

Étude et conception de l'anneau de désintégration d'une usine à neutrinos utilisant les décroissances β des noyaux Hélium 6 et Néon 18 produits par un faisceau intense de protons frappant diverses cibles

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 septembre 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Paris XI – Orsay

(spécialité physique)

par

Antoine CHANCÉ

Composition du jury

Président : G. WORMSER

Rapporteurs : F. MEOT
A. TKATCHENKO

Examineurs : M. BENEDIKT
O. NAPOLY
J. PAYET

Remerciements

Je remercie chaleureusement Monsieur Jacques PAYET du Service des Accélérateurs, de Cryogénie et de Magnétisme (SACM) au CEA/Saclay pour son encadrement tout au long de ces trois années de thèse. Sa patience, sa disponibilité et son expérience m'ont été d'un grand secours tout au long de ce parcours.

Je remercie également mon directeur de thèse Monsieur Olivier NAPOLY du SACM pour avoir accepté de diriger mes travaux au sein de son laboratoire. Je le remercie également pour son soutien ainsi que pour l'aide et les conseils qu'il m'a prodigués.

Je remercie mes chefs de service successifs Messieurs Pascal DEBU et Antoine DAËL pour m'avoir permis de travailler au sein de leur service et pour les bonnes conditions de travail dont j'ai bénéficié.

Je remercie Messieurs François MÉOT du Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie (LPSC) et André TKATCHENKO de l'Institut de Physique Nucléaire d'Orsay (IPNO) pour avoir accepté la tâche de rapporteurs et pour l'ensemble des remarques qu'ils ont apportées.

Je remercie aussi Messieurs Guy WORMSER du Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL) et Michaël BENEDIKT du Centre Européen de Recherche Nucléaire (CERN) pour avoir bien voulu faire partie du jury de thèse.

Merci également à l'ensemble du personnel du SACM et plus particulièrement à mes collègues du Bâtiment 130 pour leur accueil au sein du service et leur bonne humeur. J'aimerais également remercier le groupe de travail Beta-Beams pour les remarques pertinentes qu'ils ont fournies.

Enfin, j'aimerais remercier ma mère, mes 2 frères Louis et Quentin, ma sœur Hélène et toute ma famille pour m'avoir soutenu et supporté tout le long de ces années.

A tous ceux là et éventuellement à ceux que j'aurais pu oublier, merci.

Table des matières

INTRODUCTION	1
---------------------	----------

Chapitre 1
MODELE DE L'OSCILLATION DES NEUTRINOS

1.1	Formalisme	3
1.2	Oscillation entre trois familles	5
1.3	Oscillation entre deux familles	6
1.4	Conclusion	7

Chapitre 2
MESURE DES PARAMETRES D'OSCILLATION DES NEUTRINOS

2.1	Les neutrinos solaires : mesure de l'angle θ_{13}	9
2.2	Les neutrinos atmosphériques : mesure de l'angle θ_{23}	11
2.3	Mesure du dernier angle de mélange : θ_{13}	12
2.4	Les usines à neutrinos	13
2.4.1	Les super faisceaux	14
2.4.2	Les neutrino factories	15
2.4.3	Les beta-beams	17
2.5	Conclusion	20

Chapitre 3
LE PROJET BETA-BEAM

3.1	Paramètres du projet	23
3.1.1	Choix des ions	23

3.1.2	Paramètres	24
3.1.3	Autres propositions pour les beta-beams	27
3.2	Problématiques liées à l’anneau de décroissance	30
3.2.1	Le système d’injection	30
3.2.2	Le système RF	30
3.2.3	Les dipôles de l’anneau	32
3.2.4	Beam-Loading	32
3.3	Conclusion	33

Chapitre 4 DYNAMIQUE TRANSVERSE

4.1	Quelques définitions	35
4.1.1	Les multipôles	36
4.1.2	Abscisses curvilignes	37
4.2	Equation de Hill et théorème de Floquet	38
4.2.1	Equation homogène	39
4.2.2	Solution générale	43
4.3	Conclusion	46

Chapitre 5 PERTURBATIONS

5.1	Traitement général d’une perturbation	47
5.1.1	Notation matricielle	48
5.1.2	Expression du hamiltonien	48
5.2	Défauts dipolaires	51
5.2.1	Perturbation de l’orbite fermée	52
5.2.2	Corrections des défauts dipolaires	52
5.3	Défauts quadripolaires	54
5.3.1	Perturbation des paramètres de Twiss	54
5.3.2	Chromaticité	56

5.4	Perturbations dues à la charge d'espace	57
5.4.1	Cas d'une distribution uniforme	58
5.4.2	Cas d'une distribution parabolique	59
5.4.3	Cas d'un faisceau groupé	60

Chapitre 6 OPTIQUE DE L'ANNEAU

6.1	Optique de l'anneau de décroissance au premier ordre	63
6.1.1	Optique de la section droite	64
6.1.2	Mailles FODO de l'arc	64
6.1.3	Section d'extraction des produits de décroissance et d'adaptation	65
6.1.4	Insertion à bas β et haute dispersion pour l'injection	66
6.1.5	Section de collimation en énergie	71
6.2	Optimisation de l'ouverture dynamique	72
6.2.1	Correction des résonances hexapolaires	72
6.2.2	Procédure automatique de correction de l'ouverture dynamique	74
6.3	Défauts liés aux éléments magnétiques	78
6.3.1	Correction des défauts dipolaires et quadripolaires	78
6.3.2	Compensation des défauts multipolaires dans les dipôles	79
6.4	Conclusion	86

Chapitre 7 GESTION DES PERTES DANS L'ANNEAU

7.1	Pertes par décroissance	87
7.1.1	Longueur des dipôles	88
7.1.2	Simulation des pertes dans l'anneau	90
7.2	Pertes par collimation	98
7.2.1	Problématiques liées à la collimation	98
7.2.2	Collimation en moment pour les beta-beams	101
7.3	Conclusion	108

Chapitre 8 DYNAMIQUE LONGITUDINALE

8.1	Cas d'une cavité	109
8.1.1	Notions de particule synchrone	109
8.1.2	Oscillation synchrotron d'une particule	110
8.2	Cas général à n cavités	114
8.3	Application aux beta-beams	116
8.3.1	Particularités du système RF	117
8.3.2	Programme de mélange des deux faisceaux	119
8.3.3	Pertes liées au système RF	123

CONCLUSION GÉNÉRALE	129
----------------------------	------------

Annexe A	
Fichier donnant la structure de l'anneau	133

Annexe B	
Caractéristiques des différents éléments magnétiques	139

Bibliographie	141
----------------------	------------

Table des figures

1.1	Représentation des angles de mélange.	6
1.2	Hiérarchie des masses.	7
2.1	Spectre d'énergie calculé des neutrinos émis dans les différentes réactions au sein du Soleil selon le Modèle Standard du Soleil.	10
2.2	Représentation schématique du rôle de l'angle azimutal sur la distance de parcours du neutrino atmosphérique.	12
2.3	Sensibilité prévue sur l'angle de mélange θ_{13} (sans tenir compte des effets de matière ou de violation de la parité CP) pour MINOS, OPERA et T2K en comparaison avec celle de CHOOZ.	13
2.4	Corne magnétique de collection des pions.	16
2.5	Schéma de principe du SPL-Superbeam.	17
2.6	Schéma de principe d'une Neutrino Factory.	18
2.7	Schéma de principe de l'usine beta-beam basée au CERN.	19
2.8	Schéma de principe de la production de l'Hélium-6.	20
2.9	Comparaison du potentiel de découverte à 3 écarts types des paramètres θ_{13} et δ pour différentes expériences sur la base d'une prise de données pendant 10 ans.	22
3.1	Principe d'une injection avec déviateur rapide.	30
3.2	Principe de l'injection off-momentum.	31
3.3	Représentation dans l'espace des phases longitudinal de différentes étapes du programme RF (i) avant injection, (ii) à l'injection, (iii) au démarrage de la capture.	31
4.1	Coordonnées polaires.	37
4.2	Coordonnées curvilignes.	38
4.3	Représentation dans l'espace des phases (z,z') (à gauche) et dans l'espace normalisé (Z,Z') (à droite) de l'ensemble des positions prises par une particule en un point donné de la machine.	42
4.4	Différence d'allongement de la trajectoire due à l'énergie.	46

6.1	Fonctions optiques dans la section droite pointant vers le détecteur.	64
6.2	Fonctions optiques dans les arcs.	65
6.3	Enveloppes des faisceaux stocké et injecté dans les arcs.	65
6.4	Extraction des produits issus de décroissance ${}^6\text{Li}^{3+}$ et ${}^{18}\text{F}^{9+}$ à la sortie de la longue section droite.	66
6.5	Principe de l'injection.	67
6.6	Puissance perdue sur la lame du septum pour une distribution Gaussienne par le faisceau stocké et par le faisceau injecté pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$ et le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$	68
6.7	Déviations de l'orbite fermée du fait du septum.	69
6.8	Fonctions optiques dans la section d'injection.	70
6.9	Enveloppes du faisceau stocké et du faisceau injecté dans la section d'injection.	70
6.10	Fonctions optiques dans la section de collimation.	71
6.11	Enveloppes du faisceau stocké et du faisceau injecté dans la section de collimation.	71
6.12	Point de fonctionnement.	73
6.13	Ouverture dynamique pour 1000 tours au centre de la section d'injection.	74
6.14	Représentation des positions successives prises par une particule au centre de la section d'injection. A l'instant initial, sa position est $(3\sqrt{2\beta_x\epsilon_x}, 3\sqrt{2\beta_y\epsilon_y})$ sans composante angulaire.	74
6.15	Représentation des positions successives prises par une particule à $\delta = 5\%$ au centre de la section d'injection. A l'instant initial, sa position est $(3\sqrt{2\beta_x\epsilon_x}, 3\sqrt{2\beta_y\epsilon_y})$ sans composante angulaire.	75
6.16	Variations de la partie fractionnaire du nombre d'onde en fonction de la quantité de mouvement de la particule.	76
6.17	Variations de la fonction bêatron β au centre de la section d'injection en fonction de la quantité de mouvement de la particule.	76
6.18	Variations de la dispersion horizontale en fonction de la quantité de mouvement de la particule.	76
6.19	Principe de l'optimisation de l'ouverture dynamique.	77
6.20	Erreur rms sur l'orbite fermée en l'absence de correcteurs dans l'anneau.	80
6.21	Erreur rms sur l'orbite fermée en plaçant un correcteur et un BPM à chaque quadripôle de l'arc ou un correcteur sur 2 dans l'arc dans l'anneau.	80
6.22	Ouverture dynamique pour 1000 tours sans optimisation et après application des défauts d'ordre 5, d'ordre 7, d'ordre 9 ou pour l'ensemble des composantes multipolaires donnés en TAB. 6.5.	82
6.23	Représentations de différents points de fonctionnement dans le diagramme des résonances	83
6.24	Ouvertures dynamiques après optimisation pour différentes valeurs de δ et pour différents points de fonctionnement.	84

6.25	Variations du nombre d'onde avec le moment pour les 3 points de fonctionnement considérés en présence des défauts multipolaires.	84
6.26	Représentation des positions successives prises dans l'espace des phase normalisé par un ion du faisceau stocké de $^{18}\text{Ne}^{10+}$ à $\delta = 0\%$ et de composante verticale initiale $y = 5\sqrt{\beta_y \epsilon_y}$ pour différents points de fonctionnement.	85
6.27	Ouverture dynamique pour 1000 tours pour le point de fonctionnement ($\nu_x = 22.228$, $\nu_y = 12.16$) après optimisation et pour différentes valeurs des défauts dans les dipôles.	85
7.1	Déviations des produits de décroissance à l'entrée d'une maille FODO.	90
7.2	Déviations de l'orbite de référence par rapport à l'axe magnétique dans un dipôle droit.	91
7.3	Déviations par rapport à l'axe central des éléments des produits de décroissance dans le cas de dipôles droits.	91
7.4	Représentation pour différents nombres d'écart types du faisceau de produits de décroissance.	92
7.5	Algorithme du calcul du dépôt par décroissance.	95
7.6	Puissance déposée par mètre par les produits de décroissance issus du faisceau nominal d' $^6\text{He}^{2+}$ le long de l'arc.	96
7.7	Puissance déposée par mètre par les produits de décroissance issus du faisceau nominal de $^{18}\text{Ne}^{10+}$ le long de l'arc.	96
7.8	Puissance déposée par mètre par les produits de décroissance issus du faisceau injecté d' $^6\text{He}^{2+}$ le long de l'arc.	97
7.9	Puissance déposée par mètre par les produits de décroissance issus du faisceau injecté de $^{18}\text{Ne}^{10+}$ le long de l'arc.	97
7.10	Schéma de principe du système de collimation.	99
7.11	Représentation dans l'espace des phases normalisé des particules interceptées à un collimateur primaire.	101
7.12	Cumul des pertes par collimation et par décroissance en fonction de la dispersion normalisée au collimateur primaire pour un faisceau gaussien.	105
7.13	Formes du faisceau stocké dans l'espace longitudinal à l'injection et pendant la collimation.	106
7.14	Rapport entre le nombre réel d'ions ayant décrû entre deux injections successives et celui dans le cas d'une collimation en moment idéale en fonction de la dispersion normalisée au collimateur primaire pour un faisceau gaussien.	107
7.15	Rapport entre le nombre d'ions stockés dans l'anneau à l'équilibre et le nombre d'ions injectés en fonction de la dispersion normalisée au collimateur primaire pour un faisceau gaussien.	107
8.1	Isohamiltoniennes pour l'anneau de désintégration des beta-beams dans le cas de l' $^6\text{He}^{2+}$	114

8.2	Séparatrice et isohamiltonienne pour un système à 2 cavités.	118
8.3	Différence de phase entre les centres des deux lobes et aire du lobe de droite dans le cas de $l'^6\text{He}^{2+}$ en fonction du déphasage de la première cavité. L'aire du lobe de gauche est maintenue constante et égale à 1 eV.s.	121
8.4	Lois de phase et de tension dans le cas de $l'^6\text{He}^{2+}$ entre les deux cavités. L'aire du lobe de gauche est maintenue constante et égale à 1 eV.s.	121
8.5	Évolutions des deux lobes au cours du programme RF pour $l'^6\text{He}^{2+}$. L'aire du lobe de gauche est maintenue constante et égale à 1 eV.s.	122
8.6	Évolutions des deux lobes et de la séparatrice au cours du mélange symétrique pour $l'^6\text{He}^{2+}$	122
8.7	Variations de la phase et de la tension crête de la première cavité et de la seconde cavité au cours du mélange entre les deux faisceaux pour $l'^6\text{He}^{2+}$	123
8.8	Représentation dans l'espace des phases longitudinal du faisceau injecté d' $l'^6\text{He}^{2+}$ injection après injection après exécution du programme de mélange. Le faisceau est supposé collimaté à $\delta = 2.5\%$	124
8.9	Survivance d'un paquet d'ions injecté en fonction du nombre d'injections réalisées ensuite. Les décroissances β ne sont pas prises en compte.	126
8.10	Cumul des pertes en fonction du temps. Les pertes venant de la décroissance des ions et celles venant de la collimation en moment, supposée idéale, sont représentées.	127
8.11	Distribution du faisceau stocké dans l'espace des phases longitudinal en présence ou non de décroissance β	127
8.12	Représentation dans l'espace des phases longitudinal du faisceau injecté d' $l'^6\text{He}^{2+}$ pendant les différentes étapes du programme RF.	128

Liste des tableaux

2.1	Valeurs expérimentales des angles de mélange et des différences des masses au carré du neutrino.	13
3.1	Candidats pour les émetteurs β^-	24
3.2	Candidats pour les émetteurs β^+	24
3.3	Glissement du nombre d'onde dû à la charge d'espace pour la particule centrale du faisceau stocké dans l'anneau de décroissance.	27
3.4	Nombre d'ions à chaque étape dans le complexe beta-beam sous l'approche « top-down ».	27
3.5	Paramètres du faisceau injecté dans l'anneau de décroissance dans l'approche « top-down ».	29
3.6	Paramètres du faisceau stocké dans l'anneau de décroissance dans l'approche « top-down ».	29
3.7	Comparaison des caractéristiques longitudinales entre différentes machines. . .	33
6.1	Paramètres de l'optique au point d'injection.	70
6.2	Extrema des fonctions optiques pour différentes parties fonctionnelles de l'anneau.	72
6.3	Propriétés optiques de la maille de référence.	72
6.4	Défauts de positionnement ou de champ des éléments magnétiques de l'anneau. Les valeurs sont données à 1σ	78
6.5	Valeurs des défauts multipolaires systématiques dans les dipôles.	81
6.6	Extensions rms du faisceau dans les plans horizontaux et verticaux pour différentes valeurs de δ et de points de fonctionnement.	81
6.7	Acceptance en moment de l'anneau pour différents points de fonctionnement pour le jeu de défauts multipolaires donnés en TAB. 6.5.	82
7.1	Puissance moyenne perdue dans l'anneau par décroissance des ions ou collimation en énergie.	94
7.2	Avances de phase optimales μ_x et μ_y entre les collimateurs primaires et secondaires. L'angle α_2 du collimateur secondaire avec l'axe horizontal est également donné.	103

1	Résumé des différents paramètre de l'anneau.	130
B.1	Paramètres des dipôles dans l'anneau de décroissance.	139
B.2	Paramètres des déviateurs rapides dans la section d'injection.	139
B.3	Paramètres des sextupôles dans l'anneau de décroissance.	139
B.4	Paramètres des quadrupôles dans l'anneau de décroissance.	140

INTRODUCTION

Bien que le neutrino soit une particule fortement présente dans l'univers (sa densité est évaluée à $300 \nu/\text{cm}^3$), il reste encore une particule mal connue aujourd'hui. En effet, étant un lepton non chargé, il n'est soumis ni à l'interaction forte ni à celle électromagnétique. Il interagit donc très faiblement avec la matière, ce qui en fait un bon messager pour sonder l'univers mais le rend très difficile à détecter.

Ainsi, si son existence fut prédite dès 1933 par Pauli afin de préserver la conservation de l'énergie lors de la désintégration β , c'est seulement 26 ans plus tard, en 1956, que les physiciens ont réussi à le détecter. Depuis lors, trois familles (ou saveurs) de neutrinos, les électroniques, muoniques ou tauiques, ont été recensées, dont la dernière fut seulement détectée en 2001. Cependant, dès les années 60, le neutrino fut source à polémiques. En effet, une expérience fut menée afin de mesurer le flux de neutrinos électroniques émis par le Soleil. Le flux de neutrinos solaires prédit par la théorie détecté était alors 3 fois supérieur au flux mesuré sur la Terre. Cet écart fut ensuite conforté par diverses expériences visant elles aussi à mesurer le flux de neutrinos solaires. En 1998, l'expérience Super-Kamiokande au Japon a permis d'observer une variation du flux de neutrinos atmosphériques en fonction de la distance de vol entre la zone de production et le détecteur. Cette expérience a permis de confirmer l'hypothèse selon laquelle les neutrinos oscillent entre leurs différentes saveurs. Cette oscillation, dont SNO a apporté la preuve définitive en 2002, explique alors la différence entre le flux observé des neutrinos électroniques émis par le soleil et celui prédit par le modèle théorique. Des expériences étudiant le flux de neutrinos émis à partir de centrales nucléaires comme KAMLAND ou CHOOZ ont également observé ce phénomène d'oscillation. Mais l'existence d'un tel comportement implique l'existence d'une masse aussi petite soit-elle (une première estimation la situe plus de 6 ordres de grandeurs en dessous de celle de l'électron). Afin d'étendre le modèle standard, la connaissance de cette masse ainsi que des angles de mélange (correspondant aux proportions des différents états de masse du neutrino composant les saveurs du neutrino) s'avère nécessaire.

Afin de parfaire la connaissance des paramètres d'oscillation des neutrinos, les expériences requièrent des flux purs et très intenses de neutrinos énergétiques, bien collimatés, dont le spectre en énergie est bien déterminé. C'est pourquoi une machine dédiée à la physique des neutrinos apparaît actuellement nécessaire pour poursuivre ces études. Trois principaux concepts de complexes d'accélérateurs sont en cours d'étude. Le premier est basé sur des techniques conventionnelles utilisant la décroissance des pions issus d'intenses faisceaux de protons frappant une cible. Cette famille de machines a été dénommée « super faisceaux ». La seconde idée baptisée « neutrino factory » produit des neutrinos électroniques et muoniques en utilisant la décroissance de muons de charges positives et négatives. Enfin, une des autres idées actuelles propose l'utilisation de faisceaux d'ions radioactifs β pour produire des faisceaux

de neutrinos et d'antineutrinos purement électroniques, d'où l'appellation « beta-beam » du projet. Une combinaison entre les super faisceaux et les beta-beams a également été proposée. Ceci a pour effet d'augmenter de façon importante la sensibilité aux angles de mélange et à la violation de parité. C'est sur le concept lié aux beta beams et plus précisément sur l'anneau de stockage en bout d'accélération que la thèse s'est focalisée. Les ions retenus sont le $^{18}\text{Ne}^{10+}$, pour la production de neutrinos électroniques, et l' $^6\text{He}^{2+}$, pour la production d'antineutrinos dans le schéma actuel du CERN.

Le schéma de principe d'une telle installation, utilisant une partie des équipements du CERN, est donné dans le Chapitre 2.4. Les ions radioactifs sont produits par une source ISOL (« Isotope Separation On-Line ») puis ionisés par une source ECR. Après accélération dans un synchrotron rapide puis dans 2 des synchrotrons du CERN, le PS et le SPS, qui les amènent à l'énergie nominale, ils sont ensuite accumulés dans un anneau de décroissance, en forme de « champ de course ». Les sections droites sont orientées vers le dispositif expérimental. Ainsi, les neutrinos produits dans l'une des deux longues sections droites seront émis vers l'expérience. Cette section droite constitue la source proprement dite de neutrinos. Le but de la thèse est de réaliser l'optique d'un tel anneau et d'en étudier les diverses propriétés.

Dans un premier temps, le modèle lié à l'oscillation des neutrinos sera décrit succinctement dans le Chapitre 1. Ensuite, une rapide revue des principales expériences passées ou futures liées à la mise en évidence et à la caractérisation de ce phénomène d'oscillation sera réalisée au Chapitre 2. Ceci permettra d'introduire les différents concepts d'usines à neutrinos et plus particulièrement les beta-beams sur lesquelles porte la thèse. Les problématiques et objectifs liés aux beta-beams seront alors dégagés au Chapitre 3. De là, le formalisme lié au transport de particules dans une structure constituée d'éléments magnétiques sera donné au Chapitre 4. Dans ce chapitre, seul le mouvement dans le plan orthogonal à la direction de propagation sera considéré. Le Chapitre 5 décrira ensuite l'impact de défauts ou de non linéarités sur ce transport. En utilisant le formalisme décrit dans les deux chapitres précédents, un premier design de l'anneau sera alors donné. Il a principalement été réalisé sous *BETA* [1]. Ses propriétés optiques aux premier et second ordres seront décrites au Chapitre 6. Une analyse de l'impact des défauts de positionnement des éléments ou des erreurs de champ dans les dipôles a également été faite. Les solutions pour y remédier et les propriétés finales du faisceau seront également détaillées. Le traitement des pertes, qu'elles soient liées à la décroissance β des ions stockés ou à la collimation en moment, sera développé dans le Chapitre 7. Ceci permettra d'aboutir à définir l'ensemble des contraintes que devra remplir le design de l'anneau de décroissance. Enfin, le transport de particules dans l'espace dit longitudinal lié à la direction de propagation du faisceau sera décrit dans le Chapitre 8. Il aboutira alors à la modélisation du programme RF utilisé dans l'anneau de décroissance des beta-beams et au calcul des pertes liées au système d'injection.

Chapitre 1

MODELE DE L'OSCILLATION DES NEUTRINOS

Dans cette partie, nous allons donner une très brève introduction à la physique liée à l'oscillation du neutrino afin de définir les paramètres liés à l'oscillation du neutrino que sont les angles de mélange θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} et les différences de masses et d'illustrer leur impact sur les probabilités d'oscillation. Nous n'avons donc pas la prétention d'être exhaustifs. De plus, nous nous bornerons à l'oscillation du neutrino dans le vide et ne tiendrons pas compte des effets d'interactions des neutrinos avec la matière. Pour de plus amples détails, nous vous renvoyons à [2, 3, 4, 5] par exemple.

1.1 Formalisme

Dans le modèle standard, les leptons sont partagés entre 3 couples de saveurs :

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

Chaque couple comprend un lepton chargé et son neutrino associé noté ν . Ces saveurs sont l'électron, le muon et la particule tau respectivement notées e , μ et τ . Nous noterons respectivement $|\nu_\alpha\rangle$ et $|\bar{\nu}_\alpha\rangle$ les états correspondant à chaque saveur de neutrino et de son antineutrino où α peut prendre la valeur e , μ ou τ .

Chacune de ces saveurs est un état propre de l'opérateur de nombre leptonique L_α :

$$\begin{aligned} \forall \beta = e, \mu, \tau, \quad L_\alpha |\nu_\beta\rangle &= \delta_{\alpha\beta} |\nu_\beta\rangle \\ L_\alpha |\bar{\nu}_\beta\rangle &= -\delta_{\alpha\beta} |\bar{\nu}_\beta\rangle \end{aligned}$$

Cependant, si les $|\nu_\alpha\rangle$ sont les états propres pour cet opérateur et pour celui de l'interaction faible, ils ne le sont pas pour l'opérateur de masse. Nous noterons $|\nu_i\rangle$ avec i variant de 1 à 3 les états propres pour cet opérateur et m_i leur valeur propre respective.

Les états propres correspondant aux saveurs du neutrino peuvent être vus comme une superposition linéaire de ces états de masse. Nous introduisons donc la matrice U , matrice

3×3 unitaire, telle que :

$$\forall \alpha = e, \mu, \tau \quad |\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (1.1)$$

L'unitarité de U permet d'avoir la relation réciproque :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad |\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle$$

La propagation de chaque état propre du neutrino dans le vide est similaire à celle d'une onde plane. Par conséquent, si le neutrino est produit à l'instant $t = 0$ à la position $\vec{x} = 0$ avec l'impulsion p dans le référentiel de laboratoire, nous avons :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad |\nu_i(x = L, t)\rangle = \exp\left(-i \frac{E_i t - pL}{\hbar}\right) |\nu_i(x = 0, 0)\rangle$$

où E_i est l'énergie de l'état propre $|\nu_i\rangle$

l'axe x correspond à la direction de propagation

Pour alléger l'écriture, nous poserons $\forall i = 1, 2, 3 \quad |\nu_i\rangle = |\nu_i(x = 0, 0)\rangle$

Nous avons comme relation, $pc = \sqrt{E_i^2 - m_i^2 c^4}$

Comme les neutrinos sont ultra-relativistes, $E_i \gg m_i c^2$, ce qui donne $\forall i, E_i \approx E$. De plus, la vitesse du neutrino dans la direction de propagation peut être prise égale à la célérité de la lumière d'où $t \approx \frac{L}{c}$.

Ainsi, $pc \approx E \left(1 - \frac{m_i^2 c^4}{2E^2}\right)$ et donc $E_i t - pL \approx \frac{m_i^2 c^3}{2E} L$

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad |\nu_i(x = L, t)\rangle \approx \exp\left(-i \frac{m_i^2 c^3 L}{2\hbar E}\right) |\nu_i\rangle$$

Finalement, d'après (1.1)

$$\forall \alpha = e, \mu, \tau \quad |\nu_\alpha(L, t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* \exp\left(-i \frac{m_i^2 c^3 L}{2\hbar E}\right) |\nu_i\rangle \quad (1.2)$$

La probabilité notée $P_{\alpha \rightarrow \beta}(L)$ qu'un neutrino de saveur α produit à l'instant $t = 0$ et au point $x = 0$ donne un neutrino de saveur β après avoir parcouru une distance de L dans le référentiel de laboratoire est :

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = |\langle \nu_\alpha(x = 0) | \nu_\beta(x = L) \rangle|^2$$

En appliquant l'égalité (1.2)

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \exp\left(-i \frac{m_i^2 c^3 L}{2\hbar E}\right) \right|^2$$

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \sum_i \sum_j U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{Lc^3}{2\hbar E} \Delta m_{ij}^2\right)$$

où $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) &= \sum_i \sum_j U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \\
 &\quad - 4 \sum_i \sum_{j>i} \Re \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin^2 \left(\frac{Lc^3}{4\hbar E} \Delta m_{ij}^2 \right) \\
 &\quad + 2 \sum_i \sum_{j>i} \Im \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin \left(\frac{Lc^3}{2\hbar E} \Delta m_{ij}^2 \right)
 \end{aligned}$$

U est unitaire donc $\sum_i \sum_j U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta}$ et nous avons [2] :

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) &= \delta_{\alpha\beta} \\
 &\quad - 4 \sum_i \sum_{j>i} \Re \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin^2 \left(\frac{Lc^3}{4\hbar E} \Delta m_{ij}^2 \right) \\
 &\quad + 2 \sum_i \sum_{j>i} \Im \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin \left(\frac{Lc^3}{2\hbar E} \Delta m_{ij}^2 \right)
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Une conséquence immédiate est que si les neutrinos sont sans masse alors

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \delta_{\alpha\beta}$$

et il n'y a donc pas d'oscillation. L'existence des oscillations du neutrino implique bien celle de leur masse.

1.2 Oscillation entre trois familles

Comme la matrice U est unitaire, elle peut s'écrire comme un produit de matrices de rotation dans l'espace. Ainsi, en faisant intervenir les angles d'Euler (FIG. 1.1) :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $c_{12} = \cos(\theta_{12})$, $s_{12} = \sin(\theta_{12})$
 $c_{13} = \cos(\theta_{13})$, $s_{13} = \sin(\theta_{13})$
 $c_{23} = \cos(\theta_{23})$, $s_{23} = \sin(\theta_{23})$

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}c_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}c_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}c_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}c_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

La phase δ est dite phase de Dirac et a été introduite afin de rendre compte d'une éventuelle violation de parité CP.

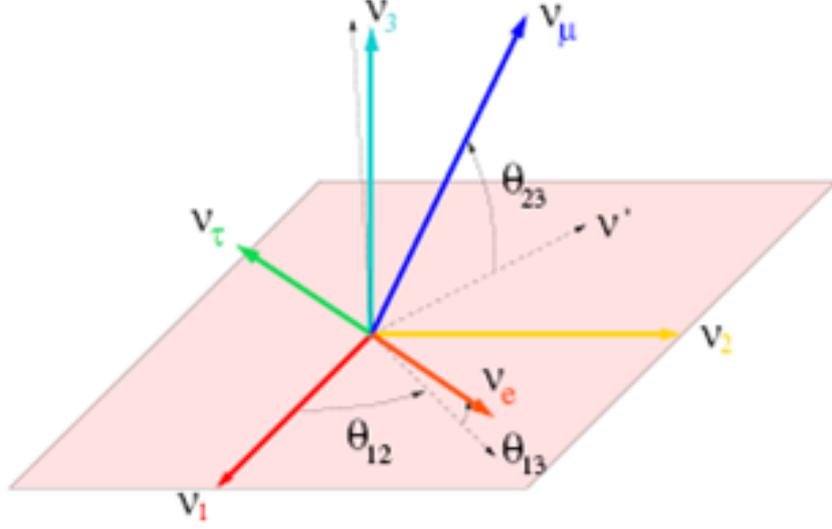


FIG. 1.1 – Représentation des angles de mélange.

1.3 Oscillation entre deux familles

Les valeurs expérimentales présentées dans le Chapitre 2 montrent que nous avons la hiérarchie de masses suivante (FIG. 1.2) :

$$\Delta m_{13}^2 \approx \Delta m_{23}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta m^2 \gg \Delta m_{12}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \delta m^2$$

Ainsi, pour une distance de parcours L donnée, en supposant que l'énergie moyenne E du spectre en énergie est telle que la valeur de $\Delta m^2 L/E$ est suffisamment grande pour engendrer des oscillations et que celle de $\delta m^2 L/E$ est négligeable, nous avons d'après Eq. (1.3) :

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \delta_{\alpha\beta} - 4\Re \left((U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2}) U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* \right) \sin^2 \left(\frac{Lc^3}{4\hbar E} \Delta m^2 \right) + 2\Im \left((U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2}) U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* \right) \sin \left(\frac{Lc^3}{2\hbar E} \Delta m^2 \right)$$

U est unitaire donc $U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} + U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3} = \delta_{\alpha\beta}$

Ainsi, on a [2] :

$$P_{\alpha \rightarrow \beta \neq \alpha}(L) = 4 |U_{\alpha 3}|^2 |U_{\beta 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{Lc^3}{4\hbar E} \Delta m^2 \right)$$

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(L) = 1 - 4 \left(1 - |U_{\alpha 3}|^2 \right) |U_{\alpha 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{Lc^3}{4\hbar E} \Delta m^2 \right)$$

En appliquant l'approximation à l'oscillation entre les neutrinos électroniques et muoniques, nous trouvons :

$$P_{e \rightarrow \mu}(L) = \sin^2(2\theta_{13}) \sin^2(\theta_{23}) \sin^2 \left(\frac{Lc^3}{4\hbar E} \Delta m^2 \right)$$

ou en unités plus pratiques :

$$P_{e \rightarrow \mu}(L) = \sin^2(2\theta_{13}) \sin^2(\theta_{23}) \sin^2\left(1.27 \Delta m^2 [eV^2] \frac{L [\text{km}]}{E [\text{GeV}]}\right) \quad (1.4)$$

pour le domaine $\Delta m^2 [eV^2] \frac{L[\text{km}]}{E[\text{GeV}]} = \mathcal{O}(1)$

Ainsi, dans le cas de l'étude de l'oscillation $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, pour une valeur de L/E bien définie, comme les valeurs de Δm^2 et de θ_{23} ont été déterminées par l'expérience, l'amplitude de l'oscillation est déterminée par la valeur de θ_{13} .

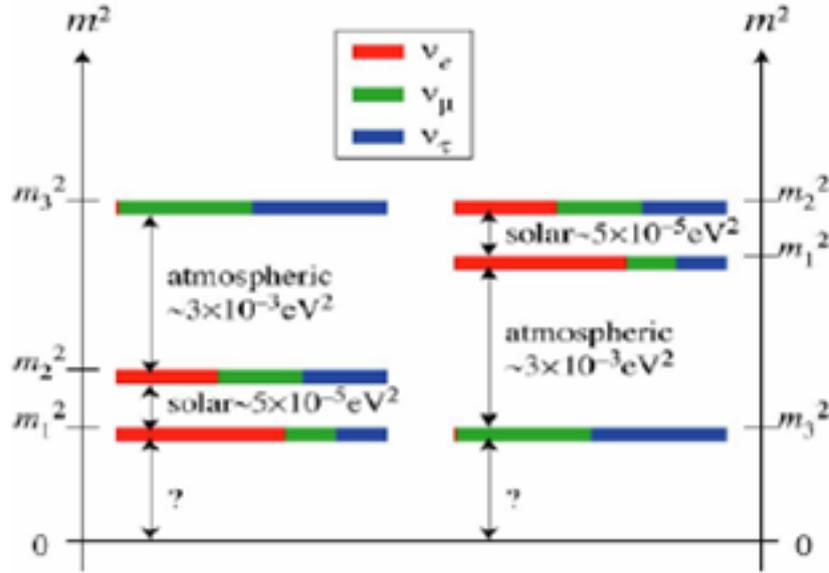


FIG. 1.2 – Hiérarchie des masses.

1.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de se familiariser rapidement avec le formalisme lié à l'oscillation des neutrinos entre les différentes saveurs. Les effets de matière n'ont pas été pris en compte. Celui-ci a alors permis d'exprimer la probabilité d'oscillation dans le vide du neutrino en fonction de la distance parcourue, de son énergie, des angles de mélange et des différences de masse au carré. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons premièrement aux expériences ayant mis en évidence ce mécanisme d'oscillation puis celles ayant permis d'affiner la connaissance des différents paramètres pour aboutir finalement au concept des usines à neutrinos.

Chapitre 2

MESURE DES PARAMETRES D'OSCILLATION DES NEUTRINOS

Bien qu'étant l'une des particules les plus répandues dans l'univers, le neutrino reste une particule difficile à étudier du fait de sa très faible section efficace d'interaction. Aussi, afin de pouvoir avoir une statistique suffisante, toute expérience cherchant à étudier les neutrinos nécessite un détecteur de grandes dimensions, un temps de prise de données de l'ordre de quelques années ainsi qu'un flux intense. En dehors des sources de neutrinos dédiées comme les usines à neutrinos, nous pouvons compter trois grandes sources de neutrinos :

- Le Soleil
- L'atmosphère
- Les centrales nucléaires

Nous citerons dans cette partie quelques expériences ayant permis de mettre en évidence l'oscillation des neutrinos puis la détermination des paramètres qui y sont liés à savoir les angles de mélange et la masse des différents types de neutrinos.

2.1 Les neutrinos solaires : mesure de l'angle θ_{13}

Dans les années 60, John Bahcall a travaillé sur un modèle portant sur les réactions de fusion ayant lieu au sein du Soleil, qui est devenu plus tard le Modèle Standard du Soleil [6, 7, 8, 9, 10]. Il montre que les neutrinos produits au sein du Soleil sont uniquement de saveur électronique et établit leur spectre en énergie pour les différentes chaînes de production (FIG. 2.1).

Le flux total de neutrinos solaires au dessus de 5 MeV est alors estimé à :

$$\Phi_e = 5.05^{+1.01}_{-0.81} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Ray Davis et son équipe furent les premiers à mesurer ce flux en 1968 avec un détecteur de 340 m³ de tétrachlorure de carbone placé à 1478 m en dessous du niveau de la mer dans la mine

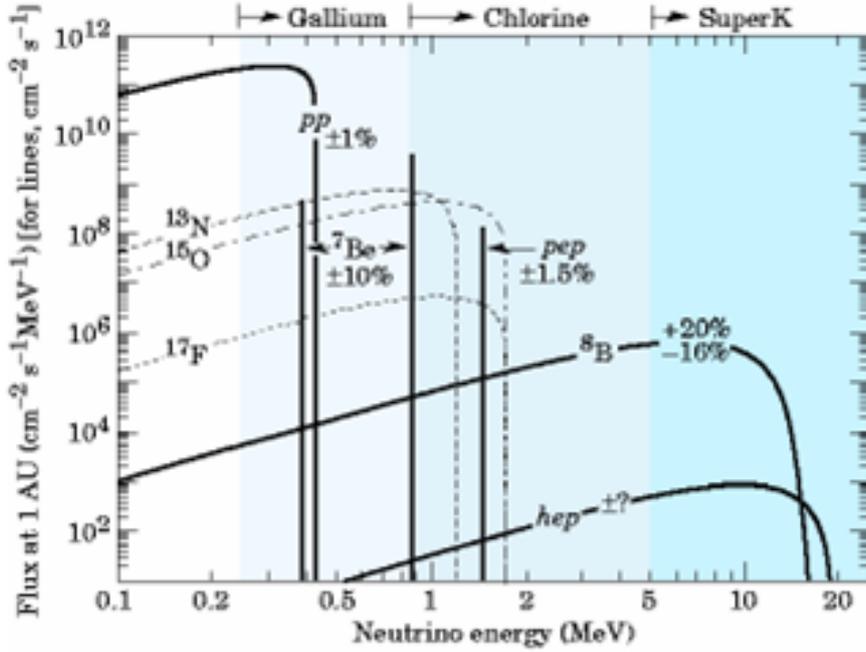


FIG. 2.1 – Spectre d'énergie calculé des neutrinos émis dans les différentes réactions au sein du Soleil selon le Modèle Standard du Soleil.

de Homestake au Dakota du Sud [11, 12, 13]. Cependant, le flux détecté ne concordait pas avec celui prévu par Bahcall : il était plus petit d'un facteur 3. La question fut donc de déterminer qui des théoriciens ou des expérimentateurs avait raison. Les mesures réalisées par R. Davis ont été par la suite confirmées par d'autres expériences telles que GALLEX [14, 15, 16, 17] ou GNO [18] ou par des mesures réalisées à Kamiokande puis SuperKamiokande. De son côté, Bahcall a affiné son modèle sans réussir à combler cette différence. Durant 20 ans, la question est donc restée ouverte. Finalement, le détecteur SNO a permis de trancher le débat en 2002.

SNO est un détecteur Čerenkov dont le milieu est constitué d'eau lourde [19, 20]. La présence de deutérium rend le détecteur à la fois sensible à l'interaction $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ mais aussi à l'interaction $\nu_\alpha + d \rightarrow p + n + \nu_\alpha$ où α représente l'une des trois saveurs du neutrino. L'étude de la première interaction quantifie le flux incident de neutrinos électroniques. Comme la probabilité de la seconde interaction ne dépend pas de la saveur du neutrino, elle permet d'évaluer le flux total de neutrinos incidents sur le détecteur. Le détecteur SNO permet donc de connaître la proportion de neutrinos électroniques parmi l'ensemble des neutrinos solaires.

Le flux total de neutrinos électroniques de plus de 5 MeV a été évalué à :

$$\Phi_e = 1.76 \pm 0.05 \pm 0.09 \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

La première erreur est d'ordre systématique tandis que la seconde est statistique. Le flux total de neutrinos au dessus de 5 MeV reçu a été ensuite évalué à :

$$\Phi_e + \Phi_\mu + \Phi_\tau = 5.21_{-0.63}^{+0.66} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Celui-ci concorde avec le flux prédit par Bahcall. De plus, la proportion de neutrinos électroniques parmi les neutrinos de plus de 5 MeV vaut :

$$\frac{\Phi_e}{\Phi_e + \Phi_\mu + \Phi_\tau} = 0.306 \pm 0.026 \pm 0.024$$

Nous retrouvons donc le facteur 3 manquant. Le flux de neutrinos incidents autres qu'électroniques est donc non nul. Si Bahcall avait raison sur le flux de neutrinos produits, Davis avait également raison sur le flux de neutrinos électroniques arrivant sur Terre. Le déficit apparent en neutrinos est dû à ce que certains de ces neutrinos ont changé de saveur avant leur arrivée sur Terre. Ce changement de saveur est appelé oscillation du neutrino. Dans ce cas, cette oscillation est liée à des effets d'interaction avec la matière au sein du Soleil [2].

La preuve définitive de l'oscillation du neutrino a été fournie par l'expérience KamLAND (KAMioka Liquid scintillator Anti Neutrino Detector) [21]. KamLAND étudie l'oscillation des antineutrinos émis par les centrales nucléaires du Japon situées à une moyenne de 180 km du détecteur. Le détecteur est situé dans l'ancienne mine de Kamioka. L'énergie des antineutrinos émis par les centrales nucléaires est de l'ordre de 2.2 MeV.

Bien que KamLAND n'observe pas les neutrinos solaires, l'expérience porte sur le même type d'oscillation et est donc sensible aux mêmes paramètres que les mesures précédentes.

Une conséquence immédiate de l'oscillation du neutrino est que le neutrino a une masse contrairement à ce que prédisait le Modèle Standard (Chapitre 1). De plus, si le neutrino oscille entre ses différentes saveurs, c'est qu'elles ne sont pas des états propres pour la masse. Les neutrinos correspondant à ces états propres sont notés ν_1 , ν_2 et ν_3 . Chaque saveur du neutrino est une superposition de ces états. L'étude des neutrinos passe alors par la détermination de leurs masses et des proportions de ces différents états pour chacune des trois saveurs du neutrino. Ces dernières sont reliées aux angles dits de mélange θ_{12} , θ_{13} et θ_{23} . L'étude des neutrinos solaires a permis de déterminer assez précisément la valeur de l'angle θ_{12} et la différence de masses au carré, δm^2 , entre les neutrinos ν_1 et ν_2 . Les estimations actuelles à 3 écarts types sont données dans le TAB. 2.1 [22, 23].

2.2 Les neutrinos atmosphériques : mesure de l'angle θ_{23}

Lors de leur traversée de l'atmosphère, les rayons cosmiques produisent une gerbe de pions et de muons. Les décroissances des pions et des muons produisent alors des neutrinos muoniques tandis que seule celle des muons produit des neutrinos électroniques. Dans la gamme d'énergie observée, le rapport entre le flux de neutrinos muoniques et celui de neutrinos électroniques provenant de l'atmosphère doit donc être a priori de 2. De plus, l'indépendance du rayonnement cosmique par rapport à l'angle azimutal θ_z implique celle de la production de neutrinos atmosphériques.

