news/releases/20031028.powerspectrum.html`).

grandes échelles. Ce principe va donc pouvoir décrire correctement l'Univers dans son ensemble. Un tel modèle décrit dans un cadre relativiste est appelé modèle de Friedmann[3]-Lemaître[4] du nom des deux personnes qui l'ont élaboré indépendamment pour la première fois. Par la suite, Robertson[5] et Walker[6] ont construit une métrique décrivant un tel Univers. Dans cette section, nous allons reconstruire cette métrique en nous appuyant sur le principe cosmologique, puis dans les sections suivantes nous étudierons les propriétés d'un Univers possédant une telle métrique.

La métrique d'un espace est la donnée d'un produit scalaire et ce, en chacun

[3] *cf.* Friedmann, 1922.
[4] *cf.* Lemaître, 1927.
[5] *cf.* Robertson, 1935.
[6] *cf.* Walker, 1936.

de ses points. En particulier, si nous considérons une base de cet espace[7] que nous noterons (e_μ) , la métrique peut être représentée par une matrice $\bar{\bar{g}}$ dont les coefficients auront comme valeur :

$$g_{\mu\nu} \stackrel{\text{déf}}{=} e_\mu . e_\nu \tag{1.2}$$

Cette matrice est appelée tenseur métrique. Les différents coefficients $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions à priori arbitraires de l'espace et du temps : $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(t, x^i) \equiv g_{\mu\nu}(x^\mu)$. Avec ces notations, l'élément de longueur $\mathrm{d}s^2$, qui mesure la distance entre deux points infiniments proches, le plus général sur cet espace s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{1.3}$$

De par sa définition, $\bar{\bar{g}}$ est une matrice symétrique. Comme de plus ses coefficients sont réels, $\bar{\bar{g}}$ pourra être diagonalisée dans une certaine base, même s'il peut s'avérer plus judicieux de choisir une autre base. Nous allons voir qu'en fait, ici, nous pourrons bien réussir à diagonaliser la métrique dans une base "naturelle".

Le premier problème est de synchroniser nos horloges. Pour cela, considérons 2 points de l'espace-temps A et B dont les coordonnées spatiales respectives sont repérées par les vecteurs $\vec{x}_A$ et $\vec{x}_B$. A envoie alors en t_1 un photon en direction de B qui est reçu en t_2. B réémet sitôt après réception du photon, un photon en direction de A. A reçoit ce photon en t_3. A et B vont pouvoir synchroniser leurs horloges, en posant :

$$t_2 \stackrel{\text{déf}}{=} (t_1 + t_3)/2 \tag{1.4}$$

Cependant, cette synchronisation ne peut s'effectuer que de manière locale (notamment à cause du problème de l'horizon qui fait que certains points ne pourront jamais recevoir de photons de A !). Pour l'étendre à tout l'Univers, il faudra donc agir de même de proche en proche entre points voisins.

Entre 2 points infinitésimalement proches, donc distants de $\mathrm{d}l$, le photon met le temps $\mathrm{d}\tau$ à parvenir du point A au point B. On a donc $\mathrm{d}l = c\mathrm{d}\tau$, où c est la vitesse de la lumière et donc du photon. La variable τ ainsi définie s'appelle le *temps propre*.

Avec cette synchronisation, nous avons découpé notre espace en tranches spatiales (donc correspondant à un temps donné), ce qui nous donne pour la métrique :

$$g_{0i} = g_{i0} = 0 \tag{1.5}$$

et en identifiant le temps avec le temps propre :

$$g_{00} = c^2 \equiv 1 \tag{1.6}$$

[7] dans ce manuscrit, les indices latins (i, j, ...) varieront entre 1 et 3 et les indices grecs entre 0 et 3. La composante d'indice 0 représentera ici une coordonnée temporelle. On adopte également la convention d'Einstein sur les sommations : lorsqu'un indice est présent à la fois en haut et en bas dans un produit, on considère que l'on effectue la somme sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice.

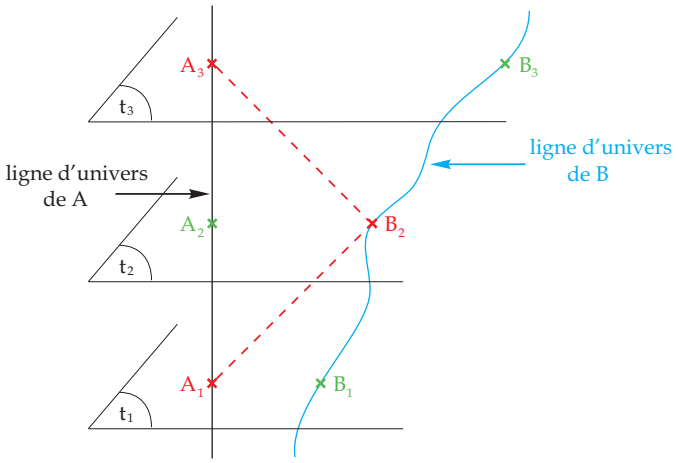


FIG. 1.5 – **Synchronisation d'horloges.** A envoie un signal lumineux au temps t_1. B reçoit ce signal en t_2 et le renvoie immédiatement à A. A recevra ce signal au temps t_3. Pour synchroniser leurs horloges, A dira que t_2 correspond à $(t_1 + t_3)/2$.

où nous avons pris comme convention que $c \equiv 1$ afin d'améliorer la lisibilité, le facteur c pouvant se retrouver en fin de calculs par analyse dimensionnelle.

De plus, comme l'espace est homogène, il possède la symétrie maximale et dans ce cas, on peut montrer que la métrique finale est :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)\right) \tag{1.7}$$

Dans ce système de coordonnées, les observateurs sont dits *comobiles* et le facteur $a(t)$, appelé *facteur d'échelle*, qui représente l'expansion de la partie spatiale de l'Univers au cours du temps et qui contrairement à ce que pensait Einstein ne peut pas rester constante. Ce facteur décrit donc comment augmente (ou diminue) la distance entre deux observateurs "fixes" (comobiles).

De plus, seuls les observateurs comobiles verront l'Univers homogène et isotrope. En particulier, sur Terre, nous ne sommes pas tout à fait comobiles, puisque nous sommes animés de différents mouvements tels que la rotation de la Terre autour du Soleil et de celle du Système Solaire dans la Galaxie, ... Cela, se traduit par la présence d'un effet Doppler dans le fond diffus cosmologique comme nous le verrons plus loin en (4.3.2).

La coordonnée t de cette métrique, appelée *temps cosmique*, correspond comme on l'a vu au temps propre des observateurs comobiles, mais il peut être commode d'introduire le *temps conforme* défini comme étant :

$$\mathrm{d}\eta \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{1.8}$$

Avec cette définition, la métrique de Robertson-Walker se réécrit :

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(c^2\mathrm{d}\eta^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)\right) \tag{1.9}$$

1.3 Equations d'Einstein

Les équations d'Einstein indiquent la façon dont, localement, la trame spatio-temporelle de l'Univers va être influencée par son contenu matériel. Ces équations ont été dérivées indépendamment par Hilbert, qui partait du principe de moindre action de Hamilton, $\delta S = 0$, et par Einstein qui cherchait une généralisation covariante de l'équation de Poisson, $\Delta\phi = -4\pi G\rho$. Elles prennent la forme d'une égalité entre tenseurs :

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

où G désigne la constante universelle de la gravitation. $G_{\mu\nu} \overset{\text{déf}}{=} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2 - g_{\mu\nu}\Lambda$ est le *tenseur d'Einstein* avec constante cosmologique[8]. C'est ce tenseur qui va décrire l'ensemble de la géométrie de l'Univers. Ce tenseur est par construction le seul dont la divergence est nulle et faisant intervenir la métrique. $T_{\mu\nu}$ est le *tenseur énergie-impulsion* qui décrit le contenu matériel de l'Univers. Ainsi, si l'on suppose que l'Univers est constitué d'un fluide parfait, ce tenseur prend la forme :

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu} \tag{1.11}$$

où P est la pression du fluide, ρ sa densité d'énergie et U^μ est le quadri-vecteur vitesse.

De plus, pour les calculs qui suivent, il peut être commode d'utiliser le tenseur énergie-impulsion de variance (1,1) au lieu du tenseur énergie-impulsion de variance (0,2) ci-dessus. L'expression de $T^\mu{}_\nu$ est donnée par la relation :

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} \tag{1.12}$$

De plus, la quantité $g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = U^\mu U_\mu$ est un scalaire et est donc en particulier la même dans tout référentiel. Ainsi, par exemple, dans le référentiel du centre de masse $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ ce qui donne $U^\mu U_\mu = 1$. Nous en déduisons alors la forme du tenseur $T^\mu{}_\nu$ qui sera diagonal :

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Nous pouvons également supprimer la trace du tenseur de Ricci $R \overset{\text{déf}}{=} g^{\mu\nu}R_{\nu\mu}$, aussi appelé scalaire de courbure, en prenant la trace de l'équation d'Einstein, ce qui nous donne comme expression du scalaire de courbure :

$$R = 4\pi G T - \Lambda \tag{1.14}$$

où $T \overset{\text{déf}}{=} g^{\mu\nu}T_{\nu\mu}$ désigne la trace du tenseur énergie-impulsion et vaut $-\rho + 3P$. Les équations d'Einstein deviennent :

$$R^\mu{}_\nu = -8\pi G \left(T^\mu{}_\nu - \frac{T}{2} \right) - \Lambda \delta^\mu{}_\nu \tag{1.15}$$

[8] le tenseur $R_{\mu\nu}$, R et Λ sont décrits dans l'annexe A.

De plus, comme cela est fait en annexe A, on peut calculer le tenseur de Ricci lié à la métrique de Robertson et Walker (1.9) à partir du facteur d'échelle. En réunissant ces différents résultats, la composante temporelle des équations d'Einstein s'écrit :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.16}$$

où $\dot{a}$ désigne la dérivée du facteur d'échelle par rapport à la première coordonnée, soit $\dot{a} := \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$.

Les équations correspondant à la partie spatiale des équations d'Einstein se résument en fait à une seule équation, ce qui se comprend bien puisque nous avons comme hypothèse du modèle de Friedmann-Lemaître l'isotropie de l'espace. Cette équation s'écrit :

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - P)a^2 + \Lambda a^2 \tag{1.17}$$

On peut réécrire cette équation en éliminant les dérivées secondes grâce à (1.16), ce qui donne :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.18}$$

où nous avons introduit la constante de Hubble $H \overset{\text{déf}}{=} \dot{a}/a$.

Les équations (1.16) et (1.18) forment les équations de Friedmann qui décrivent l'évolution d'un Univers homogène et isotrope.

1.4 Conservation de l'énergie

Les équations de Friedmann, (1.17) et (1.18) décrivent l'évolution du facteur d'échelle en fonction du temps. La connaissance de ce facteur d'échelle donnera alors l'évolution de l'Univers. En particulier suivant les valeurs des différents paramètres apparaissant dans les équations, il sera possible de déterminer si l'Univers a connu une singularité initiale (c'est le *Big-Bang* c'est-à-dire un instant où le facteur d'échelle est nul) ou non, et si l'Univers continuera indéfiniment à s'étendre ou au contraire se recontractera.

Pour pouvoir résoudre ces équations, il faut d'abord connaître la dépendance en le facteur d'échelle de la densité. Cependant, la densité évoluera de façon différente suivant que l'espèce est relativiste, cette espèce étant appelée *rayonnement*, ou non-relativiste, ce qui sera appelé *matière*.

La relation densité-facteur d'échelle peut être obtenue par l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion :

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \tag{1.19}$$

soit pour la composante temporelle :

$$\partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0{}_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda = 0 \tag{1.20}$$

De l'équation (1.20) et de la forme du tenseur énergie-impulsion donnée en (1.13), nous pouvons déduire la forme de l'équation de la conservation de l'énergie en relativité générale :

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \tag{1.21}$$

A ce stade, il n'est pas encore possible de résoudre explicitement les équations de Friedmann. C'est ici qu'intervient la distinction entre les différentes espèces de l'Univers. En effet, dans le cas parfait, ces espèces seront dotées d'une équation d'état, qui va relier la densité d'énergie à la pression de façon à fermer le système d'équations à résoudre. Cette équation d'état s'écrira, comme nous le verrons ensuite, de la manière générique suivante :

$$P = w\rho \tag{1.22}$$

où w est une constante indépendante du temps.

L'équation de conservation de l'énergie se résout désormais simplement en fonction de la constante w :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} \tag{1.23}$$

où l'indice 0 désigne les quantités actuelles.

Pour le rayonnement, d'après la théorie cinétique des gaz, dans le cas d'une distribution des vitesses isotrope, la pression est reliée à la densité d'énergie par la formule :

$$P = \rho\frac{v^2}{3} \tag{1.24}$$

soit, réécrit en terme du paramètre w, puisque le rayonnement est par définition relativiste et que donc $v \simeq c$:

$$w_r = \frac{1}{3} \tag{1.25}$$

En intégrant l'équation (1.23), nous obtenons que la densité d'énergie du rayonnement est reliée au facteur d'échelle par la loi de puissance :

$$\rho_r \propto a^{-4} \tag{1.26}$$

On peut interpréter cette dilution de densité d'énergie par le fait que l'Univers étant en expansion, un volume comobile est en fait une boîte dont le côté croît avec le facteur d'échelle et donc dans une boîte fixe, le nombre de photons décroît en a^{-3}. Le facteur a supplémentaire provient du fait que les photons sont redshiftés avec l'expansion et que leur fréquence, $\nu \propto 1/\lambda$, est inversement proportionnelle au redshift. Or l'énergie transportée par un photon étant en $E = h\nu$, la dilution de densité d'énergie de rayonnement totale est en $\rho_r \equiv E/V \propto a^{-4}$.

Pour la matière, la pression est négligeable devant la densité d'énergie, soit un paramètre w négligeable :

$$w_m \simeq 0 \tag{1.27}$$

ce qui correspond à la relation suivante entre la densité et le facteur d'échelle :

$$\rho_m \propto a^{-3} \tag{1.28}$$

où il n'y a ici que la dilution en volume en a^{-3}, l'énergie d'une particule de matière restant fixe avec l'expansion.

1.5 Evolution de l'Univers

Nous pouvons maintenant reprendre l'équation de Friedmann (1.18), en décomposant la densité d'énergie en ses deux composantes introduites dans la section précédente :

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_r \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \Omega_m \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Omega_k \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + \Omega_\Lambda \tag{1.29}$$

où nous avons introduit le jeu de paramètres suivant :

$$\Omega_r = \frac{8\pi G \rho_r^0}{3H_0^2} \text{ : paramètre de densité de rayonnement ;}$$
$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho_m^0}{3H_0^2} \text{ : paramètre de densité de matière ;}$$
$$\Omega_k = -\frac{k}{H_0^2} \text{ : paramètre de courbure ;}$$
$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \text{ : paramètre de l'énergie du vide.}$$

Notons au passage que le paramètre de courbure Ω_k est de signe *opposé* à k qui est la courbure : ainsi, lorsque la courbure est positive, Ω_k est négatif !

Appliquons maintenant l'équation (1.29) au temps présent. Nous obtenons ainsi la relation suivante entre ces 4 coefficients :

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \tag{1.30}$$

Ces paramètres ne sont donc pas indépendants : la connaissance des trois premiers nous donne le dernier.

Résolvons maintenant l'équation (1.29). Puisque la constante de Hubble correspond à $H = \dot{a}/a$, cette équation peut être réécrite :

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}a}{a_0\sqrt{\Omega_r \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + \Omega_m \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-1} + \Omega_k + \Omega_\Lambda \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2}}} = H_0 t \tag{1.31}$$

puis, par intégration numérique de cette équation, nous obtiendrons l'évolution du facteur d'échelle en fonction du temps.

En supposant que le rayonnement est négligeable, ce qui se produit assez rapidement puisque le terme de rayonnement est en a^{-4}, d'après l'équation (1.30), seules les valeurs de la courbure et de la constante du vide vont déterminer l'évolution de l'Univers. Celle-ci est représentée en fonction de ces 2 paramètres sur la figure (1.6).

Nous pouvons voir que la dénomination habituelle d'Univers ouverts si $k = 1$ et fermés si $k = -1$ ne correspond pas tout à fait à la réalité lorsqu'il y a une constante cosmologique ! En effet, l'évolution de l'Univers est plutôt dictée par la valeur de la constante cosmologique, même si dans le cas où la courbure est positive de nombreux sous-cas apparaissent.

De manière générale, lorsque la constante cosmologique est positive, l'Univers part d'une *singularité primordiale* ou *Big-Bang* et s'étend indéfiniment en une croissance exponentielle. Lorsque la constante cosmologique est nulle et la courbure différente de 1, l'Univers débute également en une singularité primordiale mais l'évolution suit une loi de puissance qui tend vers une croissance linéaire du facteur d'échelle $a(t) \simeq H_0\sqrt{\Omega_k}t$. Par contre, lorsque $\Lambda < 0$ ou que $k = 1$, il apparaît en plus une singularité au bout d'un temps fini : c'est le *Big-Crunch*. Ces Univers forment ce que Georges Lemaître appelait *Univers phœnix* : l'Univers est créé à un certain instant puis commence à s'étendre et au bout d'un temps fini, se contracte jusqu'au Big-Crunch, qui correspond à un nouveau Big-Bang et ainsi de suite.

Les données des différentes observations du fond diffus cosmologique ont permis d'ajuster ces paramètres avec une précision augmentant avec des instruments de plus en plus précis. Les valeurs actuellement admises des paramètres cosmologiques est résumée dans le tableau 1.1.

Paramètre	Valeur estimée	Barre d'erreur
H_0	71 km.s^{-1}.Mpc^{-1}	$\pm$4 km.s^{-1}.Mpc^{-1}
Ω_r	$< 1,5.10^{-2}$	
Ω_m	0,27	$\pm 0,0004$
Ω_Λ	0,73	$\pm 0,04$
Ω_k	-0,02	$\pm 0,02$

TAB. 1.1 – Valeurs des différents paramètres cosmologiques.

Nous sommes donc dans le cas d'un Univers dont l'expansion se poursuivra indéfiniment et sera de plus en plus rapide puisque la constante cosmologique est positive. Nous pouvons également constater que l'Univers est très proche d'un Univers plat, mais le cas d'un Univers à courbure positive, c'est-à-dire $\Omega_{\text{tot}} \geq 1$, semblerait légèrement favorisé. Dans les derniers chapitres de cet exposé, nous privilégierons donc l'étude des Univers à courbure positive.

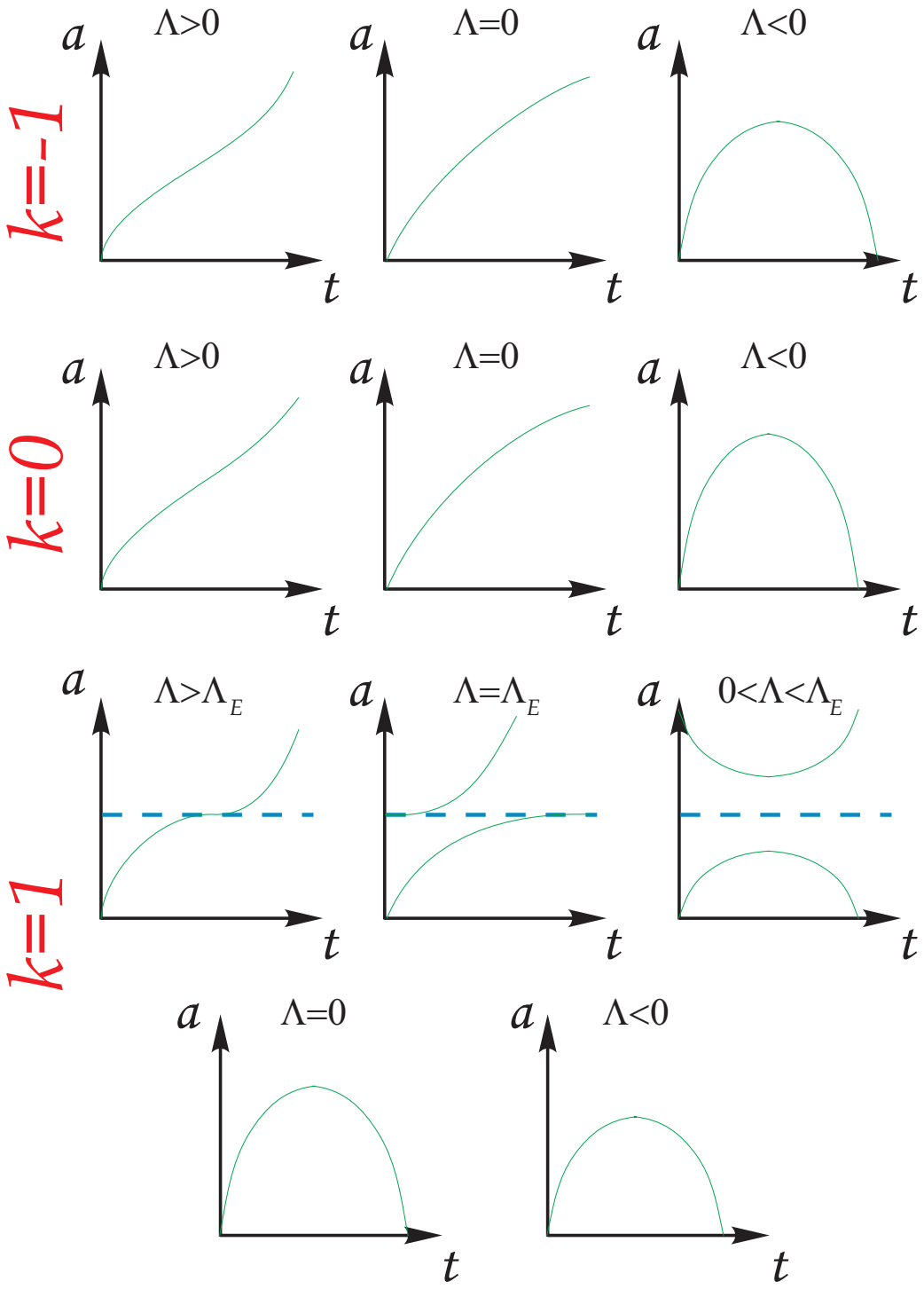


FIG. 1.6 – **Les différents modèles de Friedmann-Lemaître.**

1.6 Rayonnement fossile

L'équation (1.29) nous indique que l'Univers contient plusieurs phases d'évolution. En effet, lorsque la taille de l'Univers est suffisamment petite, le terme dominant dans le membre de droite de l'équation est celui correspondant au rayonnement. Puis, si les constantes sont suffisamment bien ajustées, l'Univers entrera dans une phase de domination par la matière, et enfin par la constante du vide. C'est ce qui est représenté en figure (1.7).

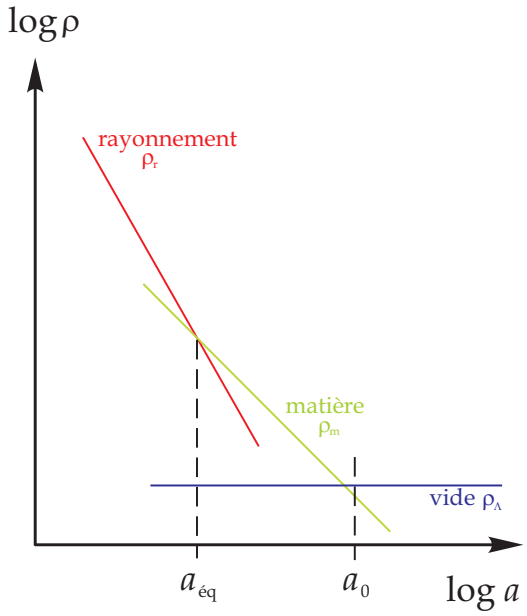


FIG. 1.7 – **Les différentes phases d'évolution de l'Univers.**

La première ère est donc celle du rayonnement : les particules composant l'Univers sont alors majoritairement relativistes. De plus, le libre-parcours moyen des particules croît proportionnellement au facteur d'échelle. En remontant le temps, les particules interagissent donc de plus en plus rapidement et ainsi, à l'origine, l'Univers est un ensemble de particules à l'équilibre thermodynamique qui va progressivement se refroidir avec l'expansion de l'Univers. Dans ce cas, l'Univers forme un *corps noir*, dont la température décroît en inverse du facteur d'échelle (*cf.* section 3.1).

Au bout d'un certain temps, plus précisément, environ 300 000 ans après le Big-Bang, l'Univers sera suffisamment froid pour que le libre-parcours moyen des photons soit de l'ordre de grandeur du rayon de Hubble : l'Univers devient transparent au rayonnement électromagnétique, qui peut désormais parvenir jusqu'à nous sans interaction. Ce rayonnement, que nous appelons *fond diffus cosmologique* va être l'outil principal de cette thèse. Cette époque s'est produite peu après *l'équivalence* entre la matière et le rayonnement : l'Univers venait donc d'entrer dans l'ère de domination de la matière.

Quant à nous, nous entrons dans une époque dominée par la constante cosmologique, la transition entre l'ère de la matière et l'ère dominée par le vide s'étant effectuée récemment puisque $\Omega_\Lambda \gtrsim \Omega_m$.

Chapitre 2:

Evolution des perturbations dans un cadre relativiste

DANS le chapitre précédent, nous avons montré l'existence d'un rayonnement de fond cosmologique. Ce rayonnement correspond principalement à la température des photons de cette époque, les photons étant thermalisés. Cela produira donc un spectre de corps noir. Cependant, dans ce milieu, il y aura de nombreuses inhomogénéités qui produiront des anisotropies en température dans ce rayonnement.

Ces inhomogénéités sont la trace des futures grandes structures qui empliront l'Univers. On considère souvent qu'elles ont été engendrées lors de la phase d'inflation exponentielle ayant eu lieu aux premiers instants de l'Univers. Elles se traduisent par des fluctuations de densité, initialement dues à un champ scalaire, où les fluctuations quantiques du vide vont devenir de petites perturbations se superposant ainsi au champ de densité uniforme de l'Univers primordial.

L'objet de ce chapitre va être l'étude de l'évolution de ces inhomogénéités. Pour cela, nous allons supposer que la métrique de Robertson-Walker étudiée dans le chapitre précédent, décrivant un Univers de densité uniforme, va être perturbée. Cependant, l'étude relativiste des perturbations est plus compliquée que l'approche classique. Bardeen, 1980, a été le premier à mettre correctement en valeur ce problème et à y apporter des solutions. Il va donc falloir introduire les notions de jauge, notamment voir les différentes jauges existantes où nous pourrons écrire les équations et obtenir les quantités invariantes de jauge, qui sont les "vraies" quantités physiques, puisqu'elles restent identiques à elle-même lors d'un changement de coordonnées.

Ainsi, tout en travaillant avec des quantités invariantes de jauge, nous pourrons écrire les équations d'Einstein qui nous renseigneront sur le comportement temporel des perturbations de densité.

2.1 Perturbations en relativité générale

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de ce chapitre, l'étude des perturbations en relativité générale n'est pas aussi simple qu'en mécanique classique. En effet, pour cette dernière, une perturbation est juste un écart suffisamment petit par rapport à des quantités de fond. Considérons par exemple la densité de matière $\rho(\vec{x}, t)$. Alors, *à chaque instant*, nous pourrons prendre comme quantité de fond la valeur moyenne de la densité de l'Univers $\bar{\rho}(t)$ à cet instant et considérer que la perturbation pour ce même instant, est la différence suivante :

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t) \tag{2.1}$$

Cependant, cela revient à privilégier une coordonnée : la coordonnée temporelle, ce que nous ne pouvons pas faire en relativité générale. De plus, en relativité générale, tous les référentiels sont équivalents et nous pourrons donc en particulier nous placer dans un certain référentiel où les perturbations seront annulées. Par exemple, si l'on considère la densité suivante :

$$\rho(x, t) = kt + \epsilon \sin x \tag{2.2}$$

le changement de repère $t' = t + \epsilon/k \sin x$ annule les perturbations que l'on avait initialement (voir la figure (2.1)) ! Il va donc falloir différencier les perturbations intrinsèques, liées à la physique, et les perturbations de jauge, qui sont liées à un certain choix de coordonnées.

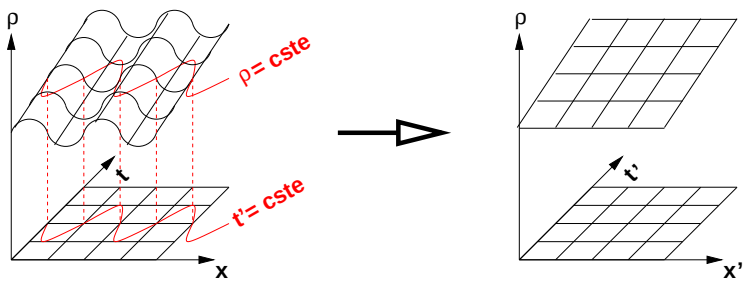


FIG. 2.1 – **Perturbation fictive.** Dans un premier système de coordonnées, nous observons une certaine perturbation qui s'annule par un choix judicieux de coordonnées (Figure issue du cours de Lesgourgues).

Pour pouvoir traiter les perturbations en relativité générale, on peut donc procéder de deux façons. La première consiste à trouver des quantités qui se conservent par changement de référentiel : ces quantités sont dites *invariantes de jauge*. Dans ce cas, on pourra raisonner de façon classique puisque les perturbations resteront les mêmes d'un référentiel à l'autre. C'est l'approche utilisée par Bardeen. Cependant, cette méthode devient vite très compliquée au niveau calculatoire et les quantités invariantes de jauge ne sont pas toujours simple à interpréter.

On utilise donc généralement la deuxième méthode qui consiste à se fixer une jauge, c'est-à-dire une certaine forme que devront posséder les perturbations de la métrique. Physiquement, cela revient à fixer des hypersurfaces de simultanéité, ce qui permettra de synchroniser les horloges comme nous l'avons fait dans le modèle de Friedmann-Lemaître.

2.2 Métrique perturbée

Prenons comme métrique de départ la métrique comobile (1.9). La perturbation la plus générale de cette métrique s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left[(1+2\phi)\mathrm{d}\eta^2 + B_i\mathrm{d}x^i\mathrm{d}\eta - ((1-2\psi)\gamma_{ij} + D_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right] \tag{2.3}$$

où $-a^2\gamma_{ij}$ est la partie spatiale de la métrique de Friedmann-Lemaître (donc γ_{ij} est une métrique riemanienne statique), ϕ, ψ, B_i et D_{ij} sont à priori des fonctions des 4 coordonnées (η, x^i). On peut décomposer ces perturbations en différentes composantes, ce qui nous permettra de les classer en différentes catégories et ainsi de mieux comprendre ce que signifie les différentes jauges que nous étudierons dans la suite.

Nous noterons $\bar{g}_{\mu\nu}$ le tenseur métrique non-perturbé qui sert de cadre de référence à l'étude des perturbations. C'est donc ce tenseur qui servira à faire monter et descendre les indices. La dérivée covariante ∇_μ sera également associée à ce tenseur.

Ainsi, B_i peut se décomposer en une partie longitudinale et une partie transverse de la façon suivante :

$$B_i = B_i^{\parallel} + B_i^{\perp} \tag{2.4}$$

où la *partie longitudinale* $B_i^{\parallel}$ est, par définition, de rotationnel nul ce qui correspond à $\epsilon^{ijk}\nabla_j B_k^{\parallel} = 0$ et qui implique que nous pouvons écrire $B_i^{\parallel}$ sous la forme $B_i^{\parallel} = \nabla_i b$. La *partie transverse* $B_i^{\perp}$, que nous allons noter b_i, doit donc dériver d'un rotationnel et sera donc à divergence nulle $\nabla_i B^{i\perp} \overset{\text{déf}}{=} \nabla_i(\bar{g}^{i\mu}B_\mu^{\perp}) = -a^2\gamma^{ij}\nabla_i B_j^{\perp} = 0$. D'où :

$$B_i = \nabla_i b + b_i \tag{2.5}$$

avec la condition $\nabla_i b^i = 0$.

Nous pouvons effectuer le même genre de décomposition pour D_{ij}, qui est un tenseur sans trace (celle-ci étant contenue dans ψ) :

$$D_{ij} = D_{ij}^T + D_{ij}^{\parallel} + D_{ij}^{\perp} \tag{2.6}$$

Nous avons ici trois composantes :

- la *partie transverse* D_{ij}^T est à divergence nulle, soit pour chaque indice j, $\nabla_i(D^{ij})^T = 0$. Nous noterons cette partie d_{ij} ;

- la *partie à divergence longitudinale* $D^{\parallel}_{ij}$, donc dont la divergence est à divergence nulle, vérifie : $\nabla_i \nabla_j D^{\parallel}_{ij} = 0$. Cela implique alors qu'il existe un tenseur d_i à divergence nulle tel que $D^{\parallel}_{ij} = \nabla_{(i} d_{j)} \overset{\text{déf}}{=} \nabla_i d_j + \nabla_j d_i$;
- la *partie à divergence transverse* $D^{\perp}_{ij}$, qui vérifie : $\epsilon^{ijk} \nabla_j \nabla_l D^{\perp}_{kl} = 0$, ce qui donne : $D^{\perp}_{ij} = \nabla_i \nabla_j d$.

D'où l'expression finale de D_{ij} :

$$D_{ij} = \nabla_i \nabla_j d + \nabla_{(i} d_{j)} + d_{ij} \tag{2.7}$$

avec $\nabla_i d^{ij} = 0$ et $\nabla_i d^i = 0$.

La perturbation la plus générale de la métrique fait ainsi apparaître trois types de perturbations :

- les perturbations *scalaires* : ϕ, ψ, b, d ;
- les perturbations *vectorielles* : b_i, d_i ;
- une perturbation *tensorielle* : d_{ij}.

La section suivante va permettre de voir leur comportement lorsque nous effectuons un changement de coordonnées, afin de voir les quantités invariantes de jauge, c'est-à-dire celles qui resteront identiques lors du changement de repère.

2.3 Transformation des coordonnées

En relativité générale, les équations doivent pouvoir s'écrire de la même façon dans tout système de coordonnées. Il est donc important d'étudier le comportement des quantités dont nous aurons besoin pour écrire les équations d'Einstein, pour pouvoir exhiber des *invariants de jauge* qui contiendront la physique du problème.

2.3.1 Exemple : perturbation spatiale

Supposons que l'on perturbe uniquement la partie spatiale d'un système muni d'une métrique de Friedmann-Lemaître. Dans ce cas, nous effectuons un changement de coordonnées qui fait passer des coordonnées spatiales x^i aux coordonnées $x'^i = x^i + \xi^i$, les ξ^i étant des fonctions du temps et de l'espace. La métrique qui, initialement, a la forme (1.9), devient dans le nouveau système de coordonnées :

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta) \left(d\eta^2 - \gamma_{ij} \left(\mathrm{d}x'^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta} \mathrm{d}\eta - \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^k} \mathrm{d}x'^k \right) \left(\mathrm{d}x'^j - \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta} \mathrm{d}\eta - \frac{\partial \xi^j}{\partial x'^k} \mathrm{d}x'^k \right) \right) \tag{2.8}$$

Au premier ordre en ξ, qui représente la perturbation appliquée à notre système autour de l'équilibre, nous obtenons :

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta) \left(d\eta^2 + 2\gamma_{ij} \dot{\xi}^i \mathrm{d}\eta \mathrm{d}x'^j - \gamma_{ij} \left(1 - 2 \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^j} \right) \mathrm{d}x'^i \mathrm{d}x'^j \right) \tag{2.9}$$

où nous avons posé $\dot{\xi}^i \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta}$ et où nous avons utilisé que γ_{ij} est symétrique, puisque γ_{ij} est la partie spatiale de la métrique de Friedmann-Lemaître.

En comparant avec la métrique la plus générale écrite en (2.3), nous voyons que les B_i et les D_{ij} peuvent être expliqués juste par le changement des coordonnées que l'on a effectué. Nous pouvons généraliser cet exemple au cas d'un changement de coordonnées quelconque qui pourra introduire au plus 4 degrés de libertés (1 de temps et 3 d'espace), les coefficients introduits dans (2.3) ne sont pas tous nécessaires, certains correspondant juste à un autre choix de coordonnées.

Fixer une jauge va donc correspondre à fixer ces degrés de libertés fictifs, liés à un choix de coordonnées, ce qui nous permettra au passage de simplifier les équations puisqu'ainsi nous pourrons choisir une certaine forme de la métrique adaptée aux calculs que nous souhaitons effectuer. C'est ce que nous verrons dans la prochaine section, mais d'abord, nous allons voir comment se transforment les tenseurs lorsque l'on applique une perturbation à notre système et en particulier, nous pourrons obtenir les quantités invariantes de jauge.

2.3.2 Lois de transformation des tenseurs

Ce paragraphe va donc avoir pour but d'étudier la manière dont se transforment les tenseurs lorsqu'ils subissent un changement de coordonnées. Tout d'abord, nous allons regarder la loi de transformation d'un scalaire, dont la définition est qu'en un *même point physique*, la valeur lors d'un changement de coordonnées $x^\mu \mapsto x'^\mu$ reste la même :

$$\rho'(x'^\mu) = \rho(x^\mu) \tag{2.10}$$

Puisque nous souhaitons étudier les perturbations à la métrique, nous ne considérerons que des changements infinitésimaux des coordonnées, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme :

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \qquad \text{avec } \xi^\mu \ll x^\mu \tag{2.11}$$

La loi de transformation pour les scalaires (2.10) s'écrit alors après renommage des coordonnées, puisque ce qui nous intéresse est le comportement autour du point x :

$$\rho'(x^\mu) = \rho(x^\mu - \xi^\mu) \tag{2.12}$$

Puisque les termes en ξ ne sont que des petites corrections aux coordonnées x, on peut linéariser en ne gardant que les termes du premier ordre en ξ, ce qui donne la loi de transformation d'un scalaire lors d'un changement de coordonnées infinitésimal :

$$\rho'(x^\mu) = \rho(x^\mu) - \xi^\lambda \partial_\lambda \rho(x^\mu) \tag{2.13}$$

Nous pouvons effectuer le même genre de raisonnement pour un tenseur une fois contravariant (c'est-à-dire un vecteur), en partant de sa loi de transformation :

$$V'^\nu(x'^\mu) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} V^\lambda(x^\mu) \tag{2.14}$$

Dans ce cas, il apparaît 2 termes : le premier est le même que pour les scalaires, provenant du développement de Taylor du vecteur et le second de la loi de transformation tensorielle. La transformation d'un vecteur sous changement infinitésimal de coordonnées est alors :

$$V'^{\nu}(x^{\mu}) = V^{\nu}(x^{\mu}) + V^{\lambda}(x^{\mu})\partial_{\lambda}\xi^{\nu} - \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}V^{\nu}(x^{\mu}) \tag{2.15}$$

Il nous reste à considérer le cas d'un tenseur une fois covariant, puis après par produit tensoriel, nous pourrons généraliser à tout tenseur. La loi de transformation pour un tenseur une fois covariant est :

$$V'_{\nu}(x'^{\mu}) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} V_{\lambda}(x^{\mu}) \tag{2.16}$$

La dérivée apparaissant dans cette expression vaut au premier ordre : $\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \sim \delta^{\lambda}_{\nu} - \partial_{\nu}\xi^{\lambda}$, d'où la loi de transformation sous la perturbation :

$$V'_{\nu}(x^{\mu}) = V_{\nu}(x^{\mu}) - V_{\lambda}(x^{\mu})\partial_{\nu}\xi^{\lambda} - \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}V_{\nu}(x^{\mu}) \tag{2.17}$$

La dérivée de Lie d'un tenseur est la différence entre le tenseur exprimé dans les anciennes coordonnées et le tenseur exprimé dans les nouvelles coordonnées lorsque le système subit un changement de coordonnées infinitésimal :

$$\mathcal{L}_{\xi} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} - T'^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \tag{2.18}$$

Les lois de transformations étudiées précédemment (*cf.* (2.13), (2.15), (2.17)) nous donnaient les valeurs des dérivées de Lie d'un scalaire, d'un vecteur et d'un tenseur 1 fois contravariant. En combinant, ces égalités, nous obtenons la dérivée de Lie pour un tenseur m fois contravariant et n fois covariant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} &+ T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \lambda_i \dots \nu_n}\partial_{\nu_i}\xi^{\lambda_i} \\ &- T^{\mu_1 \dots \lambda_j \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}\partial_{\lambda_j}\xi^{\mu_j} \end{aligned} \tag{2.19}$$

le premier terme correspondant au développement de Taylor du tenseur en tant que fonction, le deuxième à la loi de transformation tensorielle de la partie covariante du tenseur et le troisième à la loi de transformation tensorielle de la partie contravariante de $T_{\mu\nu}$.

On en déduit la relation entre le tenseur après changement infinitésimal de coordonnées et le tenseur initial :

$$\begin{aligned} T'^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} &- \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \\ &- T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \lambda_i \dots \nu_n}\partial_{\nu_i}\xi^{\lambda_i} \\ &+ T^{\mu_1 \dots \lambda_j \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}\partial_{\lambda_j}\xi^{\mu_j} \end{aligned} \tag{2.20}$$

où les dérivées partielles peuvent être remplacées par des dérivées covariantes, ce qui permet d'avoir une expression covariante mais moins explicite pour les calculs, dans cette équation puisque les symboles de connection affine s'annulent deux à deux.

2.3.3 Application aux perturbations de la métrique

La transformation de jauge introduite dans la partie précédente peut en particulier s'appliquer à la métrique perturbée introduite en (2.3) par l'application de la formule (2.20) :

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \xi^\lambda \partial_\lambda (a^2 \gamma_{\mu\nu}) - a^2 \gamma_{\mu\lambda}\, \partial_\nu \xi^\lambda - a^2 \gamma_{\lambda\nu}\, \partial_\mu \xi^\lambda \tag{2.21}$$

où dans les derniers termes, la métrique perturbée $g_{\mu\nu}$ a été remplacée par la métrique non-perturbée de Friedmann-Lemaître $a^2\gamma_{\mu\nu}$ puisqu'on ne garde que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1.

Pour mieux séparer les perturbations en secteurs (perturbations scalaires, vectorielles et tensorielles), nous allons considérer ici que l'espace est à courbure nulle, soit $\mathrm{d}s^2 = a^2(d\eta^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2)$ ce qui implique : $\gamma_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, d'où sur la métrique :

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - 2a\dot{a}\gamma_{\mu\nu}\xi^0 - a^2(\gamma_{\mu\lambda}\, \partial_\nu \xi^\lambda + \gamma_{\lambda\nu}\, \partial_\mu \xi^\lambda) \tag{2.22}$$

où le point repère les dérivées par rapport à la première coordonnées, donc ici par rapport au temps propre η.

Cette équation va permettre de voir comment se transforment les perturbations introduites équation (2.3). Par exemple, le terme 00 s'écrit :

$$a^2(\eta)(1 + 2\phi') = a^2(\eta)(1 + 2\phi) - 2a\dot{a}\xi^0 - 2a^2\dot{\xi}^0 \tag{2.23}$$

soit :

$$\phi' = \phi - \mathcal{H}\xi^0 - \dot{\xi}^0 \tag{2.24}$$

où $\mathcal{H} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial \eta} \equiv \dot{a}$ est la constante de Hubble conforme. Pour faire ressortir les différentes composantes scalaires, vectorielles et tensorielles précédentes, nous allons décomposer la perturbation des coordonnées ξ^μ en :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \xi^0 & = & T \\ \xi^i & = & \partial^i l + l^i \end{array} \right. \tag{2.25}$$

où l_i est à divergence nulle.

Nous pouvons alors appliquer le même genre de calculs que pour ϕ afin d'obtenir les transformations des autres perturbations. Finalement, lors de ce changement de coordonnées, nous obtenons les lois de transformations suivantes pour les perturbations scalaires :

$$\phi' = \phi - \mathcal{H}T - \dot{T} \tag{2.26}$$

$$\psi' = \psi + \mathcal{H}T \tag{2.27}$$

$$b' = b - T + \dot{l} \tag{2.28}$$

$$d' = d - l \tag{2.29}$$

pour les perturbations vectorielles :

$$b'_i = b_i + \dot{l}_i \tag{2.30}$$

$$d'_i = d_i - l_i \tag{2.31}$$

et pour la perturbation tensorielle :

$$d'_{ij} = d_{ij} \tag{2.32}$$

Nous pouvons observer en particulier que d_{ij} est invariant de jauge : il sera donc bien défini puisque inchangé quelle que soit la perturbation donnée autour du système initial.

Dans la suite, nous étudierons principalement les perturbations scalaires de la métrique. Il est donc important d'obtenir également des invariants de jauge scalaires. En combinant les lois de transformation des scalaires écrites au-dessus, nous constatons qu'il existe deux tels scalaires invariants de jauge. Ce sont les *potentiels de Baarden*. Ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi - \mathcal{H}(b + \dot{d}) - (\dot{b} + \ddot{d}) \\ \Psi &= \psi + \mathcal{H}(b + \dot{d}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ce choix n'est qu'un choix arbitraire : d'autres invariants de jauge scalaires auraient pu être construits avec les lois écrites précédemment. Mais ceux-ci ont l'avantage de s'écrire de façon simple en fonction des potentiels diagonaux ϕ et ψ qui vont nous servir dans la suite.

Enfin, il existe un invariant de jauge vectoriel qui s'écrit :

$$V_i = b_i + \dot{d}_i \tag{2.34}$$

2.4 Choix d'une jauge

Nous pouvons maintenant étudier les propriétés de quelques jauges, celles-ci étant souvent complémentaires, chaque jauge pouvant être mieux adaptée que les autres pour effectuer un calcul particulier ou pour obtenir une information physique sur ce qui se passe dans le référentiel d'étude.

2.4.1 Jauge synchrone

La *jauge synchrone* correspond à une perturbation agissant uniquement sur la partie spatiale de la métrique, donc à : $\phi = 0$, ce qui indique que la coordonnée temporelle correspond au temps propre et $B_i = 0$, qui indique que les coordonnées spatiales constantes sont orthogonales aux hypersurfaces à temps constant. La métrique est alors :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t) D_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \tag{2.35}$$

Cette jauge a été largement employée puisque la plupart des calculs y ont une expression simple. Cependant, cette jauge n'est pas bien définie puisque le choix des

conditions initiales, c'est-à-dire d'une hypersurface temporelle et les coordonnées spatiales correspondantes, est arbitraire ! Cela fait ainsi apparaître des solutions non physiques[1]. C'est ainsi que Bardeen[2] a été amené à utiliser une approche invariante de jauge.

Un deuxième problème lié à ce choix de jauge est qu'elle est définie par des observateurs en chute libre. Cela posera donc problème lorsque deux tels observateurs se rencontreront puisqu'un même point physique aura alors deux coordonnées différentes !

2.4.2 Jauge longitudinale

La jauge *longitudinale*, encore appelée newtonienne ou conforme, correspond comme son nom l'indique à une jauge où la métrique est diagonale :

$$\mathrm{d}s^2 = (1+2\phi)\mathrm{d}t^2 - a^2(t)(1-2\psi)\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{2.36}$$

Comme nous pouvons le constater, cette jauge ne fait intervenir que les degrés de liberté scalaires. Cette jauge est donc bien adaptée aux calculs dépendant de ces quantités mais pas des perturbations vectorielles ou tensorielles. Cependant, les perturbations vectorielles se dissipant rapidement, nous ne nous intéresserons pas à ces perturbations et les perturbations tensorielles peuvent être rajoutées simplement dans la métrique écrite au-dessus indépendamment des perturbations scalaires.

Le fait que cette jauge soit diagonale simplifie grandement l'écriture des équations. De plus, ϕ a une interprétation physique simple, puisqu'il correspond au potentiel gravitationnel en mécanique newtonienne (voir l'équation (2.52)). D'autre part, vu l'écriture des potentiels de Bardeen (2.33), nous constatons que dans cette jauge, ils coïncident simplement avec les deux perturbations de la métriques ϕ et ψ. En particulier, ces deux quantités seront bien définies et pourront être utilisées dans les équations puisque invariantes de jauge.

Les deux jauges présentées ici sont les plus utilisées, mais il en existe d'autres, comme les jauges comobiles ou de feuilletage plats. Dans ce mémoire, nous utiliserons la jauge longitudinale pour effectuer les calculs.

2.5 Quantités perturbées

Pour étudier le régime linéaire d'évolution des équations, nous allons devoir étudier les équations d'Einstein perturbées. A elles seules, nous aurions pu obtenir suffisamment d'information sur le comportement des perturbations de la métrique, mais il est en général plus simple d'écrire, et d'interpréter, les équations de conservation du tenseur énergie-impulsion, qui ne sont toutefois qu'une conséquence des

[1] voir par exemple Bednarz, 1985.
[2] *cf.* Bardeen, 1980.

équations d'Einstein. Il faudra donc tout de même également résoudre les équations d'Einstein.

Les seuls tenseurs intervenant dans ces deux systèmes d'équations sont le tenseur d'Einstein, dont les perturbations sont directement liées à celles de la métrique, et le tenseur énergie-impulsion.

Tout d'abord, la métrique que nous allons considérer est la métrique perturbée en jauge synchrone, puisque nous n'étudierons que les perturbations scalaires, soit :

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1+2\phi \\ g_{0i} &= 0 \\ g_{ij} &= -a^2(t)(1-2\psi)\gamma_{ij}(r,\theta,\phi) \end{aligned} \tag{2.37}$$

et la métrique inverse :

$$\begin{aligned} g^{00} &= 1-2\phi \\ g^{0i} &= 0 \\ g^{ij} &= -a^{-2}(t)(1+2\psi)\gamma^{ij}(r,\theta,\phi) \end{aligned} \tag{2.38}$$

où $\gamma_{ij} \equiv \mathrm{diag}(\frac{1}{1-kr^2}, r^2, r^2\sin^2\theta)$ est la partie spatiale de la métrique comobile non perturbée et γ^{ij} son inverse. De plus, les perturbations de la métrique, ϕ et ψ, sont des fonctions des quatre coordonnées spatio-temporelles.