Cependant, la distance de parcours des neutrinos produits varie fortement selon l'angle azimutal où il a été produit (FIG. 2.2). Ainsi, s'il a été produit au dessus du détecteur ($\cos \theta_z = 1$), le neutrino ne traversera que l'atmosphère avant de rencontrer le détecteur, c'est-à-dire une distance d'approximativement 10 km tandis que ceux produits en dessous du détecteur ($\cos \theta_z = -1$) auront à traverser la Terre, ce qui fait une distance de parcours d'environ 13000 km. Ainsi, il y a une forte dispersion sur la distance parcourue par les neutrinos

en fonction de l'angle azimutal. Dans le cas d'oscillations du neutrino, le rapport entre le flux de neutrinos provenant de $\cos\theta_z = 1$ et celui de $\cos\theta_z = -1$ sera différent de 1.

Le flux de ces neutrinos atmosphériques fut étudié grâce au détecteur SuperKamiokande [24,25]. La grande avancée est que l'expérience permettait de déterminer assez précisément la direction de propagation du neutrino détecté et donc par là même, l'angle azimutal où il a été produit. La valeur du rapport entre le flux de neutrinos muoniques produits à $0.8 < \cos\theta_z < 1$ et celui produit à $-1 < \cos\theta_z < -0.8$ a donc pu être évalué à 0.54 ± 0.04 . Le neutrino muonique a bel et bien oscillé durant son parcours. Cependant, contrairement au cas des neutrinos solaires, si une asymétrie sur le flux de neutrinos muoniques fut observée, ce n'est pas le cas pour les neutrinos électroniques. Le type d'oscillations observées ici est donc différent : ce n'est pas une oscillation entre les neutrinos électroniques et muoniques mais entre les neutrinos muoniques et tau. L'expérience a donc pu déterminer un autre des paramètres de l'oscillation du neutrino à savoir l'angle θ_{23} et la différence des masses au carré Δm^2 entre les neutrinos ν_2 et ν_3 .

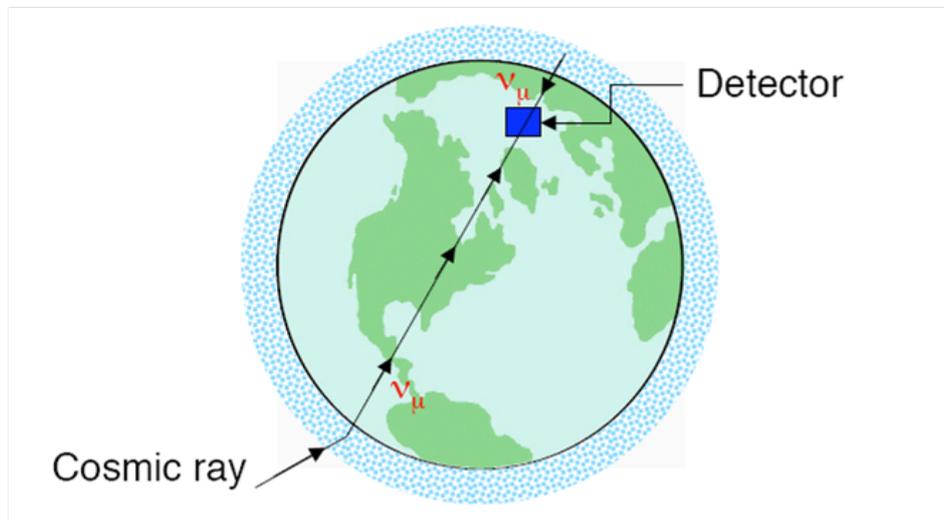


FIG. 2.2 – Représentation schématique du rôle de l'angle azimutal sur la distance de parcours du neutrino atmosphérique.

Par la suite, d'autres expériences comme K2K [26], MINOS [27] et CNGS [28,29] se sont ajoutées afin d'affiner la connaissance de ces deux paramètres. Les dernières valeurs estimées sont données dans le TAB. 2.1.

2.3 Mesure du dernier angle de mélange : θ_{13}

L'expérience CHOOZ [30] a permis de délimiter une zone d'exploration pour l'angle θ_{13} . Celle-ci est située sur le site de la centrale nucléaire du même nom dans les Ardennes en France constituée de deux réacteurs de 4.25 GW chacun.

Le détecteur est installé dans un puits de 115 m de profondeur à 1114 m et 998 m de chacun des deux réacteurs afin de détecter le flux d'antineutrinos électroniques émis par la centrale. Les prises de données ont permis de placer une borne supérieure égale à 0.1 avec un

indice de confiance de 90 % sur la valeur de $\sin^2(2\theta_{13})$. Il est prévu d'ajouter un détecteur proche de 100 m à 200 m des réacteurs en 2007 ou 2008, ce qui constituera l'expérience DOUBLE CHOOZ [31]. Cela permettrait de déterminer une borne supérieure de θ_{13} jusque $\sin^2(2\theta_{13}) = 0.03$ (FIG. 2.3).

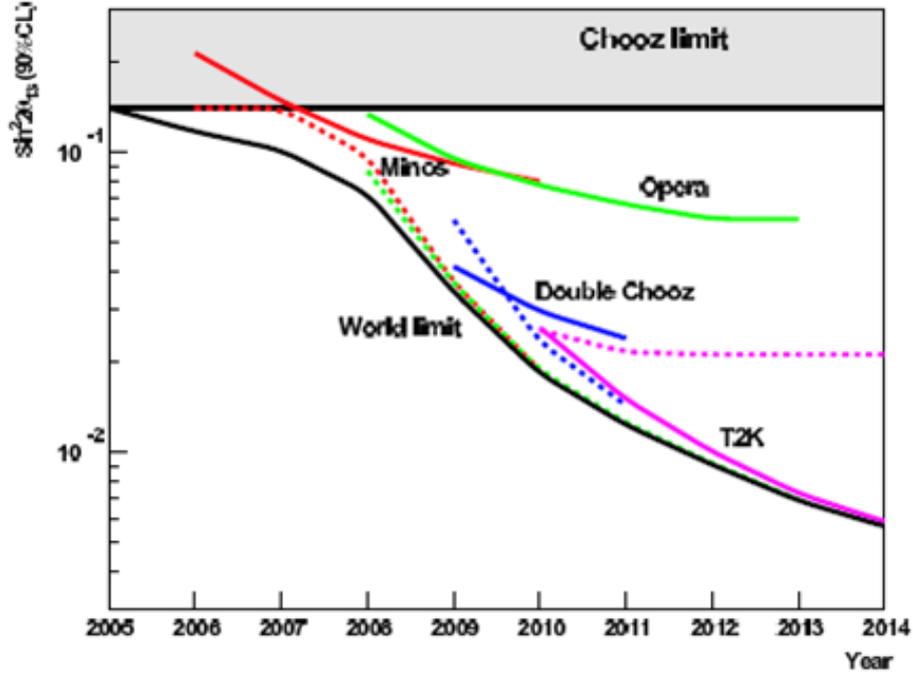


FIG. 2.3 – Sensibilité prévue sur l'angle de mélange θ_{13} (sans tenir compte des effets de matière ou de violation de la parité CP) pour MINOS, OPERA et T2K en comparaison avec celle de CHOOZ.

TAB. 2.1 – Valeurs expérimentales des angles de mélange et des différences des masses au carré du neutrino.

$\delta m^2 (\Delta m_{12}^2)$	7.92 ± 0.09	10^{-5} eV^2
$\Delta m^2 (\Delta m_{13}^2)$	$\Delta m_{23}^2 \begin{smallmatrix} +0.21 \\ -0.26 \end{smallmatrix}$	10^{-3} eV^2
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.314 \begin{smallmatrix} +0.18 \\ -0.15 \end{smallmatrix}$	-
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.9 \begin{smallmatrix} +2.3 \\ -0.9 \end{smallmatrix}$	10^{-2}
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.44 \begin{smallmatrix} +0.41 \\ -0.22 \end{smallmatrix}$	-

Cependant, si l'angle θ_{13} est en dessous de cette limite alors une nouvelle génération de sources de neutrinos sera nécessaire. Une famille de ces sources appelée usine à neutrinos repose sur la technologie des accélérateurs et est présentée dans la partie suivante.

2.4 Les usines à neutrinos

L'étude des neutrinos solaires a permis de déterminer plus ou moins précisément la valeur de l'angle de mélange θ_{12} et celle des neutrinos atmosphériques celle de θ_{23} . Ces deux angles

sont suffisamment grands pour avoir un encadrement de leur valeur. Par contre, seule une majoration de θ_{13} a pu être réalisée grâce à CHOOZ [30]. Sa détermination pose donc un problème de sensibilité de mesure et nécessite un faisceau très intense avec un spectre en énergie bien défini de neutrinos. Une nouvelle génération de sources à neutrinos faisant appel aux accélérateurs à particules est donc en développement. Il existe à ce jour trois grands principes pour les usines à neutrinos [32] :

- Les super faisceaux
- Les neutrino factories
- Les beta-beams

2.4.1 Les super faisceaux

Les super faisceaux sont centrés sur les oscillations $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ et $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ et utilisent des faisceaux conventionnels de protons. Les neutrinos et antineutrinos muoniques proviennent de la décroissance de pions selon les processus suivants :

$$\pi^+ \rightarrow \nu_\mu + \mu^+ \quad \pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$$

Les pions sont quant à eux produits par un faisceau intense de protons frappant une cible. Afin de focaliser le flux de neutrinos vers le détecteur, une corne magnétique (FIG. 2.4) est insérée derrière la cible afin de courber la trajectoire des pions produits avant leur décroissance [33, 34]. Les inconvénients majeurs de cette méthode sont un spectre en énergie très étendu, une dispersion angulaire très large et une contamination en neutrinos électroniques d'au moins 1 %. Pour remédier à cela, les super faisceaux utilisent plutôt les neutrinos produits avec un angle θ non nul par rapport à l'axe du faisceau de protons. Dans le cas d'une décroissance à 2 corps comme celle du pion [33], tous les pions d'énergie suffisante produisent des neutrinos d'énergie similaire dans une direction θ non nulle. L'étude de ces neutrinos permet d'avoir un spectre plus étroit en énergie et dans une gamme plus basse en énergie. Par contre, le flux émis est alors plus faible.

Parmi les super faisceaux, nous pouvons citer T2K (Tokai to Kamioka) [35], T2HK (Tokai to HyperKamioka), NO ν A [36], CNGS [28, 29] et enfin le SPL-superbeam du CERN [37, 38, 39, 40, 41].

T2K est supposé démarrer en 2009. Les pions sont produits sur le site de Tokai à partir d'un faisceau intense de 0.45 MW. L'expérience utilise deux détecteurs. Le premier est à 2 km de la source et le second, qui est un détecteur Čerenkov à eau, est situé à 295 km dans la mine de Kamioka. Les neutrinos étudiés sont ceux produits avec un angle de $2 - 3^\circ$ par rapport à l'axe du faisceau de pions. T2HK est une amélioration de T2K en montant la puissance du faisceau de 1 MW à un maximum de 4 MW et en augmentant les dimensions du détecteur, qui serait alors HyperKamiokande.

Le projet du CERN-SPL SuperBeam est basé sur le SPL (Super Proton Linac), qui est en cours d'étude au CERN [42]. Le SPL devrait accélérer un faisceau de protons jusqu'à un moment de 2.2 GeV/c pour une puissance faisceau de 4 MW. Les protons sont ensuite envoyés vers une cible de mercure liquide, ce qui génère des pions π^+ et π^- . Les pions sont focalisés dans une corne magnétique [43] pour ensuite décroître dans un tunnel de décroissance, ce qui donne un faisceau de neutrinos (et antineutrinos) muoniques (FIG. 2.5). Le faisceau est alors

analysé dans un détecteur situé à 130 km dans la montagne de Fréjus près du laboratoire souterrain de Modane. Le flux incident de neutrino muoniques sur le détecteur est estimé à $3.6 \times 10^{11} \nu_\mu/\text{an}/\text{m}^2$ avec une énergie moyenne de 0.27 GeV.

Le détecteur utilisé serait le détecteur Čerenkov à eau MEMPHYS (MEgaton Mass PHYSics), en cours de développement également [44]. Il consiste en trois à quatre citernes de 250000 m^3 chacune faisant 65 m de diamètre sur 65 m de haut. Ce détecteur pourrait également être un candidat pour un autre type de sources appelé beta-beams.

Les problèmes soulevés par les super faisceaux sont :

- La réalisation de « proton drivers » de plus en plus puissants afin d’avoir la puissance faisceau nécessaire pour une production en masse de pions
- La résistance mécanique et thermique de la cible : il faut qu’elle puisse supporter des impacts de plusieurs mégawatts
- La collection des pions ce qui nécessite une optimisation de la corne magnétique
- Un spectre assez large en énergie pour le flux de neutrinos et une contamination du faisceau initial par des neutrinos électroniques provenant de la décroissance des muons

Les avantages sont :

- Faisceaux ”conventionnels” de protons
- Grâce à l’expérience accumulée avec SuperKamiokande, les détecteurs de type Čerenkov sont bien connus. La R&D porte surtout sur les photo détecteurs

2.4.2 Les neutrino factories

Le Japon, les Etats-Unis et l’Europe ont chacun un projet différent. Le projet européen est présenté sur la FIG. 2.6. Dans les trois cas, ils reposent sur la décroissance du muon selon le schéma suivant :

$$\begin{aligned}\mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu\end{aligned}$$

Les muons sont eux-mêmes issus de la décroissance des pions. Ainsi, la première partie d’une neutrino factory est similaire à un super faisceau. Dans le référentiel du centre de masse, le spectre en énergie d’émission du neutrino issu de la décroissance du muon est bien défini. En repassant dans le référentiel du laboratoire, la transformation de Lorentz fait que l’énergie apparente du neutrino émis augmente avec celle du muon. Le spectre d’émission est alors décalé vers les énergies plus élevées. Afin d’avoir une grande énergie moyenne des neutrinos produits, les muons doivent donc être préalablement accélérés jusque 20-50 GeV/c selon les projets pour être ensuite stockés dans un anneau de décroissance [32]. De longues sections droites y sont alors aménagées qui pointent vers deux détecteurs lointains situés à des distances de 700 (7000) km et de 3000 km. Les neutrino factories permettraient d’étudier les oscillations suivantes :

$$\begin{aligned}\nu_e &\rightarrow \nu_\mu & \bar{\nu}_e &\rightarrow \bar{\nu}_\mu & \text{« golden channel »} \\ \nu_e &\rightarrow \nu_\tau & \bar{\nu}_e &\rightarrow \bar{\nu}_\tau & \text{« silver channel »} \\ \bar{\nu}_\mu &\rightarrow \bar{\nu}_e & \nu_\mu &\rightarrow \nu_e & \text{« platinum channel »}\end{aligned}$$

En théorie, la gamme d’énergie considérée donnerait la meilleure sensibilité sur les paramètres θ_{13} et δ . De plus, l’étude de toutes ces oscillations permet de lever les dégénérescences

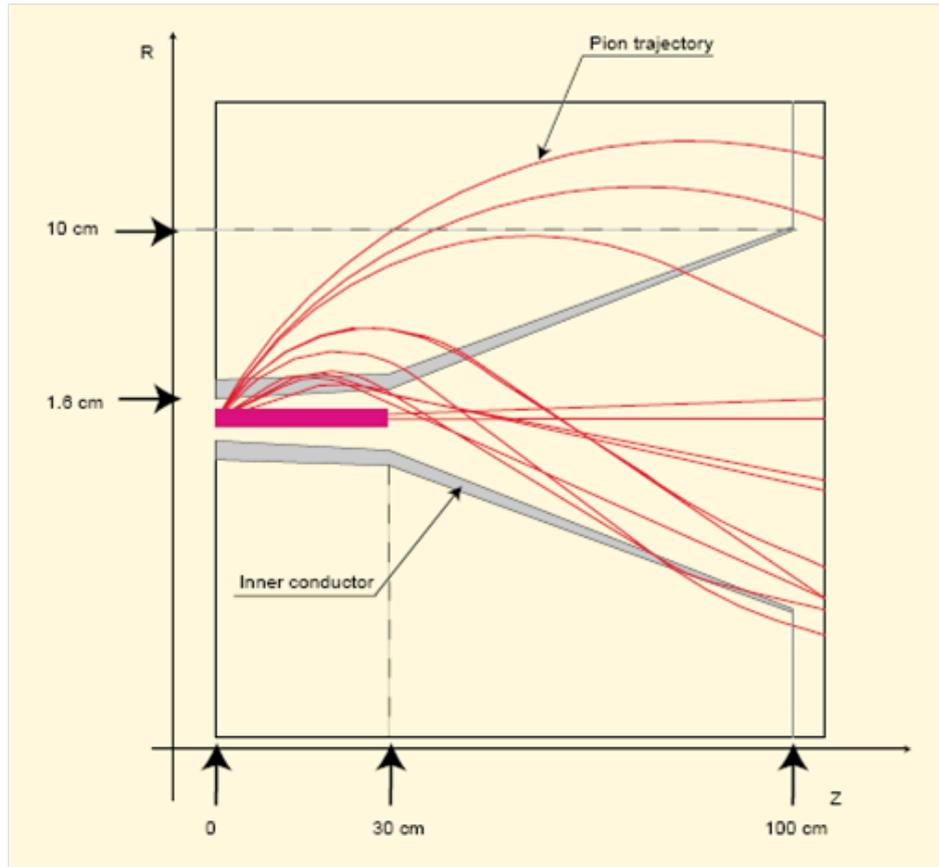


FIG. 2.4 – Corne magnétique de collection des pions.

sur les paramètres des neutrinos mais cela requiert un fort développement sur les techniques de détection afin de discriminer les événements ayant lieu dans les détecteurs.

Cependant, la très courte durée de vie des muons au repos impose une accélération très rapide afin de conserver une intensité suffisamment grande dans l’anneau de décroissance. Il n’est alors pas possible d’utiliser des synchrotrons pour accélérer car la vitesse de montée en champ nécessaire serait beaucoup trop élevée. Les technologies actuellement envisagées pour ces anneaux sont des RLA (Linacs à recirculation) ou des FFAG (Fixed Field Alternating Gradient [45, 46]) qui ont une très large acceptation en énergie ce qui permet d’accélérer les muons à champ constant dans les aimants [47]. Cependant, du fait de la forte accélération, la modélisation de la dynamique du faisceau pour les différents types de FFAG (« scaling », « non scaling », ...) peut nécessiter une forte R&D [46].

Afin d’avoir une intensité suffisante en muons, la cible doit être bombardée par un faisceau de protons de 4 MW. Le SPL, qui est prévu pour les super faisceaux du CERN, pourrait être également utilisé ici. Les contraintes exercées sur la cible demandent une modélisation poussée de l’impact. Une preuve de principe d’un tel système est réalisée dans le projet MERIT [48].

De plus, l’émission transverse normalisée des muons à la source est très importante. Dans le cas où l’acceptation transverse n’est pas suffisante, le faisceau doit donc être refroidi afin de la réduire. Dans ce cas, il faut une ligne de refroidissement rapide à muons [49], dont le

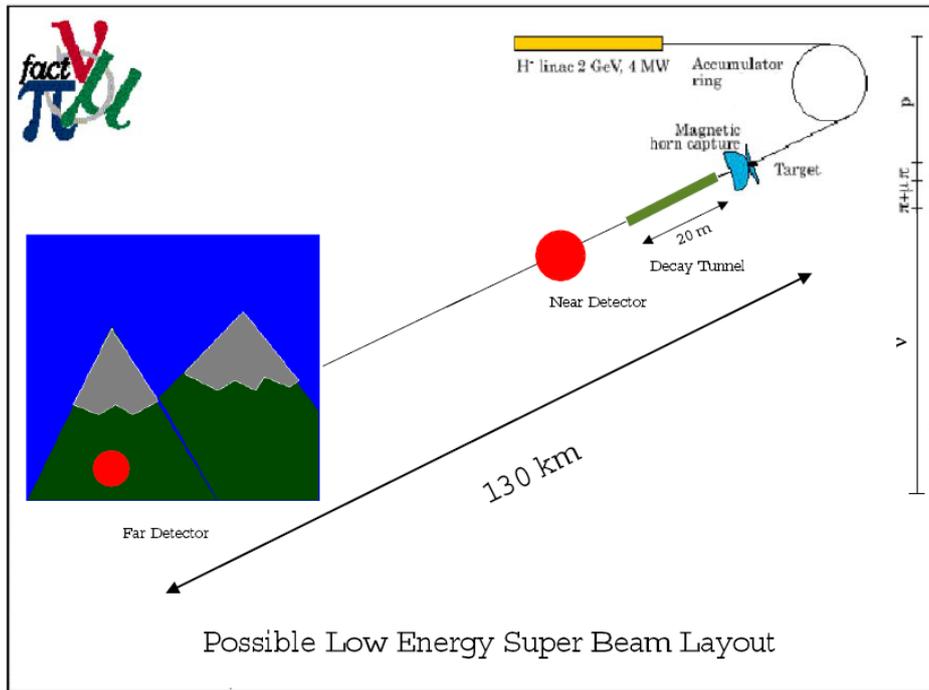


FIG. 2.5 – Schéma de principe du SPL-Superbeam.

principe et la technologie sont à l'étude dans les projets MUCOOL [50] ou MICE [51].

Enfin, le détecteur nécessite l'emploi d'un champ magnétique afin de discriminer les différentes interactions générées par les neutrinos. En effet, dans le cas du μ^- par exemple, le flux de neutrinos arrivant sur le détecteur contiendra à la fois des neutrinos muoniques issus directement de sa décroissance et des antineutrinos muoniques dus à l'oscillation de l'antineutrino électronique. Ceux-ci donnent respectivement des μ^+ et des μ^- après interaction dans le détecteur. Le problème est donc d'écarter les muons de mauvais signe, ce qui nécessite la présence d'un champ magnétique.

Toutes ces contraintes font que les neutrino factory restent un projet très ambitieux et nécessitent a priori une R&D intense. Chaque étape de la machine est un défi technologique et fait appel à des records mondiaux [32].

2.4.3 Les beta-beams

Le principe a été introduit pour la première fois par P. Zucchelli en 2001 [52]. Au lieu d'étudier la disparition des neutrinos muoniques, le but est d'étudier les oscillations $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ et $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$. Les neutrinos électroniques (et antineutrinos) sont produits par la décroissance radioactive de type β de noyaux radioactifs. Il s'agit donc de produire un faisceau intense d'ions radioactifs puis de les amener à haute énergie dans un complexe d'accélérateurs. Une fois qu'ils ont atteint l'énergie voulue, ils sont stockés dans un anneau dit de décroissance. Ils y circulent ensuite jusqu'à être complètement perdus (par décroissance ou autre processus). Comme la probabilité de décroissance du noyau est la même partout dans l'anneau, le ratio

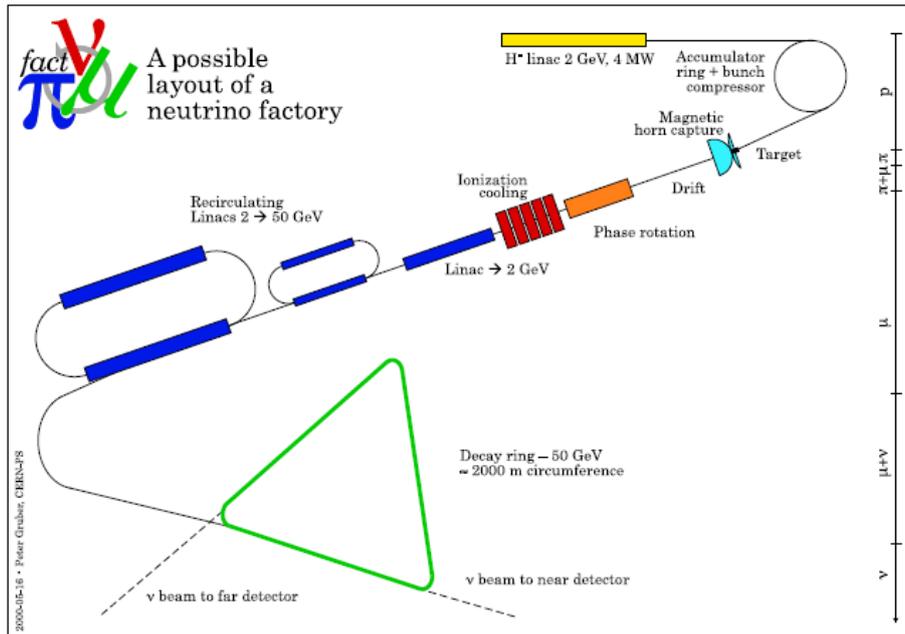


FIG. 2.6 – Schéma de principe d'une Neutrino Factory.

entre la longueur de la section droite pointant vers le détecteur et la circonférence totale doit être le plus large possible, d'où la forme en champ de course de l'anneau (FIG. 2.7).

Par cette méthode, les neutrinos (et antineutrinos) produits sont purement électroniques et leur spectre en énergie est très bien connu. De plus, l'énergie moyenne des neutrinos émis est directement proportionnelle à celle des noyaux stockés, ce qui permet d'optimiser la probabilité d'oscillation pour une distance de parcours donnée en agissant sur l'énergie des ions parents.

Dans la proposition du CERN, les noyaux sélectionnés sont l' ${}^6\text{He}^{2+}$ comme émetteur β^- et le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ comme émetteur β^+ . La chaîne de production est inscrite dans le projet EURISOL [53]. Les protons sont délivrés à une énergie de 2.2 GeV avec un courant moyen de 2 mA par le SPL, qui est actuellement en développement. Comme les beta-beams ont besoin d'un courant de $100 \mu\text{A}$ de protons d'énergie entre 1 à 2 GeV, ils utiliseraient 10 % du faisceau délivré par le SPL. Ces protons sont ensuite envoyés sur des cibles de type ISOL (Isotope Separation On Line) pour produire les ions demandés. Dans le cas de l'Hélium 6, ils sont d'abord envoyés sur un convertisseur proton-neutron : une cible de tungstène solide ou de plomb liquide (FIG. 2.8). Les neutrons se diffusent ensuite dans l'oxyde de béryllium entourant la cible, ce qui produit de l'Hélium 6. Le Néon 18 est produit en envoyant les protons directement sur une cible d'oxyde de magnésium.

L'Hélium 6 et le Néon 18 sont ensuite ionisés par une source ECR de 60 GHz à une cadence de 10 Hz [54]. Le temps passé dans la source fait que presque la totalité de l'Hélium 6 est complètement ionisée tandis que l'efficacité est de 30 % pour le Néon 18.

Les ions sont ensuite accélérés dans un accélérateur linéaire jusque 100 MeV/u puis injectés dans un Rapid Cycling Synchrotron (RCS) en cours d'étude [55]. Le RCS fonctionnerait à un taux de répétition de 10 Hz et accélérerait les ions ${}^6\text{He}^{2+}$ jusqu'à 787 MeV/u et ceux de ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ jusqu'à 1650 MeV/u, correspondant à une rigidité magnétique de 11 T.m. Les ions

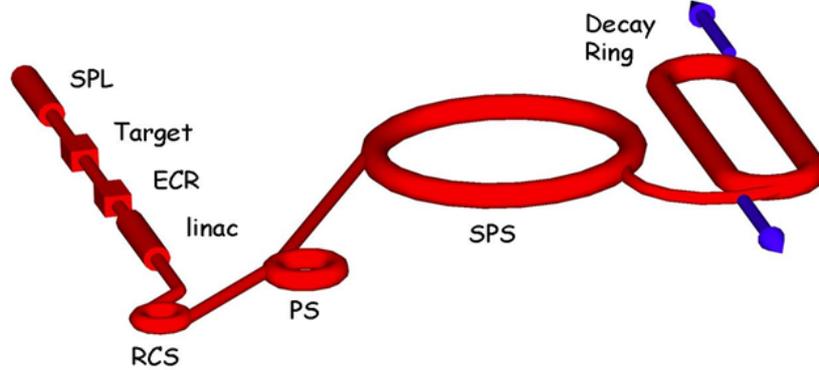


FIG. 2.7 – Schéma de principe de l'usine beta-beam basée au CERN.

sont ensuite extraits vers le PS du CERN avec un rendement lié à l'accélération et à l'injection supposé de 50 %.

Une fois que 20 paquets ont été injectés dans le PS, les ions ${}^6\text{He}^{2+}$ et ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ sont respectivement accélérés jusqu'à une énergie cinétique de 7.8 GeV/u et 14 GeV/u. Les 20 paquets sont alors envoyés vers le SPS pour être à nouveau accélérés jusqu'à une énergie cinétique de 92.5 GeV/u. Enfin, les 20 paquets sont stockés dans l'anneau de décroissance pour y être accumulés jusqu'à leur décroissance. Pour conserver le synchronisme avec le SPS, la circonférence de l'anneau de décroissance a été fixée égale à celle du SPS à savoir 6911 m. Le ratio entre la longueur de la section droite pointant vers le détecteur et la circonférence totale est égal à 36 %.

L'optimisation de la ligne d'accélération fait que l'injection dans l'anneau de décroissance a lieu toutes les 6 s pour les ions ${}^6\text{He}^{2+}$ et toutes les 3.6 s pour les ions ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ [56]. Le système d'injection dans l'anneau est détaillé dans le Chapitre 3.

Pour une détection optimale de l'oscillation des neutrinos électroniques au LSM (Laboratoire Souterrain de Modane) situé dans le tunnel de Fréjus à 130 km, une accélération des ions parents jusqu'à des γ de l'ordre de 100 est un bon compromis. Il pourrait alors être possible d'utiliser le même détecteur que pour le CERN SPL-Superbeam à savoir MEMPHYS [44] et d'étudier ainsi pendant les 10 années de prise de données les oscillations :

$$\begin{aligned} \nu_e &\rightarrow \nu_\mu & \bar{\nu}_e &\rightarrow \bar{\nu}_\mu \\ \nu_\mu &\rightarrow \nu_e & \bar{\nu}_\mu &\rightarrow \bar{\nu}_e \end{aligned}$$

La combinaison des deux expériences permettrait d'augmenter de manière non négligeable la sensibilité des expériences (FIG. 2.9).

Les problèmes soulevés par les beta-beams sont :

- La production des noyaux radioactifs. Si les taux nécessaires pour l'Hélium semblent réalisables, ce n'est pas le cas pour le Néon. Il faut réussir à gagner un facteur 20 sur le taux de production. Un autre schéma de production a été proposé en [57, 58],

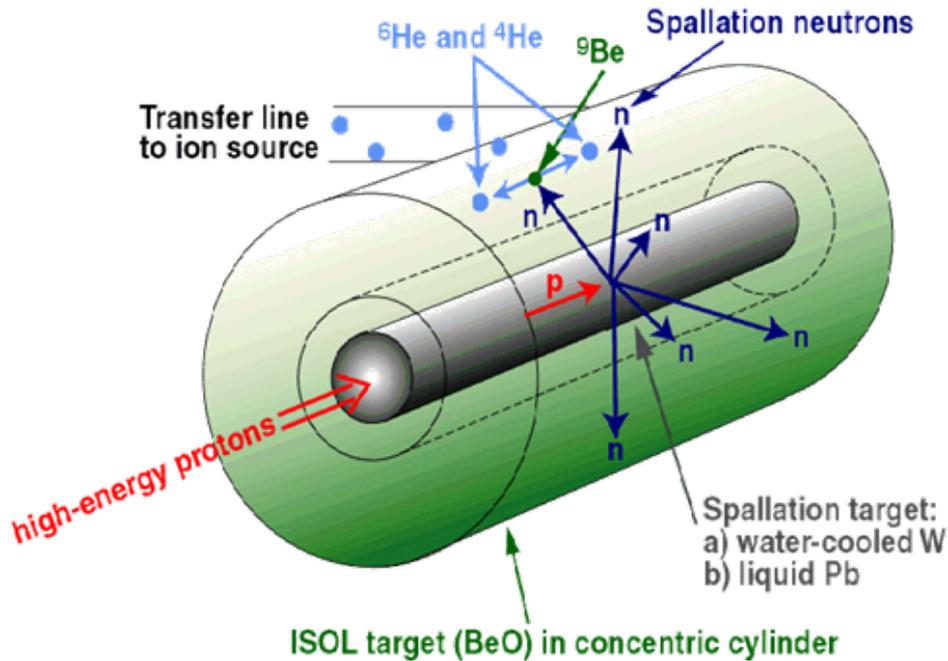


FIG. 2.8 – Schéma de principe de la production de l'Hélium-6.

utilisant d'autres espèces d'ions à savoir le ${}^6\text{Li}^{3+}$ comme émetteur β^- et le ${}^8\text{B}^{4+}$ comme émetteur β^+ . Cependant, des études de faisabilité de ce système sont à être lancées, ce qui explique que, pour l'instant, cette option n'est pas retenue pour le schéma de base pour les beta-beams.

- La radioprotection. Le dépôt des produits de décroissance β dans le PS et dans l'anneau de décroissance active ou/et risque de détériorer les éléments magnétiques. [59, 60, 61, 62, 63, 64]
- Le système d'injection dans l'anneau de décroissance est particulier [65]. Le problème de radioprotection pour les ions perdus est comparable à celui des produits de décroissance.

Les avantages sont :

- Le faisceau de neutrinos (ou antineutrinos) produits est purement électronique.
- Le spectre en énergie des neutrinos est très bien connu.
- Il est possible d'utiliser le même détecteur pour les beta-beams et le SPL-Superbeam. Cela permettrait d'étudier les violations de parité CP.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un rapide état de l'art des expériences qui ont été menées durant les dernières décennies afin d'étudier les paramètres du neutrino a été fait. Les premières expériences sur l'oscillation des neutrinos ont été réalisées à partir de sources « naturelles ». Ainsi, comme la première source de neutrinos pour la Terre est le Soleil, le flux de neutrinos solaires a été étudié durant plusieurs décennies. Ceci a alors abouti à un constat : le flux de neutrinos prédit et celui détecté était différent. Ceci a été la première confrontation avec les oscillations

du neutrino. La seconde source naturelle fut l'atmosphère. Là aussi, des oscillations du neutrino entre ses différentes saveurs, bien que d'une autre sorte, ont été détectées. La troisième source fut les centrales nucléaires, qui ont permis d'explorer une troisième facette de cette oscillation. Néanmoins, l'inconvénient majeur de ces trois sources de neutrinos sont que les caractéristiques du flux entrant ne sont pas parfaitement connues. La quatrième source repose sur les accélérateurs en utilisant les neutrinos produits à partir de la décroissance d'un faisceau de particules instables.

Afin de parfaire la connaissance des paramètres d'oscillation, de nouvelles sources spécialement dédiées à la physique du neutrino sont nécessaires. Dans ce chapitre, trois de ces concepts ont été décrits : les « super faisceaux », les « neutrino factory » et les beta-beams. La thèse porte sur l'étude et la conception de l'anneau de décroissance de ce dernier type de sources. Nous ne nous intéresserons donc dans la suite qu'à la proposition du CERN pour les beta-beams et ne traiterons que l'optique et les problématiques spécifiques à l'anneau. Dans le chapitre suivant, nous présentons plus en détails les différents paramètres qui nous seront utiles dans la suite pour le dimensionnement de l'anneau.

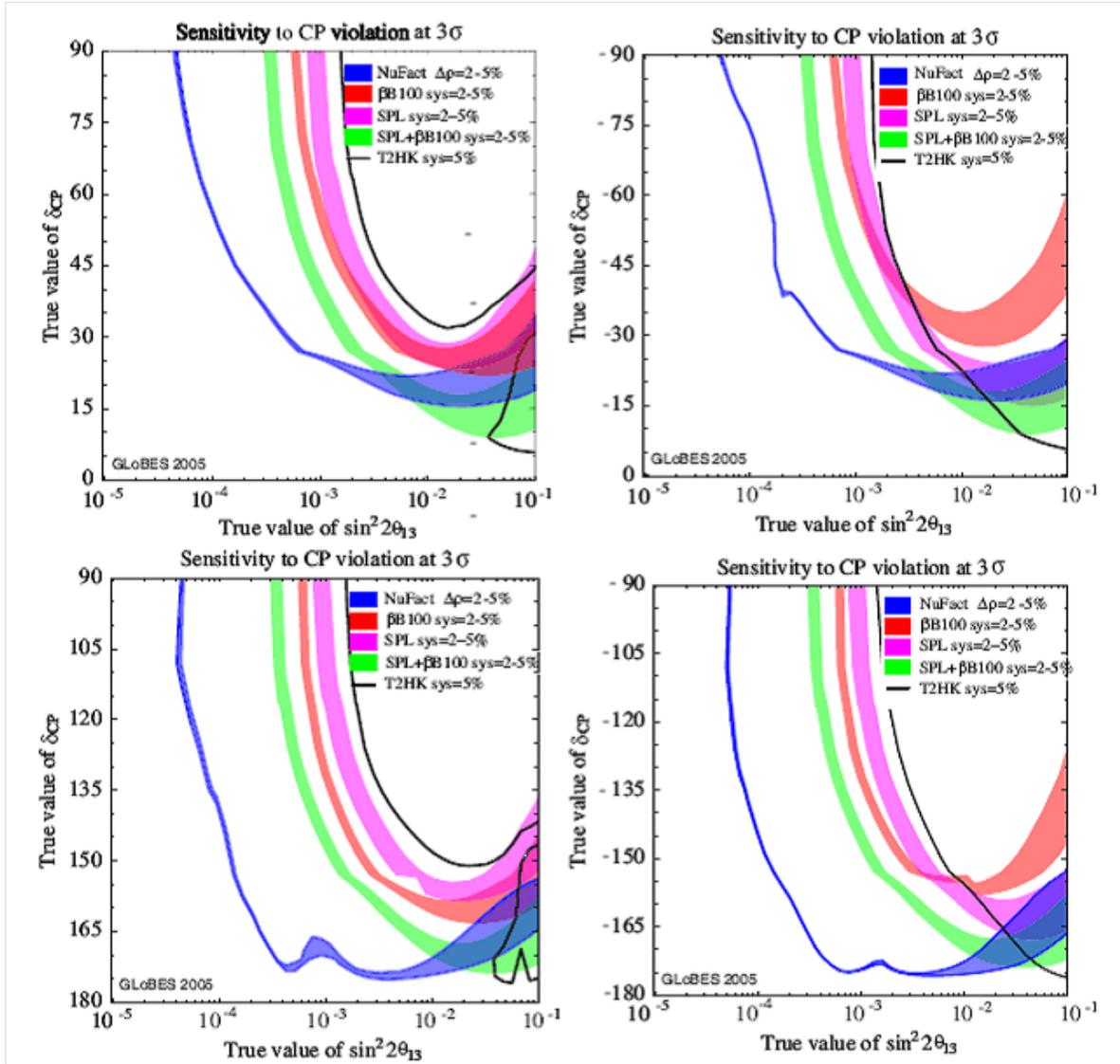


FIG. 2.9 – Comparaison du potentiel de découverte à 3 écarts types des paramètres θ_{13} et δ pour différentes expériences sur la base d'une prise de données pendant 10 ans.

Chapitre 3

LE PROJET BETA-BEAM

Le but des beta-beams est de stocker un grand nombre d'ions radioactifs dans un anneau en forme de champ de course afin que les décroissances de type β qui y ont lieu soient la source d'un faisceau de neutrinos ou d'antineutrinos. Le but de la thèse est d'étudier et de concevoir un tel anneau dans le cadre d'un projet basé au CERN qui fait partie du design study d'EURISOL [53]. Cependant, les considérations physiques de l'expérience ou les faisabilités techniques ont fixé un certain nombre de paramètres tels que l'énergie ou les intensités des ions stockés. Dans ce chapitre, nous exposerons dans un premier temps l'ensemble des paramètres qui dimensionnent l'anneau.

3.1 Paramètres du projet

3.1.1 Choix des ions

Plusieurs critères ont influencé le choix des ions à savoir :

- Possibilité de produire ces ions avec un taux suffisant pour l'expérience
- Gaz nobles de référence : inactifs chimiquement et gazeux à température ambiante donc extraction plus simple de la source
- Temps de vie suffisamment court pour que le nombre de décroissances des ions par seconde soit suffisant à haute énergie
- Temps de vie suffisamment long pour limiter les pertes par décroissance entre le production et l'anneau de stockage
- Le nombre de charge Z doit être petit pour pouvoir stocker une intensité plus élevée dans l'anneau (problèmes liés à la charge d'espace) et pour avoir une meilleure efficacité lors de l'épluchage des ions dans la source ECR

Les candidats potentiels pour les beta-beams sont donnés dans les TAB. 3.1 et TAB. 3.2 [66]. Le facteur Q_β correspond à la différence d'énergie entre les niveaux fondamentaux du noyau père et du noyau fils. Il est également relié à l'énergie moyenne des neutrinos émis dans le référentiel du centre de masse. Pour l'instant, le meilleur compromis reste l' ${}^6\text{He}^{2+}$ pour la production d'antineutrinos et le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ pour la production de neutrinos.

TAB. 3.1 – Candidats pour les émetteurs β^- (charge/bunch = 1×10^{13} , $\gamma = 100$).

Isotope	A/Z	$T^{1/2}$ (s)	Q_β états fond. (MeV)	Q_β eff (MeV)	\bar{E}_β (MeV)	\bar{E}_ν (MeV)	Ions/bunch	Nombre Décroissances (s^{-1})	Taux/ \bar{E}_ν (s^{-1})
${}^6\text{He}^{2+}$	3.0	0.80	3.5	3.5	1.57	1.94	5×10^{12}	4×10^{10}	2×10^{10}
${}^8\text{He}^{2+}$	4.0	0.11	10.7	9.1	4.35	4.80	5×10^{12}	3×10^{11}	6×10^{10}
${}^8\text{Li}^{3+}$	2.7	0.83	16.0	13.0	6.24	6.72	3×10^{12}	3×10^{11}	4×10^9
${}^9\text{Li}^{3+}$	3.0	0.17	13.6	11.9	5.73	6.20	3×10^{12}	1×10^{11}	2×10^{10}
${}^{11}\text{Be}^{4+}$	2.8	13.8	11.5	9.8	4.65	5.11	3×10^{12}	1×10^9	2×10^8
${}^{15}\text{C}^{6+}$	2.5	2.44	9.8	6.4	2.87	3.55	2×10^{12}	5×10^9	1×10^9
${}^{16}\text{C}^{6+}$	2.7	0.74	8.0	4.5	2.05	2.46	2×10^{12}	2×10^{10}	6×10^9
${}^{16}\text{N}^{7+}$	2.3	7.13	10.4	5.9	4.59	1.33	1×10^{12}	1×10^9	1×10^9
${}^{17}\text{N}^{7+}$	2.4	4.17	8.7	3.8	1.71	2.10	1×10^{12}	2×10^9	1×10^9
${}^{18}\text{N}^{7+}$	2.6	0.64	13.9	8.0	5.33	2.67	1×10^{12}	2×10^{10}	6×10^9
${}^{23}\text{Ne}^{10+}$	2.3	37.2	4.4	4.2	1.90	2.31	1×10^{12}	2×10^8	8×10^7
${}^{25}\text{Ne}^{10+}$	2.5	0.60	7.3	6.9	3.18	3.73	1×10^{12}	1×10^{10}	3×10^9
${}^{25}\text{Ne}^{10+}$	2.3	59.1	3.8	3.4	1.51	1.90	9×10^{11}	1×10^8	6×10^7
${}^{26}\text{Na}^{11+}$	2.4	1.07	9.3	7.2	3.34	3.81	9×10^{11}	6×10^9	2×10^9

TAB. 3.2 – Candidats pour les émetteurs β^+ (charge/bunch = 1×10^{13} , $\gamma = 100$).