Quant au tenseur énergie-impulsion, il s'écrit, pour un fluide parfait, si le système n'est pas perturbé :

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (\rho+P)U^{\mu}U_{\nu} - P\delta^{\mu}_{\nu} \tag{2.39}$$

où ρ est la densité d'énergie, P la pression et U^{μ} le quadri-vecteur vitesse. Dans le référentiel du centre de masse et pour le système non-perturbé, U_{μ} s'écrit simplement $(1,0,0,0)$. Si maintenant, nous appliquons une perturbation au système, une vitesse va se rajouter au fluide et le quadri-vecteur devient : $U_{\mu} = (1, v_1, v_2, v_3)$, et les 2 autres quantités vont se réécrire comme la quantité hors perturbation plus une perturbation, soit : $\bar{\rho} \to \bar{\rho}+\delta\rho$ et $\bar{P} \to \bar{P}+\delta P$, où la barre désigne les quantités hors perturbation.

De plus, pour être tout à fait général, il faut rajouter un tenseur de trace nulle, $\Pi^{\mu}{}_{\nu}$, qui est appelé pression anisotrope. Le tenseur énergie-impulsion a alors la forme :

$$\begin{aligned} T^0{}_0 &= -(\bar{\rho}+\delta\rho) \\ T^0{}_i &= -(\bar{\rho}+\bar{P})v_i \\ T^i{}_i &= (\bar{P}+\delta P)\delta^i_j + \Pi^i{}_j \end{aligned} \tag{2.40}$$

où les quantités de fond $\bar{\rho}$ et $\bar{P}$ et ne sont toujours que des fonctions du temps, tandis que les quantités perturbées $\delta\rho$, δP, v^i et $\Pi^i{}_j$ sont des fonctions des 4 coordonnées spatio-temporelles.

2.6 Equations de conservation perturbées

Le but de cette section va être d'obtenir les perturbations d'ordre 1 présentes dans l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{2.41}$$

Ce système va nous fournir deux ensemble d'équations : la partie temporelle, nous donnera l'équation de conservation de l'énergie ou équation de continuité, et la partie spatiale, l'équation d'Euler. Pour simplifier, nous ne raisonnerons ici que sur un système fictif constitué d'un seul fluide parfait, mais en théorie, il faudrait considérer un système multi-fluide couplé.

2.6.1 Equation de continuité

Il s'agit donc de résoudre la partie temporelle de l'équation (2.41), soit de manière détaillée, et en ne gardant que les termes d'ordre 1 au plus, sachant que la quantité T^{0i} est d'ordre 1 ainsi que Γ^0_{i0} :

$$T^{00}{}_{,0} + T^{i0}{}_{,i} + T^{i0}\Gamma^j_{ij} + 2T^{00}\Gamma^0_{00} + T^{00}\Gamma^i_{0i} + T^{ij}\Gamma^0_{ij} = 0 \tag{2.42}$$

où $T^{\mu\nu} \overset{\text{déf}}{=} g^{\nu\sigma}T^{\mu}{}_{\sigma}$, ce qui se calcule aisément à partir des tenseurs métriques et énergie-impulsion perturbés, puisque la métrique $g^{\mu\nu}$ est diagonale.

A l'ordre 0, nous obtenons à nouveau l'équation de conservation de l'énergie (1.21) :

$$\dot{\bar{\rho}} = -3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho} \tag{2.43}$$

où $\dot{\bar{\rho}} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}\eta}$ désigne la dérivée de la densité d'énergie par rapport au temps conforme η et w est le paramètre introduit en section 1.4 désignant le rapport entre la pression et la densité, et qui est constant pour un fluide donné. Cependant, dans l'Univers, plusieurs espèces de particules coexistant, ce paramètre ne sera plus constant.

A l'ordre 1, en utilisant l'équation de conservation de l'énergie à l'ordre 0 et en utilisant le fait que la divergence de la vitesse v^i est $\nabla v \overset{\text{déf}}{=} v^i_{;i} = v^i_{,i} + v^j\Gamma^j_{ij}$, nous obtenons *l'équation de continuité* :

$$\dot{\delta} = -3\mathcal{H}\delta w + (1+w)(a\nabla v + 3\dot{\psi}) \tag{2.44}$$

où $\delta \overset{\text{déf}}{=} \delta\rho/\bar{\rho}$ est la fluctuation de densité et où la fluctuation du paramètre w est définie comme étant :

$$\delta w \overset{\text{déf}}{=} \frac{P}{\rho} - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} = \left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - w\right)\delta \tag{2.45}$$

2.6.2 Equation d'Euler

Nous pouvons de même écrire la partie spatiale de l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion en décomposant les différentes composantes spatiales

et temporelles des différentes sommes, ce qui donne :

$$T^{0i}{}_{,0} + T^{ji}{}_{,j} + T^{0i}\Gamma^i_{i0} + T^{ji}\Gamma^k_{jk} + T^{0\sigma}\Gamma^i_{\sigma 0} + T^{j\sigma}\Gamma^i_{\sigma j} = 0 \tag{2.46}$$

Dans ce cas, nous retrouvons bien le fait qu'il n'y ait pas de terme d'ordre 0, comme dans le cas non-perturbé, et à l'ordre 1, nous obtenons *l'équation d'Euler* :

$$\dot{v}^i = -\mathcal{H}(1-3w)v^i - \frac{\dot{w}}{1+w}v^i - \frac{\delta P^{,i}}{(1+w)\bar{\rho}} - \frac{w}{1+w}\Pi^{ij}{}_{;j} - \phi^{,i} \tag{2.47}$$

Nous avons gardé ici la dérivée temporelle du paramètre w dans cette équation, même si nous avons vu que pour le cas d'un système à un fluide ce paramètre était constant.

Nous pouvons aussi constater que pour un fluide constitué uniquement de matière, donc de paramètre $w = 0$, il n'y a plus de dépendance en la pression anisotrope Π^{ij}.

2.7 Equations d'Einstein perturbées

Il reste à écrire les équations d'Einstein lorsque la métrique est perturbée, ce qui correspond à la présence de petites inhomogénéités de la matière présente dans l'Univers. Les calculs de l'annexe A nous donnent un jeu de quatre équations différentes, en décomposant les parties spatiales et temporelles, par application de l'égalité $G^\mu{}_\nu = -8\pi G T^\mu{}_\nu$. Ces équations contiennent une partie à l'ordre 0 qui est celle déjà obtenue dans le chapitre précédent, lors de l'étude du modèle de Friedmann-Lemaître. Nous n'allons donc écrire que les quantités d'ordre 1 intervenant dans cette équation. Le jeu d'équations que nous obtenons alors est le suivant :

– composante temporelle $\mu = \nu \equiv 0$:

$$\Delta\psi + 3H^2\phi - \frac{3k}{a^2}\psi + 3H\dot{\psi} = 4\pi G\delta\rho \tag{2.48}$$

– composante croisée $\mu \equiv 0$, $\nu \equiv i$:

$$H\phi_{,i} + \dot{\psi}_{,i} = -4\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})v_i \tag{2.49}$$

– trace de la composante spatiale $\mu = \nu \equiv i$:

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right)\phi - \frac{k\psi}{a^2} + H(\dot{\phi} + 3\dot{\psi}) + \ddot{\psi} + \frac{1}{3}(\Delta\psi - \Delta\phi) = -4\pi G\delta P \tag{2.50}$$

– composante spatiale sans trace $\mu \equiv i$, $\nu \equiv j$:

$$(\psi - \phi)^{;i}{}_{;j} = 8\pi G \Pi^i{}_j \tag{2.51}$$

En particulier, nous pouvons utiliser les équations (2.48) et (2.49), pour obtenir la relation suivante :

$$\left(\Delta - \frac{3k}{a^2}\right)\psi = 4\pi G\left(\delta\rho + 3(\bar{\rho} + \bar{P})H\int v_i \mathrm{d}x^i\right) \tag{2.52}$$

qui correspond à la généralisation relativiste de l'équation de Poisson en jauge longitudinale. ψ correspond donc à un potentiel gravitationnel dont la source est la perturbation de densité $\delta\rho$. Le dernier terme de cette relation dépend du référentiel dans lequel sont écrite les équations. Il ne s'agit donc que d'un terme de jauge qui aurait pu être annulé si nous avions considéré la métrique dans une autre jauge.

De plus, l'équation (2.51), nous indique qu'en l'absence de pression anisotrope du tenseur énergie-impulsion, donc en particulier pour un fluide parfait, les potentiels correspondant aux perturbations de la métrique sont égaux :

$$\psi = \phi \tag{2.53}$$

Les équations écrites au-dessus sont des équations pour les modes scalaires puisque nous avons utilisé la jauge longitudinale (2.36). Nous aurions pu écrire également celles pour les perturbations vectorielles et tensorielles en résolvant de la même manière les équations d'Einstein. Mais comme celles-ci ne seront pas utilisées dans la suite, nous ne les dérivons pas ici[3].

Dans ce chapitre, nous avons donc écrit un jeu d'équations permettant de calculer l'évolution des perturbations de la métrique une fois connu le tenseur énergie-impulsion. Or pour cela, il va nous falloir écrire les équations de Boltzmann qui vont nous dire la forme explicite de ce tenseur. C'est ce que nous allons faire dans le prochain chapitre.

[3] voir par exemple Bardeen, 1980, pour une dérivation indépendante de jauge.

Chapitre 3:

Thermodynamique de l'Univers

MAINTENANT que nous avons vu comment la géométrie, liée au contenu matériel de l'Univers par les équations d'Einstein, évoluait au cours du temps, nous devons voir comment vont se comporter les différents fluides composant l'Univers à l'intérieur de cette trame spatio-temporelle. C'est ce que va permettre l'équation de Boltzmann que nous allons étudier dans ce chapitre. Dans sa forme la plus générique, celle-ci s'écrit : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = C[f]$. Bien que de forme simple, cette équation différentielle est souvent difficile voire impossible à résoudre analytiquement.

Nous allons ici étudier séparément les deux membres de cette équation avant de l'étudier dans sa forme globale. Le premier membre traduit la conservation du nombre de particules le long de sa trajectoire : il s'agit de l'équation de Liouville ou de Boltzmann sans collision. Le second membre est un terme de collision principalement constitué de l'effet Compton. Il traduit le fait que les photons changent d'énergie lors de la diffusion sur un électron libre. Ce processus est important puisque c'est lui qui maintient à l'équilibre baryons et photons dans l'Univers primordial et le thermalise créant ainsi le corps noir observé au premier ordre des fluctuations de température.

3.1 Equation de Liouville

3.1.1 Fonction de distribution

Nous n'allons donc pour l'instant nous intéresser qu'aux effets de la gravitation sur les photons[1]. Pour cela, nous allons considérer l'évolution lagrangienne (nous suivons le mouvement des particules) de la fonction de distribution des photons. Puisque nous adoptons un point de vue lagrangien et que nous n'étudions pour le moment que la partie sans collision, le système est fermé et la fonction de distribution des photons est constante au cours de son évolution :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.1}$$

[1] l'équation de Boltzmann pourrait s'appliquer tout aussi bien à d'autres fluides, relativistes ou non.

Cette équation est appelée *équation de Liouville.*

Cette équation fait intervenir la forme de la métrique. Nous allons donc munir l'espace de la métrique de Robertson-Walker (1.9) écrite sous la forme :

$$\mathrm{d}\overline{s}^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{3.2}$$

comme métrique de fond, où γ_{ij} désigne la métrique d'un espace maximalement symétrique tridimensionnel. Puisque ce qui va nous intéresser sont les inhomogénéités, nous allons lui rajouter des perturbations en utilisant la jauge longitudinale, soit :

$$\mathrm{d}s^2 \overset{\text{déf}}{=} g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = (1+2\phi)\mathrm{d}t^2 - (1-2\psi)a^2(t)\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{3.3}$$

Maintenant que nous avons la métrique de notre espace, nous allons pouvoir écrire l'équation de Liouville (3.1) de manière plus explicite. En effet, la fonction de distribution est définie de façon naturelle dans l'espace des phases. En particulier, cette fonction de distribution est une fonction du quadri-vecteur position $x^\mu \equiv \begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix}$ et du quadri-vecteur impulsion[2] $p^\mu \equiv \begin{pmatrix} E \\ p^i \end{pmatrix}$, où E est l'énergie de la particule et p^i son impulsion. Cependant, ce dernier quadri-vecteur ne possède que 3 composantes indépendantes, puisque ses composantes vérifient la relation :

$$p^\mu p_\mu \overset{\text{déf}}{=} g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2 \tag{3.4}$$

où m est la masse de la particule considérée. En particulier, pour les photons, cette relation devient :

$$p^\mu p_\mu = 0 \tag{3.5}$$

Enfin, nous pouvons décomposer l'impulsion en son module, défini comme étant :

$$p \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{-g_{ij}p^ip^j} = \sqrt{g_{00}p^0p^0} \simeq (1+\phi)E \tag{3.6}$$

où la deuxième égalité provient de l'équation (3.5), et en sa direction de propagation n_i, qui vérifie donc :

$$\begin{cases} n^i \propto p^i \\ -g_{ij}n^in^j = 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

la première condition indiquant que les vecteurs n^i et p^i sont alignés et la deuxième reflétant la normalisation de n^i, ces 2 conditions déterminant de façon unique n^i à partir de l'impulsion, en particulier : $n^i = p^i/p$.

L'équation de Liouville a donc maintenant la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial n^i}\frac{\mathrm{d}n^i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.8}$$

[2] plus précisément, f devrait être une fonction de la position x^μ et de son moment conjugué $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^\mu}$, où $\mathcal{L}$ est le lagrangien du système considéré et $v^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$ le quadri-vecteur vitesse, mais on peut montrer que cela revient à l'approche utilisée ici.

Considérons alors un paramètre affine λ de genre temps tel que le quadri-vecteur impulsion soit la dérivée par rapport à ce paramètre du quadri-vecteur position :

$$p^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \tag{3.9}$$

En particulier, la vitesse est reliée de façon simple à l'impulsion :

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = p^i/p^0 \tag{3.10}$$

et les quatre équations des géodésiques vérifiées par les photons ont la forme, pour chacune des 4 composantes spatio-temporelles, repérées par λ :

$$p^0\frac{\mathrm{d}p^\lambda}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \tag{3.11}$$

soit sous forme plus explicite, en décomposant les symboles de connection affine suivant la métrique :

$$p^0\frac{\mathrm{d}p^\lambda}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\mu\lambda,\nu}\right)g^{\lambda\lambda}p^\mu p^\nu \tag{3.12}$$

en ayant utilisé le fait que les métriques considérées ici (perturbées et non-perturbées) sont diagonales et symétriques.

3.1.2 Espace non-perturbé

Dans ce cas, l'espace est décrit par la métrique de Robertson-Walker et la fonction de distribution sera donnée par la physique statistique et suivra une distribution de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein, puisque l'on suppose le milieu thermalisé et donc à l'équilibre thermodynamique, suivant l'espèce étudiée. Pour les photons, la fonction de distribution sera donc donnée par la statistique de Bose-Einstein, soit[3] :

$$f(E) = \frac{g_\gamma}{\hbar}\frac{1}{\exp(\frac{E-\mu}{k_BT}) - 1} \equiv \frac{2}{e^{E/T} - 1} \tag{3.13}$$

où $g_\gamma = 2$ est le nombre d'états autorisés pour le photon et μ est le potentiel chimique, qui représente la quantité d'énergie à fournir au système pour rajouter une particule. Pour le cas des photons, le potentiel chimique est nul puisque ces particules sont créées et annihilées aléatoirement.

Dans le cas non-perturbé, le module de l'impulsion $\bar{p}$ est égal à la composante p^0 du quadri-vecteur impulsion et représente donc l'énergie E. La composante temporelle de l'équation des géodésiques (3.12) nous donne alors la variation de l'énergie puisque $p^0 = E$:

$$E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}g_{ii,0}p^ip^i = Hg_{ii}p^ip^i \tag{3.14}$$

[3] nous posons conformément à l'usage $\hbar \equiv 1$ et $k_B \equiv 1$ dans la deuxième équation.

où la deuxième égalité vient de ce que pour la métrique non-perturbée, la métrique est de la forme $g_{ij} = -a^2(t)\gamma_{ij}(r,\theta,\phi)$, et que la dérivation ne se fait que par rapport au temps. De plus, les photons étant des particules de masse nulle, la relation (3.5) nous donne finalement :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -HE \qquad \text{soit} \quad E \propto a^{-1} \tag{3.15}$$

L'énergie se dilue donc proportionnellement au facteur d'échelle. De plus, la fonction de distribution étant un scalaire, sa loi de transformation d'un système de coordonnées x^μ à un autre système x'^μ correspond à $f(E) = f'(E')$, ce qui nous permet de voir que la variation de température des photons suit celle de l'énergie et donc est également en inverse du facteur d'échelle :

$$T_\gamma \propto a^{-1} \tag{3.16}$$

ce que nous aurait également donné la résolution de l'équation de Liouville (3.8) dans ce cas non-perturbé.

3.1.3 Espace perturbé

Il va s'agir maintenant d'étudier l'évolution des perturbations de densité et de température de l'Univers avant la recombinaison. La métrique utilisée est donc maintenant la métrique de Robertson-Walker perturbée (3.3), et nous allons chercher à résoudre l'équation de Liouville où il nous faut trouver une expression de $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$.

Pour cela, nous allons utiliser la composante temporelle de l'équation des géodésiques :

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}t} = g^{00}\left(g_{\mu\mu,0}\frac{p^\mu p^\mu}{2p^0} - g_{00,\nu}p^\nu\right) \tag{3.17}$$

En utilisant le fait que $p = \sqrt{g_{00}p^0p^0} \simeq (1+\phi)p^0$, il vient au premier ordre en les perturbations de la métrique :

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -H + \frac{\partial\psi}{\partial t} - n^i\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \tag{3.18}$$

L'équation de Liouville s'écrit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \left(H - \frac{\partial\psi}{\partial t} + n^i\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial n^i}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial n^i} = 0 \tag{3.19}$$

Le but de ce paragraphe étant d'obtenir l'évolution des fluctuations de température, nous allons introduire différentes quantités thermodynamiques à partir de la fonction de distribution. En particulier, par définition, la densité d'énergie des photons s'écrit comme le premier moment de la fonction de distribution, soit :

$$\rho_\gamma = \frac{g_\gamma}{(2\pi)^3}\int f(\eta,E)Ed^3E \tag{3.20}$$

Or, comme pour des photons, l'énergie est reliée à leur impulsion par la relation : $E = p$ et que le nombre d'états autorisés pour le photon est $g_\gamma = 2$, la densité d'énergie est :

$$\rho_\gamma = \frac{1}{\pi^2} \int f p^3 dp \tag{3.21}$$

Puisque le rayonnement fossile suit une loi de corps noir correspondant à un rayonnement thermalisé, la densité d'énergie des photons est reliée à sa température par la loi de Stefan $\rho_\gamma \propto T^4$. Cette loi correspond juste au calcul de l'intégrale ci-dessus sur toutes les impulsions, dans le cas où la fonction de distribution suit la loi de Bose-Einstein et n'est donc valable que dans le cas non-perturbé. Cependant, à l'ordre 0, cette loi reste valable. On en déduit alors les fluctuations de température pour ce rayonnement suivant la fonction de distribution :

$$\Theta \overset{\text{déf}}{=} \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{4}\frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi^2 \rho_\gamma}\int f p^3 dp - 1\right) \tag{3.22}$$

En multipliant l'équation de Liouville par p^3 et en l'intégrant sur les impulsions, nous obtenons :

$$\dot{\Theta} + n^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\Theta + \phi) - \dot{\psi} + \dot{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial \gamma^i}\Theta = 0 \tag{3.23}$$

3.2 Collisions

En fait, pour que l'équation de Boltzmann soit complète, il faut rajouter un terme de *collisions*, qui indique le nombre de photons introduits ou sortants du système.

Le principal effet qui intervient dans ce terme de collisions au niveau du fond diffus cosmologique est l'effet Compton, qui correspond à la diffusion d'un photon sur un électron :

$$\gamma + e \rightarrow \gamma + e \tag{3.24}$$

De plus, dans la plupart des situations cosmologiques, le transfert d'impulsion $\frac{q'-q}{q} = \frac{p-p'}{p}$, où q et p désignent respectivement les impulsions de l'électron et du photon, du photon à l'électron, dans le repère de l'électron initialement au repos, lors de cette collision est négligeable : c'est l'approximation Thomson.

Pour écrire le terme de collision, il faut également connaître la fonction de distribution des électrons présents dans l'Univers. Si nous supposons que le fluide d'électrons est thermalisé dans un certain référentiel, la limite non-relativiste nous donne pour ces électrons une fonction de distribution maxwellienne :

$$g(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{q}}) = \frac{(2\pi)^3}{\hbar} \frac{x_e n_e}{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{q} - m_e \mathbf{v_e})^2}{2 m_e k_B T}\right) \tag{3.25}$$

où les doubles barres présentes au-dessus de symboles indique que l'on considère ces quantités en tant que tenseurs et lorsque ces symboles sont en gras, il ne s'agit que de leur composante spatiale.

Nous pouvons alors écrire le terme de collision dans un référentiel localement orthonormal, qui correspond simplement au bilan des apparitions et disparition des photons dans l'élément de volume des phases d$\mathbf{x}$d$\mathbf{p}$ (voir par exemple Bernstein, 1988) :

$$C[f] = \frac{1}{2E(p)} \int D\bar{\bar{q}} D\bar{\bar{q}}' D\bar{\bar{p}} \ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\bar{\bar{p}} + \bar{\bar{q}} - \bar{\bar{p}}' + \bar{\bar{q}}') |M|^2 \times \Big(g(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{q}}') \ f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{p}}') - g(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{q}}) \ f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{p}}) \Big) \tag{3.26}$$

où le terme de Pauli et d'émission stimulée ont été négligés. La quantité $\delta^{(4)}$ désigne la distribution de Dirac quadridimensionnelle, la fonction f est la fonction de distribution des photons utilisée dans les sections précédentes, les éléments de volume Dq, Dq' et Dp sont définis par :

$$D\bar{\bar{q}} \overset{\text{déf}}{=} \delta^{(4)}(q^2 + m^2 - E(q)) \mathrm{d}\bar{\bar{q}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{2E(q)(2\pi)^3} \tag{3.27}$$

et l'élément de matrice de diffusion $|M|^2$, qui décrit la probabilité de transition du photon d'un état d'impulsion à un autre, s'écrit :

$$|M|^2 = 2(4\pi)^2 \alpha^2 \left(\frac{p'}{p} + \frac{p}{p'} - sin^2 \beta \right) \tag{3.28}$$

où α est la constante de structure fine et $\beta \overset{\text{déf}}{=} \arccos(\frac{\mathbf{p}.\mathbf{p}'}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{p}'\|}) \equiv \arccos(\mathbf{n}.\mathbf{n}')$, $\mathbf{n}$ étant la direction de propagation du photon, est l'angle de la diffusion Thomson. Dans cet élément de matrice, nous avons enlevé l'effet de la polarisation, pour simplifier le calcul, mais cet effet n'est toutefois pas tout à fait négligeable au moment des dernières diffusions.

Les électrons étant non-relativistes, leur impulsion est donnée par la relation $q \simeq m_e v_e \simeq \sqrt{m_e k_B T}$, et comme leur masse est supérieure à la température du milieu, leur impulsion est grande devant la température qui est l'ordre de grandeur de l'impulsion des photons. On en déduit alors que le transfert d'impulsion aux électrons $q' - q$ est au mieux de l'ordre de grandeur de la température, ce qui indique que $q' = q' - q + q \simeq q$. De plus, les énergies sont respectivement données par $E(p) \simeq p$ et $E(p') \simeq p'$ puisque les photons sont relativistes et $E(q) = E(q') \simeq m_e$ puisque les photons sont non-relativistes, soit :

$$C[f] = \frac{1}{8(2\pi)^5 m_e^2} \int \mathrm{d}\mathbf{q} \, \mathrm{d}\mathbf{p} \, \delta^{(4)}(\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{q}} - \bar{\bar{p}}' + \bar{\bar{q}}') |M|^2 g(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{q}}) \big[f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{p}}') - f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{p}}) \big] \tag{3.29}$$

l'intégrale se faisant donc à $\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{p}}' = \bar{\bar{q}} - \bar{\bar{q}}'$. La composante 0 de cette égalité entre les deux quadri-vecteurs impulsion s'écrit $p - p' = q'_0 - q_0$ où $q_0 = \frac{q^2}{2m_e}$ est l'énergie

de l'électron, soit :

$$p - p' = \frac{1}{2m_e}\left(q'^2 - q^2\right) = \frac{1}{2m_e}\left((p - p' + q)^2 - q^2\right) \simeq p\ \mathbf{v_e}.(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \tag{3.30}$$

où dans la dernière égalité, nous avons pris $p' \simeq p$ puisque le module de l'impulsion du photon est quasiment inchangé. Ceci nous permet d'effectuer un développement limité de $f(\bar{\bar{x}}, p', \mathbf{n}') - f(\bar{\bar{x}}, p, \mathbf{n}')$ en fonction de l'impulsion p et en utilisant la normalisation $\int g(\mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q} = (2\pi)^3 x_e n_e$, le terme de collision se réduit à :

$$C[f] = \frac{\alpha^2 x_e n_e}{m_e^2}\int \mathrm{d}\mathbf{n}'(1 + (\mathbf{n}.\mathbf{n}')^2)\left(f(\bar{\bar{x}}, p, \mathbf{n}') - f(\bar{\bar{x}}, p, \mathbf{n}) - p\frac{\partial f}{\partial p}\mathbf{v_e}.(\mathbf{n} - \mathbf{n}')\right) \tag{3.31}$$

Introduisons alors le moment isotrope de la fonction de distribution :

$$f_0 \overset{\text{déf}}{=} \int \frac{d\mathbf{n}}{4\pi} f(\bar{\bar{x}}, p, \mathbf{n}) \tag{3.32}$$

et la quantité f^{ij}, proportionnelle au moment quadrupolaire de la fonction de distribution qui est définie par :

$$f^{ij} \overset{\text{déf}}{=} \int \frac{d\mathbf{n}}{4\pi}(n^i n^j + \frac{1}{3}g^{ij}) f(\bar{\bar{x}}, p, \mathbf{n}) \tag{3.33}$$

où g_{ij} est la partie spatiale de la métrique, assurant la normalisation donnée en (3.7), du vecteur n^i.

Avec ces définitions et en notant que l'intégrale sur toutes les directions d'une fontion proportionnelle à cet angle est nulle, l'équation (3.31) se réécrit en fonction de la fonction de distribution des photons et de ces moments de la façon suivante :

$$C[f] = \sigma_T x_e n_e \left(f_0 - f + n_i n_j f^{ij} - \mathbf{v_e}.\mathbf{n} p \frac{\partial f}{\partial p}\right) \tag{3.34}$$

où $\sigma_T \overset{\text{déf}}{=} \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2}$ est la section efficace de la diffusion Thomson. Le dernier terme de l'équation étant proportionnel à la vitesse du fluide de fond, représente l'effet Doppler lié à ce fluide.

3.3 Equation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann complète peut maintenant être écrite de façon détaillée en utilisant l'équation de Boltzmann sans collision (3.23) et le terme de collision (3.34), qu'il faut réécrire en fonction des fluctuations de température, après multiplication par p^3 et intégration sur les impulsions. Nous obtenons alors l'équation suivante pour l'évolution des fluctuations de température :

$$\dot{\Theta} + n^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\Theta + \psi) + \dot{n}^i \frac{\partial}{\partial \dot{n}^i}\Theta + \dot{\phi} = \dot{\tau}(\Theta_0 - \Theta - n_i v_e^i + \frac{1}{16} n_i n_j \Pi_\gamma^{ij}) \tag{3.35}$$

où $\dot{\tau} \stackrel{\text{déf}}{=} x_e n_e \sigma_T$ est la variation de profondeur optique du milieu et les moments quadrupolaires de la densité d'énergie des photons sont définis par :

$$\Pi_\gamma^{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{4}{\pi^2 \rho_\gamma} \int p^3 dp \; f^{ij} \tag{3.36}$$

L'équation (3.35) est l'équation fondamentale décrivant la formation des anisotropies primaires du fond diffus cosmologique. Cette équation, avec les équations d'Einstein (2.48) à (2.51), est celle utilisée dans les codes, tels `CMBFast`, ou le code utilisé pour les différents résultats du chapitre 8, pour calculer des fluctuations de température, et par suite des spectres de puissance en température, à partir d'un modèle théorique donné.

Par exemple, Seljak et Zaldarriaga, 1996, donne une méthode pratique pour intégrer ce système d'équations de manière assez simple et efficace en utilisant une décomposition multipolaire des fluctuations de température dans l'espace de Fourier :

$$\Theta(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1)(-i)^l a_l(k, \eta) P_l(\cos(\mathbf{k}.\mathbf{n})) \tag{3.37}$$

puis en décomposant les calculs en un terme source convolué par un terme géométrique :

$$a_l(k, \eta = \eta_0) = \int_0^{\eta_0} S(k, \eta) j_l(k(\eta_0 - \eta)) d\eta \tag{3.38}$$

où le terme source $S(k, \eta)$ est obtenu en réarrangeant les différentes équations et dépend des fluctuations de la métrique et du moment quadrupolaire de la densité d'énergie. Les fonctions de Bessel forment le terme géométrique lorsque l'on est en espace plat $K = 0$, mais si la courbure est non nulle, ce terme doit être modifié, comme cela est fait dans Zaldarriaga *et al.*, 1998 et Hu *et al.*, 1998.

Chapitre 4:

Spectres de puissance

Les fluctuations de densité au niveau de la sphère de dernière diffusion sont supposées gaussiennes, ce qui provient en particulier des modèles d'inflation si l'on considère que les fluctuations de densité ont été engendrées initialement par l'action d'un champ scalaire. Dans ce cas, si l'Univers est simplement connexe, comme nous le supposons dans cette première partie, l'information concernant les fluctuations de température est entièrement contenue dans le spectre de puissance des fluctuations de température[1]. Cependant, ce ne sera plus le cas pour des Univers multiplement connexes, comme nous le verrons dans la prochaine partie, même si le spectre de puissance reste un bon outil d'analyse de données sur la sphère.

Nous allons donc étudier dans ce chapitre, premièrement, la façon de dériver un spectre de puissance à partir d'un modèle théorique, grâce à la décomposition de quantités observables en harmoniques sphériques, et deuxièmement de voir la manière dont certains effets particuliers, par l'intermédiaire de la formule de Sachs et Wolfe, contribuent à ce spectre de puissance.

4.1 Harmoniques sphériques

Les données que l'on possède sur le fond diffus cosmologique sont situées sur une sphère, appelée sphère de dernière diffusion et qui correspond à l'époque d'émission des photons du fond diffus cosmologique. En fait, cette époque n'est pas définie en un instant précis (*cf.* amortissement de Silk). Cependant, on peut considérer que la sphère où sont représentées les données est fixée en un temps précis, temps qui correspond à une époque moyenne d'émission des photons du fond diffus.

De plus, si nous construisons une base de la sphère, les différentes observables précédentes pourront être ramenées à une série de nombres, ces nombres étant les coefficients des données projetées sur les différents éléments de la base. En particulier, les équations permettant d'obtenir les fluctuations de température (*cf.* (1.10))

[1] La notion de spectre de puissance regroupe un certain nombre de significations. En fait, cela désigne la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un quantité physique. Ici, il s'agit des fluctuations de températures, mais cela aurait pu être des fluctuations de densité dont un exemple est le spectre de Harrison-Zel'dovich.

font intervenir un laplacien. On peut donc chercher une base de la sphère qui diagonalise cet opérateur, c'est-à-dire une fonction f qui vérifie pour tout x sur l'ensemble considéré, donc ici sur la sphère :

$$\Delta_{\mathcal{S}^2} f(x) = \lambda f(x) \tag{4.1}$$

où $\Delta_{\mathcal{S}^2}$ est le laplacien sur la sphère et λ est un réel quelconque.

On peut montrer qu'un ensemble de fonctions vérifiant cette équation sont les harmoniques sphériques Y_{lm} qui diagonalisent le laplacien pour les valeurs propres de la forme $-l(l+1)$, les l décrivant les entiers naturels, soit :

$$\Delta_{\mathcal{S}^2} Y_{lm}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{4.2}$$

où m varie dans $-l, -l+1, ..., l$. En décomposant le laplacien en une partie dépendant uniquement de la variable θ et une autre ne dépendant que de la variable ϕ, l'équation précédente nous permet d'obtenir une expression plus explicite des harmoniques sphériques (voir également l'annexe B) :

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{4.3}$$

où les polynômes de Legendre associés sont définis par la relation :

$$P_l^m(x) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x) \tag{4.4}$$

où ont été utilisés les polynômes de Legendre :

$$P_l(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{\mathrm{d}x^l} (1-x^2)^l \tag{4.5}$$

Des propriétés plus détaillées des harmoniques sphériques, dont une représentation graphique est donnée pour quelques valeurs de l et m sur la figure (4.1), et des polynômes de Legendre sont données dans l'annexe B. En particulier, les différentes relations de normalisation sont très souvent utilisées, notamment pour inverser différentes formules, ainsi que les relations de symétrie des harmoniques sphériques qui peuvent simplifier les équations.

4.2 Fluctuations de température

Comme cela a été dit dans la section précédente, nous pouvons décomposer les fluctuations de température sur les harmoniques sphériques puisque celles-ci forment une base de la sphère. Notons cette décomposition :

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{4.6}$$

où a_{lm} est une constante complexe.

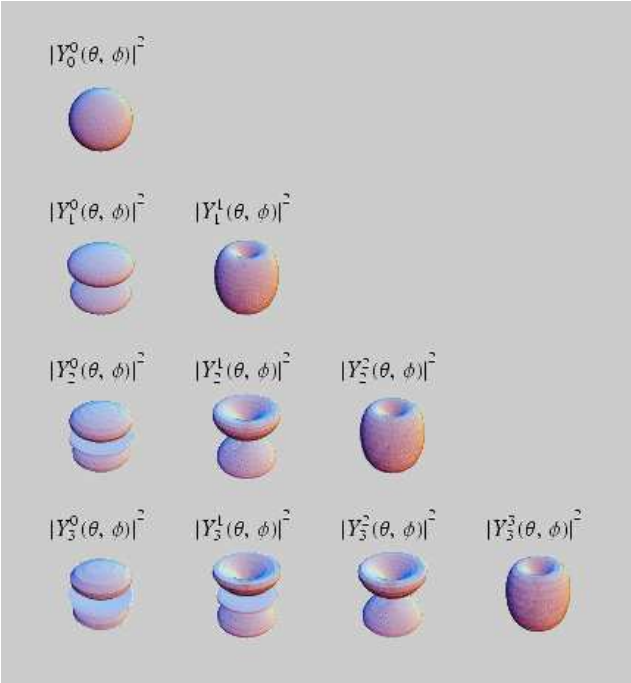


FIG. 4.1 – **Représentation de quelques harmoniques sphériques.** Ce schéma donne le module des harmoniques sphériques pour $l \leq 3$ et m positif (figure issue de `http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html`).

Grâce à la normalisation des harmoniques sphériques, donnée en annexe (B.14), nous pouvons inverser cette relation pour obtenir les coefficients a_{lm} une fois connues les fluctuations de température :

$$a_{lm} = \iint \Theta(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta,\phi) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \tag{4.7}$$

où Y^*_{lm} désigne le complexe conjugué de Y_{lm}.

De plus, on peut montrer[2] que les fluctuations de température sont proportionnelles dans l'espace de Fourier à un certain opérateur linéaire de convolution, ne dépendant que du module du vecteur d'onde, appliqué aux modes propres du laplacien pour l'espace de Friedmann-Lemaître considéré, qui sont les ondes planes pour un espace plat :

$$\Theta(\theta,\phi) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}}\, O_k(e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}) \sqrt{\mathcal{P}_\phi(k)} \hat{e}_{\mathbf{k}} \tag{4.8}$$

où $\mathcal{P}_\phi(k)$ est un spectre de puissance primordial qui prend, par exemple, la forme : $\mathcal{P}_\phi(k) \propto k^{-3}$ pour un spectre de Harrison-Zel'dovich (ou invariant d'échelle), et $\hat{e}_{\mathbf{k}}$

[2] *cf.* Riazuelo *et al.*, 2004.

est un champ aléatoire gaussien qui satisfait la normalisation suivante :

$$< \hat{e}_{\mathbf{k}} \hat{e}^*_{\mathbf{k}'} >= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{4.9}$$

où la moyenne est effectuée sur les réalisations.

Or la formule (B.18), nous permet de développer l'exponentielle sur les harmoniques sphériques. En séparant les composantes dépendant angulairement de $\mathbf{k}$ et celles en dépendant radialement, puis en utilisant l'équation (4.7), nous obtenons l'expression suivante pour les coefficients a_{lm} des fluctuations de température :

$$a_{lm} = i^l \int k^2 \mathrm{d}k \; G_l(k) \sqrt{\mathcal{P}_\phi(k)} \hat{e}_{lm}(\mathbf{k}) \tag{4.10}$$

où

$$G_l(k) \stackrel{\text{déf}}{=} O_k(\sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(kR_{\mathrm{SDD}})) \tag{4.11}$$

est l'opérateur de convolution appliqué à la partie radiale des modes propres du laplacien, qui sont pour ce cas, donc pour un espace de courbure nulle, les fonctions de Bessel sphériques $j_l(x)$ (voir l'annexe B.3 pour la définition de cette fonction). R_{SDD} désigne le rayon de la surface de dernière diffusion et la variable aléatoire :

$$\hat{e}_{lm}(\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}\Omega_{\mathbf{k}} Y^*_{lm}(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) \; \hat{e}_{\mathbf{k}} \tag{4.12}$$

qui correspond à la partie isotrope de la variable aléatoire $\hat{e}_{\mathbf{k}}$. Cette variable aléatoire est également un champ aléatoire gaussien dont la normalisation est donnée par :

$$< \hat{e}_{lm}(\mathbf{k}) \; \hat{e}^*_{l'm'}(\mathbf{k}') >= \frac{\delta(k - k')}{k^2} \; \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{4.13}$$

On en déduit donc que dans un Univers simplement connexe, qui a été pris plat ici pour illustrer le raisonnement, mais peut également être ouvert ou fermé, nous avons :

$$< a_{lm} a^*_{l'm'} >= C_l \; \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{4.14}$$

où C_l est appelé *spectre de puissance en température*. Dans un Univers simplement connexe de Friedmann-Lemaître, il n'est donc nécessaire d'étudier que ces coefficients C_l qui contiennent toute l'information en température du fond diffus cosmologique. Or, comme nous le verrons, dans la deuxième partie, si la topologie de l'Univers est non-triviale, la décomposition des fluctuations de température effectuée en (4.8) ne fait plus intervenir une intégrale, mais une somme, puisque les symétries de l'Univers, de par ces dimensions finies, interdiront l'existence de certains modes. Dans ce cas, il peut y avoir de l'information contenue dans les coefficients a_{lm} qui ne l'est pas dans le spectre de puissance (voir section 8.3.1).

Revenons au spectre de puissance d'un espace simplement connexe. A partir de la formule précédente (4.14), nous pouvons inverser la relation pour obtenir une

formule explicite du spectre de puissance en fonction des fluctuations de température :

$$C_l =< |a_{lm}|^2 >= \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} < |a_{lm}|^2 > \tag{4.15}$$

Dans cette formule, la moyenne est, comme pour les $\hat{e}_{\mathbf{k}}$, une moyenne sur les réalisations. Lorsque l'on a un modèle théorique, obtenir cette moyenne ne pose pas de problèmes, mais pour l'Univers réel, il n'y a qu'une réalisation ! Dans ce cas, on utilise donc la deuxième égalité sans effectuer de moyenne, puisque chaque a_{lm} est fixé par les observations, mais puisque l'on somme sur $2l+1$ valeurs, à l fixé, cela donne une bonne simulation au moins aux grands multipôles. Il y aura donc toujours une incertitude élevée pour les petits multipôles, et donc pour les grands angles : c'est ce qui est appelé *variance cosmique*.

Celle-ci provient du fait que l'on peut considérer les a_{lm} comme des variables gaussiennes. On a ainsi une distribution du χ^2 à $2l+1$ variables, ce qui implique une variance de la forme :

$$\Delta C_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}\, C_l \tag{4.16}$$

qui sera donc élevée pour les termes de petit l.

4.3 Anisotropies primaires

4.3.1 Formule de Sachs-Wolfe

Avant d'étudier quelques effets intervenant dans les fluctuations de température du fond diffus cosmologique, nous allons dériver la formule de Sachs-Wolfe[3] permettant de les mettre en évidence assez simplement.

Ecrivons donc la composante temporelle de l'équation des géodésiques (voir (A.6)) pour les photons :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{4.17}$$

où λ désigne un paramètre affine de genre temps le long de la trajectoire des photons et les $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ sont les symboles de connection affine associés à la métrique du problème. Ici, nous allons considérer une métrique de Robertson-Walker perturbée. Mais pour simplifier les calculs, nous allons nous placer dans la métrique comobile associée :

$$\mathrm{d}s^2 = (1+2\phi)\mathrm{d}\eta^2 - (1-2\psi)\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{4.18}$$

Nous avons simplement considéré la métrique perturbée en jauge longitudinale (2.36), mais sans le facteur a^2. En effet, ce facteur, qui ne dépend que de la coordonnée temporelle, induit juste une transformation conforme. Or, ces transformations redonnent les mêmes équations du mouvement et induisent donc la même

[3] *cf.* Sachs et Wolfe, 1967.

physique. En effet, pour une particule sans masse, l'action s'écrit :

$$S = \int \mathrm{d}s \; g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} \tag{4.19}$$

Ainsi, pour une transformation conforme, cette action est inchangée. En particulier, si l'on considère la transformation $g_{\mu\nu} \to a^2(\eta) g_{\mu\nu}$ et $ds \to a^2(\eta) ds$, l'action reste la même.

Pour cette métrique, l'équation des géodésiques s'écrit, au premier ordre en les perturbations ϕ et ψ, suivant le paramètre affine qu'est le temps propre, qui est également l'abscisse curviligne pour des photons dans un espace non-perturbé, τ :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \delta x^0}{\mathrm{d}\tau^2} + \delta\Gamma^0_{\rho\sigma} \frac{\mathrm{d}\bar{x}^\rho}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\bar{x}^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{4.20}$$

avec : $\delta\Gamma^0_{00} = \dot{\phi}$, $\delta\Gamma^0_{0i} = \phi_{,i}$ et $\delta\Gamma^0_{ij} = -\dot{\psi}\gamma_{ij}$ et où les quantités surmontées d'une barre désignent les quantités non-perturbées. Nous pouvons également comme dans le chapitre précédent décomposer la trajectoire des photons sur sa direction de propagation : $\bar{x}^\mu = n^\mu \tau$, où la direction n^μ est indépendante de l'abscisse curviligne τ puisque les photons se propagent suivant les géodésiques. De plus, en espace non perturbé, il s'agit également de la première coordonnées, donc $n^\mu \equiv (1, n^i)$, avec $n^i n_i \overset{\text{déf}}{=} -\gamma_{ij} n^i n^j = -1$ puisque sur une géodésique $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$. On en déduit alors après intégration de l'équation précédente entre la période de recombinaison et maintenant :

$$\frac{\mathrm{d}\delta x^0}{\mathrm{d}\tau} = -2\phi + \int_{\tau_r}^{\tau_0} (\dot{\psi} + \dot{\phi}) \mathrm{d}\tau \tag{4.21}$$

où nous avons utilisé la relation $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} \overset{\text{déf}}{=} \dot{\phi} + \phi_{,i} n^i$ et où les points désignent des dérivées par rapport au temps propre.

De plus, l'énergie d'une particule de quadri-impulsion p^μ et mesurée par un observateur de quadri-vitesse u^μ par rapport à cette particule est :

$$\mathcal{E} = g_{\mu\nu} p^\mu u^\nu = (1 + 2\phi) p^0 u^0 - \gamma_{ij} \bar{p}^i u^j \tag{4.22}$$

où pour la deuxième égalité, nous avons utilisé le fait que u^j est déjà un terme du premier ordre en les perturbations. Cette quantité correspond en fait au déplacement du fluide par rapport à nous, et qui représente donc la vitesse des baryons v^i introduite dans le tenseur énergie-impulsion perturbé (2.40). De plus, la quadri-vitesse est normalisée (voir section 1.3), soit $g_{\mu_\nu} u^\mu u^\nu = 1$, puis en différenciant cette expression, on obtient au premier ordre :

$$\delta g_{00} \bar{u}^0 + 2\bar{g}_{00} \delta u^0 = 0 \tag{4.23}$$

puisque les u^i sont déjà d'ordre 1. Or au repos, u^0 vaut 1 et avec l'expression de la métrique, la coordonnée temporelle de la vitesse est :

$$u^0 = \bar{u}^0 + \delta u^0 = 1 - \phi \tag{4.24}$$

Le quadri-vecteur impulsion est, quant à lui, la dérivée de la position par rapport au paramètre affine introduit précédemment, donc :

$$p^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = E\left(n^\mu + \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{4.25}$$

en décomposant la position en sa partie non-perturbée et sa partie perturbée puisque $\frac{\mathrm{d}\bar{x}^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \bar{p}^0 = E$ est l'énergie au repos des photons. Nous pouvons maintenant réécrire l'énergie perturbée des photons :

$$\mathcal{E} = E\left(1 - \phi - v_i n^i + \int_{\tau_r}^{\tau_0} (\dot{\psi} + \dot{\phi})\mathrm{d}\tau\right) \tag{4.26}$$

De plus, pour une distribution de photons, la température peut se réexprimer en fonction de l'énergie à la recombinaison calculée au-dessus et celle actuelle qui vaut $E_0 = E(1 + \frac{\delta T}{T}(\eta_0)) = E(1 + \frac{1}{4}\frac{\delta\rho_r}{\rho_r}(\eta_0))$, de la manière suivante :

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\mathcal{E} - E_0}{E_0} \tag{4.27}$$

ce qui donne finalement la *formule de Sachs-Wolfe* pour les fluctuations de température :

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta_r}{4} - \phi - n_i v^i + \int_{\tau_r}^{\tau_0} (\dot{\psi} + \dot{\phi})\mathrm{d}\tau \tag{4.28}$$

Cette équation comporte trois parties :
- les deux premiers termes $\frac{\delta_r}{4} - \phi \equiv -\frac{1}{3}\phi$ qui est *l'effet Sachs-Wolfe ordinaire* ;
- le troisième terme qui correspond à un effet de déplacement du fluide est *l'effet Doppler* ;
- l'intégrale qui correspond à l'intégration des fluctuations du potentiel sur la ligne de visée est appelé *effet Sachs-Wolfe intégré*.

Ce sont ces effets que nous allons détailler dans les paragraphes qui suivent et voir comment ils se traduisent dans le spectre de puissance. Ces effets sont résumés par le graphe (4.2), effets qui ont été obtenus numériquement à partir de l'équation ci-dessus pour les paramètres cosmologiques standards.

4.3.2 Effet Doppler

L'effet Doppler correspond, comme son nom l'indique, au terme de déplacement du fluide. Celui-ci se traduit par des décalages vers le rouge ou le bleu en fréquences et induit par la loi de Wien des fluctuations de température autour de la loi de corps moir. Ce terme se décompose en deux parties : la première est la vitesse d'ensemble du fluide par rapport à l'observateur. Cet effet, n'est qu'un effet de jauge puisque dépend du choix de coordonnées. Cela correspond à des fluctuations de la forme :

$$\left.\frac{\delta T}{T}\right|_{\text{Doppler}} = \hat{n}.v_{\text{obs}} = v_{\text{obs}}\cos(\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} v_{\text{obs}} Y_{10}(\theta, \phi) \tag{4.29}$$

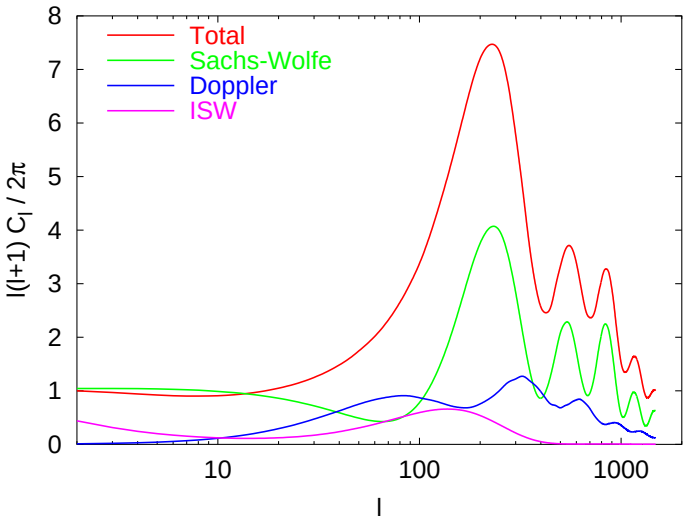


FIG. 4.2 – **Composantes du spectre de puissance.** Figure issue de Riazuelo *et al.*, 2004.

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire reflétant la direction d'observation.

En particulier, cela se traduit par un effet dipôlaire : le spectre de puissance associé à cet effet ne contient qu'un seul terme, le terme $l = 1$ qui vaut : $C_1 = \frac{4\pi}{9} v_{\text{obs}}^2$. Ce terme est la contribution la plus importante aux fluctuations de température après l'effet principal de corps noir. En effet, le corps noir est à une température de $T_{\text{corps noir}} \simeq 2,725\text{K}$ tandis que le dipôle est à une température de $T_{\text{dipôle}} \simeq 3.346\text{mK}$ [4], soit des fluctuations de 10^{-3} tandis que les autres contributions n'interviendront qu'à 10^{-4} près. Ce terme est donc généralement utilisé pour calibrer les autres données et est donc enlevé du spectre de puissance.