Isotope	A/Z	$T^{1/2}$ (s)	Q_β états fond. (MeV)	Q_β eff (MeV)	\bar{E}_β (MeV)	\bar{E}_ν (MeV)	Ions/bunch	Nombre Décroissances (s^{-1})	Taux/ \bar{E}_ν (s^{-1})
${}^8\text{B}^{5+}$	1.6	0.77	17.0	13.9	6.55	7.37	2×10^{12}	2×10^{10}	2×10^9
${}^{10}\text{C}^{6+}$	1.7	19.3	2.6	1.9	0.81	1.08	2×10^{12}	6×10^8	6×10^8
${}^{14}\text{O}^{8+}$	1.8	70.6	4.1	1.8	0.78	1.05	1×10^{12}	1×10^8	1×10^8
${}^{15}\text{O}^{8+}$	1.9	122.	1.7	1.7	0.74	1.00	1×10^{12}	7×10^7	7×10^7
${}^{18}\text{Ne}^{10+}$	1.8	1.67	3.3	3.0	1.50	1.52	1×10^{12}	4×10^9	3×10^9
${}^{19}\text{Ne}^{10+}$	1.9	17.3	2.2	2.2	0.96	1.25	1×10^{12}	4×10^8	3×10^8
${}^{21}\text{Na}^{11+}$	1.9	22.4	2.5	2.5	1.10	1.41	9×10^{11}	3×10^8	2×10^8
${}^{33}\text{Ar}^{18+}$	1.8	0.17	10.6	8.2	3.97	4.19	6×10^{11}	2×10^{10}	5×10^9
${}^{34}\text{Ar}^{18+}$	1.9	0.84	5.0	5.0	2.29	2.67	6×10^{11}	5×10^9	2×10^9
${}^{35}\text{Ar}^{18+}$	1.9	1.77	4.9	4.9	2.27	2.65	6×10^{11}	2×10^9	8×10^8
${}^{37}\text{K}^{19+}$	1.9	1.22	5.1	5.1	2.35	2.72	5×10^{11}	3×10^9	1×10^9
${}^{80}\text{Rb}^{37+}$	2.2	34.	4.7	4.5	2.04	2.48	3×10^{11}	6×10^7	2×10^7

3.1.2 Paramètres

Dans le schéma de base, les ions ${}^6\text{He}^{2+}$ et ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ sont accélérés jusqu'à $\gamma = 100$ avant d'être stockés dans un anneau de décroissance. Du fait de la valeur de Q_β pour chacun de ces ions, l'énergie moyenne des neutrinos et anti-neutrinos émis par l'anneau est de l'ordre de 300 à 400 MeV [67]. D'après Eq. (1.4), la probabilité d'oscillation entre les saveurs électroniques et muoniques est maximale pour une distance de l'ordre de 100 à 200 km, ce qui coïncide avec le détecteur de Fréjus.

L'expérience est prévue fonctionner 5 ans en utilisant l'ion ${}^6\text{He}^{2+}$ et 5 ans avec l'ion ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. Le nombre nécessaire de décroissances dirigées vers le détecteur (et donc dans la section droite) est alors de 2.9×10^{11} par seconde pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$ et de 1.1×10^{18} par seconde pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ [68, 69]. Le taux moyen de décroissance par seconde $N_{\nu/s}$ est donné par :

$$N_{\nu/s} = r \cdot N_0 \frac{2^{-\frac{T}{\gamma\tau}}}{T}$$

où $r \approx 36\%$ est le rapport entre la longueur de la section utile et la circonférence totale
 N_0 est le nombre total d'ions stockés

T	est le temps entre deux injections
τ	est le temps de demi-vie de l'ion au repos
γ	est le facteur de Lorentz

De cette formule, il découle que les quantités à stocker dans l'anneau de décroissance sont de 9.66×10^{13} ions ${}^6\text{He}^{2+}$ et 7.42×10^{13} ions ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. Il est alors possible de déduire le nombre d'ions nécessaires à chaque étape en tenant compte des pertes par décroissance. Une optimisation des temps de transit dans les différentes machines a été réalisée [56]. Nous obtenons alors la TAB. 3.4. Deux accumulations ont lieu dans le schéma de base :

- La première a lieu lors du remplissage du PS. Le nombre d'harmoniques du RCS est de 1 tandis que celui du PS est de 21. Avant d'accélérer les paquets d'ions, le PS est d'abord préalablement rempli par les paquets venant du RCS. A la fin de l'accumulation, un train de 20 paquets est alors présent dans le PS. L'un des buckets reste vide afin d'avoir un temps de montée suffisant pour l'extraction. Les ions sont ensuite accélérés et envoyés vers le SPS.
- La seconde accumulation a lieu dans l'anneau final de stockage. Du fait que le rapport signal sur bruit doit être minimisé, le train d'ions stockés doit être le plus compact possible. Aussi, seuls 20 paquets sur les 924 disponibles dans l'anneau sont utilisés. Comme le faisceau stocké reste en permanence dans l'anneau, l'injection se réalise en présence d'un faisceau circulant. Le système d'injection devra permettre le mélange entre les deux faisceaux.

En tenant seulement compte des pertes par décroissance le long de la ligne, le taux de production requis est de 2×10^{13} et 1.9×10^{13} . Cependant, les premières estimations en terme de taux de production montrent qu'avec la technologie actuelle il manque un facteur 20 pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. Par contre, la production de ${}^6\text{He}^{2+}$ semble réaliste. Deux approches ont alors été envisagées : la première, dite « bottom-up », consiste à partir des taux de production actuellement faisables et une autre, « top-down », de ceux exigés pour l'expérience. Finalement, la seconde approche a été retenue, ce qui aboutit au jeu de paramètres donné dans les TAB. 3.5 et TAB. 3.6 [70].

Les émittances du faisceau sont déterminées par l'acceptance du PS du fait des dimensions de la chambre [68]. En effet, les émittances maximales normalisées dans le PS sont fixées à 7.8π mm.mrad et 4.2π mm.mrad respectivement dans le plan horizontal et vertical pour les deux espèces d'ions. En supposant un gonflement de 20 % à chaque injection dans les autres machines après le PS, nous aboutissons à des valeurs d'émittances normalisées rms pour les deux espèces de 11π mm.mrad et 6π mm.mrad dans chacun des deux plans. Cependant, le glissement du nombre d'onde pour un faisceau rond gaussien dû à la charge d'espace est donné par l'Eq. (5.21) :

$$\Delta\nu = -\frac{3}{4} \frac{Z^2}{A} \frac{Nr_0R_0}{L_f\beta\gamma^2\epsilon}$$

où Z est le nombre de charge de l'ion

A	le nombre de masse
N	le nombre d'ions dans le paquet
r_0	le rayon classique du proton

R_0	le rayon moyen de la structure
L_f	la longueur du paquet
ϵ	l'émittance rms normalisée du faisceau dans le plan considéré

Après application numérique, en utilisant les valeurs de [68] et de TAB. 3.6, nous obtenons les valeurs données dans TAB. 3.3. Dans le cas de ${}^6\text{He}^{2+}$ après accumulation, les effets de charge d'espace ne sont pas négligeables dans l'anneau de décroissance. Mais le glissement du nombre d'onde est suffisamment faible pour que les particules du faisceau stocké ne traversent pas un trop grand nombre de résonances dans le diagramme. Par contre, le plus grand état de charge du ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ intensifie les effets de charge d'espace bien que le nombre d'ions stockés soit plus faible. En utilisant les émittances quadratiques moyennes normalisées données précédemment pour l'anneau de décroissance, le glissement du nombre d'onde est alors respectivement de -0.119 et de -0.218 dans chaque plan pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. Ces valeurs ne peuvent être acceptées dans le cas d'un anneau de stockage. Le faisceau stocké occupe alors une zone trop importante dans le diagramme de nombres d'onde, qui croise un grand nombre de résonances comme celles quadripolaires, source d'instabilités. Pour réduire les effets de charge d'espace, plusieurs solutions sont possibles :

1. Augmenter la longueur du paquet (diminuer la densité linéique de charge)
2. Diminuer le nombre d'ions par paquet en augmentant le nombre de paquets stockés
3. Augmenter l'émittance transverse du faisceau

La première solution doit être évitée car à tension fixe des cavités, cela revient à augmenter le facteur de « bunching », lié à l'occupation de l'espace délimité par la séparatrice par un paquet, ou la taille des séparatrices soit le nombre d'harmoniques des cavités. Augmenter le facteur de « bunching » entraîne une augmentation de la dispersion en moment du faisceau, qui n'est pas possible car l'acceptance en moment de la machine est imposée par le système d'injection. Changer le nombre d'harmoniques est également interdit car la fréquence des cavités est déterminée par le SPS.

La seconde solution n'est pour l'instant pas envisageable. En effet, dans le schéma de base, le PS est utilisé pour accélérer les ions. Le nombre d'harmoniques maximal dans le PS est égal à 21, ce qui impose un nombre de paquets injectés dans le SPS inférieur ou égal à 20. Le nombre de paquets stockés dans l'anneau de décroissance est donc nécessairement inférieur à 20.

Finalement, la seule solution restante est d'augmenter l'émittance transverse du faisceau stocké dans l'anneau de décroissance. Du fait du point de fonctionnement choisi, nous avons considéré qu'un glissement du nombre d'onde de l'ordre de 0.06 était tolérable, ce qui donne des émittances transverses du faisceau de ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ égales à 0.22π mm.mrad. Un calcul plus rigoureux utilisant l'Eq. (5.20) a été ensuite réalisé avec *BETA* [1] ou *WinAgile* [71]. Le glissement du nombre d'onde dans chacun des deux plans est alors respectivement -0.0506 et -0.0608 pour la structure donnée dans le Chapitre 6 et pour des émittances de 0.22π mm.mrad dans les deux plans. Dans la suite, nous utiliserons cette valeur pour le faisceau de ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$.

¹à la fin de l'accumulation dans le PS

²du faisceau stocké après accumulation

TAB. 3.3 – Glissement du nombre d’onde dû à la charge d’espace pour la particule centrale du faisceau stocké dans l’anneau de décroissance.

Type d’ions	${}^6\text{He}^{2+}$		${}^{18}\text{Ne}^{10+}$			
R_0 (m)	1100		1100			
L_f (m)	2		2			
γ	100		100			
Nombre total d’ions/paquet	4.83×10^{12}		3.71×10^{12}			
Plan	Hor.	Vert.	Hor.	Vert.	Hor.	Vert.
ϵ (π mm.mrad)	0.11	0.06	0.11	0.06	0.22	0.22
$\Delta\nu$	-0.019	-0.034	-0.119	-0.218	-0.059	-0.059

TAB. 3.4 – Nombre d’ions à chaque étape dans le complexe beta-beam sous l’approche « top-down ».

	unités	${}^6\text{He}^{2+}$	${}^{18}\text{Ne}^{10+}$
production	ions/s	2.00×10^{13}	1.90×10^{13}
RCS inj	ions/cycleRCS	9.26×10^{11}	2.73×10^{11}
RCS sortie	ions/cycleRCS	8.98×10^{11}	2.69×10^{11}
PS inj	ions/cycle ¹	1.12×10^{13}	4.53×10^{12}
PS sortie	ions/cycle	9.53×10^{12}	4.31×10^{12}
SPS sortie	ions/cycle	9.00×10^{12}	4.26×10^{12}
Anneau de décroissance	ions/cycle ²	9.66×10^{13}	7.42×10^{13}

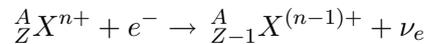
3.1.3 Autres propositions pour les beta-beams

La thèse a porté sur le schéma d’accélération présenté précédemment. Cependant, d’autres variantes ont été proposés. Elles ont porté sur l’énergie des ions stockés ou sur l’espèce des ions stockés. Une liste non exhaustive est proposée ci-dessous :

1. Utiliser la même rigidité magnétique pour les 2 types d’ions ce qui imposait un rapport entre les facteurs de Lorentz de l’Hélium et du Néon d’environ 3/5. L’avantage était de n’avoir besoin que d’un seul réglage pour les deux types d’ion. Cependant, les valeurs choisies de γ pour les deux ions (60 et 100 respectivement) n’étaient pas optimales pour une détection à Fréjus [72]. De plus, les deux ions n’ont pas le même facteur γ et donc la même vitesse, ce qui empêche de stocker les deux ions en même temps. C’est pourquoi cette proposition a été abandonnée.
2. Utiliser le SPS jusqu’à l’énergie maximale délivrable. Le SPS est conçu pour accélérer des protons jusqu’à des énergies de 450 GeV. En tenant compte du rapport de la charge par rapport au nombre de nucléons des ions, nous en déduisons que le SPS peut accélérer les ions ${}^6\text{He}^{2+}$ et ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ jusqu’à des énergies respectives de 150 GeV/u et 250 GeV/u [72, 73]. L’avantage de ce jeu de paramètres est de générer un flux de neutrinos plus énergétiques et mieux collimatés (l’angle d’émission est en $1/\gamma$). Cependant, la position du détecteur à 130 km dans le tunnel de Fréjus n’était plus optimale et donc il était prévu d’utiliser plutôt la caverne souterraine de Gran Sasso à 730 km. Néanmoins, l’augmentation en rigidité magnétique des ions nécessite des dipôles supraconducteurs de 8 à 10 T dans les arcs de l’anneau. De plus, les énergies totales des faisceaux (d’environ

100 MJ) imposent des normes de protection très coûteuses. Aussi, ce jeu de paramètres n'a pas été retenu comme celui de base mais pourrait être celui d'une amélioration éventuelle du complexe.

3. Utiliser un petit anneau de type beta-beam pour travailler à de faibles valeurs de γ (typiquement à la sortie du PS soit aux environs de 14 [74]). Du fait des faibles énergies de stockage, les effets de charge d'espace ne sont pas négligeables ce qui limite les intensités pouvant être stockées dans l'anneau.
4. Utiliser le ${}^8\text{Li}^{3+}$ comme émetteur β^- et le ${}^8\text{B}^{4+}$ comme émetteur β^+ à l'aide d'un nouveau procédé de production décrit dans [57, 58]. Les avantages sont que le rapport Z/A est plus proche de 1 et que les facteurs Q_β sont plus grands. Ainsi, à rigidité magnétique égale, ces ions produiraient des neutrinos en moyenne plus énergétiques que ceux produits par les ions (${}^6\text{He}^{2+}$, ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$). Dans le cas du ${}^8\text{Li}^{3+}$, il est possible de gagner jusqu'à un facteur 7 sur le flux émis d'anti-neutrinos par rapport à ${}^6\text{He}^{2+}$. Afin d'optimiser la détection de l'oscillation des neutrinos, la distance entre la source et le détecteur doit être portée jusqu'à 730 km. Le détecteur de Fréjus ne conviendrait plus alors et le détecteur pourrait alors être localisé à Gran Sasso. En outre, cette méthode prévoit de pouvoir atteindre les taux de production requis pour les beta-beams alors que le taux de production du Néon risque de poser problème. Cependant, la nouveauté de ce procédé fait que pour l'instant seul le couple (${}^6\text{He}^{2+}$, ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$) à des valeurs de γ égales à 100 est retenu. Néanmoins, une étude plus approfondie de la faisabilité de ce système de production est planifiée [58].
5. Utiliser la capture d'un électron par le noyau [75]. Il s'agirait alors d'accélérer des ions radioactifs β^+ . Mais dans ce cas, la décroissance étudiée de l'ion X serait :



L'intérêt est que le spectre énergétique du neutrino n'est plus continu mais est un pic directement proportionnel à l'énergie du noyau parent. Pour l'instant, cette idée reste à l'état de prospective et ne sera pas développée ici.

TAB. 3.5 – Paramètres du faisceau injecté dans l’anneau de décroissance dans l’approche « top-down ».

	unités	${}^6\text{He}^{2+}$	${}^{18}\text{Ne}^{10+}$	proton
$E_{\text{repos}}/\text{nucléon}$	MeV	931.494	931.494	938.272
Masse effective A_{eff}	u	6.019	18.006	1
$E_{\text{repos}}/\text{ion}$	GeV	5.607	16.772	0.9383
γ relativiste	-	100	100	298.41
β relativiste	-	1.00	1.00	1.00
$\beta \cdot \gamma$	-	99.995	99.995	298.41
$T_{1/2}$	s	81.00	167.00	∞
$B\rho$	T.m	934.93	559.26	934.93
$E_{\text{cin}}/\text{nucléon}$	GeV	92.5	92.2	279
$E_{\text{cin}}/\text{ion}$	GeV	555	1666	279
Temps révolution	μs	23.06	23.06	23.05
Temps entre 2 injections	s	6.0	3.6	
Nombre de paquets	-	20	20	20
Ions/paquet min	-	1.74×10^{10}	1.18×10^{11}	
Ions/paquet max	-	5.00×10^{10}	1.69×10^{11}	
Ions/cycle	-	9.00×10^{12}	4.26×10^{12}	
Énergie totale du faisceau	MJ	0.808	1.144	
Norm. ϵ_x (1σ)	π mm.mrad	11.3	22.	11.3
Norm. ϵ_y (1σ)	π mm.mrad	6.0	22.	6.0
Phys. ϵ_x (1σ)	π mm.mrad	0.11	0.22	0.04
Phys. ϵ_y (1σ)	π mm.mrad	0.06	0.22	0.02
Émittance longitudinale (totale)	eV.s	1	2	
Longueur d’un paquet	ns	3.992	3.992	3.992
Longueur d’un paquet	m	1.197	1.197	1.197
Dispersion en moment (totale)	$\%$	0.4	0.4	

TAB. 3.6 – Paramètres du faisceau stocké dans l’anneau de décroissance dans l’approche « top-down ».

	unités	${}^6\text{He}^{2+}$	${}^{18}\text{Ne}^{10+}$	proton
$E_{\text{repos}}/\text{nucléon}$	MeV	931.494	931.494	938.272
Masse effective A_{eff}	u	6.019	18.006	1
$E_{\text{repos}}/\text{ion}$	GeV	5.606	16.767	0.9383
γ relativiste	-	100	100	298.41
β relativiste	-	1.00	1.00	1.00
$\beta \cdot \gamma$	-	99.99	99.99	298.41
$T_{1/2}$	s	81.00	167.00	∞
$B\rho$	T.m	934.93	559.26	934.93
$E_{\text{cin}}/\text{nucléon}$	GeV	92.5	92.2	279
$E_{\text{cin}}/\text{ion}$	GeV	555	1666	279
temps révolution	μs	23.06	23.06	23.05
Nombre de paquets	-	20	20	20
Nombre de mélanges	-	15	20	
Nombre total d’ions	-	9.66×10^{13}	7.42×10^{13}	
Nombre total d’ions/paquet	-	4.83×10^{12}	3.71×10^{12}	
Énergie totale du faisceau	MJ	8.674	19.925	
Intensité moyenne	A	1.342	5.154	
Intensité crête	A	348	1336	
Norm. ϵ_x (1σ)	π mm.mrad	11.3	22.	11.3
Norm. ϵ_y (1σ)	π mm.mrad	6.0	22.	6.0
Phys. ϵ_x (1σ)	π mm.mrad	0.11	0.22	0.04
Phys. ϵ_y (1σ)	π mm.mrad	0.06	0.22	0.02
Émittance longitudinale (totale)	eV.s	15	44	
Longueur d’un paquet	ns	6.67	6.67	
Longueur d’un paquet	m	2	2	
Dispersion en moment (totale)	$\%$	2.5	2.5	

3.2 Problématiques liées à l’anneau de décroissance

3.2.1 Le système d’injection

L’une des originalités de l’anneau de décroissance réside dans son système d’injection. En effet, le nombre d’ions injectés dans le SPS est limité par les contraintes sur l’intensité dans le PS. Afin d’avoir un grand nombre d’ions stockés dans l’anneau de décroissance, il s’avère nécessaire d’y injecter les ions en présence du faisceau stocké. Il n’est donc pas possible de faire une injection simple en déviant le faisceau injecté à l’aide d’un déviateur rapide (FIG. 3.1). Le faisceau circulant serait alors dévié pour être ensuite perdu dans la chambre.

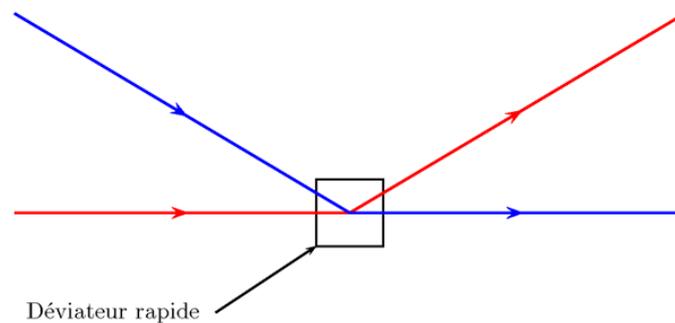


FIG. 3.1 – Principe d’une injection avec déviateur rapide. En bleu, axe du faisceau injecté et en rouge axe du faisceau stocké.

Il est donc nécessaire d’utiliser un septum d’injection qui déviera le faisceau injecté sans perturber celui stocké. Au moment de l’injection, les deux faisceaux en présence doivent être suffisamment séparés pour laisser une place à la lame du septum et pour éviter de trop grosses pertes sur la lame. Une injection dite « off momentum » est alors réalisée : l’énergie moyenne $E_0 + \Delta E$ du faisceau injecté est différente de celle du faisceau stocké E_0 [76]. La séparation horizontale entre les deux faisceaux sera réalisée en injectant alors dans une région dispersive. Le faisceau est alors injecté sur son orbite chromatique. L’orbite centrale du faisceau injecté a peu changé après un tour et rencontrera le septum. Afin d’éviter cela, une déformation d’orbite fermée est faite au moment de l’injection et doit être éteinte sur le temps d’un tour. Le principe de l’injection est donné sur la FIG. 3.2 et l’optique de l’insertion pour la section d’injection au Chapitre 6. L’injection est réalisée dans l’arc afin de profiter de la dispersion naturelle qui y existe. De plus, l’arc a été réalisé de manière symétrique afin d’avoir de petites dimensions de faisceau au centre de l’insertion. Une autre possibilité aurait été d’utiliser la section droite ne pointant pas vers le détecteur et d’y insérer des dipôles afin de générer le pic en dispersion. Cependant, cette solution aurait été plus coûteuse car il était nécessaire de rajouter d’autres dipôles dans la structure afin de conserver l’alignement entre les entrées des deux arcs.

3.2.2 Le système RF

Il faut ensuite mélanger les deux faisceaux avant la prochaine injection. Pour ce faire, un programme radiofréquence (RF) utilisant 2 familles de cavités est utilisé [77, 78]. Ses

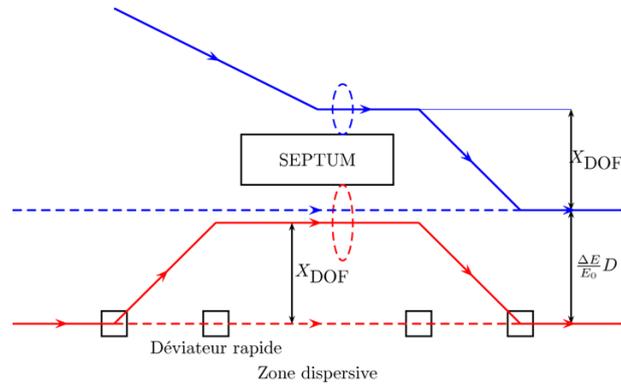


FIG. 3.2 – Principe de l'injection. En bleu, faisceau injecté et en rouge, faisceau stocké. En pointillés, axes centraux des deux faisceaux un tour après l'injection sans déformation d'orbite fermée. Au moment de l'injection, le faisceau circulant est amené près de la lame du septum tandis que celui injecté est dévié par le champ magnétique du septum. La déformation de l'orbite fermée est alors éteinte en l'espace d'un tour. Les deux faisceaux passent alors sous la lame du septum.

caractéristiques sont développées dans le Chapitre 8 et illustrées sur la FIG. 3.3. Durant le premier quart de période synchrotron, seule la famille principale est allumée. A l'issue de ce premier quart de tour, le faisceau injecté est à la même énergie que celui stocké mais est en retard. La seconde famille de cavités est alors allumée et en jouant à la fois sur la tension et le déphasage entre les cavités, les deux faisceaux sont alors mélangés pour ne plus former qu'un seul paquet. D'après le théorème de Liouville, le volume occupé par le paquet final dans l'espace des phases longitudinal est au moins égal à la somme des volumes des deux paquets initiaux. Les pertes liées au système RF sont chiffrées dans le Chapitre 8, ce qui nécessitera une section de collimation afin de collecter ces ions, dont le principe est donné au Chapitre 7 et l'optique au Chapitre 6.

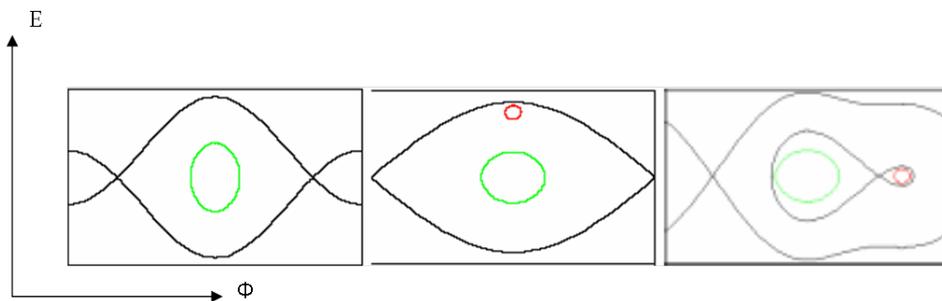


FIG. 3.3 – Représentation dans l'espace des phases longitudinal de différentes étapes du programme RF (i) avant injection, (ii) à l'injection, (iii) au démarrage de la capture.

3.2.3 Les dipôles de l'anneau

Du fait des hautes rigidités magnétiques des ions stockés, la technologie utilisée pour les aimants de l'anneau est nécessairement supraconductrice. Afin d'éviter la perte de supraconductivité (quenching) de ces aimants, l'optique devra être conçue afin de réduire les dépôts d'ions sur les parois de ces aimants. Le traitement des pertes issues des décroissances est traité dans le Chapitre 7. Enfin, la conception de tels aimants va induire des défauts multipolaires, dont les effets sur les propriétés optiques de l'anneau seront à prendre en compte.

3.2.4 Beam-Loading

Un calcul rapide des intensités crêtes dans l'anneau de décroissance pour les ions ${}^6\text{He}^{2+}$ et ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ donne respectivement 346 A et 1334 A. De telles intensités semblent trop grandes et nécessitent des impédances très faibles pour les cavités. Les cavités de différentes machines ont alors été comparées à la cavité principale pour l'anneau de décroissance dans la TAB. 3.7. Les anneaux qui ont été considérés sont le Tevatron [79], le LHC [80, 81] et l'anneau principal pour le complexe J-PARC [82]. La limite pour les impédances longitudinales a été calculée en utilisant le critère de Keil-Schnell-Boussard [83, 84] donné par :

$$\left| \frac{Z_{//}}{n} \right|_{th} \leq \frac{A\gamma\beta^2 E_0 |\eta|}{ZeI_p} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2$$

où Z est le nombre de charges de l'ion

A le nombre de masse

γ le facteur de Lorentz

$\beta = v/c$

$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha$

α le « momentum compaction »

I_p l'intensité crête

$\frac{\Delta p}{p}$ l'extension en énergie maximale du faisceau

Finalement, nous obtenons des valeurs comparables avec des machines existantes. Par conséquent, les cavités de l'anneau de décroissance devraient être réalisables pour de telles intensités mais nécessiteront néanmoins des efforts de R&D. Les effets d'instabilité longitudinale ne seront cependant pas traités ici. Les calculs d'impédance, transverse ou longitudinale, n'ont pas encore été réalisés pour l'anneau de décroissance.

TAB. 3.7 – Comparaison des caractéristiques longitudinales entre différentes machines.

		β -beam ${}^6\text{He}^{2+}$	β -beam ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$	Tevatron p	LHC collision	J PARC MR 50 GeV
Énergie cinétique/nucléon	GeV/u	92.9	92.9	980	7000	50
Nombre harmonique		924	924	36	25640	9
Nombre de paquets		20	20	36	2808	8
Circonférence	m	6911.5	6911.5	6280	26659	1567.5
η	10^{-3}	-1.31	-1.31	-2.1	-0.3225	-1.3
Nombre total d'ions N_T		9.60×10^{13}	7.40×10^{13}	8.64×10^{12}	3.22×10^{14}	3.30×10^{14}
Nombre d'ions/paquet		4.80×10^{12}	3.70×10^{12}	2.40×10^{11}	1.15×10^{11}	4.13×10^{13}
$\Delta p/p$ total	10^{-3}	2.5	2.5	0.14	0.22	2.5
Longueur totale du paquet	m	2	2	0.57	0.3	9.75
I_{moyenne}	mA	1350	5200	66	0.582	10225
$I_{\text{crête}}$	A	346	1334	20.5	18	180
fréquence RF	MHz	40	40	53	400	1.72
Z_{\parallel}/n	Ω	6.6	1.03	2	6.1	2.4

3.3 Conclusion

Ce chapitre a permis de dresser une liste des différents jeux de paramètres et schémas qui ont été considérés pour les beta-beams. Finalement, il a été convenu d'utiliser pour l'instant l' ${}^6\text{He}^{2+}$ comme émetteur β^- et du ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ comme émetteur β^+ . Ceux-ci sont tous deux stockés à $\gamma = 100$ dans l'anneau. C'est donc les paramètres qui seront considérés dans tout le reste de la thèse et qui ont été utilisés pour le dimensionnement de l'anneau de décroissance. Les différentes problématiques soulevées par l'utilisation de tels paramètres ont ensuite été énumérées. Les principales sont le système d'injection, le système de collimation, les pertes ayant lieu dans l'anneau et les effets dus à l'intensité stockée (charge d'espace, beam-loading).

Chapitre 4

DYNAMIQUE TRANSVERSE

Dans cette partie, nous allons donner un récapitulatif du formalisme s'appliquant aux accélérateurs à particules ainsi que certaines propriétés particulières [85, 86, 87, 88, 89, 90]. Du fait que les énergies considérées pour les beta-beams sont relativistes, la force de Lorentz définie par $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ est dominée par l'induction magnétique \vec{B} plutôt que par le champ électrique \vec{E} , où q est la charge de la particule, \vec{v} sa vitesse, \vec{B} l'induction magnétique et \vec{E} le champ électrique. Ainsi, le transport des particules s'effectuera à l'aide d'éléments magnétiques plutôt qu'électrostatiques. D'un autre côté, la force exercée par un champ magnétique est toujours orthogonale à sa direction de propagation, ce qui fait qu'elle ne travaille pas. L'accélération se fera donc à l'aide de champs électriques générés dans une cavité radio fréquence (RF). Dans cette partie, nous ne nous intéressons qu'au mouvement du faisceau dans le plan orthogonal à la direction de propagation appelé plan transverse. La dynamique longitudinale du faisceau sera traitée dans le Chapitre 8.

4.1 Quelques définitions

Dans un dipôle, la particule n'est soumise qu'à un champ magnétique vertical de module B . En utilisant les relations du mouvement et en se plaçant en coordonnées polaires, nous avons :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Après résolution, dans le cas d'un mouvement circulaire, nous aboutissons à la relation entre le champ B , le rayon de la trajectoire ρ , la quantité de mouvement p et la charge q de la particule :

$$(B\rho) = \frac{p}{q}$$

$B\rho = \frac{p}{q}$ est appelée **rigidité magnétique** et retranscrit la dépendance du rayon de courbure de la trajectoire dans un champ magnétique par rapport à l'énergie de la particule. Cependant, un accélérateur est constitué d'une succession d'éléments magnétiques dont les rôles sont aussi divers que courber la trajectoire du faisceau, le focaliser, l'extraire de la machine, l'injecter dans une autre... Cela implique des configurations de champ particulières autres que celles du

dipôle. Dans cette partie, nous allons détailler leur expression analytique puis leur impact sur les équations du mouvement.

4.1.1 Les multipôles

En l'absence de champs de fuite ou de composantes longitudinales, l'induction magnétique d'un élément peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier en coordonnées polaires (FIG. 4.1) [86] :

$$\begin{cases} B_r(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} (b_n \sin(n\theta) + a_n \cos(n\theta)) \\ B_\theta(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} (b_n \cos(n\theta) - a_n \sin(n\theta)) \end{cases} \quad (4.1)$$

où b_n et a_n sont respectivement les coefficients multipolaires droits et tournés

En remarquant que $B_y + \imath B_x = (\imath B_r + B_\theta) e^{-\imath\theta}$, nous avons l'expression du champ en coordonnées cartésiennes :

$$B_y(x, y) + \imath B_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x + \imath y)^{n-1} (b_n + \imath a_n) \quad (4.2)$$

Un multipôle parfait droit d'ordre $2 \times n$ se définit donc naturellement par l'expression de son champ magnétique donnée en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} B_r(r, \theta) = b_n r^{n-1} \sin(n\theta) \\ B_\theta(r, \theta) = b_n r^{n-1} \cos(n\theta) \end{cases}$$

ou en coordonnées cartésiennes :

$$B_y(x, y) + \imath B_x(x, y) = b_n (x + \imath y)^{n-1}$$

$K_n = \frac{b_n}{B\rho}$ est appelée **force du multipôle** et est exprimée en m^{-n} . Elle est reliée aux dérivées du champ magnétique par :

$$K_n = \frac{1}{B\rho} \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1} B_y}{\partial x^{n-1}} \right|_{\vec{r}=0}$$

De même, nous avons la définition d'un multipôle parfait tourné d'ordre $2 \times n$:

$$\begin{cases} B_r(r, \theta) = a_n r^{n-1} \cos(n\theta) \\ B_\theta(r, \theta) = -a_n r^{n-1} \sin(n\theta) \end{cases}$$

ou en coordonnées cartésiennes :

$$B_y(x, y) + \imath B_x(x, y) = \imath a_n (x + \imath y)^{n-1}$$

Il correspond à un multipôle droit ayant subi une rotation de $\frac{\pi}{2n}$ par rapport à l'axe de la

machine. La force K_{-n} du multipôle tourné s'exprime donc en m^{-n} :

$$K_{-n} = \frac{1}{B\rho} \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1} B_x}{\partial x^{n-1}} \right|_{\vec{r}=0}$$

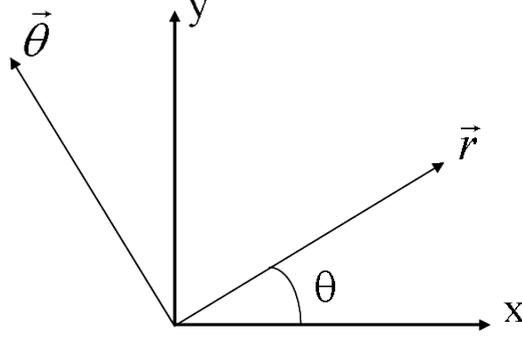


FIG. 4.1 – Coordonnées polaires.

4.1.2 Abscisses curvilignes

Le développement Eq. (4.1) est exact dans la mesure où il n'y a pas de composante par rapport à l'axe s du champ magnétique et que les champs de fuite sont négligés. Il convient donc pour des lentilles multipolaires dites parfaites. Nous renvoyons à [86] pour le calcul rigoureux des composantes multipolaires en présence d'un champ de fuite.

Dans un anneau, des dipôles sont insérés afin de courber et donc de refermer la trajectoire. Afin de décrire le mouvement des particules, nous définissons une orbite de référence dite **orbite fermée** autour de laquelle sera décrit le mouvement. Cette orbite correspond à la trajectoire stable d'une particule de référence pour une impulsion p_0 donnée. En d'autres termes, toute particule d'impulsion p_0 placée sur cette orbite referme sa trajectoire après un tour.

Dans le référentiel du laboratoire, toute particule sera décrite par le vecteur $\vec{r}(s)$ s'écrivant dans le référentiel du mouvement autour de l'orbite fermée (FIG. 4.2) :

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0(s) + x(s)\vec{x}(s) + y(s)\vec{y}(s) \tag{4.3}$$

où $\vec{r}_0(s)$ est la position de la particule de référence à l'abscisse s

- $\vec{x}(s)$ l'axe orthogonal à la direction de propagation $\vec{s}(s)$ tel que $\vec{r}_0(s) = \rho(s)\vec{x}(s)$
- $\rho(s)$ le rayon de courbure de l'orbite de référence à l'abscisse curviligne s
- $h(s)$ son inverse
- $\vec{y}(s)$ l'axe tel que le trièdre $\{\vec{x}(s), \vec{y}(s), \vec{s}(s)\}$ soit orthonormal direct

La dépendance en s sera omise afin d'alléger l'écriture et nous utiliserons les notations \dot{x} pour $\frac{dx}{dt}$, x' pour $\frac{dx}{ds}$ et δ pour $\frac{\Delta p}{p_0}$.

Dans le référentiel du laboratoire, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds} \dot{s} = h\dot{s}\vec{s} \\ \frac{d\vec{y}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{ds} \dot{s} = -h\dot{s}\vec{x} \\ \dot{x} = \dot{s}x' & \dot{y} = \dot{s}y' \\ \ddot{x} = x''\dot{s}^2 + x'\ddot{s} & \ddot{y} = y''\dot{s}^2 + y'\ddot{s} \end{cases} \quad (4.4)$$

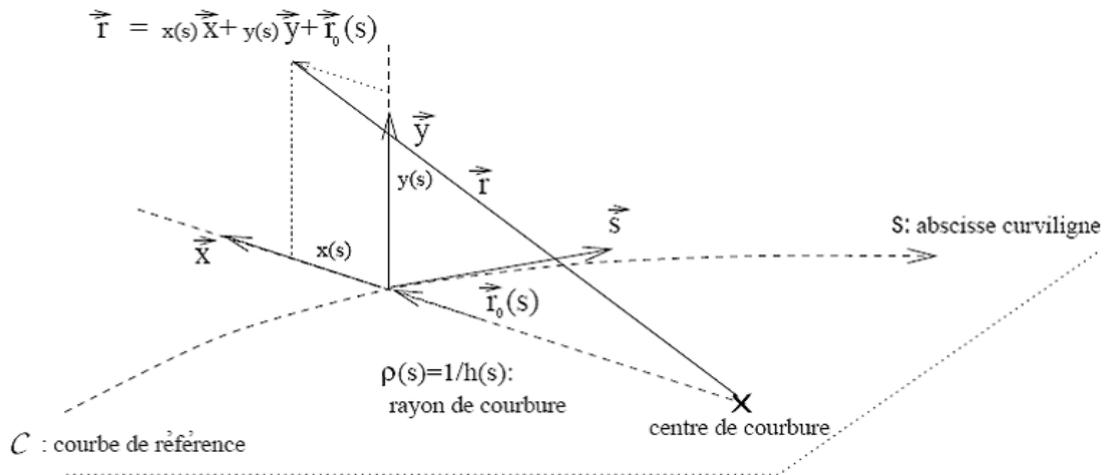


FIG. 4.2 – Coordonnées curvilignes.

4.2 Equation de Hill et théorème de Floquet

La question est alors de pouvoir décrire l'ensemble des trajectoires des particules du faisceau au cours de leur séjour dans la machine. Cela permettra de calculer en tout point certaines propriétés du faisceau comme ses dimensions ou sa forme.

Pour cela, nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à une particule du faisceau dans le référentiel de laboratoire à l'abscisse curviligne s . Nous supposons que les éléments sont purement magnétiques et avons alors :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.5)$$

où $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ est le vecteur vitesse de la particule

q est la charge de la particule

$\vec{B}(\vec{r})$ est l'induction magnétique en \vec{r}

Les relations Eq. (4.4) et Eq. (4.5) permettent d'aboutir aux égalités suivantes en l'absence de champ électrique [85] :

$$\begin{cases} x'' - h(1 + hx) + x' \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} &= \frac{q}{|p|} \frac{|v|}{\dot{s}} [(1 + hx)B_y - y'B_s] \\ y'' + y' \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} &= \frac{q}{|p|} \frac{|v|}{\dot{s}} [x'B_s - (1 + hx)B_x] \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\text{avec } \frac{|\vec{v}|}{\dot{s}} = \sqrt{(1 + hx)^2 + x'^2 + y'^2}$$

$$\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} = -\frac{d}{ds} \ln \left(\frac{|\vec{v}|}{|\dot{s}|} \right)$$

En supposant l'approximation paraxiale $x' \ll 1$ et $y' \ll 1$, l'expression précédente peut alors se linéariser. Dans le cas où la structure n'est composée que de dipôles et de quadripôles droits, le système d'équations différentielles, de la famille des **équations de Hill**, prend la forme :

$$\begin{cases} x'' + K_x(s)x = f(s) \\ y'' + K_y(s)y = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

avec $\forall s$ et $z = x$ ou y , $f(s) = \frac{\delta}{\rho(s)}$, $K_z(s + L) = K_z(s)$ et L la circonférence de l'anneau :

$$K_x(s) = \begin{cases} 0 \\ (1 - n)h^2 \\ K_2 \end{cases} \quad \text{et } K_y(s) = \begin{cases} 0 & \text{dans le cas d'une section droite} \\ nh^2 & \text{dans le cas d'un dipôle droit d'indice } n \\ -K_2 & \text{dans le cas d'un quadripôle droit} \end{cases}$$

où $n = \frac{K_2}{h^2}$

Les plans horizontaux et verticaux sont alors découplés et le mouvement dans ces plans est soumis au même type d'équation différentielle. Dans la suite, nous utiliserons la variable z qui pourra aussi bien désigner le plan horizontal relié à la variable x ou celui vertical relié à y .

Dans le cas linéarisé, il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants. Dans un premier temps, nous nous intéressons seulement à l'équation homogène :

$$z'' + K_z(s)z = 0 \quad (4.8)$$

avec K_z une fonction périodique

Il s'agira ensuite de trouver une solution particulière à l'Eq. (4.7) pour résoudre le cas général.

4.2.1 Equation homogène

Paramètres de Twiss

Dans le cas où le coefficient K_z n'est pas constant, le théorème de Floquet stipule que les solutions de l'équation de Hill homogène peuvent s'écrire sous la forme d'une combinaison

linéaire des deux fonctions suivantes [88] :

$$\begin{aligned} z_{Ha}(s) &= \sqrt{A_z} \cdot \sqrt{\beta_z(s)} \cdot e^{+i\phi_z(s)} \\ z_{Hb}(s) &= \sqrt{A_z} \cdot \sqrt{\beta_z(s)} \cdot e^{-i\phi_z(s)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec A_z une constante positive

β_z , appelée **fonction bêtatron**, et ϕ_z , **avance de phase**, deux fonctions périodiques à valeur réelle de s ayant la périodicité du tour :

$$\begin{aligned} \beta_z(s+L) &= \beta_z(s) \\ \phi_z(s+L) &= \phi_z(s) \end{aligned}$$

Comme z_{Ha} et z_{Hb} sont solutions de l'équation homogène, nous avons $z_{Ha}'' + K_z(s) z_{Ha} = 0$ et $z_{Hb}'' + K_z(s) z_{Hb} = 0$, ce qui donne après calcul :

$$\begin{cases} \frac{2\beta_z''(s)\beta_z(s) - \beta_z'(s)^2}{4\beta_z^2(s)} - \phi_z'(s)^2 + K_z(s) = 0 \\ \phi_z''(s) + \phi_z'(s) \frac{\beta_z'(s)}{\beta_z(s)} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

L'Eq. (4.10) implique que $(\phi_z'(s)\beta_z(s))' = 0$. Nous avons donc $\phi_z(s) = \int_0^s \frac{c}{\beta_z(s)} ds + \phi_{z0}$

où c et ϕ_{z0} sont deux constantes. Comme la fonction β_z est définie à une constante près A_z , nous pouvons fixer la valeur de A_z telle que nous ayons :

$$\forall s, \phi_z(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta_z(s)} + \phi_{z0} \quad (4.11)$$

Des relations Eq. (4.10) et Eq. (4.11), nous déduisons :

$$2\beta_z''(s)\beta_z(s) - \beta_z'(s)^2 + 4K_z(s)\beta_z^2(s) = 4 \quad (4.12)$$

Nous posons les fonctions α_z et γ_z telles que :

$$\begin{aligned} \alpha_z(s) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \frac{d\beta_z(s)}{ds} \\ \gamma_z(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 + \alpha_z(s)^2}{\beta_z(s)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Les fonctions α_z , β_z et γ_z sont appelées les **paramètres de Twiss** et ont la périodicité du tour :

$$\forall s, \alpha_z(s+L) = \alpha_z(s) \quad \beta_z(s+L) = \beta_z(s) \quad \gamma_z(s+L) = \gamma_z(s)$$

Invariant de Courant et Snyder

Le calcul de $\gamma'_z(s)$ à partir des Eq. (4.12) et Eq. (4.13) donne :

$$\gamma'_z = 2K_z\alpha_z \quad (4.14)$$

De plus, si nous calculons la dérivée de $\gamma_z z^2 + 2\alpha_z z z' + \beta_z z'^2$ où z est solution de l'équation de Hill alors nous avons [85] :

$$(\gamma_z z^2 + 2\alpha_z z z' + \beta_z z'^2)' = 0$$

ce qui implique que

$$\forall s, \gamma_z z^2 + 2\alpha_z z z' + \beta_z z'^2 = U_z \quad (4.15)$$

où U_z est un invariant du mouvement appelé **invariant de Courant et Snyder**.

L'équation est celle d'une ellipse dans le plan (z, z') (FIG. 4.3). Si nous faisons le changement de variable $Z(s) = \frac{z(s)}{\sqrt{\beta_z}}$ et $Z'(s) = \sqrt{\beta_z} z'(s) + \frac{\alpha_z}{\sqrt{\beta_z}} z(s)$. L'espace de phase (Z, Z') est dit espace normalisé. L'équation Eq. (4.15) devient alors dans ce repère :

$$\forall s, Z^2(s) + Z'^2(s) = U_z \quad (4.16)$$

Ceci signifie que la particule décrit un cercle dans l'espace normalisé autour de l'orbite de référence. Ceci implique aussi que dans l'espace (z, z') , la particule est toujours sur une ellipse de surface πU_z . Nous introduisons les **émittances quadratiques moyennes** définies ci-dessous :

$$\frac{\epsilon_z}{\pi} = \sqrt{\langle z^2 \rangle \cdot \langle z'^2 \rangle - \langle z z' \rangle^2}$$

La taille σ_z et la divergence σ'_z du faisceau à un écart type sont alors données par :

$$\begin{aligned} \sigma_z(s) &= \sqrt{\frac{\beta_z(s)\epsilon_z}{\pi}} \\ \sigma'_z(s) &= \sqrt{\frac{\gamma_z(s)\epsilon_z}{\pi}} \end{aligned}$$

Dans le cas d'une distribution uniforme d'un faisceau d'émittance ϵ_z , l'invariant de l'ellipse englobant l'ensemble des particules est alors donné par $U_z = 4\frac{\epsilon_z}{\pi}$.

Matrices de transfert

Comme l'équation de Hill est une équation différentielle linéaire du second ordre, toute solution est une combinaison linéaire de z_{Ha} et z_{Hb} et est complètement définie par sa valeur et celle de sa dérivée en un point de la structure. Nous définissons alors les fonctions pseudo-sinus S_z et pseudo-cosinus C_z telles qu'elles soient solutions de l'équation de Hill et qu'elles répondent aux conditions initiales :

$$\begin{cases} S_z(s_0) = 0 & C_z(s_0) = 1 \\ S'_z(s_0) = 1 & C'_z(s_0) = 0 \end{cases}$$

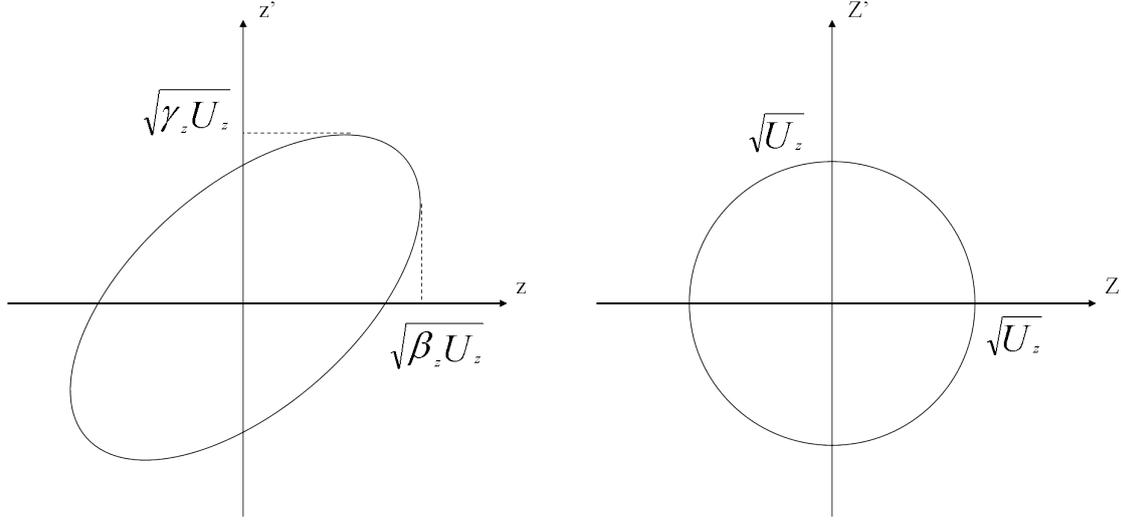


FIG. 4.3 – Représentation dans l'espace des phases (z, z') (à gauche) et dans l'espace normalisé (Z, Z') (à droite) de l'ensemble des positions prises par une particule en un point donné de la machine.

Ainsi, d'après la définition des fonction C_z et S_z , la connaissance des coordonnées de la particule au point d'abscisse curviligne s_0 permet d'obtenir celles au point d'abscisse curviligne s en appliquant une relation matricielle de type :

$$\begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_z & S_z \\ C'_z & S'_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(s_0) \\ z'(s_0) \end{pmatrix} = R_z \cdot \begin{pmatrix} z(s_0) \\ z'(s_0) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

R_z est alors appelée **matrice de transfert** entre les points d'abscisses s_0 et s .

En utilisant Eq. (4.9), nous obtenons l'expression de la matrice R_z :

$$R_z = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_z/\beta_{z0}} [\cos \Delta\phi_z + \alpha_{z0} \sin \Delta\phi_z] & \sqrt{\beta_{z0}\beta_z} \sin \Delta\phi_z \\ \frac{(\alpha_{z0} - \alpha_z) \cos \Delta\phi_z - (1 + \alpha_z \alpha_{z0}) \sin \Delta\phi_z}{\sqrt{\beta_z \beta_{z0}}} & \sqrt{\frac{\beta_{z0}}{\beta_z}} [\cos \Delta\phi_z - \alpha_z \sin \Delta\phi_z] \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

avec $\Delta\phi_z = \phi_z(s) - \phi_z(s_0)$

Nous appelons **nombre d'onde** ν_z l'avance de phase pour un tour donnée par :

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{ds}{\beta_z}$$

La matrice de transfert sur un tour, $R_{z,\text{tour}}$, s'écrit alors en utilisant la périodicité des fonctions de Twiss :

$$R_{z,\text{tour}} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu_z) + \alpha_{z0} \sin(2\pi\nu_z) & \beta_{z0} \sin(2\pi\nu_z) \\ -\gamma_{z0} \sin(2\pi\nu_z) & \cos(2\pi\nu_z) - \alpha_{z0} \sin(2\pi\nu_z) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Nous en déduisons la relation :

$$\cos(2\pi\nu_z) = 2\text{Tr}(R_{z,\text{tour}})$$

Comme $\sin(2\pi\nu_z)$ et $R_{z,\text{tour}_{12}}$ sont de même signe, la partie fractionnaire de ν_z peut se déduire directement de la matrice de transfert $R_{z,\text{tour}}$.

D'après l'Eq. (4.15), nous avons :

$$\gamma_z(s)z(s)^2 + 2\alpha_z(s)z(s)z'(s) + \beta_z z'(s)^2 = \gamma_z(s_0)z(s_0)^2 + 2\alpha_z(s_0)z(s_0)z'(s_0) + \beta_z(s_0)z'(s_0)^2$$

En utilisant l'Eq. (4.17), nous obtenons la relation suivante [85] :

$$\begin{pmatrix} \beta_z(s) \\ \alpha_z(s) \\ \gamma_z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & -2r_{11}r_{12} & r_{12}^2 \\ -r_{11}r_{21} & r_{12}r_{21} + r_{11}r_{22} & -r_{12}r_{22} \\ r_{21}^2 & -2r_{21}r_{22} & r_{22}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_z(s_0) \\ \alpha_z(s_0) \\ \gamma_z(s_0) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

où les r_{ij} sont les coefficients de la matrice R_z .

4.2.2 Solution générale

Recherche d'une solution particulière

Nous allons maintenant exprimer la forme des solutions générales de l'Eq. (4.7). Si z_1 et z_2 sont deux solutions de l'Eq. (4.8) alors posons la fonction W appelée **wronskien** :

$$W = z_1 z_2' - z_1' z_2$$

Nous avons $W' = z_1 z_2'' - z_1'' z_2 = 0$ et donc la fonction W est constante. Nous recherchons une solution particulière z_p de l'Eq. (4.7) par la méthode de variation des constantes sous la forme :

$$z_p = A_1(s)z_1(s) + A_2(s)z_2(s)$$

De plus, nous imposons la condition : $A_1'(s)z_1(s) + A_2'(s)z_2(s) = 0$.

Comme z_1 et z_2 sont solutions de l'équation homogène, nous avons :

$$\begin{cases} z_p'' + K_z(s)z_p(s) = A_1'(s)z_1'(s) + A_2'(s)z_2'(s) = f(s) \\ A_1'(s)z_1(s) + A_2'(s)z_2(s) = 0 \end{cases}$$

Nous déduisons de ce système que :

$$\begin{cases} A_1' = -\frac{z_2(s)f(s)}{W} & A_2' = \frac{z_1(s)f(s)}{W} \end{cases}$$

En choisissant comme solutions de l'équation homogène les fonctions C_z et S_z , nous ob-

tenons $W = 1$ et une solution particulière z_p donnée par :

$$\begin{cases} z_p(s) &= -C_z(s) \int_0^s S_z(\tau) f(\tau) d\tau + S_z(s) \int_0^s C_z(\tau) f(\tau) d\tau \\ z'_p(s) &= -C'_z(s) \int_0^s S_z(\tau) f(\tau) d\tau + S'_z(s) \int_0^s C_z(\tau) f(\tau) d\tau \end{cases} \quad (4.21)$$

Toute solution de l'Eq. (4.7) est définie par ses conditions initiales :

$$\begin{cases} z(s) &= z(0)C_z(s) + z'(0)S_z(s) + z_p(s) \\ z'(s) &= z(0)C'_z(s) + z'(0)S'_z(s) + z'_p(s) \end{cases}$$

Parmi l'ensemble des solutions particulières de l'équation de Hill, il en existe une et une seule qui soit périodique sur un tour. L'orbite fermée correspondant à cette solution se referme alors sur un tour. Soit z_{OF} cette solution.

En résolvant le système, nous trouvons [89] :

$$\begin{cases} z_{OF}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - S'_z(L))z_p(L) + S_z(L)z'_p(L)}{2(1 - \cos(2\pi\nu_z))} C_z(s) + \frac{C'_z(L)z_p(L) + (1 - C_z(L))z'_p(L)}{2(1 - \cos(2\pi\nu_z))} S_z(s) + z_p(s) \\ z'_{OF}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - S'_z(L))z_p(L) + S_z(L)z'_p(L)}{2(1 - \cos(2\pi\nu_z))} C'_z(s) + \frac{C'_z(L)z_p(L) + (1 - C_z(L))z'_p(L)}{2(1 - \cos(2\pi\nu_z))} S'_z(s) + z'_p(s) \end{cases} \quad (4.22)$$

Il est à noter que quand ν_z tend vers l'entier, l'orbite fermée tend vers une forme indéterminée. Il n'y a plus d'orbite de référence puisque dans ce cas les fonctions S_z et C_z sont elles aussi de période L . Le numérateur et le dénominateur sont alors nuls. Dans ce cas, quelles que soient les conditions initiales, l'orbite se referme. En présence de défauts dans la structure, ceci entraînera des divergences, comme nous le verrons par la suite. Les valeurs entières de ν_z seront à éviter.

En présence de dipôles, $f(s) = \frac{\delta}{\rho_z}$. Nous appelons alors **fonction dispersion** la fonction $D_z(s)$ définie par :

$$D_z(s) \stackrel{\text{def}}{=} -C_z(s) \int_0^s \frac{S_z(\tau)}{\rho_z(\tau)} d\tau + S_z(s) \int_0^s \frac{C_z(\tau)}{\rho_z(\tau)} d\tau \quad (4.23)$$

De même, la fonction **dispersion angulaire** $D'_z(s)$ se définit par :

$$D'_z(s) \stackrel{\text{def}}{=} -C'_z(s) \int_0^s \frac{S_z(\tau)}{\rho_z(\tau)} d\tau + S'_z(s) \int_0^s \frac{C_z(\tau)}{\rho_z(\tau)} d\tau \quad (4.24)$$

En tout point de la structure, le faisceau se transporte selon la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_z(s) & S_z(s) & D_z(s) \\ C'_z(s) & S'_z(s) & D'_z(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(s_0) \\ z'(s_0) \\ \delta \end{pmatrix}$$

Nous définissons par analogie avec l'Eq. (4.22) une fonction **dispersion périodique** D_{pz}

et une fonction **dispersion angulaire périodique** D'_{pz} par :

$$\begin{cases} D_{pz}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - S'_z(L))D_z(L) + S_z(L)D'_z(L)}{2(1 - \cos(2\pi\nu_z))} C_z(s) + \frac{C'_z(L)D_y(L) + (1 - C_z(L))D'_z(L)}{2(1 - \cos(2\pi\nu_z))} S_z(s) + D_z(s) \\ D'_{pz}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - S'_z(L))D_z(L) + S_z(L)D'_z(L)}{2(1 - \cos(2\pi\nu_z))} C'_z(s) + \frac{C'_z(L)D_z(L) + (1 - C_z(L))D'_z(L)}{2(1 - \cos(2\pi\nu_z))} S'_z(s) + D'_z(s) \end{cases} \quad (4.25)$$

La particule de moment p ayant pour conditions initiales $z_0 = \delta \cdot D_{pz}(0)$ et $z'_0 = \delta \cdot D'_{pz}(0)$ avec $\delta = \frac{\Delta p}{p_0}$ est alors sur son orbite stable. Cette orbite est appelée **orbite chromatique**.

Momentum compaction

D'après ce qui précède, à chaque énergie correspond une orbite fermée. La longueur L de cette orbite est donc fonction de l'énergie. Soient R_0 le rayon moyen et $L_0 = 2\pi R_0$ la longueur de l'orbite fermée à l'énergie nominale. Soit α défini par [85] :

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L_0} \cdot \frac{\partial L}{\partial \delta} \quad (4.26)$$

Ce coefficient α est appelé **momentum compaction** et illustre l'allongement de la trajectoire avec l'écart relatif en moment par rapport au moment nominal.

Dans ce paragraphe, nous supposons qu'il n'y a de déviation que dans le plan horizontal. Afin de relier le momentum compaction à la fonction de dispersion périodique, nous nous plaçons sur un petit élément de longueur s , de rayon de courbure local $\rho(s)$ et d'angle de rotation $\theta(s)$ dans le plan horizontal. En ce point, l'écart de position de l'orbite chromatique par rapport à celle de référence est $\delta \cdot D_{px}(s)$ (voir FIG.4.4). La longueur de l'orbite chromatique dans cet élément est alors :

$$ds' = (\rho(s) + \delta D_{px}(s)) \theta(s) = \left(1 + \delta \frac{D_{px}(s)}{\rho(s)} \right) ds$$

La longueur $L(\delta)$ de l'orbite chromatique est alors :

$$L(\delta) = \oint_{\text{tour}} ds' = L_0 + \int_0^{2\pi R_0} \delta \frac{D_{px}(s)}{\rho(s)} ds$$

Finalement, d'après la définition Eq. (4.26), nous obtenons l'expression du momentum compaction [85] :

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi R_0} \int_0^{2\pi R_0} \frac{D_{px}(s)}{\rho(s)} ds \quad (4.27)$$

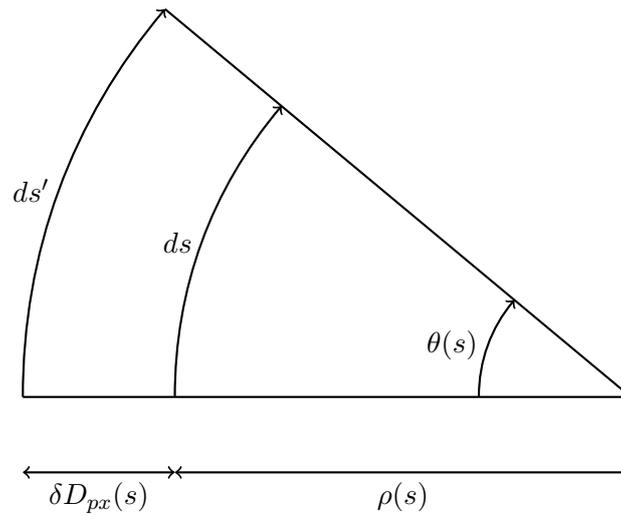


FIG. 4.4 – Différence d'allongement de la trajectoire due à l'énergie.

4.3 Conclusion

Ce chapitre a servi d'introduction au formalisme lié à la physique des accélérateurs. Ainsi, les notions de rigidité magnétique, multipôles, fonctions bêatron, dispersion, émittances ou momentum compaction ont été définies. Les équations de mouvement d'une particule dans l'anneau ont également été données au premier ordre ainsi que la forme des solutions retranscrivant le mouvement des particules. Néanmoins, cette solution n'est exacte que dans la mesure où la structure n'est composée que de dipôles et de quadripôles. Le chapitre suivant traitera donc des perturbations de la solution par l'introduction de défauts qu'ils soient liés à des erreurs de positionnement ou à des défauts de champ. Il considèrera également l'influence de lentilles multipolaires sur la dynamique du faisceau.

Chapitre 5

PERTURBATIONS

Dans le chapitre précédent, la machine a été considérée comme idéale, c'est-à-dire sans erreurs de positionnement des éléments ou de défauts de champ. Ces défauts de champ ou certains éléments magnétiques peuvent introduire des composantes multipolaires, ce qui perturbe l'équation de Hill et par la même le transport du faisceau. Dans un premier temps, nous allons traiter le cas général d'une perturbation afin de donner quelques éléments de réponse sur les effets de glissements de nombre d'onde ou d'effets résonnants. Ceci introduira alors la notion d'ouverture dynamique et donc de stabilité transverse du faisceau. Ensuite, nous traiterons quelques cas particuliers de défauts courants dans les anneaux et le moyen de les compenser. Nous aboutirons finalement au cas de perturbations internes au faisceau comme la charge d'espace et nous donnerons un premier élément de réponse sur son effet sur le faisceau lui-même.

5.1 Traitement général d'une perturbation

Le champ magnétique est supposé sans champ de fuite et sans composante longitudinale. L'équation de Hill donnée par l'Eq. (4.7) provient d'une linéarisation de l'Eq. (4.6). Cependant, si cette expression est développée à des ordres supérieurs ou si des multipôles sont introduits dans la structure alors l'équation de Hill perturbée prend la forme :

$$z'' + K_z(s)z = F_z(s) + \Delta F_z(s, \vec{X}(s)) \quad (5.1)$$

où $z'' + K_z(s)z = F_z(s)$ est l'équation non perturbée, $\vec{X}(s)$ le vecteur $(x, x', y, y', l, \delta)$ et $\Delta F_z(s, \vec{X}(s))$ la perturbation à l'abscisse curviligne s .

Dans un premier temps, le problème sera traité sous une optique perturbative, ce qui aboutira à une expression matricielle de la solution. Ensuite, nous essaierons d'estimer l'Hamiltonien du système et le glissement du nombre d'onde en fonction de l'invariant de Courant et Snyder. Puis, une première analyse des effets résonnants provenant des multipôles sera donnée.

5.1.1 Notation matricielle

En faisant un développement de Taylor-Lagrange, le vecteur solution \vec{X}_p de l'Eq. (5.1) peut s'écrire sous forme tensorielle en fonction des conditions initiales [90] :

$$\vec{X}_p(s) = R(s) \cdot X_0 + T(s) \cdot X_0 \otimes X_0 + U(s) \cdot X_0 \otimes X_0 \otimes X_0 + V(s) \cdot X_0 \otimes X_0 \otimes X_0 \otimes X_0 + \dots \quad (5.2)$$

où $X_0 = \vec{X}(0)$, et R, T, U, V sont des tenseurs d'ordres respectifs 2, 3, 4 et 5. avec

$$\begin{aligned} (R \cdot X_0)_i &= \sum_{j=1}^6 R_i^j(s) \cdot X_{0,i} & , R_i^j(s) &= \frac{\partial X_{p,i}(s)}{\partial X_j} \\ (T \cdot X_0 \otimes X_0)_i &= \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 T_i^{jk}(s) \cdot X_{0,j} \cdot X_{0,k} & , T_i^{jk}(s) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_{p,i}(s)}{\partial X_j \partial X_k} \\ (U \cdot X_0 \otimes X_0 \otimes X_0)_i &= \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 U_i^{jkl}(s) \cdot X_{0,j} \cdot X_{0,k} \cdot X_{0,l} & , U_i^{jkl}(s) &= \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 X_{p,i}(s)}{\partial X_j \partial X_k \partial X_l} \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

En pratique, nous tronquons l'Eq. (5.2) à un ordre n . Il est également à noter que, par exemple, la perturbation liée à la présence d'hexapôles donnera des termes quadratiques dans la solution perturbée mais également des termes d'ordre supérieur. Nous ne calculerons pas ici les tenseurs T ou U . Pour avoir leur expression pour différents éléments magnétiques, nous vous renvoyons à [86, p. 66-92] ou [90].

5.1.2 Expression du hamiltonien

Dans cette partie, le cas général de résonances dues à des multipôles sera traité sous l'optique de la mécanique hamiltonienne. Nous l'appliquerons ensuite dans les sections (5.2) et (5.3) aux défauts dipolaires ou quadripolaires.

Seule la perturbation liée à la présence de lentilles multipolaires sera considérée. Aussi, nous nous plaçons dans l'approximation $ds = vdt$, ce qui ôte la dépendance en x' et y' de l'Eq. (5.1). L'équation perturbée prend donc la forme :

$$\begin{cases} x'' + K_x(s)x &= Q_x(s, x, y, \delta) \\ y'' + K_y(s)y &= Q_y(s, x, y, \delta) \end{cases} \quad (5.3)$$

Q_x et Q_y sont deux polynômes en x et y dont les coefficients dépendent de s et δ .

Introduisons la variable $\theta = \frac{s}{R_0}$ où R_0 est le rayon moyen de la structure. Posons

$$p_z = \frac{dz}{d\theta}$$

z et p_z sont des variables conjuguées. L'hamiltonien H du système a alors pour propriétés :

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z \\ -\frac{dp_z}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial z} = R_0^2(K_z(\theta)z - Q_z(s, x, y)) \end{cases}$$

Sans perturbations, l'hamiltonien du système est alors donné par :

$$H_0 = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + k_x(\theta)x^2 + k_y(\theta)y^2$$

avec $k_x(\theta) = \frac{R_0^2}{2}K_x(\theta)$ et $k_y(\theta) = \frac{R_0^2}{2}K_y(\theta)$.

Soient K_n la force des multipôles droits et K_{-n} celle des multipôles tournés d'ordre $2 \times n$. Le champ magnétique est d'après Eq. (4.2) de la forme :

$$B_y(x, y) + \iota B_x(x, y) = (B\rho)(K_n + \iota K_{-n})(x + \iota y)^{n-1}$$

Dans ce cas, la perturbation est :

$$\begin{aligned} Q_x(\theta, x, y) &= \Re [(K_n(\theta) + \iota K_{-n}(\theta))(x + \iota y)^{n-1}] \\ Q_y(\theta, x, y) &= -\Im [(K_n(\theta) + \iota K_{-n}(\theta))(x + \iota y)^{n-1}] \end{aligned}$$

La perturbation ΔH du hamiltonien qui s'en suit est alors égale à :

$$\Delta H = \Re [(V_n(\theta) + \iota V_{-n}(\theta))(x + \iota y)^n]$$

où $V_n(\theta) = \frac{R_0^2}{n}K_n(\theta)$ et $V_{-n}(\theta) = \frac{R_0^2}{n}K_{-n}(\theta)$

Dans le cas non perturbé, les solutions de l'équation de Hill s'écrivent sous la forme [88] :

$$\begin{cases} z = \sqrt{\frac{2\beta_z P_z}{R_0}} \sin\left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_z} + \phi_z\right) \\ p_z = \frac{dz}{d\theta} = \sqrt{\frac{2R_0 P_z}{\beta_z}} \left[\cos\left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_z} + \phi_z\right) - \alpha_z \sin\left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_z} + \phi_z\right) \right] \end{cases}$$

avec $z = x$ ou y et $P_z = \frac{R_0 U_z}{2}$

Afin d'étudier le système perturbé, z et z' seront remplacés par la forme précédente et ϕ_z et P_z seront maintenant utilisés comme variables. Il s'agit bien d'un changement de bases canoniques car le déterminant du Jacobien est égal à 1. Dans cette base, ΔH s'écrit alors :

$$\Delta H = \Re \left[(V_n(\theta) + \iota V_{-n}(\theta)) \left(\sqrt{\frac{2\beta_x P_x}{R_0}} \sin\left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_x} + \phi_x\right) + \iota \sqrt{\frac{2\beta_y P_y}{R_0}} \sin\left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_y} + \phi_y\right) \right)^n \right] \quad (5.4)$$

Or, le glissement du nombre d'onde est donné par :

$$\Delta\nu_z = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\phi_z}{d\theta} d\theta$$

D'après les propriétés de l'Hamiltonien, nous savons que $\frac{d\phi_z}{d\theta} = \frac{\partial\Delta H}{\partial P_z}$.

D'après Eq. (5.4), nous avons [88] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta H}{\partial P_x} &= \Re \left[(V_n(\theta) + \imath V_{-n}(\theta)) \left(\frac{2}{R_0} \right)^{n/2} \sum_{p=1}^n \frac{p}{2} \imath^{n-p} C_n^p \beta_x^{p/2} \beta_y^{(n-p)/2} P_x^{p/2-1} P_y^{(n-p)/2} \right. \\ &\quad \left. \sin^p \left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_x} + \phi_x \right) \sin^{n-p} \left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_y} + \phi_y \right) \right] \\ \frac{\partial\Delta H}{\partial P_y} &= \Re \left[(V_n(\theta) + \imath V_{-n}(\theta)) \left(\frac{2}{R_0} \right)^{n/2} \sum_{p=1}^n \frac{p}{2} \imath^p C_n^p \beta_y^{p/2} \beta_x^{(n-p)/2} P_y^{p/2-1} P_x^{(n-p)/2} \right. \\ &\quad \left. \sin^{n-p} \left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_x} + \phi_x \right) \sin^p \left(\int_0^\theta \frac{R_0 d\theta}{\beta_y} + \phi_y \right) \right] \end{aligned}$$

Les égalités suivantes se déduisent facilement de la formule de Moivre $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k}(x) dx = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \text{ et } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k+1}(x) dx = 0$$

Ainsi, pour avoir $\overline{\sin^p} \cdot \overline{\sin^{n-p}} \neq 0$, p et n sont nécessairement pairs. En première approximation, le glissement du nombre d'onde est donc nul pour les multipôles d'ordre impair. Pour les multipôles d'ordre $n = 2q$, il est alors donné au premier ordre par :

$$\begin{cases} \Delta\nu_x = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{2^q R_0^q} V_n(\theta) \sum_{k=1}^q (-1)^{q-k} \frac{(2q)!k}{(k!)^2 (q-k)!^2} \beta_x^k \beta_y^{q-k} P_x^{k-1} P_y^{q-k} d\theta \\ \Delta\nu_y = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{2^q R_0^q} V_n(\theta) \sum_{k=1}^q (-1)^k \frac{(2q)!k}{(k!)^2 (q-k)!^2} \beta_y^k \beta_x^{q-k} P_y^{k-1} P_x^{q-k} d\theta \end{cases} \quad (5.5)$$

Afin de faire apparaître la périodicité de la structure, la variable suivante sera utilisée $\psi_z = \int_0^s \frac{ds}{\beta_z} - \nu_z \theta$ pour $z = x$ ou y . Après développement de Eq. (5.4) et utilisation des formules de Moivre, l'expression de ΔH devient :

$$\Delta H = \Re \left[\sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^{n-p} a_{p,k,l}(\theta) P_x^{p/2} P_y^{(n-p)/2} e^{\imath((p-2k)(\nu_x \theta + \phi_x) + (n-p-2l)(\nu_y \theta + \phi_y))} \right]$$

où $a_{p,k,l}(\theta) = (-1)^{k+l} C_p^k C_{n-p}^l \imath^{-p} (V_n(\theta) + \imath V_{-n}(\theta)) \sqrt{\frac{\beta_x^p \beta_y^{n-p}}{R_0^p 2^n}} e^{\imath((p-2k)\psi_x + (n-p-2l)\psi_y)}$

Ainsi, $a_{p,k,l}(\theta)$ est périodique de période 2π et peut s'écrire sous une forme d'une série de

Fourier :

$$a_{p,k,l}(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_{p,k,l,m} e^{-im\theta}$$

$$\tilde{a}_{p,k,l,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{p,k,l}(\theta) e^{+im\theta} d\theta$$

Finalement, ΔH s'écrit sous la forme [88] :

$$\Delta H = \Re \left[\sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^{n-p} P_x^{p/2} P_y^{(n-p)/2} e^{i((p-2k)\phi_x + (n-p-2l)\phi_y)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_{p,k,l,m} e^{i((p-2k)\nu_x + (n-p-2l)\nu_y - m)\theta} \right] \quad (5.6)$$

Il apparaît donc des valeurs particulières pour ν_x et ν_y pour lesquelles le Hamiltonien est perturbé. Il s'agit des valeurs pour lesquelles il existe trois entiers q_x , q_y et m tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq q_x \leq n \\ -n \leq q_y \leq n \\ q_x \nu_x + q_y \nu_y = m \end{cases}$$

alors ΔH est en moyenne non nul, ce qui maximise l'effet de la perturbation. Il y a alors **résonance**. Ces phénomènes résonnants déforment le faisceau et limitent la zone de stabilité des particules. La région du plan transverse stable est appelée **ouverture dynamique**. Son optimisation est souvent un problème car la combinaison des différentes lentilles multipolaires génère des ordres supérieurs. Nous retiendrons que le choix du point de fonctionnement devra se faire le plus loin possible des résonances pouvant être excitées dans l'anneau. Les effets de perturbations particulières pouvant avoir lieu dans un anneau seront illustrés par la suite.

5.2 Défauts dipolaires

Un défaut dipolaire a pour conséquence d'ajouter un terme Δk_1 à l'équation de Hill Eq. (4.7), qui devient :

$$z'' + K_z z = -\Delta k_1$$

Trois types de sources de perturbations dipolaires peuvent être dénombrées [89] :

- erreurs dans le champ des dipôles
- erreurs sur l'énergie de la particule
- erreurs de positionnement transverse des multipôles d'ordre $n \geq 2$

Dans le cas d'une erreur ΔB sur le champ des dipôles, en utilisant l'Eq. (4.6) puis en linéarisant à nouveau, nous trouvons que $\Delta k_1 = \frac{\Delta B}{(B\rho)_0}$.

En ce qui concerne une erreur sur l'énergie de la particule $\delta = \frac{\Delta p}{p_0}$, la valeur de Δk_1 est de même évaluée à $\frac{\delta}{\rho}$. La perturbation due à cet effet a déjà été calculée précédemment par le biais de la fonction dispersion.

Une erreur de positionnement transverse d'un multipôle droit de force K_n de Δx dans la direction x se traduit par le fait qu'une particule sur l'axe de la machine subira un changement

en angle de $\Delta k_1 = (-1)^{n+1} K_n \cdot \Delta x^{n-1}$.

5.2.1 Perturbation de l'orbite fermée

Une perturbation dipolaire a une influence sur le calcul de l'orbite fermée puisque la forme des solutions particulières est changée. Par contre, l'équation homogène reste la même et donc les fonctions bêatron également. Le changement sur l'orbite fermée a déjà été évalué en Eq. (4.22). Nous avons alors :

$$\begin{cases} \Delta z_{OF}(s) = \frac{(1-S'_z(L))\Delta z_p(L)+S_z(L)\Delta z'_p(L)}{2(1-\cos(2\pi\nu_z))} C_z(s) + \frac{C'_z(L)\Delta z_p(L)+(1-C_z(L))\Delta z'_p(L)}{2(1-\cos(2\pi\nu_z))} S_z(s) + \Delta z_p(s) \\ \Delta z'_{OF}(s) = \frac{(1-S'_z(L))\Delta z_p(L)+S_z(L)\Delta z'_p(L)}{2(1-\cos(2\pi\nu_z))} C'_z(s) + \frac{C'_z(L)\Delta z_p(L)+(1-C_z(L))\Delta z'_p(L)}{2(1-\cos(2\pi\nu_z))} S'_z(s) + \Delta z'_p(s) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta z_p(s) &= -C_z(s) \int_0^s S_z(\tau) \Delta k_1(\tau) d\tau + S_z(s) \int_0^s C_z(\tau) \Delta k_1(\tau) d\tau \\ \Delta z'_p(s) &= -C'_z(s) \int_0^s S_z(\tau) \Delta k_1(\tau) d\tau + S'_z(s) \int_0^s C_z(\tau) \Delta k_1(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Il apparaît donc que pour un nombre d'ondes proche de l'entier, $1 - \cos(2\pi\nu_z)$ tend vers 0 et l'orbite fermée n'est plus définie. Cela vient du fait qu'à chaque tour effectué, la particule est soumise aux mêmes composantes de champ dans chaque élément. En cas de défaut dans la structure, sa contributions s'ajoute donc à chaque tour au lieu de donner une moyenne nulle. Les résonances entières sont donc particulièrement néfastes pour la stabilité de l'orbite fermée et le choix du point de fonctionnement de la machine devra s'en éloigner autant que possible.

5.2.2 Corrections des défauts dipolaires

Afin de limiter l'ouverture nécessaire pour les éléments magnétiques et pour éviter aussi les effets de non linéarités dues à un faisceau décentré, il est nécessaire d'insérer des correcteurs dipolaires dans la structure afin de compenser les défauts sur l'orbite fermée [91]. Après correction, nous désirons minimiser l'écart type sur l'orbite fermée Δz_{OF} .

Notons F la fonction retranscrivant les défauts dipolaires de la structure hormis les correcteurs et Δk_{COR} celle des correcteurs dipolaires. Les N_{COR} correcteurs dipolaires seront assimilés à des lentilles minces dipolaires d'angle θ_k où k correspond au k -ième correcteur de la structure situé à l'abscisse s_k . Dans ce cas, quelle que soit la fonction f , nous avons $\int_0^L \Delta k_{COR}(\tau) f(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{N_{COR}} \theta_k f(s_k)$. Notons Δz_{COR} et $\Delta z'_{COR}$ les différences d'orbite fermée générées par les correcteurs dipolaires. L'Eq. (4.22) nous permet de calculer les matrices $R_{COR}(s)$ telles que quelle que soit l'abscisse curviligne s considérée nous ayons :

$$\Delta z_{COR}(s) = R_{COR}(s) \cdot \tilde{\theta}$$

où $\tilde{\theta}$ est le vecteur colonne constitué des kicks dipolaires θ_k

Dans une machine réelle, les écarts de l'orbite fermé ne sont évalués qu'en certains points de la machine où des mesureurs de positions (BPM ou Beam Positioning Monitoring) sont localisés. Notons N_{BPM} le nombre de ces BPM, t_k leur position et X_k la valeur de l'écart sur

l'orbite fermée à la position t_k dû aux défauts. Nous noterons M la matrice $N_{\text{BPM}} \times N_{\text{COR}}$ reliant les modifications en position de l'orbite fermée aux BPM apportées par les correcteurs. La matrice M peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} R_{\text{COR}}(t_1) \\ R_{\text{COR}}(t_2) \\ \vdots \\ R_{\text{COR}}(t_{N_{\text{BPM}}-1}) \\ R_{\text{COR}}(t_{N_{\text{BPM}}}) \end{pmatrix}$$

Le but est de minimiser la quantité Q suivante :

$$Q = \sum_{i=1}^{N_{\text{BPM}}} \frac{\left(\sum_{j=1}^{N_{\text{COR}}} M_{i,j} \theta_j + X_i \right)^2}{w_i^2}$$

où w_i permet de pondérer les BPM entre eux

En dérivant Q par rapport à la force de chacun des correcteurs, nous avons alors le système d'équations :

$$\forall k = 1, \dots, N_{\text{COR}}, \sum_{j=1}^{N_{\text{COR}}} \left(\sum_{i=1}^{N_{\text{BPM}}} \frac{M_{i,k} \cdot M_{i,j}}{w_i^2} \right) \theta_j = - \sum_{i=1}^{N_{\text{BPM}}} \frac{M_{i,k} \cdot X_i}{w_i^2}$$

ou en notation matricielle :

$$M^T \cdot \text{diag}(w_1^2, \dots, w_{N_{\text{COR}}}^2)^{-1} \cdot M \cdot \tilde{\theta} = -M^T \cdot \text{diag}(w_1^2, \dots, w_{N_{\text{COR}}}^2)^{-1} \cdot \tilde{X}$$

avec $M^T \cdot \text{diag}(w_1^2, \dots, w_{N_{\text{COR}}}^2)^{-1} \cdot M$ une matrice carrée $N_{\text{COR}} \times N_{\text{COR}}$ indépendante des défauts. Il est alors possible de l'inverser et d'obtenir une relation matricielle entre $\tilde{\theta}$ et \tilde{X} . Par le fait que \tilde{X} s'exprime linéairement en fonction des N_{DEF} défauts dipolaires \tilde{Y} par l'intermédiaire de la matrice P_X intervenant dans la structure à cause de Eq. (4.22), nous aboutissons finalement à une expression du type :

$$\tilde{\theta} = M_X \cdot \tilde{X} = M_X \cdot P_X \cdot \tilde{Y} = M_Y \cdot \tilde{Y}$$

L'orbite fermée résiduelle se déduit alors des matrices de transport et de $\tilde{\theta}$ [92]

$\tilde{\theta}$ n'est déterminé que pour un ensemble de défauts donnés. Pour une population statistique de défauts, nous nous plaçons dans le cas où les défauts sont décorrélés de distribution centrée. L'écart type de chacune des distribution est donné par σ_i . Nous avons alors l'écart type $\sigma_{\theta,i}$ sur la valeur pour chacun des correcteurs :

$$\forall i = 1, \dots, N_{\text{COR}}, \sigma_{\theta,i}^2 = \sum_{j=1}^{N_{\text{DEF}}} M_{Y,ij}^2 \sigma_j^2$$

L'écart type sur l'orbite fermée résiduelle se déduit alors de la même façon [92].

5.3 Défauts quadripolaires

Quatre sources de perturbations quadripolaires peuvent être recensées [89] :

- erreurs sur le gradient des quadripôles
- erreurs de positionnement angulaire des dipôles
- erreurs en énergie des particules
- erreurs de positionnement transverse des multipôles d'ordre $n \geq 3$

Ceci a pour conséquence d'ajouter un terme $\Delta k_2 x$ à l'équation de Hill (Eq. (4.7)), qui s'écrit alors :

$$z'' + K_z z = -\Delta k_2 \cdot z$$

Dans le premier cas, pour une erreur de gradient de ΔK , la perturbation sur l'équation de Hill est de $\Delta k_2 = \Delta K$. Le second cas rejoint le premier dans la mesure où des composantes quadripolaires du champ peuvent apparaître à cause de défauts du champ dans les aimants.

Le défaut quadripolaire dû à l'énergie vient du fait que la force de focalisation des quadripôles dépend de l'énergie selon la loi

$$K(\delta) = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{K(\delta_0)}{1 + \delta} \approx K_0(1 - \delta)$$

Ainsi, $\Delta k_2 = -K_0 \delta$.

Enfin, d'après (Eq. (4.2)), si le multipôle d'ordre $n \geq 2$ de force K_n est désaligné de Δx par exemple dans la direction horizontale, ceci génère un défaut quadripolaire de force

$$\Delta k_2 = (-1)^n (n-1) K_n \Delta x^{n-2}$$

D'après l'Eq. (5.5), le glissement du nombre d'onde s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Delta \nu_x = \frac{1}{4\pi} \oint \Delta k_2(s) \cdot \beta_x(s) ds \\ \Delta \nu_y = \frac{-1}{4\pi} \oint \Delta k_2(s) \cdot \beta_y(s) ds \end{cases} \quad (5.7)$$

5.3.1 Perturbation des paramètres de Twiss

Soit un défaut quadripolaire en l'abscisse s_k . Notons, pour alléger l'écriture, C_z et S_z les fonctions pseudo-cosinus et pseudo-sinus associées à l'équation de Hill non perturbée $z'' + K(s)z = 0$ définies en Eq. (4.17) avec l'origine des axes prises en s_k . Les fonctions de Twiss sont données en l'abscisse s par l'Eq. (4.20) :

$$\begin{pmatrix} \beta_z(s) \\ \alpha_z(s) \\ \gamma_z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_z^2 & -2C_z S_z & S_z^2 \\ -C_z C_z' & C_z' S_z + C_z S_z' & -S_z S_z' \\ C_z'^2 & -2C_z' S_z' & S_z'^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_z(s_k) \\ \alpha_z(s_k) \\ \gamma_z(s_k) \end{pmatrix}$$

Dans une modification des conditions initiales en s_k ,

$$\beta_z(s) \rightarrow \beta_z(s) + \Delta\beta_z(s) \quad \alpha_z(s) \rightarrow \alpha_z(s) + \Delta\alpha_z(s) \quad \gamma_z(s) \rightarrow \gamma_z(s) + \Delta\gamma_z(s)$$

Dans l'hypothèse où il n'y a pas de défauts quadripolaires entre s_k et s alors les fonctions pseudo-sinus et pseudo-cosinus restent inchangées. Nous avons donc la relation :

$$\begin{pmatrix} \Delta\beta_z(s) \\ \Delta\alpha_z(s) \\ \Delta\gamma_z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_z^2 & -2C_zS_z & S_z^2 \\ -C_zC'_z & C'_zS_z + C_zS'_z & -S_zS'_z \\ C_z'^2 & -2C'_zS'_z & S_z'^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta\beta_z(s_k) \\ \Delta\alpha_z(s_k) \\ \Delta\gamma_z(s_k) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

D'après Eq. (4.17), $\frac{C_z^2}{\beta_z}$, $\frac{C_zS_z}{\beta_z}$ et $\frac{S_z^2}{\beta_z}$ sont uniquement fonctions de ϕ_z dans une section sans perturbation. En utilisant comme variable l'avance de phase plutôt que l'abscisse curviligne et l'Eq. (5.8), nous aboutissons à l'équation différentielle suivante [91] :

$$\frac{d^2}{d\phi_z^2} \left(\frac{\Delta\beta_z}{\beta_z} \right) + 4 \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z} = 0 \quad (5.9)$$

De plus, en écrivant que $\frac{d\beta_z}{d\phi_z} = \frac{d\beta_z}{ds} \frac{ds}{d\phi_z} = -2 \frac{\alpha_z}{\beta_z}$, nous avons :

$$\frac{d}{d\phi_z} \left(\frac{\Delta\beta_z}{\beta_z} \right) = -2 \left[\Delta\alpha_z - \alpha_z \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z} \right] \quad (5.10)$$

Nous assimilons ici le défaut quadripolaire à une lentille mince de force $(\delta KL)_k$. En notant ϕ_k^- et ϕ_k^+ les avances de phase ϕ_z juste avant et juste après le k -ième défaut quadripolaire, nous avons la relation :

$$\begin{pmatrix} \beta_z(\phi_k^+) \\ \alpha_z(\phi_k^+) \\ \gamma_z(\phi_k^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (\delta KL)_k & 1 & 0 \\ (\delta KL)_k^2 & 2(\delta KL)_k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_z(\phi_k^-) \\ \alpha_z(\phi_k^-) \\ \gamma_z(\phi_k^-) \end{pmatrix}$$

En écrivant $\phi_k = \phi_z(s_k)$, ceci donne alors :

$$\begin{aligned} \Delta\beta_z(\phi_k) &= 0 \\ \Delta\alpha_z(\phi_k) &= \beta_z(\phi_k^-)(\delta KL)_k \\ \Delta\gamma_z(\phi_k) &= \beta_z(\phi_k^-)(\delta KL)_k^2 + 2\alpha_z(\phi_k^-)(\delta KL)_k \end{aligned} \quad (5.11)$$

Notant $\delta(\phi)$ la fonction :

$$\begin{cases} \delta(\phi) = 1 & \text{si } \phi = 0 \\ \delta(\phi) = 0 & \text{si } \phi \neq 0 \end{cases}$$

En utilisant les relations Eq. (5.9), Eq. (5.10) et Eq. (5.11), nous avons finalement :

$$\frac{d^2}{d\phi_z^2} \left(\frac{\Delta\beta_z}{\beta_z} \right) + 4 \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z} = -2 \sum_k \beta_z(\phi_k) (\delta KL)_k \delta(\phi_z - \phi_k) = F_z(\phi_z) \quad (5.12)$$

L'équation différentielle obtenue est à nouveau une équation de Hill $z'' + K_z(s)z = F_z(s)$

avec K_z et F_z deux fonctions périodiques en s . En appliquant la même procédure que dans le Chapitre 4 et en utilisant la périodicité de $\frac{\Delta\beta_z}{\beta_z}$, nous avons finalement [91, 89] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_z, \quad \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z}(\phi_z) = \frac{1}{4 \sin(2\pi\nu_z)} \cdot \int_{\phi_z}^{\phi_z+2\pi\nu_z} F_z(\psi_z) \cdot \cos(2[\psi_z - \phi_z] - 2\pi\nu_z) \cdot d\psi_z \\ \frac{d}{d\phi_z} \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z}(\phi_z) = \frac{1}{2 \sin(2\pi\nu_z)} \cdot \int_{\phi_z}^{\phi_z+2\pi\nu_z} F_z(\psi_z) \cdot \sin(2[\psi_z - \phi_z] - 2\pi\nu_z) \cdot d\psi_z \end{array} \right.$$

ou en utilisant le fait que ϕ_z est croissante, que $\forall s \in \mathbb{R}, \phi_z(s+L) = \phi_z(s) + 2\pi\nu_z$ et en utilisant le changement de variable $\psi'_z = \psi_z - 2\pi\nu_z$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_z, \quad \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z}(\phi_z) = \frac{1}{4 \sin(2\pi\nu_z)} \cdot \oint F_z(\psi_z) \cdot \cos(2|\psi_z - \phi_z| - 2\pi\nu_z) \cdot d\psi_z \\ \frac{d}{d\phi_z} \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z}(\phi_z) = \frac{1}{2 \sin(2\pi\nu_z)} \cdot \oint F_z(\psi_z) \cdot \sin(2|\psi_z - \phi_z| - 2\pi\nu_z) \cdot d\psi_z \end{array} \right.$$

Finalement, nous avons :

$$\forall s, \frac{\Delta\beta_z}{\beta_z}(s) = \frac{-1}{2 \sin(2\pi\nu_z)} \cdot \sum_k \beta_z(s_k) (\delta KL)_k \cdot \cos(2|\phi_z(s) - \phi_z(s_k)| - 2\pi\nu_z)$$

Dans le cas où le nombre d'onde est très proche du demi-entier, les fonctions bêatron perturbées divergent.