Le deuxième effet est celui des déplacements individuels des photons dans les puits de potentiel qui interviennent à des échelles angulaires bien moins grandes et produisent des oscillations dans le spectre de puissance.

4.3.3 Effet Sachs-Wolfe ordinaire

Dans cette section, nous dérivons le spectre de puissance lié à l'effet Sachs-Wolfe dans un espace simplement connexe et plus loin (section 6.3), nous verrons la façon dont il s'écrit lorsque l'Univers possède une topologie non triviale.

Cet effet est celui qui domine aux grandes échelles. Il décrit l'action de la gravitation sur un photon qui veut escalader un puit de potentiel. Il correspond aux deux premiers termes de l'équation de Sachs-Wolfe. Or, on peut montrer[5] que le terme lié aux fluctuations de densité vaut $\frac{2}{3}\Phi$, soit pour le terme Sachs-Wolfe

[4] ce qui correspond au passage à une vitesse d'environ 370 km/s en direction d'un "Grand Attracteur".

[5] *cf.* White et Hu, 1997.

ordinaire :

$$\left.\frac{\delta T}{T}\right|_{\text{SWO}} = -\frac{1}{3}\Phi \tag{4.30}$$

où Φ est le potentiel gravitationnel. On peut décomposer ce potentiel en modes de Fourier :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \Phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \mathrm{d}\mathbf{k} \tag{4.31}$$

Il est alors d'usage d'introduire le *spectre de puissance primordial* qui décrit la façon dont sont corrélés les différents modes au moment de leur émission, soit :

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \overset{\text{déf}}{=} < \Phi_{\mathbf{k}}(0)\Phi^*_{\mathbf{k}'}(0) > \tag{4.32}$$

où $\Phi_{\mathbf{k}}(0)$ est le mode de Fourier du potentiel gravitationnel à la surface de dernière diffusion. Or, ce qui nous intéresse est la statistique du mode actuellement (ou ce qui revient au même, puisque après l'égalité le rayonnement n'interagit plus) au moment de l'égalité matière-rayonnement. On peut montrer que ces deux quantités sont égales à un facteur près : $\Phi_{\mathbf{k}}(\eta_{\text{équiv}}) = \frac{9}{10}\Phi_{\mathbf{k}}(0)$. De plus, la théorie de l'inflation montre que ce spectre ne dépend que du module d'un des vecteurs d'onde, plus précisément :

$$< \Phi_{\mathbf{k}}\Phi^*_{\mathbf{k}'} >= \mathcal{P}(k)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{4.33}$$

Ce spectre est à priori quelconque : il est juste à fixer à d'éventuelles contraintes observationnelles. On peut ainsi constater qu'il suit bien une loi de puissance, ainsi le spectre s'écrit :

$$k^3\mathcal{P}(k) \propto k^{n-1} \tag{4.34}$$

où n est un nombre proche de 1 [6]. Le cas où n est égal à 1 est appelé spectre invariant d'échelle ou *spectre de Harrison-Zel'dovich*.

Enfin, en utilisant la même décomposition que précédemment de l'exponentielle sur les harmoniques sphériques, nous obtenons les coefficients a_{lm} correspondants, soit :

$$a_{lm} = -4\pi i^l \int \Phi_{\mathbf{k}} j_l(kr) Y^*_{lm}(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) \mathrm{d}\mathbf{k} \tag{4.35}$$

En utilisant (4.15) et la forme générique du spectre de puissance $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$, nous obtenons l'expression de l'effet Sachs-Wolfe :

$$C_l = A\,\frac{\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(l + \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{5-n}{2}\right)} \tag{4.36}$$

En particulier, si le spectre est invariant d'échelle, $n = 1$ et les coefficients C_l deviennent simplement :

$$C_l = A\frac{\Gamma(1)\Gamma(l)}{\Gamma(3/2)\Gamma(l+2)} = \frac{B}{l(l+1)} \tag{4.37}$$

[6] WMAP donne 0.93 ± 0.03.

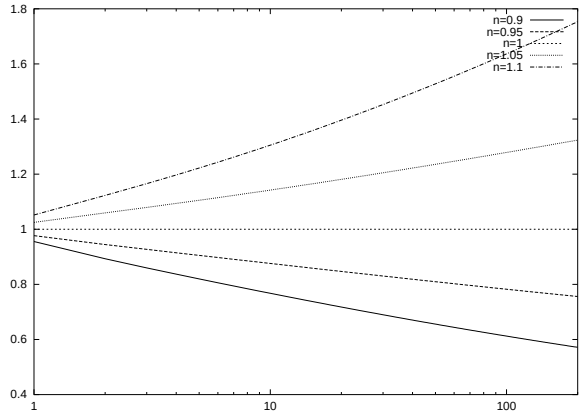


FIG. 4.3 – **Spectre de puissance pour l'effet Sachs-Wolfe.** Cette composante est représentée pour différents indices spectraux n. En particulier, le cas $n = 1$ correspond à une courbe constante.

La quantité $l(l+1)C_l$ est donc constante. C'est pourquoi le spectre de puissance est souvent représenté en termes de $l(l+1)C_l$ (à un facteur multiplicatif près) : aux grandes échelles, le spectre de puissance est quasiment plat, comme nous pouvons le constater sur la figure (4.3), et pour un spectre de Harrison-Zel'dovich, cette quantité est constante. Comme l'effet Sachs-Wolfe est dominant aux grandes échelles, on observe également ce plateau dans le spectre total : on parle ainsi de plateau Sachs-Wolfe.

4.3.4 Effet Sachs-Wolfe intégré

Cet effet est lié aux fluctuations du potentiel sur la ligne de visée. C'est le terme :

$$\left.\frac{\delta T}{T}\right|_{\mathrm{SWI}} = \int_{\tau_r}^{\tau_0} (\dot{\psi} - \dot{\phi}) d\tau \tag{4.38}$$

de l'équation (4.28).

Cet effet est donc nul si les potentiels restent constants au cours du temps. Physiquement, cela se comprend si l'on considère un photon qui rentre dans un puit de potentiel constant au cours du temps. Dans ce cas le décalage en fréquence due à l'entrée dans ce puit va être compensé par le décalage qu'il va subir en sortie. C'est ce qui correspond au fait que les potentiels n'interviennent que par leur dérivées temporelles.

Cet effet se subdivise également en deux contributions, suivant leur époque : tout d'abord, lorsque le rayonnement domine encore sur la matière, on parle d'effet Sachs-Wolfe intégré *précoce*. Dans ce cas, à la transition entre ces deux ères, les puits de potentiel de taille plus petites que l'horizon vont se combler. Cet effet va donc jouer pour des échelles de la taille de l'horizon.

Après la transition entre ces deux ères, on parle d'effet Sachs-Wolfe intégré

tardif. Cette contribution sera particulièrement sensible dans le cas d'un Univers ouvert ou avec constante cosmologique. En effet, dans ce cas, l'Univers va entrer dans une période d'expansion rapide, faisant ainsi varier la forme des potentiels. Dans ce cas, les contributions le long de la trajectoire vont en moyenne se compenser localement. Cet effet interviendra donc majoritairement aux grandes échelles, soit aux petits multipôles dans le spectre de puissance.

Deuxième partie

Topologie de l'Univers

Chapitre 5:

Topologie : cadre général

DANS la première partie, nous avons implicitement exploité une ambiguïté présente en relativité générale : en effet, les équations d'Einstein sont des équations locales puisque différentielles. Ces équations ne décrivent donc que la *géométrie* de l'Univers, c'est-à-dire la courbure présente *en chaque point de l'Univers.* Nous avons ensuite supposé, par extension que cette propriété était valide pour l'Univers *dans son ensemble*, ainsi que le suppose le modèle de Friedmann-Lemaître. Cependant, si nous voulons maintenant considérer le problème de manière réellement globale, il faut faire appel à la *topologie*, branche des mathématiques qui étudie les formes des objets, qui ne peut s'aider des équations d'Einstein.

Ce chapitre va donc d'abord décrire l'intérêt d'étudier la topologie de l'Univers puis à travers des exemples, nous allons introduire les différents concepts topologiques qui nous seront utiles pour la suite. Nous verrons ensuite quelques applications pour les espaces euclidiens et les espaces sphériques tridimensionnels, ces derniers étant ceux qui nous intéresseront plus particulièrement dans la suite.

5.1 Motivation

A la suite d'Einstein, l'habitude a été prise de ne considérer comme Univers possibles que des espaces simplement connexes, soit :

- un espace sphérique si la courbure est strictement positive ;
- un espace euclidien si la courbure est nulle ;
- un espace hyperbolique si la courbure est strictement négative.

Mais si certains, comme de Sitter[1], Weyl ou Friedmann proposèrent des Univers possédant une topologie plus complexe, ceux-ci ont rapidement été oubliés et même si quelques publications ont été produites sur ce sujet entre temps[2], il a fallu attendre une époque plus récente pour que la topologie soit de nouveau étudiée de façon précise en cosmologie[3].

[1] *cf.* de Sitter, 1917.
[2] *cf.* Ellis, 1971; Sokolov et Starobinskii, 1976.
[3] *cf.* Lachièze-Rey et Luminet, 1995.

Malgré les apparences, ces espaces ne sont pas plus compliqués à étudier que les espaces précédemment cités. En effet, nous pouvons par exemple considérer le cas des simulations numériques cosmologiques. Pour avoir un résultat en un point donné, nous devons alors considérer les données en tout point de l'espace d'où la nécessité de travailler sur un volume fini, choisi naturellement plus grand que les observations aujourd'hui possibles, et de se fixer des conditions aux limites.

Deux solutions sont habituellement utilisées pour simuler ce volume fini. La première est d'imposer artificiellement des valeurs fixes sur les bords. La deuxième, moins arbitraire et plus physique consiste à fixer des conditions aux limites périodiques. On se retrouve donc finalement à considérer un Univers multiplement connexe, bien que tel n'était pas le but initialement cherché et mêmes si les effets de la topologie seront toutefois amoindris, voire annulés par la grande échelle choisie.

Une autre motivation vient de la mécanique quantique. Dans les modèles permettant d'unifier la gravitation avec les autres forces, des dimensions spatiales sont ajoutées à l'espace (voir par exemple, les théories de Kaluza[4] et Klein[5] ou les théories des cordes[6]), et dans ce cas, il apparaît naturellement que ces dimensions doivent être *compactes*, enroulées autour des 3 dimensions habituelles.

Un espace multiplement connexe est donc facilement envisageable, d'où cette étude. Cependant, si l'Univers possède effectivement une topologie non triviale, les tailles caractéristiques représentant l'Univers seront en tout cas très grandes, comme nous le verrons par la suite et peut-être de taille supérieure à l'horizon auquel cas les effets de la topologie seront faible et à la limite inobservables et nous ne pourrions dans ce cas trancher.

Cependant pour envisager un étude de la topologie, nous allons considérer ici que nous avons un temps universel pour synchroniser nos horloges, et donc que la topologie n'affectera que les sections spatiales de l'Univers, et non l'espace-temps tout entier.

5.2 Exemples préliminaires

Plaçons-nous à 2 dimensions pour mieux visualiser les différents espaces en jeu. Dans ce cas, l'exemple le plus simple d'espace avec une topologie non-triviale est le tore.

La construction d'un tore est simple : il suffit de prendre un rectangle de papier, puis de coller le côté droit de ce rectangle avec son côté gauche, ce qui nous donne un cylindre, puis de coller les bords haut et bas de ce cylindre (*cf.* figure (5.1)).

Comme indiqué dans la légende de la figure, les tores que l'on peut représenter sont des tores de révolution, c'est-à-dire des tores engendrés par un cercle que l'on fait tourner autour d'un axe central. Mais ici, ce que l'on a construit est un tore *plat* et donc dont la courbure est constante et égale à 0, comme un espace euclidien !

[4] *cf.* Kaluza, 1921.
[5] *cf.* Klein, 1926.
[6] *cf.* Nambu, 1973.

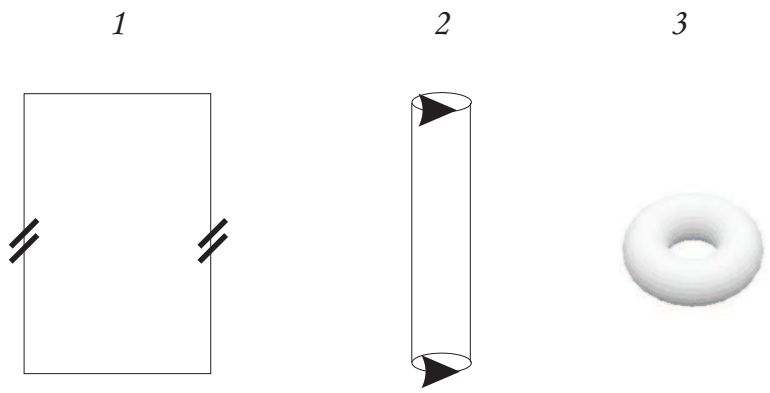


FIG. 5.1 – **Construction d'un tore.** 1 - On part d'une feuille de papier rectangulaire. On identifie les faces droite et gauche de notre feuille, ce qui donne un cylindre. 2 - On identifie les cercles de base de ce cylindre de façon à obtenir un tore. 3 - En fait, sur cette figure, le tore représenté est un tore de révolution par simplicité (dont en particulier, la courbure n'est pas constante...), mais en réalité, on devrait obtenir un tore dont le diamètre des cercles intérieur et extérieurs sont identiques (puisque correspondant à la hauteur du cylindre divisé par 2π).

Cependant, tore plat et tore de révolution sont équivalents topologiquement : nous pouvons déformer l'un sans cassure ou collage pour obtenir le deuxième.

De par la construction de notre tore, on voit qu'il est équivalent pour un observateur (à 2 dimensions, ici...) de vivre dans ce tore où dans un plan dont le motif, correspondant à la feuille de papier de l'exemple, se répéterait indéfiniment de part et d'autre autour de lui (*cf.* figure (5.2)).

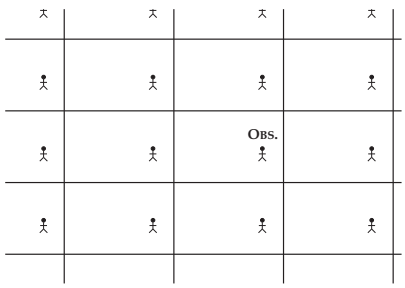


FIG. 5.2 – **Espace euclidien équivalent à un tore pour l'observateur repéré sur ce schéma.**

Un autre exemple de surface à topologie non-triviale est la bouteille de Klein. Sa construction est légèrement plus compliquée que celle du tore : comme indiqué sur la figure (5.3), on construit également un cylindre, mais contrairement au cas du tore, nous n'identifions pas les deux cercles directement, mais en *identifiant leurs points diamétralement opposés.* Comme le tore plat, cet espace ne peut être

représenté dans notre espace euclidien tridimensionnel. De plus, dans ce cas, il n'est même pas possible de construire d'espace topologiquement équivalent à celui-ci en restant à trois dimension, contrairement au tore où nous pouvons construire des tores de révolution parfaitement définis et constructibles dans notre espace.

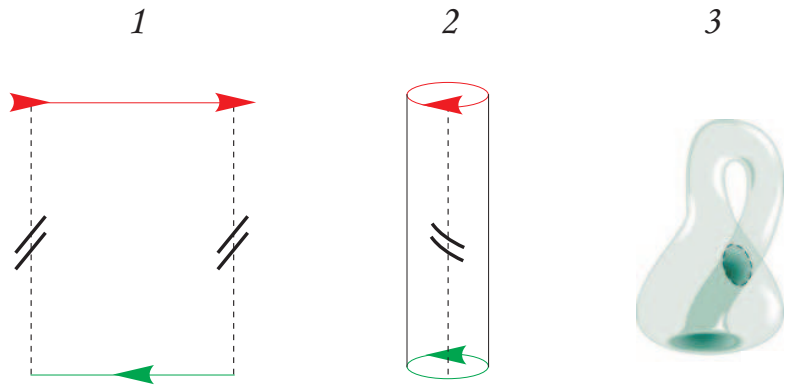


FIG. 5.3 – **Construction de la bouteille de Klein.** Pour effectuer cette construction, nous pouvons suivre les mêmes étapes que pour le tore. Cependant, cette fois-ci, au niveau de la deuxième étape, il ne faut plus identifier directement les deux cercles de base, mais identifier les points diamétralement opposés de ces deux cercles. Il ne s'agit donc ici qu'une construction de l'esprit, puisque cela n'est pas possible dans un espace à trois dimensions. Ainsi, le goulot de la bouteille de Klein représentée sur le troisième schéma n'intersecte pas réellement le reste de la bouteille, mais en est juste une représentation commode.

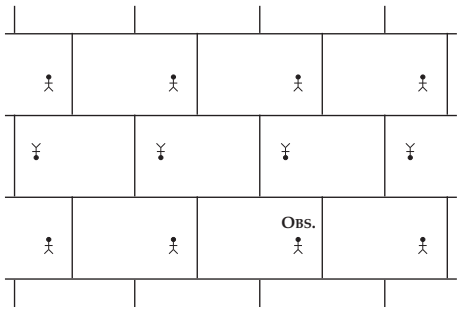


FIG. 5.4 – **Espace euclidien équivalent à une bouteille de Klein pour l'observateur indiqué.**

Nous nous sommes basés sur ces 2 espaces, tore et bouteille de Klein, qui sont probablement les espaces fermés les plus simples à visualiser puisque comme nous le verrons en 5.3.5, ce sont les 2 seuls espaces compacts de courbure nulle à 2 dimensions.

5.3 Outils de base

Dans la section précédente, avec les exemples du tore et de la bouteille de Klein, nous avons vu comment marchait intuitivement la topologie. Nous allons maintenant étudier quelques outils qui vont nous servir dans la suite pour décrire une classe plus vaste d'espaces non simplement connexes, mais toujours maximalement symétriques comme demandé par les équations d'Einstein.

5.3.1 Homéomorphismes

Les *homéomorphismes* sont l'outil de base pour la topologie : en effet, d'un point de vue topologique, 2 objets seront considérés comme étant équivalents s'ils sont homéomorphes.

Mathématiquement, un homéomorphisme est une fonction continue telle que son inverse soit continue et réalisant une bijection entre les 2 espaces considérés.

Plus concrètement, un homéomorphisme est une déformation élastique, c'est-à-dire qui va faire passer d'un objet à un autre de façon continue, autrement dit sans déchirure ni collage. En particulier, une tasse de café et un beignet sont homéomorphes et donc, d'un point de vue topologique, ces 2 objets sont indiscernables (voir figure (5.5)). Par contre, une sphère n'est pas homéomorphe à la tasse puisqu'il faudrait déchirer la sphère pour obtenir l'anse de la tasse.

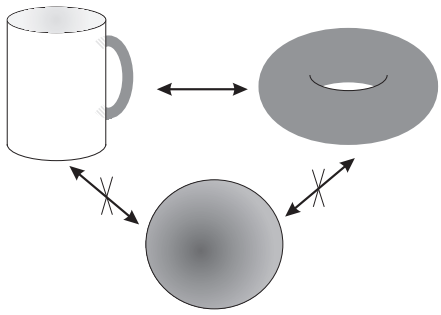


FIG. 5.5 – **Homéomorphismes.** D'un point de vue topologique, la tasse de café et le beignet sont équivalents puisque nous pouvons continûment déformer l'un pour obtenir le deuxième. Cependant, pour passer d'une sphère à une tasse, il faudrait faire un trou : ces 2 objets ne sont donc pas homéomorphes entre eux.

5.3.2 Connexité

Voyons maintenant la connexité. Nous avons abondamment utilisé les termes "simplement connexes" pour désigner les espaces *sans topologie*, utilisés classiquement pour décrire les solutions de Friedmann-Lemaître, et de "multiplement connexe" pour ceux *avec topologie*.

Pour voir ce que ces termes englobent, nous allons introduire le *genre* d'un espace. Par définition, le genre est le nombre de trous perçant l'espace étudié. Si

nous reprenons nos exemples de la section précédente, le tore et la bouteille de Klein sont tous deux des espaces de genre 1, tandis que le premier tore de la figure (5.6) est de genre 2, et ainsi de suite.

Le genre est utile pour caractériser les espaces multiplement connexes puisque ce nombre est un invariant topologique. Ceci correspond bien à notre intuition puisque si l'espace considéré est transformé sous un homéomorphisme, le nombre de trous de cet espace restera inchangé. En particulier, un espace est dit *simplement connexe* s'il est de genre 0 et *multiplement connexe* sinon.

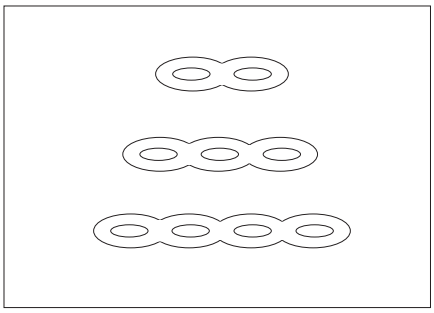


FIG. 5.6 – **Tores.** Tores de genres respectifs 2, 3 et 4, le genre étant le nombre de trous dans les tores dessinés ici.

5.3.3 Espace de revêtement universel

Maintenant que nous avons vu ce qu'était la connexité, nous pouvons introduire les *espaces de revêtement universel.* Cette notion a un sens assez intuitif : l'espace de revêtement universel d'un espace quelconque est l'espace simplement connexe de même courbure que cet espace. En particulier, une propriété intéressante est que la métrique sera la même sur l'espace étudié et son revêtement universel.

Dans nos exemple de la section précédente, nous n'avons considéré que des espaces plats, i.e. de courbure nulle, et bidimensionnels. Pour ces espaces, l'espace de revêtement universel est donc le plan euclidien.

Dans la suite de notre exposé, les sections spatiales de notre espace-temps étant à 3 dimensions et de courbure constante, les espaces de revêtement universel correspondants seront donc les espaces simplement connexes tridimensionnels. Cependant à 3 dimensions, cela n'est pas aussi simple qu'en dimension 2, où les espaces simplement connexe de courbure constante ne sont que de 3 sortes : la sphère, le plan et l'espace hyperbolique. En effet, en dimension 3, on peut montrer qu'il existe 8 espaces simplement connexes de courbure constante ! En particulier, l'équivalent tridimensionnel du cylindre qui sera bien simplement connexe, contrairement au cylindre. Mais dans ce cas, l'espace n'est plus isotrope : en effet, une direction sera infinie, mais pas les 2 autres. Or comme nous nous intéressons à des modèles cosmologiques, nous n'étudierons que les espaces homogènes et isotropes. Dans ce cas, il n'existe plus que 3 catégories d'espace. Il s'agit de :

– la sphère tridimensionnelle $\mathcal{S}^3$ si la courbure est positive ;
– l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ si la courbure est nulle ;
– l'espace hyperbolique tridimensionnel $\mathcal{H}^3$ si la courbure est négative.

Dans le cas homogène et isotrope, nous retrouvons donc tout de même bien les généralisations de nos 3 espaces simplement connexes bidimensionnels.

5.3.4 Domaine fondamental

Dans la section précédente, nous avons construit notre tore à partir d'un rectangle. Mais nous aurions pu faire cette construction à partir de beaucoup d'autres formes de feuille de papier : en particulier, un parallélogramme aurait tout aussi bien pu convenir ainsi qu'un hexagone ou bien la forme de la figure (5.7). Ces figures sont appelées *domaine fondamental* du tore.

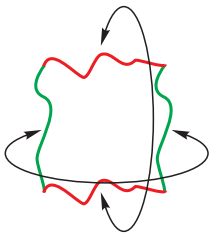


FIG. 5.7 – **Construction du tore à partir d'un domaine fondamental général.**

En fait, ce domaine fondamental correspond aussi à un découpage arbitraire de notre espace de départ de façon à pouvoir l'étaler dans son espace de revêtement universel.

Un cas particulier de domaine fondamental est le *domaine de Dirichlet*. Pour construire ce domaine, il suffit pour un observateur de souffler dans un ballon jusqu'à ce que celui-ci remplisse tout l'espace (voir figure (5.8)). Par contre, dans ce cas, il faut faire attention que le domaine de Dirichlet peut dépendre de la position de l'observateur (voir figure (5.9)).

5.3.5 Groupe d'holonomies

Une fois construit le domaine fondamental d'un espace, il faut préciser les règles qui vont permettre d'identifier les côtés de ce domaine pour obtenir notre espace. C'est ce que vont permettre les *holonomies*.

Ces holonomies sont en fait des isométries sans point fixe et qui vont servir à paver l'espace de recouvrement universel à l'aide du domaine fondamental décrit précédemment. Par exemple, sur la figure (5.2), nous constatons que si nous considérons les translations horizontales et verticales de vecteurs bien choisis, nous pouvons engendrer, à l'aide du rectangle formant le domaine fondamental du tore bidimensionnel, tout le plan. Dans le cas de la bouteille de Klein, ce sera une trans-

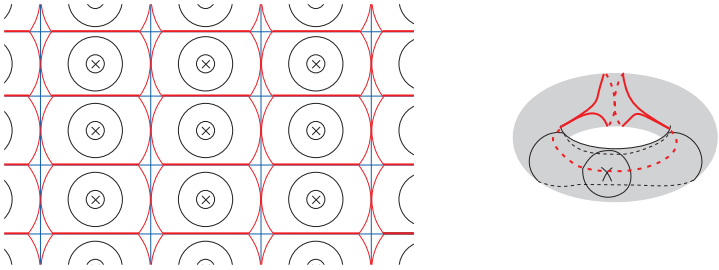


FIG. 5.8 – **Construction du domaine de Dirichlet du tore.** Le domaine de Dirichlet correspond à ce qu'obtiendrait si un observateur gonflait un ballon au maximum de façon à ce que ce ballon et ses autres "copies" remplissent tout l'espace. Pour ce cas particulier, il s'agit juste du rectangle qui nous a servi à construire le tore. Le premier schéma correspond au point de vue intérieur, dans l'espace de revêtement universel et le second, à un point de vue extérieur à l'espace torique.

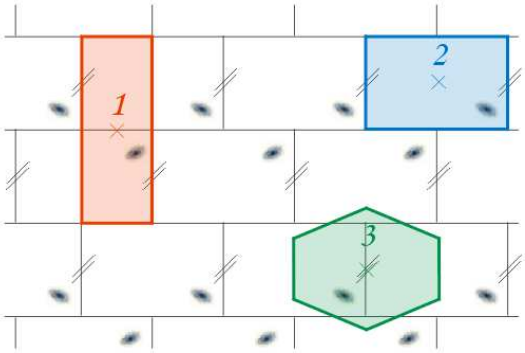


FIG. 5.9 – **Construction de domaines de Dirichlet pour la bouteille de Klein.** Dans ce cas, nous observons que suivant la position de l'observateur, le domaine de Dirichlet peut être un rectangle ou un hexagone.

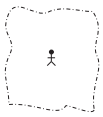
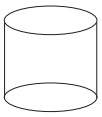
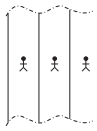
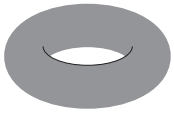
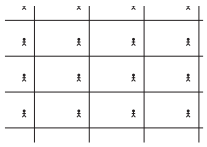
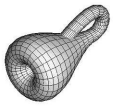
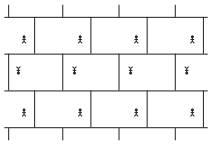
lation dans la direction horizontale sur le schéma (5.4) et une translation suivie d'une symétrie axiale pour l'autre direction.

En étudiant les isométries, nous pouvons ainsi classer tous les sous-espaces topologiques d'un espace donné. Prenons l'exemple du plan euclidien. Dans ce cas, les isométries de cet espace sont :

- les translations d'un certain vecteur $\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$;
- les rotations d'un certain centre O et d'angle α ;
- les symétries par rapport à un axe Δ ;

et leurs composées entre elles.

Les groupes d'holonomies ne comprenant que des isométries sans point fixe, les rotations et les symétries pures sont exclues. Il ne reste donc que les translations et les symétries suivies d'une translation. Nous obtenons comme espaces possibles dans le plan :

Espace	Représentation	Pavage	Groupe d'holonomies
Plan $\mathbb{R}^2$			$\{e\}$
Cylindre			$\{t_{\mathbf{a}}\}$
Ruban de Möbius			$\{t_{\mathbf{a}} \circ s_{\Delta}\}$
Tore			$\{t_{\mathbf{a}}, t_{\mathbf{b}}\}$
Bouteille de Klein			$\{t_{\mathbf{a}}, t_{\mathbf{b}} \circ s_{\Delta}\}$

TAB. 5.1 – **Espaces de courbure constante du plan.** Dans ce tableau sont représentés les cinq topologies possibles pour les espaces euclidiens bidimensionnels. La colonne "représentation" donne une représentation de ces espaces en les plongeant dans $\mathbb{R}^3$ et la colonne "pavage" représente l'espace comme le verrait un observateur y vivant.

5.4 Espaces sphériques

Maintenant que nous avons fait un bref survol des propriétés élémentaires de la topologie, nous allons spécialiser ces propriétés aux espaces sphériques. En effet, les données de WMAP semblent indiquer que la courbure de l'Univers est plutôt

positive, plus exactement que :

$$\Omega_{tot} = 1.02 \pm 0.02 \tag{5.1}$$

D'autre part, de nombreux articles récents semblent pencher en faveur de modèles sphériques, et plus particulièrement pour un modèle particulier : le dodécaèdre de Poincaré[7].

Nous allons résumer ici les différents espaces auxquels nous aurons affaire, c'est-à-dire les différents espaces de courbure positive. Nous reprendrons la classification présente dans l'article Lehoucq *et al.*, 2002.

Pour la sphère à 3 dimensions, nous savons que le groupe des isométries est $SO(4)$. Le groupe d'holonomies des espaces multiconnexes dont l'espace de recouvrement universel est la 3-sphère sera donc inclus dans $SO(4)$. La classification de l'article cité précédemment donne les espaces suivants :

- espaces : Z_p ;
- espaces diédraux d'ordre $2m$: D_m
- octaèdre O ;
- tétraèdre T ;
- icosaèdre I.

Les trois derniers groupes correspondent à des espaces qui sont compacts : ce sont les espaces dits polyédriques qui correspondent respectivement à l'octaèdre, le tétraèdre (ces deux premiers groupes sont duaux et donc le groupe d'holonomies correspond à l'espace lui-même) et l'espace de Poincaré. Ce dernier espace, représenté sur la figure (5.10), est l'assemblage de douze pentagones, ce qui ne serait pas possible dans un espace euclidien, mais l'est en courbure positive. C'est cet espace qui semble privilégié dans les études de topologie de l'Univers et il sera donc principalement utilisé dans la suite.

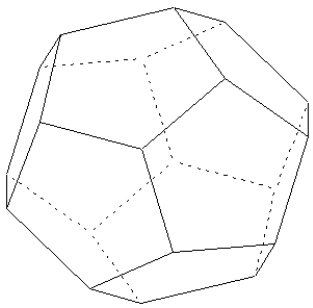


FIG. 5.10 – **Représentation schématique de l'espace de Poincaré.**

5.5 Contraintes sur les topologies possibles

Une objection peut toutefois être soulevée contre la topologie. En effet, lorsque l'espace est multiplement connexe, donc possède une topologie non triviale, celui-

[7] *cf.* Luminet *et al.*, 2003; Aurich *et al.*, 2005a.

ci peut être homogène, mais l'isotropie ne peut pas toujours être imposée ! Ceci semble contredire le principe cosmologique étudié en section 1.1. Puisque le principe cosmologique semble bien s'appliquer, cela restreint l'Univers a des formes où l'isotropie reste possible ou des modèles où les tailles caractéristiques sont de l'ordre de grandeur du rayon de Hubble.

A priori, les données observationnelles semblent maintenant pencher plutôt vers des valeurs de courbure Ω_{tot} positives. C'est pour cela que dans la suite de notre exposé nous nous concentrerons principalement sur les espaces euclidiens et sphériques, qui sont également un peu plus simple à étudier, puisque dans le cas hyperbolique, les simulations numériques peuvent diverger rapidement.

De plus, les espaces euclidiens sont bien connus et bien étudiés, puisque possède des propriétés simples et sont plus naturels à appréhender. En particulier, la recherche de cercles, comme nous le verrons dans la prochaine partie, se révèle négatif pour ces espaces.

Il reste donc principalement les espaces sphériques, notamment l'espace de Poincaré qui semble prometteur (*cf.* par exemple Luminet *et al.*, 2003 ou Aurich *et al.*, 2005a). C'est autour de cet espace que nous allons décrire les différentes topologies existantes et leur propriétés. Dans le dernier chapitre, il ne sera mentionné quasi-exclusivement que ces espace de Poincaré pour les différentes applications numériques et les comparaisons aux données observationnelles.

Chapitre 6:

Premières approches

NOUS allons maintenant discuter de quelques méthodes permettant de mettre en oeuvre assez simplement, c'est-à-dire sans passer par les spectres de puissance en température et plus généralement par la décomposition sur les harmoniques sphériques des fluctuations de température, méthodes qui seront étudiées dans le dernier chapitre. Nous allons donc tout d'abord nous baser sur l'analyse d'observations de répartition spatiale de galaxies : il s'agit de la *cristallographie cosmique*. Nous rechercherons ensuite des motifs dans les cartes de fluctuations de température du fond diffus cosmologique : c'est la méthode de *recherche des cercles*. Nous examinerons ensuite quelques effets de la topologie sur la partie Sachs-Wolfe du spectre de puissance. Ces trois approches nous permettront de donner un premier état des lieux de la topologie de l'Univers.

6.1 Cristallographie cosmique

6.1.1 Méthode directe

Une première idée qui permet de voir si l'Univers est multi-connexe est la recherche d'images multiples d'un même objet. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'être dans un Univers multi-connexe revenait à se placer dans l'espace de revêtement universel qui serait pavé par un domaine fondamental. Ainsi, chaque objet peut être vu plusieurs fois, créant des images "fantômes" de lui-même.

Une première limite évidente est que la taille caractéristique du domaine fondamental ne peut pas être inférieure au Mpc puisque c'est la distance qui nous sépare de la galaxie semblable à la notre (la galaxie d'Andromède) la plus proche. Mais, nous pouvons aller bien plus loin en plaçant dans un diagramme tridimensionnel virtuel, la position des galaxies actuellement connues les plus proches. De telles représentations on été étudiées notamment avec le 2dF (voi en section 1.1.2) et s'il apparaît une structure en filaments de la répartition des objets dans l'Univers, il n'apparaît pas de motif se répétant. De telles études montrent que la taille caractéristique ne pourra pas être inférieure à quelque 100 Mpc.

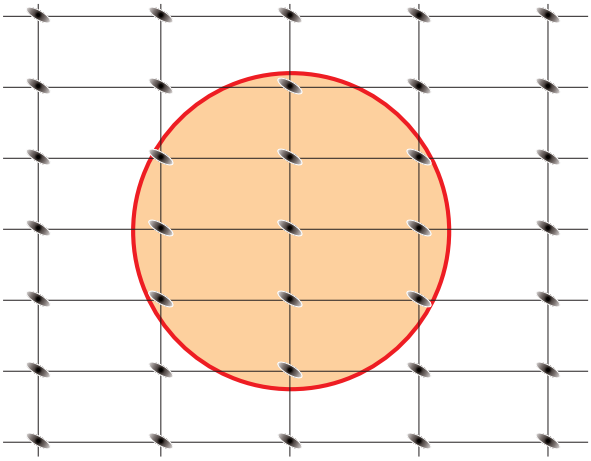


FIG. 6.1 – **Images fantômes.** Le cercle sur cette figure visualise la surface de dernière diffusion, qui représente notre horizon. Nous voyons que si la longueur caractéristique du domaine fondamental est plus grande que le rayon de la sphère de dernière diffusion, il n'y aura pas d'images "fantômes".

6.1.2 Histogramme de séparation de paires

La méthode de l'histogramme de séparation des paires d'objets est un raffinement de la méthode précédente. Cette méthode, initiée par Lehoucq, Lachièze-Rey et Luminet[1], consiste à prendre un catalogue suffisamment grand des objets (galaxies, éventuellement quasars) présents dans l'Univers et de représenter leur répartition en fonction de la distance les séparant. Chaque espace créera ainsi un spectre particulier qui permettra de l'identifier. En effet, l'histogramme montrera une répartition identique à celle de l'Univers simplement connexe qui lui correspond, mais auquel des pics se superposeront pour certaines distances propres à chaque espace et qui seront reliées aux dimensions caractéristiques du polyèdre fondamental.

Prenons, par exemple, le cas du tore. Pour cet espace, le polyèdre fondamental est un parallélépipède. Dans ce cas, l'histogramme des séparations galaxies à galaxies à l'intérieur de ce polyèdre donnera la répartition habituelle d'un Univers à courbure nulle, puisque nous avons tout de même une répartition de galaxies suivant une loi uniforme en première approximation, mais à laquelle il va se rajouter des pics. Ces pics présents en des distances précises correspondent aux distances pour lesquelles nous retrouvons notre galaxie en nous déplaçant en ligne droite. Dans le cas du tore, ces pics correspondront aux distances dont les valeurs sont :

$$d_{\text{pics}} = \sqrt{(n_x L_x)^2 + (n_y L_y)^2 + (n_z L_z)^2} \tag{6.1}$$

comme cela est illustré sur la figure (6.2). En effet, dans chaque cellule élémentaire, la distribution des galaxies est uniforme, ce qui va produire un fond de réparti-

[1] *cf.* Lehoucq *et al.*, 1996.

tion des vitesses correspondant à la répartition que nous obtiendrions dans le cas simplement connexe et qu'il faut multiplier par le nombre de cellules qui apparaît à l'intérieur de la surface de dernière diffusion. Puis, sur ce fond se superposent les distances d'une galaxie d'une cellule par rapport à ses translatées des vecteurs $(n_x L_x, n_y L_y, n_z L_z)$, où n_x, n_y et n_z sont des entiers. Puisque ces distances sont pour chaque galaxie de chaque cellule, il faut multiplier ce nombre par le nombre de cellules comme précédemment, mais aussi par le nombre d'objets dans chaque maille ! C'est ce qui produit les pics aux distances de la forme donnée en équation (6.1).

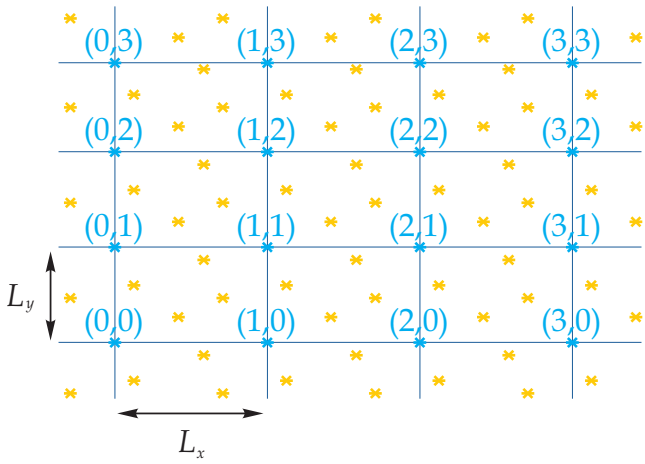


FIG. 6.2 – **Pics du tore.** Les galaxies sont réparties uniformément dans chaque cellule, celles-ci se répétant régulièrement créant ainsi des pics dans la distribution des distances de paires de galaxies.

Ces histogrammes vont donc former des spectres propres à chaque espace multiplement connexe, déterminés par la position des pics, comme nous l'avons vu précédemment, mais aussi par leur intensité relative. En effet, considérons les graphes de la figure (6.3) qui montrent les spectres de quatre Univers toriques, de maille cubique, dont la longueur du côté varie. Le premier graphe montre l'histogramme d'un Univers dont le côté mesure 0.15 fois la taille de l'Univers observable. En particulier, le premier pic n'est pas le plus intense : en effet, il correspond à une distance égale à son côté, donc d'après la formule (6.1), cela correspond à des translations de vecteurs $\pm L\mathbf{u}_x$ ou $\pm L\mathbf{u}_y$ ou encore $\pm L\mathbf{u}_z$. Dans une maille élémentaire, ces vecteurs correspondent à chacune des arêtes du cube, chacune intervenant dans quatre cubes. La multiplicité totale de ce pic est donc $12 * \frac{1}{4} = 3$.

Le pic suivant correspond à une distance de $\sqrt{2}$ fois le côté du cube. Il s'agit donc des diagonales du cube correspondants aux triplets $(0, 1, 1)$ de la formule (6.1), aux signes et aux permutations de ces entiers près. Dans ce cas, il y a deux diagonales par face du cube et chaque face appartient à deux cube, d'où la multiplicité $2 * 6 * \frac{1}{2} = 6$. Le deuxième pic doit donc être deux fois plus intense que le premier, ce qui est bien le cas.

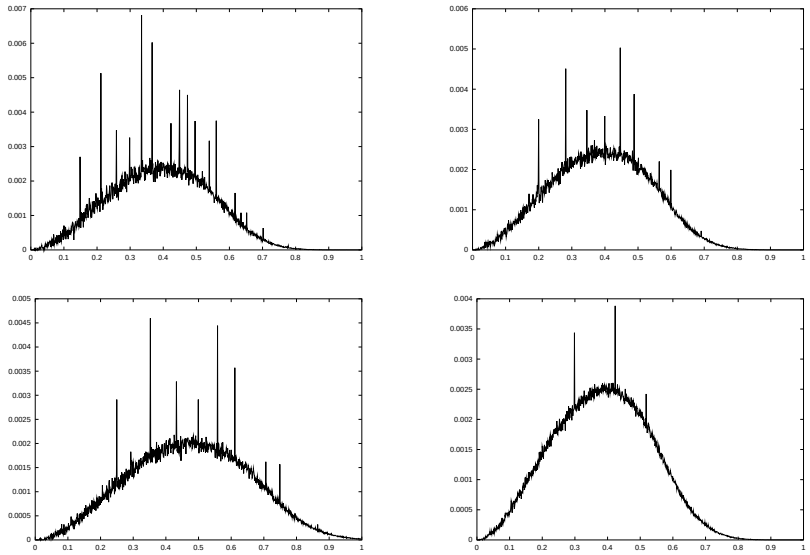


FIG. 6.3 – **Histogramme des paires corrélées d'un tore cubique.** Ces graphes représentent le nombre de galaxies séparées par une distance donnée en fonction de cette distance, normalisée à D_{SDD}. Les quatre graphes représentés ci-dessus correspondent respectivement à des rapports de la longueur du cube sur le diamètre de la sphère de dernière diffusion valant : $L/D_{\mathrm{SDD}} = 0.15$, 0.2, 0.25 et 0.3. L'aire sous les courbes (c'est-à-dire le nombre de galaxies) est normalisée à 1.

En continuant ainsi ce raisonnement, nous obtenons le tableau 6.1.2. En particulier, les positions des pics sont donnés par la formule (6.1) : ces pics seront présents pour toutes les racines carrées de somme de trois entiers carrés, en normalisant la position des pics à la longueur du cube. Un théorème, démontré par Descartes, affirme que les sommes de trois carrés correspondent à tous les entiers naturels excepté ceux de la forme $4^m(8n+7)$, m et n étant deux entiers. C'est pourquoi le nombre 7 n'apparaît pas dans la colonne d^2. Il existe aussi des positions correspondant à deux triplets distincts (i.e. différents même à permutation des termes et à signe près) : ainsi $3 = \sqrt{0^2+0^2+3^3} = \sqrt{1^2+2^2+2^2}$.

Cependant, ces multiplicités donnent des rapports théorique entre les différents pics. Ces rapports seront d'autant plus exacts que le rapport L/D_{SDD} sera petit, tandis que sur la figure (6.2), nous avons considéré des rapports proches de l'unité, qui correspondent à des cas plus vraisemblables. En effet, lorsque les distances galaxies à galaxies sont supérieures ou égale au diamètre de la sphère de dernière diffusion, celles-ci n'apparaissent pas dans l'histogramme, puisque nous ne pouvons voir que des objets à l'intérieur de la surface de dernière diffusion. De même, lorsque nous cherchons des distances proches de D_{SDD}, celles-ci apparaissent moins que prévues puisque pour certains objets proches de la sphère de dernière diffusion, il faudrait pouvoir atteindre des objets en dehors de celle-ci. C'est pour cela que sur le dernier graphe de la figure (6.2), nous n'observons plus que 3 pics.

Position d du pic	d^2	Triplet correspondant	Multiplicité
1	1	(0,0,1)	3
1.414	2	(0,1,1)	6
1.732	3	(1,1,1)	4
2	4	(0,0,2)	3
2.236	5	(0,1,2)	12
2.449	6	(1,1,2)	12
2.828	8	(0,2,2)	6
3	9	(0,0,3)-(1,2,2)	15

TAB. 6.1 – **Multiplicité des pics du tore cubique.**

Cette méthode est donc limitée puisqu'elle ne marchera que si le domaine fondamental de l'Univers est suffisamment petit pour que les pics puissent apparaître. Mais les résultats de cette méthode, même s'ils sont négatifs apportent tout de même des contraintes sur les topologies acceptables et sur des limites inférieures de taille d'Univers.

De plus, il a été montré[2] que les pics n'apparaissent que pour les espaces dont les groupes d'holonomies sont des translations de Clifford, c'est-à-dire des transformations g telles que pour tout élément x de l'espace, la distance $d(x, gx)$ entre le point initial et son image est indépendante du point x initial choisi. En particulier, certains espaces de courbure négative seront engendrés par des éléments qui ne sont pas des translations de Clifford. Pour remédier à ce problème, Lehoucq *et al.*, 2000 propose une méthode qui généralise la méthode détaillée dans cette section pour tout espace multiplement connexe.

6.2 Recherche de cercles

Une autre méthode qui utilise le fait qu'un espace multiconnexe peut être considéré comme son espace de recouvrement universel, mais dont une maille élémentaire, l'un de ces domaines fondamentaux, se répète d'une certaine manière est la méthode des cercles sur la surface de dernière diffusion.

Cette méthode est plus précise que la précédente puisque regarde plus loin dans l'Univers que précédemment : avec la méthode précédente, nous ne pouvions disposer que d'objets jusqu'à des redshifts au mieux de l'ordre de $1 - 2$ et qui sont de moins en moins complets lorsque z augmente. Ici, nous nous appuierons directement sur les données de la surface de dernière diffusion donc pour un redshift de l'ordre de $z \sim 1000$. Pour cette méthode, des espaces dont les longueurs caractéristiques sont de l'ordre de grandeur de l'horizon seront donc à priori bien

[2] *cf.* Uzan *et al.*, 1999.

détectés.

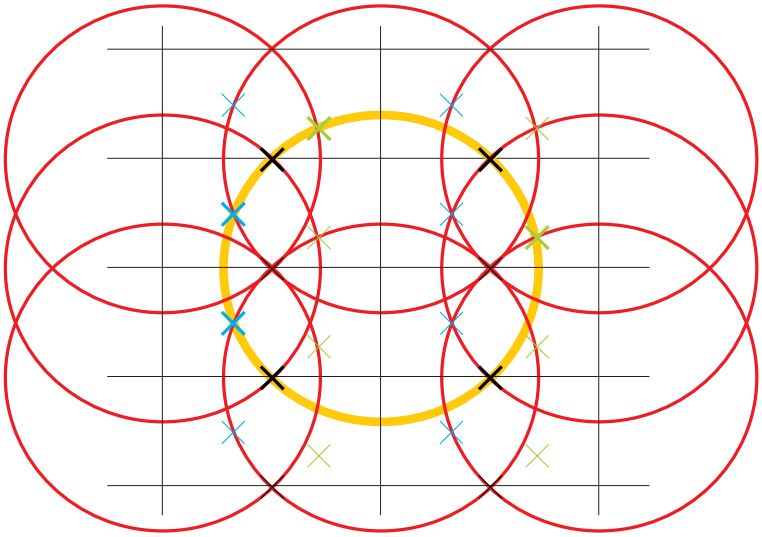


FIG. 6.4 – **Sphère de dernière diffusion vue dans l'espace de revêtement universel.** Les rectangles indiquent la maille fondamentale de l'espace et les cercles représentent les sphères de dernière diffusion relativement à chaque maille. Les croix indiquent les points qui doivent être d'égale intensité. Dans un espace à trois dimensions, ces points sont placés sur des cercles.

La figure (6.4) illustre le principe de la méthode de recherche des cercles : si la surface de dernière diffusion est à une distance plus grande que la taille caractéristique du domaine fondamental de l'espace, les fluctuations de température sur le cercle C_1 devront être les mêmes que celles sur le cercle C_2, puisque ces deux cercles correspondent à une même position dans l'espace réel. Dans ce cas, il doit donc apparaître des cercles identiques, diamétralement opposés, par exemple, si l'espace torique, dans une carte des fluctuations de température telle qu'observée par exemple par WMAP. Si on représente maintenant des fluctuations de température sur ses sphères, nous devons donc obtenir, comme sur la figure (6.5)[3], des températures quelconques puis pour certains cercles une valeur qui va se retrouver ailleurs sur la sphère.

La recherche de cercles au niveau de la surface de dernière diffusion comporte essentiellement deux difficultés : la première est de trouver où seront situés les cercles identiques. En effet, dans le cas torique, il s'agira tout simplement de cercles diamétralement opposés, comme illustré sur la figure (6.6), mais la manière dont ces cercles sont disposés dépend, et caractérise en fait, l'espace dans lequel on est. De plus, pour certains espaces, la forme et la position des cercles dépendra de la position de l'observateur...Il est donc généralement plus simple de présupposer une forme d'espace et de rechercher les cercles que nous pourrions avoir si nous

[3]les graphes de cette figure ont été produits grâce à un logiciel mis au point par Jeffrey Weeks.