De la même façon que précédemment, il est possible de calculer l'erreur sur la dispersion horizontale ΔD_x [91] :

$$\begin{aligned} \forall s, \Delta D_z(s) &= \frac{-1}{2 \sin(\pi\nu_z)} \cdot \sum_k \sqrt{\beta_z(s_k)\beta_z(s)} (\delta KL)_k \cdot D_z(s_k) \cdot \cos(|\phi_z(s) - \phi_z(s_k)| - \pi\nu_z) \\ \Delta D'_z(s) &= \frac{1}{2 \sin(\pi\nu_z)} \cdot \sum_k \sqrt{\frac{\beta_z(s_k)}{\beta_z(s)}} (\delta KL)_k \cdot D_z(s_k) \cdot \left[\sin(|\phi_z(s) - \phi_z(s_k)| - \pi\nu_z) + \right. \\ &\quad \left. \alpha_z \cos(|\phi_z(s) - \phi_z(s_k)| - \pi\nu_z) \right] \end{aligned}$$

5.3.2 Chromaticité

Une des sources d'erreurs quadripolaires provient d'un écart en moment qui induit un changement de la force des quadripôles. Il s'en suit donc un glissement du nombre d'ondes en fonction de l'énergie. Nous introduisons alors la dérivée ξ_z du nombre d'onde ν_z par rapport à l'écart relatif en moment δ :

$$\xi_z = \frac{1}{\nu_z} \frac{\partial \nu_z}{\partial \delta}$$

ξ_x et ξ_y sont respectivement appelées **chromaticité horizontale** et **verticale**.

Une grande acceptation en moment implique souvent une correction de la chromaticité. L'insertion d'hexapôles dans des régions dispersives permet de réaliser cette correction.

Dans une région de dispersion horizontale D_x , une particule ayant une différence relative en moment de δ avec la particule de référence voit le champ magnétique suivant à la traversée

de l'hexapôle [88] :

$$\begin{aligned} B_x &= 2(B\rho)K_3xy & +2(B\rho)K_3 \cdot (\delta \cdot D_x) \cdot y \\ B_y &= (B\rho)K_3(x^2 - y^2) & +2(B\rho)K_3 \cdot (\delta \cdot D_x) \cdot x & + (B\rho)K_3 (\delta \cdot D_x)^2 \end{aligned}$$

Ceci génère donc un défaut quadripolaire de force $\Delta k_2 = 2K_3 (\delta \cdot D_x)$ et un défaut dipolaire de force $\Delta k_1 = K_3 (\delta \cdot D_x)^2$.

L'action de N_{SX} hexapôles minces situés aux abscisses curviligne s_n de force intégrée $(K_3L)(s_n)$ induit donc un glissement du nombre d'onde égal à :

$$\begin{cases} \Delta\nu_x &= \frac{1}{4\pi} \oint \Delta k_2 \beta_x ds = \frac{\delta}{2\pi} \sum_{n=0}^{N_{SX}} (K_3L)(s_n) \beta_x(s_n) D_x(s_n) \\ \Delta\nu_y &= -\frac{1}{4\pi} \oint \Delta k_2 \beta_y ds = \frac{-\delta}{2\pi} \sum_{n=0}^{N_{SX}} (K_3L)(s_n) \beta_y(s_n) D_x(s_n) \end{cases}$$

Il est possible de corriger la chromaticité avec seulement deux familles d'hexapôles situés dans une région dispersive. L'introduction d'hexapôles perturbe l'équation de Hill avec les composantes non linéaires de champ. Ceci modifie le transport des particules et contribue à réduire la zone de stabilité dans l'espace transverse. Aussi, généralement, plusieurs familles d'hexapôles sont nécessaires : il faut à la fois corriger la chromaticité et compenser les perturbations.

5.4 Perturbations dues à la charge d'espace

En plus de l'influence des champs extérieurs, le mouvement des particules du faisceau est perturbé par celui induit par les particules elles-mêmes. Ce phénomène collectif dû aux densités de charge et de courant du faisceau est dit mécanisme de **charge d'espace**. Du fait que son expression est intrinsèque à la distribution du faisceau, elle peut devenir rapidement complexe et peut requérir des codes de calcul poussés. Il ne s'agit pas ici de développer un algorithme de calcul de la charge d'espace mais de donner une première estimation de son influence sur le mouvement des particules dans un anneau. Nous nous placerons dans le cas simplifié d'un faisceau de symétrie elliptique en l'absence de champ extérieur. De plus, nous supposons que les dimensions longitudinales du faisceau sont bien plus grandes que les dimensions transverses, ce qui permet de négliger l'effet longitudinal.

Considérons un ensemble de deux particules de masse au repos m_0 et de charge q et se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans le référentiel du laboratoire [88, p. CE1-CE11]. La force exercée par la première particule sur la seconde est la somme de deux contributions :

1. La première est due à la répulsion électrostatique des charges. Elle est égale à :

$$\vec{F}_E(r) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = q\vec{E}$$

2. La seconde est la force de Laplace due au champ magnétique généré par des particules

en mouvement. Elle est égale à :

$$\vec{F}_B(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} v^2 \vec{e}_r = -q\beta^2 \vec{E}$$

Ainsi, la force totale exercée par la première particule sur la seconde est donnée par :

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2} = \frac{q\vec{E}}{\gamma^2}$$

En utilisant la relation fondamentale de la dynamique et en utilisant les relations entre z'' et \ddot{z} , nous aboutissons finalement à une équation de Hill modifiée sous la forme :

$$z'' + K_z z - \frac{qE_z}{m_0 \gamma^3 \beta^2 c^2} = 0$$

Dans le cas d'une distribution de charges non ponctuelles, nous utilisons le principe d'additivité afin de déduire la force totale exercée sur la particule par l'ensemble du faisceau. D'après [93], le champ \vec{E} généré par un faisceau de particules de charge q et de distribution à symétrie elliptique est donné par :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{qabx}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \rho \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} \right) (a^2+s)^{-3/2} (b^2+s)^{-1/2} ds \\ E_y &= \frac{qaby}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \rho \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} \right) (a^2+s)^{-1/2} (b^2+s)^{-3/2} ds \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $\rho(x, y) = \rho \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$ est la distribution de charge du faisceau
 a et b sont respectivement le demi-axe horizontal et vertical

5.4.1 Cas d'une distribution uniforme

Nous vous renvoyons à [93] pour des calculs détaillés du champ électrique généré par une distribution uniforme ou parabolique. Nous retiendrons que dans le cas d'une distribution uniforme pour un faisceau non groupé :

$$\rho(x, y, l) = \frac{N_{\text{tot}}}{2\pi R_0} \frac{1}{\pi ab}$$

N_{tot} est le nombre total de particules dans la machine

Afin de relier les dimensions maximales du faisceau aux émittances quadratiques moyennes horizontales et verticales du faisceau ϵ_x et ϵ_y , nous allons calculer la variance V_x sur la position horizontale d'une particule du faisceau donnée par :

$$V_x = \frac{1}{N_{\text{tot}}} \iiint x^2 \rho(x, y, l) dx dy dl$$

Ainsi, pour une distribution uniforme, en utilisant le changement de variable (r, θ) suivant :

$$\begin{aligned} x &= a \cdot r \cdot \cos \theta \\ y &= b \cdot r \cdot \sin \theta \\ dx \cdot dy &= a \cdot b \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \end{aligned}$$

Nous aboutissons naturellement à l'expression de la variance sur la position horizontale d'une particule :

$$V_x = \frac{a^2}{4}$$

Dans le cas d'une distribution uniforme, nous avons donc l'égalité $a = 2\sqrt{\beta_x \epsilon_x}$ et $b = 2\sqrt{\beta_y \epsilon_y}$.

Après calcul du champ \vec{E} en utilisant l'Eq. (5.13), il s'en suit que les forces de charge d'espace peuvent être assimilées à une perturbation quadripolaire avec

$$\begin{aligned} \Delta K_x &= -\frac{Z^2}{A} \frac{4N_{\text{tot}}r_0}{2\pi R_0 \gamma^3 \beta^2 (a+b)a} \\ \Delta K_y &= -\frac{Z^2}{A} \frac{4N_{\text{tot}}r_0}{2\pi R_0 \gamma^3 \beta^2 (a+b)b} \end{aligned}$$

où r_0 est le rayon classique du proton

Z le nombre de charge de l'ion

A son nombre de masse

D'après Eq. (5.7), le glissement du nombre d'onde [94, 95] est alors :

$$\begin{aligned} \Delta \nu_x &= -\frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}r_0}{\pi \beta^2 \gamma^3} \frac{1}{2\pi R_0} \oint \frac{\beta_x}{a(a+b)} ds = -\frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}r_0}{4\pi \beta^2 \gamma^3 \epsilon_x} \frac{1}{2\pi R_0} \oint \frac{ds}{1 + \sqrt{\frac{\beta_y \epsilon_y}{\beta_x \epsilon_x}}} \\ \Delta \nu_y &= -\frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}r_0}{\pi \beta^2 \gamma^3} \frac{1}{2\pi R_0} \oint \frac{\beta_y}{b(a+b)} ds = -\frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}r_0}{4\pi \beta^2 \gamma^3 \epsilon_y} \frac{1}{2\pi R_0} \oint \frac{ds}{1 + \sqrt{\frac{\beta_x \epsilon_x}{\beta_y \epsilon_y}}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Il est à noter que dans ce cas, le glissement du nombre d'onde ne dépend ni de U_x ni de U_y et donc toutes les particules ont le même glissement. Cependant, il s'agit d'un cas peu réaliste et nous allons maintenant nous intéresser au cas d'une distribution parabolique du faisceau.

5.4.2 Cas d'une distribution parabolique

D'après [93], dans le cas d'une distribution parabolique dans le plan transverse pour un faisceau non groupé :

$$\rho(x, y, l) = \frac{N_{\text{tot}}}{2\pi R_0} \frac{2}{\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

En procédant de même que précédemment, nous trouvons que la variance V_x sur la position horizontale d'une particule du faisceau dans le cas d'une distribution parabolique est donnée par :

$$V_x = \frac{a^2}{6}$$

Ainsi, $a = \sqrt{6\beta_x\epsilon_x}$ et $b = \sqrt{6\beta_y\epsilon_y}$. En utilisant l'Eq. (5.13) pour calculer le champ \vec{E} [93], l'équation de Hill perturbée est alors de la forme :

$$\begin{aligned} x'' + K_x x &= \frac{Z^2}{A} \frac{8N_{\text{tot}}r_0}{2\pi R_0\beta^2\gamma^3} \left[\frac{x}{a(a+b)} - \frac{x^3(2a+b)}{3a^3(a+b)^2} - \frac{xy^2}{ab(a+b)^2} \right] \\ y'' + K_y y &= \frac{Z^2}{A} \frac{8N_{\text{tot}}r_0}{2\pi R_0\beta^2\gamma^3} \left[\frac{y}{b(a+b)} - \frac{y^3(2b+a)}{3b^3(a+b)^2} - \frac{yx^2}{ab(a+b)^2} \right] \end{aligned}$$

Le terme de droite comporte 3 termes. Chacun de ces 3 termes entraînera un glissement du nombre d'onde que nous noterons respectivement $\Delta\nu_{z1}$, $\Delta\nu_{z2}$ et $\Delta\nu_{z3}$ avec $z = x$ ou y . Nous utiliserons les invariants de Courant et Snyder U_z de la particule dans chaque plan. En passant par l'Hamiltonien et en appliquant le raisonnement aboutissant à l'Eq. (5.5), nous aboutissons finalement à l'expression suivante [94] :

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x &= \Delta\nu_{x1} + \Delta\nu_{x2} + \Delta\nu_{x3} & , \Delta\nu_y &= \Delta\nu_{y1} + \Delta\nu_{y2} + \Delta\nu_{y3} \\ \Delta\nu_{x1} &= -\frac{Z^2}{A} \frac{2N_{\text{tot}}r_0}{\pi\beta^2\gamma^3} \left\langle \frac{\beta_x}{a(a+b)} \right\rangle & , \Delta\nu_{y1} &= -\frac{Z^2}{A} \frac{2N_{\text{tot}}r_0}{\pi\beta^2\gamma^3} \left\langle \frac{\beta_y}{b(a+b)} \right\rangle \\ \Delta\nu_{x2} &= \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}r_0 U_x}{2\pi\beta^2\gamma^3} \left\langle \frac{(2a+b)\beta_x^2}{a^3(a+b)^2} \right\rangle & , \Delta\nu_{y2} &= \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}r_0 U_y}{2\pi\beta^2\gamma^3} \left\langle \frac{(2b+a)\beta_y^2}{b^3(a+b)^2} \right\rangle \\ \Delta\nu_{x3} &= \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}r_0 U_y}{\pi\beta^2\gamma^3} \left\langle \frac{\beta_x\beta_y}{ab(a+b)^2} \right\rangle & , \Delta\nu_{y3} &= \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}r_0 U_x}{\pi\beta^2\gamma^3} \left\langle \frac{\beta_x\beta_y}{ab(a+b)^2} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.15)$$

En utilisant le fait que $a = \sqrt{6\beta_x\epsilon_x}$ et $b = \sqrt{6\beta_y\epsilon_y}$, il est alors possible de relier le glissement du nombre d'onde à l'émittance quadratique moyenne du faisceau. Il est à noter que le glissement du nombre d'onde dépend de l'invariant de Courant et Snyder de la particule. Comme cet invariant est borné et que le glissement dépend linéairement de l'invariant, nous pouvons définir un quadrilatère du plan $\{\nu_x, \nu_y\}$ comprenant l'ensemble des valeurs prises par les particules du faisceau. De plus, le glissement du nombre d'onde pour la particule centrale est 2 fois plus important que dans le cas d'une distribution uniforme pour de mêmes dimensions de faisceau.

5.4.3 Cas d'un faisceau groupé

Dans le cas d'un faisceau groupé, la distribution du faisceau dépend de la position de la particule dans l'espace longitudinal. Cependant, nous nous plaçons dans le cas d'un faisceau dont la dimension longitudinale est grande devant les dimensions transverses et dont les distributions longitudinale et transverse sont découplées. Le problème est traité comme un cas $2D\frac{1}{2}$: nous ne considérons que les composantes transverses du champ généré par la charge d'espace mais nous prenons en compte la distribution longitudinale en pondérant par la densité linéique de courant λ le long de la direction de propagation. En posant ρ_T la distribution transverse et en supposant que le faisceau est toujours à symétrie elliptique dans le plan transverse de densité non nulle au centre, la distribution du faisceau prend alors la forme :

$$\rho(x, y, l) = N_{\text{tot}}\lambda(l)\rho_T\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

En développant la distribution transverse sous la forme d'une série de Taylor-Lagrange

jusqu'à l'ordre 2, nous avons alors :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \rho_T(u) = \rho_0 + \rho_1 \cdot u + \mathcal{O}(2)$$

$$\text{où } \rho_0 = \rho_T(0) \neq 0, \rho_1 = \left. \frac{\partial \rho_T}{\partial u} \right|_0$$

En posant :

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{\frac{2a}{\pi \rho_0 b}} \\ b' &= \sqrt{\frac{2b}{\pi \rho_0 a}} \\ X &= \sqrt{\frac{-\rho_1}{\rho_0} \frac{a'b'}{ab}} x \\ Y &= \sqrt{\frac{-\rho_1}{\rho_0} \frac{a'b'}{ab}} y \end{aligned} \quad (5.16)$$

ρ_T s'écrit alors sous la forme :

$$\rho_T \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = \frac{2}{\pi a' b'} \left(1 - \frac{X^2}{a'^2} - \frac{Y^2}{b'^2} \right) + \mathcal{O}(4)$$

nous retrouvons alors l'expression d'une distribution parabolique et nous pouvons alors appliquer l'Eq. (5.15) en substituant a par a' , b par b' , U_x par $\frac{-\rho_1}{\rho_0} \frac{a'b'}{ab} U_x$ et U_y par $\frac{-\rho_1}{\rho_0} \frac{a'b'}{ab} U_y$. Pour de petites amplitudes autour de la particule centrale, le glissement du nombre d'onde est alors :

$$\begin{aligned} \Delta \nu_x &= \Delta \nu_{x1} + \Delta \nu_{x2} + \Delta \nu_{x3} \\ \Delta \nu_{x1} &= -\frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} r_0}{\beta^2 \gamma^3} \lambda(l) \oint \frac{\beta_x b \rho_0}{a+b} ds \\ \Delta \nu_{x2} &= -\frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} r_0 U_x}{4\beta^2 \gamma^3} \lambda(l) \oint \frac{\beta_x^2 (2a+b) b \rho_1}{a^2 (a+b)^2} ds \\ \Delta \nu_{x3} &= -\frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} r_0 U_y}{2\beta^2 \gamma^3} \lambda(l) \oint \frac{\beta_x \beta_y \rho_1}{(a+b)^2} ds \end{aligned} \quad (5.17)$$

Le glissement dans le plan vertical se déduit aisément de l'Eq. (5.18) en intervertissant x et y , a et b . En remarquant que du fait de la symétrie elliptique, $\frac{a}{b} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ avec $\sigma_{x,y} = \sqrt{\beta_{x,y} \epsilon_{x,y}}$ et en posant $g_x = 4\pi \rho_0 \sigma_x \sigma_y$, $g'_x = -g_x \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\sigma_x^2}{a^2}$, nous obtenons de l'équation Eq. (5.17) :

$$\begin{aligned} \Delta \nu_{x,y} &= \Delta \nu_{x1,y1} + \Delta \nu_{x2,y2} + \Delta \nu_{x3,y3} \\ \Delta \nu_{x1,y1} &= -\frac{r_0}{4\pi} \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}}{\beta^2 \gamma^3 \epsilon_{x,y}} \lambda(l) \oint \frac{g_{x,y}}{1 + \frac{\sqrt{\beta_{y,x} \epsilon_{y,x}}}{\sqrt{\beta_{x,y} \epsilon_{x,y}}}} ds \\ \Delta \nu_{x2,y2} &= \frac{r_0}{16\pi} \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} U_{x,y}}{\beta^2 \gamma^3 \epsilon_{x,y}^2} \lambda(l) \oint \frac{g'_{x,y} \left(2 + \frac{\sqrt{\beta_{y,x} \epsilon_{y,x}}}{\sqrt{\beta_{x,y} \epsilon_{x,y}}} \right)}{\left(1 + \frac{\sqrt{\beta_{y,x} \epsilon_{y,x}}}{\sqrt{\beta_{x,y} \epsilon_{x,y}}} \right)^2} ds \\ \Delta \nu_{x3,y3} &= \frac{r_0}{8\pi} \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} U_{y,x}}{\beta^2 \gamma^3 \epsilon_{x,y} \epsilon_{y,x}} \lambda(l) \oint \frac{g'_{x,y}}{2 + \frac{\sqrt{\beta_{x,y} \epsilon_{x,y}}}{\sqrt{\beta_{y,x} \epsilon_{y,x}}} + \frac{\sqrt{\beta_{y,x} \epsilon_{y,x}}}{\sqrt{\beta_{x,y} \epsilon_{x,y}}}} ds \end{aligned} \quad (5.18)$$

Le glissement maximum du nombre d'onde, dit de **Laslett**, est alors de la forme [95] :

$$\Delta\nu_{xL,yL} = -\frac{r_0}{4\pi} \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}}}{\beta^2 \gamma^3 \epsilon_{x,y}} \frac{G_{x,y}}{B_f} \frac{1}{2\pi R_0} \oint \frac{ds}{1 + \sqrt{\frac{\beta_{y,x} \epsilon_{y,x}}{\beta_{x,y} \epsilon_{x,y}}}} \quad (5.19)$$

où $G_{x,y}$ est un facteur de forme retranscrivant la distribution transverse du faisceau. Généralement, il est compris entre 1 (pour une distribution uniforme) et 2 (distribution gaussienne).

B_f est le facteur de bunching du faisceau. Il correspond au rapport $\frac{\bar{\lambda}}{\hat{\lambda}}$ avec $\bar{\lambda}$ la densité linéique moyenne soit $1/2\pi R_0$ et $\hat{\lambda}$ la densité linéique crête.

Ainsi, dans le cas d'une distribution gaussienne pour un faisceau groupé, la distribution du faisceau s'écrit alors :

$$\rho(x, y, l) = N_{\text{tot}} \lambda(l) \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

avec $a = \sqrt{2}\sigma_x$ et $b = \sqrt{2}\sigma_y$ et nous avons $g_{x,y} = 2$ et $g'_{x,y} = 1$.

Dans le cas d'une distribution parabolique dans la direction longitudinale, $\lambda(l)$ s'écrit alors pour un paquet de longueur totale L_f :

$$\begin{cases} \lambda(l) = \frac{3}{2L_f} \left(1 - \frac{4l^2}{L_f^2}\right) & \text{si } |2l| \leq L_f \\ = 0 & \text{si } |2l| \geq L_f \end{cases}$$

Nous avons alors $\hat{\lambda} = \frac{3}{2L_f}$ et donc $B_f = \frac{L_f}{3\pi R_0}$. Le glissement du nombre d'onde de la particule centrale du faisceau est alors d'après Eq. (5.19) :

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{xL} &= -\frac{3}{4} \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} r_0}{\pi L_f \beta^2 \gamma^3 \epsilon_x} \oint \frac{ds}{1 + \sqrt{\beta_y \epsilon_y / \beta_x \epsilon_x}} \\ \Delta\nu_{yL} &= -\frac{3}{4} \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} r_0}{\pi L_f \beta^2 \gamma^3 \epsilon_y} \oint \frac{ds}{1 + \sqrt{\beta_x \epsilon_x / \beta_y \epsilon_y}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Si l'on suppose que le faisceau est rond le long de la structure, de distribution transverse Gaussienne et de distribution parabolique dans la direction longitudinale alors le glissement maximal du nombre d'onde prend la forme :

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{xL} &= -\frac{3}{4} \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} r_0 R_0}{L_f \beta^2 \gamma^3 \epsilon_x} \\ \Delta\nu_{yL} &= -\frac{3}{4} \frac{Z^2}{A} \frac{N_{\text{tot}} r_0 R_0}{L_f \beta^2 \gamma^3 \epsilon_y} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Chapitre 6

OPTIQUE DE L'ANNEAU

Dans ce chapitre, nous donnerons une optique possible pour l'anneau de décroissance. Dans un premier temps, elle sera évaluée au premier ordre et les fonctions optiques en différents points clés de la structure seront données. Ensuite, la structure sera évaluée au second ordre en qualifiant la stabilité transverse du faisceau au moyen de l'ouverture dynamique. La dépendance des fonctions optiques avec l'énergie des ions sera également étudiée.

6.1 Optique de l'anneau de décroissance au premier ordre

La circonférence de l'anneau est égale à celle du SPS (6911 m) pour faciliter le synchronisme lors du transfert du faisceau. Les longues sections droites doivent être aussi longues que possibles pour maximiser le flux de neutrinos utiles pour la physique. Avec une longueur des sections droites fixée à environ 2500 m soit 35% de la circonférence, la longueur de chaque arc est alors d'environ 1000 m, ce qui permet de garder des champs magnétiques raisonnables. La périodicité de l'anneau devrait être de 2. Cependant, la section droite ne pointant pas vers le détecteur a été modifiée afin d'y introduire une section de collimation en moment du faisceau, ce qui enlève toute périodicité. Nous pouvons alors distinguer 5 parties fonctionnelles dans l'anneau [96,97] :

- Une longue section droite pointant vers le détecteur
- Une section de collimation en moment dans la longue section droite ne pointant pas vers le détecteur
- Une maille régulière de type FODO dans les arcs
- Une section d'extraction des produits de décroissance issus des longues sections droites
- Une insertion dans l'arc afin de réaliser l'injection

Afin de garder une grande ouverture dynamique, les arcs sont symétriques et ont été réalisés comme des insertions 2π . Le point de fonctionnement de l'anneau peut alors être facilement déterminé par l'optique des sections droites. Le design de l'anneau a été réalisé pour le schéma de base à savoir l' ${}^6\text{He}^{2+}$ et le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ à $\gamma = 100$.

6.1.1 Optique de la section droite

La section droite est constituée de 14 mailles FODO. La longueur totale est de 2468 m. La distance entre 2 quadripôles successifs est d'environ 85 m. Le neutrino issu de la décroissance d'un ion radioactif est émis dans un cône d'angle $1/\gamma = 10$ mrad dans le référentiel du laboratoire avec γ le facteur relativiste donc l'écart type de la distribution angulaire du faisceau, donné par le produit de l'émittance $\epsilon_{x,y}$ par la fonction optique $\gamma_{x,y}$, doit être négligeable devant $1/\gamma = 10$ mrad. Avec l'optique présentée sur FIG. 6.1 et donnée en annexe (TAB. B.4), les valeurs maximales pour γ_x et γ_y sont alors respectivement $4.97 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ et $3.439 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ (TAB. 6.2). Dans le cas d'une émittance rms égale à $\epsilon_{x,y} = 0.22 \text{ mm.mrad}$, l'écart en angle à 3 écarts types d'un ion du faisceau par rapport à l'axe central est alors inférieur à 0.1 mrad. En l'absence de défauts, la fluctuation de l'angle d'émission du neutrino venant de l'optique de l'arc est donc petite devant l'angle du cône d'émission.

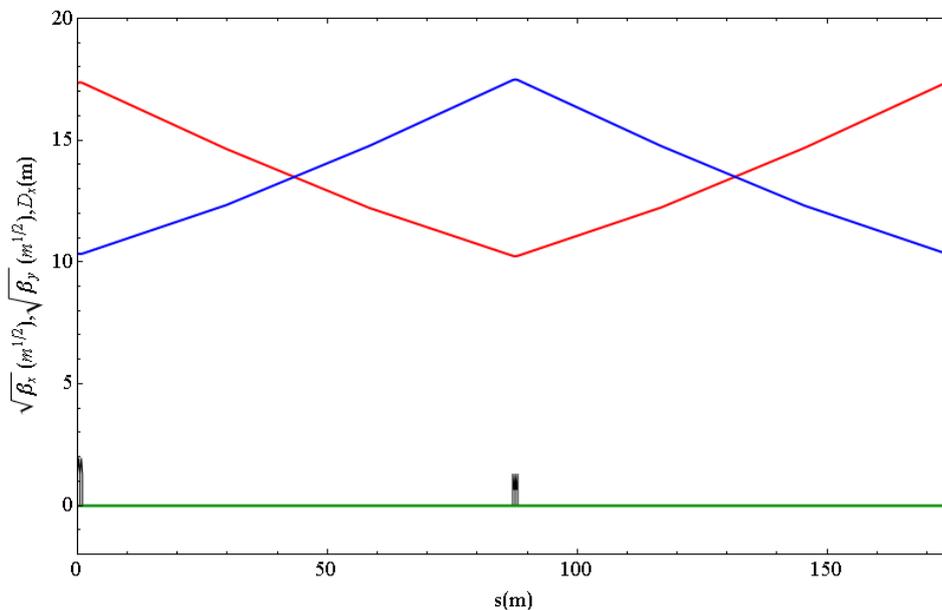


FIG. 6.1 – Fonctions optiques dans la section droite pointant vers le détecteur. En rouge, fonction bêtatron dans le plan horizontal, en bleu dans le plan vertical.

6.1.2 Mailles FODO de l'arc

En dehors de la section dédiée à l'injection, le transport du faisceau à l'intérieur des arcs se fait à l'aide de mailles FODO. Chaque arc comprend 10 périodes longues de 38.7 m chacune. Afin de limiter les ouvertures nécessaires pour les éléments magnétiques, la fonction dispersion et les fonctions optiques $\beta_{x,y}$ doivent être faibles. De plus, la longueur minimale de chaque arc est donnée par la longueur totale des dipôles soit $\pi\rho$ avec ρ leur rayon de courbure. Pour avoir des arcs compacts, on doit donc avoir un petit rayon de courbure dans les dipôles. Afin de minimiser les pertes dans les dipôles, deux types de dipôles sont envisagés. Dans le premier cas, on utilise des dipôles à large ouverture séparés entre eux par un absorbeur. Dans le second cas, un bloc d'arrêt est directement inséré dans la chambre du dipôle. Afin de permettre cette

insertion, les bobines des dipôles sont ouvertes dans le plan médian horizontal. Dans la suite, nous nous placerons dans le premier cas présenté en détail dans le Chapitre 7, sachant que les fonctions optiques restent quasiment inchangées entre les deux cas. Les paramètres des quadripôles et des dipôles des mailles FODO sont donnés dans les TAB. B.4 et TAB. B.1 et les fonctions optiques et enveloppes sont présentées sur les FIG. 6.2 et FIG. 6.3. La longueur totale de l'arc est alors de 994 m.

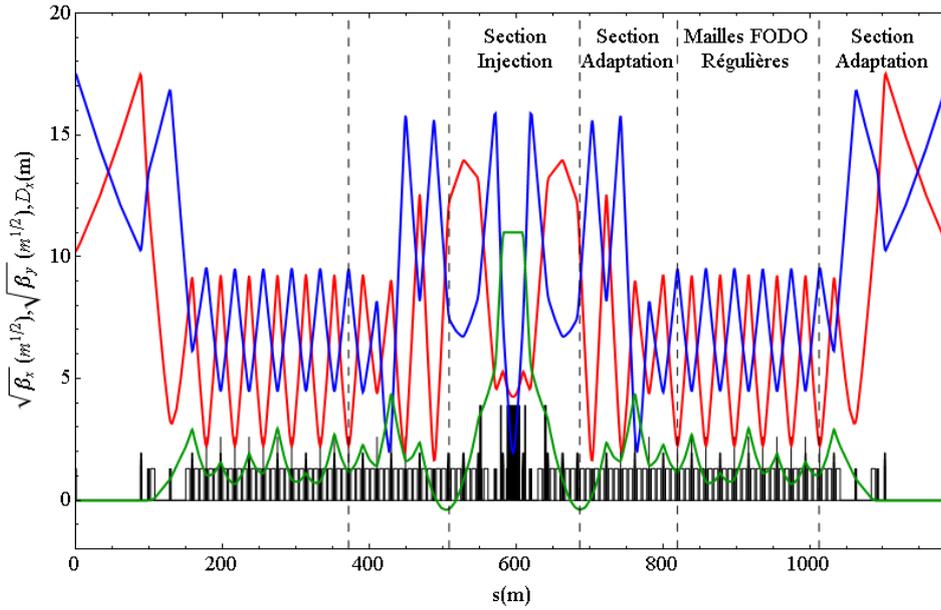


FIG. 6.2 – Fonctions optiques dans les arcs. En rouge, fonction bêatron dans le plan horizontal, en bleu dans le plan vertical et en vert dispersion horizontale.

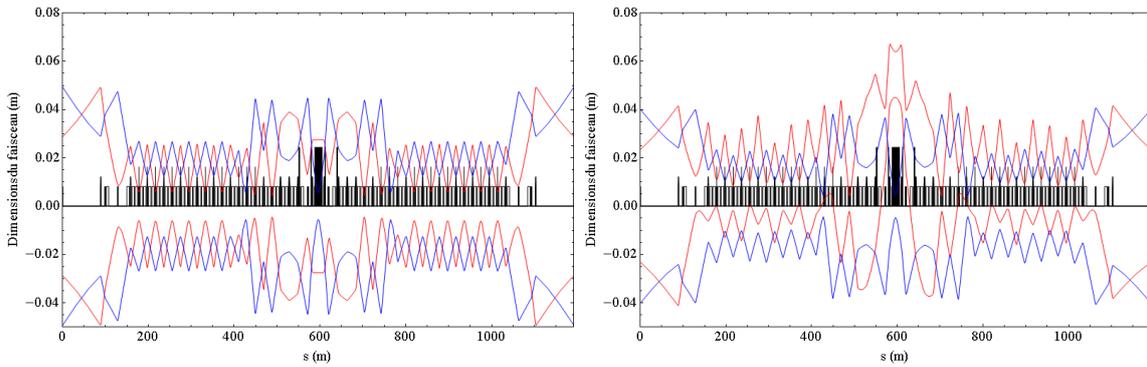


FIG. 6.3 – A gauche, enveloppes du faisceau stocké à 6σ dans les arcs. A droite, enveloppes du faisceau injecté à 5σ . En rouge, enveloppes dans le plan horizontal et en bleu dans le plan vertical.

6.1.3 Section d'extraction des produits de décroissance et d'adaptation

La différence relative de rigidité magnétique entre un ion et son produit de décroissance est $-1/3$ pour ${}^6\text{He}^{2+}$ (qui donne ${}^6\text{Li}^{3+}$) et $1/9$ pour ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ (qui donne ${}^{18}\text{F}^{9+}$). La focali-

sation dans les sections droites est faible. Aussi, où qu'ait lieu la décroissance d'un ion dans une des longues sections droites, son produit de décroissance sera transporté jusqu'au premier dipôle de l'arc pour être ensuite rapidement perdu. Environ 35% des décroissances qui ont lieu dans l'anneau se produisent dans une des longues sections droites. Par conséquent, la puissance moyenne perdue par décroissance à l'entrée de l'arc est estimée à environ 30 kW d'après TAB. 7.1. Les éléments d'entrée, supraconducteurs, ne peuvent soutenir un tel dépôt en continu. Pour éviter cela, la section d'entrée est réalisée spécialement pour permettre l'extraction des produits de décroissance ${}^6\text{Li}^{3+}$ et ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ issus des sections droites. La section débute avec un dipôle ayant pour fonction de séparer magnétiquement les produits de décroissance du faisceau de référence. Comme les produits de décroissance ne doivent pas heurter les parois du dipôle, l'ouverture de l'aimant fixe sa longueur maximale. Ensuite, une longue section droite suit le premier dipôle afin de permettre l'insertion éventuelle d'un aimant à septum d'extraction afin d'augmenter la séparation. En fin de section, les produits de décroissance peuvent alors être collectés à l'extérieur de l'anneau principal. Comme l'aimant à septum doit fonctionner en continu, son champ a été fixé à 0.6 T. Dans le cas de l' ${}^6\text{He}^{2+}$, la FIG. 6.4 montre qu'un aimant d'extraction n'est pas nécessaire, contrairement au ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. Mais la large déviation des produits de décroissance nécessitera une large ouverture du dipôle d'entrée et du quadripôle le suivant. Néanmoins, le champ dans cette région n'aura pas besoin d'être de bonne qualité. Les paramètres de la section d'extraction sont donnés dans le TAB. B.4. Les dipôles utilisés sont de la même famille que ceux de la maille régulière de l'arc.

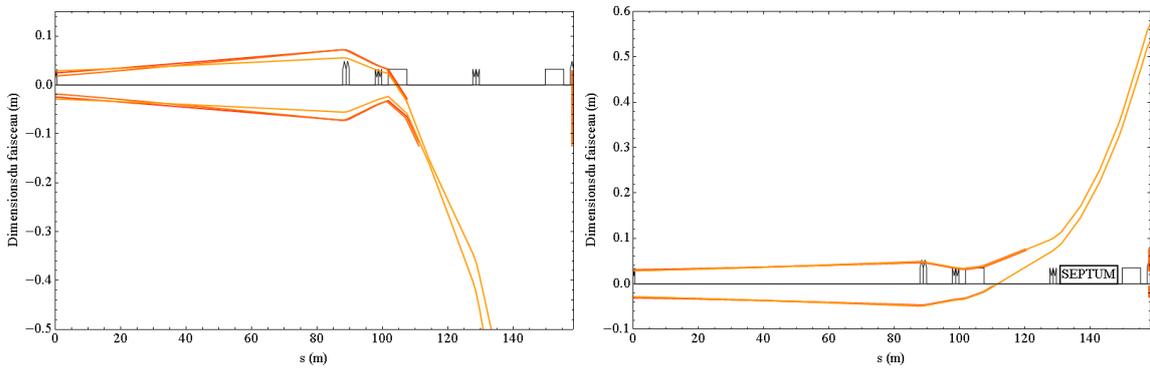


FIG. 6.4 – Extraction des produits issus de décroissance ${}^6\text{Li}^{3+}$ (à gauche) et ${}^{18}\text{F}^{9+}$ (à droite) à la sortie de la longue section droite. Un septum de 0.6 T a été utilisé pour l'extraction du Fluor.

6.1.4 Insertion à bas β et haute dispersion pour l'injection

L'injection est réalisée « off momentum » : l'énergie moyenne $E + \Delta E$ du faisceau injecté est différente de celle du faisceau stocké E [76]. Le principe de l'injection apparaît sur la FIG. 6.5.

L'injection est réalisée dans une région à haute dispersion horizontale D_x . Dans la suite, nous utiliserons les indices i et m respectivement pour les faisceaux injecté et stocké. Le faisceau injecté est supposé entrer adapté dans l'anneau. En l'absence de collimation, nous

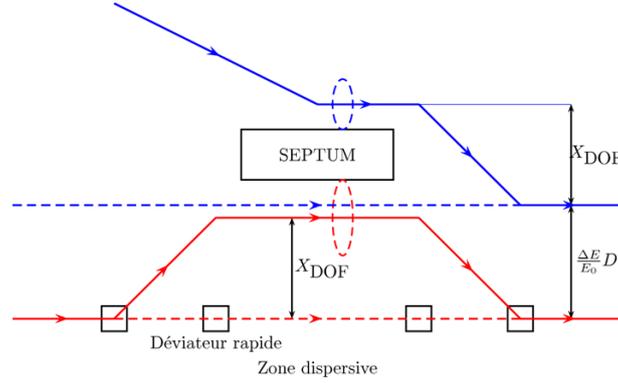


FIG. 6.5 – Principe de l'injection.

avons alors la relation suivante au point d'injection :

$$\Delta \cdot D_m(\Delta) = \sqrt{n_m^2 \beta_m \epsilon_{x,m} + (\delta_m \cdot D_m(0))^2} + e_S + \sqrt{n_i^2 \beta_i \epsilon_{x,i} + (\delta_i \cdot D_i)^2} \quad (6.1)$$

où : $\epsilon_{x,m}$ est l'émittance rms horizontale du faisceau stocké

$\epsilon_{x,i}$ l'émittance rms horizontale du faisceau injecté

Δ la différence relative en moment entre le faisceau injecté et celui stocké

β_m la fonction bêatron horizontale au point d'injection dans l'anneau

β_i la fonction bêatron horizontale au point d'injection dans la ligne d'injection

δ_m la dispersion en moment maximale du faisceau stocké

δ_i la dispersion en moment maximale du faisceau injecté

n_m le nombre d'écart types considérés pour le faisceau stocké

n_i le nombre d'écart types considérés pour le faisceau injecté

$D_m(\delta)$ la dispersion horizontale dans l'anneau à δ

D_i la dispersion horizontale dans la ligne d'injection ($D_i = D_m(\Delta)$) car le faisceau est adapté)

e_S l'épaisseur de la lame du septum en incluant les gardes

Afin de fixer le nombre d'écart types à préserver au niveau de la lame de l'aimant à septum, nous considérons le nombre d'ions déposés au moment de l'injection en l'absence de collimation. La puissance moyenne déposée entre deux injections par le faisceau stocké sur la lame du septum est alors donnée par [76] :

$$N_S (\gamma - 1) \frac{E_0}{T} \int_{-\infty}^{n_m \sigma_x} f(x) dx$$

où $f(x)$ est la distribution en x du faisceau

σ_x l'écart-type sur la distribution en x

N_S le nombre de particules stockées

γ le facteur de Lorentz pour le faisceau stocké

E_0 l'énergie au repos des ions

T le temps entre deux injections

Nous définissons de même le nombre d'ions perdus par le faisceau injecté. Nous obtenons alors la FIG. 6.6. Afin d'avoir une puissance déposée moyenne de moins de 1 W pour une distribution Gaussienne, il faut alors avoir $n_i > 4.5$ et $n_m > 5.1$ pour les valeurs données dans les TAB. 3.5 et TAB. 3.6. Par sécurité, n_i et n_m ont été fixés respectivement à 5 et 6.

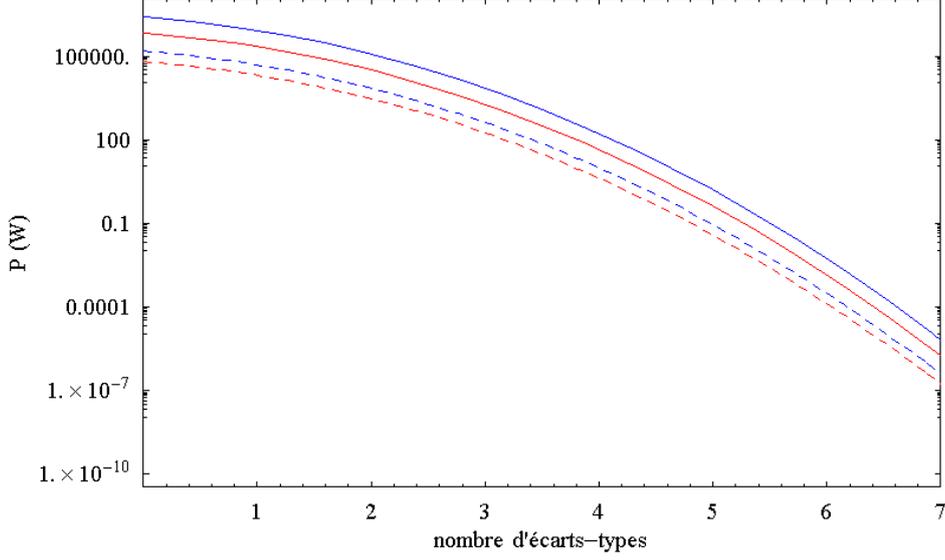


FIG. 6.6 – Puissance perdue sur la lame du septum pour une distribution Gaussienne par le faisceau stocké (en trait plein) et par le faisceau injecté (en pointillés) respectivement par l' ${}^6\text{He}^{2+}$ (en rouge) et par le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ (en bleu).

En présence d'une section de collimation en énergie pour la différence relative en moment δ_m , la distribution du faisceau stocké est modifiée (Chapitre 7) et l'Eq. (6.1) devient :

$$\Delta \cdot D_m(\Delta) = \delta_m \cdot D_m(0) + e_S + \sqrt{n_i^2 \beta_i \epsilon_{x,i} + (\delta_i \cdot D_i)^2} \quad (6.2)$$

La déformation de l'orbite fermée X_{DOF} réalisée par quatre déviateurs rapides doit être telle qu'une fois éteinte, le faisceau injecté passe en dessous de la lame du septum dont le champ magnétique a été fixé à 1 T. Nous avons alors la relation :

$$X_{\text{DOF}} = e_S + 2\sqrt{n_i^2 \beta_i \epsilon_{x,i} + (\delta_i \cdot D_i)^2} \quad (6.3)$$

Afin de minimiser la valeur de Δ nécessaire à l'injection, β_i doit être aussi faible que possible et D_i aussi grand que possible, ce qui définit les dimensions transverses de la section d'injection. Du fait de la symétrie de la section d'injection, nous avons $\alpha_x = \alpha_y = 0$ au centre de la section d'injection. Il est donc nécessaire de focaliser à la fois dans le plan horizontal et vertical, ce qui est réalisé à l'aide d'un doublet de quadripôles. L'aimant à septum doit dévier suffisamment le faisceau injecté avant son entrée dans l'anneau. Une représentation schématique de la déviation de la trajectoire est donnée en FIG. 6.7. Les distances H et h représentent respectivement la différence d'orbite fermée au niveau du quadripôle précédant la section d'injection (IQP5) et celle à l'entrée du septum d'injection. L'aimant à septum est supposé de longueur $2L$ et à une distance l de IQP5. L'angle d'entrée dans l'aimant à septum

est supposé égal à θ_S . Le champ, supposé constant, dans le septum est pris égal à B_S . Par définition, nous avons :

$$\theta_S = \frac{1}{B\rho} \int_{\text{Septum}} B_S ds = \frac{2L}{\rho_S}$$

En supposant $\theta_S \ll 1$ et en traitant le septum comme un dipôle de rayon de courbure $\rho_S = \frac{B\rho}{B_S}$, nous obtenons alors les relations :

$$\begin{aligned} h &= \rho_S (1 - \cos \theta_S) \approx \rho \frac{\theta_S^2}{2} \\ &\approx \frac{2L^2}{\rho_S} \\ H &= h + \theta_S l \\ &\approx \frac{2L}{\rho_S} (L + l) \end{aligned}$$

Le champ magnétique maximal que le septum pourra délivrer est supposé égal à 1 T. Il est pris plus grand que pour le septum d'extraction. En effet, alors que le septum d'extraction doit fonctionner en continu, le septum d'injection ne doit délivrer ce champ que toutes les 6 s pour ${}^{16}\text{He}^{2+}$ et toutes les 3.6 s pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$, ce qui donne une puissance moyenne plus faible et donc autorise des champs plus forts. En supposant un décalage entre l'axe central du faisceau entrant au moment de l'injection et l'axe de la machine d'environ 10 cm, en estimant que l'encombrement horizontal extérieur du quadripôle IQP5 est inférieur à 30 cm et en prenant une taille du faisceau de quelques centimètres, H doit être égal à environ 20-25 mm. Une solution possible pour L et l est de prendre un septum de 18 m de long inséré dans une section droite de 25 m.

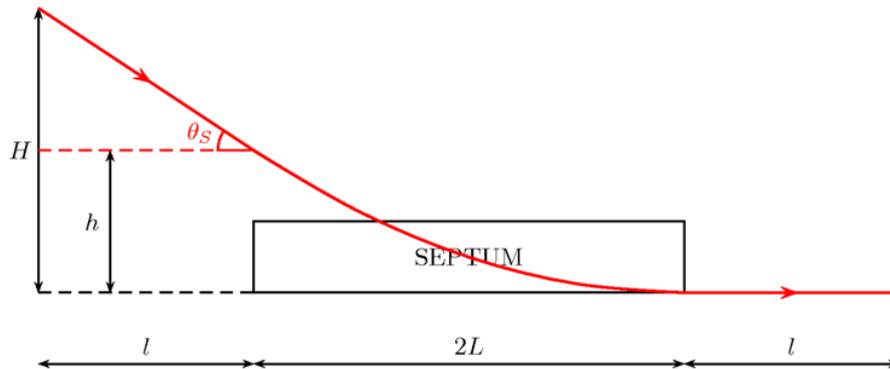


FIG. 6.7 – Déviation de l'orbite fermée du fait du septum.

Une optique possible de la section d'injection est donnée en FIG. 6.8 et en FIG. 6.9. Les paramètres des quadripôles de la section d'injection sont donnés dans le TAB. B.4. Le TAB. 6.1 résume les valeurs des fonctions optiques dans la section d'injection et donne les contraintes sur la différence en énergie entre les deux faisceaux et la déformation d'orbite fermée d'après Eq. (6.2) et Eq. (6.3). La position des déviateurs rapides a été choisie afin de minimiser leurs forces données en TAB. B.2. Le premier bénéficie de l'effet défocalisant du quadripôle le suivant. Le second déviateur est plus faible grâce à l'effet focalisant du quadripôle qui le suit. La dispersion au point d'injection est d'environ 11 m tandis que β_x est d'environ 23 m.

TAB. 6.1 – Paramètres de l'optique au point d'injection.

	Unités	Faisceau stocké	Faisceau injecté
β	m	23	23
D_m	m	11	11
δ	10^{-3}	2.5	0.4
ϵ_x	mm.mrad	0.22	0.22
n	-	6	5
e_S	mm	15	
Δ	10^{-3}	5	
X_{DOF}	mm	41.13	

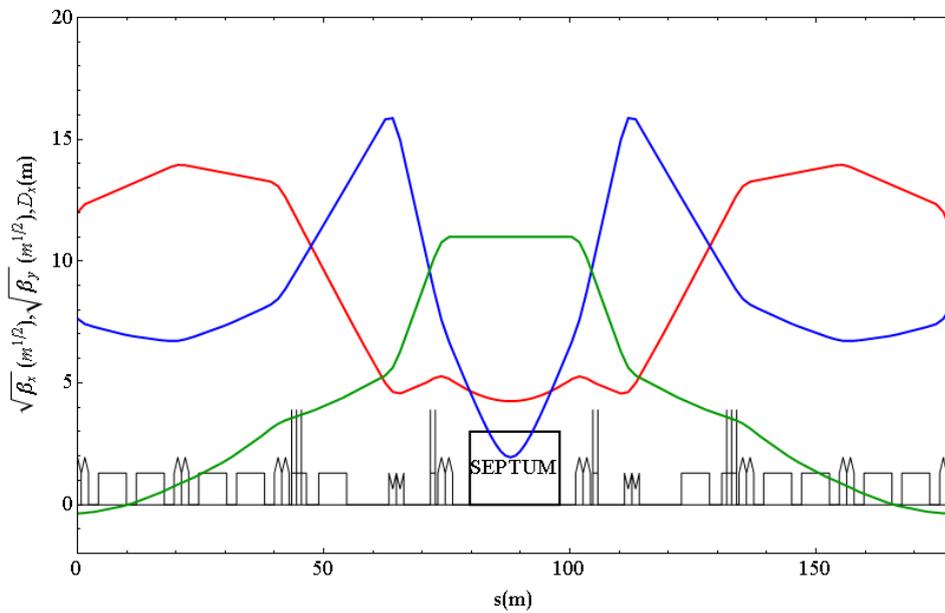


FIG. 6.8 – Fonctions optiques dans la section d'injection. En rouge, fonction bêta-tron dans le plan horizontal, en bleu dans le plan vertical et en vert dispersion horizontale.

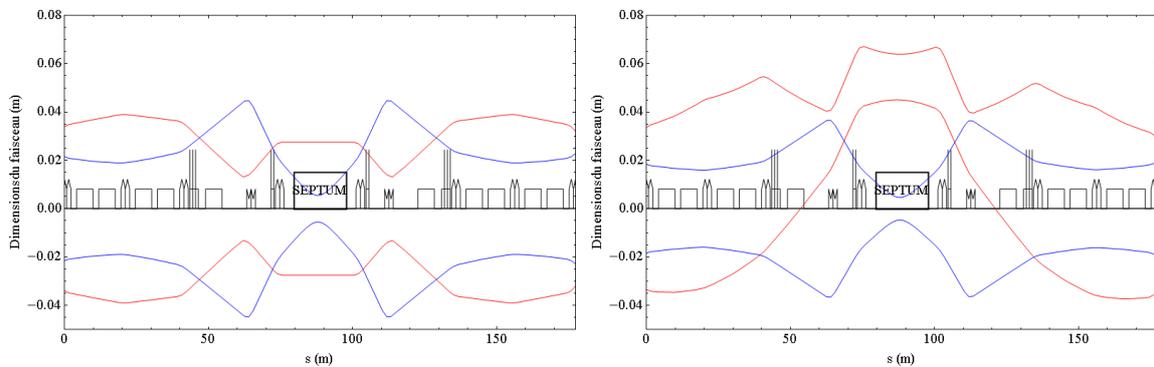


FIG. 6.9 – A gauche, enveloppes du faisceau stocké à 6σ dans la section d'injection. A droite, enveloppes du faisceau injecté à 5σ . En rouge, enveloppes dans le plan horizontal et en bleu dans le plan vertical.

6.1.5 Section de collimation en énergie

Le TAB. 7.2 donne les avances de phase optimales entre les collimateurs dans le cas d'une collimation en moment. Quel que soit le rapport entre l'ouverture normalisée au collimateur primaire et celle au collimateur secondaire, il est nécessaire d'avoir une différence de phase entre l'un des quatre collimateurs secondaires et le primaire de π dans le plan horizontal et $\pi/2$ dans le plan vertical. L'optique dans la section de collimation a donc été réalisée dans le Chapitre 7 afin d'avoir cette condition. les avances de phase par maille FODO sont alors respectivement $\pi/3$ et $\pi/6$. De plus, la dispersion normalisée au collimateur primaire a été optimisée afin d'avoir $\frac{D_x}{\sqrt{\beta_x}} \approx -1 \text{ m}^{1/2}$. Les dipôles utilisés sont chauds avec un rayon de courbure de 600 m et un angle de 20 mrad. Finalement, nous obtenons les fonctions optiques illustrées en FIG. 6.10 et les tailles faisceau en FIG. 6.11.

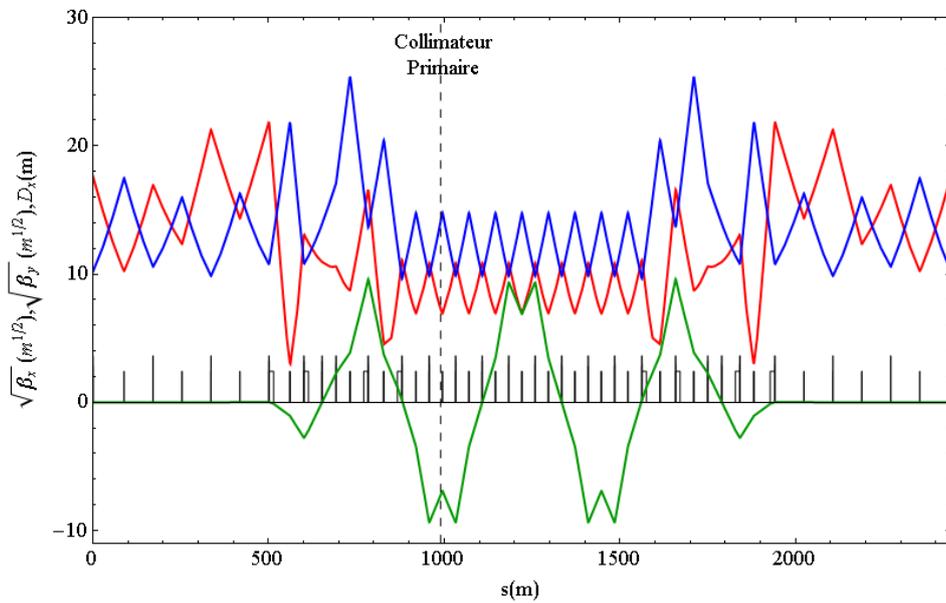


FIG. 6.10 – Fonctions optiques dans la section de collimation. En rouge, fonction bêatron dans le plan horizontal, en bleu dans le plan vertical et en vert dispersion horizontale.

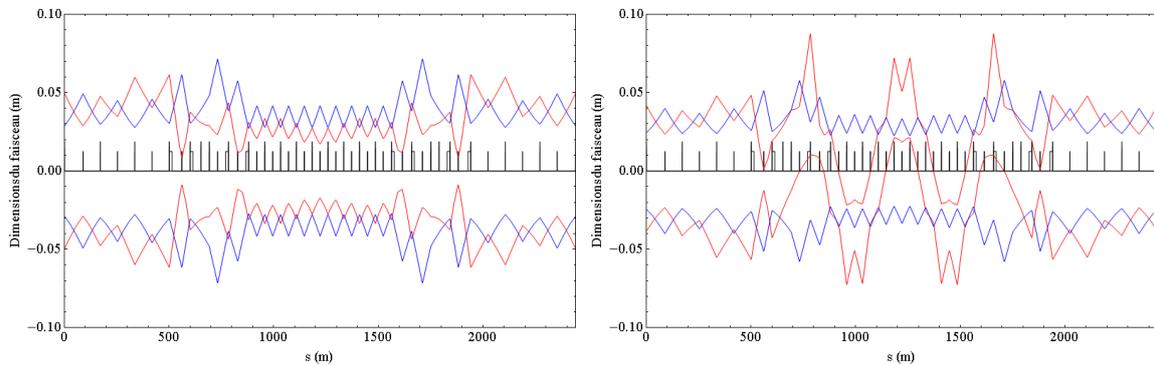


FIG. 6.11 – A gauche, enveloppes du faisceau stocké à 6σ dans la section de collimation. A droite, enveloppes du faisceau injecté à 5σ . En rouge, enveloppes dans le plan horizontal et en bleu dans le plan vertical.

TAB. 6.2 – Extrema des fonctions optiques pour différentes parties fonctionnelles de l'anneau.

	Unités	Arcs	Section droite	Section collimation
$\beta_{x,\min}$	m	2.64	104.3	9.09
$\beta_{x,\max}$	m	201.2	305.4	476.5
$\beta_{y,\min}$	m	3.81	105.7	93.39
$\beta_{y,\max}$	m	290.8	307.00	646.5
$D_{x,\min}$	m	-0.24	-0.042	-9.36
$D_{x,\max}$	m	10.98	0.042	9.63

TAB. 6.3 – Propriétés optiques de la maille de référence.

ξ_x	-1.667
ξ_y	-2.347
ν_x	22.225
ν_y	12.162
α	1.376×10^{-3}

6.2 Optimisation de l'ouverture dynamique

Les chromaticités naturelles ξ_x et ξ_y sont données dans le TAB. 6.3 et valent respectivement -1.67 et -2.35. Avec les valeurs de nombre d'onde $\nu_x \approx 22$ et $\nu_y \approx 12$, le glissement du nombre d'onde vaut alors -0.18 et -0.14 à $\delta = 5 \times 10^{-3}$. L'acceptance en moment de l'anneau serait alors trop faible, ce qui rend la correction de la chromaticité nécessaire. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 5, l'introduction d'hexapôles dans la structure induit des perturbations de l'équation de Hill et par la même réduit la zone de stabilité dans l'espace transverse. Aussi, la correction de la chromaticité va s'accompagner d'une optimisation de l'ouverture dynamique. Nous introduirons 2 méthodes qui ont été utilisées afin d'élargir la zone de stabilité et de minimiser le gonflement du faisceau (du fait des perturbations, les isohamiltoniennes ne sont plus des ellipsoïdes dans l'espace transverse). La première méthode consiste à minimiser les coefficients de Fourier du Hamiltonien perturbé pour les résonances du troisième ordre voisines du point de fonctionnement [98] tandis que la seconde consiste à corriger par étape successive la chromaticité en choisissant le couple d'hexapôles qui réduit le moins possible l'ouverture dynamique.

6.2.1 Correction des résonances hexapolaires

L'Eq. (5.6) donne l'expression des coefficients de Fourier du Hamiltonien perturbé. Ils ne dépendent que de la structure de la maille et des paramètres du premier ordre. Il est possible de minimiser ces coefficients tout en corrigeant la chromaticité. Seules certaines résonances du troisième ordre sont considérées alors que la combinaison d'hexapôles entre eux excite un grand nombre de résonances d'ordre supérieur. Aussi, cette méthode est souvent complétée en considérant les dérivées du nombre d'onde avec l'amplitude afin d'améliorer la stabilité. Un autre inconvénient est qu'elle est semi-empirique et donc dépendante de la structure puisqu'il faut déterminer les résonances à amenuiser avec leurs poids respectifs ainsi que les valeurs

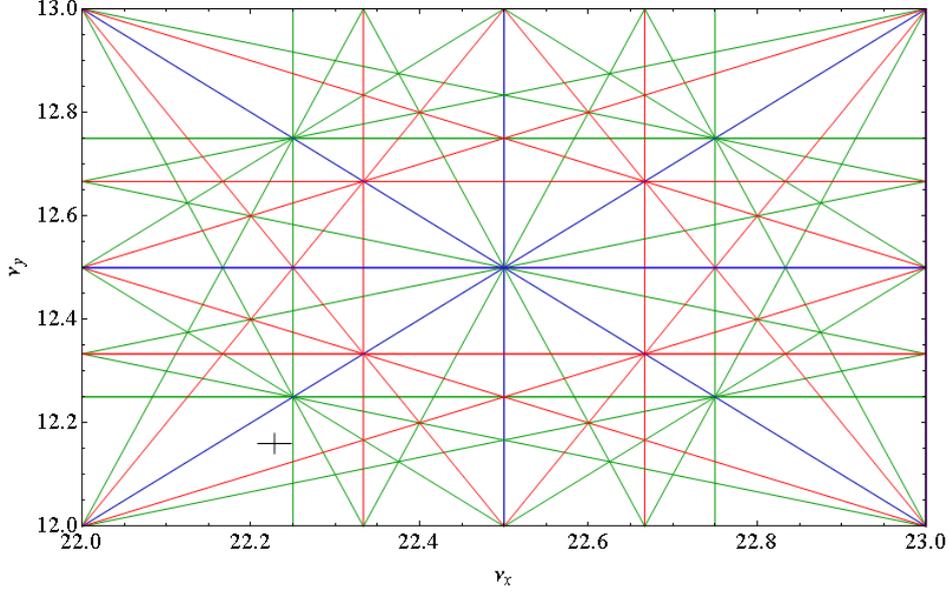


FIG. 6.12 – Point de fonctionnement. En bleu, résonances du 2nd ordre, en rouge du 3^e ordre et en vert du 4^e ordre. Le point de fonctionnement est en noir.

les plus appropriées pour les dérivées à l'origine du nombre d'onde. Une dérivée première nulle à l'origine n'est souvent pas la meilleure solution car elle ne prédit pas le comportement du nombre d'onde pour de grandes valeurs de l'invariant de Courant et Snyder. Or, c'est justement les ions hors axe soumis aux dérivées d'ordres plus élevés qui délimitent l'ouverture dynamique.

Dans notre cas, avec le point de fonctionnement $\nu_x = 22.225$ et $\nu_y = 12.162$, les résonances de troisième ordre les plus excitées sont les résonances $\nu_x = 22$, $3\nu_x = 66$, $\nu_x + 2\nu_y = 46$ et $\nu_x - 2\nu_y = -2$ [98]. Du fait du choix du point de fonctionnement (FIG. 6.12), les résonances les plus excitées sont la « stop-band » $3\nu_x = 66$ et la résonance de couplage $\nu_x - 2\nu_y = -2$. La résonance destructive $\nu_x + 2\nu_y = 46$ est moins excitée. Six familles d'hexapôles réparties dans les mailles FODO de l'arc et la section d'adaptation à la section d'injection ont servi à la correction de la chromaticité et à diminuer les résonances du troisième ordre. Les forces de ces hexapôles sont données dans le TAB. B.3. Nous obtenons alors l'ouverture dynamique donnée en FIG. 6.13. Afin d'illustrer la perturbation du transport des ions liée aux résonances hexapolaires dans la machine, nous avons considéré le cas où la chromaticité est corrigée avec seulement 2 familles d'hexapôles et le cas optimisé avec six familles. Nous avons alors transporté un ion du faisceau stocké (FIG. 6.14). Avant correction, il apparaît clairement que les plans horizontaux et verticaux sont fortement corrélés. Après correction, la surface décrite est beaucoup plus proche d'une ellipsoïde, la corrélation entre les deux plans est moins importante. De plus, l'excursion horizontale ou verticale maximale des ions est plus petite.

Afin de vérifier que la décorrélation des deux plans est toujours vérifiée à une autre énergie, nous avons transporté un ion à l'énergie du faisceau injecté avec la même amplitude transverse (FIG. 6.15). L'ensemble des positions successives prises par l'ion reste toujours assimilable à une ellipsoïde, bien que déformée. Ainsi, l'ajout d'hexapôles dans la structure a permis de corriger la chromaticité tout en préservant la forme du faisceau dans l'espace de phase transverse.

Néanmoins, la méthode utilisée est difficile d'emploi pour l'étude des défauts multipolaires d'ordre plus élevés (octupôles, décapôles).

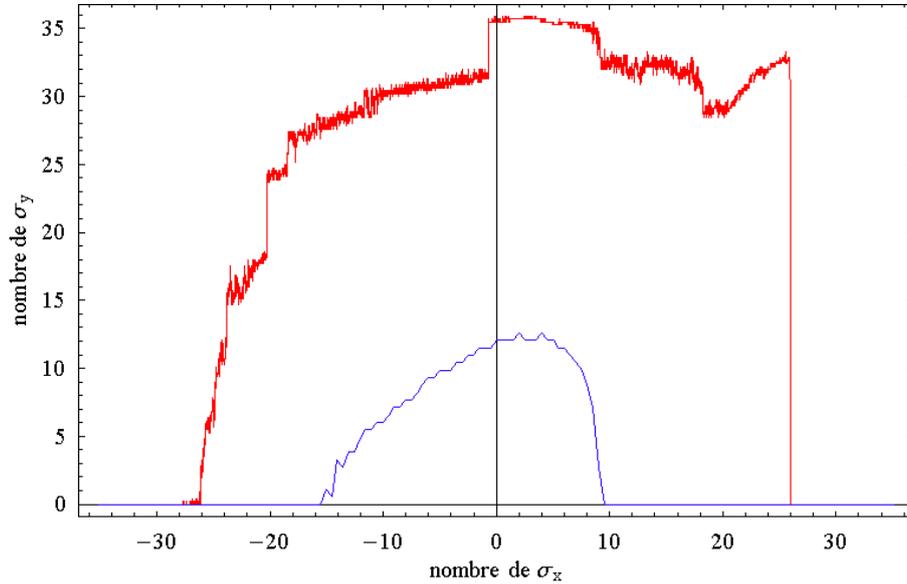


FIG. 6.13 – Ouverture dynamique pour 1000 tours au centre de la section d'injection. En bleu, avec 2 familles d'hexapôles, en rouge avec 6 familles.

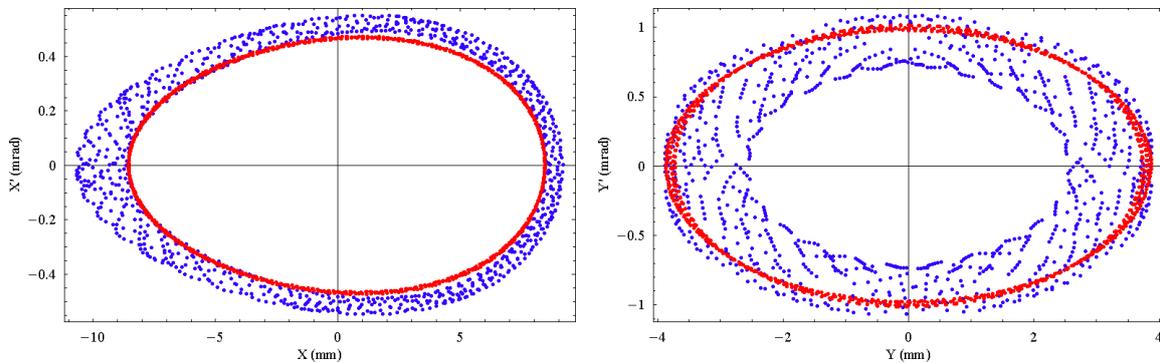


FIG. 6.14 – Représentation dans le plan horizontal (à gauche) et vertical (à droite) des positions successives prises par une particule au centre de la section d'injection. A l'instant initial, sa position est $(3\sqrt{2\beta_x\epsilon_x}, 3\sqrt{2\beta_y\epsilon_y})$ sans composante angulaire. En bleu, dans le cas d'une correction seulement de la chromaticité et en rouge avec correction des résonances.

6.2.2 Procédure automatique de correction de l'ouverture dynamique

Une autre procédure a été récemment développée en [99]. L'algorithme est donné sur la FIG. 6.19. Il consiste à corriger progressivement l'ouverture dynamique avec des hexapôles situés en zone dispersive. On considère l'ensemble des couples d'hexapôles et on sélectionne, pour une même correction partielle de la chromaticité, le couple donnant la meilleure ouverture dynamique. L'algorithme nécessite le choix des familles d'hexapôles à faire varier ainsi que le

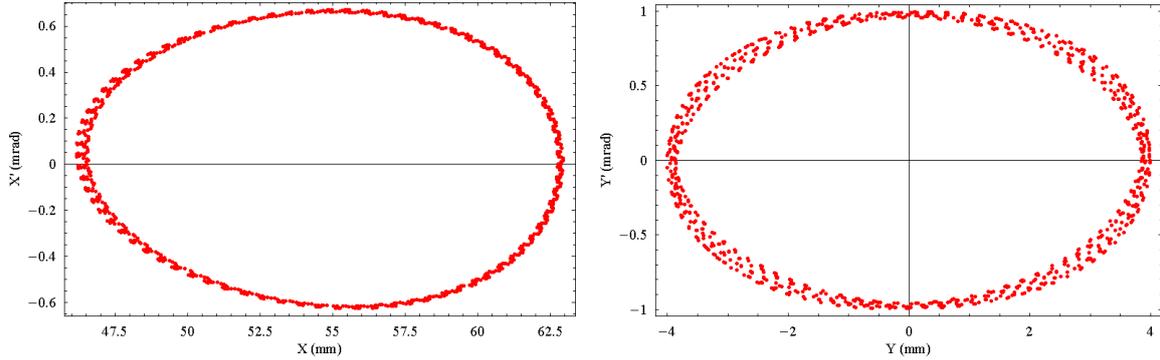


FIG. 6.15 – Représentation dans le plan horizontal (à gauche) et vertical (à droite) des positions successives prises par une particule à $\delta = 5\%$ au centre de la section d'injection. A l'instant initial, sa position est $(3\sqrt{2\beta_x\epsilon_x}, 3\sqrt{2\beta_y\epsilon_y})$ sans composante angulaire.

nombre de pas à effectuer. Pour une itération i donnée, la chromaticité va être partiellement corrigée en faisant varier un seul couple d'hexapôles. Le couple qui sera conservé est celui qui donnera la plus large ouverture dynamique, qui peut être évaluée de diverses façons par exemple, le rayon intérieur ou l'aire de l'ouverture dynamique dans l'espace des phases normalisé. Ensuite, la structure est modifiée afin d'utiliser les nouvelles valeurs des forces des hexapôles de ce couple. A la fin des itérations, la chromaticité aura été corrigée et l'ouverture dynamique élargie. Cet algorithme a l'avantage d'être complètement automatisé.

Par contre, seuls les hexapôles situés dans une région dispersive sont utilisés par cette procédure, ce qui est une première limitation. Un second inconvénient est qu'elle ne tient pas compte du comportement des fonctions optiques et donc de l'ouverture dynamique en fonction de la quantité de mouvement des particules (FIG. 6.16, FIG. 6.17 et FIG. 6.18). Ainsi, nous pouvons avoir une large ouverture dynamique à l'énergie nominale, qui se réduit fortement lorsque l'on s'en écarte. Toutefois, une solution serait de la calculer pour différentes valeurs de l'énergie et d'élargir la moyenne pondérée. Ce qui est plus gênant est que l'ouverture dynamique ne retranscrit pas le comportement général du faisceau. Par exemple, dans le cas de résonances de couplage du type $\nu_x - 2\nu_y = p$, il s'agit du transfert de la quantité de mouvement transverse d'un plan vers un autre. Ainsi, si cette résonance est fortement excitée, les particules restent néanmoins sur une trajectoire stable, ce qui ne réduit pas l'ouverture dynamique. Par contre, la trajectoire elliptique est fortement perturbée et l'émittance apparente du faisceau semble avoir augmenté. La FIG. 6.14 illustre bien cette problématique : dans le cas où cette résonance n'est pas corrigée, les particules ne décrivent plus des trajectoires elliptiques et les plans verticaux et horizontaux ne sont plus décorrélés.

Dans le cas nominal, l'ouverture dynamique obtenue est similaire à celle obtenue en compensant les résonances de troisième ordre avec des forces équivalentes pour les hexapôles. Dans ce cas, il n'y a pas de gain notable. Malgré tout, l'automatisation de cette méthode permet une optimisation de l'ouverture dynamique en présence de défauts multipolaires dans la structure. Cet aspect est développé dans la section suivante où l'ouverture dynamique de l'anneau a été évaluée pour différents jeux de défauts dans les dipôles.

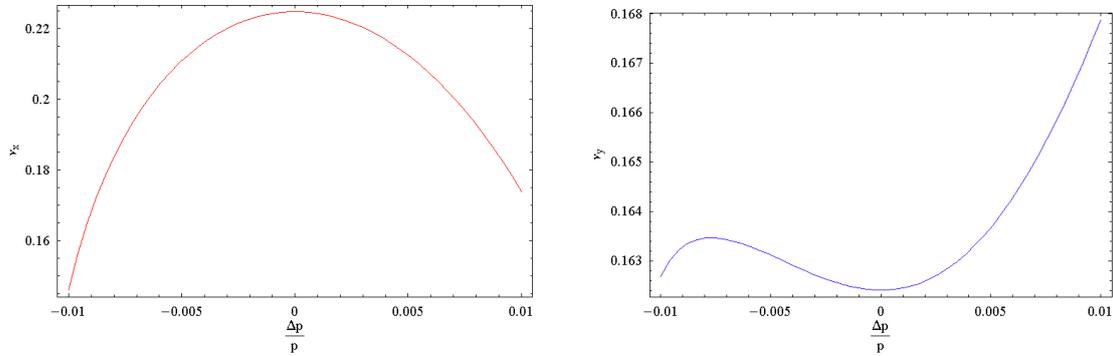


FIG. 6.16 – Variations de la partie fractionnaire du nombre d’onde en fonction de la quantité de mouvement de la particule. A gauche, dans le plan horizontal et à droite dans le plan vertical.

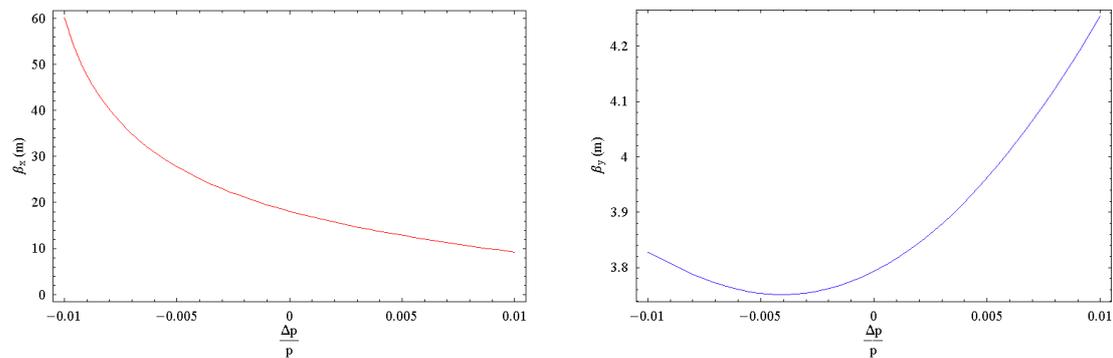


FIG. 6.17 – Variations de la fonction bêatron β au centre de la section d’injection en fonction de la quantité de mouvement de la particule. A gauche, dans le plan horizontal et à droite dans le plan vertical.

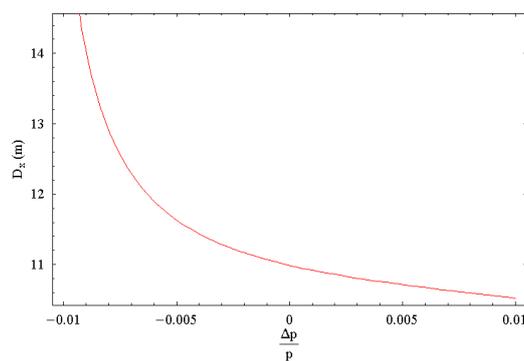


FIG. 6.18 – Variations de la dispersion horizontale en fonction de la quantité de mouvement de la particule.

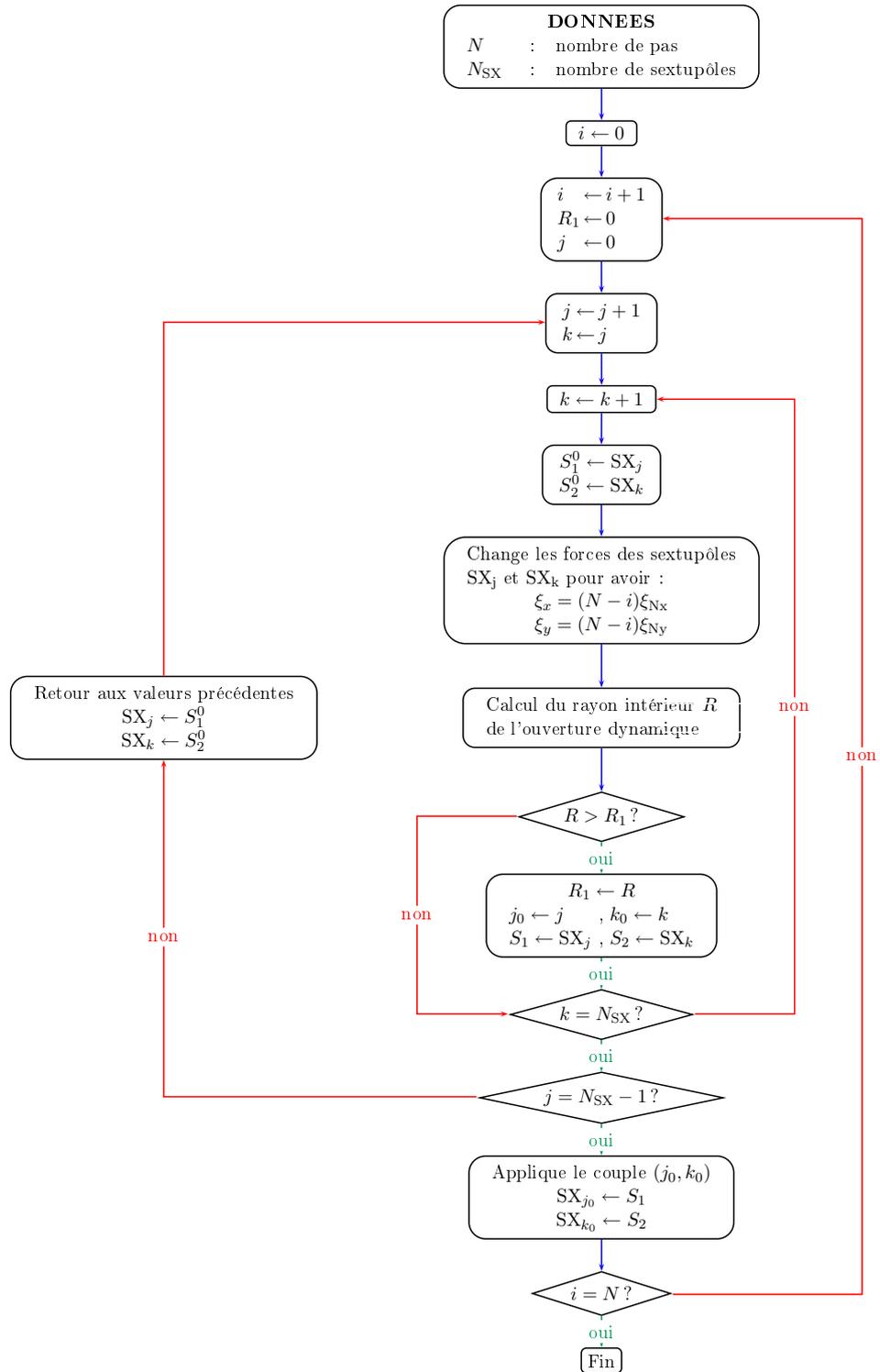


FIG. 6.19 – Principe de l'optimisation de l'ouverture dynamique.

6.3 Défauts liés aux éléments magnétiques

Jusqu'à présent, la machine a été supposée parfaite avec des champs idéaux dans les éléments magnétiques. Cependant, pour une machine réelle, l'axe magnétique des différents éléments peut être déplacé par rapport à l'axe de la machine. Ce problème a été évoqué dans le Chapitre 5. Ainsi, une erreur d'alignement transverse d'un hexapôle génère des défauts quadripolaires et dipolaires. Une autre source d'erreur provient des fluctuations de l'alimentation, générant des champs magnétiques différents des champs nominaux. Dans la première partie, nous traiterons le cas des erreurs d'alignement ou l'orientation des éléments magnétiques et leur correction. Ensuite, nous envisagerons le cas des défauts multipolaires des dipôles. Nous essaierons alors de voir leur influence sur l'ouverture dynamique et essaierons de la compenser. Ceci nous permettra alors de définir les valeurs des défauts tolérables dans la machine et aura un impact sur les tolérances de fabrication des différents éléments magnétiques et donc sur leur coût de fabrication.

6.3.1 Correction des défauts dipolaires et quadripolaires

Les éléments utilisés dans l'anneau de décroissance sont supraconducteurs et à large ouverture. Pour l'instant, une évaluation précise des erreurs de positionnement des éléments magnétiques utilisés dans l'anneau de décroissance n'a pas encore été faite. Cependant, afin d'avoir une première estimation des tolérances sur les défauts d'alignement ou sur la composante principale de champ des dipôles et quadripôles dans la structure, nous avons considéré les erreurs d'alignement définies pour le LHC [100] ou pour RHIC [101, 102]. Les valeurs utilisées sont résumées dans le TAB. 6.4. Nous utiliserons ce jeu de paramètres comme base pour le calcul des erreurs dans l'anneau de décroissance. Dans le cas où l'erreur sur l'orbite fermée est suffisamment faible, il sera alors possible de relâcher les tolérances sur les éléments magnétiques pour l'anneau.

TAB. 6.4 – Défauts de positionnement ou de champ des éléments magnétiques de l'anneau. Les valeurs sont données à 1σ .

Type de défaut	Unités	valeur rms
DIPOLES		
$\frac{\Delta B}{B}$	10^{-3}	0.5
Erreur d'alignement horizontal	mm	0.5
Erreur d'alignement vertical	mm	0.5
Erreur de rotation / axe s	mrad	1
QUADRIPÔLES		
$\frac{\Delta G}{G}$	10^{-3}	1
Erreur d'alignement horizontal	mm	0.4
Erreur d'alignement vertical	mm	0.4

Après application de ces erreurs, l'écart type de l'orbite fermée en l'absence de correcteurs est donnée sur la FIG. 6.20. L'amplitude de l'orbite fermée peut atteindre plusieurs centimètres. L'introduction de correcteurs dans la structure est donc nécessaire. D'après [100], une erreur quadratique moyenne sur l'orbite fermée de l'ordre de 0.4 mm dans l'arc serait acceptable. Nous utiliserons cette valeur comme limite à ne pas dépasser. Un premier système de

correction a été effectuée en introduisant des moniteurs de position et des correcteurs respectivement avant et après chaque quadripôle de la structure. La correction horizontale/verticale se fera au niveau des quadripôles focalisants/défocalisants. L'algorithme de correction des défauts dipolaires a été développé au Chapitre 5. Après correction, l'écart type de l'orbite fermée résiduelle est donnée en FIG. 6.21. Dans cette hypothèse, 87/89 BPM et 83/85 correcteurs sont nécessaires pour le plan horizontal/vertical. L'écart type maximal de la force est respectivement de 0.042 mrad pour les correcteurs horizontaux et de 0.064 mrad pour les correcteurs verticaux. L'orbite fermée est supposée être corrigée jusqu'à 3 écarts types. Le champ magnétique intégré dans les correcteurs de l'arc est donc prévu être respectivement égal à 0.118 T.m et 0.180 T.m pour les plans horizontaux et verticaux. L'écart type sur l'orbite fermée est alors inférieur à 0.4 mm sur toute la structure.

Pour obtenir un gain de place dans l'anneau, une autre configuration a été étudiée en enlevant un correcteur sur deux dans la structure (FIG. 6.21). L'écart type sur l'orbite fermée atteint plusieurs millimètres, ce qui n'est plus acceptable. Pour ramener l'écart type sur l'orbite résiduelle en dessous de 0.4 mm, il faudrait réduire les tolérances sur les défauts.

Pour conclure, en plaçant un correcteur et un BPM au niveau de chaque quadripôle, il est possible de corriger efficacement l'orbite fermée. Nous pouvons remarquer que nous vérifions bien alors $\sigma'_{OF} \ll \frac{1}{\gamma}$. Après correction, la fluctuation de l'angle d'émission du neutrino venant des défauts dipolaires est donc petite devant l'angle du cône d'émission.

6.3.2 Compensation des défauts multipolaires dans les dipôles

Dans la partie précédente, nous n'avons traité que la partie linéaire du problème et n'avons pas tenu compte des erreurs de champ dans les éléments magnétiques générateurs d'ordres multipolaires élevés. Dans la suite, nous allons nous intéresser brièvement à l'influence des défauts multipolaires dans les dipôles sur les propriétés optiques de l'anneau. L'ouverture dynamique donnée en FIG. 6.13 est dans le cas de dipôles parfaits. Cependant, pour des éléments physiques réels, deux sortes de défauts multipolaires sont présents : les systématiques et les aléatoires. Les premiers viennent de la conception même de l'aimant et peuvent être évalués précisément à l'aide de codes de calcul. Ils correspondent à la moyenne de chaque contribution multipolaire dans le dipôle. Les défauts aléatoires peuvent par exemple provenir d'erreurs lors de la fabrication des aimants et ne seront pas traités ici. Ainsi, ils correspondent à une fluctuation sur la composante multipolaire. Les défauts systématiques des dipôles pour les beta-beams sont donnés dans le TAB. 6.5. Ils proviennent de la conception du dipôle [103]. Du fait des axes de symétrie présents dans le dipôle, seuls les multipôles d'ordre impair sont naturellement présents. La présence de défauts multipolaires dans les dipôles va réduire l'ouverture dynamique. Il faudra obtenir une ouverture dynamique suffisamment large pour accepter le faisceau stocké durant plusieurs minutes.