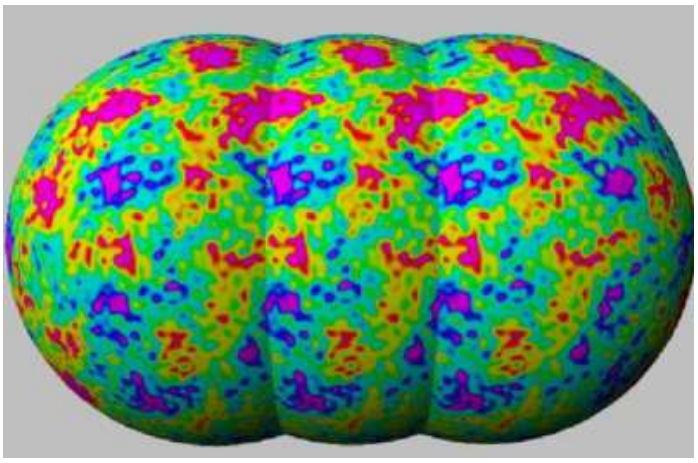


FIG. 6.5 – **Fluctuations de température sur la sphère de dernière diffusion.**

sommes effectivement dans un tel espace. Cette méthode doit donc s'aider des autres méthodes pour pouvoir faciliter le travail, sauf si les positions des cercles sont simples à chercher comme dans le cas d'un Univers torique.

La deuxième difficulté est de se fixer un seuil d'erreur que l'on peut admettre comme différence entre les deux cercles : en effet, les données observationnelles sont limitées à une certaine précision, liée notamment aux instruments, et il faut pouvoir dire si les données présentes sur un cercle sont les mêmes que sur le deuxième[4] et il n'est pas aisé de construire un estimateur sûr dans ces conditions.

Cependant, cette recherche fournit un moyen efficace et précis, même si un peut long numériquement, de déterminer la forme de l'Univers. Cette recherche de cercles a ainsi été effectuée par de nombreuses équipes travaillant sur la topologie, par exemple Cornish *et al.*, 1996, qui ont introduit cette méthode, ou bien Roukema, 1997, ou encore Riazuelo *et al.*, 2004. Cependant, la plupart des recherches de cercles corrélés sont faites pour des espaces simples, notamment les espaces euclidiens où les cercles sont plus aisés à rechercher.

6.3 Effet Sachs-Wolfe

Au vu des contraintes sur la topologie de l'Univers indiquées par la méthode de la section précédente, la topologie n'agira principalement qu'à grande échelle et l'effet contribuant de façon prédominante aux grandes échelles dans les fluctuations de température est l'effet Sachs-Wolfe. On va donc supposer dans cette section que

[4] C'est ainsi que lors du workshop "Cosmic Topology between WMAP and PLANCK : Facts and Theories" organisé par Jean-Pierre Luminet à Meudon en Mars 2005, l'équipe de Boudewijn Roukema estimait avoir obtenu des cercles identiques si l'on supposait que l'espace était un espace de Poincaré, tandis que l'équipe de Glenn Starckman, pour le même espace estimait qu'il n'y en avait pas !

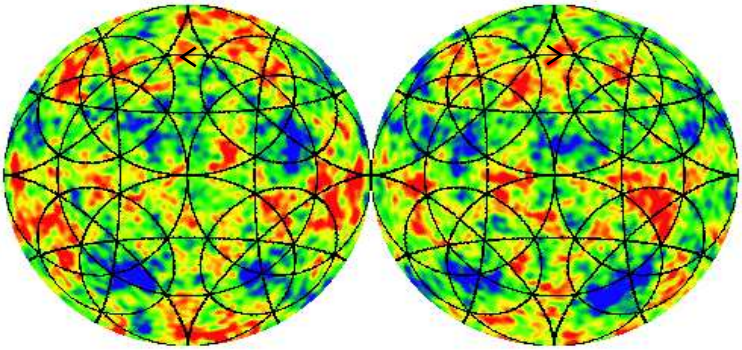


FIG. 6.6 – **Cercles du tore.** Il y a ici 13 paires de cercles corrélés représentés ici sur une sphère de dernière diffusion fictive (figure issue de Cornish et Weeks, 1998).

seul cet effet intervient dans le spectre de puissance. En termes de fluctuations de température, l'effet Sachs-Wolfe se traduit par (voir 4.3.3) :

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{1}{3}\Phi(R_{\text{rec}}/a, \theta, \phi) \tag{6.2}$$

où Φ est le potentiel gravitationnel, R_{rec} est le rayon de la sphère de dernière diffusion actuel et a le facteur d'échelle.

Pour obtenir le spectre de puissance, nous allons procéder comme dans le cas simplement connexe et décomposer le potentiel en modes de Fourier. Cependant, dans le cas, simplement connexe, seuls certains modes seront autorisés. Dans la suite de cette section, nous allons considérer l'exemple du tore qui est le plus simple à appréhender, mais les résultats pour des espaces plus compliqués pourront être obtenus de façon similaire.

Pour le tore, les modes acceptés seront les seuls qui auront les symétries de son groupe d'holonomies, en l'occurrence, ici, il faudra que la longueur d'onde de ces modes dans une direction donnée soit un multiple de la longueur du tore dans cette même direction (voir figure (6.7)).

Les modes autorisés seront donc de la forme :

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi n_x}{L_x}, \frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z}\right) \tag{6.3}$$

où le domaine fondamental du tore sera un parallélépipède de côtés L_x, L_y et L_z et avec n_x, n_y et n_z qui sont des entiers relatifs. Dans ce cas, la décomposition du potentiel dans l'espace de Fourier donnera une somme sur tous ces vecteurs d'onde autorisés. Il s'agit donc ici non plus d'une décomposition en intégrale de Fourier comme dans le cas simplement connexe, mais d'une décomposition en *série de Fourier*, ce qui se comprend bien puisque l'espace se répète périodiquement. La

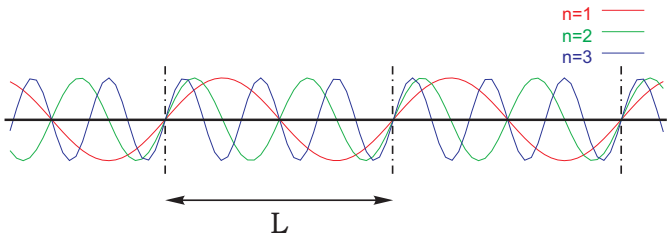


FIG. 6.7 – **Modes autorisés pour le tore.** On ne représente ici qu'une dimension pour mieux visualiser ce qui se passe. Puisque l'espace se répète, l'onde doit être identique à elle-même au bout de cette longueur. Le vecteur d'onde n'aura donc comme valeurs possibles $\frac{2\pi n}{L}$ où L est la longueur du tore.

décomposition du potentiel est donc la suivante :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k} \text{ autorisés}} \Phi(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kr}} \tag{6.4}$$

$$= \sum_{n_x,n_y,n_z \in \mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{2\pi n_x}{L_x}, \frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z}\right)\, e^{2i\pi\left(\frac{n_x x}{L_x}+\frac{n_y y}{L_y}+\frac{n_z z}{L_z}\right)} \tag{6.5}$$

$$\tag{6.6}$$

Nous pouvons ensuite appliquer la même démarche que dans le cas simplement connexe pour obtenir le spectre de puissance : nous décomposons l'exponentielle sur les harmoniques sphériques, ce qui nous permet d'obtenir les coefficients a_{lm} puis les C_l :

$$a_{lm} = \frac{4\pi}{3} \sum_{\mathbf{k}} i^l \Phi(\mathbf{k}) j_l(kR_{\text{rec}}) Y^*_{lm}(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) \tag{6.7}$$

puis, en utilisant la relation d'addition des harmoniques sphériques (relation (B.15)), nous obtenons :

$$C_l = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} < \Phi(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}') > j_l(kR_{\text{rec}}) j_l(k'R_{\text{rec}}) P_l(\cos\hat{\theta}) \tag{6.8}$$

où $\hat{\theta}$ désigne l'angle séparant les deux vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$.

Dans le cas multiplement connexe, nous avons vu que l'espace n'est plus nécessairement isotrope. Cependant, puisque les longueurs caractéristiques de notre espace semblent être du même ordre de grandeur que le diamètre de la surface de dernière diffusion, l'isotropie est conservée en bonne approximation dans l'espace observable. Ainsi, nous pouvons considérer une distribution isotrope pour le potentiel Φ, ce qui correspond à la forme suivante pour la fonction de corrélation :

$$< \Phi(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}') >= \mathcal{P}(k)\delta_{\mathbf{kk}'} \tag{6.9}$$

où il s'agit ici du symbole de Kronecker entre les composantes des deux vecteurs d'ondes, puisque ceux-ci prennent des valeurs discrètes.

Sachant que $P_l(1) = 1$, le spectre de puissance se réduit maintenant à :

$$C_l = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{P}(k) j_l^2(kR_{\mathrm{rec}}) \tag{6.10}$$

Dans le cas simplement connexe, comme nous l'avions fait en 4.3.3, cet effet se traduit simplement par un plateau pour la quantité $l(l+1)C_l$. Dans le cas multiplement connexe, nous avons des oscillations autour de ce plateau avec une coupure aux grandes échelles. En effet, cela s'explique par le fait qu'aux petites échelles, donc pour l grand, quasiment tous les modes sont autorisés, et que donc le comportement doit être très proche du cas simplement connexe, où ces modes sont distribués de manière continue. Cependant, aux grandes échelles, les modes autorisés se raréfient, mais avec une puissance totale constante. Cette puissance se répartit donc sur les différents k possibles et un l représentent les k pour une certaine échelle et donc moins les k sont présents, moins le spectre pourra être lisse ce qui est qualitativement plus proche des observations[5].

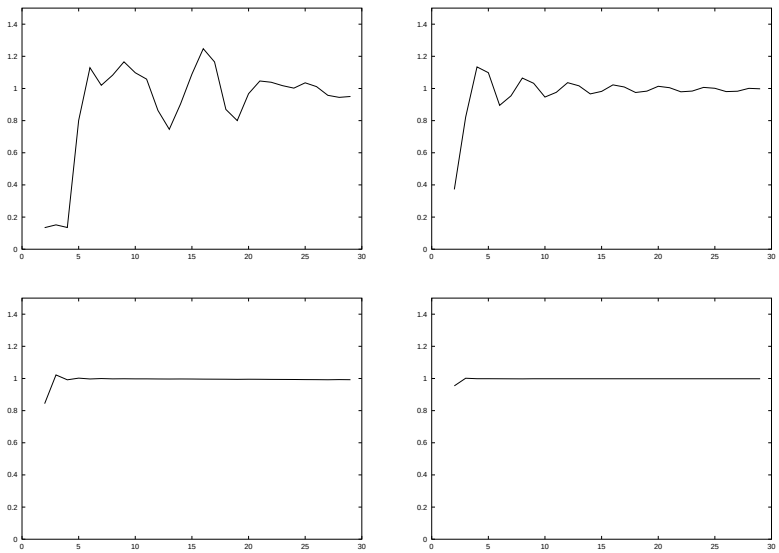


FIG. 6.8 – **Effet Sachs-Wolfe dans un Univers multi-connexe.** Les spectres de puissance sont représentés pour un spectre primordial invariant d'échelle et pour des tores cubiques dont les rapports L/R_{SDD} sont respectivement de 0.4, 0.7, 1 et 1.3.

[5] voir aussi Weeks *et al.*, 2004 pour une discussion sur la suppression du terme quadrupôlaire, qui est une question plus subtile qu'il n'y paraît !

Chapitre 7:

Modes propres du laplacien

DANS la littérature, la base habituelle utilisée pour travailler sur la sphère est la base des harmoniques sphériques présentée dans un chapitre précédent (en section 4.1). Cependant, cette base ne possède pas toujours de bonnes propriétés, notamment sous une rotation quelconque. Or, il est utile, notamment avec l'introduction de la topologie de chercher des fonctions dont les propriétés de transformation sont plus simples sous le groupe d'holonomies de l'espace étudié.

Ainsi, pour les calculs du chapitre suivant il sera fait usage de la base des harmoniques toroïdales. Cependant, les codes numériques tels `CMBFast` ou le code `CMBSlow`[1], employés pour les applications numériques, effectuent les calculs dans la base des harmoniques hypersphériques. Il faudra donc également obtenir une formule de passage simple avec la nouvelle base.

7.1 Modes propres du laplacien

Cette partie, qui reprend essentiellement les calculs de Lachièze-Rey et Caillerie, 2005 (voir également en annexe $\mathfrak{A}$), est très mathématique. Elle peut être passée en première lecture, mais nous allons en donner la motivation dans cette section. En fait, le calcul des modes propres du laplacien est la clé permettant les calculs numériques pour l'étude des fluctuations de température des espaces à topologie non triviale.

En effet, dans la première partie, nous avons vu la méthode permettant de calculer les fluctuations de température. Celle-ci nous conduit à résoudre des équations impliquant un laplacien. Or, calculer les modes propres du laplacien revient à transformer son action en simple multiplication (voir l'équation (4.1) dans la prochaine section).

Ainsi, si nous réussissons à obtenir une base de l'espace avec un certain ensemble de modes propres du laplacien, et cela sera effectivement possible avec les harmoniques hypersphériques et les harmoniques toroïdales, les équations seront

[1] Code qu'Alain Riazuelo (IAP) a écrit et m'a aimablement permis de modifier et d'utiliser sans réserve !

bien plus simples à résoudre numériquement, et c'est cette propriété qu'exploitent les codes numériques tels `CMBFast` ou le code que j'ai utilisé.

7.2 Harmoniques hypersphériques

Les *harmoniques hypersphériques* sont une généralisation des harmoniques sphériques que nous avons déjà rencontré dans les chapitres précédents. Les harmoniques sphériques formaient une base naturelle sur la sphère d'un espace euclidien, les harmoniques hypersphériques formeront une base des espaces tridimensionnels mais de courbure constante.

Comme leur nom l'indique, ces fonctions sont harmoniques, ce qui veut dire qu'elles sont solutions de l'équation de Laplace sur un certain espace X :

$$\Delta_X f \stackrel{\text{déf}}{=} D^{[X]i} D_i^{[X]} f = 0 \tag{7.1}$$

en particulier, les harmoniques sphériques correspondent à la partie radiale de la solution de cette équation pour X qui est l'espace euclidien traditionnel $\mathbb{R}^3$. Les harmoniques hypersphériques sont, quant à elles, la partie spatiale des solutions de l'équation de Laplace (7.1) dans un espace X correspondant à l'un des 3 espaces de Friedmann-Lemaître. Les harmoniques hypersphériques seront donc solution de l'équation aux valeurs propres du laplacien, encore appelée *équation de Helmholtz* :

$$\Delta_{X^3} \mathcal{Y}_{klm} = \lambda \mathcal{Y}_{klm} \tag{7.2}$$

où Δ_{X^3} est la partie spatiale du laplacien $\Delta_{X_{FL}}$ et λ est une constante complexe à priori quelconque. Nous verrons qu'en fait ses valeurs sont discrètes et dépendent de l'espace X^3 qui est donc la partie spatiale d'un des espaces maximalement symétriques de Friedmann-Lemaître, soit $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{S}^3$ ou $\mathcal{H}^3$.

Développons maintenant les harmoniques hypersphériques en coordonnées hypersphériques (χ, θ, ϕ), qui sont les coordonnées sphériques sur chacun des espaces maximalement symétriques, soit :

$$\mathcal{Y}_{klm}(\chi, \theta, \phi) = R_{kl}(\chi) S_{lm}(\theta, \phi) \tag{7.3}$$

alors l'équation de Helmholtz devient :

$$S_{lm} \Delta_{\text{rad}} R_{kl} + R_{kl} \Delta_{\text{ang}} S_{lm} = \lambda R_{kl} S_{lm} \tag{7.4}$$

où Δ_{rad} et Δ_{ang} sont respectivement les parties radiale (i.e. dépendante de χ) et angulaire (i.e. dépendante de θ et ϕ) du laplacien Δ_{X^3}. Cela peut se réécrire en séparant les parties radiale et angulaire :

$$\frac{1}{R_{kl}} \Delta_{\text{rad}} R_{kl} - \lambda = \frac{1}{S_{lm}} \Delta_{\text{ang}} S_{lm} \tag{7.5}$$

Puisque le membre de gauche ne dépend que de la variable χ et le membre de droite que des variables angulaires, ces 2 membres sont égaux à une même constante α :

$$\begin{cases} \Delta_{\text{rad}} R_{kl} = (\alpha + \lambda) R_{kl} \\ \Delta_{\text{ang}} S_{lm} = \alpha S_{lm} \end{cases} \tag{7.6}$$

La deuxième équation est exactement celle vérifiée par les harmoniques sphériques classiques, puisqu'il s'agit de l'équation de Helmholtz (voir annexe (B.8)) sur la sphère. On en déduit que les harmoniques hypersphériques ont comme partie angulaire les harmoniques sphériques et que la constante α vaut $-l(l+1)$, ce qui donne l'équation différentielle dont est solution la partie radiale, en écrivant de façon explicite le laplacien :

$$\frac{\sigma^3(\chi)}{\chi^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi} \left(\frac{\chi^2}{\sigma(\chi)} \frac{\mathrm{d}R_{kl}}{\mathrm{d}\chi} \right) + \left(\lambda - \sigma^2(\chi) \frac{l(l+1)}{\chi^2} \right) R_{kl} = 0 \tag{7.7}$$

avec :

$$\sigma(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{si } K > 0 \\ \chi & \text{si } K = 0 \\ \sinh\chi & \text{si } K < 0 \end{cases} \tag{7.8}$$

Cette équation est bien connue et sa solution est donnée par Harrison[2], qui décrit d'abord les solutions en espace plat et ensuite les solutions en espaces courbés, et repris dans Lehoucq *et al.*, 2002, avec une normalisation un peu différente, que nous allons utiliser ici. Cette normalisation correspond, en intégrant sur toute la section spatiale de l'espace-temps étudié, à :

$$\int \mathcal{Y}_{klm}(\chi,\theta,\phi) \mathcal{Y}^*_{k'l'm'}(\chi,\theta,\phi)\ \sigma^2(\chi) \mathrm{d}\chi \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{k^2}\ \delta_{kk'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{7.9}$$

où l'élément d'angle solide est $\mathrm{d}\Omega \overset{\text{déf}}{=} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$.

Tout d'abord, pour un espace euclidien, donc $K = 0$, les modes propres existent pour tout entier k positif ou nul. Dans ce cas, on obtient que les fonctions radiales sont de la forme :

$$R_{kl}(\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(k\chi) \tag{7.10}$$

Pour les espaces sphériques, donc pour $K > 0$, les modes propres seront définis lorsque les nombres k auront la forme $k = (\nu+1)\sqrt{K}$, où ν est un entier, là encore, positif ou nul. Les fonctions radiales prennent alors la forme :

$$R_{kl}(\chi) = \sqrt{\frac{(\nu+1)}{k\sigma(\chi)} \frac{(\nu+l+1)!}{(\nu-l)!}}\ P^{-1/2-l}_{\nu+1/2}(\cos(\sqrt{K}\chi)) \tag{7.11}$$

$$= l! \sqrt{\frac{2(\nu-l)!}{\pi(\nu+1)(\nu+l+1)!}} (2\sin(\sqrt{K}\chi))^l\ C^{l+1}_{k-l}(\cos(\sqrt{K}\chi)) \tag{7.12}$$

[2] *cf.* Harrison, 1967.

Les fonctions radiales peuvent donc s'exprimer en termes de polynômes de Legendre associés P_m^l, mais pour des nombres demi-entiers. C'est pour cela qu'il est plus commode d'introduire ici les *polynômes de Gegenbauer* C_m^l, dont la définition et les propriétés sont décrites dans l'annexe B.5.

Enfin, pour les espaces hyperboliques, donc de courbure K négative, les modes sont décrits par les nombres complexes k qui auront, cette fois, deux formes différentes possibles :

- les éléments réels qui sont les entiers positifs ou nuls ;
- les éléments imaginaires purs tels que les entiers ik soit compris dans l'intervalle $[0; \sqrt{-K}]$.

Dans ce cas, la partie radiale est donnée, en fonction des polynômes de Legendre associés, par :

$$R_{kl}(\chi) = \sqrt{\frac{N_{kl}}{k\sigma(\chi)}} P_{-1/2+i\omega}^{-1/2-l}(\cosh(\sqrt{-K}\chi)) \tag{7.13}$$

où ω désigne le rapport $k/\sqrt{-K}$ et N_{kl} désigne le facteur de normalisation. Comme indiqué dans Lehoucq *et al.*, 2002, ce facteur ne peut être calculé que pour les modes repérés par un indice k réel. Les autres préfacteurs devront être obtenus par prolongement analytique. Dans le cas où k est réel, il est donné par :

$$N_{kl} = \Pi_{n=0}^{l}(\omega^2 + n^2) \tag{7.14}$$

Maintenant que nous avons vu l'expression et les propriétés de la base des harmoniques hypersphériques, nous allons maintenant étudier une autre base, spécifique cette fois au cas sphérique.

7.3 Harmoniques toroïdales

La base des *harmoniques toroïdales*, ou base parabolique, est une base spécifique à la sphère tridimensionnelle (cas où $K > 0$ de la section précédente), mais puisque nous étudierons plus particulièrement les espaces sphériques, cette base sera adaptée à nos calculs.

7.3.1 Définition

Les harmoniques toroïdales sont définies le plus naturellement dans le système de coordonnées toroïdales. Les coordonnées cartésiennes habituelles sont en correspondance avec ces coordonnées par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x^1 = \cos\alpha\cos\theta \\ x^2 = \sin\alpha\cos\phi \\ x^3 = \sin\alpha\sin\phi \\ x^4 = \cos\alpha\sin\theta \end{cases} \tag{7.15}$$

où $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$. θ et ϕ portent le même nom que les variables angulaires en coordonnées hypersphériques puisqu'elles jouent

essentiellement le même rôle. Nous pouvons ainsi représenter schématiquement ces coordonnées comme indiqué sur la figure (7.1).

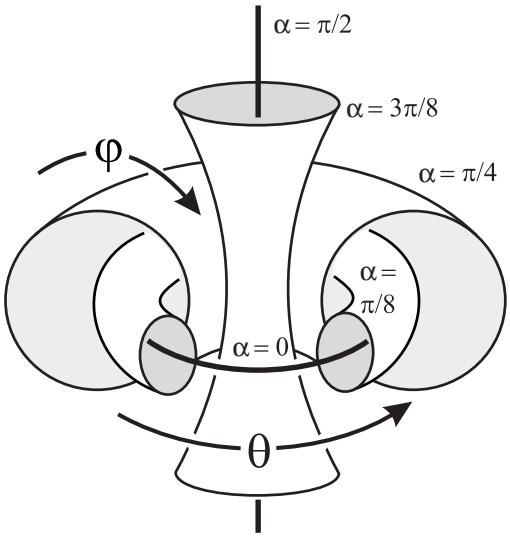


FIG. 7.1 – **Représentation schématique des coordonnées toroïdales.** Ces coordonnées peuvent être représentées comme un empilement de tores imbriqués les uns dans les autres. $\alpha = 0$ correspond à un tore d'épaisseur nulle (un cercle) et lorsque α augmente, la taille du tore correspondant augmente, jusqu'à la valeur $\alpha = \pi/2$ qui correspond en fait à l'axe des z. (schéma issu de Lehoucq *et al.*, 2003)

L'expression des harmoniques toroïdales dans ces coordonnées est :

$$T_{k;m_1,m_2}(\alpha,\theta,\phi) = C_{k;m_1,m_2}(\cos\alpha\ e^{i\theta})^l(\sin\alpha\ e^{i\phi})^m J_d^{(m,l)}(\cos(2\alpha)) \tag{7.16}$$

où l'indice k est un entier positif ou nul et les indices m_1 et m_2 varient entre $-k/2$ et $k/2$. Pour alléger les notations, nous avons également posé : $l = m_1 + m_2$, $m = m_2 - m_1$, $d = k/2 - m_2$ et $C_{k;m_1,m_2}$ qui est une constante de normalisation vaut :

$$C_{k;m_1,m_2} = \sqrt{\frac{k+1}{2\pi^2}}\sqrt{\frac{(k/2+m_2)!(k/2-m_2)!}{(k/2+m_1)!(k/2-m_1)!}} \tag{7.17}$$

et les $J_d^{m,l}$ désignent des polynômes de Jacobi (voir l'annexe B.4).

Ainsi construites, les harmoniques toroïdales sont également solutions de l'équation de Helmholtz ($\mathfrak{C}$.1) pour $X^3 = \mathcal{S}^3$ seulement cette fois, contrairement aux harmoniques hypersphériques précédentes.

7.3.2 Fonctions de Wigner

Ces fonctions proviennent de la mécanique quantique (voir par exemple Bander et Itzykson, 1966) et seront définies par rapport à un espace de Hilbert où certaines propriétés seront particulièrement simples à dériver en utilisant les notations de

la mécanique quantique, notamment les bras et kets. Puis, comme nous le montrerons dans la suite, ces fonctions, étant reliées aux harmoniques toroïdales, nous pourrons exploiter les propriétés des fonctions de Wigner, en les transposant aux harmoniques de la façon adéquate.

Nous définirons donc les fonctions de Wigner par leur action sur les rotations g de la sphère $\mathcal{S}^2$. Ces rotations appartiennent donc au groupe d'isométries de la sphère. Le groupe de matrice correspondant à ces fonctions est le groupe SO(3), qui est formé des matrices réelles 3×3 qui sont orthogonales : ${}^tMM = I_3$ et spéciales : $\det M = 1$.

Les fonctions de Wigner appliquées à la rotation g s'écrivent :

$$D^j_{m_1 m_2}(g) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle jm_1|R_g|jm_2\rangle \tag{7.18}$$

où l'indice j peut prendre des valeurs entières ou demi-entières, positives ou nulles et les indices m_1 et m_2 sont compris entre $-j$ et j.

Dans cette définition, nous avons introduit les vecteurs $|jm\rangle$ qui peuvent être considérés comme des harmoniques sphériques classiques. Plus précisément, ces 2 quantités sont liées par :

$$\langle lm|x\rangle = Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{7.19}$$

lorsque x est un élément de la sphère $\mathcal{S}^2$ repéré par (θ, ϕ).

Enfin, l'élément R_g désigne l'action naturelle à gauche de la rotation g. Donc, si f est une fonction s'appliquant aux éléments de $\mathcal{S}^2$, nous avons par définition d'une action à gauche :

$$R_g f(x) = f(g^{-1}x) \tag{7.20}$$

Une première propriété de ces fonctions peut être obtenue en insérant la relation de fermeture suivante (puisque les vecteurs $|jm\rangle$ forment une base orthonormée) :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{m=-j}^{j} |jm\rangle\langle jm| = \mathbb{1} \tag{7.21}$$

dans la définition des fonctions de Wigner. Nous obtenons ainsi la décomposition sur les harmoniques sphériques de l'action d'une rotation appliquée à une harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned} R_g Y_{lm}(\theta, \phi) &\stackrel{\text{déf}}{=} \langle lm|R_g|x\rangle \\ &= \langle lm|R_g \sum_{l,m'} (|lm'\rangle\langle lm'|)|x\rangle \\ R_g Y_{lm}(\theta, \phi) &= \sum_{l',m'} D^l_{mm'}(g) Y_{lm'}(\theta, \phi) \end{aligned} \tag{7.22}$$

Les fonctions de Wigner sont d'ailleurs le plus souvent introduites par cette relation-ci dans la littérature.

7.3.3 Fonctions de Wigner et harmoniques toroïdales

Comme nous l'avons annoncé dans le paragraphe précédent, il existe une relation simple liant les fonctions de Wigner et les harmoniques toroïdales. Il faut toutefois noter que ces deux fonctions ne sont pas définies sur les mêmes espaces : les harmoniques toroïdales s'appliquent à des éléments de la sphère tridimensionnelle, tandis que les fonctions de Wigner s'appliquent à des rotations de $\mathbb{R}^3$.

Cependant, nous allons pouvoir établir une relation entre les éléments de ces deux espaces, $\mathcal{S}^3$ et SO(3), par le biais de SU(2) qui est le groupe des matrices spéciales et unitaires. Ces matrices sont donc à coefficients complexes, de déterminant 1, et unitaires, donc vérifiant : ${}^tM^*M = I_2$, où M^* désigne la matrice conjuguée de M. En explicitant ces propriétés, nous obtenons aisément que ces matrices sont de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

où u et v sont deux nombres complexes vérifiant $u^2 + v^2 = 1$.

La première étape consiste donc à identifier $\mathcal{S}^3$ et SU(2). Or, en tant que variétés, la sphère peut être mise en bijection avec SU(2) grâce à l'identification suivante, utilisant les coordonnées toroïdales :

$$g = \begin{pmatrix} \cos\alpha\ e^{i\theta} & i\sin\alpha\ e^{i\phi} \\ i\sin\alpha\ e^{-i\phi} & \cos\alpha\ e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

qui est bien un élément de SU(2).

La deuxième étape consiste à relier SU(2) et SO(3). Cependant, dans ce cas, la correspondance ne sera plus biunivoque : en effet, comme cela est fait en annexe C.2, nous pouvons montrer que pour deux éléments de SU(2), il y aura un élément qui leur correspondra dans SO(3), ce que l'on note : SU(2)$\sim$ SO(3)/$\mathbb{Z}_2$ où $\mathbb{Z}_2$ est le groupe à 2 éléments $\{-1, -1\}$. Cependant, nous n'avons pas besoin d'exploiter cet isomorphisme, il s'agit juste de savoir qu'il existe pour que nous puissions utiliser un espace donné, qui sera ici SU(2), pour faire les calculs.

Compte tenu des identifications que nous avons exhibées, nous pouvons écrire la relation liant les harmoniques toroïdales aux fonctions de Wigner :

$$T_{k;m_1,m_2}(u) = \sqrt{\frac{k+1}{2\pi^2}} D^{k/2}_{m_1,m_2}(g_u) \tag{7.25}$$

où g_u est la rotation associée à l'élément $u \in \mathcal{S}^3$.

7.3.4 Action sur la composée de deux rotations

Une autre propriété qui nous servira dans la suite est l'action que vont avoir les fonctions de Wigner sur la composée de deux rotations. En utilisant la définition ($\mathfrak{C}$.6) des fonctions de Wigner, cela s'obtient facilement. En effet, nous avons, en utilisant la définition de l'action d'une rotation R_g :

$$D^j_{m_1,m_2}(g_1 g_2) = \langle jm_1 | R_{g_2} R_{g_1} | jm_2 \rangle \tag{7.26}$$

En insérant entre les deux rotations la relation de fermeture (7.21), nous obtenons la formule d'addition suivante :

$$D^j_{m_1,m_2}(g_1g_2) = \sum_m D^j_{m_1,m}(g_2)D^j_{m,m_2}(g_1) \tag{7.27}$$

En fait, cette relation nous sera principalement utile en termes d'harmoniques toroïdales, ce qui se réécrit :

$$T_{k;m_1,m_2}(g\mathbf{x}) = \sum_m D^{k/2}_{m,m_2}(g)T_{k;m_1,m}(\mathbf{x}) \tag{7.28}$$

où nous n'avons plus maintenant la composée de deux rotations g_1g_2, comme dans la formule précédente, mais l'action d'une rotation g, qui sera plus loin un générateur du groupe d'holonomies de notre espace, sur un point $\mathbf{x}$ de $\mathcal{S}^3$.

7.4 Applications aux espaces sphériques

Nous allons maintenant voir un exemple concret d'applications de ces différentes bases pour simplifier les calculs et pouvoir s'en servir dans les simulations numériques telles qu'elles seront étudiées dans le prochain chapitre.

7.4.1 Générateurs des groupes d'holonomies

Comme nous l'avons vu en section 5.3.5, le groupe d'holonomies d'un espace est un groupe discret d'isométries de cet espace sans point fixe. Le groupe d'holonomies sera donc un sous-groupe du groupe des isométries de l'espace simplement connexe associé à l'espace étudié. Dans cette partie, nous travaillerons sur les espaces sphériques, i.e. ceux dont l'espace de revêtement universel est la sphère $\mathcal{S}^3$. Or le groupe des isométries de cet espace est SO(4). Donc, les groupes d'holonomies seront des sous-groupes de SO(4). De plus, ces groupes étant discrets, ils sont engendrés par un nombre fini d'éléments : ces éléments sont appelés les *générateurs* du groupe d'holonomies.

Pour les espaces polyédriques, c'est-à-dire ici, le tétraèdre, l'octaèdre et le dodécaèdre, il n'y a que deux générateurs pour chacun de leur groupe d'holonomies, qui sont donc des éléments de SO(4) ayant pour valeur :

– tétraèdre :

$$t_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

– octaèdre :

$$o_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad o_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.30}$$

– icosaèdre :

$$i_1 = \begin{pmatrix} c & -1/2 & 0 & -C \\ 1/2 & c & C & 0 \\ 0 & -C & c & 1/2 \\ C & 0 & -1/2 & c \end{pmatrix} \quad i_2 = \begin{pmatrix} c & -C & 1/2 & 0 \\ C & c & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & c & C \\ 0 & -1/2 & -C & c \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

où $c \overset{\text{déf}}{=} \cos(\pi/5)$ et $C \overset{\text{déf}}{=} \cos(2\pi/5)$.

Cependant, pour effectuer les calculs dans la base des harmoniques toroïdales, il faudra travailler sur des éléments de la sphère et non sur des éléments de SO(4), comme cela est le cas pour les éléments ci-dessus. Pour cela, il est utile d'introduire la décomposition de SO(4) en produit direct : $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$ (au signe près), qui s'écrit de façon explicite :

$$Ax \equiv a_g u_x a_d \tag{7.32}$$

où A est un élément de SO(4) et u et v sont des éléments de SU(2). x est un point de $\mathcal{S}^3$ et u_x est la matrice de SU(2) correspondante. A étant un élément de SO(4), il transforme un élément de la sphère $\mathcal{S}^3$ en un autre élément de $\mathcal{S}^3$, donc le membre de gauche est un élément de $\mathcal{S}^3$, et le membre de droite étant un produit de matrices de SU(2), le résultat reste une matrice de SU(2). La relation ci-dessus est donc une équivalence entre un élément de la sphère et l'élément correspondant de SU(2).

Pour les générateurs cités plus haut, il s'agit en fait, d'éléments particuliers de SO(4), qui correspondent à un couple (a_g, id) où id est l'élément identité de SU(2). La matrice a_g correspondante est pour les 3 espaces précédents :

$$t_1 \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix} \qquad t_2 \equiv \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \tag{7.33}$$

$$o_1 \equiv \begin{pmatrix} e^{-i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} \qquad o_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

$$i_1 \equiv \begin{pmatrix} c+i/2 & C \\ iC & c-i/2 \end{pmatrix} \qquad i_2 \equiv \begin{pmatrix} c+iC & 1/2 \\ -1/2 & c-iC \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

7.4.2 Modes propres du laplacien

Dans les sections précédentes de ce chapitre, nous avons étudié les bases dont les éléments sont modes propres du laplacien (c'est-à-dire sont solutions de l'équation de Helmholtz ($\mathfrak{C}$.1)) sur la sphère. Ainsi, tout mode propre du laplacien sur la sphère, se décomposera de manière unique sur l'une ou l'autre de ces 2 bases.

Ce qui nous intéresse dans cet exposé est d'obtenir les modes propres du laplacien dans un espace multiplement connexe quelconque dont le recouvrement universel est la sphère. Dans ce cas, si l'espace s'écrit : $\mathcal{E} = \mathcal{S}^3/\Gamma$, les modes propres f_s, où s est un indice repérant le mode propre, devront vérifier les deux conditions suivantes :

1. f_s est solution de l'équation de Helmholtz sur la sphère :

$$\Delta_{\mathcal{S}^3} f_s = \lambda f_s \tag{7.36}$$

   où λ est un complexe à priori quelconque ;

2. f_s est invariant sous le groupe d'holonomies :

$$g_i f_s = f_s \tag{7.37}$$

   où les g_i désignent les différents éléments du groupe Γ.

La première condition indique juste que f_s se décompose sur l'une des bases de la sphère solution de l'équation de Helmholtz que nous avons introduites précédemment. En particulier, si nous prenons la base des harmoniques toroïdales, nous obtenons comme vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda_k \equiv -k(k+2)$:

$$f_{ks}(\mathbf{x}) = \sum_{m_1,m_2} f_{ksm_1m_2} T_{k;m_1,m_2}(\mathbf{x}) \tag{7.38}$$

où les coefficients $f_{ksm_1m_2}$ sont des nombres réels et $\mathbf{x}$ est un point de l'hypersphère $\mathcal{S}^3$.

La deuxième condition se réécrit donc :

$$\sum_{m_1,m_2} f_{ksm_1m_2} T_{k;m_1,m_2}(g_i\mathbf{x}) = \sum_{m_1,m_2} f_{ksm_1m_2} T_{k;m_1,m_2}(\mathbf{x}) \tag{7.39}$$

En identifiant les coefficients des éléments de la base des harmoniques toroïdales, après avoir décomposé le terme $T_{k;m_1,m_2}(g_i\mathbf{x})$ sur la base en fonction de $\mathbf{x}$ seulement grâce à la formule (7.28), nous obtenons :

$$f_{ksm_1m_2} = \sum_{m=-k/2}^{k/2} D^{k/2}_{m_2,m}(g_i) f_{ksm_1m} \tag{7.40}$$

C'est cette équation qui renferme toute l'information sur les modes propres du laplacien des espaces multiplement connexes sphériques.

Nous pouvons déjà remarquer que cette équation ne dépend pas de l'indice m_1 : chaque $f_{ksm_1m_2}$ peut donc être considéré indépendamment des autres. En particulier, on peut écrire que $f_{ksmm_2} = f_{ksm_2}\delta_{mm_1}$ et l'équation (7.38) se réécrit :

$$f_{ks}(\mathbf{x}) = \sum_{m_2} f_{ksm_1m_2} T_{k;m_1,m_2}(\mathbf{x}) \tag{7.41}$$

ce qui est valable pour n'importe quel indice m_1. En particulier, la dégénérescence de la valeur propre λ_k sera proportionnelle au nombre d'indices m_1 possibles, c'est-à-dire proportionnel à $k+1$, et l'indice s qui repère justement cette dégénérescence est une fonction de m_1.

Revenons maintenant à l'étude d'un cas particulier de l'équation (7.40) pour simplifier la suite des calculs. En effet, les générateurs, comme nous l'avons vu précédemment, peuvent s'écrire sous la forme d'une matrice de SU(2). En particulier,

elles ont la forme (7.24). Lorsque le générateur est diagonal, cela signifie donc que $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ La définition des harmoniques toroïdales et la relation entre ces harmoniques et les fonctions de Wigner indiquent donc que :

$$D^{k/2}_{m_2,m}(g_i) = e^{2im_2\theta}\delta_{m_2m} \tag{7.42}$$

puisque pour $\cos(2\alpha) = 1$, les polynômes de Jacobi valent 1. La formule précédente (7.40) se réécrit alors :

$$(1 - e^{2im_2\theta})f_{s,m_1,m_2} = 0 \tag{7.43}$$

Cette formule est très utile pour simplifier les calculs puisque, si le générateur g_i est diagonal, tous les coefficients $f_{ksm_1m_2}$ vont être nuls sauf lorsque l'exponentielle est égale à 1, soit pour :

$$m_2\theta = 0 \pmod{\pi} \tag{7.44}$$

Cependant, les générateurs donnés plus haut ne sont pas diagonaux, sauf pour le générateur o_1 de l'octaèdre. Mais cela est juste un choix de base sur la sphère, puisque les matrices sont à coefficients complexes, il existe toujours une base où elles seront diagonales. D'autre part, un autre choix de cette base ne changera en rien la physique : les données seront simplement tournées sur la sphère par rapport aux données initiales. Il faudra toutefois, une fois cette base choisie, y rester pour les autres calculs que nous effectuerons dans cet espace. En particulier, pour chaque espace, nous ne pourrons diagonaliser simultanément qu'un seul des deux générateurs mais cette diagonalisation va permettre de simplifier leur étude.

Un calcul montre que nous pouvons réécrire les générateurs précédents :

$$t_1 \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix} \qquad t_2 \equiv \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+i & -2-2i \\ 2-2i & \sqrt{3}-i \end{pmatrix} \tag{7.45}$$

$$o_1 \equiv \begin{pmatrix} e^{-i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} \qquad o_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.46}$$

$$i_1 \equiv \begin{pmatrix} e^{i\pi/5} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/5} \end{pmatrix} \qquad i_2 \equiv \begin{pmatrix} c+is & 1/2-isc \\ -1/2-isc & c-is \end{pmatrix} \tag{7.47}$$

avec $c \overset{\text{déf}}{=} \cos(\pi/5)$ et $s \overset{\text{déf}}{=} \sin(\pi/5)/\sqrt{5}$. Ainsi, l'équation (7.44) correspond pour chacun de ces espaces à l'annulation de tous les $f_{ksm_1m_2}$ dont l'indice m_2 vérifie :

- tétraèdre : $m_2 = 0 \pmod 3$;
- octaèdre : $m_2 = 0 \pmod 2$;
- icosaèdre : $m_2 = 0 \pmod 5$.

Reprenons maintenant l'équation (7.40). En regardant plus précisément, nous pouvons observer qu'il s'agit d'une équation aux valeurs propres pour la valeur propre 1 d'un certain opérateur dont la matrice $D_k(g)$ possède les coefficients $D^{k/2}_{i+k/2,j+k/2}(g)$ à l'intersection de la ligne i et la colonne j. Les $F_{s,m_1} \equiv (f_{ksm_1i})_{i\in\{-k/2,\ldots,k/2\}}$ ne sont que des vecteurs propres de cette équation pour chaque s et m_1 fixés, s

désignant la dégénérescence de ce vecteur propre. Il s'agit donc de résoudre l'équation :

$$D_k(g)F_{s,m_1} = F_{s,m_1} \tag{7.48}$$

ce qui peut se faire avec un logiciel de calcul formel, tel `Mathematica`, ou numériquement dans un langage de bas niveau si l'on souhaite améliorer le temps de calcul et la précision.

Cependant, $D_k(g)$ est une matrice carrée de taille $k+1$. Les calculs deviennent donc très vite compliqués. Mais, c'est ici qu'intervient le calcul précédent sur les générateurs diagonaux : en fait, il n'y a à considérer que les indices de cette matrice vérifiant les conditions indiquées précédemment sur les espaces ! Ainsi, pour le dodécaèdre, la matrice à diagonaliser n'aura plus qu'environ (suivant la valeur de k) 25 fois moins de coefficients. Finalement, le calcul à faire est de résoudre l'équation aux valeurs propres :

$$\tilde{D}_k(g)\tilde{F}_{s,m_1} = \tilde{F}_{s,m_1} \tag{7.49}$$

ce qui n'est possible que pour certaines valeurs de k, puisque pour les autres k, la matrice $\tilde{D}_k(g)$ ne possèdera pas la valeur propre 1.

Dans le cas où cette équation est soluble, la multiplicité de 1 peut être supérieure à 1 : c'est justement cette dégénérescence que repère l'indice s du vecteur propre $\tilde{F}_{s,m_1}$. On peut montrer[3] que la multiplicité de cette valeur propre est, en fonction de k et de l'espace étudié, donnée par les relations :

- tétraèdre :

$$m_T = (k+1)\,(1 + 2[k/6] + [k/4] - k/2) \tag{7.50}$$

- octaèdre :

$$m_O = (k+1)\,(1 + [k/8] + [k/6] + [k/4] - k/2) \tag{7.51}$$

- icosaèdre :

$$m_I = (k+1)\,(1 + [k/10] + [k/6] + [k/4] - k/2) \tag{7.52}$$

où les crochets des formules précédentes désignent la partie entière de l'élément à l'intérieur de ces crochets. De plus, l'entier k ne peut prendre que des valeurs paires, c'est-à-dire que si k est impair alors la multiplicité du mode correspondant est nulle. Une représentation graphique de ces modes est donnée sur la figure (7.2). Nous pouvons aussi constater que la dégénérescence de ces trois espaces est bien proportionnelle à $k+1$ comme nous l'avions annoncé précédemment par un calcul simple.

7.5 Changement de base

Nous avons exhibé deux bases de $\mathcal{S}^3$ qui diagonalisent le laplacien. Or, si la base des harmoniques toroïdales est plus simple à utiliser, la base utilisée le plus généralement dans les codes numériques est celle des harmoniques hypersphériques dont les propriétés sont mieux connues.

[3] *cf.* Ikeda, 1995.

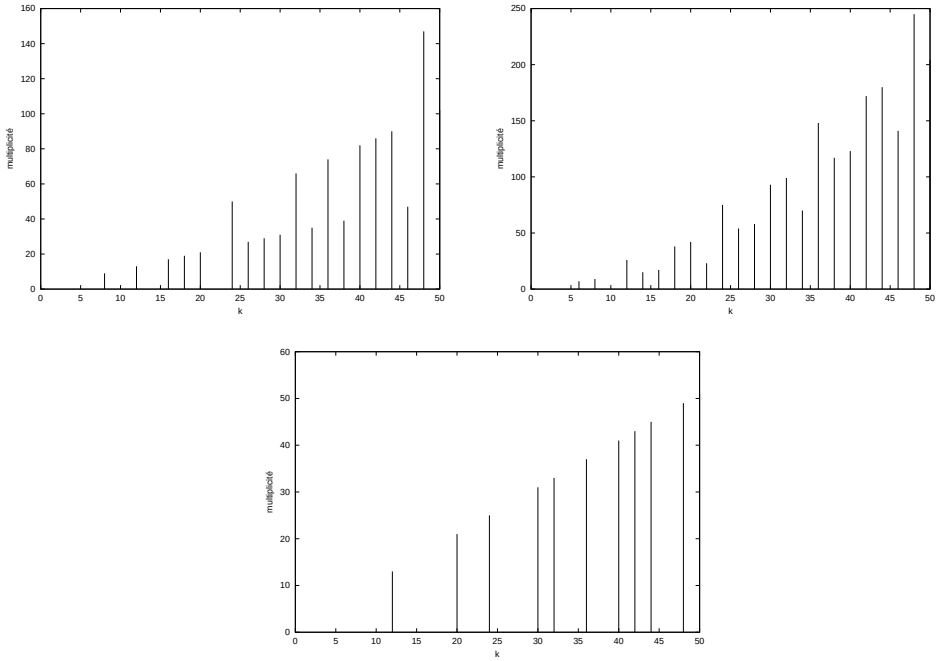


FIG. 7.2 – **Multiplicité des modes dans les espaces sphériques.** Les trois graphes ci-dessus représentent les multiplicités des modes des espaces tétraédrique, octaédrique et icosaédrique respectivement.

Ainsi pour pouvoir utiliser ces deux bases en même temps, en utilisant à chaque fois celle qui est la plus adaptée, il faut une formule qui permette de passer de l'une à l'autre. Une telle formule est donnée par la relation suivante[4] :

$$\mathcal{Y}_{klm}(u) = i^{k+l-m} \sum_{m_1,m_2=-k/2}^{k/2} (-1)^{m_2} \langle \frac{k}{2}, -m_1; \frac{k}{2}, m_2 | l, m \rangle T_{k;m_1,m_2}(u) \tag{7.53}$$

où les coefficients $< k/2, -m_1; k/2, m_2 | l, m >$ sont appelés coefficients de Clebsch-Gordan. Leurs propriétés sont rappelées en annexe B.6. En particulier, la relation d'addition (B.35) nous permet d'intervertir la relation ci-dessus en la multipliant par $\langle k/2, m_3; k/2, m_4 | l, m \rangle$ et en renommant les indices :

$$T_{k;m_1,m_2}(u) = (-i)^k (-1)^{m_2} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^{m-l} \langle \frac{k}{2}, -m_1; \frac{k}{2}, m_2 | l, m \rangle \mathcal{Y}_{klm} \tag{7.54}$$

Maintenant nous pouvons écrire les différents modes propres des espaces multiplement connexes sphériques sous les formes suivantes adaptées aux deux bases :

$$\Psi_{ks} = \sum_{m_1,m_2} f_{ksm_1m_2} T_{k;m_1,m_2} = \sum_{l,m} \xi_{kslm} \mathcal{Y}_{klm} \tag{7.55}$$

[4] *cf.* Bander et Itzykson, 1966.

où la première égalité est celle que nous avions déjà écrite en (7.38) et la deuxième est son équivalent dans la base des harmoniques hypersphériques. Les ξ_{kslm}, tout comme les $f_{ksm_1m_2}$, sont des nombres à priori complexes.

De la formule de changement de base, nous déduisons la formule permettant d'obtenir les coefficients de la base des harmoniques hypersphériques à partir de ceux de la base des harmoniques toroïdales, puisque c'est essentiellement cette conversion qui nous servira :

$$\xi_{kslm} = i^{m-l-k} \sum_{m_1,m_2} (-1)^{m_2} \langle \frac{k}{2}, -m_1; \frac{k}{2}, m_2 | l, m \rangle f_{ksm_1m_2} \tag{7.56}$$

En résumé, la démarche à adopter est de commencer à chercher les modes sous la forme des $f_{ksm_1m_2}$. On regarde quel espace est étudié, ce qui nous donne une restriction sur les indices m_2, puis de résoudre l'équation aux valeurs propres (7.49) pour les $f_{ksm_1m_2}$ non nuls. La formule ci-dessus (7.56) nous donne alors les coefficients dans la base des harmoniques hypersphériques, c'est-à-dire les coefficients ξ_{kslm}.

De plus, en théorie linéaire les différents modes, indexés par le nombre d'onde k, évoluent de façon indépendante. Les équations sont donc résolues pour chaque mode dans l'espace de Fourier puis pour obtenir la quantité dans l'espace réel, il faut ensuite effectuer la somme de tous ces modes, ce qui revient à la transformée de Fourier du cas simplement connexe étudié en première partie.

Chapitre 8:

Simulations numériques

DANS ce chapitre, nous allons nous appuyer à la fois sur les modèles théoriques et sur les observations des cartes de fluctuations de température du fond diffus cosmologique, plus précisément de la décomposition de ces dernières sur les harmoniques sphériques. Nous allons donc en particulier, principalement discuter des résultats du code `CMBSlow` cité dans le chapitre précédent (voir page 97), qui va nous permettre d'obtenir des cartes simulées de fluctuations de température sur la sphère de dernière diffusion.

Cependant, ces cartes simulées ne sont pas utilisables directement. En effet, elles prennent comme conditions initiales, pour les équations d'évolution que nous avons dérivées en première partie, une réalisation correspondant à une certaine variable aléatoire gaussienne. Or notre Univers possède des conditions initiales bien précises, fixées, représentées par *une* réalisation fixée de la variable aléatoire précédente. Les cartes complètes ne pourront donc n'être utilisées qu'en termes de quantités statistiques : nous obtiendrons une certaine moyenne, après avoir effectué un nombre de simulations suffisamment grand, ce qui correspondra à la valeur espérée de la quantité donnée, et un écart-type, qui nous donnera les barres d'erreur pour cette même quantité physique. L'analyse de ces quantités, notamment par le biais des spectres de puissance, possède des signatures caractéristiques en topologie multiplement connexe, signatures que nous essaierons de mettre en relief.

De plus, nous supposons ici que le champ scalaire ayant donné naissance aux fluctuations de densité primordiales se comporte comme une variable aléatoire gaussienne, mais ceci n'est vrai qu'*à l'intérieur du domaine fondamental de l'espace*. Or, dans le cadre de la topologie, le volume de ce domaine est fini : l'analyse des propriétés de l'Univers dans son ensemble entraînera donc une apparente non-gaussianité, ce qui n'est qu'un artefact observationnel. Nous discuterons donc également des effets de cette apparente non-gaussianité.

8.1 Spectres de puissance

8.1.1 A partir des cartes

Nous avons déjà vu au paragraphe 4.2 la méthode pour obtenir à partir d'une carte le spectre de puissance des fluctuations. Dans le cas d'un Univers multiplement connexe nous pourrons donc procéder de la même façon.

Cependant, dans ce dernier cas, le calcul des cartes est limité puisque la méthode que nous avons vue dans le chapitre précédent pour calculer les modes propres d'un espace multiplement connexe ne donne pas de formules explicites, mais juste une série de calcul numériques qu'il faut effectuer. En particulier, nous ne pourrons ainsi calculer qu'un nombre fini de ξ_{kslm} en plus des calculs habituels à effectuer dans le cas simplement connexe. C'est donc le calcul des modes qui va nous limiter, d'autant plus qu'il faut un très grand nombre de ces coefficients pour obtenir une précision satisfaisante.

Pour donner un ordre de grandeur, si nous calculons tous les ξ_{kslm} jusqu'à une certaine valeur $k = k_{\max}$, alors le multipôle maximal qui fournira un résultat satisfaisant est donné par la formule :

$$l_{\max} \sim (k_{\max} + 1)\sqrt{\Omega - 1} \tag{8.1}$$

Cette formule est illustrée par la figure (8.1) qui montre les spectres de puissance obtenus avec le code en n'utilisant les modes que jusqu'à une valeur propre donnée, représentée par k ici. On voit nettement sur le graphe une coupure franche qui est repoussée lorsque le nombre de modes utilisés augmente. La coupure a lieu bien avant la valeur $l_{\max}$ indiquée ci-dessus qui correspond à la valeur maximale où la courbe restera proche du résultat idéal (c'est-à-dire pour un nombre infini de modes). Ainsi, la courbe allant jusqu'à $k = 24$ (qui est celle utilisée dans Luminet *et al.*, 2003) correspond à $l_{\max} \simeq 3,4$, tandis que la coupure est plutôt vers les multipôles de l'ordre de $l \simeq 7 - 8$.

Dans notre cas, pour l'espace de Poincaré, nous avons utilisé au mieux les coefficients ξ_{kslm} jusqu'à $k \sim 250$. Pour cela, il faut calculer de l'ordre de $1,7.10^9$ coefficients ξ_{kslm} si ceux-ci étaient tous non nuls. En fait, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent 7.4.2, l'utilisation de la base des harmoniques toroïdales permet de faire apparaître un grand nombre de tels coefficients nuls. D'autre part, si nous considérons que le paramètre Ω_{tot} vaut $1,02$, comme semblent favoriser et les données observationnelles et les modèles théoriques se basant sur un espace de Poincaré, la formule ci-dessus nous apprend que nous ne pourrons pas espérer dépasser $l \sim 35$, alors que les données WMAP donnent des informations correctes sur le spectre de puissance jusqu'à $l \sim 1000$!

D'un autre côté, les phénomènes qui nous intéressent prennent place principalement aux grandes échelles et ces quelques multipôles peuvent déjà donner quelques informations sur les espaces à exclure et ceux qui semblent les plus probables, même si une analyse plus poussée sera nécessaire pour trancher. Nous verrons en fait une méthode plus efficace pour traiter les spectres de puissance en température dans le

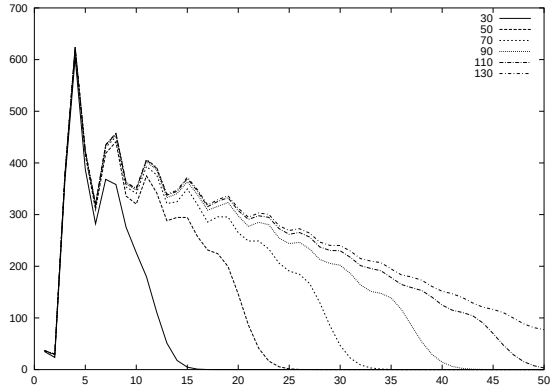


FIG. 8.1 – **Spectres de puissance de l'espace de Poincaré suivant le nombre de modes utilisés.** Le graphe intérieur correspond à quatre modes utilisés ($k = 12, 20, 24, 30$). Les graphes successifs correspondent au rajout de valeurs propres supplémentaires jusqu'à $k = 130$ (le nombre indiqué en légende correspond à la valeur maximale de k utilisée pour cette courbe). Ces graphes correspondent à un espace de Poincaré de paramètre $\Omega_{\text{tot}} = 1,02$.

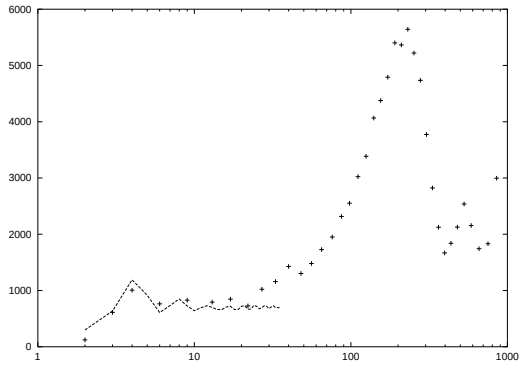


FIG. 8.2 – **Spectres de puissance comparés d'un espace de Poincaré et des données WMAP.** Les points représentent les données observées par WMAP tandis que la courbe correspond au modèle d'un espace de Poincaré dont le paramètre Ω_{tot} vaut 1.021.

prochain paragraphe, mais mis en place récemment par une équipe allemande. Je discuterai donc principalement des résultats du code avec les quelques multipôles dont nous disposons ici, et en fait, nous pourrons constater que nos conclusions sont assez proches de celles de Aurich *et al.*, 2005a, puisque comme nous l'avons dit, c'est principalement aux grandes échelles que la topologie va influer.

Sur la figure (8.3) sont représentés et le spectre de puissance observationnel obtenu par WMAP et les spectres de puissance des trois polyèdres sphériques étudiés dans le chapitre précédent. La coupure pour le tétraèdre et l'octaèdre est beaucoup plus rapide que pour l'espace de Poincaré puisque le nombre de modes nuls de ces

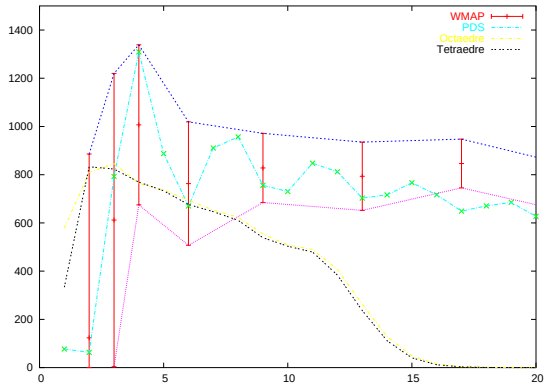


FIG. 8.3 – **Comparaison des spectres de puissance des différents polyèdres.** Le spectre de puissance de WMAP est comparé aux trois polyèdres compacts sphériques. Le paramètre Ω_{tot} vaut 1.02 pour les trois polyèdres.

deux espaces est moins important et il est donc plus difficile de calculer autant de modes que pour l'espace de Poincaré. Nous pouvons cependant remarquer que pour ces trois espaces le multipôle $l = 2$ est très faible, ainsi que dans le cas de WMAP.

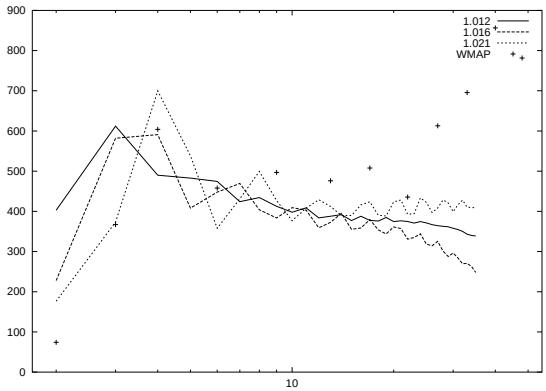


FIG. 8.4 – **Effet de la courbure.** La courbe en pointillés longs correspond aux données WMAP, tandis que les 3 autres courbes représentent le spectre de puissance théorique pour des espace de Poincaré ayant différentes courbures.

La figure (8.4) compare les données observationnelles à différents espace de Poincaré, différant de par leur courbure. La courbure influe principalement sur la position des pics, les oscillations étant élargies avec la courbure.

Enfin, la figure (8.5) compare le spectre de puissance donné par WMAP, celui du modèle ΛCDM correspondant et celui de l'espace de Poincaré pour un paramètre de densité valant $\Omega_{\text{tot}} = 1.018$. Nous pouvons constater que ce fit ne convient pas pour le terme quadrupôlaire $l = 2$ qui est bien trop bas, même si les effets de variance cosmique sont plus difficilement quantifiables pour des échelles si grandes.

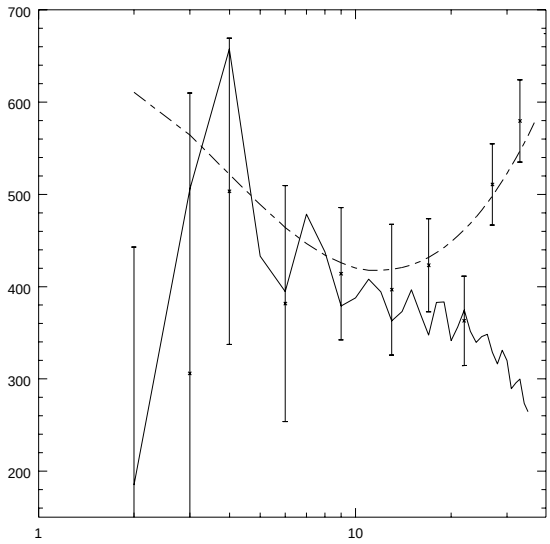


FIG. 8.5 – **Comparaison à un spectre ΛCDM.** Les points avec barres d'erreur représentent les données WMAP, la courbe en pointillé est le meilleur fit obtenu pour cette courbe avec un modèle ΛCDM et la courbe en trait plein est le spectre de puissance de l'espace de Poincaré pour $\Omega_{\rm tot} = 1.018$.

Il y a également le point $l = 22$ qui est bien trop bas. Même si la coupure intervient peu après ce point et que les données sont peu fiables ici, le modèle dodécaédrique est plus proche des observations dans cette gamme de multipôles.

8.1.2 A partir des multiplicités des modes

En pratique, la méthode précédente est très lourde et donne peu de résultats satisfaisants, même si elle permet déjà de rajouter des limites sur les modèles. Mais, Aurich *et al.*, 2005a ont proposé une méthode permettant de s'affranchir du calcul des modes, et donc de n'utiliser que leur multiplicité. Or, comme nous l'avons vu (voir par exemple les équations (7.50) à (7.52)), cette multiplicité est connue explicitement. Nous pourrons donc cette fois obtenir le spectre de puissance pour un nombre de multipôles bien plus grand.

Cette approche se base sur la formule de Sachs-Wolfe (4.28) que nous avons dérivée dans la première section. En prenant cette formule dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire en décomposant les différents termes sur les modes propres du laplacien, comme les harmoniques hypersphériques, nous pourrons écrire explicitement les différentes contributions sans la présence des ξ_{kslm} qui sont les termes difficiles à calculer numériquement.

Considérons par exemple l'effet Sachs-Wolfe ordinaire. La décomposition du

potentiel sur les modes propres Ψ_{ks} du laplacien sur la sphère $\mathcal{S}^3$ s'écrit :

$$\left.\frac{\delta T}{T}\right|_{SW} = \frac{1}{3}\sum_{k,s}\Phi_{ks}(\eta_{\rm SDD})\Psi_{ks}(\chi_{\rm SDD},\theta,\phi) \tag{8.2}$$

où l'indice k repère la valeur propre du laplacien et s est l'indice correspondant à la dégénérescence de ce mode. En utilisant la décomposition de Ψ_{ks} sur les harmoniques hypersphériques de la formule (7.55), nous obtenons les a_{lm} correspondants :

$$a_{lm}^{SW} = \frac{1}{3}\sum_{ks}\Phi_{ks}\xi_{kslm}R_{kl}(\chi_{\rm SDD}) \tag{8.3}$$

A l'aide de la normalisation (4.32) du potentiel, nous obtenons le spectre de puissance associé :

$$C_l^{SW} = \frac{1}{9(2l+1)}\sum_{k,s,m}\mathcal{P}_\phi(k)R_{kl}(\eta_{\rm SDD})\xi_{kslm}^2 \tag{8.4}$$

Cette équation est celle utilisée dans le paragraphe précédent et calculée à l'aide d'un code numérique connaissant les coefficients ξ_{kslm}. L'apport de Aurich *et al.*, 2005a a été de supposer qu'une certaine somme de ces coefficients se calcule simplement, plus précisément que l'on a la relation :

$$\frac{1}{2l+1}\sum_{s,m}\xi_{kslm}^2 = \frac{Nm^{[X]}(k)}{(k+1)^2} \tag{8.5}$$

où N est l'ordre du groupe d'holonomies de l'espace X étudié et $m^{[X]}(k)$ est la multiplicité du mode associé à k donnée par les formules (7.50) à (7.52) pour les trois espaces sphériques. Cette conjecture a ensuite été prouvée par Jesper Gundermann[1]. Cette relation permet donc bien de s'affranchir du calcul de chacun des modes individuels et la somme à effectuer est simple, puisque le spectre de puissance devient :

$$C_l^{SW} = \frac{N}{9}\sum_{k}\mathcal{P}_\phi(k)R_{kl}(\eta_{\rm SDD})\frac{m^{[X]}(k)}{(k+1)^2} \tag{8.6}$$

Nous pouvons alors effectuer le même genre de calculs pour les autres composantes. Lorsque nous effectuons le calcul numérique pour un espace de Poincaré de courbure $\Omega_{\rm tot} = 1.018$, nous obtenons le graphe de la figure (8.6). Ce graphe est à comparer à celui de la première partie en figure (4.2) (ce ne sont pas directement les mêmes grandeurs, puisqu'ici ce qui est tracé est δT_l qui est juste le carré du spectre de puissance habituel multiplié par $l(l+1)$). En particulier, aux petites échelles, i.e. aux grands multipôles, les contributions des différentes composantes sont confondues avec celles du cas simplement connexe, ce qui est bien le résultat attendu, puisque la topologie est un effet de grande échelle. Nous pouvons également constater que la composante la plus affectée est la composante Doppler : pour les deux autres, il ne s'agit que d'un effet à peine perceptible.

[1] *cf.* Gundermann, 2005.

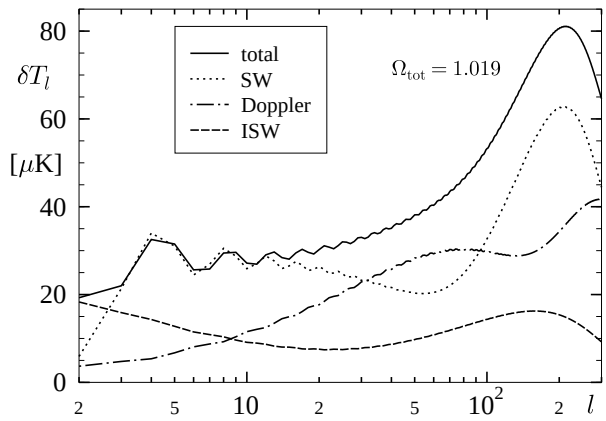


FIG. 8.6 – **Séparation en composantes du spectre de puissance d'un espace de Poincaré.** Le spectre de puissance total est représenté ainsi que les contributions Doppler, SW et ISW (figure issue de Aurich *et al.*, 2005a).

8.2 Fonction de corrélation à deux points

Cette fonction définit la manière dont sont corrélés statistiquement deux points séparés d'une distance angulaire donnée. Mathématiquement, elle est définie par la formule :

$$C(\theta) =< \frac{\delta T}{T}(\hat{n})\frac{\delta T}{T}(\hat{n}') > \tag{8.7}$$

la moyenne se faisant sur toutes les directions $\hat{n}$ et $\hat{n}'$ séparées par l'angle $\theta \overset{\text{déf}}{=} \arccos(\hat{n}.\hat{n}')$.

De plus, si nous décomposons les fluctuations de température en harmoniques sphériques et utilisons la relation d'addition (B.15), la définition du spectre de puissance C_l donnée par l'équation (4.15) dans le cas isotrope permet d'obtenir la relation suivante entre la fonction de corrélation et le spectre de puissance :

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi}\sum_l C_l P_l(\cos\theta) \tag{8.8}$$

Cette fonction ne donne donc pas plus d'informations que le spectre de puissance étudié précédemment, mais elle permet de mieux mettre en relief les différen-

ces entre les différents modèles. Ainsi, les résultats obtenus dans les deux sections précédentes pourront être réinterprétés en termes de fonction de corrélation, en utilisant juste la formule précédente et les spectres de puissance précédents.

La figure (8.7) montre ces fonctions de corrélation à deux points pour les données observationnelles, pour le cas simplement connexe et enfin pour l'espace dodécaédrique. Nous pouvons remarquer que là aussi, il y a coupure des modes pour les petites échelles dans le cas de l'espace de Poincaré, mais ceci ressort moins que dans le spectre de puissance, puisque la corrélation angulaire privilégie l'information aux grandes échelles. En particulier, nous pouvons constater ici aussi que les données WMAP s'inscrivent de façon plus naturelle dans le modèle dodécaédrique plutôt que dans le modèle ΛCDM, qui s'éloigne significativement des données observationnelles.

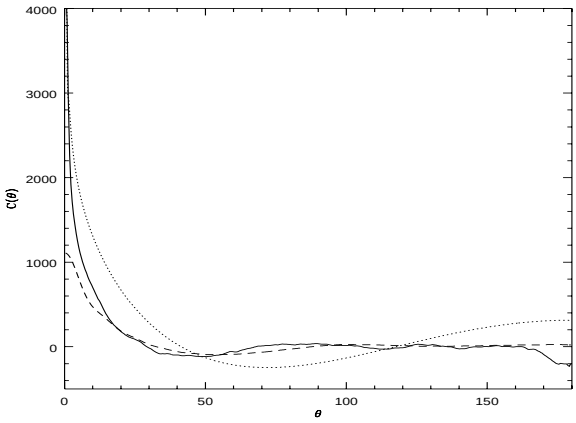


FIG. 8.7 – **Fonction de corrélation à deux points.** Là encore, nous comparons les résultats pour WMAP (courbe en trait plein), le modèle ΛCDM ("concordance" - tracé en pointillés) et l'espace de Poincaré (courbe tiretée).

8.3 Quantités statistiques

Nous avons vu que la taille finie de l'Univers engendrait une non-isotropie, non-isotropie qui n'est toutefois perceptible qu'aux grandes échelles. Cela se traduit par des fluctuations de températures qui ne semblent plus tout à fait gaussiennes pour un observateur de cet espace. Il est donc possible, si nous utilisons un estimateur bien choisi, de mettre en évidence cette non-isotropie.

8.3.1 Corrélations croisées

Les coefficients a_{lm} renferment toute l'information sur les fluctuations de température. Cependant, il ne correspondent qu'à une réalisation de carte, tandis que les modèles théoriques pourront simuler une réalisation, mais pas nécessairement

la même. Il faut donc travailler sur des quantités statistiques, ce qui peut être fait pour un modèle numérique en effectuant un grand nombre de simulations et en moyennant les quantités obtenues. Ceci étant impossible pour les données observationnelles, cela pourra induire des barres d'erreur statistiques particulièrement grandes.

Notamment, dans ce paragraphe, nous allons étudier les corrélations croisées qui sont définies comme étant :

$$C_{l'm'}^{lm} \stackrel{\text{déf}}{=} < a_{lm} a_{l'm'}^{*} > \tag{8.9}$$

qui contiennent donc toute l'information contenue dans les cartes. Cependant, ici, nous ne pourrons pas effectuer de moyenne pour les données observationnelles, même si nous pourrons observer des comportements globaux qui devront approcher ceux des modèles théoriques. Nous pouvons donc essayer d'étudier le comportement des $C_{l'm'}^{lm}$ dans leur ensemble et de voir si les données observationnelles s'en rapprochent. Ainsi, la figure (8.8) représente ces coefficients pour un tore dans un espace plat et la figure (8.9) pour l'espace de Poincaré.

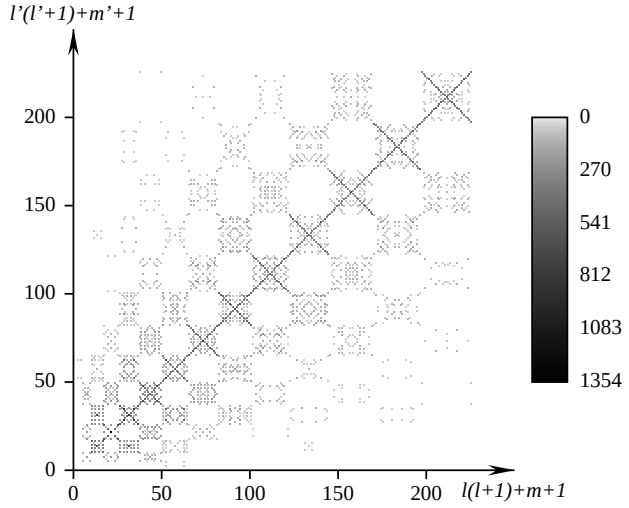


FIG. 8.8 – **Corrélations croisées.** Représentation schématique des coefficients $C_{lm}^{l'm'}$ pour un tore avec $\Omega_{\text{tot}} = 1$. Pour une valeur de l (ou l') donnée, les coefficients $C_{lm}^{l'm'}$, où m varie de $-l$ à l sont compris dans la zone allant de $l^2 + 1$ à $(l+1)^2$.

Dans ces deux cas, nous pouvons constater que le maximum d'intensité est sur la diagonale, c'est-à-dire pour $l = l'$ et $m = m'$. Ceci se comprend bien puisque nous avons pris des modèles d'Univers dont les tailles sont proches de l'horizon et dans ce cas, nous nous rapprochons du modèle simplement connexe pour lequel $C_{lm}^{l'm'} = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}$. Mais, certains coefficients sont non nuls hors diagonale, même s'ils sont d'intensité plus faible et sont placés suivant un motif caractéristique lié à la forme de l'espace.

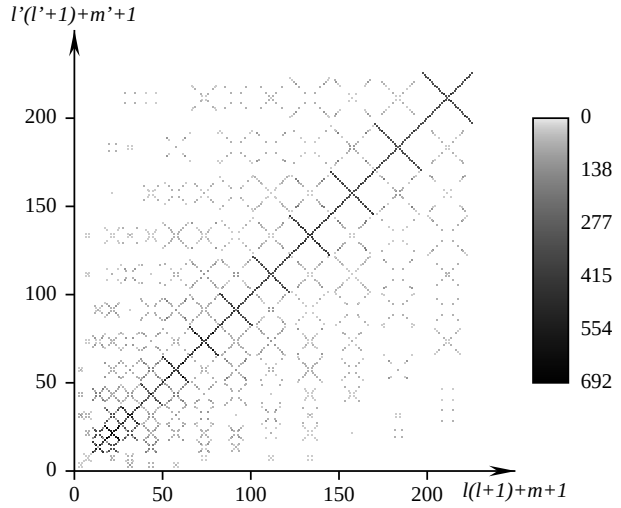


FIG. 8.9 – **Corrélations croisées.** Représentation schématique des coefficients $C_{lm}^{l'm'}$ pour le dodécaèdre de Poincaré avec $\Omega_{\rm tot} = 1.02$.

Toutefois leur étude se révèle particulièrement fastidieuse et difficile, notamment à cause des quatre degrés de liberté (l, m, l' et m'), mais aussi à cause de la perte de statistique indiquée précédemment, ce qui fait que les motifs que l'on peut observer sur les figures (8.8) et (8.9) seront à priori indiscernables. Cependant, des estimateurs pourront se baser sur ces coefficients en les regroupant astucieusement pour faire ressortir les propriétés voulues. Un exemple de tel outil est l'isotropie statistique que nous allons détailler dans le prochain paragraphe.

8.3.2 Isotropie statistique

Le *spectre de puissance bipolaire*[2] κ_l est un outil statistique introduit par Hajian et Souradeep, 2003 et dont le but est de construire un estimateur statistique invariant par rotation et qui décrira le degré d'isotropie de l'Univers. Ce spectre possède la forme suivante :

$$\kappa_l = \int \mathrm{d}\Omega \int \mathrm{d}\Omega' \left(\frac{2l+1}{8\pi^2} \int \mathrm{d}\mathcal{R} \chi_l(\mathcal{R}) C(\mathcal{R}\hat{n}, \mathcal{R}\hat{n}') \right)^2 \tag{8.10}$$

où $C(\hat{n}, \hat{n}')$ est la fonction de corrélation à deux points introduite précédemment entre les deux directions $\hat{n}$ et $\hat{n}'$. $\mathcal{R}$ correspond à une rotation agissant donc sur les points de la sphère $\mathcal{S}^2$. Enfin, χ_l est un poids correspondant à l'intégration sur les rotations de $\mathcal{S}^2$, qui vaut $\chi_l(\mathcal{R}) = \sum_m D^l_{mm'}(\mathcal{R})$, où les $D^l_{mm'}$ sont les fonctions de Wigner du chapitre précédent.

Ainsi, ces κ_l sont un ensemble d'estimateurs correspondant, en fait, à une combinaison quadratique des coefficients $C_{l'm'}^{lm}$ étudiés précédemment. Si ces coefficients

[2] en anglais, *bipolar power spectrum* ou BiPS.

sont tous nuls, l'Univers est alors strictement isotrope, mais dans le cas contraire, plusieurs effets peuvent intervenir notamment la variance cosmique dont l'action est représentée sur la figure (8.10).

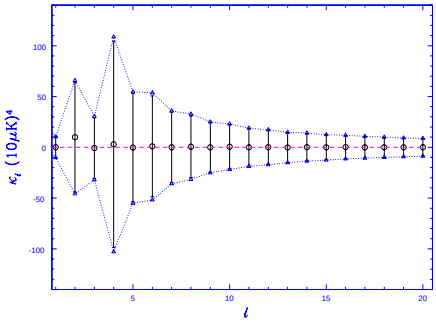


FIG. 8.10 – **Isotropie statistique.** Dans le cas parfaitement isotrope, tous les coefficients doivent être nuls. Cependant, cela est à prendre au sens statistique : la variance cosmique, qui correspond aux courbes délimitant le graphe, donne l'enveloppe des points où nous ne pourrons pas conclure sur une éventuelle anisotropie.

Cependant, les résultats postérieurs de ces deux auteurs concernant la mesure de l'isotropie statistique se révèle plutôt infructueuse : les κ_l restent dans les barres d'erreurs liées aux effets statistiques, comme indiqué dans Souradeep et Hajian, 2005 : ce résultat montre une fois de plus qu'il n'y a pas violation radicale d'isotropie, mais qu'il peut y avoir de légères anisotropies aux plus grandes échelles qu'ils n'ont pas complètement testé, notamment à cause des effets résiduels de la galaxie qui gêne les interprétations.

8.4 Pour aller plus loin

Les principales méthodes utilisées actuellement pour détecter la multi-connexité de l'Univers ont été présentée dans le chapitre 6 et dans cette partie-ci. Cependant, de nouvelles pistes encore peu exploitées sont en cours d'élaboration pour tenter d'observer le détail qui permettra de discriminer le modèle d'Univers.

Parmi ces méthodes, il y a la méthode des vecteurs multipolaires de Maxwell, qui est notamment abordée dans Katz et Weeks, 2004 et qui semblerait montrer des axes privilégiés de l'Univers. Cependant, cette étude reste à développer et à interpréter.

Une autre méthode, qui cette fois, contrairement à la plupart des études mentionnées dans cet exposé, utiliserait non pas les cartes de fluctuations de température du fond diffus cosmologique, mais celle de polarisation. Cette méthode est l'objet de l'article $\mathfrak{B}$ présent en annexe. Son principe consiste à étudier les propriétés géométriques de la polarisation qui crée certains motifs dans les cartes suivant la forme de l'espace étudié. Les données observationnelles en polarisation étant encore peu précises, il ne s'agit donc ici que d'une approche théorique, qui pourra

être détaillée avec l'arrivée des prochains satellites, tel Planck, qui exploreront plus minutieusement les données en polarisation.

Conclusion

Quelle forme pour notre Univers ?

Cet exposé se veut une sensibilisation et une première approche au problème qu'est la recherche d'une forme, c'est-à-dire d'une topologie, pour notre Univers. Comme nous l'avons vu le moyen qui semble le plus précis et le plus prometteur dans cette quête est le fond diffus cosmologique.

Si la théorie du fond diffus cosmologique, notamment le calcul des fluctuations de température au niveau de la surface de dernière diffusion, est bien connue, la topologie de l'Univers avec toutes ses implications est encore un domaine récent, puisque l'intérêt pour cette question n'est réapparu qu'il y a une dizaine d'années.

Toutefois quelques équipes, au niveau mondial, ont développé de nombreux outils et méthodes afin de mettre en évidence cette structure topologique non simplement connexe de l'Univers. Les premières approches ont d'abord permis de mettre des contraintes sur les formes et les tailles possibles des différentes topologies. Notamment, les approches directes telles que recherche d'image fantômes ou cristallographie cosmique permettent de voir que les tailles caractéristiques de l'Univers, s'il est multiplement connexe est au minimum de l'ordre du rayon de la sphère de rayon de diffusion.

Il a donc fallu mettre en place des outils plus précis, tels que la recherche de cercles dans le ciel, mais qui s'interprète facilement et a été mise en place principalement pour les espaces euclidiens. Ainsi, après quelques années d'investigations, les résultats semblent indiquer que l'Univers n'est très probablement pas euclidien.

Au niveau de raffinement supérieur, il faut étudier les modes de Fourier des observables qui, toujours si l'Univers est de topologie non-triviale, devraient être quantifiés. Dans ce cas, nous voyons apparaître des motifs dans le spectre de puissance qui se retrouvent bien dans le spectre observé : chute aux grandes échelles angulaires et oscillations autour d'un spectre assez lisse, de type Λ-CDM, phénomène qui ressort d'autant mieux en terme de corrélation à deux points. Cependant, ceci pourrait s'expliquer par d'autres interprétations physiques, puisque cela se joue sur des différences assez minimes, le plus souvent dans les barres d'erreur.

Il a donc fallu mettre en place des estimateurs plus performants, ou tout au moins, qui contiennent plus d'informations et permettront de dire de façon plus définitive si ces déviations sont bien dues à la topologie ou non. Toutefois, ceci ne donne pas encore de résultats concrets : de nombreux indices semblent pencher en faveur d'un modèle d'Univers *dodécaédrique de Poincaré* de courbure de l'ordre de $\Omega_{\text{tot}} \simeq 1.02$, le spectre de puissance, notamment aux niveau des grandes échelles, semble être bien en accord avec les données observées, mais les observations restent encore peu précises pour séparer les effets statistiques des déviations qu'engendre la topologie par rapport aux modèles standards. Mais peut-être que les prochaines générations de satellites dédiés à l'observation du fond diffus cosmologique permettront de conclure si la topologie est observable ou non, et si oui, de préciser la forme de l'Univers.

Annexes

Annexe A:

Tenseur de Riemann et connection affine

CETTE annexe a pour but d'introduire quelques outils de base de la relativité générale, outils qui serviront principalement dans la première partie de ce mémoire, principalement dans les chapitres 1 et 2. En particulier, nous définirons les symboles de connection affine, introduits pour généraliser les dérivées classiques, puis le tenseur de Riemann qui décrit la géométrie de l'Univers. Dans ce tenseur est en fait inclus toute l'information sur la courbure en chaque point de l'Univers qui est vu comme une variété de classe au moins $\mathcal{C}^2$, puisque le tenseur de Riemann est construit à partir de la métrique, de ses dérivées premières et secondes.

En fin de cette annexe seront détaillés quelques calculs concrets de ces différentes quantités dans le cas d'un Univers de Friedmann-Lemaître, puis d'un Univers de Friedmann-Lemaître auquel on rajoute une perturbation, qui sera ici considérée en jauge longitudinale.

A.1 Connection affine

En relativité, les différentes équations que nous pourrons écrire devront être covariantes, c'est-à-dire invariantes sous un quelconque changement de coordonnées. Or, la dérivée habituelle n'est pas covariante ! Il faut donc introduire un opérateur qui devra se comporter comme une dérivée et qui aura les propriétés d'une dérivée habituelle en limite de champs faible. Cet opérateur s'appelle la dérivée covariante et fait intervenir les coefficients de *connection affine*[1], qui vont donc souvent intervenir dans les équations.

Ce symbole de connection[2] est défini par[3] :

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \tag{A.1}$$

[1] parfois encore appelée connection de Christoffel, de Levi-Civita ou de Riemann.
[2] Attention : la connection affine, malgré la notation indicée, n'est pas un tenseur !
[3] *cf.* Weinberg, 1972.

où par définition les $g^{\mu\nu}$ sont les coefficients de la matrice inverse de la métrique $g_{\mu\nu}$, ce qui signifie que les composantes de ces 2 matrices vérifient, pour tous indices μ et ν :

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{A.2}$$

où $\delta^{\mu}_{\mu'}$ est le symbole de Kronecker, donc égal à 1 si $\mu = \mu'$ et à 0 sinon.

Nous pouvons maintenant exprimer les dérivées covariantes, que nous noterons indifféremment par $\nabla_\mu T$ où $T_{;\mu}$ pour la dérivée covariante d'un tenseur T par rapport à la coordonnée x^μ, en fonction des dérivées partielles et des symboles de connection affine :

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \quad &+ \quad T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \Gamma^{\mu_i}_{\lambda\sigma} \\ &- \quad T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_n} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_i} \end{aligned} \tag{A.3}$$

En pratique, les tenseurs ne dépassent que rarement l'ordre 2, et ceux dont nous aurons le plus besoin de calculer les dérivées seront les scalaires, dont la dérivée covariante est tout simplement la dérivée partielle :

$$\nabla_\lambda \rho = \partial_\lambda \rho \tag{A.4}$$

et les quadri-vecteurs dont la dérivée covariante est :

$$\nabla_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + V^\sigma \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} \tag{A.5}$$

Une application immédiate de ce formalisme est *l'équation des géodésiques*. En effet, elle correspond à la généralisation relativiste du principe d'inertie, qui exprime que la dérivée temporelle de la vitesse est nulle dans un référentiel inertiel. En relativité, ce sera la dérivée covariante du quadri-vecteur vitesse par rapport au temps propre qui sera nulle dans tout référentiel. En développant cette équation, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{A.6}$$

où λ est un paramètre affine de genre temps décrivant la géodésique.

La dérivée covariante vérifie également le théorème de Ricci, qui est très souvent utilisé en relativité générale, qui affirme que la dérivée covariante du tenseur métrique s'annule identiquement :

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{A.7}$$

ce qui se comprend bien puisque la dérivée covariante est par définition covariante et est faite pour s'adapter à la forme de l'espace où elle est définie : en particulier, nous pourrons toujours choisir un référentiel où la métrique est constante et où sa dérivée sera nulle.

A.2 Tenseur de Riemann

Le tenseur de Riemann est le seul tenseur qui peut être construit à partir de la métrique et de ses dérivées premières et secondes. Il apparaît donc naturellement dans les équations d'Einstein. Mathématiquement, il s'obtient à partir des symboles de connection affine par la formule :

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = \partial_\rho \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} \tag{A.8}$$

On peut alors montrer que ce tenseur correspond au commutateur de 2 dérivées covariantes, soit pour tout quadri-vecteur V_μ :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\rho \overset{\text{déf}}{=} V_{\rho;\mu;\nu} - V_{\rho;\nu;\mu} = R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}V_\lambda \tag{A.9}$$

En prenant la dérivée covariante de cette relation et après permutations circulaires de l'identité obtenue, nous obtenons un système d'équations très souvent utilisées en relativité générale, appelées *identités de Bianchi*, qui s'écrivent donc :

$$R_{\lambda\mu\{\nu\rho;\sigma\}} \overset{\text{déf}}{=} R_{\lambda\mu\nu\rho;\sigma} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\nu} + R_{\lambda\mu\sigma\nu;\rho} = 0 \tag{A.10}$$

où $R_{\lambda\mu\nu\rho} \overset{\text{déf}}{=} R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}$.

A partir du tenseur de Riemann, nous pouvons construire deux autres tenseurs par contractions successives. Le premier est le *tenseur de Ricci*, qui vaut :

$$R_{\mu\nu} \overset{\text{déf}}{=} R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{A.11}$$

et le second, appelé scalaire de Ricci ou *scalaire de courbure* :

$$R \overset{\text{déf}}{=} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{A.12}$$

A partir de ces deux derniers tenseurs, on peut définir le tenseur d'Einstein qui est de rang 2 et symétrique. Son expression est donnée par :

$$G_{\mu\nu} \overset{\text{déf}}{=} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda \tag{A.13}$$

Les identités de Bianchi montrent alors que la divergence de ce tenseur est nulle et puisque les équations d'Einstein indiquent que le tenseur d'Einstein est égal à un facteur multiplicatif près au tenseur énergie-impulsion, on en déduit l'analogue relativiste de la conservation de l'énergie :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{A.14}$$

A.3 Application au modèle de Friedmann-Lemaître

Nous allons maintenant appliquer ces définitions au calcul des différentes quantités qui nous seront utiles pour le calcul des équations d'Einstein, c'est-à-dire tout d'abord les symboles de connection affine puis le tenseur de Ricci et enfin le scalaire de courbure.

Considérons d'abord un Univers non perturbé de Friedmann-Lemaître. Dans ce cas, nous avons vu en section 1.2 que la métrique prend la forme diagonale suivante :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right) \tag{A.15}$$

Le tenseur métrique ne contient donc que quatre composantes non nulles qui s'écrivent :

$$g_{00} = c^2 \equiv 1 \qquad g_{11} = -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} \qquad g_{22} = -a^2(t)r^2 \qquad g_{33} = -a^2(t)r^2\sin^2\theta \tag{A.16}$$

A partir de ces coefficients, la formule (A.1) nous donne les coefficients de connection affine, dont les seuls non nuls sont les suivants :

$$\begin{gathered}
\Gamma^0_{11} = \tfrac{a\dot{a}}{1-kr^2} \qquad \Gamma^0_{22} = a\dot{a}r^2 \qquad \Gamma^0_{33} = a\dot{a}r^2\sin^2\theta \\
\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \tfrac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma^1_{11} = \tfrac{kr}{1-kr^2} \qquad \Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2) \qquad \Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta \\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \tfrac{1}{r} \\
\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \tfrac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{gathered} \tag{A.17}$$

L'application de la formule (A.11) nous permet alors d'obtenir les différentes composantes du tenseur de Ricci. En particulier, ce calcul montre que ce tenseur est diagonal et que les composantes diagonales valent respectivement :

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{A.18}$$

$$R_{11} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} \tag{A.19}$$

$$R_{22} = -r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \tag{A.20}$$

$$R_{33} = -r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\sin^2\theta \tag{A.21}$$

Finalement, la formule (A.12) nous donne le scalaire de courbure :

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \tag{A.22}$$

A.4 Application à la jauge longitudinale

Nous allons suivre la même démarche que précédemment, mais pour un modèle de Friedmann-Lemaître perturbé en jauge longitudinale. Dans ce cas, la métrique est donnée par l'équation (2.36) :

$$\mathrm{d}s^2 = (1+2\phi)\mathrm{d}t^2 - a^2(\eta)\left((1-2\psi)\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right) \tag{A.23}$$

La métrique est encore diagonale, ce qui va simplifier les calculs. Les coefficients diagonaux de cette métrique sont explicitement :

$$g_{00} = 1+2\phi \tag{A.24}$$

$$g_{11} = -(1-2\psi)\frac{a^2(t)}{1-kr^2} \tag{A.25}$$

$$g_{22} = -(1-2\psi)\ a^2(t)\ r^2 \tag{A.26}$$

$$g_{33} = -(1-2\psi)\ a^2(t)\ r^2\sin^2\theta \tag{A.27}$$

où les perturbations ϕ et ψ sont toutes deux des fonctions des quatre coordonnées spatio-temporelles. Les quantités calculées dans la suite ne le seront qu'au premier ordre en ϕ et ψ puisque ces 2 perturbations sont par définition supposées négligeables aux époques qui nous intéressent.

On en déduit les symboles de connection affine :

– composantes temporelles $\lambda \equiv 0$:

$$\Gamma^0_{00} = \dot{\phi} \tag{A.28}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \tag{A.29}$$

$$\Gamma^0_{ij} = a^2\gamma_{ij}\left(H(1-2\phi-2\psi)-\dot{\psi}\right) \tag{A.30}$$

– composantes spatiales $\lambda \equiv i$:

$$\Gamma^i_{00} = a^{-2}\gamma^{is}\frac{\partial\phi}{\partial x^s} \tag{A.31}$$

$$\Gamma^i_{0j} = (H-\frac{\partial\psi}{\partial x^i})\delta^i_j \tag{A.32}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^s}\gamma^{is}\gamma_{jk} - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\delta^i_j - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\delta^i_k\right) \tag{A.33}$$

où $H \overset{\text{déf}}{=} \dot{a}/a = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ est la constante de Hubble et $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ désigne les coefficients de connection affine non perturbés, calculés en (A.17).

Les contributions perturbées correspondantes du tenseur de Ricci sont les suivantes :

$$\delta R_{00} = \Delta\phi + 3\left(H(\dot{\phi}+2\dot{\psi})-\ddot{\psi}\right) \tag{A.34}$$

$$\delta R_{0i} = -2\left(\dot{\psi}_{,i} + H\phi_{,i}\right) \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{ij} &= \phi_{;i;j} - \psi_{;i;j} \\ &+\gamma_{ij}\left(2(\phi+\psi)(2\dot{a}^2+a\ddot{a}) + 2a\dot{a}(\dot{\phi}+3\dot{\psi}) + a^2\ddot{\psi} - a^2\Delta\psi\right)\end{aligned} \tag{A.36}$$

où les virgules sont des dérivées partielles et les points-virgules des dérivées covariantes. L'opérateur Δ qui apparaît dans le premier terme du tenseur de Ricci et va se retrouver dans les équations d'Einstein est le laplacien covariant, qui est défini par la relation :

$$\Delta\phi \overset{\text{déf}}{=} g^{ij}\phi_{;i;j} = -a^{-2}\gamma^{ij}\left(\phi_{,i,j} + \phi_{,\mu}\Gamma^{\mu}_{ij}\right) \tag{A.37}$$

Il ne reste maintenant plus qu'à calculer le scalaire de courbure par contraction du tenseur de Ricci, ce qui donne :

$$\delta R = 2\Delta\phi + 4\Delta\psi - 12(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a})\phi + \frac{12k}{a^2}\psi - 3H(\dot{\phi} + 4\dot{\psi}) - 6\ddot{\psi} \tag{A.38}$$

A partir de ces différents tenseurs et du tenseur énergie-impulsion perturbé (voir (2.40)), nous pouvons déduire les équations d'Einstein (2.48), (2.49) et (2.51).

Annexe B:

Fonctions spéciales

TOUT au long de cet exposé, de nombreuses fonctions et de nombreux symboles mathématiques sont introduits. Ceux-ci permettent souvent de simplifier et les notations et les raisonnements. Mais pour ne pas surcharger le corps du document, certaines de leurs propriétés seront rappelées ici et utilisées directement dans les parties précédentes.

En particulier, nous nous arrêterons plus particulièrement sur les harmoniques sphériques, celles-ci étant un outil essentiel pour l'analyse de données sur une sphère. En effet, elles ont comme propriété de former une base de la sphère bidimensionnelle et sont solutions de l'équation de Helmholtz, qui fournit une manière simple de convertir un laplacien en multiplication. En particulier, les harmoniques sphériques vont nous être particulièrement utiles pour l'analyse des cartes du fond diffus cosmologique, puisque celles-ci sont définies sur la sphère de dernière diffusion et les équations d'évolution des fluctuations de température contiennent un laplacien.

Cette annexe va donc nous permettre de passer en revue quelques définitions et quelques propriétés de ces harmoniques sphériques ainsi que des polynômes de Legendre qui constituent la partie azimuthale de ces harmoniques, puis de quelques autres fonctions ou symboles utilisés dans ce mémoire.

B.1 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre ont initialement été introduits pour résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante dont ils sont solutions pour tout entier l positif ou nul :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \tag{B.1}$$

En particulier, on peut montrer que les polynômes suivants conviennent :

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(1-x^2)^l \tag{B.2}$$

Ces polynômes, qui sont de degré l, sont appelées *polynômes de Legendre*. Ainsi construits, ils forment une famille orthonormée (le facteur $\frac{1}{2^l l!}$ est justement le facteur de normalisation) pour le produit scalaire entre polynômes défini par :

$$(P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt \tag{B.3}$$

A partir de ces polynômes, nous pouvons construire les *polynômes de Legendre associés* qui vont généraliser les polynômes de Legendre ci-dessus de façon à pouvoir être solution d'une équation différentielle un peu plus générale que (B.1) et qui correspondra à la partie azimuthale du laplacien en sphérique. Les polynômes de Legendre associés sont définis par :

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x) \tag{B.4}$$

où l est toujours un entier positif ou nul et m est compris entre $-l$ et l.

Les polynômes de Legendre associés sont donc solutions de l'équation différentielle suivante qui généralise l'équation (B.1) lorsque m est non nul :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)y = 0 \tag{B.5}$$

B.2 Harmoniques sphériques

B.2.1 Définition

Nous pouvons maintenant construire les harmoniques sphériques à partir de ces polynômes de manière simple à partir de leur définition qui est qu'elles sont harmoniques sur la sphère, c'est-à-dire qu'elles correspondent à la partie angulaire de la solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Donc si nous notons f cette solution, celle-ci vérifie :

$$\Delta f(r, \theta, \phi) \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\text{ang}} f = 0 \tag{B.6}$$

où Δ_{ang} est le laplacien angulaire, qui s'écrit :

$$\Delta_{\text{ang}} \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{B.7}$$

Si nous supposons que la fonction f se décompose en une partie radiale et une partie angulaire sous la forme $f(r, \theta, \phi) = g(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$, en séparant dans l'équation précédente les parties angulaire et radiale, ces deux composantes sont égales entre elles et valent une constante que nous pouvons noter $-l(l+1)$, où l désigne un entier positif ou nul[1], soit :

$$\Delta_{\text{ang}} Y_{lm}(\theta, \phi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{B.8}$$

[1]Cette équation n'aura des solutions que si la constante possède cette forme puisque ce sont les valeurs propres de l'opérateur Δ_{ang}.

Cette équation est appelée *équation de Helmholtz*. Elle correspond en fait à une équation aux valeurs propres pour l'opérateur laplacien angulaire.