Afin d'évaluer l'influence des différents ordres multipolaires un à un, l'ouverture dynamique a été calculée (FIG. 6.22) pour la structure de référence, sans optimisation et en considérant les défauts multipolaires isolément [104]. La plus forte réduction provient des défauts multipolaires d'ordre 5 et 7. L'impact des défauts multipolaires a été évalué pour d'autres points de fonctionnement ($(\nu_x = 22.22, \nu_y = 12.24)$ et $(\nu_x = 22.18, \nu_y = 12.16)$) qui ont été comparés au point de référence ($\nu_x = 22.228, \nu_y = 12.16$). Les différents points de fonctionnement sont représentés dans le diagramme du nombre d'onde sur la FIG. 6.23. Pour l'instant, l'ouverture

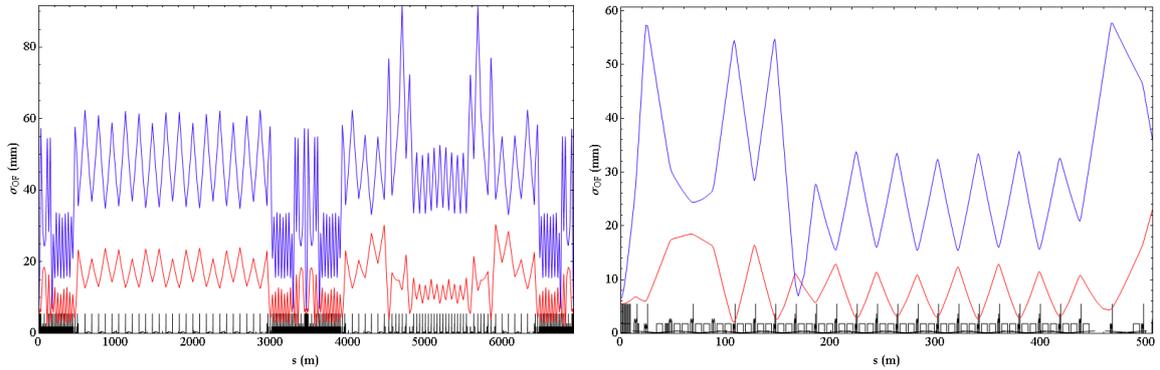


FIG. 6.20 – Erreur rms sur l'orbite fermée en l'absence de correcteurs dans l'anneau dans le plan horizontal (en rouge) et dans le plan vertical (en bleu) pour les erreurs sur les éléments magnétiques données en TAB. 6.4.

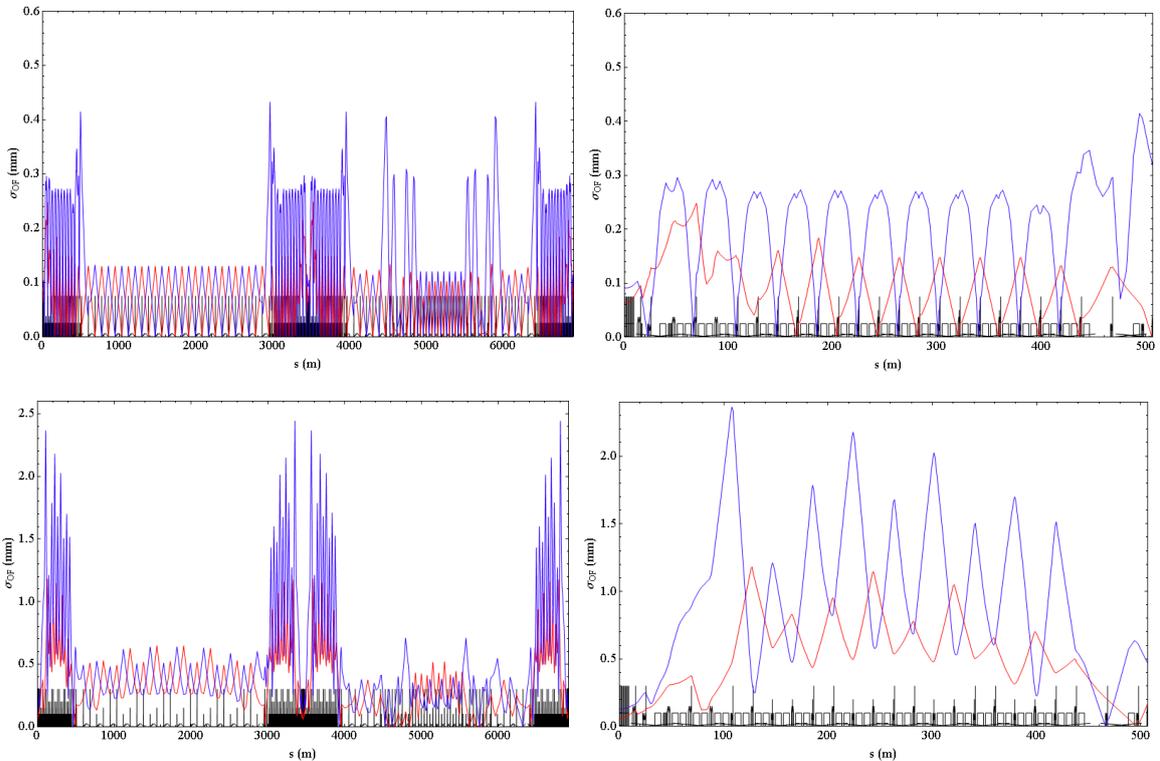


FIG. 6.21 – Erreur rms sur l'orbite fermée en plaçant un correcteur et un BPM à chaque quadripôle de l'arc (en haut) un correcteur sur 2 dans l'arc (en bas) dans l'anneau dans le plan horizontal (en rouge) et dans le plan vertical (en bleu) pour les erreurs sur les éléments magnétiques données en TAB. 6.4.

dynamique a été optimisée en utilisant seulement les combinaisons entre les hexapôles. Des correcteurs octupolaires ou d'ordre supérieur n'ont donc pas été insérés. Il n'est donc pas possible d'optimiser l'ouverture dynamique en utilisant le principe développé pour le LHC [100]. Après optimisation avec l'algorithme présenté en FIG. 6.19, les ouvertures dynamiques pour

TAB. 6.5 – Valeurs des défauts multipolaires systématiques dans les dipôles. Les valeurs sont données pour le rayon de référence $R_{\text{ref}} = 60$ mm.

Multipôles	$c_n (10^{-4})$	$K_n L = \frac{c_n \theta}{R^{n-1}} (\text{m}^{1-n})$
1 (champ principal)	10^4	$\theta = \frac{\pi}{86}$ rad
2	0.000	0
3	-1.68497	-0.00171
4	0.000	0
5	33.01843	9.307
6	0.000	0
7	-50.12287	-3924.5
8	0.000	0
9	29.58284	643400
10	0.000	0

où $c_n = \rho \cdot K_n \cdot R_{\text{ref}}^{n-1}$

différents moments sont présentées en FIG. 6.24. Les variations du nombre d'onde avec le moment sont représentées (FIG. 6.25). Les valeurs des fonctions β_x et β_y ainsi que les acceptances en moment de la structure à ces différents moments sont données dans les TAB. 6.6 et TAB. 6.7.

Le rayon intérieur des ouvertures dynamiques pour les trois points de fonctionnement est alors proche de 6σ . Par contre, pour les points de fonctionnement $(\nu_x = 22.228, \nu_y = 12.16)$ et $(\nu_x = 22.18, \nu_y = 12.16)$, les plages de variation du nombre d'onde avec le moment sont plus faibles que pour $(\nu_x = 22.22, \nu_y = 12.24)$. L'acceptance en moment de l'anneau est alors plus large pour ces deux points. En considérant les positions successives prises par un ion du faisceau sur plusieurs tours (FIG. 6.26), un fort couplage entre les plans horizontaux et verticaux est mis en évidence. Cette corrélation est moins importante dans le cas du point de fonctionnement $(\nu_x = 22.22, \nu_y = 12.24)$. Le point de fonctionnement $(\nu_x = 22.18, \nu_y = 12.16)$ donne ainsi le meilleur compromis entre un faible couplage, une bonne acceptance en moment et une large ouverture dynamique. Néanmoins, si les défauts systématiques dans les dipôles sont réduits (FIG. 6.27), l'ouverture dynamique s'élargit significativement.

 TAB. 6.6 – Extensions rms du faisceau dans les plans horizontaux et verticaux pour différentes valeurs de δ et de points de fonctionnement.

σ_x (mm) / σ_y (mm)	$\delta = 0$	$\delta = 2.5\%$	$\delta = -2.5\%$
Cas 1	1.99 / 0.91	1.92 / 1.01	2.06 / 0.84
Cas 2	1.73 / 0.92	1.57 / 1.02	1.95 / 0.84
Cas 3	1.82 / 0.92	1.48 / 0.94	2.42 / 0.89

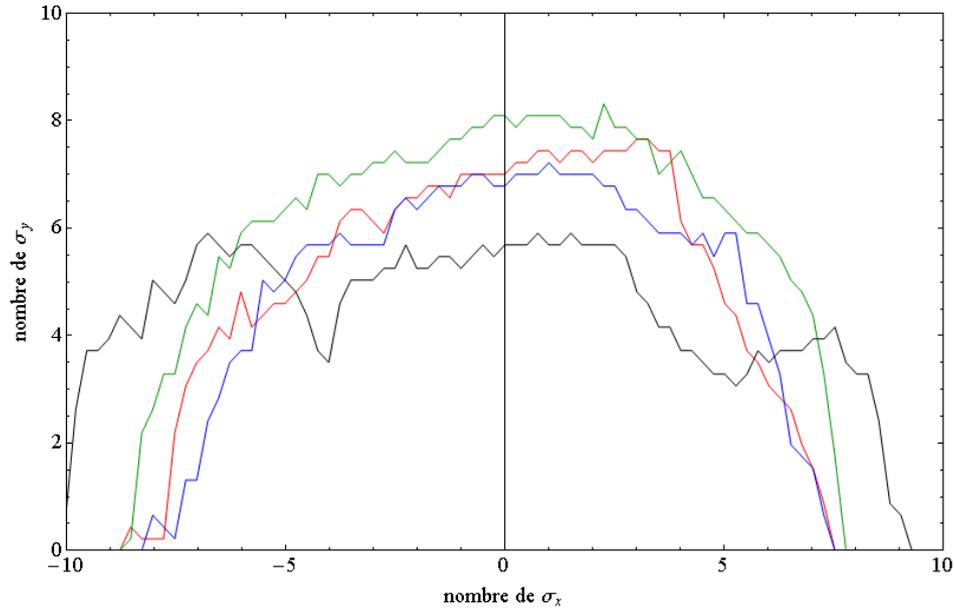


FIG. 6.22 – Ouverture dynamique pour 1000 tours sans optimisation et après application des défauts d'ordre 5 (en rouge), d'ordre 7 (en bleu) ou d'ordre 9 (en vert) ou pour l'ensemble des composantes multipolaires (en noir) donnés en TAB. 6.5.

TAB. 6.7 – Acceptance en moment de l'anneau pour différents points de fonctionnement pour le jeu de défauts multipolaires donnés en TAB. 6.5.

(ν_x, ν_y)	δ_{\min}	δ_{\max}
(22.228, 12.16)	-8‰	8.2‰
(22.18, 12.16)	-5.1‰	7.5‰
(22.22, 12.24)	-3.5‰	8.8‰

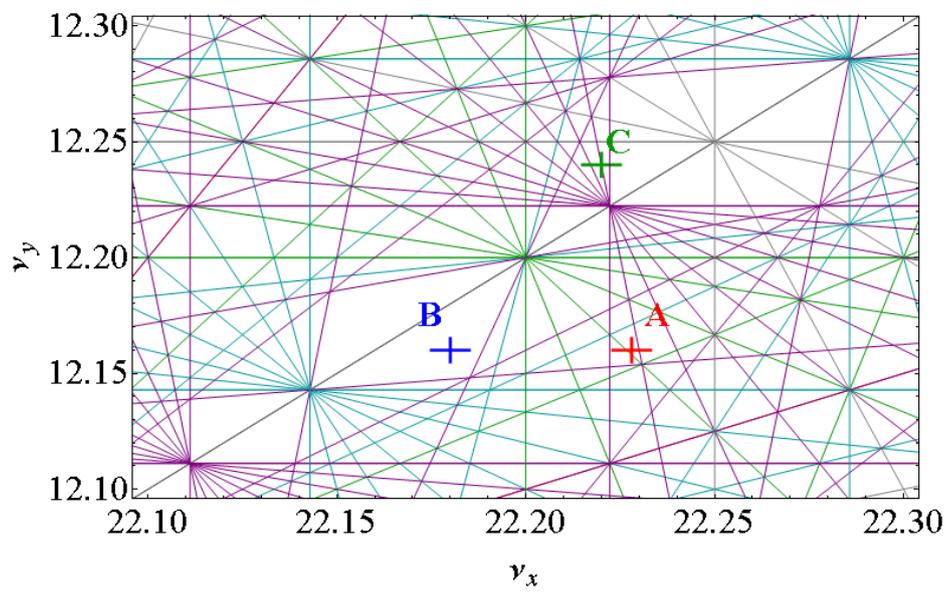


FIG. 6.23 – Représentations de différents points de fonctionnement dans le diagramme des résonances

Diagramme des résonances. En noir, résonances d'ordre 2, en rouge d'ordre 3, en gris d'ordre 4, en vert d'ordre 5, en cyan, d'ordre 7 et en violet d'ordre 9. Les divers points de fonctionnement considérés sont représentés par des croix dans le diagramme.

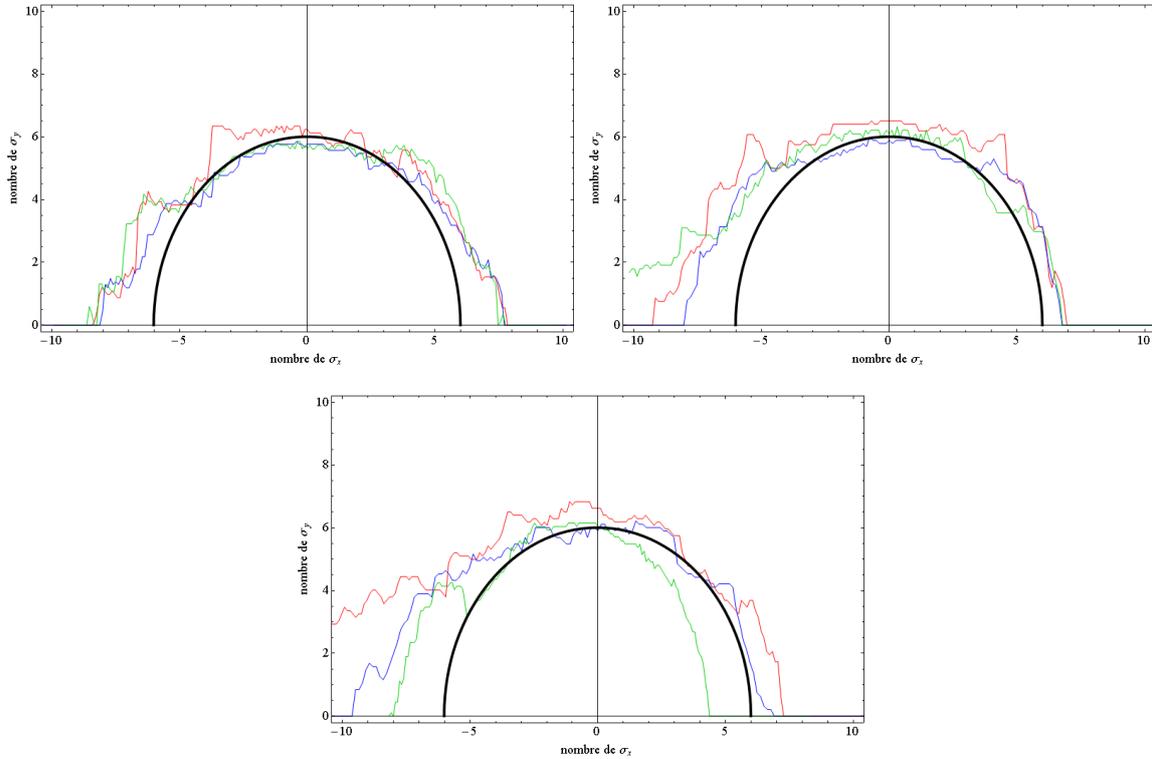


FIG. 6.24 – Ouvertures dynamiques après optimisation pour différentes valeurs de δ (en rouge, pour $\delta = 0$, en bleu pour $\delta = 2.5\%$ et en vert pour $\delta = -2.5\%$) et pour différents points de fonctionnement (en haut à gauche pour $\nu_x = 22.228$ et $\nu_y = 12.16$, en haut à droite pour $\nu_x = 22.18$ et $\nu_y = 12.16$ et en bas pour $\nu_x = 22.22$ et $\nu_y = 12.24$).

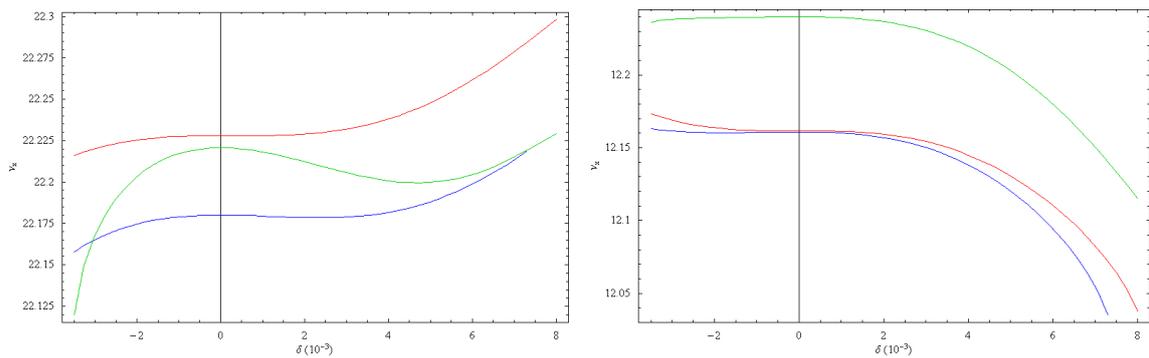


FIG. 6.25 – Variations du nombre d'onde avec le moment pour les 3 points de fonctionnement considérés en présence des défauts multipolaires.

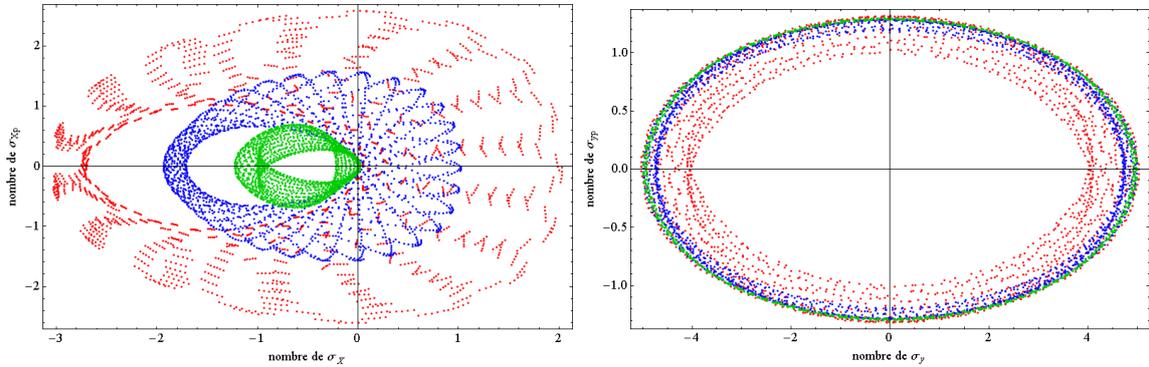


FIG. 6.26 – Représentation dans le plan horizontal (à gauche) et vertical (à droite) des positions successives prises dans l'espace des phase normalisé par un ion du faisceau stocké de $^{18}\text{Ne}^{10+}$ à $\delta = 0\%$ et de composantes initiales $x = 0$ et $y = 5\sqrt{\beta_y \epsilon_y}$ pour différents points de fonctionnement (en rouge pour $\nu_x = 22.228$ et $\nu_y = 12.16$, en bleu pour $\nu_x = 22.18$ et $\nu_y = 12.16$ et en vert pour $\nu_x = 22.22$ et $\nu_y = 12.24$).

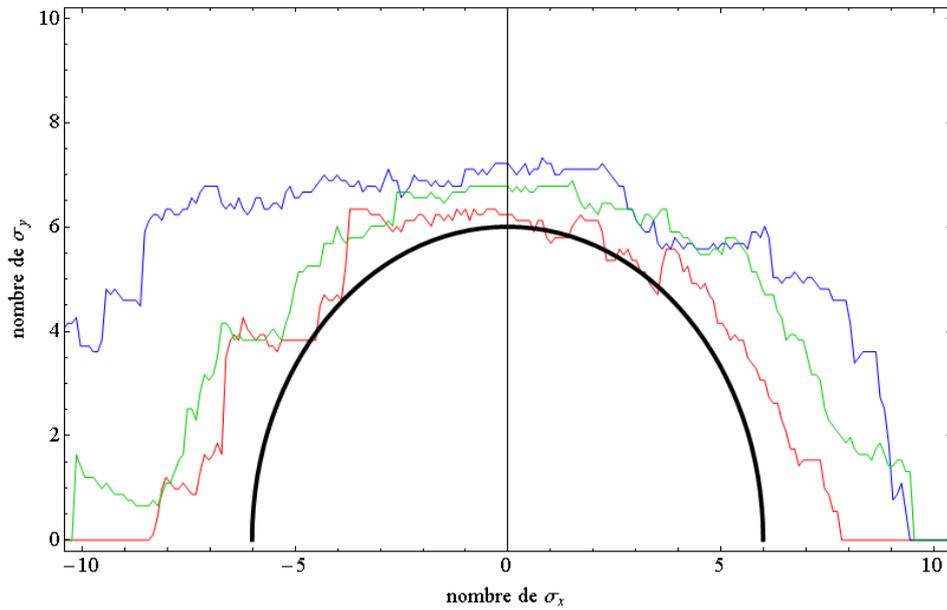


FIG. 6.27 – Ouverture dynamique pour 1000 tours pour le point de fonctionnement ($\nu_x = 22.228$, $\nu_y = 12.16$) après optimisation pour différentes valeurs des défauts dans les dipôles (en rouge pour les valeurs de référence données dans le TAB. 6.5, en vert pour les mêmes valeurs divisées par 1.5 et en bleu par 2).

6.4 Conclusion

Ce chapitre a permis d'exposer l'ensemble des propriétés aux premier et second ordres de l'anneau de décroissance. Les contraintes sur l'optique ont été respectées. Ainsi, la dispersion nécessaire dans la section d'injection a été atteinte, ce qui permet d'avoir un écart en moment entre les faisceaux circulant et injecté tolérable pour le système RF. Une section de collimation, n'utilisant pas d'éléments supraconducteurs et située dans l'une des deux longues sections droites a également été réalisée. Afin de collimater essentiellement en moment et non suivant l'amplitude bêatron des particules, la dispersion normalisée doit être la plus grande possible. La dispersion obtenue dans la section ne permet pas de négliger cet effet mais la diminution enregistrée sur le flux de neutrinos produits (liée à la diminution du nombre de particules stockées à l'équilibre) est acceptable. Enfin, pour préserver les éléments magnétiques des pertes issues de la décroissance β des ions, des sections d'extraction ont été aménagées à l'entrée des arcs et les dipôles ont été séparés en deux afin d'insérer un absorbeur entre eux.

Les propriétés optiques au second ordre ont alors été étudiées. En l'absence de défauts, l'ouverture dynamique est suffisamment large pour que le faisceau d'ions stockés soit stable jusqu'à 6σ . Les résonances hexapolaires ont été compensées dans l'anneau et donc le faisceau peut encore être considéré à symétrie elliptique dans l'espace des phases. Les variations du nombre d'onde et des fonctions bêatron avec le moment sont suffisamment faibles pour que le faisceau injecté soit accepté par la structure, ce qui est impératif.

La correction des défauts de désalignement maintient l'orbite fermée en dessous de 0.4 mm en écart type, ce qui permet de garder des tolérances de fabrication et de montage raisonnables sur les éléments magnétiques. Après correction des défauts multipolaires systématiques, les ouvertures dynamiques obtenues sont à 6σ . Cette valeur semble être la limite inférieure acceptable en regard des intensités stockées et de la durée de vie du faisceau. Néanmoins, une diminution de ces défauts systématiques permet d'obtenir de meilleures ouvertures.

L'introduction de lentilles multipolaires correctrices dans la structure pourrait être envisagée comme dans [100].

Chapitre 7

GESTION DES PERTES DANS L'ANNEAU

Deux sources principales de pertes inhérentes aux beta-beams ont été identifiées et ont été étudiées. Il s'agit :

- des pertes liées à la décroissance des ions radioactifs
- des pertes liées au processus de mélange lors de l'injection

Les premières sont continues et sont réparties dans l'anneau tandis que les secondes ont essentiellement lieu juste après l'injection et sont concentrées aux points de l'anneau où l'acceptance en moment est la plus faible. Nous nous proposons dans cette partie de quantifier le niveau de ces pertes une fois l'anneau rempli et d'étudier des systèmes de protection des éléments magnétiques [59, 60].

7.1 Pertes par décroissance

Le but de l'anneau de décroissance des « beta-beams » est de stocker des faisceaux intenses d'ions radioactifs β hautement énergétiques jusqu'à leur décroissance. Une étude a été menée [105] afin de quantifier l'activation moyenne des parois en béton des superstructures et leur impact sur la santé publique. Les premières estimations montrent que l'activation du béton est en-dessous des normes permises. Cependant, les aimants supraconducteurs sont très sensibles aux pertes. Afin d'éviter le quenching dans les éléments, la conception doit prendre en compte très tôt le dépôt de puissance et le minimiser dans les éléments magnétiques. Dans cette partie, nous nous focaliserons sur la localisation de ces pertes dans la machine. Nous verrons que ceci implique un dimensionnement spécifique des dipôles afin d'éviter une accumulation dans ces éléments.

Lors de la décroissance β d'un ion, sa rigidité magnétique change. En effet, alors que la variation sur la quantité de mouvement est négligeable (l'énergie emportée par l'électron et l'antineutrino est faible devant celle de l'ion fils), l'état de charge est quant à lui modifié. Par définition, nous avons :

$$B\rho = \frac{p}{Ze}$$

où $B\rho$ est la rigidité magnétique de la particule

- p la quantité de mouvement de la particule
- Z le nombre de charges de la particule

Nous utiliserons les indices 0 pour désigner l'ion père et 1 l'ion fils. Le changement en rigidité de l'ion est alors :

$$\delta = \frac{\Delta(B\rho)}{B\rho} = \frac{Z_0}{Z_1} - 1$$

La déviation due à δ est analogue à celle issue d'une différence en moment. Par exemple, pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$ (qui décroît en ${}^6\text{Li}^{3+}$) et pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ (qui décroît en ${}^{18}\text{F}^{9+}$), les calculs donnent respectivement $\delta = -1/3$ et $\delta = +1/9$. Le changement en rigidité est tel que les produits de décroissance sont rapidement perdus après déviation dans les dipôles, rendant impossible toute extraction dans les arcs. Pour l'instant, deux solutions sont envisagées :

- l'insertion de blocs d'arrêt entre les éléments magnétiques afin d'absorber ces produits avant qu'ils atteignent les parois des éléments magnétiques. Afin d'évaluer le design de l'anneau, un module a été ajouté au code *BETA* [1].
- La seconde consiste à utiliser des dipôles sans bobines dans le plan horizontal, d'où leur nom d' « open mid-plane » dipôles. Des blocs d'arrêt peuvent alors être insérés dans la chambre afin de préserver le bain d'Hélium liquide. Avec cette solution, il est possible de rallonger les dipôles, ce qui diminue le champ magnétique à y déployer. Cette configuration est indépendante du choix des ions stockés, de plus, le demi-rayon d'ouverture nécessaire dans les dipôles est plus petit.

7.1.1 Longueur des dipôles

Au premier ordre, seuls les dipôles introduisent de la dispersion dans l'anneau. Par conséquent, dans le cas de décroissance dans des sections sans champ dipolaire, les produits de décroissance ne sont pas séparés du faisceau de référence. Ils sont déviés par le dipôle suivant. On distingue deux cas, selon que le dipôle est droit ou courbé. Dans le cas où le dipôle est courbé, la chambre suit l'orbite fermée. La distance entre les parois et la particule de référence est donc constante. Dans le cas de dipôles droits, l'ouverture de la chambre doit prendre en compte la flèche du faisceau.

Cas de dipôles courbés

Nous supposons en premier lieu les dipôles courbés d'angle θ et de rayon de courbure ρ . Les absorbeurs sont insérés dans l'anneau à une distance $l = 0.5$ m du dipôle. Leur longueur est fixée à $L_{\text{abs}} = 1$ m. On fait l'hypothèse que le faisceau arrive perpendiculairement à la face d'entrée du dipôle secteur et on place l'origine de l'axe des abscisses s à l'entrée du premier dipôle. La déviation moyenne $\Delta x_\delta(s)$ du produit de décroissance par rapport à l'orbite de

référence est alors :

$$\begin{aligned}
\Delta x_\delta(s) &= \rho \cdot (1 - \cos s/\rho) \cdot \delta && \text{si } 0 \leq s \leq s_1 = \rho\theta \\
&= (\rho(1 - \cos \theta) + (s - s_1) \sin \theta) \cdot \delta && \text{si } s_1 \leq s \leq s_2 = s_1 + L_{\text{abs}} + 2l \\
&= \rho \cdot \left(1 - \cos \left(\theta + \frac{s-s_2}{\rho}\right)\right) \cdot \delta + \\
&\quad (s_2 - s_1) \cdot \delta \cdot \cos \frac{s-s_2}{\rho} \theta && \text{si } s_2 \leq s \leq s_3 = s_2 + \rho\theta \\
&= \sin \theta \cdot \left[2\rho \sin \theta + (s_2 - s_1) \cos \theta + \right. \\
&\quad \left. \left(2 \cos \theta - \frac{s_2-s_1}{\rho} \sin \theta\right) (s - s_3)\right] \cdot \delta && \text{si } s_3 \leq s \leq s_4 = s_3 + L_{\text{abs}} + 2l
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Pour que le faisceau de Lithium ne heurte pas les parois du dipôle et pour qu'il soit complètement absorbé par l'absorbeur qui lui succède, nous devons avoir d'après Eq. (7.1) :

$$\begin{cases} \rho |\delta_{\text{Li}}| (1 - \cos \theta) + l |\delta_{\text{Li}}| \sin \theta + X_b & \leq X_d \\ \rho |\delta_{\text{Li}}| (1 - \cos \theta) + (l + L_{\text{abs}}) |\delta_{\text{Li}}| \sin \theta - X_b & \geq X_{\text{abs}} \end{cases} \tag{7.2}$$

où X_d est la demi-ouverture du dipôle

X_b la demi-taille du faisceau

X_{abs} la position de l'absorbeur par rapport à l'axe

Le faisceau de Fluor est moins dévié que celui de Lithium. Par conséquent, il n'est pas arrêté par le premier absorbeur. Afin qu'il ne heurte pas le dipôle suivant, nous devons donc avoir d'après Eq. (7.1) :

$$\begin{cases} |\delta_F| \sin \theta \left[2\rho \sin \theta + (4l + L_{\text{abs}}) \cos \theta - \frac{2l+L_{\text{abs}}}{\rho} l \sin \theta\right] + X_b & \leq X_d \\ |\delta_F| \sin \theta \left[2\rho \sin \theta + (4l + 3L_{\text{abs}}) \cos \theta - \frac{2l+L_{\text{abs}}}{\rho} (l + L_{\text{abs}}) \sin \theta\right] - X_b & \geq X_{\text{abs}} \end{cases} \tag{7.3}$$

Les émittances rms horizontales sont respectivement $\epsilon_x = 0.11$ mm.mrad pour ${}^6\text{He}^{2+}$ et $\epsilon_x = 0.22$ mm.mrad pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. La taille du faisceau à 4 écarts types (la puissance des produits de décroissance contenue au delà de 4 écarts types est inférieure au mW, ce qui peut être négligé) dans les mailles FODO de l'arc est alors respectivement d'environ ± 1.3 cm pour ${}^6\text{He}^{2+}$ et ± 1.8 cm pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. Les absorbeurs sont à une distance $X_a = 4$ cm de l'axe de la machine. Le rayon de courbure des dipôles est égal à 156 m, ce qui correspond à un champ magnétique de 6 T pour ${}^6\text{He}^{2+}$. La demi-ouverture dans le plan horizontal des dipôles est fixée à $X_d = 8$ cm pour éviter les pertes dans les éléments magnétiques. D'après les Eq. (7.2) et Eq. (7.3), l'angle du dipôle doit être compris entre $\pi/83$ rad et $\pi/86$ rad. Une seule famille de dipôle est considérée et du fait des symétries considérées dans l'anneau, l'angle du dipôle doit être de la forme $\pi/(4n + 2)$ rad avec n entier. L'angle des dipôles dans les arcs est donc nécessairement $\pi/86$ rad. Dans ce cas, la FIG. 7.1 montre bien que les produits de décroissance de ${}^6\text{He}^{2+}$ sont bien stoppés par le premier absorbeur et ceux issus du ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ par le second.

Cas de dipôles droits

Nous supposons dans un premier temps que la particule de référence arrive sur l'axe magnétique du dipôle droit et ressort également sur l'axe magnétique. Une géométrie d'un

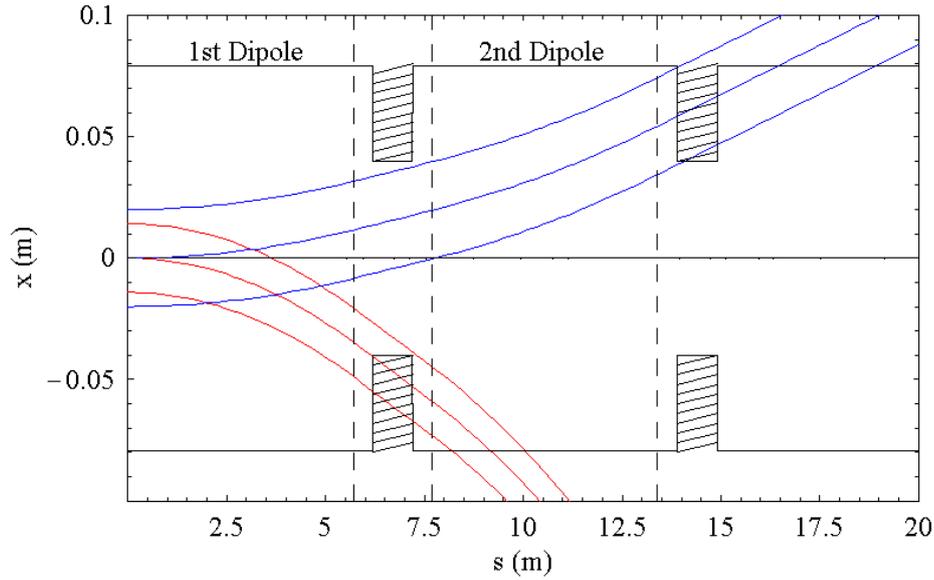


FIG. 7.1 – Déviation des produits de décroissance à l'entrée d'une maille FODO. En rouge ${}^6\text{Li}^{3+}$ et en bleu ${}^{18}\text{F}^{9+}$.

aimant droit est donnée sur la FIG. 7.2. Les faces du dipôle sont supposées orthogonales à l'axe central, ce qui génère une focalisation due aux angles d'entrée et de sortie des dipôles. Un calcul trigonométrique simple permet d'aboutir à l'expression de l'écart $\Delta x(\phi)$ entre l'orbite de référence et l'axe magnétique en fonction de l'angle ϕ dans le dipôle :

$$\Delta x(\phi) = \rho (\cos(\theta/2 - \phi) - \cos(\theta/2))$$

La déviation du produit de décroissance par rapport à l'axe magnétique d'un dipôle droit est donc $\Delta x_\delta(\phi) \cos(\theta/2 - \phi) + \Delta x(\phi)$. Après transport du faisceau de produits de décroissance dans la même structure que précédemment, nous obtenons alors la FIG. 7.3. Il apparaît que du fait de la déviation de l'orbite de référence par rapport à l'axe central du dipôle droit, l'ouverture des dipôles doit être plus importante que celle de dipôles courbés. Une demi-ouverture de 8.5 cm dans les dipôles s'avère alors nécessaire.

7.1.2 Simulation des pertes dans l'anneau

Principe de l'algorithme

Afin d'avoir une première approximation des puissances déposées par les produits de décroissance et leur localisation dans l'anneau, un module a été ajouté au code *BETA*. L'algorithme est donné en FIG. 7.5 [59, 60]. Il repose sur le transport optique au premier ordre de l'enveloppe des produits de décroissance échantillonné sur plusieurs points de la structure et pour différents écarts types FIG. 7.4.

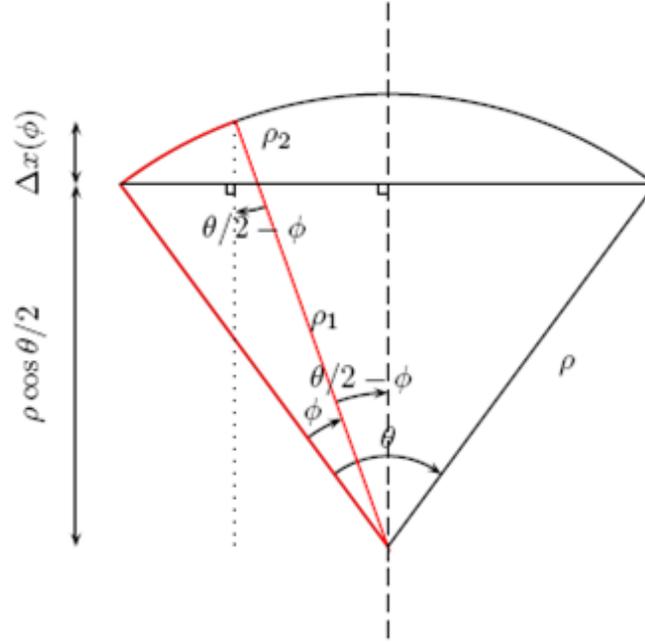


FIG. 7.2 – Déviation de l'orbite de référence par rapport à l'axe magnétique dans un dipôle droit.

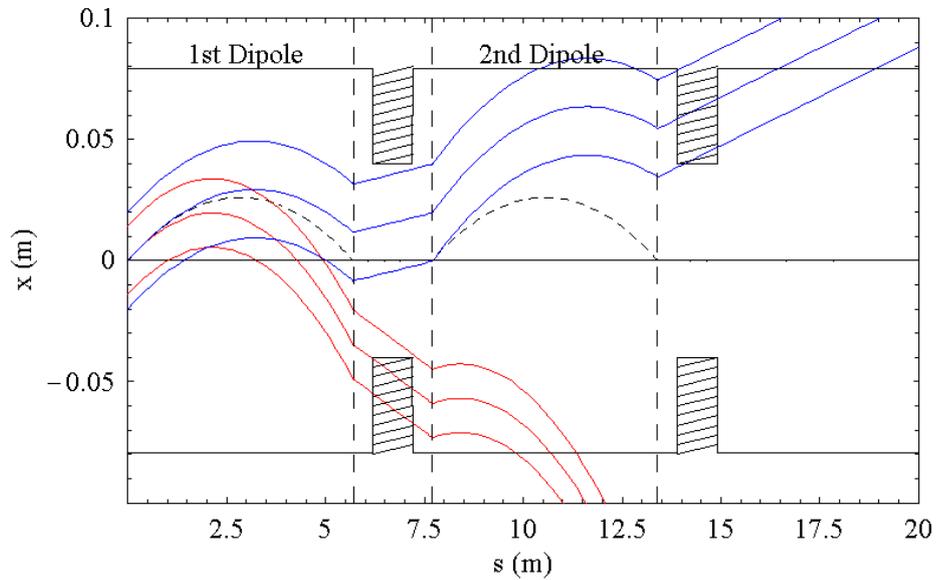


FIG. 7.3 – Déviation par rapport à l'axe central des éléments des produits de décroissance dans le cas de dipôles droits. En rouge ${}^6\text{Li}^{3+}$, en bleu ${}^9\text{F}^{9+}$ et en pointillés orbite de référence.

Avantages et inconvénients de la méthode

Les principaux avantages de cette méthode sont sa facilité d'implémentation et d'utilisation ainsi que sa rapidité. Dans le pire des cas, la complexité du programme est en $\mathcal{O}(N_e^2)$ où

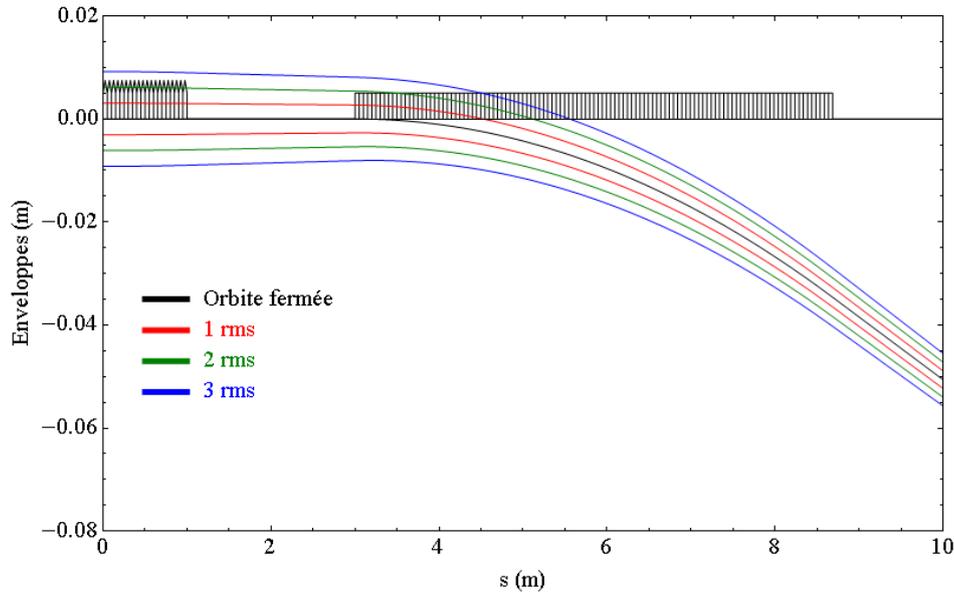


FIG. 7.4 – Représentation pour différents nombres d'écart types du faisceau de produits de décroissance.

N_e est le nombre d'éléments dans la machine et dans notre cas, où les ions fils sont rapidement perdus, la complexité du programme tend même à être en $\mathcal{O}(N_e)$.

Par contre, l'interaction des ions avec la matière n'est pas prise en compte : l'ion est supposé perdu dès qu'il entre en collision avec un élément quelconque. Ainsi, la diffusion ou les distances d'arrêt dans le matériau ne sont pas modélisées. Il n'est pas non plus possible d'appliquer un code comme *FLUKA* [106] ou *GEANT4* [107] par la suite car nous ne transportons pas un nuage de particules mais une enveloppe. Les effets multipolaires ne sont pas appliqués au faisceau et nous supposons un faisceau à symétrie elliptique.

Ce code a été implémenté pour avoir une évaluation au premier ordre du design et pour vérifier que les pics de dépôt sont bien situés dans les absorbeurs. Bien évidemment, afin d'avoir une meilleure évaluation, il faut transporter le nuage de particules le long de la structure en prenant en compte les multipôles et le temps de demi-vie des particules. Mais, pour avoir un bon écart type sur la puissance moyenne déposée dans les éléments, ceci suppose de transporter un grand nombre de particules. Ainsi, alors que dans notre algorithme seules la trajectoire centrale et l'enveloppe du faisceau (le découpage se fait ensuite très facilement) sont transportées, dans un algorithme plus rigoureux, un nuage de N particules est transporté, ce qui nécessiterait un temps a priori au moins N fois plus long.