Les fonctions Y_{lm} qui sont la partie angulaire de f sont donc les *harmoniques sphériques* voulues. Pour résoudre cette équation, nous allons réappliquer le même mécanisme qu'au-dessus, mais cette fois avec les deux variables angulaires θ et ϕ. En séparant les harmoniques sphériques sous la forme $Y_{lm}(\theta,\phi) \equiv f(\theta)g(\phi)$, l'équation ci-dessus donne deux composantes, l'une dépendant uniquement de θ, l'autre uniquement de ϕ. Nous pouvons donc dire que ces deux composantes sont égales entre elles et valent une constante que nous pouvons noter m, soit :

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}\right) + l(l+1)\sin^2\theta f(\theta) = mf(\theta) \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}g(\phi) = mg(\phi) \tag{B.10}$$

La deuxième équation se résout simplement puisque correspond à celle d'un oscillateur harmonique et donne tout simplement une exponentielle imaginaire :

$$g(\phi) = e^{im\phi} \tag{B.11}$$

et nous pouvons réécrire la première en effectuant le changement de variable $x \overset{\text{déf}}{=} \cos\theta$, ce qui donne :

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \left(l(l+1) - \frac{m}{1-x^2}\right)f(x) = 0 \tag{B.12}$$

Nous reconnaissons, comme attendu, l'équation différentielle décrivant les polynômes de Legendre associés. En regroupant ces morceaux, nous obtenons l'expression suivante des harmoniques sphériques :

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\ P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{B.13}$$

le coefficient multiplicatif étant là pour assurer la normalisation des harmoniques sphériques sur la sphère, ce qui s'écrit :

$$\iint Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{B.14}$$

B.2.2 Propriétés

Plusieurs relations concernant ces harmoniques sphériques seront utilisées dans le texte outre leur définition et leur relation de normalisation. En particulier, les harmoniques sphériques obéissent à la relation d'addition suivante :

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi') = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\hat{\theta}) \tag{B.15}$$

où $\hat{\theta}$ est l'angle entre les 2 vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ respectivement dirigés par (θ, ϕ) et (θ', ϕ'). Nous avons donc la relation :

$$\cos\hat{\theta} = \frac{\mathbf{x}.\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}'\|} \tag{B.16}$$

Les polynômes de Legendre vérifiant également une telle relation d'addition, mais cette fois par rapport à l'indice l, cela se reporte sur les harmoniques sphériques de la façon suivante :

$$\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi') = \delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi') \tag{B.17}$$

où les symboles δ sont les distributions de Dirac, mais qui sont à prendre modulo un certain multiple de π, dépendant des domaines de définitions des angles θ et ϕ. Ainsi, $\delta(\theta-\theta') = 1$ équivaut à $\theta = \theta' \pmod{\pi}$ et pour ϕ ce sera modulo 2π.

Lorsque nous utiliserons différentes observables dans l'espace de Fourier, nous utiliserons souvent ce développement de l'exponentielle sur les harmoniques sphériques :

$$e^{i\mathbf{kr}} = 4\pi\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr)Y^*_{lm}(\theta_{\mathbf{k}},\phi_{\mathbf{k}})Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{B.18}$$

où nous avons décomposé les deux vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{k}$ en coordonnées sphériques, soit : $\mathbf{r} \equiv (r,\theta,\phi)$ et $\mathbf{k} \equiv (k,\theta_{\mathbf{k}},\phi_{\mathbf{k}})$ et où j_l désigne la fonction de Bessel sphérique de première espèce que nous allons décrire dans la partie qui suit.

B.3 Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel existent sous plusieurs formes. Elles sont en fait définies comme étant les parties radiales des équations de Laplace dans un espace de courbure constante dans différents systèmes de coordonnées : les fonctions de Bessel proprement dites correspondent au système cylindrique et les fonctions de Bessel sphériques, qui sont celles que nous emploierons le plus souvent dans cette exposé, correspondent aux coordonnées sphériques.

Les fonctions de Bessel (cylindriques) d'ordre l, où l est un nombre réel positif, sont donc solutions de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - l^2)y = 0 \tag{B.19}$$

Cette équation différentielle est du deuxième ordre. Elle possède donc deux solutions indépendantes. Si nous cherchons une solution développable en série entière, nous obtenons la fonction, appelée *fonction de Bessel de première espèce* de la forme :

$$J_l(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^l \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i} i!\Gamma(i+l+1)} \tag{B.20}$$

Si l n'est pas entier, J_l et J_{-l} sont deux solutions indépendantes de l'équation (B.19) et forment donc une base de l'espace de ces solutions.

Dans le cas, où l n'est pas entier, ce n'est plus le cas. Il faut alors obtenir une solution indépendante. Un exemple de telle solution est la *fonction de Bessel de deuxième espèce* ou *fonction de Neumann* (parfois encore appelée, mais plus rarement, fonction de Weber). Celle-ci est de la forme :

$$N_l(x) = \frac{\cos(\pi l) J_l(x) - J_{-l}(x)}{\sin(\pi l)} \tag{B.21}$$

Dans le cas sphérique, l'équation différentielle à résoudre est maintenant :

$$x^2 y'' + 2xy + \left(x^2 - l(l+1)\right) y = 0 \tag{B.22}$$

En fait, cette équation se résout simplement puisque si l'on pose $y = x^{-1/2} z$, on retrouve une équation de Bessel cylindrique :

$$x^2 z'' + x z' + \left(x^2 - (l+1/2)^2\right) z = 0 \tag{B.23}$$

On en déduit que les solutions de l'équation de Bessel sphérique se déclinent encore en deux espèces qui seront respectivement la *fonction de Bessel sphérique* (de première espèce) j_l et la *fonction de Bessel sphérique de deuxième espèce* n_l qui s'écrivent :

$$j_l(x) = \frac{\pi}{2x} J_{l+1/2}(x) \tag{B.24}$$

$$n_l(x) = \frac{\pi}{2x} N_{l+1/2}(x) \tag{B.25}$$

Une représentation graphique des premières fonctions de Bessel sphériques, qui seront celles principalement utilisées ici, est donnée en figure (B.1).

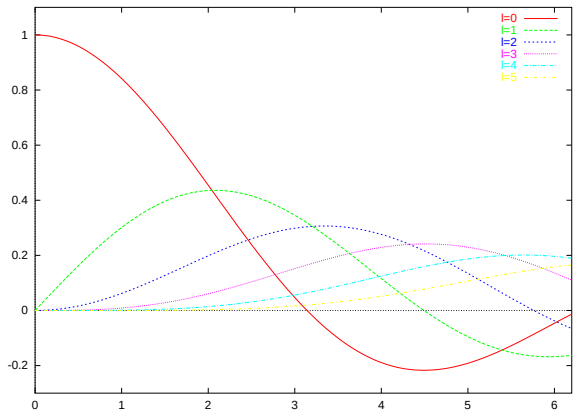


FIG. B.1 – **Fonctions de Bessel sphériques.** Ce graphe représente les six premières (de $l = 0$ à 5) fonctions de Bessel sphériques.

B.4 Polynômes de Jacobi

Les *polynômes de Jacobi* forment une famille orthogonale de polynômes pour le produit scalaire :

$$(P,Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t)^l(1+t)^m \mathrm{d}t \tag{B.26}$$

l et m étant deux réels supérieurs ou égaux à -1, afin d'assurer la convergence de l'intégrale.

On peut alors montrer que ces polynômes s'écrivent, pour chaque couple d'indice (l,m), sous la forme :

$$J_n^{(l,m)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^l(1+x)^m} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \Big((1-x)^l(1+x)^m(1-x^2)^n\Big) \tag{B.27}$$

En comparant avec la formule (B.2), nous voyons que les polynômes de Legendre sont juste un cas particulier des polynômes de Jacobi pour le couple d'entiers $(l=0, m=0)$, ce que l'on aurait pu voir aussi sur les produits scalaires.

Les polynômes de Jacobi sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' + \big((m-l)-(l+m+2)x\big)y' + n(n+l+m+1)y = 0 \tag{B.28}$$

B.5 Polynômes de Gegenbauer

Les *polynômes de Gegenbauer* C_m^λ forment une famille supplémentaire de polynômes orthogonaux. Ils correspondent au poids $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$, où λ est un réel supérieur ou égal à -1/2, ce qui représente le produit scalaire suivant :

$$(P,Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)^{\lambda-1/2} \mathrm{d}t \tag{B.29}$$

En particulier, ces polynômes seront proportionnels (et non égaux à cause de la normalisation qui n'est pas la même) aux polynômes de Jacobi pour $l = m = \lambda - 1/2$. Leur forme explicite est la suivante :

$$C_m^\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{i=0}^{[m/2]} (-1)^i \frac{\Gamma(\lambda+m-i)}{i!(m-2i)!}(2x)^{m-2i} \tag{B.30}$$

où $[m/2]$ désigne la partie entière de $m/2$.

Ils sont donc reliés aux polynômes de Jacobi, d'indices cités précédemment, par la relation suivante :

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+n+1/2)} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(2\lambda+n)} J_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x) \tag{B.31}$$

Nous pouvons également écrire l'équation différentielle dont sont issus ces polynômes, puisque c'est ainsi que nous pouvons les identifier pour les faire intervenir en tant que fonctions radiales des modes propres des espaces sphériques. Cette équation est la suivante :

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)y' + m(m+2\lambda)y = 0 \tag{B.32}$$

Pour conclure sur ces polynômes, nous pouvons également citer une relation entre ceux-ci et les polynômes de Legendre associés qui sera utilisée dans le texte pour l'équation (7.11) :

$$C_m^\lambda(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^\lambda m!}\frac{\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)}(1-x^2)^{-\frac{2\lambda-1}{4}} P^{1/2-\lambda}_{\lambda+m-1/2}(x) \tag{B.33}$$

B.6 Coefficients de Clebsch-Gordan

Les *coefficients de Clebsch-Gordan* ont initialement été introduits en mécanique quantique pour décrire la probabilité qu'un système de deux particules, de moments cinétiques j_1 et j_2 et dont les composantes suivant l'axe z sont respectivement m_1 et m_2, se projettent sur un spin équivalent j. Ce coefficient s'écrit donc :

$$C^{jm}_{j_1 j_2 m_1 m_2} = \langle j_1 j_2\ m_1 m_2 | j_1 j_2\ jm\rangle \equiv \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | jm\rangle \tag{B.34}$$

Ces écritures sont toutes trois employées dans la littérature. Ce sera principalement la dernière qui sera utilisé dans ce mémoire. De plus, ces coefficients correspondant à des probabilités d'états physiques, ce seront des nombres réels compris entre 0 et 1.

D'autre part, les $|jm\rangle$ forment une base et nous pouvons utiliser la relation de fermeture (7.21) pour obtenir la relation d'addition suivante :

$$\sum_{j,m} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | jm\rangle \langle j_1 m_3; j_2 m_4 | jm\rangle = \delta_{m_1 m_3}\delta_{m_2 m_4} \tag{B.35}$$

où nous avons utilisé le fait que les coefficients de Clebsch-Gordan sont réels, soit $\langle j_1 m_3; j_2 m_4 | jm\rangle = \langle jm | j_1 m_3; j_2 m_4\rangle$ et que les kets $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$ forment une base orthonormée.

En exploitant leur définition, nous pouvons montrer que ces coefficients ne sont non nuls que s'ils satisfont les relations suivantes :

$$\begin{cases} m = m_1 + m_2 \\ |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \end{cases} \tag{B.36}$$

En considérant l'application d'opérateurs J_+ et J_-, comme cela est fait par exemple dans Cohen-Tannoudji *et al.*, 1977, nous pouvons obtenir plusieurs relations de récurrence sur les coefficients de Clebsch-Gordan. En particulier, nous

obtiendrons la relation suivante :

$$\begin{aligned}\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j m\rangle &= \sqrt{\frac{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}{j(j+1)-m(m+1)}}\langle j_1 m_1 - 1; j_2 m_2 | j m - 1\rangle \\ &- \sqrt{\frac{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}{j(j+1)-m(m+1)}}\langle j_1 m_1; j_2 m_2 - 1 | j m - 1\rangle \end{aligned} \tag{B.37}$$

En utilisant les conditions aux limites et la relation de récurrence ci-dessus, nous pouvons calculer de proche en proche les coefficients de Clebsch-Gordan. En particulier, on peut montrer alors que l'expression explicite de ces coefficients est[2] :

$$\begin{aligned}\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j m\rangle &= \delta_{m,m_1+m_2}\sqrt{\frac{(j_1+j_2-j)!(j+j_1-j_2)!(j_2+j-j_1)!(2j+1)}{j_1+j_2+j-1}} \times \\ &\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m_1)!(j-m_1)!(j+m_2)!(j-m_2)!} \times \\ &\sum_i \frac{(-1)^i}{(j_1-m_1-i)!(j_2+m_2-i)!(j-j_2+m_1+i)!(j-j_1-m_2+i)!(j_1+j_2-j-i)!i!}\end{aligned} \tag{B.38}$$

où la somme porte sur tous les entiers i positifs ou nul tels que tous les termes entre parenthèses du dénominateur soient positifs ou nuls.

Ces coefficients obéissent également aux deux relations de symétrie suivantes qui peuvent être vérifiées immédiatement à l'aide de l'expression précédente :

$$\langle j_2, -m_2; j_1, -m_1 | j, -m\rangle = \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m\rangle \tag{B.39}$$

$$\langle j_2, m_2; j_1, m_1 | j, m\rangle = (-1)^{j_1+j_2-j}\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m\rangle \tag{B.40}$$

[2] *cf.* Landau et Lifshitz, 1977.

Annexe C:

Quaternions

Les quaternions sont des objets mathématiques inventés initialement par Hamilton pour décrire les rotations dans l'espace. Ces objets peuvent donc souvent être remplacés par d'autres objets mathématiques pour les calculs, tels les matrices des groupes orthogonaux, mais permettent souvent de trouver des démonstrations plus élégantes de démonstrations déjà établies autrement. Nous verrons ainsi quelques définitions de base, puis leur utilisation pratique pour démontrer deux isomorphismes, utiles pour les calculs du texte.

C.1 Définition

Il existe de nombreuses manières d'introduire ces quaternions. La plus simple est de les considérer comme éléments d'une algèbre sur $\mathbb{R}$ de la même manière que $\mathbb{C}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.

L'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ est de dimension 4, en tant qu'espace-vectoriel, sur $\mathbb{R}$. Il existe donc 4 éléments de $\mathbb{H}$ indépendants que l'on peut noter 1, σ_1, σ_2, σ_3 et qui vérifieront les relations suivantes :

$$1\sigma_i = \sigma_i 1 \qquad \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \quad \text{si } i \neq j \qquad \sigma_i^2 = -1 \tag{C.1}$$

Puisque $\mathbb{H}$ est de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, et donc de dimension 2 sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ peut être considérée comme sous-espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$, ce qui va nous donner un exemple concret de quaternions. Dans ce cas, les 4 éléments qui formeront la base seront les matrices de Pauli (à un facteur près), données par :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; \sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

qui sont bien des matrices complexes 2×2 vérifiant les identités (C.1).

Tout élément de $\mathbb{H}$ s'écrit donc comme une combinaison linéaire des 4 éléments de base : $A = a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$, soit en notation matricielle :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

Le conjugé quaternionique de A est défini par : $A^* \overset{\text{déf}}{=} a_0 - a_1\sigma_1 - a_2\sigma_2 - a_3\sigma_3$ et sa norme par : $\|A\|^2 \overset{\text{déf}}{=} AA^* = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Avec la forme matricielle ci-dessus, on obtient donc : $\|A\|^2 = \det(A)$. En comparant la matrice ci-dessus et une matrice de SU(2), nous voyons que SU(2) est donc exactement l'ensemble des quaternions unitaires (i.e.de norme 1).

Nous pouvons également décomposer $\mathbb{H}$ en 2 sous-espaces vectoriels : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{E}$ qui est engendré par σ_1, σ_2 et σ_3. Ainsi, tout quaternion peut être vu comme somme d'un réel et d'un élément de $\mathbb{E}$: $A = a_1 + a_E$, avec $a_E = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \in \mathbb{E}$.

C.2 Isomorphisme SO(3)∼SU(2)/$\mathbb{Z}_2$

Soit U un élément de SU(2) donc inclus dans $\mathbb{H}$. Soit X un quaternion pur, que nous pourrons donc considérer comme un élément de $\mathbb{R}^3$, puisque l'ensemble des quaternions purs forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Alors, d'après la propriété sur la norme ci-dessus, nous obtenons :

$$\|UXU^*\|^2 = \det(UXU^*) = \det(X) = \|X\|^2 \tag{C.4}$$

où pour la deuxième égalité, nous avons utilisé que $U \in SU(2)$ et est donc de déterminant 1. Puisque l'application $p_U : X \mapsto UXU^*$ est linéaire et conserve les normes, cette application est orthogonale. Comme X peut-être identifié à un vecteur, nous obtenons alors que $p_U \in O(3)$.

D'autre part, SU(2) est connexe (puisque homéomorphe à la sphère $\mathcal{S}^3$), et comme $\det(p_U)$ est à valeurs dans l'ensemble discret, $\{-1, 1\}$, il ne peut prendre que l'une de ces valeurs. Il suffit donc de considérer une matrice U de SU(2) particulière, par exemple 1, auquel cas, nous obtenons : $\det(p_1) = 1$. Par conséquent, pour toute matrice U de SU(2), p_U est dans SO(3).

L'application $p : U \mapsto p_U$ est donc un morphisme de groupe surjectif, et pour construire un isomorphisme, il suffit de quotienter par le noyau de l'application p qui est $\{-1, 1\} = \mathbb{Z}_2$, d'où :

$$SO(3) \sim SU(2)/\mathbb{Z}_2 \tag{C.5}$$

C.3 Isomorphisme SO(4)∼SO(3)×SU(2)

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que la multiplication à gauche ou à droite par un quaternion peut s'écrire sous forme matricielle. En effet, notons $A = a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$ et $B = b_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3$ deux quaternions. La multiplication de ces deux éléments de $\mathbb{H}$ se décompose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} AB \quad = \quad & a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ & + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_3b_2 + a_2b_3)\ \sigma_1 \\ & + (a_2b_0 + a_3b_1 + a_0b_2 - a_1b_3)\ \sigma_2 \\ & + (a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)\ \sigma_3 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Nous pouvons réécrire la formule ci-dessus sous forme matricielle dans la base $(1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de $\mathbb{H}$ considéré comme espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$:

$$AB = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} G_A B \tag{C.7}$$

De plus, la matrice G_A vérifie la propriété ${}^tG_A G_A = \|A\| I_4$, où $\|A\|$ est la norme de A et I_4 est la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Donc si A est unitaire, alors G_A est un élément de SO(4) et est donc une *matrice de rotation à gauche*. De même, nous aurions pu écrire le produit des deux quaternions sous la forme :

$$AB = \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} D_B A \tag{C.8}$$

où D_B correspond à une matrice de rotation à droite.

Soit maintenant une matrice de SO(3). Notons σ l'application qui va lui associer une matrice de SO(4) :

$$\begin{array}{rcl} \sigma : SO(3) & \longrightarrow & SO(4) \\ S & \longmapsto & \sigma_S \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \end{pmatrix} \end{array} \tag{C.9}$$

Nous pouvons maintenant construire l'isomorphisme entre les deux espaces cités qui sont SO(4) et SO(3)×SU(2) :

$$\begin{array}{rcl} SO(3) \times SU(2) & \longrightarrow & SO(4) \\ (S, q) & \longmapsto & \sigma_S D_q \end{array} \tag{C.10}$$

où q est un élément de SU(2), donc équivalent à un quaternion unitaire, d'où le fait qu'on lui ait associé une matrice à droite D_q, qui est donc une matrice de SO(4), puisque q est unitaire.

L'application linéaire ci-dessus est bien bijective. En effet, D_q étant une matrice de SO(4) et S une matrice de SO(3), ${}^tSS = I_3$, soit ${}^t\sigma_S \sigma_S = I_4$ en effectuant le produit matriciel par blocs, et $\det(\sigma_S) = \det(S) = 1$, donc σ_S est également un élément de SO(4). Comme SO(4) est un groupe, leur produit reste dans ce groupe. L'application (C.10) est donc bien à valeurs dans SO(4). De plus, l'injectivité se montre facilement, vu que les éléments du noyau de cette application vérifient :

$$\sigma_S D_q \equiv \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} = I_4 \tag{C.11}$$

puisque I_4 est l'élément neutre de SO(4). On voit donc que pour que cette condition soit réalisée, le produit de la première ligne de σ_S par les colonnes successives de D_q implique $q_0 = 1$, $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Donc D_q est l'élément neutre de SU(2). Puis, les autres produits donnent $S = I_3$, soit l'élément neutre de SO(3). D'où l'injectivité de l'application.

D'autre part, soit un élément de $A \in$ SO(4), qui vérifie donc en particulier, ${}^tAA = I_4$, ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.12}$$

en particulier, la première ligne de A forme un quaternion unitaire q puisque $a_{00}^2 + a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 = 1$. De plus, vu la forme de la matrice de rotation à droite D_q, le produit A^tD_q est de la forme :

$$A^tD_q = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ a_{01} & a_{00} & a_{03} & -a_{02} \\ a_{02} & -a_{03} & a_{00} & a_{01} \\ a_{03} & a_{02} & -a_{01} & a_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma \end{pmatrix} \tag{C.13}$$

De plus, A et D_q étant dans SO(4), leur produit l'est également et donc σ est une matrice de SO(3), ce qui montre la surjectivité puis l'isomorphisme annoncé.

Articles

Article $\mathfrak{A}$*:*

Laplacian eigenmodes for spherical spaces

Marc Lachièze-Rey, Samuel Caillerie
Classical and Quantum Gravity **22** (2005) 695-708

The possibility that our space is multi - rather than singly - connected has gained a renewed interest after the discovery of the low power for the first multipoles of the CMB by WMAP. To test the possibility that our space is a multi-connected spherical space, it is necessary to know the eigenmodes of such spaces. Excepted for lens and prism space, and in some extent for dodecahedral space, this remains an open problem. Here we derive the eigenmodes of all spherical spaces. For dodecahedral space, the demonstration is much shorter, and the calculation method much simpler than before. We also apply to tetrahedric, octahedric and icosahedric spaces. This completes the knowledge of eigenmodes for spherical spaces, and opens the door to new observational tests of cosmic topology.
The vector space $\mathcal{V}^k$ of the eigenfunctions of the Laplacian on the three-sphere $\mathcal{S}^3$, corresponding to the same eigenvalue $\lambda_k = -k\ (k+2)$, has dimension $(k+1)^2$. We show that the Wigner functions provide a basis for such space. Using the properties of the latter, we express the behavior of a general function of $\mathcal{V}^k$ under an arbitrary rotation G of SO(4). This offers the possibility to select those functions of $\mathcal{V}^k$ which remain invariant under G.
Specifying G to be a generator of the holonomy group of a spherical space X, we give the expression of the vector space $\mathcal{V}^k_X$ of the eigenfunctions of X. We provide a method to calculate the eigenmodes up to arbitrary order. As an illustration, we give the first modes for the spherical spaces mentioned.

$\mathfrak{A}$.1 Introduction

$\mathfrak{A}$.1.1 Cosmic Topology

The possibility that spatial sections of our Universe have a multi-connected topology offers interesting alternatives to the standard big bang models[1]. The recent suggestion by [Luminet *et al.*, 2003] that a peculiar variant, namely the Poincaré dodecahedral space, may explain the deficiency in the first modes of the angular power spectrum of the CMB, as observed by WMAP has renewed the interest to this question. It is presently an important task of cosmology to check this possibility.

The best hope to test the possible multi-connectedness of space comes from the CMB fluctuations. For this task, the most important characteristic of a multi-connected space X is the set of its eigenmodes, a subspace of the modes of its universal covering[2]. The main consequences on the CMB are (i) a suppression of power at the scales comparable to, or larger than, the circumference of X, and (ii) a violation of isotropy at these scales. Thus, observational signatures may occur as a reduction of power in the angular CMB spectrum (as reported by [Luminet *et al.*, 2003]), and as the imprint of correlations between different modes. The predictions of these observable effects require the knowledge of the eigenmodes [of the Laplacian] of X. For instance, [Luminet *et al.*, 2003] use a limited number of eigenmodes of the Poincaré space, calculated numerically. More precise checks require the knowledge of a larger number of modes of this space. The examination of other models require the knowledge of the eigenmodes of other spherical spaces.

This paper is devoted to the calculation of the eigenmodes of all variants of the multi-connected spherical spaces. They are defined as quotients $X \equiv \mathcal{S}^3/\Gamma$, where the three-sphere $\mathcal{S}^3$ is the universal covering space of X, and $\Gamma \subset \mathrm{SO}(4)$ is the holonomy group of X. The transformations of Γ leave X invariant. The compactness of $\mathcal{S}^3$ implies the finiteness of Γ. The latter is finitely generated, *i.e.* by a finite number of transformations.

$\mathfrak{A}$.1.2 Spherical spaces

In the family of spherical spaces, the eigenmodes of lens and prism spaces have been calculated by [Lehoucq *et al.*, 2002] in analytic form[3]. For the dodecahedral space, only the very first modes had been calculated numerically, by [Luminet *et al.*, 2003]. Later, [Lachièze-Rey, 2004a] reduced the calculation to an eigenvalue problem of reduced dimensionality, allowing their estimations up to arbitrary order. For the other spherical spaces, the knowledge of the eigenmodes remains an open problem. Here, we present a general method to calculate the eigenmodes of any of the spherical spaces $X = \mathcal{S}^3/\Gamma$.

[1] see *e.g.* Lachièze-Rey et Luminet, 1995.
[2] see *e.g.* Riazuelo *et al.*, 2004.
[3] see also Lehoucq *et al.*, 2003; Lachièze-Rey, 2004b.

For a given eigenvalue λ_k, the eigenmodes of X describe an eigenspace $\mathcal{V}_X^k$. The dimension of this vector space has been calculated, very generally, by [Ikeda, 1995]. We use his results as a cross-check of the calculations below.

Our calculation is based on the fact that each Γ has two generators $G_\pm$, which are single left action rotations of SO(4). We obtain the straightforward decomposition

$$\mathcal{V}_X^k = \mathcal{V}_{G_+}^k \cap \mathcal{V}_{G_-}^k,$$

and we give explicit analytic expressions of the $\mathcal{V}_{G_\pm}^k$, which are the vector spaces of the eigenfunctions of $\mathcal{S}^3$ invariant under $G_\pm$.

Although the expressions of the two $\mathcal{V}_{G_\pm}^k$'s are very simple, there is no general analytic expression of their intersection. Thus, to obtain an explicit expression of the modes, we propose a general method, which applies to any spherical space. It is based on the fact that a basis of $\mathcal{V}^k$ is provided by the Wigner functions. From the rotation properties of the latter, we derive a simple invariance condition of the modes of $\mathcal{S}^3$ under $G_\pm$, and thus under Γ. This provides the eigenmodes of X, which are the eigenmodes of $\mathcal{S}^3$ which remain invariant under Γ.

In ($\mathfrak{A}$.2), we analyze the eigenfunctions of $\mathcal{S}^3$. We prove that the Wigner functions provide a convenient basis ($\mathcal{B}_2$), different from the widely used basis ($\mathcal{B}_1$) provided by the usual hyperspherical harmonics. In ($\mathfrak{A}$.3), we derive the rotation properties of this basis under SO(4), from which we deduce those of all eigenfunctions of $\mathcal{S}^3$. This allows to give a criterion for the invariance of such a function under an arbitrary rotation of SO(4). In ($\mathfrak{A}$.4), we give an explicit analytic expression for the invariant subspaces $\mathcal{V}_{G_\pm}^k$, and we provide a general procedure to calculate the eigenmodes of any spherical space. The first modes are explicitly given in Appendix.

$\mathfrak{A}.2$ Eigenmodes of $\mathcal{S}^3$

The eigenmodes of $\mathcal{S}^3$ are the eigenfunctions of the Laplacian $\Delta_{\mathcal{S}^3}$ of $\mathcal{S}^3$. The eigenvalues are known to be of the form $\lambda_k = -k(k+2)$, where $k \in \mathbb{N}$. The eigenmodes corresponding to a given value of k span the eigenspace $\mathcal{V}^k$, a vector space of dimension $(k+1)^2$. They are the solutions of the Helmoltz equation

$$\Delta_{\mathcal{S}^3} f = \lambda_k f = -k(k+2)\ f, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{$\mathfrak{A}$.1}$$

Each eigenspace $\mathcal{V}^k$ realizes the $(k+1)^2$ dimensional irreducible representation of SO(4), the isometry group of $\mathcal{S}^3$.

The corresponding eigenspace $\mathcal{V}_X^k$, of $X = \mathcal{S}^3/\Gamma$, the goal of our search, is the vector space of functions of $\mathcal{V}^k$ which are Γ - invariant. Each $\mathcal{V}_X^k$ is a subvector space of $\mathcal{V}^k$, whose dimension (possibly zero) is the degeneracy of λ_k on X.

$\mathfrak{A}$.2.1 Basis $(\mathcal{B}_1)$: hyperspherical harmonics

Let us call $(\mathcal{B}_1)$ the most widely used (orthonormal) basis for $\mathcal{V}^k$ provided by the hyperspherical harmonics

$$(\mathcal{B}_1) \equiv \{\mathcal{Y}_{k\ell m},\ 0 \leq \ell \leq k, -\ell \leq m \leq \ell\} \tag{$\mathfrak{A}$.2}$$

It generalizes the usual spherical harmonics $Y_{\ell m}$ on the sphere (note that $\mathcal{Y}_{k\ell m} \propto Y_{\ell m}$). In fact, it can be shown[4] that a basis of this type exists on any sphere S^n. Moreover, [Erdélyi *et al.*, 1953] and [Fryant, 1991] has shown that the $(\mathcal{B}_1)$ basis for S^n is "naturally generated" by the $(\mathcal{B}_1)$ basis for S^{n-1}. In this sense, the $(\mathcal{B}_1)$ basis for $\mathcal{S}^3$ is generated by the usual spherical harmonics $Y_{\ell m}$ on the 2-sphere S^2.

The generation process involves harmonic polynomials constructed from null complex vectors. The basis $(\mathcal{B}_1)$ is in fact based on the reduction of the representation of SO(4) to representations of SO(3): each $\mathcal{Y}_{k\ell m}$ is an eigenfunction of an SO(3) subgroup of SO(4) which leaves a selected point of $\mathcal{S}^3$ invariant. This makes these functions useful when one considers the action of that particular SO(3) subgroup. But they show no simple behaviour under a general rotation.

This basis is adaptated to the usual polar spherical coordinates (ψ, θ, ϕ).

$\mathfrak{A}$.2.2 The parabolic basis $(\mathcal{B}_2)$

The second (orthonormal) basis of $\mathcal{V}^k$ is specific to $\mathcal{S}^3$:

$$(\mathcal{B}_2) \equiv \{T_{k;m_1,m_2},\ -k/2 \leq m_1, m_2 \leq k/2\} \tag{$\mathfrak{A}$.3}$$

where m_1 and m_2 vary independently by integers (and, thus, take integral or semi-integral values according to the parity of k). It is for instance introduced in [Bander et Itzykson, 1966] by group theoretical arguments, it appears naturally adapted to the systems of toroidal coordinates to describe $\mathcal{S}^3$:

$$\begin{cases} x^0 &= r\ \cos\chi\ \cos\theta \\ x^1 &= r\ \sin\chi\ \cos\phi \\ x^2 &= r\ \sin\chi\ \sin\phi \\ x^3 &= r\ \cos\chi\ \sin\theta \end{cases}$$

spanning the range $0 \leq \chi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Here, the (x^μ) represent the cartesian coordinates of the embedding space $\mathbb{R}^4$[5]), and as we consider only spherical spaces, r is thus the radius of $\mathcal{S}^3$, which is a constant assumed hereafter to be 1.

The explicit expression of the $T_{k;m_1,m_2}$ can be found in [Bander et Itzykson, 1966], [Lehoucq *et al.*, 2003] or [Lachièze-Rey, 2004b]. It is proportional to a Jacobi polynomial:

$$T_{k;m_1,m_2}(X) = C_{k;m_1,m_2}\ (\cos\chi\ e^{i\theta})^\ell\ (\sin\chi\ e^{i\phi})^m\ P_d^{(m,\ell)}(\cos(2\chi)), \tag{$\mathfrak{A}$.4}$$

[4] see *e.g.* Bander et Itzykson, 1966; Erdélyi *et al.*, 1953; Fryant, 1991.

[5] see *e.g.* Lachièze-Rey, 2004b; Lehoucq *et al.*, 2003.

where we have written

$$\ell = m_1 + m_2,\ m = m_2 - m_1,\ d = k/2 - m_2.$$

The factor $C_{k;m_1,m_2}$ can be computed from normalization requirements (there is a factor $\sqrt{2}$ lacking in [Lachièze-Rey, 2004b] formula) as

$$C_{k;m_1,m_2} \equiv \sqrt{\frac{k+1}{2\pi^2}}\sqrt{\frac{(k/2+m_2)!(k/2-m_2)!}{(k/2+m_1)!(k/2-m_1)!}}. \tag{$\mathfrak{A}.5$}$$

We also note these useful proportionality relations:

$$\begin{aligned}\cos^\ell\chi\ \sin^m\chi\ P^{(m,\ell)}_{\frac{k-\ell-m}{2}}(\cos 2\chi) &\propto \cos^\ell\chi\ \sin^{-m}\chi\ P^{(-m,\ell)}_{\frac{k-\ell+m}{2}}(\cos 2\chi)\\ &\propto \cos^{-\ell}\chi\ \sin^m\chi\ P^{(m,-\ell)}_{\frac{k+\ell-m}{2}}(\cos 2\chi).\end{aligned} \tag{$\mathfrak{A}.6$}$$

Since $(\mathcal{B}_2)$ is a basis, we have $\mathcal{V}^k = \mathrm{span}\,(T_{k;m_1,m_2})_{-k/2\le m_1,m_2\le k/2}$. It appears convenient to define the subvector spaces

$$\mathcal{V}^{k,m_1} \equiv \mathrm{span}\,(T_{k;m_1,m_2})_{-k/2\le m_2\le k/2}\,. \tag{$\mathfrak{A}.7$}$$

We have

$$\mathcal{V}^k = \bigoplus_{m_1=-k/2}^{k/2} \mathcal{V}^{k,m_1}.$$

We show now that the $T_{k;m_1,m_2}$ identify, up to a constant, to the Wigner D-functions.

$\mathfrak{A}.2.3$ The Wigner D-functions

The Wigner D-functions are defined as functions on the Lie group SO(3):

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{SO}(3) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ g & \longmapsto & \mathcal{D}^j_{m'm}(g) \equiv \langle jm'|R_g|jm\rangle.\end{array} \tag{$\mathfrak{A}.8$}$$

Here, g is rotation of SO(3), and R_g expresses its natural left action $f \mapsto R_g f$ on functions: $R_g f(x) \equiv f(g^{-1}x)$. The vectors $|jm\rangle$, $m \in [\![-j,j]\!]$ form an orthonormal basis for $\mathcal{H}^j$, the $2j+1$ dimensional irreducible representation of SU(2). When j is integer, this is an IUR of SO(3), and the $|jm\rangle$ can be taken as the usual spherical harmonics $Y_{\ell m}$. This implies

$$R_g Y_{jm} = \sum_{m'} \mathcal{D}^j_{m'm}(g^{-1})\ Y_{jm'} \tag{$\mathfrak{A}.9$}$$

(Care must be taken that one finds in the literature other definitions with indices exchanged; we adopt here the notations of [Edmonds, 1960]).

As manifolds, the three-sphere $\mathcal{S}^3$ and SU(2) are identical. This allows to identify any point of $\mathcal{S}^3$ to an element of SU(2) by the following relation:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^3 & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2) \\ x \equiv (\chi, \theta, \phi) & \longmapsto & u_x \equiv \begin{pmatrix} \cos\chi\ e^{i\theta} & i\ \sin\chi\ e^{i\phi} \\ i\ \sin\chi\ e^{-i\phi} & \cos\chi\ e^{-i\theta} \end{pmatrix} . \end{array} \tag{$\mathfrak{A}$.10}$$

(Note that one finds other phase choices for this identification in the literature).

On the other hand, there is a group isomorphism between SU(2) and SO(3)/$\mathbb{Z}_2$, where $\mathbb{Z}_2$ refers to the multiplicative group $\{-1, 1\}$. Thus, each element u of SU(2) defines an SO(3) rotation g_u. In practice, a rotation of SO(3) is parametrized by its Euler angles α, β, γ. Taking into account the identification above, the correspondence takes the form:

$$SU(2) \mapsto SO(3) \tag{$\mathfrak{A}$.11}$$

$$u = (\chi, \theta, \phi) \mapsto g_u = (\alpha, \beta, \gamma), \tag{$\mathfrak{A}$.12}$$

where

$$\chi = \frac{\beta}{2} \qquad \theta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \qquad \phi = \frac{\alpha - \gamma}{2}. \tag{$\mathfrak{A}$.13}$$

This allows to consider the Wigner D-functions as functions on SU(2) and, thus, on $\mathcal{S}^3$. Their explicit expression (see for instance [Edmonds, 1960]) shows their identification to the previous functions $T_{k;m_1,m_2}$:

$$D^{k/2}_{m_2,m_1}(u_x) \equiv \sqrt{\frac{2\pi^2}{k+1}}\ T_{k;m_1,m_2}(u), \tag{$\mathfrak{A}$.14}$$

with $-k/2 \leq m_1, m_2 \leq k/2$. This will allow to use their very convenient properties with respect to rotations.

$\mathfrak{A}$.2.4 Change of basis

We have two bases for $\mathcal{V}^k$. Calculations may be more convenient in one or the other. Most numerical codes use a development in the basis $(\mathcal{B}_1)$. Here we will calculate the eigenmodes of X in the basis $(\mathcal{B}_2)$. A conversion requires the formulae for the change of basis, which result from the properties of the Wigner functions.

The expansion may be found in [Gazeau, 1978] (see also [Bander et Itzykson, 1966], which uses however different conventions):

$$\mathcal{Y}_{klm}(u) = i^{k+l-m} \sum_{m_1,m_2} (-1)^{m_2} (\frac{k}{2}, -m_1; \frac{k}{2}, m_2 \mid l, m)\ T_{k;m_1,m_2}(u), \tag{$\mathfrak{A}$.15}$$

where the $(j, m_1; j, m_2 \mid l, m)$ are the Clebsch-Gordan coefficients. We can invert this formula by multiplying it by another Clebsch-Gordan coefficient $(j, m_3; j, m_4 \mid$

$l, m)$ and by summing on the 2 indices l and m. The orthonormality of the Clebsch-Gordan coefficients then gives the relation (after renaming indices):

$$T_{k;m_1,m_2}(u) = (-1)^{m_2} \sum_{l,m} i^{-k-l+m} (\frac{k}{2}, -m_1; \frac{k}{2}, m_2 \mid l, m)\ \mathcal{Y}_{klm}(u) \tag{$\mathfrak{A}.16$}$$

The properties of the Clebsch-Gordan coefficients (non zero only when $-m_1 + m_2 = m$ with the previous notation) reduce these formulae, respectively, to

$$\mathcal{Y}_{klm}(u) = \sum_{m_1} i^{k+l+m_1+m_2} (\frac{k}{2}, -m_1; \frac{k}{2}, m_1 + m \mid l, m)\ T_{k;m_1,m_1+m}(u). \tag{$\mathfrak{A}.17$}$$

and

$$T_{k;m_1,m_2}(u) = \sum_{l} (\frac{k}{2}, -m_1; \frac{k}{2}, m_2 \mid l, m_2 - m_1)\ \frac{\mathcal{Y}_{kl(m_2-m_1)}(u)}{i^{k+l+m_1+m_2}}. \tag{$\mathfrak{A}.18$}$$

$\mathfrak{A}.3$ SO(4) rotations

$\mathfrak{A}.3.1$ General case

The isometries of $\mathcal{S}^3$ form the group SO(4), the rotation group of the embedding space $\mathbb{R}^4$. We note $G : x \mapsto Gx$ such an isometry, and define its action on a function f of S^3 as

$$R_G :\ f \mapsto R_G f;\ R_G f(x) \equiv f(G^{-1}x).$$

Using the previous identification between $\mathcal{S}^3$ and SU(2), it is very convenient to use the SU(2)×SU(2) representation of SO(4). Any rotation G of SO(4) is represented (modulo a sign) as a pair (u_l, u_r) of two SU(2) matrices, respectively acting on the left and on the right on u_x, an element of SU(2):

$$\begin{array}{rccl} (u_l, u_r) : & SU(2) & \longrightarrow & SU(2) \\ & u_x & \longmapsto & u_l \cdot u_x \cdot u_r = u_{Gx}, \end{array} \tag{$\mathfrak{A}.19$}$$

where all matrices belong to SU(2). (The SO(4) matrices of the form $(u_l, u_r = u_l^{-1})$ form a specific SO(3) subgroup).

The resolution of identity in $\mathcal{H}^j$ (or equivalently, the composition of two successive SO(3) rotations, with $R_{g_1 \circ g_2} = R_{g_2} \circ R_{g_1}$), implies the well known addition formula

$$D^j_{mm'}(uv) = \sum_{m''} D^j_{mm''}(u)\ D^j_{m''m'}(v). \tag{$\mathfrak{A}.20$}$$

Using ($\mathfrak{A}.14$), this implies

$$T_{k;m'm}(x_{uv}) = \sum_{m''} D^{k/2}_{mm''}(u)\ T_{k;m'm''}(x_v). \tag{$\mathfrak{A}.21$}$$

Here, x_u is the point of $\mathcal{S}^3$ corresponding to $u \in \mathrm{SU}(2)$. Now we will use the same notation for a function on S^3 and on SU(2): $f(x_u) = f(u)$.

In these formulae, uv refers to the product of two SU(2) matrices. We are now able to compute the action of a rotation G of SO(4) on the basis functions $T_{k;m_1,m_2}$ by using the decomposition ($\mathfrak{A}$.19) of G and by using twice the addition formula ($\mathfrak{A}$.21) for $T_{k;m_1,m_2}$.

Thus, we obtain the rotation properties of the basis $(\mathcal{B}_2)$ of eigenfunctions under the rotation $G \approx (u_l, u_r)$:

$$\begin{aligned} R_G T_{k;m_1,m_2}(v) &\equiv T_{k;m_1,m_2}(u_l^{-1}\ v\ u_r^{-1}) \\ &= \sum_m \sum_{m'} D^{k/2}_{m_2 m}(u_l^{-1})\ D^{k/2}_{m' m_1}(u_r^{-1})\ T_{k;m'm}(v). \end{aligned} \tag{$\mathfrak{A}$.22}$$

This completely specifies the rotation properties of the basis $(\mathcal{B}_2)$ under SO(4).

$\mathfrak{A}$.3.2 Single action rotations

A special case is a single left action rotation (hereafter SLAR), $G \equiv (u_l, u_r \equiv \mathbb{I}_{SU(2)})$, where $u_l \in$SU(2) defines an SO(3) rotation g. The previous formula reduces to:

$$\begin{aligned} R_G T_{k;M,m_2}(v) &\equiv T_{k;m_1,m_2}(u_l^{-1}\ v) \\ &= \sum_m D^{k/2}_{m_2 m}(u_l^{-1})\ T_{k;Mm}(v). \end{aligned} \tag{$\mathfrak{A}$.23}$$

We note that G preserves the first index $M = m_1$. This means that each $\mathcal{V}^{k,M}$ (see $\mathfrak{A}$.7) is invariant under G. This implies that the research of eigenfunctions invariant under a SLAR G may be performed in each $\mathcal{V}^{k,M}$ separately. Moreover, since the invariance equation does not depend on $M = m_1$, the solution in one of them will give the solution for all of them.

From ($\mathfrak{A}$.23), the invariance condition reads

$$T_{k;M,m_2}(v) = \sum_m D^{k/2}_{m_2 m}(u_l^{-1})\ T_{k;Mm}(v). \tag{$\mathfrak{A}$.24}$$

$\mathfrak{A}$.3.3 Invariant functions

The eigenfunctions of $X \equiv \mathcal{S}^3/\Gamma$ are the eigenfunctions of $\mathcal{S}^3$ which remain invariant under Γ. A necessary and sufficient condition is that they remain invariant under the generators of Γ, which are SLARs.

Thus, we search the eigenfunctions invariant under an arbitrary SLAR G. For a given value k, let us call their space $\mathcal{V}^k_G \subset \mathcal{V}^k$. Since G preserves the vector space $\mathcal{V}^{k,M}$, we have the decomposition

$$\mathcal{V}^k_G = \bigoplus_{M=-k/2}^{k/2} \mathcal{V}^{k,M}_G;\ \mathcal{V}^{k,M}_G \equiv \mathcal{V}^{k,M} \cap \mathcal{V}^k_G.$$

The search of the G-invariant eigenmodes is equivalent to the search of the vector spaces $\mathcal{V}_G^{k,M}$, for the different values of k, M, in $\mathcal{V}^{k,M}$.

In $\mathcal{V}^{k,M}$, the expansion of a function f on the canonical basis,

$$f = \sum_{m=-k/2}^{k/2} f_{k;Mm}\, T_{k;M,m},$$

describes it as the vector F with the $k+1$ components $F_m \equiv f_{k;Mm}$. Similarly, we write for simplicity the matrix $M_{mn} \equiv D_{nm}^{k/2}(u_\ell^{-1})$. Then, equ.($\mathfrak{A}$.24) takes the very simple form

$$F_m = \sum_n M_{mn}\, F_n. \tag{$\mathfrak{A}$.25}$$

This is an eigenvalue equation $MF = F$. Its solutions are the eigenvectors of the matrix M, with the eigenvalue 1.

We recall (see equ.$\mathfrak{A}$.8) that the Wigner function are the rotation matrix elements in the (k+1) - dimensional representation $k/2$. Assuming $k = 2\ell$ even, the vector F represents also an harmonic function on the 2-sphere $\psi_V \equiv \sum_m F_m\, Y_{\ell m} \in \mathcal{V}^\ell$. Thus, ($\mathfrak{A}$.25) becomes

$$\psi_V = (R_g)^t\, \psi_V$$

(the subscript t holds for matrix transposition). This is the condition for the function f_V to be invariant under the SO(3) rotation g^{-1}. The solution of this problem is well known. Let us call $\mathbf{n}$ and $2\pi/N$ the oriented (unit) axis and angle (assumed an integer divisor of 2π) of the rotation g.

- **Diagonal case:** When $\mathbf{n}$ is along Oz, the rotation is diagonalized : the SU(2) matrix, $u = \mathrm{diag}(e^{i\pi/N}, e^{-i\pi/N})$, $[R_g]_{mn} = \delta_{mn}\, e^{2i\pi\, m/N}$ and, using ($\mathfrak{A}$.4) and ($\mathfrak{A}$.14),

$$\begin{aligned} D_{m_2 m}^{k/2}(u^{-1}) &= \delta_{mm_2}\, (e^{-i\pi/N})^{m+m_2}\, P_{k/2-m}^{(m_2-m,m+m_2)}(1) \\ &= e^{-2i\pi m/N}\, \delta_{mm_2}. \end{aligned} \tag{$\mathfrak{A}$.26}$$

  The eigenspace corresponding to the eigenvalue 1 is thus $\mathrm{span}(e_{N\mu})_{-J_N \le \mu \le J_N}$, after defining $J_N \equiv \lfloor k/2N \rfloor$ ($\lfloor\cdot\rfloor$ means integer part), and where e_i is the ith basis vector. In other words, the non zero components of an invariant vector have as index an integer multiple of N. The dimension of this space is $2J_N + 1$.

  Coming back to SO(4), this results implies immediately that

$$\mathcal{V}_G^{k,M} = \mathrm{span}(T_{k;M,N\mu}),\ -J_N \le \mu \le J_N.$$

- When $\mathbf{n}$ is not along Oz, we may diagonalize R_g as $g = \rho^{-1}\, D\, \rho$. The eigenvalue equation becomes

$$f_V = \rho^{-1}\, D\, \rho\, f_V.$$

This is the same eigenvalue equation as above, with the same solution, although not for V but for ρV. The eigenspace corresponding to the eigenvalue 1 is thus $\mathrm{span}(\rho^{-1}\ e_{N\mu})_{-J_N\leq\mu\leq J_N}$.

Coming back to SO(4), this results implies immediately that

$$\mathcal{V}_G^{k,M} = \mathrm{span}(\rho^{-1}\ T_{k;M,N\mu}),\ -J_N \leq \mu \leq J_N.$$

$\mathfrak{A}$.4 Eigenmodes of spherical spaces

When we have two generators $G_\pm$, the eigenspace is simply

$$\mathcal{V}_X^{k,M} = \mathcal{V}_{G_+}^{k,M} \cap \mathcal{V}_{G_-}^{k,M}.$$

In any spherical space, we chose a frame where one of the generators of Γ is diagonalized, so that the invariance condition relative to this generator takes the simple form ($\mathfrak{A}$.29). Thus, the problem is reduced to the search of the invariance condition relative to the other generators.

$\mathfrak{A}$.4.1 Diagonal matrices

Applying equation ($\mathfrak{A}$.23) to a diagonal matrix as above, we obtain:

$$R_g T_{k;m_1,m_2}(v) = e^{-2i\pi\ m_2/N}\ T_{k;m_1m_2}(v) \tag{$\mathfrak{A}$.27}$$

Let us assume that a generator of the holonomy group of a spherical space X is represented by a diagonal left action SU(2) matrix $g \approx (u_l, \mathbb{I})$ with u_l of the diagonal from above. The invariance condition, under g, of the basis functions for this space takes the form

$$T_{k;m_1,m_2}(u_l) = e^{-2i\pi m_2/N} T_{k;m_1m_2}(u_l). \tag{$\mathfrak{A}$.28}$$

Its solution is

$$m_2 = 0 \pmod N, \tag{$\mathfrak{A}$.29}$$

or $m_2 = N\mu$, where μ varies in the range $[-J_N..J_N]$.

Hereafter, all sums involving μ, ν are assumed to go in this range ($2J_N + 1$ values). This is the selection rule for the eigenmodes invariant under g.

$\mathfrak{A}$.4.2 A general procedure

The spherical spaces considered below all have two generators which are SLARs, $G_\pm \equiv (\gamma_\pm, \mathbb{I})$. Let us chose a frame where G_+ is diagonal. Then, form above, we can write

$$\mathcal{V}_G^{k,M} = \mathrm{span}(T_{k;M,N\mu}),\ -J_N \leq \mu \leq J_N.$$

In other words, all eigenfunctions $T_{k;M,m}$, with $m = N\mu$ are G_+-invariant.

Since there is no simple way to calculate the intersection

$$\mathcal{V}_X^{k,M} = \mathcal{V}_{G_+}^{k,M} \cap \mathcal{V}_{G_-}^{k,M},$$

we propose a practical procedure.

Let us expand a G_+-invariant function in the basis $(\mathcal{B}_2)$ as

$$f = \sum_m \sum_\mu f_{k;m,N\mu}\, T_{k;m,N\mu}, \quad \mu = -J_N \cdot\cdot J_N.$$

The invariance condition under the rotation γ_-, for such a function, takes the form:

$$R_{G_-} f = f :$$

$$\sum_m \sum_\mu f_{k;m,N\mu}\, R_{G_-} T_{k;m,N\mu}(x) = \sum_m \sum_\mu f_{k;m,N\mu}\, T_{k;m,N\mu}(x). \tag{$\mathfrak{A}.30$}$$

With the transformation law ($\mathfrak{A}.23$), this becomes:

$$f_{k;m,N\mu} = \sum_\nu f_{k;m,N\nu}\, D^{k/2}_{N\nu,N\mu}\left((\gamma_-)^{-1}\right). \tag{$\mathfrak{A}.31$}$$

This equation is independant of index m.

This implies that the eigenspace for k splits as the direct sum

$$\mathcal{V}_X^k = \bigoplus_m \mathcal{V}_X^{k,m}.$$

The degeneracy of the eigenvalue λ_k is the dimension of $\mathcal{V}_X^k$. This implies that

$$dim\left(\mathcal{V}_X^k\right) = (k+1)\; dim\left(\mathcal{V}_X^{k,m}\right).$$

Thus, the solution for m does not depend on m, and we can write $f_{k;m,n} = f_{k;m_0,n}$, where m_0 is some index in $[\![-k/2; k/2]\!]$. Equ. ($\mathfrak{A}.31$) is still an eigenvalue equation, but in a vector space of restricted dimension $2J_N+1$: Let us define the matrix $\mathcal{M}_k$, of order $2J_N+1$, through its coefficients:

$$[\mathcal{M}_k]_{\mu,\nu} \equiv D^{k/2}_{N\nu,N\mu}\left((\gamma_-)^{-1}\right),\; \mu,\nu = -J_N \cdot\cdot J_N.$$

Note that this matrix does not depend on the index M. Let us also define the $(2J_N+1)$- vector $\mathcal{F}$ through its components :

$$[\mathcal{F}]_\mu \equiv f_{k;M,N\mu}.$$

Equation ($\mathfrak{A}.31$) could thus be written in matrix form:

$$\mathcal{M}_k \mathcal{F} = \mathcal{F}. \tag{$\mathfrak{A}.32$}$$

This eigenvalue equation may be easily solved, for instance with Mathematica. The results are given in appendix.

Having found the solution under the form of the vectors $\mathcal{F}_s$, with $1 \leq s \leq \sigma$, with $\sigma = 1/(2J_N + 1)$ times the degeneracy of the eigenvalue (σ is found as a result of the eigenvalue problem; the value coincide with that given by [Ikeda, 1995]). We have finally a basis $(\mathcal{Y}_{k;M,s})_{M=-k/2..k/2,\ s=1..\sigma}$ for the eigenmodes of X corresponding to the eigenvalue k, where

$$\mathcal{Y}_{k;M,s} \equiv \sum_{\mu=-J_N}^{J_N} (\mathcal{F}_s)_\mu \; T_{k;M,N\ \mu}. \tag{$\mathfrak{A}$.33}$$

$\mathfrak{A}$.5 Application to the spherical spaces

For each space, the steps are the following:

- We write the two generators in the SU(2) $\times$ SU(2) forms. Since both are SLARs, this corresponds to two SU(2) matrices $\gamma_\pm$. (We thank J. Weeks for providing generators in suitable form).
- We diagonalize the matrix γ_+.
- We deduce the value J_N.
- We solve the eigenvalue equation ($\mathfrak{A}$.32) in the vector space of dimension $2J_N + 1$. This gives the vector(s) $\mathcal{F}$ by their components
- Then equ. ($\mathfrak{A}$.33) gives the eigenmodes of X.

$\mathfrak{A}$.5.1 Dodecahedral space

The two SU(2) generators,

$$\begin{pmatrix} c + iC & \pm i/2 \\ \pm i/2 & c - iC \end{pmatrix};\ c \equiv \cos(\pi/5),\ C \equiv \cos(2\pi/5), \tag{$\mathfrak{A}$.34}$$

become, after diagonalization,

$$\gamma_+ = \begin{pmatrix} e^{i\pi/5} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/5} \end{pmatrix}$$
$$\gamma_- = \begin{pmatrix} \cos(\pi/5) + i\ \sin(\pi/5)/\sqrt{5} & 2i\ \sin(\pi/5)/\sqrt{5} \\ 2i\ \sin(\pi/5)/\sqrt{5} & \cos(\pi/5) - i\ \sin(\pi/5)/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \tag{$\mathfrak{A}$.35}$$

We have $N = 5$, $J_N = \lfloor k/10 \rfloor$.

Equ.($\mathfrak{A}$.33) gives the eigenmodes. We have checked that they correspond to those found by [Lachièze-Rey, 2004a].

As we mentioned, it may be more convenient to express these modes in the more widely used basis ($\mathcal{B}_1$). The solution of our problem in this basis is, for the dodecahedral space:

$$f_k(x) = \sum_{l,m,m'} i^{m-k-l}(-1)^{m'} f_{k;m'}(\frac{k}{2}, m'-m; \frac{k}{2}, m' \mid l, m)\ \mathcal{Y}_{klm}, \qquad (\mathfrak{A}.36)$$

where the index m' satisfy the condition ($\mathfrak{A}.29$) for the dodecahedral space, l vary in $[\![0, k]\!]$ and m vary in $[\![-l, l]\!]$.

$\mathfrak{A}.5.2$ Other multi-connected spherical spaces

Beside lens and prism spaces, three other multi-connected spherical spaces remain. In each one, holonomy groups are generated by two left-action SO(4) rotations. We follow the same procedure.

We give in the table below a list of these spaces with their 2 generators, under their SU(2) form.

Tetrahedron	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$
diagonal form	$\begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) & -1-i \\ 1-i & \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) \end{pmatrix}$
Octahedron	$\begin{pmatrix} e^{-i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Icosahedron	$\begin{pmatrix} c+i/2 & iC \\ iC & c-i/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c+iC & 1/2 \\ -1/2 & c-iC \end{pmatrix}$
diagonal form	$\begin{pmatrix} e^{i\pi/5} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c+is & 1/2-ics \\ -1/2-ics & c-is \end{pmatrix}$

with $c := \cos(\pi/5)$ and $s := \sin(\pi/5)/\sqrt{5}$.

Computations gives the tables in appendix, where we presented the first modes for the different spherical spaces. More modes can be obtain by sending us an email at: cailleri@discovery.saclay.cea.fr.

Note that the modes for the Icosahedron are the same than those of the Dodecahedron, as expected; they are however given here in a different frame.

$\mathfrak{A}.6$ Conclusion

The introduction of the basis ($\mathcal{B}_2$) of Wigner functions provided the explicit behavior of the modes of $\mathcal{S}^3$, under the rotations of SO(4). This allowed to write an invariance condition of these modes under any rotation, and under the holonomy

group Γ of a spherical space $\mathcal{S}^3/\Gamma$. The solutions of the corresponding equations give the vector spaces of the eigenmodes of $\mathcal{S}^3/\Gamma$. These modes are calculated explicitly, for the first values of k, for the spherical spaces, in the basis $(\mathcal{B}_2)$. We give the transformation relations to express them in the more usual basis $(\mathcal{B}_1)$ of hyperspherical harmonics.

This allows to calculate the power angular spectrum of the CMB fluctuations, as predicted by the cosmological model with Poincaré dodecahedral space, up to arbitrary multipoles k. This work is in progress. It will allow to check if the predictions of [Luminet *et al.*, 2003] hold up to higher orders. In any case, the confrontation of the predicted power spectrum with observations may not offer enough discriminating power. Thus, we intend to calculate the cross correlations predicted from this model. They are zero for Gaussian isotropic fluctuations, and thus allow more specific tests of cosmic topology. This work is also in progress.

The present results allow to extend these calculations to the remaining spherical spaces, a work also in progress. Hopefully, this will provide a definitive test of the case of a multi-connected space with positive curvature, at least for a range of scales comparable with that of the last scattering surface.

$\mathfrak{A}.7$ Appendices

Table of eigenfunctions for the dodecahedral space

Eigenmodes of dodecahedral space corresponds to the basis of functions $(f_k(x))_{m\in[\![-k/2;k/2]\!]}$, where $f_k = \sum_{m,m'} f_{k;m'} T_{k;m,m'}$. In this table is indicated the allowed k (those where D_k admits 1 as an eigenvalue) and the corresponding $f_{k;m'}$, for $m' = 0$ (mod 5) (for others values of m', $f_{k;m'} = 0$).

k=12			
0.529150262 i	0.663324958	0.529150262 i	
k=20			
-0.3158058475 i	0.578273291	0.362950869 i	0.578273291
-0.3158058475 i			
k=24			
-0.486949689	0.3025227264 i	0.585422924	0.3025227264 i
-0.486949689			
k=30			
-0.2829840984	0.391305507 i	-0.516526862	0
0.516526862	-0.391305507 i	0.2829840984	
k=32			
-0.329930901 i	0.425449096	-0.331083071 i	0.448380790
-0.331083071 i	0.425449096	-0.329930901 i	

For this space and others, we have calculated more modes, and with an higher precision. As indicated in the text, these modes could be asked at: cailleri@discovery.saclay.cea.fr.

Table of eigenfunctions for the tetrahedral space

For this space, we present modes under the form: $f_{k;m}$, with the notation used above, where $m = 0 \pmod 3$. For $k = 12$, we can observe that modes are degenerated and we thus have 2 series of $f_{k;m}$.

k=6	
0.333333333 - 0.333333333 i	0.745355992
-0.333333333 - 0.333333333 i	
k=8	
0.608580619	-0.360041149 - 0.360041149 i
-0.608580619 i	
k=12	
-0.00323332162 + 0.00323332162 i	0.738332205
0.2666917602 + 0.2666917602 i	0.2828693156 i
-0.341013640 + 0.341013640 i	
0.354280119 + 0.354280119 i	-0.0861446455 i
-0.353087976 + 0.353087976 i	0.689157164
-0.0929259330 - 0.0929259330 i	
k=14	
0.491351820 i	-0.1888525745 + 0.1888525745 i
0.611952283	0.1888525745 + 0.1888525745 i
-0.491351820 i	

Table of eigenfunctions for the octahedral space

For this space, we present modes under the form: $f_{k;m}$, with the notation used above, where $m = 0 \pmod 2$.

k=4			
-0.612372435	0.500000000	-0.612372435	
k=8			
-0.379649579	-0.1447862189	-0.818416944	-0.1447862189
-0.379649579			
-0.530330085	0.3118047822	-0.493006648	0.3118047822
-0.530330085			
k=10			
-0.353553390	-0.612372435	0	0.612372435
0.353553390			
k=12			
0.507752400	-0.1250000000	0.342326598	-0.467707173
0.342326598	-0.1250000000	0.507752400	
0.1230304012	-0.672015232	0.0829470795	0.2296903537
0.0829470795	-0.672015232	0.1230304012	

Table of eigenfunctions for the icosahedral space

For this space, we present modes under the form: $f_{k;m}$, with the notation used above, where $m = 0 \pmod 5$.

k=12	
0.1882530268 + 0.3999418963 i	0.6533724434
-0.2617387416 + 0.5560616500 i	
k=20	
-0.2115446757 - 0.0542397647 i	0.3004753102 - 0.3633777752 i
0.1486544684 + 0.3158151081 i	0.655649414
0.1798126817 - 0.3820104577 i	
k=24	
-0.0622550053 - 0.3255605557 i	-0.2352778614 - 0.0603249209 i
-0.3529784282 + 0.4268720642 i	-0.1437372075 - 0.3053684305 i
0.6406372434	
k=30	
0.02978235622 + 0.1557458776 i	0.2506842548 + 0.0642750991 i
-0.2564612869 + 0.3101497151 i	0.0002877519 + 0.0006113259 i
0.560360227	0.2128816958 - 0.4522652865 i
0.2718985718 + 0.3288186907 i	

Article $\mathfrak{B}$*:*

Constraining Cosmic Topology with CMB Polarization

Alain Riazuelo, Samuel Caillerie, Marc Lachièze-Rey, Jean-Pierre Luminet, Roland Lehoucq
submitted to Physical Review D

Multiply connected space sections of the universe on a scale smaller than the horizon size can leave an imprint on cosmic microwave background polarization maps, in such a way that the so-called "circles-in-the-sky" method can be used to detect or constrain the topology. We investigate some specific cases, namely toroidal and sixth-turn spaces, in order to show the influence of topology on CMB polarization. The correlation between matched points happens to be always positive and higher than 75% regardless of the angular scale and of the cosmological parameters, except for reionization. This figure is better than what occurs in temperature maps, but is achieved only in the absence of noise. It is only slightly reduced by the filtering scheme.

$\mathfrak{B}$.1 Introduction

The question of a possible multiply connected topology of our cosmic space goes back to the pioneering works of Schwarzschild and Friedmann more than 75 years ago. In the past two decades, various strategies and methods have been devised to probe a non trivial topology of the space sections of the universe, using current or forthcoming data from cosmological observations[1]. Since the topological length scales are a priori not known, it is useful to survey the largest observable scale in order to increase the odds of detecting, or at least constraining, the space topology. The Cosmic Microwave Background (CMB) emitting region, the so-called last scattering surface (LSS) is situated at a redshift of $z \simeq 1100$ and represents the

[1] see *e.g.* Lachièze-Rey et Luminet, 1995; Levin, 2002; Reboucas, 2005; Souradeep et Hajian, 2005.

deepest region that can be studied in the electromagnetic domain. Thus its usefulness for cosmology in general is tremendous as indicated by [Liddle et Lyth, 2000]. Since more than one decade[2], temperature anisotropies in the CMB radiation have been mapped as a function of the direction. They result from those density fluctuations in the primordial plasma, which are the seeds of evolved structures in the universe. Their study provides crucial information on the matter-energy contents of the universe, as well as some hints on the physical process which could have generated the first density perturbations at a much earlier epoch[3].

CMB anisotropies can also be used to constrain the topology. The main imprint of a non trivial topology on the CMB is well-known in the case when the characteristic topological length scale (called the injectivity radius) is smaller than the radius of the last scattering surface: the crossings of the LSS with its topological images give rise to pairs of matched circles of equal radii, centered at different points on the CMB sky, and exhibiting correlated patterns of temperature variations[4]. Such "circles-in-the-sky" searches are currently in progress using the WMAP data. They are however computationally very expensive, and the present results are not completely clear. On the one hand, a massive search matching circle with radii larger than 25° gave negative results[5]. On the other hand, another search extended to smaller radii[6] claimed to have found six pairs of antipodal matched circles in a dodecahedral pattern, consistent with the Poincaré dodecahedron space model recently proposed by some of us[7] to account for the observed anomalies on the CMB angular power spectrum on large scales. The statistical significance of such results still has to be clarified. In any case, a lack of nearly matched circles does not exclude a multiply connected topology on scale less than the horizon radius: detectable topologies may produce circles of small radii which are statistically hard to detect and current analysis of CMB sky maps could have missed even antipodal matching circles because various effects may damage or even destroy the temperature matching[8]. Moreover, even if it might already seem severely constrained by observational data, there are still unexpected and still unexplained features on the large angular scales of the CMB temperature map[9] which may hint for some sort of breaking of statistical isotropy of the CMB, a feature which is not shared by many models others than multiply connected topology, and which is present even when the injectivity radius is larger than the size of the observable universe[10].

Recent work by [Aurich *et al.*, 2005a], [Gundermann, 2005] and [Caillerie *et al.*, 2005] support the dodecahedron model. Since the above mentioned anomalies de-

[2]see *e.g.* Smoot *et al.*, 1992.
[3]see *e.g.* Liddle et Lyth, 2000.
[4]see *e.g.* Cornish *et al.*, 1998.
[5]see *e.g.* Cornish *et al.*, 2004.
[6]see *e.g.* Roukema *et al.*, 2004.
[7]see *e.g.* Luminet *et al.*, 2003.
[8]see Riazuelo *et al.*, 2004 or Aurich *et al.*, 2005a.
[9]see *e.g.* Eriksen *et al.*, 2004; Copi *et al.*, 2004; Schwarz *et al.*, 2004.
[10]see *e.g.* Riazuelo *et al.*, 2004.

tected in the first year WMAP data[11] suggest the presence of some statistical anisotropy in the CMB radiation, it appears thus necessary to better constrain topology, by using tests of different nature. It is now widely understood that the polarization of the CMB, predicted long ago[12], can provide a lot of additional informations for reconstructing the cosmological model[13]. The information encoded in polarization is expected to become a necessary input for precision cosmology, when it will be mapped in detail in the next release of the WMAP data [14] and later by the Planck satellite mission [15]. In this article we show how the polarization can also be used to put additional constraints on space topology.

This paper is organized as follows: in Sec. $\mathfrak{B}$.2, we remind the key ingredients for detecting topological signatures in a CMB temperature map, using the circles-in-the-sky method. In Section $\mathfrak{B}$.3, we recall the basic properties of CMB polarization that are useful for our purpose. We then compute in Sec. $\mathfrak{B}$.4 the expected correlation for polarization maps, taking into account the specificities of polarization. Our main result is that the correlation in polarization maps is always larger than 75%, assuming an ideal case where no noise is present in the maps. In Sec. $\mathfrak{B}$.5 we present simulated maps for the 3-torus and the sixth-turn space in order to illustrate the validity of our method. In Sec. $\mathfrak{B}$.6, we look for various sources of blurring of the correlation when considering two effects : reionization and finite resolution.

$\mathfrak{B}$.2 CMB physics and correlation between matched points in temperature maps

Let us first review the different contributions to CMB temperature as well as polarization anisotropies. The apparent temperature fluctuation in a given direction $\hat{\mathbf{n}}$ can be expressed (in Newtonian gauge) by

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = (\frac{1}{4}\frac{\delta\rho}{\rho} + \Phi)\Big|_{r\hat{\mathbf{n}}} - \hat{\mathbf{n}}.\mathbf{v}_e(r\hat{\mathbf{n}}) + \int_0^r (\dot{\Phi} + \dot{\Psi})\Big|_{l\hat{\mathbf{n}}} \mathrm{d}l, \qquad (\mathfrak{B}.1)$$

where the quantities Φ and Ψ are the usual Bardeen potentials[16], $\mathbf{v}_e$ being the velocity within the electron fluid. The first terms are evaluated at the LSS, i.e., at $r\hat{\mathbf{n}}$, where r represents the radius of the LSS. They represent the Sachs-Wolfe and Doppler contributions to CMB temperature anisotropies. The last term give accounts of the energy exchanged by photons with time-varying gravitational fields, known as the integrated Sachs-Wolfe (ISW) effect. This formula is independent of the topology of the universe and is valid in the limit of an infinitely thin last

[11] see *e.g.* Eriksen *et al.*, 2004; Copi *et al.*, 2004; Schwarz *et al.*, 2004.
[12] see *e.g.* Rees, 1968.
[13] see *e.g.* Hu et White, 1997.
[14] see `http//map.gsfc.nasa.gov`.
[15] see `http//sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=17`.
[16] see *e.g.* Mukhanov *et al.*, 1992; Durrer, 1994.

scattering surface and in absence of reionization. In order to go beyond these approximations, one should replace the quantities evaluated at the LSS, at $r\hat{\mathbf{n}}$, by quantities averaged on spheres of various radii, weighted by the probability for an electron to have experienced its last scattering at the correspond epoch[17]. Such corrections are however not relevant for our purpose here.

In a multiply connected space, any two comoving points of space are joined by more than one geodesic. This characterizes the imprint of topology on cosmology. The immediate consequence is that the observed sky may show multiple images of a radiating source. Geometrically, the observational space identifies with the portion of the covering space (i.e. the corresponding simply connected manifold) which lies inside the horizon sphere. Multiple images (also called topological, or ghost images) of a given source are related by discrete isometries belonging to the holonomy group. The actions of these holonomies tile the observational space into identical cells which are copies of a fundamental domain. It results the most intuitive way to detect a multiply connected topology: to identify the multiple images of the same celestial object. This applies to faraway cosmological sources such as galaxy clusters[18] as well as spots in the CMB, i.e., different points of the LSS which would correspond to a single point of physical space.

When the fundamental domain is smaller than size of the LSS (at least along one direction), the multiple images of the LSS so generated in the covering space intersect themselves. In this case, the Sachs-Wolfe contributions to the CMB radiation (which do not depend on the direction of observation) are strictly identical for homologous points of the LSS. This is at the basis of the now popular "circles-in-the-sky" method, since the intersection of two copies of the LSS sphere is a circle. Accordingly, a multiply connected topology may be characterized by temperature correlations between pairs of specific matched circles[19].

However, even in an ideal situation where noise removal would be perfect, such a correlation is not perfect. It is exact for the Sachs-Wolfe contribution (and even only on scales larger than the width of the last scattering surface), but absent for the Doppler and ISW contributions[20]. In particular, the ISW contribution depends on the whole path between the emitting point of the LSS and the observer. In a multiply connected space, two matched points of the LSS are joined to the observer by two different paths. Therefore, their corresponding ISW contributions differ significantly, except possibly on the very largest scales. This blurs the temperature correlations.

A simple estimator for the correlation between pairs of circles is the *circle comparison statistic* (hereafter CCS)

$$S(\phi_*) \equiv \frac{2 < T_1(\pm\phi)\ T_2(\phi+\phi_* >}{< [T_1(\pm\phi)]^2 + [T_2(\phi+\phi_*]^2 >} \qquad (\mathfrak{B}.2)$$

[17] see *e.g.* Hu et White, 1997.
[18] see *e.g.* Lehoucq *et al.*, 1996.
[19] see *e.g.* Cornish *et al.*, 1998.
[20] see *e.g.* Riazuelo *et al.*, 2004.

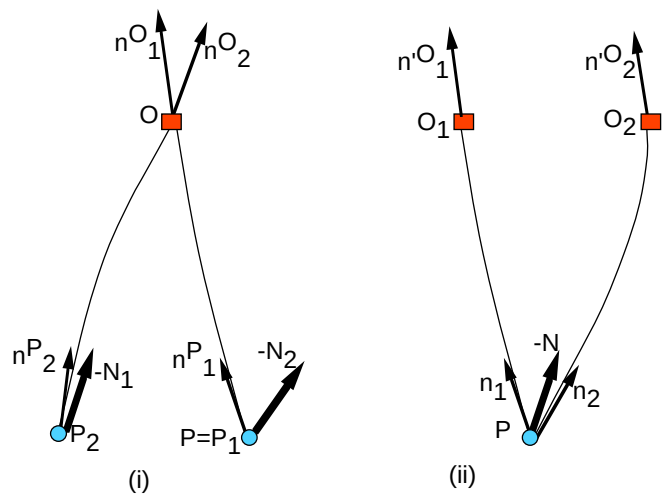


Figure $\mathfrak{B}$.1: **Orientations and points of view.** This figure shows the different vectors as seen by an observer O, which sees different points P on last scattering surface which correspond to the same physical point, and the situation as is regarding from the point P how looks like the Universe.

where $< >= 1/2\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi$ defined by [Cornish *et al.*, 1998]. The CCS ranges in the interval $[-1, +1]$: circles that are perfectly matched have $S = 1$, while uncorrelated circles have a mean value of $S = 0$.

Let us for instance estimate the expected correlation between matched circles in the simple case where the orientations of the two matched points remains. This occurs when they are linked by a simple translation, like in the toroidal case. Without loss of generality, let us fix the coordinate system such that the two images of a point lie at colatitudes $\pm\alpha$ in directions $\hat{\mathbf{n}}_1 = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$, $\hat{\mathbf{n}}_2 = (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha)$. The amplitudes of the Doppler terms in these two directions are proportional to $\hat{\mathbf{n}}_1.\hat{\mathbf{N}}$ and $\hat{\mathbf{n}}_2.\hat{\mathbf{N}}$ respectively, where $-\hat{\mathbf{N}}$ represents the direction of the electron fluid velocity (the same for both points according to our hypothesis). It results, between the two Doppler contributions a correlation

$$C_D = \frac{2\hat{\mathbf{n}}_1.\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{n}}_2.\hat{\mathbf{N}}}{(\hat{\mathbf{n}}_1.\hat{\mathbf{N}})^2 + (\hat{\mathbf{n}}_2.\hat{\mathbf{N}})^2}. \qquad (\mathfrak{B}.3)$$

In the above equation, the average correlation is computed by averaging both the numerator and the denominator in the fixed direction $\hat{\mathbf{N}}$. After simple algebra, this gives

$$\langle C_D \rangle = -\cos(2\alpha) = \cos\Theta, \qquad (\mathfrak{B}.4)$$

where $\Theta = \pi - 2\alpha$ represents the angular separation of the two points.

Can we generalise this reasoning to an arbitrary geometry and topology ? In a multiconnected space, the observer O sees multiple images of an unique source

point P in real space (Fig. $\mathfrak{B}$.1, (i)). Let P_1 and P_2 be two images of the same point source P. These images are of course related by $P_2 = g(P_1)$, where g is an holonomy transformation. The normalized direction of the velocity of the electron fluid is represented by $-\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{1}$ at P_1 and $-\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{2} = Dg(-\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{1})$ at P_2, where Dg is the differential application corresponding to g. Two light rays reach the observer at O who can measure their arrival directions $\hat{\mathbf{n}}_1^O$ and $\hat{\mathbf{n}}_2^O$. A strict application of equation ($\mathfrak{B}$.3) would imply calculating the scalar products $\hat{\mathbf{n}}_1^O.\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{1}$ and $\hat{\mathbf{n}}_2^O.\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{2}$, hoping to express C_D in terms of observed quantities as the angle Θ^O between $\hat{\mathbf{n}}_1^O$ and $\hat{\mathbf{n}}_2^O$ (it is well defined as $\cos\Theta^O \equiv \hat{\mathbf{n}}_1^O.\hat{\mathbf{n}}_2^O$). But these scalar products are undefined because the vectors involved are not attached to the same point. Thus C_D must be better defined.

We choose to adopt a dual point of view (Fig. $\mathfrak{B}$.1, (ii)). The point source P, with velocity direction $-\hat{\mathbf{N}}$, emits light to two copies $O_1 = O$ and $O_2 = g^{-1}(O_1)$of the observer. These two homologous observers see the source respectively in the directions $\hat{\mathbf{n}}_1'^O = \hat{\mathbf{n}}_1^O$ and $\hat{\mathbf{n}}_2'^O$, defined at O_1 and O_2 respectively. These two directions cannot be compared, nor their scalar product formed, since they correspond to vectors attached to different points of space-time. However, the two light rays reaching O_1 and O_2 depart from the same point P following spatial directions $\hat{\mathbf{n}}_1$ and $\hat{\mathbf{n}}_2$. This allows us to apply equation ($\mathfrak{B}$.3) to estimate C_D as above. Averaging both the numerator and the denominator over $\hat{\mathbf{N}}$ gives $\langle C_D\rangle = \cos\Theta^P$ where Θ^P defined by $\cos\Theta^P \equiv \hat{\mathbf{n}}_1.\hat{\mathbf{n}}_2$ is the angle under which the source "sees" the two copies of the observer.

Θ_P is not an observable quantity. There is in principle no difficulty to convert Θ^P into Θ^O, but this is a tedious calculation, which requires the exact knowledge of the geometry of space-time and the explicit expression of the holonomy transformation g, and of its differential application Dg. This requires to estimate the parallel transport of the vectors $\hat{\mathbf{n}}_1$ and $\hat{\mathbf{n}}_2$ along the null geodesics (the light rays), as well as along the trajectory of the holonomy transformation. However, the situation is greatly simplified when space is flat: then $Dg = \mathbb{I}$ for a translation, and $-\mathbb{I}$ for a translation with space inversion. In this case, we have respectively $\cos\Theta^P = \cos\Theta^O$ and $\cos\Theta^P = -\cos\Theta^O$.

Unsurprisingly, two antipodal points are fully anticorrelated since they correspond to a Doppler effect seen from opposite directions, whereas the limit where the two points are in the same direction gives a fully correlated Doppler term. After a quick reminder about polarization in the next section, we shall perform a similar analysis for polarization.

$\mathfrak{B}$.3 A quick reminder of CMB polarization

We recall that the propagation of a density wave in an anisotropic plasma induces a linear polarization of the CMB[21]. Each photon is polarized when scattered off by an electron of the photon-baryon plasma. The isotropic superposition of photons

[21] see *e.g.* Rees, 1968.

in the CMB destroys on the average the polarization. However, the presence of a local quadrupole in the photon fluid induces a weak residual polarization in the direction orthogonal to the plane defined by the quadrupole. The amount of *observed* polarization depends on the orientation of the observer with respect to the quadrupole, in analogy with the Doppler term dependence on the relative angle between the line of sight and the fluid velocity. The perfect fluid approximation for the photon fluid would imply the absence of quadrupole. But, during the decoupling, the perfect fluid approximation is broken by the dramatic decrease of the scattering rate, as the free electrons become bound to the atomic nuclei. This generates a linear polarization of the CMB temperature. This prediction was only recently verified[22], because of the low amount of polarization expected.

To analyze the generation of polarization, we may consider a density wave, which generates density gradients in the photon fluid, in the direction of its wavevector. When the photons propagate, these density gradients generate a local dipole in the photon fluid: in a region initially richer in photons to its left than to its right, appears a dipole oriented from left to right. It results a dipole distribution, whose direction and intensity remain constant on a given waveplane, but vary along the orthogonal direction. A similar reasoning shows that this dipole gradient generates a local quadrupole, and so on. This is just a rephrasing of the Boltzmann equation, which couples the ℓ-th multipole of the radiation to the $(\ell-1)^{th}$ and $(\ell+1)^{th}$ multipoles.

Given such a local quadrupole, the scattering of photons on free electrons generates a polarization as explained above. Since the orientation of the dipole and quadrupole are determined uniquely by the direction of the initial density field, the generated polarization also depends on the angle between the line of sight and the quadrupole direction.

For convenience, the usual linear Q and U Stokes parameters, measured in each direction of the microwave sky (and assuming some rather arbitrary choice of the axis of the polarizer), are split into "electric" and "magnetic" parts, through a non local transformation. These names reflect the intuitive properties of the corresponding patterns with respect to parity transformation. For symmetry reasons, the density fluctuations create only E-modes (i.e., curl-free) polarization patterns on the sky. Although one expects that tensor modes (gravitational waves) also contribute to the CMB fluctuations, the scalar (density) modes are expected to be dominant[23]. Thus, we assume hereafter that polarization is due to scalar modes only, so that we only consider the angular dependence of the amplitude of the scalar E modes.

[22] see *e.g.* Kovac *et al.*, 2002.
[23] see *e.g.* Liddle et Lyth, 2000.

$\mathfrak{B}$.4 Correlation in polarization maps

The polarization is estimated by a method similar to that of Sec. $\mathfrak{B}$.2. The only difference lies in the angular dependence of the (scalar part) of the polarization tensor.

For the Doppler term, the amplitude of is proportional to $\hat{\mathbf{n}}.\hat{\mathbf{N}} = \cos\theta$, where θ is the angle between the fluid velocity direction $\hat{\mathbf{N}}$ and the line of sight $\hat{\mathbf{n}}$. Thus, the total angular momentum method associates naturally the scalar part of this Doppler term with the spherical harmonics Y_1^0. In a similar way, following [Hu et White, 1997], one can associate the scalar part of the polarization with the spin-weighted spherical harmonics ${}_2Y_2^0 \propto \sin^2\theta = 1-(\hat{\mathbf{n}}.\hat{\mathbf{z}})^2$. Although far less intuitive, this can be understood from purely geometrical considerations. This allows us to compute the expected correlation C_E^S of the scalar E mode of polarization for the two points, by a method similar as above: one simply has to replace the angular dependence $\cos\theta$ by $\sin^2\theta$. Therefore, one obtains

$$C_E^S = \frac{2(1-(\hat{\mathbf{n}}_1.\hat{\mathbf{N}})^2)\times(1-(\hat{\mathbf{n}}_2.\hat{\mathbf{N}})^2)}{[1-(\hat{\mathbf{n}}_1.\hat{\mathbf{N}})^2]^2+[1-(\hat{\mathbf{n}}_2.\hat{\mathbf{N}})^2]^2}, \tag{$\mathfrak{B}$.5}$$

and, after averaging,

$$\left\langle C_E^S \right\rangle = 1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{4}\sin^2\Theta \tag{$\mathfrak{B}$.6}$$

In the worst case (points in orthogonal directions), the correlation level still remains above 75%, and increases toward 1 for antipodal points.

$\mathfrak{B}$.5 Simulated maps and results

In order to illustrate the efficiency of the method, we apply it, as an example, to two simple cases of multiconnected spaces: the 3-torus and the sixth-turn space[24], which bears some similarities with a 3-torus. We consider a flat ΛCDM model with density parameters, for the cosmological constant and the cold dark matter, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_c = 0.3$, and a Hubble constant $H_0 = 72$ km s^{-1} Mpc^{-1}; we neglect reionization. We used our CMB code to compute maps of the scalar CMB polarization E, with the method described in [Riazuelo *et al.*, 2004]. The only difference is that the quantities $\Theta_\ell(k,\eta)$ are replaced by their polarization counterparts $E_\ell(k,\eta)$.

For the 3-torus, low resolution maps are presented in Fig. $\mathfrak{B}$.5. The main result is that the polarization fluctuations are always positively correlated, although not as perfectly as for the (academic) pure SW temperature map, as shown after in Fig. $\mathfrak{B}$.5.

For the sixth-turn space we calculate the correlations between circles on various simulated CMB maps. For this space, the fundamental domain is an hexagonal

[24]see *e.g.* Riazuelo *et al.*, 2004.

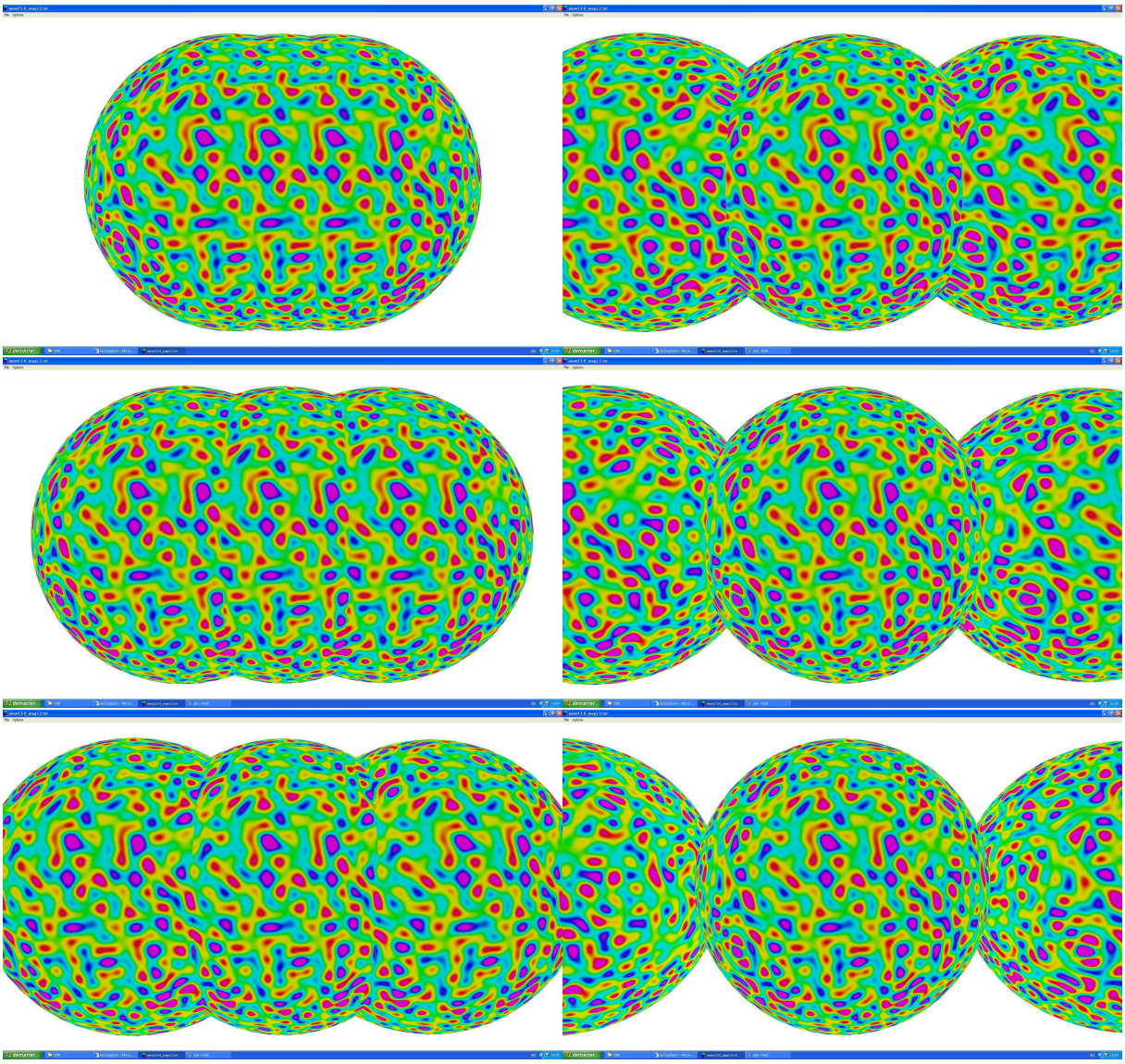


Figure $\mathfrak{B}$.2: **The CMB scalar E polarization anisotropies in a flattened toroidal universe.** We consider here a flattened torus of size $\sim 1/6.3$ the diameter of the LSS in the horizontal direction. We show three copies of the LSS, whose intersections correspond to the matched circles. We consider a small number of modes. No filtering has been applied to the map. Therefore, all the angular scales to which the modes contributes are faithfully represented here. The matching is very good for the largest nearby circles. It then decreases, and increases again for the smallest circles, as follows from Eq. $\mathfrak{B}$.6. It is the worst for circles of radius 45 degrees, as seen in the bottom left and upper right configurations.

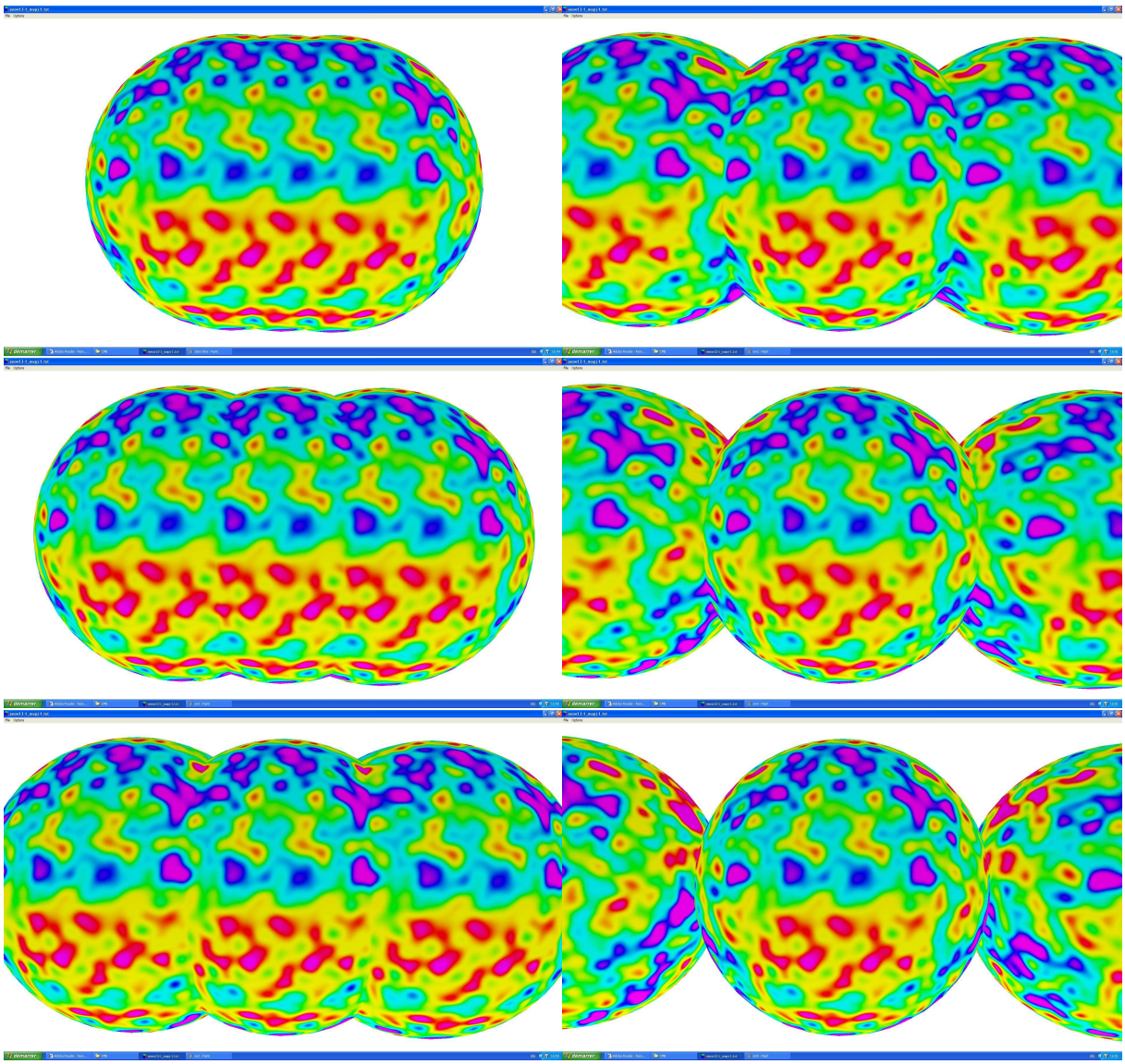


Figure $\mathfrak{B}$.3: **Sachs-Wolfe anisotropies in a flattened toroidal universe.** Since only the Sachs-Wolfe contribution is considered here, the matching between the circles is almost perfect, regardless of the angular size or distance of the circles. Note that the map seems to be at a lower resolution than the polarization map since the former has a relatively flat $\ell(\ell+1)C_\ell$ spectrum, whereas the latter has a fast growing spectrum because no large scale polarization is present.

prism. But along the direction of the prism, the different copies are not deduced from a translation (as this is the case for a torus), but from a screw motion defined as a translation composed with a $\pi/3$ rotation along the vertical axis (here corresponding to the direction of the prism and to the vertical direction in the maps). The observer sitting at the center of the prism expects to see pairs of matched circles at opposite latitude. In each pair the circles are relatively twisted by an angle $n\pi/3$, where n is the number of screw motions one has to perform to go from one circle to the other. The prism height L is taken equal to one Hubble radius. This implies a radius of the observable universe $R_{\rm LSS} \sim 3.246$ Hubble radii. Therefore, we expect a series of matched circles at latitudes

$$\theta_n = \pm \arccos\left(n\frac{L}{2R_{\rm LSS}}\right), \tag{$\mathfrak{B}$.7}$$

with $1 \leq n \leq 6$. The twist between the circles of latitude $\pm\theta_n$ is

$$\varphi_n = n\frac{\pi}{3}. \tag{$\mathfrak{B}$.8}$$

Since for a sixth-turn space, both the direction of observation and the angular dependence of the emitting region are subject to the same screw motions, the above formula ($\mathfrak{B}$.6) remains valid. Fig. $\mathfrak{B}$.5 shows a few illustrations for various cases. The dependence of the matching of the circles as a function of their distance is more straightforward.

$\mathfrak{B}$.6 Possible sources of blurring of the circles

The nice result of Eq. ($\mathfrak{B}$.6) will however not correspond to what can be observed, at least for four reasons:

1. The relevance of Eq. ($\mathfrak{B}$.6) relies on the assumption that all the polarization is generated at the last scattering epoch, and does not take into account any equivalent of the ISW effect for the polarization. However, the duration of the last scattering epoch is short only in the absence of reionization. Since the last WMAP results[25] suggest that a significant amount of reionization took place, maybe as early as $z \sim 15$, one expects that some part of the observed CMB radiation was scattered long after recombination. This should induce a bump in the observed polarization spectrum at large angular scale (as well as a bump in the cross-correlated TE spectrum, as already claimed by the WMAP team). In this case, the angular scales at which reionization contributes should blur the circles. However, the angular power spectrum if strongly increasing in this region. Thus, at the to intermediate ($\ell \sim 60$) angular scales, the low ℓ contribution of reionization should become negligible, as compared to that of the recombination epoch.

[25] see *e.g.* Komatsu *et al.*, 2003.

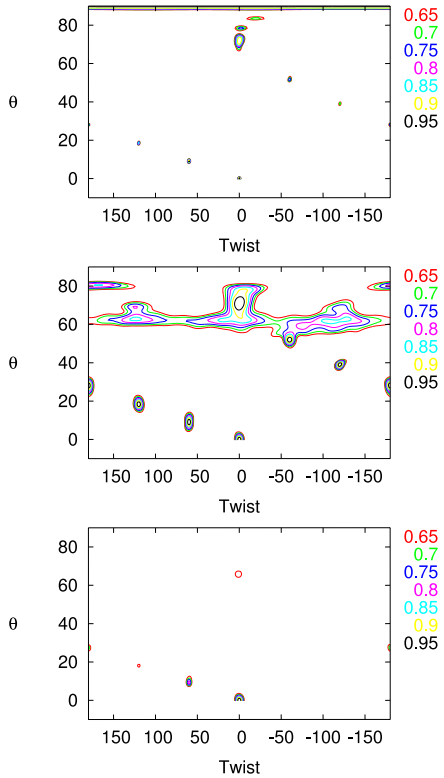


Figure $\mathfrak{B}$.4: **Comparison of the circle matching for a scalar polarization E map and a temperature map.** In these plots we compute the correlation between circles of latitudes $\pm\theta$, with a possible twist between them in a sixth-turn space. Given the small correlation length of CMB anisotropies in any realistic cosmological model, the correlation between circles is expected to be negligible except when the circles are very close (around $\theta = 0$ with a negligible twist), or for the values θ_n and φ_n given in Eqns ($\mathfrak{B}$.7,$\mathfrak{B}$.8) given by the topology we consider here. The first plot shows the correlation for a polarization map, whereas the next one show the correlation for the pure Sachs-Wolfe, then the full temperature map for the same density field. Although the pure (but unobservable) Sachs-Wolfe contribution always gives as expected a 100% correlation (up to pixellization effects) for the matching circles, this is no longer the case for the other maps. Note that the correlation in the polarization map starts from 100% for untwisted equatorial circles, then decreases and reaches a minimum for circles of latitude $\sim$ 40 degrees, and then increases again for smaller circles, as expected. This pattern is always present in polarization maps. For comparison, a temperature map may not show such a regular pattern, in particular at low or intermediate angular scales such as in these maps, where either the ISW or Doppler terms blur the correlations.

2. Equivalently, gravitational lensing is expected to contribute to the CMB polarization anisotropies at large ℓ. The relevant range is however expected to be sufficiently different (large angular scales for reionization, small ones for lensing), as to preserve a limited range of ℓ where both reionization and lensing are negligible.

3. We have assumed a perfect signal-to-noise ratio in the data. This is certainly the most object able hypothesis done here since at present very little is known on how to extract as accurately as possible foreground polarized emission from CMB observations. A careful analysis of the expected signal-to-noise ratio of WMAP and Planck mission polarization maps and its imprint on the detectability of the topology of the universe should be performed and is left for future studies.

4. Finally, Eq. ($\mathfrak{B}$.6) was calculated under the assumption that the whole set of angular scales to which a plane wave (say) contributes was observed. In practice, an angular filtering is applied to a map, in particular to account for the instrument resolution. A single mode with comoving wavenumber k mostly contributes to the angular scale ℓ

$$\ell \sim k\eta_{\rm LSS}, \qquad (\mathfrak{B}.9)$$

where $\eta_{\rm LSS}$ is the comoving distance of the last scattering sphere. However, this is only approximate, and a plane wave usually contributes also, although with less intensity, to all the angular scales larger than this value (see Ref. [Hu et White, 1997]). As a consequence, a map of resolution $\ell_{\rm max}$ exhibits in principle perfectly the correlations due to modes with $k \lesssim k_{\rm max} = \ell_{\rm max}/\eta_{\rm LSS}$, but also incompletely exhibits the contributions from larger wavenumbers. The consequence is a decrease of the expected correlation. To avoid this problem, the best way is to chose a value of $\ell_{\rm max}$ which corresponds to a decreasing part of the spectrum, making the contribution of higher wavenumbers $k > k_{\rm max}$ as small as possible. For this reason, in a pure Sachs-Wolfe map, a better correlation is obtained when the resolution corresponds to the decrease of the first peak ($\ell_{\rm max} \sim 300 - 400$), than before the first peak maximum ($\ell_{\rm max} \sim 150$). It happens that the most detailed circle search in CMB temperature map[26] was precisely performed at angular resolution $\ell \sim 400 - -500$, so that this possibly annoying problem was evaded.

In other words, there is the necessity to convolve the three-dimensional Fourier spectrum with some window function in order to project it on the celestial sphere and obtain the C_ℓ. This window function is not infinitely narrow as was done in the approximation made in Eq. ($\mathfrak{B}$.9). However, the window function associated to the scalar E mode of polarization is in fact far more peaked than that of the Sachs-Wolfe contribution to temperature

[26] see *e.g.* Cornish *et al.*, 2004.

anisotropies, mainly because of the intrinsic angular dependence of the polarization[27]. Therefore, this effect does seem to be problematic for the imprint of topology in polarization maps.

As we explained, among these four problems, the third one is certainly the most problematic. It is possible that even the Planck mission sensitivity to polarization will not increase the signal-to-noise ratio sufficiently enough to allow to search for the topology of the universe in that way. Future polarization designed experiments, however, should be able to do the job. The problem addressed in this paper represents an example of the required sensitivity that might be imposed when designing next generation CMB experiments.

$\mathfrak{B}$.7 Conclusion

High precision experiments such as WMAP now give a clear outline of the cosmological model of out universe. Despite this tremendous success of modern cosmology, some old questions such as the shape of space are still unanswered. In this paper, we have described a new test to search for the topology of the universe using polarization maps. This test is rather ambitious as it necessitates clean data on the CMB polarization map. Given the advantages of the polarization maps which have been presented here, it appears highly likely that future missions with sufficient good signal-to-noise ratio (Planck, or some future polarization dedicated missions) will help bringing definitive conclusions about the question of cosmic topology.

Acknowledgements

The authors wish to thank Simon Prunet, Glenn Starkmann and Jean-Philippe Uzan for enlightening discussions about CMB physics and topology of the universe. Most of the simulations presented here were performed on the MPOPM cluster of the Meudon Observatory computing center. A.R. wishes to thank Prof. Yin for enlightening discussions about floating point arithmetics.

[27] see *e.g.* Hu et White, 1997.

Article $\mathfrak{C}$*:*

A new analysis of Poincaré dodecahedral spacetime model

S. Caillerie, M. Lachièze-Rey, J.P. Luminet, R. Lehoucq, A. Riazuelo, and J. Weeks

The full three–year WMAP results reinforce the absence of large angle correlations at scales greater than 60 degrees. The Poincaré dodecahedral space model, which may explain naturally such features, thus remains a plausible cosmologial model. Here, we have used recent eigenmodes calculations of the dodecahedral space to predict the temperature fluctuations of the cosmic microwave background (CMB) in such models, with an improved angular resolution. We have designed the predicted maps of the CMB, and confirmed the expected presence of matching circles. For a set of admissible cosmological parameters, we have derived the angular power spectrum of the CMB, up to large values of the wavenumber. Comparison with the WMAP3 observational confirms a remarkable fit with a Poincaré dodecahedral space model, for a value $\Omega_{\rm tot} = 1.018$ of the averaged (total) energy density.

$\mathfrak{C}$.1 Introduction

The interest for cosmic topology has been renewed after the first-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe observations [Bennett *et al.*, 2003a] (hereafter (WMAP1), which gave unexpected discrepancies with the standard Λ-CDM model with infinite flat space sections, including a lack of large angle correlations in the angular power spectrum at multipoles $\ell = 2$ and 3, and violations of statistical isotropy in the same multipoles [Schwarz *et al.*, 2004]. Among various possible explanations, it has been suggested [Spergel *et al.*, 2003] that a spatially finite multi-connected universe may explain the large-angle correlations. More precisely, [Luminet *et al.*, 2003] have shown that a cosmological model where the spatial sections identify to the Poincaré dodecahedral space (hereafter PDS cosmological model) predicts low multipoles in the CMB fluctuations spectrum which fit well

the observational data, although it has not been stated if it may account for the violations of statistical anisotropy (which may be interpreted as a local, non cosmological effect). More generally, it was proved [Weeks *et al.*, 2004] that the long wavelengths modes are relatively lowered in a special family of closed multiconnected spaces called "well-proportioned". Beside the PDS model, they include also flat tori and the other polyhedric spherical spaces. The power spectrum for octahedral and tetrahedral spaces have been calculated by [Aurich *et al.*, 2005b] and shown to be also consistent with the WMAP1 large angle correlations, although requiring a rather high value of the density parameter Ω.

The PDS model predicts 6 pairs of matched antipodal circles as a definite signature. Such circles have been searched in WMAP1 data by different teams, using various statistical indicators and massive computer calculations. On the one hand, [Cornish *et al.*, 2004] and [Shapiro Key *et al.*, 2006] have searched matched circles. Their negative result led them to reject the PDS hypothesis. On the other hand, with a different analysis, [Roukema *et al.*, 2004] found six pairs of matched circles distributed in a dodecahedral pattern, with angular sizes consistent with the PDS model. However their claim was not accompanied by a statistical analysis of the results. Eventually, [Aurich *et al.*, 2005b] and [Aurich *et al.*, 2005c] also performed a search for matching circles. Their careful analysis showed that the statistics was considerably degraded by the integrated Sachs Wolfe and Doppler contributions to the temperature fluctuations in the CMB (see Eq. ($\mathfrak{C}$.18) below). They concluded that the model could not be rejected or confirmed by such analyses. The topic remains controversial and keeps the debate about the pertinence of PDS open.

The recent release of the full three–year WMAP results (hereafter WMAP3) [Spergel *et al.*, 2006; Page *et al.*, 2006; Hinshaw *et al.*, 2006; Jarosik *et al.*, 2006] brings new informations. The lack of angular correlation at large angles was not investigated in the original analysis of the WMAP team, but [Copi *et al.*, 2006] reported an absence of large angle correlations, at scales greater than 60 degrees (i.e. for $\ell = 2, 3$), at a 99.85% C.L., even more significant in WMAP3 than in WMAP1. This reinforces the interest of studying the eigenmodes of the PDS model and of the resulting angular power spectrum, for a plausible set of cosmological parameters.

A multi-connected space is generically defined as the quotient space $E = X/\Gamma$, where X (the universal covering of E) is a maximally symmetric space, and Γ an holonomy group (see, *e.g.*, [Lachièze-Rey et Luminet, 1995]), which maps E onto itself. The symmetric space X corresponds to an homogeneous spatial section of a standard Friedmann-Lemaître spacetime. In the case of the PDS, it is the three-sphere $\mathcal{S}^3$, and its finite holonomy group Γ is generated by two elements, represented by two special orthogonal matrices.

This paper evaluates further the predictions of a PDS cosmological model, and compares them with the CMB new observational results. This requires the knowledge of the eigenmodes of the Laplacian on the PDS, i.e. the solution of its eigenvalue Helmoltz equation. Up to recently, only numerical solutions were

available, and for the first modes only (corresponding to the lower wavenumbers k). For instance, the calculations of [Luminet *et al.*, 2003] were purely numerical, and only up to $k = 24$. In [Aurich *et al.*, 2005b], they were extended up to $k = 230$. The present work is based on new analytical calculations of the eigenmodes of the PDS, which appeared in [Lachièze-Rey et Caillerie, 2005] and consistent with a recent work by Bellon [Bellon, 2006]. They are summarized in xxx, and allowed us to compute modes for very high values of k, much beyond $k = 230$. However storage capacity limited the the results presented in this article to $k = 230$ as the number of modes goes as $k^3_{\max}$ because a mode k is defined by the $(k+1)^2$ coefficients of its projection on $\mathcal{S}^3$ modes). If the aim is to calculate the power spectrum only (without maps temperature maps) we can go further, up to $k = 3000$, using a theorem conjectured by [Aurich *et al.*, 2005b] and demonstrated by [Gundermann, 2005].

The eigenmodes of the multi-connected space E are those of its universal covering X, which are invariant under Γ. They are the solutions ψ of the Helmholtz equation:

$$\Delta_X \psi = \lambda_k \psi \tag{$\mathfrak{C}$.1}$$

where Δ_X is the laplacian on X and λ_k the eigenvalue associated to the integer wavenumber k. The invariance condition under Γ reads:

$$R_g \psi = \psi, \ \forall g \in \Gamma. \tag{$\mathfrak{C}$.2}$$

where R_g express the natural left action of the rotation g of Γ (a subgroup of SO(4)) on functions: $\psi \mapsto R_g\psi$, with $R_g\psi(x) \equiv \psi(g^{-1}x)$. It results that any eigenvalue for a spherical space is an eigenvalue for S^3. The latter are of the form $\lambda_k = -k(k+2)$, indexed by the integer wavenumbers, $k \in \mathbb{N}$. Each has multiplicity $(k+1)^2$. The eigenvalues of the PDS form a subset of this set. Their values have been given by [Ikeda, 1995].

Given a model for gravitational instabilities, the statistical distribution of the CMB temperature fluctuations results from that of the eigenmodes in the PDS. Applying the method of [Lachièze-Rey et Caillerie, 2005], we construct realizations of the latter, up to wavenumbers $k_{\max} = 230$. From them, we calculate the implied realizations of the CMB temperature. This allowed us to reach a resolution in the temperature fluctuations corresponding to the (curvature dependent) angular wavenumber $\ell_{\max} \sim k_{\max}\sqrt{\Omega_{\text{tot}} - 1} \sim 30$.

In section $\mathfrak{C}$.3, we show the "typical" maps corresponding to such realizations with angular resolution $\theta \sim 3\,^\circ$. In these maps, we exhibit the expected presence of matched "circles in the sky" [Cornish *et al.*, 1998].

From the realizations of the temperature distributions, we have generated a statistical set of realizations of the eigenmodes distribution. This allowed us to estimate expectation values and statistics for the characteristic of the CMB temperature distributions, in particular for the angular power spectrum coefficients C_ℓ, up to the limited $\ell_{\max}$.

For the modes with lowest values of ℓ (up to 24), we confirm the previous calculations of [Luminet *et al.*, 2003]. We extend them over a wider range of the

spectrum, and compare with the WMAP3 data [Spergel *et al.*, 2006; Page *et al.*, 2006; Hinshaw *et al.*, 2006; Jarosik *et al.*, 2006].

$\mathfrak{C}$.2 Eigenmodes of the laplacian

We recall briefly the main results obtained in [Lachièze-Rey et Caillerie, 2005], summarizing the key elements and insisting on practical details, concerning the eigenmodes of the PDS, i.e. on the solutions of equations ($\mathfrak{C}$.1) and ($\mathfrak{C}$.2) for the PDS.

The solutions of ($\mathfrak{C}$.1), for the three sphere S^3, form a vector space, which is the direct sum of the subvector spaces corresponding to each value of λ_k: $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}_k$. We note $\mathcal{V}_k$ the vector space containing the eigenmodes of $\mathcal{S}^3$ corresponding to the eigenvalue $\lambda_k = -k(k+2)$. Similarly, the vector space of eigenmodes of PDS is splitted as the direct sum $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}_k^{\mathbf{PDS}}$. Each $\mathcal{V}_k^{\mathbf{PDS}}$, the vector space of all eigenmodes of PDS with the same eigenvalue λ_k, is a subvector space of $\mathcal{V}_k$, possibly reduced to the empty set. Its dimension is the degeneracy of λ_k which is an integer multiple of $k+1$. It is non zero only if k is even. Its value has been calculated explicitely by Ikeda [Ikeda, 1995].

After such a splitting, the eigenmodes are computed independently on each $\mathcal{V}_k^{\mathbf{PDS}}$. For convenience, they are expressed in a basis of $\mathcal{V}_k$.

First, we can consider the *parabolic* basis of $\mathcal{V}_k$, which was first introduced in [Bander et Itzykson, 1966] by group theoretical arguments. It corresponds to the following set of functions, for $k, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ and $-k/2 \leq (m_1, m_2) \leq k/2$:

$$\begin{array}{rccc} T_{k;m_1,m_2}: & \mathcal{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\chi,\theta,\phi) & \longmapsto & \alpha(\cos\chi\, e^{i\theta})^l(\sin\chi\, e^{i\phi})^m P_d^{m,l}(\cos 2\chi) \end{array} \tag{$\mathfrak{C}$.3}$$

where $l := m_1 + m_2$, $m := m_2 - m_1$, $d = k/2 - m_2$ and the coefficient $\alpha = \sqrt{\frac{k+1}{2\pi^2}}\sqrt{\frac{(k/2+m_2)!(k/2-m_2)!}{(k/2+m_1)!(k/2-m_1)!}}$ is computed from normalization requirements. As $\mathbf{T} \equiv \{T_{k;m_1,m_2}\}$ is a basis of $\mathcal{V}^k$, it generates $\mathcal{V}_X^k$, so each solution of ($\mathfrak{C}$.1) for the PDS can be decomposed on this set as:

$$\psi_k^{\mathbf{PDS}} = \sum_{m_1,m_2} f_{k;m_1,m_2}\, T_{k;m_1,m_2} \tag{$\mathfrak{C}$.4}$$

where the $f_{k;m_1,m_2}$ are complex numbers.

In order to be an eigenmode of the PDS, $\psi_k^{\mathbf{PDS}}$ has to be invariant under Γ, the holonomy group of the PDS. To be so, it is sufficient that it is invariant under two generators, that we note g_1 and g_2:

$$R_{g_1}\psi_k^{\mathbf{PDS}} = \psi_k^{\mathbf{PDS}} \quad \text{and} \quad R_{g_2}\psi_k^{\mathbf{PDS}} = \psi_k^{\mathbf{PDS}} \tag{$\mathfrak{C}$.5}$$

where R_g expresses the natural left action of the SO(4) rotation g as defined above.

To solve this system of equations, owing to their nice properties under rotations on the sphere, we introduced the Wigner D-functions. This set of functions naturally acts on the Lie group SO(3) *via* the following action:

$$\begin{array}{rccc} D^j_{m_1,m_2}: & \mathrm{SO}(3) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & g & \longmapsto & < j, m_1 | R_g | j, m_2 > \end{array} \tag{$\mathfrak{C}$.6}$$

The vectors $|jm\rangle$, $-j \leq m \leq j$, form an orthonormal basis for $\mathcal{H}^j$, the $2j+1$ dimensional irreducible representation of SU(2). When j is integer, this is also an irreducible unitary representation of SO(3), and the $|jm\rangle$ can be taken as the usual spherical harmonics Y_{jm}. This implies

$$R_g Y_{jm} = \sum_{m'=-j}^{j} \mathcal{D}^j_{m'm}(g^{-1})\ Y_{jm'}. \tag{$\mathfrak{C}$.7}$$

In [Lachièze-Rey et Caillerie, 2005], we also derived a useful identity which describes the action of these functions on the product of two elements of SO(3),

$$D^j_{m_1,m_2}(gh) = \sum_m D^j_{m,m_2}(g)\ D^j_{m_1,m}(h), \tag{$\mathfrak{C}$.8}$$

which is just the resolution of identity in their definition ($\mathfrak{C}$.6).

The identity between the three-sphere $\mathcal{S}^3$ and SU(2), as manifolds, allows us to link these functions with those of the parabolic basis. Any point of $\mathcal{S}^3$ is identified to an element of SU(2) by the following relation:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^3 & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2) \\ x \equiv (\chi, \theta, \phi) & \longmapsto & u_x \equiv \begin{pmatrix} \cos\chi\ e^{i\theta} & i\ \sin\chi\ e^{i\phi} \\ i\ \sin\chi\ e^{-i\phi} & \cos\chi\ e^{-i\theta} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{$\mathfrak{C}$.9}$$

(Note that one finds other phase choices for this identification in the literature).

On the other hand, there is a group isomorphism between SU(2) and SO(3)/$\mathbb{Z}_2$, where $\mathbb{Z}_2$ refers to the multiplicative group $\{-1, 1\}$. Thus, each element u of SU(2) defines an SO(3) rotation g_u. In practice, a rotation of SO(3) is parametrized by its Euler angles α, β, γ. Taking into account the identification above, the correspondance takes the form:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SU}(2) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(3) \\ u = (\chi, \theta, \phi) & \longmapsto & g_u = (\alpha, \beta, \gamma), \end{array} \tag{$\mathfrak{C}$.10}$$

with

$$\chi = \frac{\beta}{2} \qquad \theta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \qquad \phi = \frac{\alpha-\gamma}{2}. \tag{$\mathfrak{C}$.11}$$

This allows to consider the Wigner D-functions as functions on SU(2) and, thus, on $\mathcal{S}^3$. Their explicit expression (see for instance [Edmonds, 1960]) shows the identification, up to a constant, to the previous functions $T_{k;m_1,m_2}$:

$$D^{k/2}_{m_2,m_1}(u_x) \equiv \sqrt{\frac{2\pi^2}{k+1}}\ T_{k;m_1,m_2}(u), \tag{$\mathfrak{C}$.12}$$

with $-k/2 \leq m_1, m_2 \leq k/2$.

We can now write explicitely equation ($\mathfrak{C}$.5), by expanding modes on the parabolic basis. This gives, for any x on $\mathcal{S}^3$,

$$\sum_{m_1,m_2} f_{k;m_1,m_2} T_{k;m_1,m_2}(x) = \sum_{m_1,m_2} f_{k;m_1,m_2}\ T_{k;m_1,m_2}(g^{-1}x), \tag{$\mathfrak{C}$.13}$$

where g is one of the two generators (g_1 or g_2) of the spherical space under consideration. Using property ($\mathfrak{C}$.8), we obtain the simple relation between coefficients of the eigenmodes:

$$f_{k;m_1,m_2} = \sum_m f_{k;m_1,m}\ D^{k/2}_{m,m_2}(g^{-1}) \tag{$\mathfrak{C}$.14}$$

First, we can note that this equation is independant of index m_1. This allows the splitting of our vector space as the direct sum

$$\mathcal{V}^k_X = \bigoplus \mathcal{V}^k_{X,m_1}.$$

More practically, this corresponds to writing the eigenmode $f_{k;m_1,m_2}$ as:

$$f_{k;m_1,m_2} = f_{km_2}\ \delta_{m_0 m_1}, \tag{$\mathfrak{C}$.15}$$

where m_0 is some arbitrary integer between $-k/2$ and $k/2$. This implies that the degeneracy of an eigenmode of a spherical space is proportional to $k+1$. Thus, we rewrite equation ($\mathfrak{C}$.14) as an eigenvalue equation:

$$D_{k,g} F_k = F_k \tag{$\mathfrak{C}$.16}$$

where F_k is the vector with coordinates f_{km_2} and $D_{k,g}$ is the matrix whose general term is $D^{k/2}_{m,m_2}(g^{-1})$. We thus obtain a system of two eigenvalue equations that we have to solve simultaneously. In [Lachièze-Rey et Caillerie, 2005], we have shown that when we choose a basis of the three-sphere where one generator, *e.g.* g_1, is diagonal (which is always possible), this impose a condition on m_2 as:

$$m_2 = 0 \pmod n \tag{$\mathfrak{C}$.17}$$

where the integer $n = 5$ in the case of the PDS. In this case, finding the eigenmodes of the Laplacian corresponds to finding a solution of ($\mathfrak{C}$.16) for $g = g_2$ and where we consider only indices m_2 satisfying the condition ($\mathfrak{C}$.17).

$\mathfrak{C}$.3 Temperature maps

We now assume cosmological models where a spatial section is a PDS, and we restrict our study to the values of the parameter Ω_{tot} in the range favorized by WMAP1 and WMAP3 observations.

$\mathfrak{C}$.3.1 Maps

Matter fluctuations at the recombination are assumed to follow a Gaussian random distribution with a flat power spectrum. Thus, a realization is given by a gaussian random distribution of the modes calculated in the previous section, constrained to have the desired power spectrum law.

Such a distribution of matter fluctuations generates a temperature distribution on the CMB which results from different physical effects. If we substract foreground effects like galaxy motion and the black-body spectrum, it will mainly be generated by the ordinary Sachs-Wolfe effect at large scales, which results from the photon scattering on matter. At smaller scales, Doppler oscillations are also important, which arise from the acoustic motion of the baryon-photon fluid, as well as the *integrated Sachs-Wolfe effect*. The latter has the same physical origin as the ordinary Sachs-Wolfe effect, namely the energy exchanges between the CMB photons and the time-varying gravitational fields, but on the line of sight rather than on the last scattering surface (hereafter LSS). This is summarized in the Sachs-Wolfe formula which gives the fluctuations of temperature in a given direction $\hat{n}$ as:

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{n}) = \left(\frac{1}{4}\frac{\delta\rho}{\rho} + \Phi\right)(\eta_{\rm LSS}) - \hat{n}.\mathbf{v}_e(\eta_{\rm LSS}) + \int_{\eta_{\rm LSS}}^{\eta_0} (\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) d\eta \qquad (\mathfrak{C}.18)$$

where the quantities Φ and Ψ are the usual Bardeen potentials, and $\mathbf{v}_e$ the velocity within the electron fluid; overdots denote time derivatives. The first terms represent the Sachs-Wolfe and Doppler contributions, evaluated at the LSS. The last term is the integrated Sachs-Wolfe (ISW) effect. This formula is independent of the spatial topology, and is valid in the limit of an infinitely thin LSS, neglecting the reionization.

The temperature distribution is calculated with a CMBFast-like code developped by one of us[1], under the form of temperature fluctuations maps at the LSS. One such realization is mapped on figure $\mathfrak{C}$.1, where the first modes, up to $k = 230$, give an angular resolution of about $6\,^\circ$, thus without fine details. This is sufficient for a study of the topological effects, which are dominant at the larger scales.

Such maps are the starting point for topology analysis: firstly, for the search of matched pairs of circles, as described in the next paragraph; secondly, through their decompositions in spherical harmonics, which provide us the a_{lm} coefficients. Relevant combinations of them will give us statistical estimators like the power spectrum, that we study in next section. They allow direct comparison between observational data theory.

$\mathfrak{C}$.3.2 Circles in the sky

A multi-connected space can be seen as a cell (called the fundamental domain), the copies of which tile its universal covering space. If the radius of the LSS is

[1] This code, called CMBSlow, has been developped by A. Riazuelo in order to take into account numerous fine effects, in particular topological ones.

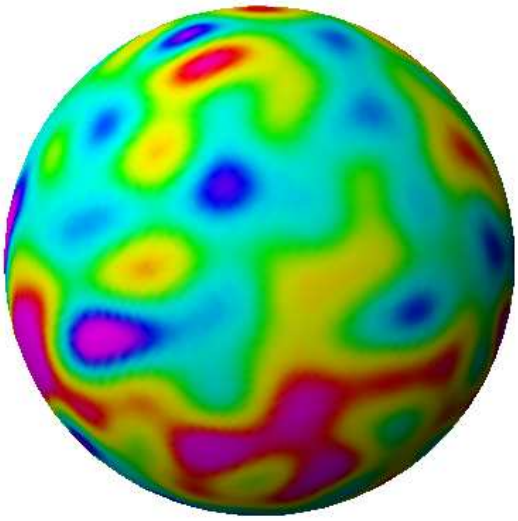


Figure $\mathfrak{C}$.1: Temperature map for a PDS with $\Omega_{\text{tot}} = 1.02$ (up to $k = 230$ giving a resolution of $6\,^{\circ}$.

greater than the typical length of the cell, the LSS wraps all the way around the universe and intersect itself through circles. Each circle of self-intersection appears to the observer as two different circles the sky, associated to homologous faces of the fundamental polyhedron, on the map of temperature fluctuations. Figure $\mathfrak{C}$.2 shows the intersection of the different homologous LSS's, as seen by an observer sitting inside one of them.

However, these circles are generated only by a pure Sachs-Wolfe effect ; the additional contributions to the CMB temperature fluctuations (Doppler effect and integrated Sachs-Wolfe effect) produce different patterns, in different directions, which blur the topological signal.

This has been analysed carefully by [Aurich *et al.*, 2005b] and [Aurich *et al.*, 2005c], which conclude that an absence of detection is not significative. On the other hand, a detection of matching circles would strongly suggest a multi-connected topology of space.

$\mathfrak{C}$.4 Harmonic analysis

$\mathfrak{C}$.4.1 Power spectrum

As any function defined on the sphere, the CMB temperature fluctuations can be decomposed into spherical harmonics:

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{n}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, Y_{lm}(\hat{n}) \qquad (\mathfrak{C}.19)$$

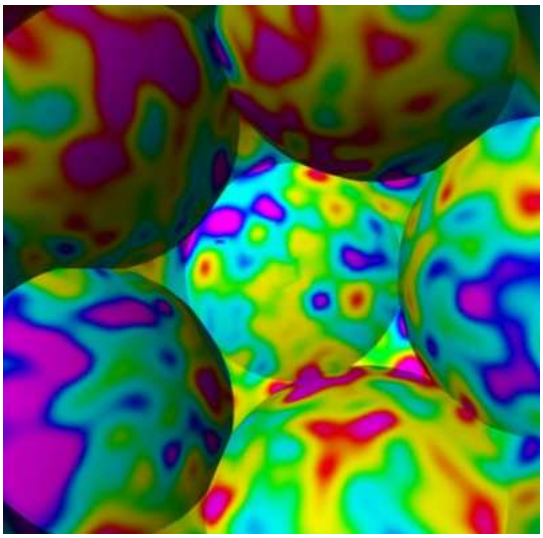


Figure $\mathfrak{C}$.2: Circles in the sky for a PDS with $\Omega_{\rm tot} = 1.02$ (up to $k = 230$ giving a resolution of $6\,^\circ$.

where $\hat{n}$ is the unitary vector in the direction given by the two angles (θ, ϕ).

For an isotropic and homogeneous statistical distribution of matter in the universe, the relevant information contained in the temperature fluctuations is only contained in the power spectrum, defined as

$$C_l := \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} < a_{lm} a^*_{lm} > . \qquad (\mathfrak{C}.20)$$

Such a power spectrum has been calculated from the temperature fluctuations of the CMB measured by WMAP. We compare it here with the predictions of our model.

From the set of our realizations of the predicted temperature maps, we have calculated a fluctuation power spectrum. The figure $\mathfrak{C}$.4.1 gives our estimated spectra, for different cosmological models characterized by three different values of $\Omega_{\rm tot}$, compared with the WMAP3 data. The normalization is defined by imposing that our curves must converge with Λ-CDM when ℓ is high, as topology is significant only at high angles and low ℓ. We can see that the three different models of PDS agree well with observations, up to the cutoff value $\ell_{\rm max} \sim k_{\rm max}\sqrt{\Omega_{\rm tot} - 1}$. Here, as numerical computations only goes up to the wavemode $k_{\rm max} \sim 230$, data results are relevant only up to a value of $\ell \sim 25 - 30$, depending on $\Omega_{\rm tot}$.

In order to compare the predictions of simply connected and multi-connected topologies, we have also compared our best fit predicted spectrum with the one obtained from the standard Λ-CDM. Figure $\mathfrak{C}$.3 shows that Λ-CDM model present a quadrupole larger than expected and is a bit too large for the multipole $\ell = 20$.

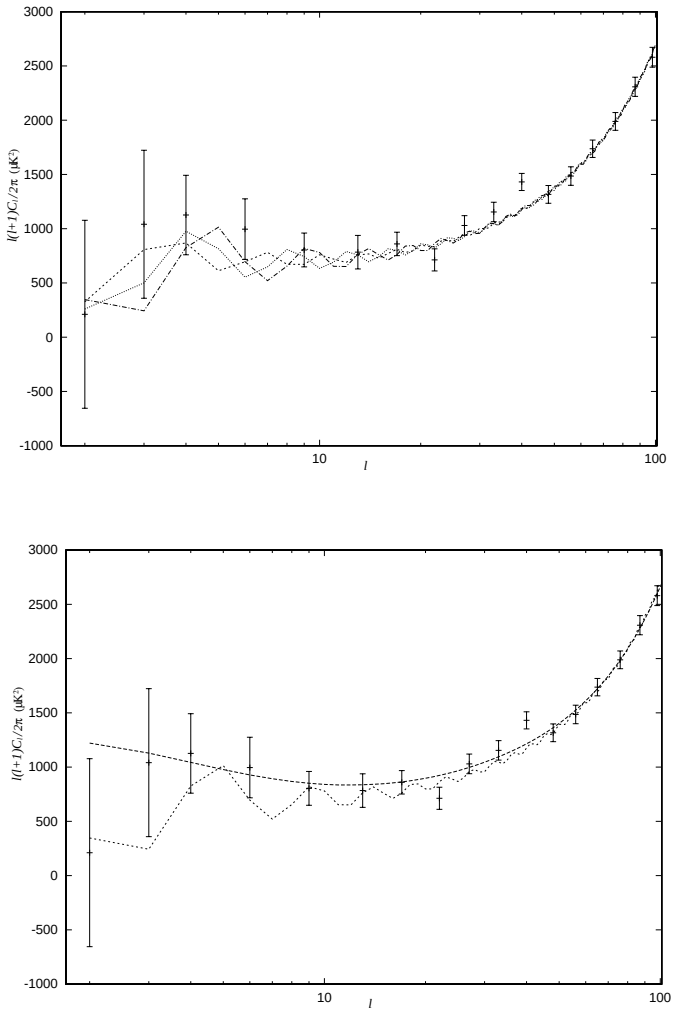


Figure $\mathfrak{C}$.3: Comparative power spectrum for WMAP3 (errorbars), Λ-CDM (dotted curve) and PDS (dashed curve) for $\Omega_{\rm tot} = 1.018$.

$\mathfrak{C}$.4.2 The temperature correlation function

The two-point temperature correlation function $C(\theta)$ is defined as $C(\theta) :=< \delta T(\hat{n})\ \delta T(\hat{n}') >$, where the average is done on all unitary vectors $\hat{n}$ and $\hat{n}'$ such that $\hat{n}.\hat{n}' = \cos\theta$. Statistical isotropy would imply:

$$C(\theta) \simeq \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{+\infty} (2l+1)\ C_l\ P_\ell(\cos\theta), \qquad (\mathfrak{C}.21)$$

where C_ℓ is the power spectrum and P_ℓ is a Legendre polynomial. Figure $\mathfrak{C}$.4 shows this correlation function for observational data, Λ-CDM data and two Poincaré dodecahedral space data. It is easy to see that temperature correlation function

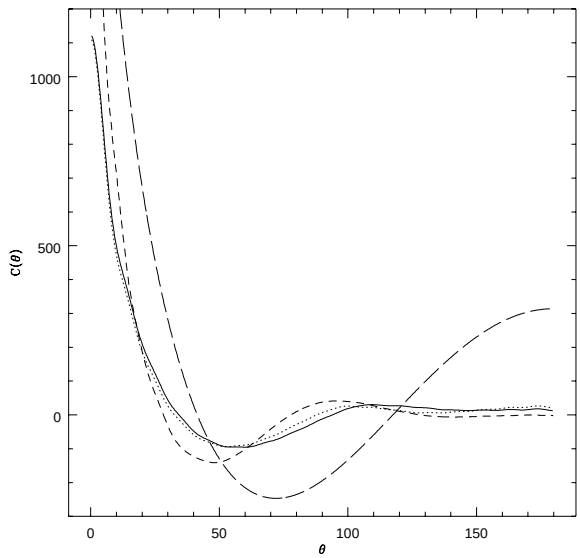


Figure $\mathfrak{C}$.4: Comparative angular correlation resulting from WMAP data (full line) compared to Λ-CDM (long dashed) and models of PDS for 2 different $\Omega_{\rm tot}$: 1.018 (dot) and 1.02 (short dashed).

displays very weak correlations at wide angles $50^\circ < \theta < 160^\circ$. The Λ-CDM model which gives the best-fit to the WMAP data fails to reproduce the lack of power at large angles. (One might argue, however, that this discrepancy should not be overemphasized, because a Galactic cut needs to be applied to the data at such large angles; and because the expectation values of $C(\theta)$ are computed from a much smaller number of pixels). In addition, a small discrepancy also appears, between the Λ-CDM model and the WMAP data, at angles less than 50°.

The PDS models provide much better fits to the data, in particular for $\Omega_{\rm tot} = 1.018$. This results from the sensitivity of the correlation function to the high-order modes, precisely the most influenced by topological effects. Clearly, the Λ-CDM model strongly diverges from observational data at the largest angular scales, beyond 50°.

$\mathfrak{C}$.5 Conclusion

The recent analytical calculations of the eigenmodes of the PDS allowed us to increase the accuracy of the predicted maps of the CMB temperature fluctuations in PDS cosmological models. We have generated simulated maps of the CMB corresponding to such models. The circles on the sky, which provide the expected signature of the topology, are found as expected.

Using a random set of gaussian realizations of the matter fluctuations, we have calculated the predicted power spectrum of the CMB temperature fluctuations and the two-point temperature correlation function. The results for the lower modes confirm the numerical estimations of [Luminet *et al.*, 2003]. But the knowledge of the PDS modes allowed us to estimate the multipoles up to $\ell \sim 30$. We have obtained a good fit with the WMAP data, implying that the PDS cosmological model remains a good candidate. Our calculations exclude the compatibility of a standard Λ-CDM model with the WMAP data.

Clearly, the power spectrum alone does not provide sufficient information to confirm definitely a cosmological model with multi-connected spatial sections. Although the observational data on the large-angle correlations have been confirmed in WMAP3, alternative explanations may still be found, the simplest one being an intrinsically non scale invariant spectrum. Thus, it remains an important task to provide complementary checks of the topological hypothesis. Among such possibilities, the examination of the non-diagonal terms of the correlation matrix may provide additional informations. The latter is not easy to derive, and difficult to interpret statistically. On the other hand, examination of polarization effects gives an additional tool for investigating space topology as proposed by [Riazuelo *et al.*, 2005].

As mentioned in the introduction, the PDS is only one among various multi-connected spherical spaces which may explain some features of the power spectrum. The eigenmodes of the other polyhedral spaces have recently been calculated. This offers us the possibility to perform a similar analysis for the corresponding cosmological models. Such a work is in progress.

Bibliographie

L. F. Abbott et R. K. Schaefer, **A general, gauge-invariant analysis of the cosmic microwave anisotropy**. Astrophysical Journal, **308** (1986) 546–562.

R. A. Alpher, H. Bethe et G. Gamow, **The Origin of Chemical Elements**. Physical Review, **73** (1948) 803–804.

R. Aurich, S. Lustig et F. Steiner, **CMB Anisotropy of the Poincare Dodecahedron**. Classical and Quantum Gravity, **22** (2005) 2061–2083.

R. Aurich, S. Lustig et F. Steiner, **CMB Anisotropy of the Poincare Dodecahedron**. Classical and Quantum Gravity, **22** (2005) 3443.

R. Aurich, S. Lustig et F. Steiner, **The circles-in-the-sky signature for three spherical universes**. astro-ph/0510847 (non publié), (2005).

M. Bander et C. Itzykson, **Group Theory and the Hydrogen Atom (I)**. Reviews of Modern Physics, **38** (1966) 330–345.

J. Bardeen, **Gauge-invariant cosmological perturbations**. Physical Review D, **22** (1980) 1882.

B. Bednarz, **Difficulties in synchronous-gauge density fluctuations**. Physical Review D, **31** (1985) 2674–2676.

M. Bellon, **Microwave background in a dodecahedral geometry**. astro-ph/0602076 (non publié), (2006).

C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw *et al.*, **First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Preliminary Maps and Basic Results**. Astrophysical Journal Supplement, **148** (2003) 1–27.

J. Bennett, M. Donahue, N. Schneider et M. Voit. **The Cosmic Perpective**. Addison-Wesley, San Fransisco (2003b).

L. Bergström et A. Goobar. **Cosmology and Particle Astrophysics**. Springer-Verlag (2004).

J. Bernstein. **Kinetic theory in the expanding universe**. Cambridge and New York, Cambridge University Press (1988).

J. R. Bond et G. Efstathiou, **Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter**. Astrophysical Journal

Letters, **285** (1984) L45–L48.

J. R. Bond, D. Pogosian et T. Souradeep, **CMB Anisotropy in Compact Hyperbolic Universes II : COBE Maps and Limits**. Physical Review, **D62** (2000) 043006.

S. Caillerie, M. Lachièze-Rey, A. Riazuelo, J. Luminet, R. Lehoucq et J. Weeks, **A new analysis of Poincaré dodecahedral spacetime**. (en préparation), (2005).

S. Carroll. **Spacetime and Geometry : an Introduction to General Relativity**. Benjamin Cummings (2003).

C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë. **Mécanique Quantique**. Hermann (1977).

C. J. Copi, D. Huterer, D. J. Schwarz et G. D. Starkman, **The Uncorrelated Universe : Statistical Anisotropy and the Vanishing Angular Correlation Function in WMAP Years 1-3**. astro-ph/0605135 (non publié), (2006).

C. J. Copi, D. Huterer et G. D. Starkman, **Multipole Vectors–a new representation of the CMB sky and evidence for statistical anisotropy or non-Gaussianity at** $2 \leq l \leq 8$. Physical Review D, **70** (2004) 043515.

N. J. Cornish, D. N. Spergel et G. D. Starkman, **Circles in the sky : Finding topology with the microwave background radiation**. gr-qc/9602039 (non publié), (1996).

N. J. Cornish, D. N. Spergel et G. D. Starkman, **Circles in the sky : finding topology with the microwave background radiation** . Classical and Quantum Gravity, **15** (1998) 2657–2670.

N. J. Cornish, D. N. Spergel, G. D. Starkman et E. Komatsu, **Constraining the Topology of the Universe**. Physical Review Letters, **92** (2004) 201302.

N. J. Cornish et J. R. Weeks, **Measuring the shape of the universe**. astro-ph/9807311 (accepté par : the Notices of the American Mathematical Society), (1998).

W. de Sitter, **Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Third paper**. Monthly Notices of the Royal Astronomy Society, **78** (1917) 3–28.

R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll et D. T. Wilkinson, **Cosmic Black-Body Radiation**. Astrophysical Journal, **142** (1965) 414–419.

R. Durrer, **Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory : A General Study and It's Application to the Texture Scenario of Structure Formation**. Fundamentals of Cosmic Physics, **15** (1994) 209–339.

A. Edmonds. **Angular momentum on quantum mechanics**. Princeton, University Press (1960).

E. Elbaz. **Cosmologie**. Ellipse, Paris (1992).

G. Ellis, **Topology and Cosmology**. General Relativity and Gravitation, **2** (1971) 7–21.

G. F. R. Ellis et G. Schreiber, **Observational and dynamical properties of small universes**. Physics Letters A, **115** (1986) 97–107.

A. Erdélyi, W. Magnus, O. F. et F. G. Tricomi. **Higher Transcendental Functions**. McGraw-Hill (1953).

H. K. Eriksen, F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Górski et P. B. Lilje, **Asymmetries in the Cosmic Microwave Background Anisotropy Field**. Astrophysical Journal, **605** (2004) 14–20.

A. P. Fairall, **On What Scale can the Universe be Considered Homogeneous**. Monthly Notes of the Astronomical Society of South Africa, **44** (1985) 119.

A. Friedmann, **Über die Krümmung des Raumes**. Zeitschrift für Physik, **10** (1922) 377–386.

A. Fryant, **Inductively generating the spherical harmonics**. SIAM Journal on Mathematical Analysis, **22** (1991) 268–271.

G. Gamow, **Expanding Universe and the Origin of Elements**. Physical Review, **70** (1946) 572–573.

E. Gausmann, R. Lehoucq, J.-P. Luminet, J.-P. Uzan et J. Weeks, **Topological Lensing in Spherical Spaces**. Classical and Quantum Gravity, **18** (2001) 5155–5186.

J.-P. Gazeau, **Nature algébrique de l'opérateur sturmien associé à l'équation de schrödinger. extension de certains résultats à la théorie des représentations finies de $gl(n,c)$ et de $u(n)$ (polynômes à treillis de gel'fand).**. Thèse, (1978).

M. Giovannini, **Theoretical tools for the physics of cmb anisotropies**. International Journal of Modern Physics D, **14** (2005) 363–510.

J. Gundermann, **Predicting the CMB power spectrum for binary polyhedral spaces**. astro-ph/0503014 (non publié), (2005).

A. Hajian et T. Souradeep, **Measuring the Statistical isotropy of the Cosmic Microwave Background anisotropy**. Astrophysical Journal, **597** (2003) L5–L8.

E. R. Harrison, **Normal Modes of Vibrations of the Universe**. Reviews of Modern Physics, **39** (1967) 862–882.

G. Hinshaw, M. R. Nolta, C. L. Bennett *et al.*, **Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Temperature Analysis**. astro-ph/0603451 (non publié), (2006).

G. Hinshaw, D. N. Spergel, L. Verde, R. S. Hill, S. S. Meyer, C. Barnes,

C. L. Bennett, M. Halpern, N. Jarosik, A. Kogut, E. Komatsu, M. Limon, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack et E. L. Wright, **First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : The Angular Power Spectrum**. Astrophysical Journal Supplement, **148** (2003) 135.

W. Hu, U. Seljak, M. White et M. Zaldarriaga, **Complete treatment of CMB anisotropies in a FRW universe**. Physical Review D, **57** (1998) 3290–3301.

W. Hu et M. White, **CMB anisotropies : Total angular momentum method**. Physical Review D, **56** (1997) 596–+.

W. Hu et M. J. White, **A CMB Polarization Primer**. New Astronomy, **2** (1997) 323.

E. P. Hubble, **Extragalactic nebulae**. Astrophysical Journal, **64** (1926) 321–369.

A. Ikeda, **On the spectrum of homogeneous spherical space forms**. Kodai Mathematical Journal, **18** (1995) 57–67.

N. Jarosik, C. Barnes, M. R. Greason *et al.*, **Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Beam Profiles, Data Processing, Radiometer Characterization and Systematic Error Limits**. astro-ph/0603452 (non publié), (2006).

T. Kaluza, **On the problem of unity in physics**. Sitzungsberichte der köninglichen Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (1921) 966–972.

M. Kamionkowski, A. Kosowsky et A. Stebbins, **Statistics of cosmic microwave background polarization**. Physical Review D, **55** (1997) 7368–7388.

G. Katz et J. Weeks, **Polynomial Interpretation of Multipole Vectors**. Physical Review D, **70** (2004) 063527.

O. Klein, **Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie**. Zeitschrift für Physik, **37** (1926) 895–906.

A. Kogut, G. F. Smoot, C. L. Bennett *et al.*, **COBE Differential Microwave Radiometers - Preliminary systematic error analysis**. Astrophysical Journal, **401** (1992) 1–18.

E. Komatsu, A. Kogut, M. R. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, D. N. Spergel, G. S. Tucker, L. Verde, E. Wollack et E. L. Wright, **First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Tests of Gaussianity**. Astrophysical Journal Supplement, **148** (2003) 119–134.

J. Kovac *et al.*, **Detection of polarization in the cosmic microwave background using DASI**. Nature, **420** (2002) 772–787.

M. Lachièze-Rey, **A new basis for eigenmodes on the sphere**. Journal of

Physics A : Mathematical and General, **37** (2003) 205–210.

M. Lachièze-Rey, **Eigenmodes of dodecahedral space**. Classical and Quantum Gravity, **21** (2004) 1–10.

M. Lachièze-Rey, **Laplacian eigenmodes for the three-sphere**. Journal of Physics A : Mathematical and General, **37** (2004) 5625–5634.

M. Lachièze-Rey et S. Caillerie, **Laplacian eigenmodes for spherical spaces**. Classical and Quantum Gravity, **22** (2005) 695–708.

M. Lachièze-Rey et E. Gunzig. **Le Rayonnement Cosmologique**. Masson, Paris (1995).

M. Lachièze-Rey et J.-P. Luminet, **Cosmic Topology**. Physics Reports, **254** (1995) 135–214.

L. Landau et M. Lifshitz. **Quantum Mechanics**. Pergamon Press, Oxford (1977).

R. Lehoucq, M. Lachieze-Rey et J. P. Luminet, **Cosmic Crystallography**. Astronomy and Astrophysics, **313** (1996) 339–346.

R. Lehoucq, J.-P. Uzan et J.-P. Luminet, **Limits of crystallographic methods for detecting space topology**. Astronomy and Astrophysics, **363** (2000) 1.

R. Lehoucq, J.-P. Uzan et J. Weeks, **Eigenmodes of lens and prism spaces**. Kodai Mathematical Journal, **26** (2003) 119–136.

R. Lehoucq, J. Weeks, J.-P. Uzan, E. Gausmann et J.-P. Luminet, **Eigenmodes of 3-dimensional spherical spaces and their application to cosmology**. Classical and Quantum Gravity, **19** (2002) 4683–4708.

G. H. Lemaître, **Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuse extragalactiques**. Annales de la Société scientifique de Bruxelles, **47A** (1927) 49–59.

J. Levin, **Topology and the cosmic microwave background**. Physics Reports, **365** (2002) 251–333.

A. R. Liddle et D. H. Lyth. **Cosmological Inflation and Large-Scale Structure**. UK : Cambridge University Press (2000).

J.-P. Luminet. **L'Univers chiffoné**. Fayard (2001).

J. P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq et J. P. Uzan, **Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background**. Nature, **425** (2003) 593.

C.-P. Ma et E. Bertschinger, **Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges**. Astrophysical Journal, **455** (1995) 7–25.

A. Mazure, G. Mathez et Y. Mellier. **Chronique de l'espace-temps**. Mas-

son, Paris (1994).

V. Mukhanov, **CMB-slow, or How to Estimate Cosmological Parameters by Hand**. astro-ph/0303072 (non publié), (2003).

V. F. Mukhanov, H. A. Feldman et R. H. Brandenberger, **Theory of cosmological perturbations**. Physical Review, **215** (1992) 203–333.

Y. Nambu, **Generalized Hamiltonian Dynamics**. Physical Review D, **7** (1973) 2405–2412.

J. Narlikar. **An Introduction to Cosmology**. Cambridge University Press (2002).

T. Padmanabhan. **Structure formation in the universe**. Cambridge ; New York : Cambridge University Press (1993).

L. Page, G. Hinshaw, E. Komatsu *et al.*, **Three Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Polarization Analysis**. astro-ph/0603450 (non publié), (2006).

P. Peebles. **Principle of Physical Cosmology**. Princeton University Press (1993).

A. A. Penzias et R. W. Wilson, **A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s**. Astrophysical Journal, **142** (1965) 419–421.

M. J. Reboucas, **A brief introduction to cosmic topology**. AIP Conference Proceedings, **782** (2005) 188–201.

M. J. Rees, **Polarization and Spectrum of the Primeval Radiation in an Anisotropic Universe**. Astrophysical Journal Letters, **153** (1968) L1.

A. Riazuelo, S. Caillerie, M. Lachièze-Rey, R. Lehoucq et J.-P. Luminet, **Constraining Cosmic Topology with CMB Polarization**. soumis à Physical Review D, (2005).

A. Riazuelo, J.-P. Uzan, R. Lehoucq et J. Weeks, **Simulating Cosmic Microwave Background maps in multi-connected spaces**. Physical Review D, **69** (2004) 103514.

J. Rich. **Fundamentals of Cosmology**. Berlin : Springer (2001).

H. Robertson, **On the foundations of relativistic cosmology**. Proceedings of the National Academy of Science (USA), **15** (1935) 822–829.

P. G. Roll et D. T. Wilkinson, **Cosmic Background Radiation at 3.2 cm-Support for Cosmic Black-Body Radiation**. Physical Review Letters, **16** (1966) 405–407.

B. Roukema, **Méthodes aux grandes échelles pour mesurer la topologie (globale) de l'univers**. astro-ph/9801225 (non publié), (1997).

B. F. Roukema, B. Lew, M. Cechowska, A. Marecki et S. Bajtlik, **A Hint of Poincaré Dodecahedral Topology in the WMAP First Year Sky Map**. Astronomy and Astrophysics, **423** (2004) 821.

R. K. Sachs et A. M. Wolfe, **Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background**. Astrophysical Journal, **147** (1967) 73–90.

D. J. Schwarz, G. D. Starkman, D. Huterer et C. J. Copi, **Is the Low-ℓ Microwave Background Cosmic ?**. Physical Review Letters, **93** (2004) 221301.

U. Seljak et M. Zaldarriaga, **A Line-of-Sight Integration Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies**. Astrophysical Journal, **469** (1996) 437–444.

J. Shapiro Key, N. J. Cornish, D. N. Spergel et G. D. Starkman, **Extending the WMAP Bound on the Size of the Universe**. astro-ph/0604616 (non publié), (2006).

G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut *et al.*, **Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps**. Astrophysical Journal, **396** (1992) L1–L5.

D. D. Sokolov et A. A. Starobinskii, **Globally inhomogeneous "spliced" universes**. Soviet Astronomy, **19** (1976) 629–632.

T. Souradeep et A. Hajian, **Statistical isotropy of CMB anisotropy from WMAP**. astro-ph/0502248 (non publié), (2005).

D. N. Spergel *et al.*, **First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Determination of Cosmological Parameters**. Astrophysical Journal Supplement, **148** (2003) 175.

D. N. Spergel, R. Bean, O. Dore' *et al.*, **Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results : Implications for Cosmology**. astro-ph/0603449 (non publié), (2006).

A. A. Starobinsky, **New restrictions on spatial topology of the universe from microwave background temperature fluctuations**. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, **57** (1993) 622–625.

R. C. Tolman. **Relativity, Thermodynamics, and Cosmology**. Relativity, Thermodynamics, and Cosmology, Oxford : Clarendon Press, 1934 (1934).

J.-P. Uzan, R. Lehoucq et J.-P. Luminet, **A New Crystallographic Method for Detecting Space Topology**. Astronomy and Astrophysics, **351** (1999) 766.

A. Walker, **On Milne's theory of world structure**. Proceedings of the London Mathematical Society, **42** (1936) 90–127.

J. Weeks, J.-P. Luminet, A. Riazuelo et R. Lehoucq, **Well-proportioned universes suppress cmb quadrupole**. Monthly Notices of the Royal Astronomy Society, **352** (2004) 258.

J. R. Weeks, **Reconstructing the global topology of the universe from the cosmic microwave background**. Classical and Quantum Gravity, **15**

(1998) 2599–2604.

S. Weinberg. **Gravitation and cosmology : Principles and applications of the general theory of relativity**. New York : Wiley (1972).

M. J. White et W. Hu, **The Sachs-Wolfe effect**. Astronomy and Astrophysics, **321** (1997) 8–9.

E. L. Wright *et al.*, **Interpretation of the CMB anisotropy detected by the COBE DMR**. Astrophysical Journal, **396** (1992) L13–L18.

M. Zaldarriaga, U. Seljak et E. Bertschinger, **Integral Solution for the Microwave Background Anisotropies in Nonflat Universes**. Astrophysical Journal, **494** (1998) 491–502.