Évaluation du design

Du fait que le temps de révolution est petit ($23 \mu\text{s}$) devant le temps de demi-vie des particules stockées dans l'anneau ($\approx 100 \text{ s}$), nous pouvons supposer que la proportion d'ions qui se désintègrent dans l'anneau ne dépend pas de l'abscisse curviligne. La probabilité $P(t)$

qu'un ion n'ait pas décrû au bout d'un temps t dans l'anneau est en moyenne :

$$P(t) = 2^{-\frac{t}{\gamma\tau}}$$

Pour une population initiale d'ions N_0 , le nombre d'ions ayant décrû par seconde est donné par $-N_0P'(t)$. La puissance moyenne perdue par mètre \mathcal{P}_m dans l'anneau est alors donnée par :

$$\mathcal{P}_m = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} \frac{N_0 E_0 \ln(2)}{2\pi R_0 \tau} 2^{-\frac{t}{\gamma\tau}} \quad (7.4)$$

où $\beta = \frac{v}{c}$ est le facteur relativiste

γ	le facteur de Lorentz
τ	le temps de demi-vie de l'ion au repos
R_0	le rayon moyen de l'anneau
E_0	l'énergie d'un ion au repos

En utilisant les valeurs pour les intensités stockées données dans TAB. 3.6, nous aboutissons finalement au TAB. 7.1 donnant les puissances perdues par mètre dans la structure. Il apparaît que les dépôts moyens générés par les deux espèces sont du même ordre de grandeur. Aussi, la machine devra être optimisée pour les deux types d'ions. La puissance moyenne déposée par mètre la plus élevée dans le complexe accélérateur est dans l'anneau de stockage [61]. Après avoir inséré les absorbeurs et grâce au code *BETA*, nous aboutissons finalement aux FIG. 7.6 et FIG. 7.7 pour le faisceau stocké et aux FIG. 7.8 et FIG. 7.9 pour le faisceau injecté. Les absorbeurs protègent bien les éléments magnétiques des dépôts mais des études plus détaillées sont nécessaires en certains points. Ainsi, la section d'injection où la longue section droite dédiée à l'insertion du septum induit une forte concentration des dépôts dans la suite. De plus, le grand écart en rigidité entre l' ${}^6\text{He}^{2+}$ et le ${}^6\text{Li}^{3+}$ fait qu'une partie des ions issus de décroissances à l'intérieur des dipôles ne sont pas captés par les absorbeurs et heurtent les parois du dipôle suivant. Ceci explique que la puissance déposée par les produits de décroissance de l' ${}^6\text{He}^{2+}$ en sortie de dipôle est égale à la puissance moyenne perdue par décroissance soit environ 10 W/m. Les résultats obtenus ici ont été confirmés par les simulations réalisées par une équipe de GSI avec le code *STRAHLSIM* [108, 109] et par *ACCSIM* [110, 64]. L'intérêt de la présence d'absorbeurs pour la protection des aimants a été illustré par une simulation *FLUKA* [62, 63].

TAB. 7.1 – Puissance moyenne perdue dans l’anneau par décroissance des ions ou collimation en énergie.

	unités	${}^6\text{He}^{2+}$	${}^{18}\text{Ne}^{10+}$
γ	-	100	100
E_{cin}	GeV	555	1666
$\tau_{\text{répétition}}$	s	6	3.6
FAISCEAU INJECTE			
Nombre d’ions	-	9.05×10^{12}	4.26×10^{12}
Puissance perdue par mètre par décroissance	W/m	0.996	0.683
FAISCEAU STOCKE			
Nombre d’ions	-	9.66×10^{13}	7.42×10^{13}
Puissance perdue par mètre par décroissance	W/m	10.634	11.893
Énergie à collimater entre 2 injections	kJ	416	873
Puissance moyenne collimatée entre 2 injections	kW	69	242

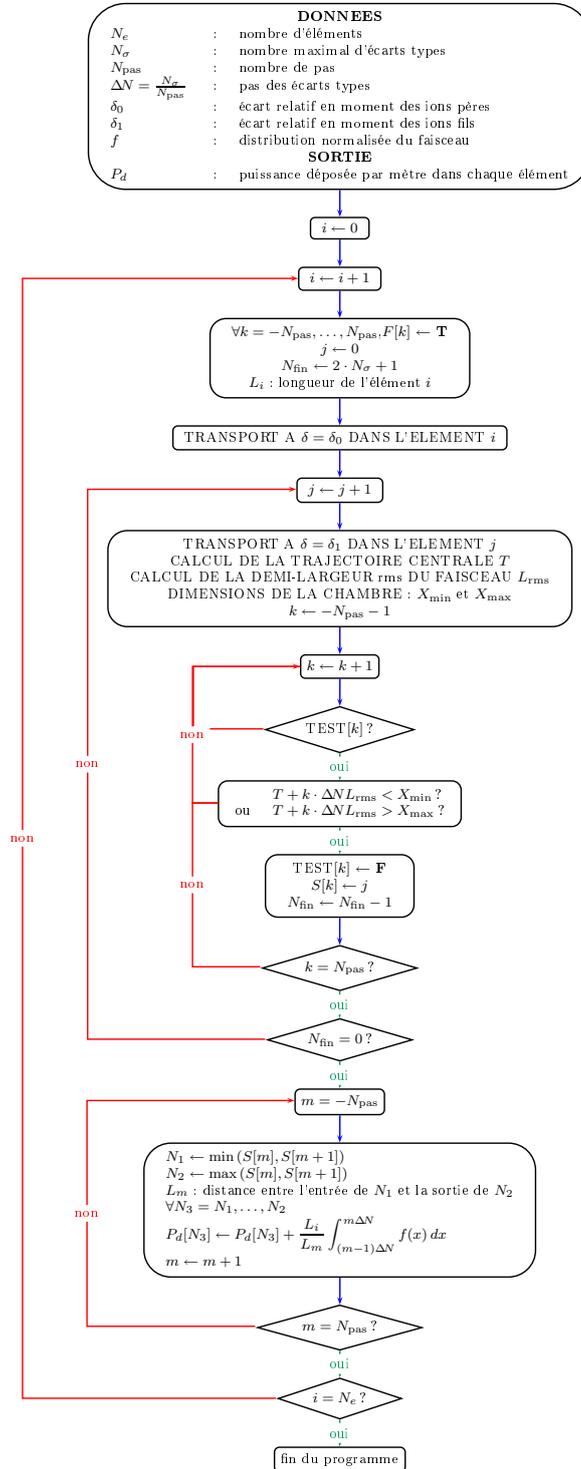


FIG. 7.5 – Algorithme du calcul du dépôt par décroissance.

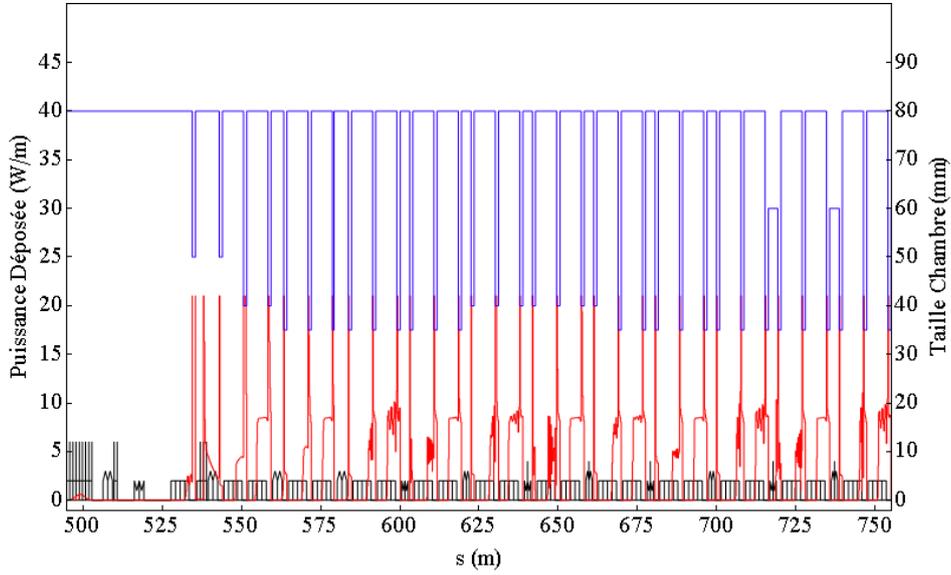


FIG. 7.6 – Puissance déposée par mètre par les produits de décroissance issus du faisceau nominal d' ${}^6\text{He}^{2+}$ le long de l'arc. Les dimensions de la chambre sont représentées en bleu.

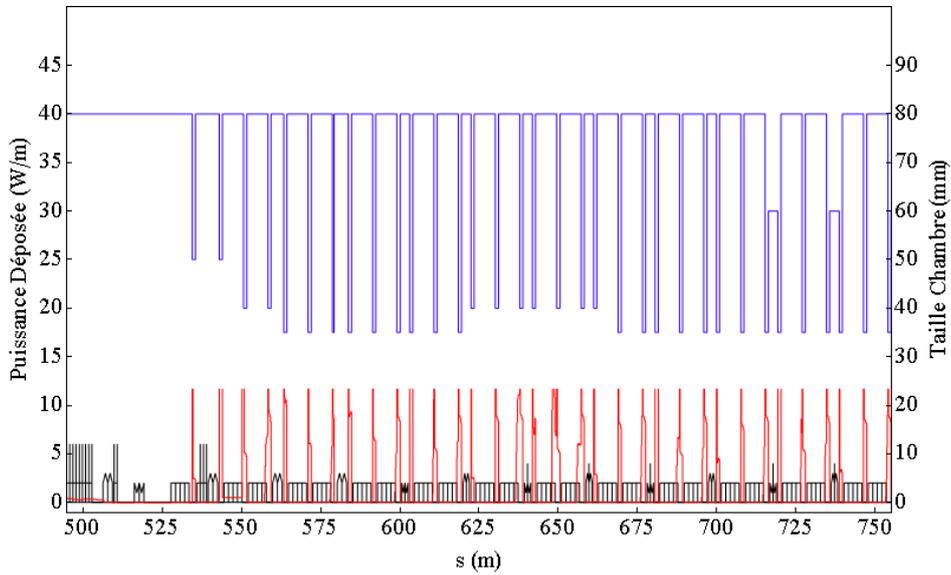


FIG. 7.7 – Puissance déposée par mètre par les produits de décroissance issus du faisceau nominal de ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ le long de l'arc. Les dimensions de la chambre sont représentées en bleu.

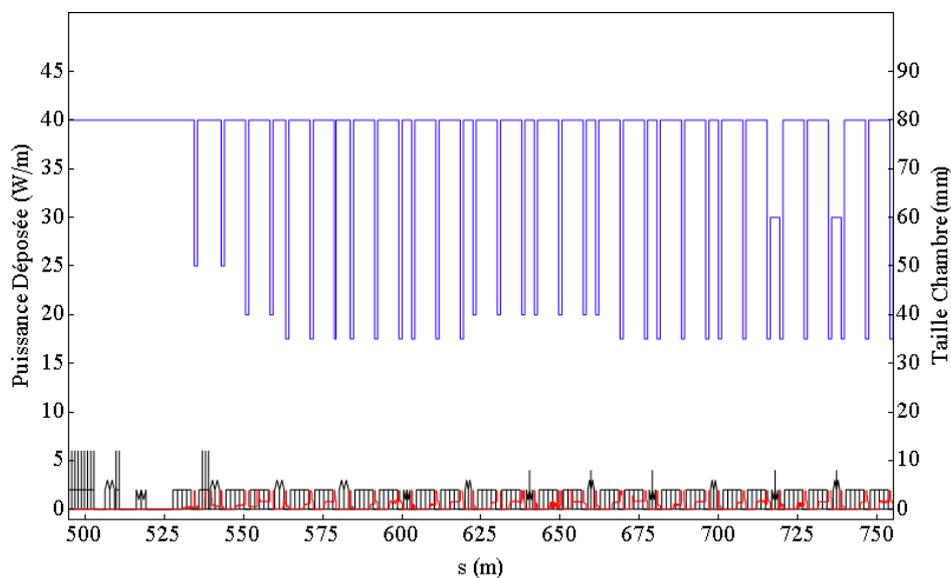


FIG. 7.8 – Puissance déposée par mètre par les produits de décroissance issus du faisceau injecté d' ${}^6\text{He}^{2+}$ le long de l'arc. Les dimensions de la chambre sont représentées en bleu.

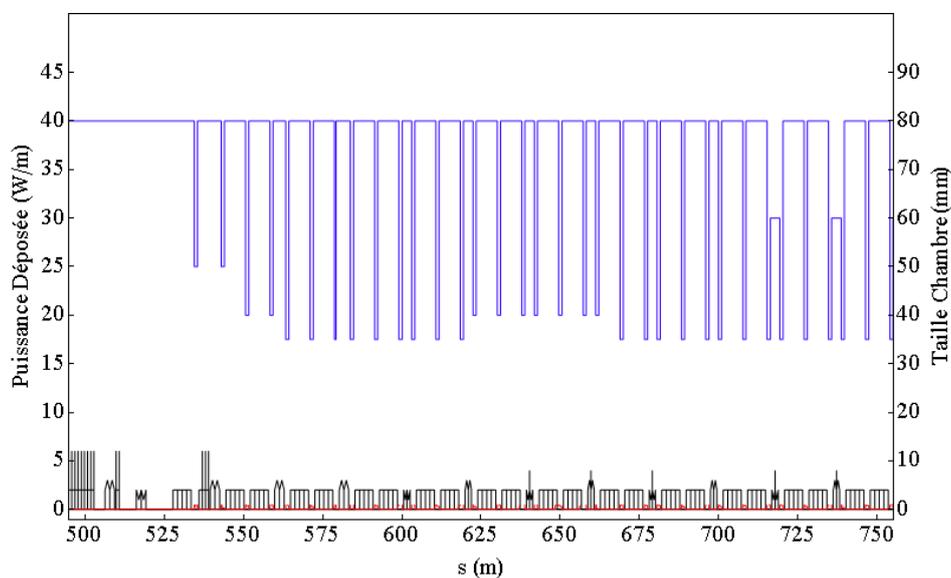


FIG. 7.9 – Puissance déposée par mètre par les produits de décroissance issus du faisceau injecté de ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ le long de l'arc. Les dimensions de la chambre sont représentées en bleu.

7.2 Pertes par collimation

D'après le Chapitre 8 et le théorème de Liouville, après injection et mélange entre le faisceau circulant et celui venant d'être injecté, la surface du faisceau stocké augmente dans l'espace longitudinal. Ceci a pour effet d'augmenter la dispersion en énergie du faisceau stocké. Comme l'acceptance en énergie par le système RF dans l'anneau est supérieure à 0.6%, les ions ayant une impulsion relative supérieure à $\delta_C = 2.5\%$ sont conservés dans la structure. En l'absence de collimation en énergie, lorsque le faisceau sera à nouveau dévié à l'injection suivante, la partie de ces ions qui auront survécu heurtera la lame du septum. La lame du septum aura alors un rôle de collimateur. Du fait des hautes intensités, de l'énergie des ions stockés et de la présence de dipôles supraconducteurs à proximité, ceci ne peut être envisagé et une section de collimation en énergie doit être prévue dans l'anneau. C'est essentiellement pendant la phase de gonflement dans l'espace longitudinal du faisceau, donc pendant le mélange des faisceaux injecté et stocké, que la collimation en énergie sera effective.

La dispersion normalisée $\frac{D_x}{\sqrt{\beta_x \epsilon_x}}$ doit être la plus large possible au point d'insertion du premier collimateur afin de discriminer principalement en énergie et non pas en fonction de l'amplitude bêatron de l'ion. Des dipôles sont donc nécessaires de part et d'autre de cette section afin de réaliser un saut en dispersion. Utiliser la section droite restée inoccupée dans l'autre arc a été envisagée. La dispersion normalisée y est élevée et il n'est pas nécessaire d'y ajouter de dipôles. Cette solution n'a pas été retenue car la présence de dipôles supraconducteurs à proximité est incompatible avec les intensités à collimater. Il faut donc insérer une section de collimation en énergie dans la très longue section droite inutilisée pour la physique. Nous avons assez de place pour des dipôles chauds et pour des ensembles de collimateurs primaires et secondaires. Par contre, l'anneau perd toute périodicité, les deux longues sections droites n'étant plus équivalentes.

7.2.1 Problématiques liées à la collimation

Niveau des pertes

Un grand nombre d'ions doit être stocké dans l'anneau à $\gamma = 100$, ce qui donne des faisceaux très énergétiques. A cause du gonflement dans l'espace longitudinal, les ions ${}^6\text{He}^{2+}$ et ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ peuvent être considérés comme n'étant plus acceptés par l'anneau après respectivement 15 et 20 cycles d'injection. Comme le temps de demi-vie des ions ${}^6\text{He}^{2+}$ et ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ à ces énergies est de l'ordre de la minute, une large part des ions n'a pas décrû après ces cycles d'injection. En utilisant les paramètres donnés dans l'approche « top-down » et les résultats donnés dans le Chapitre 8, nous obtenons alors les pertes illustrées dans le TAB. 7.1. L'ordre de grandeur des énergies à collimater est de plusieurs centaines de kilojoules, ce qui représente une puissance moyenne perdue de l'ordre de la centaine de kilowatts dans le cas du ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. Plusieurs collimateurs sont donc nécessaires afin de collimater en énergie le faisceau. Pour l'instant, le système adopté est un système étagé, qui a été développé pour le LHC [111, 112, 113, 114].

Système de collimation à deux étages

Dans cette partie, nous traiterons le cas général pour une collimation quelconque (bêtatron ou en moment). Nous verrons que pour des ouvertures fixées au niveau des collimateurs, il existe des avances de phase optimales entre les collimateurs. Nous appliquerons alors ces résultats au cas particulier de la collimation en énergie pour les beta-beams, ce qui nous permettra de déterminer des contraintes nécessaires sur l'optique de la section de collimation.

La collimation par étage comprend en principe deux types de collimateurs [111, 112, 113, 114] : les collimateurs dits **primaires** et les collimateurs dits **secondaires**. Les premiers sont en général minces et ont pour but de diffuser élastiquement les ions qui rentrent en collision avec eux. Leur rôle n'est donc pas de les absorber mais de les diffuser, ce qui augmente leur invariant de Courant et Snyder. Les ions qui sont rentrés en collision avec l'un de ces collimateurs forment le **halo primaire**. Ce halo est transporté par l'optique jusqu'aux collimateurs secondaires pour y être finalement absorbés (FIG. 7.10). Il peut y avoir encore des ions survivants qui constitueraient un **halo secondaire**, ce qui nécessiterait la présence de collimateurs tertiaires pour les absorber. Ce cas ne sera pas traité ici. Dans le cas d'une collimation en moment, des collimateurs horizontaux suffisent. Enfin, la section comprise entre le collimateur primaire et les secondaires doit être exempte de dipôles. Au premier ordre, le transport des particules est le même quelle que soit leur énergie.

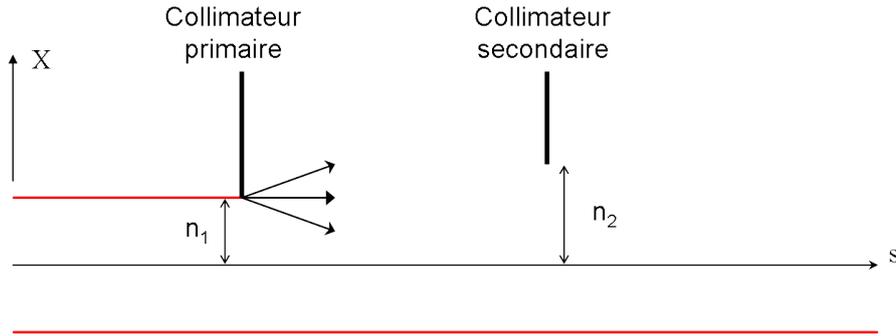


FIG. 7.10 – Schéma de principe du système de collimation.

Dans la suite, les notations suivantes seront utilisées :

$(x_P, x'_P, y_P, y'_P, l_P, \delta_P)$ désigne les coordonnées d'une particule P dans l'espace des phases relativement à l'axe de la machine

$(\beta_x, \alpha_x, \beta_y, \alpha_y)$

les fonctions bêtatron

(D, D')

les fonctions de dispersion horizontales

(μ_x, μ_y)

les fonctions d'avance de phase

(ϵ_x, ϵ_y)

les émittances rms dans les plans horizontal et vertical

$\vec{A} = (X_P, X'_P, Y_P, Y'_P)$

les coordonnées de la particule dans l'espace normalisé

$\begin{pmatrix} X_P \\ X'_P \end{pmatrix} = N_x \cdot \begin{pmatrix} x_P \\ x'_P \end{pmatrix}$

avec $N_x = \frac{1}{\sqrt{\beta_x \epsilon_x}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_x & \beta_x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} Y_P \\ Y'_P \end{pmatrix} = N_y \cdot \begin{pmatrix} y_P \\ y'_P \end{pmatrix}$

avec $N_y = \frac{1}{\sqrt{\beta_y \epsilon_y}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_y & \beta_y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = N_x \cdot \begin{pmatrix} D \\ D' \end{pmatrix}$

$A_x = \sqrt{X_P^2 + X_P'^2}$	l'ouverture normalisée horizontale de la particule
$A_y = \sqrt{Y_P^2 + Y_P'^2}$	l'ouverture normalisée verticale de la particule
n_1	l'ouverture normalisée aux collimateurs primaires
α_1	l'angle entre le collimateur primaire et l'axe horizontal
n_2	l'ouverture normalisée aux collimateurs secondaires
α_2	l'angle entre le collimateur secondaire et l'axe horizontal

Nous supposons que l'approximation de la diffusion lente est valide. En d'autres termes, la particule rentre en collision avec le collimateur primaire au moment où son excursion dans les directions horizontales et verticales est maximale d'où $X' = Y' = 0$ au moment de l'impact. Cette approximation est valable dans la mesure où le gonflement du faisceau dans l'espace transverse se fait de manière progressive. Les coordonnées de la particule juste avant le point d'impact sont donc :

$$\vec{A}_0 = (n_1 \cos \alpha_1, 0, n_1 \sin \alpha_1, 0)$$

On considère que la collision est élastique et que la faible épaisseur du collimateur permet de négliger l'excursion de la particule dans le matériau. Celle-ci reçoit alors à la sortie une impulsion transverse de module K et de direction ϕ . Ses coordonnées, juste après l'impact, sont donc :

$$\vec{A}_1 = (n_1 \cos \alpha_1, K \cos \phi, n_1 \sin \alpha_1, K \sin \phi)$$

Après transport, les coordonnées dans l'espace normalisé de la particule au niveau du collimateur secondaire sont alors :

$$\vec{A}_2 = M_{12} \cdot \vec{A}_1$$

où M_{12} est la matrice de transfert dans l'espace normalisée entre un collimateur primaire et un autre secondaire. M_{12} s'écrit simplement :

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \cos \mu_x & \sin \mu_x & 0 & 0 \\ -\sin \mu_x & \cos \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mu_y & \sin \mu_y \\ 0 & 0 & -\sin \mu_y & \cos \mu_y \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons :

$$\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_2' \\ Y_2 \\ Y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \cos \alpha_1 \cos \mu_x + K \cos \phi \sin \mu_x \\ -n_1 \cos \alpha_1 \sin \mu_x + K \cos \phi \cos \mu_x \\ n_1 \sin \alpha_1 \cos \mu_y + K \sin \phi \sin \mu_y \\ -n_1 \sin \alpha_1 \sin \mu_y + K \sin \phi \cos \mu_y \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Au point d'impact avec le collimateur secondaire, les particules de plus petite amplitude normalisée entrant en contact ont nécessairement $X_2' = Y_2' = 0$. L'ouverture normalisée étant fixée à n_2 au collimateur secondaire, nous en déduisons finalement l'impulsion maximale K_C donnée à une particule ayant interagi avec le collimateur primaire sans entrer en collision avec un collimateur secondaire suivant [112] :

$$K_c = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}$$

De plus, nous en déduisons les avances de phase optimales entre les deux collimateurs en fonction de la direction de diffusion ϕ et de α_1 :

$$\tan \mu_x = \tan \mu_0 \frac{\cos \phi}{\cos \alpha_1}, \quad \tan \mu_y = \tan \mu_0 \frac{\sin \phi}{\sin \alpha_1} \quad (7.6)$$

avec

$$\tan \mu_0 = \frac{K_C}{n_1} = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1}$$

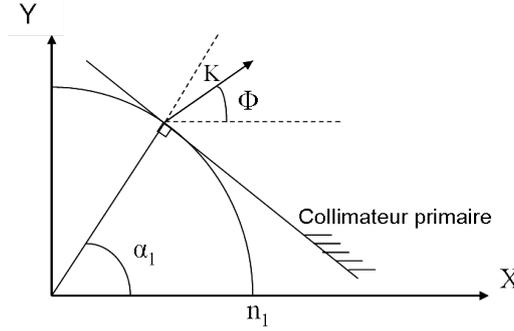


FIG. 7.11 – Représentation dans l'espace des phases normalisé des particules interceptées à un collimateur primaire.

L'optique de la collimation dépend donc du rapport entre les ouvertures normalisées aux collimateurs primaires et secondaires. Comme l'angle du collimateur secondaire avec l'axe horizontal est α_2 , nous avons la relation :

$$\tan \alpha_2 = \frac{Y_2}{X_2}$$

soit :

$$\tan \alpha_2 = \frac{\cos \alpha_1 \cos \mu_y + \tan \mu_0 \sin \phi \sin \mu_y}{\cos \alpha_1 \cos \mu_x + \tan \mu_0 \cos \phi \sin \mu_x} \quad (7.7)$$

Les avances de phase entre les collimateurs sont définies par leur tangente d'après Eq. (7.6) ; elles sont donc données à une valeur π près. Selon les avances de phase choisies, l'angle du collimateur secondaire avec l'axe horizontal est alors défini grâce à Eq. (7.7).

7.2.2 Collimation en moment pour les beta-beams

La discrimination entre les ions acceptés et ceux collimatés se fait sur leurs coordonnées dans l'espace transverse. L'amplitude bêatron est donc à prendre en compte même dans le cas d'une collimation en énergie, ce qui nécessite d'avoir la dispersion normalisée la plus élevée possible. De plus, la présence du collimateur va changer la distribution du faisceau dans l'espace des phases $6D$. Ainsi, les dimensions du faisceau au point d'injection s'en trouveront modifiées, ce qui aura un impact sur les paramètres d'injection tels que l'espace disponible pour la lame du septum. Parce que le faisceau est injecté à une différence d'énergie à 5 %, on ne peut placer d'obstacles tels qu'un collimateur dans la région des énergies positives. Cependant,

la collimation en énergie a lieu essentiellement pendant le mélange entre les faisceaux injecté et stocké ; un collimateur primaire dans la zone des énergies négatives serait donc suffisant.

Dans le cas d'une collimation en moment, les pertes sont localisées dans le plan horizontal. Il n'est donc pas nécessaire d'approcher un collimateur circulaire avec un certain nombre de collimateurs plans : un plan vertical suffit et donc $\alpha_1 = \pi$. Cependant, nous avons toujours la condition $X'_0 = Y'_0 = 0$ au collimateur primaire. En utilisant les notations précédentes, la position normalisée d'une particule quelconque s'exprime dans le plan transverse :

$$\begin{aligned} X &= \delta_P \cdot \eta_x + X_\beta \\ X' &= \delta_P \cdot \eta'_x + X'_\beta \\ Y &= \delta_P \cdot \eta_y + Y_\beta \\ Y' &= \delta_P \cdot \eta'_y + Y'_\beta \end{aligned} \quad (7.8)$$

où $X_\beta, X'_\beta, Y_\beta, Y'_\beta$ sont les amplitudes bêatron normalisées de la particule.

Ainsi, pour avoir $X'_0 = 0$ quelle que soit la valeur de δ , nous avons nécessairement :

$$\eta_{x,0} = 0 \Rightarrow \frac{D'_x}{D_x} = -\frac{\alpha_x}{\beta_x}$$

au collimateur primaire.

La section de collimation en moment est certes dispersive mais ne contient pas de dipôles. Aussi, au premier ordre, nous pouvons utiliser le formalisme exposé précédemment pour une collimation bêatron. Bien sûr, l'énergie de la particule devra être prise en compte afin de calculer les extensions du faisceau dans les arcs. Nous obtenons alors les positions optimales pour les collimateurs secondaires d'après l'Eq. (7.7) (TAB. 7.2). L'ouverture normalisée n_1 au collimateur primaire peut être reliée à l'énergie à laquelle le faisceau est collimaté par :

$$n_1 = \delta_C \cdot \eta_C$$

avec le formalisme suivant :

l'indice i	désigne les valeurs au point d'injection
l'indice C	les valeurs au collimateur primaire
n_σ	le nombre d'écart types considérés pour la distribution
δ_C	la différence relative en impulsion à laquelle le faisceau est collimaté
$\delta_C \cdot D_C$	la position du collimateur primaire dans la direction horizontale
δ_{Pm}	la différence relative en moment maximale d'un ion P lors de sa révolution dans l'espace des phases longitudinal
$A_{x,\beta}(\delta_P)$	l'amplitude bêatron horizontale normalisée de la particule P de moment $\delta = \delta_P$

En utilisant l'Eq. (7.8), $X'_\beta \leq K_C = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}$ et $X_\beta \leq n_\sigma \leq n_1$, l'amplitude bêatron horizontale maximale d'une particule P juste après son premier passage dans le collimateur primaire est :

$$A_{x,\beta,1}(\delta_{Pm}) = \min \left[\sqrt{n_2^2 - 2n_1\eta_C \cdot \delta_{Pm} + \eta_C^2 \cdot \delta_{Pm}^2}, n_\sigma \right]$$

TAB. 7.2 – Avances de phase optimales μ_x et μ_y entre les collimateurs primaires et secondaires. L'angle α_2 du collimateur secondaire avec l'axe horizontal est également donné.

α_1	ϕ	μ_x	μ_y	α_2
π	π	μ_0	–	π
π	0	$\pi - \mu_0$	–	0
π	$\pi/2$	π	$\pi/2$	μ_0
π	$-\pi/2$	π	$\pi/2$	$-\mu_0$

L'ouverture minimale requise $X_i(\delta_{Pm})$ dans les éléments de l'arc est donnée au point où la dispersion normalisée est la plus grande dans l'arc, soit au point d'injection dans le cas des beta-beams :

$$X_i(\delta_{Pm}) = \delta_{Pm} \cdot \eta_i + \sqrt{n_2^2 - 2n_1\eta_C \cdot \delta_{Pm} + \eta_C^2 \cdot \delta_{Pm}^2}$$

L'ouverture totale X_{\max} requise dans l'anneau est alors :

$$X_{\max} = \delta_C \cdot \eta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2}$$

Dans le cas où les ouvertures sont suffisantes, le halo secondaire généré par le collimateur primaire ne devrait pas se déposer dans l'arc. Cependant, en cas d'interaction avec le collimateur primaire, l'invariant de Courant et Snyder d'un ion augmente. L'ion entrera à nouveau en contact avec les collimateurs au bout d'un certain nombre de tours et son invariant augmentera de nouveau. À un moment donné, son invariant sera trop important et l'ion sera alors perdu. Aussi, en première approximation, nous pouvons considérer que tout ion ayant interagi à un moment donné avec le collimateur primaire sera perdu après un certain nombre de tours. En d'autres termes, cela revient à considérer le cas $n_2 = n_1$.

L'amplitude bêtatron maximale $A_{x,\beta}(\delta_{Pm}, s)$ d'un ion de moment maximal δ_{Pm} est alors :

$$\begin{aligned} A_{x,\beta}(\delta_{Pm}, s) &= n_\sigma && \text{si } 0 \leq \delta_{Pm} \leq \delta_1 \\ &= \eta_C (\delta_C - \delta_{Pm}) && \text{si } \delta_1 \leq \delta_{Pm} \leq \delta_C \\ &= 0 && \text{si } \delta_C \leq \delta_{Pm} \end{aligned} \quad (7.9)$$

où $\delta_1 = \delta_C - \frac{n_\sigma}{\eta_C}$

La quantité δ_1 peut s'interpréter comme la valeur minimale de l'écart en énergie d'une particule à partir de laquelle celle-ci peut entrer en collision avec le collimateur primaire. Nous en déduisons donc la taille du faisceau $A_x(s)$ en tout point de la structure d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} A_x(s) &= \eta_x(s) \cdot \delta_C + n_\sigma \left(1 - \frac{\eta_x(s)}{\eta_C}\right) && \text{si } \eta_x(s) \leq \eta_C \\ &= \eta_x(s) \cdot \delta_C && \text{si } \eta_x(s) \geq \eta_C \end{aligned} \quad (7.10)$$

Proportion d'ions ayant été collimatés

Afin de déterminer la dispersion normalisée η_C nécessaire au collimateur primaire, cette section va établir une relation entre η_C et le nombre d'ions effectivement collimatés par le système (en tenant compte de leur amplitude bêtatron). Celui-ci sera alors comparé au cas d'une

collimation idéale (dispersion normalisée tendant vers l'infini ; seuls les ions dont l'invariant du mouvement dans l'espace longitudinal est supérieur à une valeur définie sont collimatés).

Nous nous plaçons dans le cas où il n'y a pas de corrélation entre les plans transverses et longitudinaux pour la distribution ρ_0 du faisceau injecté. Elle s'écrit donc en utilisant les notations précédentes sous la forme :

$$\rho_0(X, X', Y, Y', l, \delta) = \rho_x(X, X') \cdot \rho_y(Y, Y') \cdot \rho_\delta(l, \delta)$$

Cependant, une fois le faisceau injecté dans la structure, sa distribution longitudinale va être modifiée au fil du temps du fait du programme RF (Chapitre 8). Par contre, au premier ordre, les invariants de Courant et Snyder et donc les quantités A_x et A_y des ions stockés ne sont pas modifiés sauf interaction avec le collimateur primaire. Si c'était le cas, l'ion peut être considéré comme perdu. La distribution du faisceau injecté au cours du temps prend alors la forme :

$$\rho(X, X', Y, Y', l, \delta, \eta_C, t) = \rho_x(X, X') \cdot \rho_y(Y, Y') \cdot \rho_\delta(l, \delta, t) \cdot k(X, X', l, \delta, \eta_C, t)$$

La fonction k retranscrit la collimation en moment du faisceau et introduit un couplage entre les plans horizontaux et longitudinaux. Introduisons les fonctions f_δ et f_l qui retranscrivent les valeurs du moment et de la position longitudinale prises par l'ion lors de son transport dans le plan longitudinal. Si l_0, δ_0 correspondent aux coordonnées de l'ion P à l'instant initial alors ses coordonnées $l(t), \delta(t)$ à l'instant t sont :

$$(l(t), \delta(t)) = (f_l(l_0, \delta_0), f_\delta(l_0, \delta_0))$$

Dans notre cas, l'expression de la fonction $k(X, X', l, \delta, t)$ découle directement de l'Eq. (7.9) et de f_δ :

$$\text{Soient } (l_0, \delta_0) \text{ tels que : } (l(t), \delta(t)) = (f_l(l_0, \delta_0), f_\delta(l_0, \delta_0))$$

$$\begin{aligned} k(X, X', l, \delta, t) &= 1 \quad \text{si } \forall t' < t, A_x < A_{x,\beta}(f_\delta(l_0, \delta_0, t'), s_C) \\ &= 0 \quad \text{si } \exists t' < t/A_x \geq A_{x,\beta}(f_\delta(l_0, \delta_0, t'), s_C) \end{aligned}$$

A l'instant t , le nombre d'ions restant $N_{\text{inj}}(t)$ du faisceau injecté est alors :

$$\begin{aligned} N_{\text{inj}}(\eta_C, t) &= \iiint \iiint \rho(X, X', Y, Y', l, \delta, \eta_C, t) dX dX' dY dY' dl d\delta \\ &= \iint \rho_y(Y, Y') dY dY' \times \\ &\quad \iint \left(\iint \rho_x(X, X') k(X, X', l, \delta, \eta_C, t) dX dX' \right) \rho_\delta(l, \delta, t) dl d\delta \end{aligned}$$

En pratique, il faudrait faire un transport $6D$ du faisceau entrant injection après injection pour aboutir à la distribution $6D$ finale du faisceau stocké. Néanmoins, afin de conserver une bonne précision sur les résultats, cela suppose le transport d'un plus grand nombre de points et une quantité de calculs accrue par rapport au transport uniquement dans le plan longitudinal présenté dans le Chapitre 8. Afin d'économiser du temps de calcul, nous transporterons un nuage de points uniquement dans le plan longitudinal, ce qui nous donne ρ_δ . Ensuite, connaissant la distribution initiale du faisceau injecté, il est possible de calculer le nombre

d'ions restant du faisceau injecté après n injections, soit $N_{\text{inj}}(\eta_C, n.T)$. Enfin, l'Eq. (8.19) donne le nombre d'ions stockés dans l'anneau en fonction de η_C (FIG. 7.15) :

$$N_S(\eta_C, t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{\text{inj}}(\eta_C, t + n.T) 2^{-\frac{t+n.T}{\gamma\tau}}$$

Nous nous plaçons dans le cas où la collimation du faisceau a lieu immédiatement après l'injection. D'après Eq. (8.21), le nombre total d'ions perdus par décroissance $N_d(\eta_C)$ et celui par collimation $N_C(\eta_C)$ entre deux injections sont alors :

$$\begin{aligned} N_d(\eta_C) &= \left(1 - 2^{-\frac{T}{\gamma\tau}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} N_{\text{inj}}(\eta_C, (n+1).T) 2^{-\frac{n.T}{\gamma\tau}} \\ N_C(\eta_C) &= \sum_{n=0}^{\infty} (N_{\text{inj}}(\eta_C, n.T) - N_{\text{inj}}(\eta_C, (n+1).T)) 2^{-\frac{n.T}{\gamma\tau}} \end{aligned}$$

Ceci permet alors de tracer la répartition des pertes ayant lieu entre deux injections en fonction de la valeur de η_C au collimateur primaire (FIG. 7.12). Il apparaît que les pertes tendent rapidement vers une asymptote pour $\eta_C \sqrt{\epsilon}$ de l'ordre de quelques $m^{1/2}$. Afin de mieux apprécier la valeur minimale pour η_C , nous introduisons le rapport $r_d(\eta_C)$ entre le nombre de décroissances ayant effectivement lieu entre deux injections et celui, asymptotique, où la collimation est supposée idéale :

$$r_d(\eta_C) = \frac{N_d(\eta_C)}{\lim_{\eta_C \rightarrow \infty} N_d(\eta_C)}$$

La FIG. 7.14 montre que le palier est atteint à 90% pour $\frac{D_C}{\sqrt{\beta_C}} \approx 1 m^{1/2}$ dans le cas de ${}^6\text{He}^{2+}$ et pour $\frac{D_C}{\sqrt{\beta_C}} \approx 1.5 m^{1/2}$ dans le cas du ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. L'optique de la section de collimation devra donc être réalisée de façon à avoir une dispersion normalisée au collimateur primaire de l'ordre de quelques $m^{1/2}$.

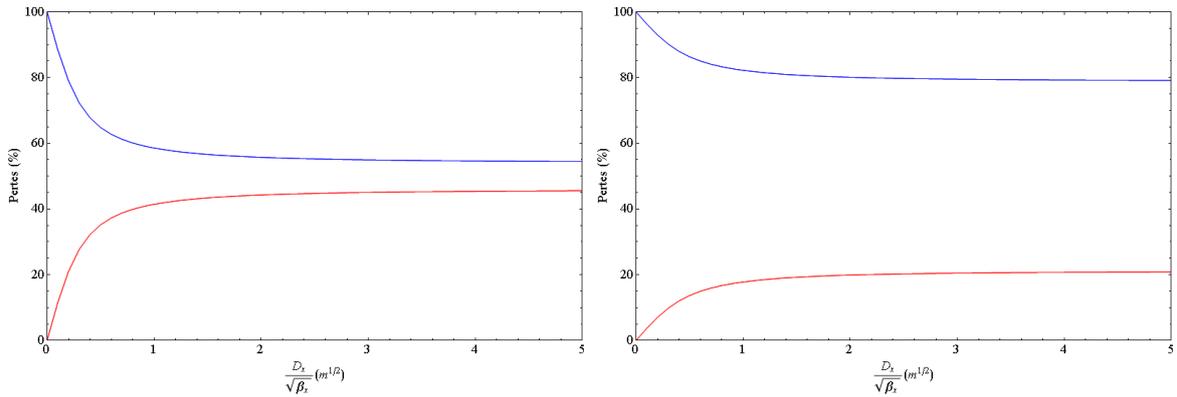


FIG. 7.12 – Cumul des pertes par collimation (en rouge) et par décroissance (en bleu) en fonction de la dispersion normalisée au collimateur primaire pour un faisceau gaussien d' ${}^6\text{He}^{2+}$ (à gauche) et de ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ (à droite).

Amélioration possible du système de collimation

Afin de mieux discriminer les ions de trop haute énergie, une transformation adiabatique à l'aide d'une seconde cavité a été proposée sur le faisceau stocké afin d'augmenter temporairement sa dispersion en énergie. Le faisceau est alors comprimé dans la direction longitudinale, ce qui permet de conserver la même aire. En première approximation, le faisceau est assimilé à une ellipse de distribution uniforme dans l'espace longitudinal et sa déformation par le système RF à une affinité de déterminant 1. Le facteur d'accroissement λ du demi-axe de l'ellipse selon la direction $\frac{\Delta p}{p}$ est alors l'inverse de celui selon la direction longitudinale (FIG. 7.13). L'autre avantage de cette méthode est que la collimation en moment des particules se fait de manière lente du fait de l'augmentation progressive du moment maximal des ions du faisceau. Dans la suite, λ sera utilisé comme paramètre. Dans le cas où cette transformation n'aurait pas lieu, il suffira de prendre le cas $\lambda = 1$.

L'amplitude bêatron maximale d'un ion de moment maximal δ_{Pm} avant la transformation serait alors :

$$\begin{aligned} A_{x,\beta}(\delta_{Pm}, s) &= n_\sigma && \text{si } 0 \leq \delta_{Pm} \leq \delta_1 \\ &= \lambda \cdot \eta_C \cdot (\delta_C - \delta_{Pm}) && \text{si } \delta_1 \leq \delta_{Pm} \leq \delta_C \\ &= 0 && \text{si } \delta_C \leq \delta_{Pm} \end{aligned}$$

$$\text{où } \delta_1 = \delta_C - \frac{n_\sigma}{\lambda \cdot \eta_C}$$

La taille du faisceau $A_x(s)$ en tout point de la structure est donc après collimation :

$$\begin{aligned} A_x(s) &= \eta_x(s) \cdot \delta_C + n_\sigma \left(1 - \frac{\eta_x(s)}{\lambda \eta_C}\right) && \text{si } \eta_x(s) \leq \eta_C \\ &= \eta_x(s) \cdot \delta_C && \text{si } \eta_x(s) \geq \eta_C \end{aligned}$$

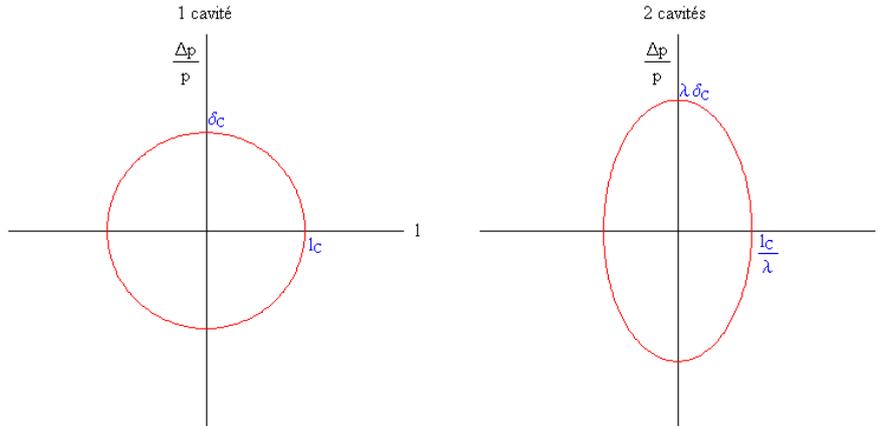


FIG. 7.13 – Forme du faisceau stocké dans l'espace longitudinal à l'injection (à gauche) et pendant la collimation (à droite).

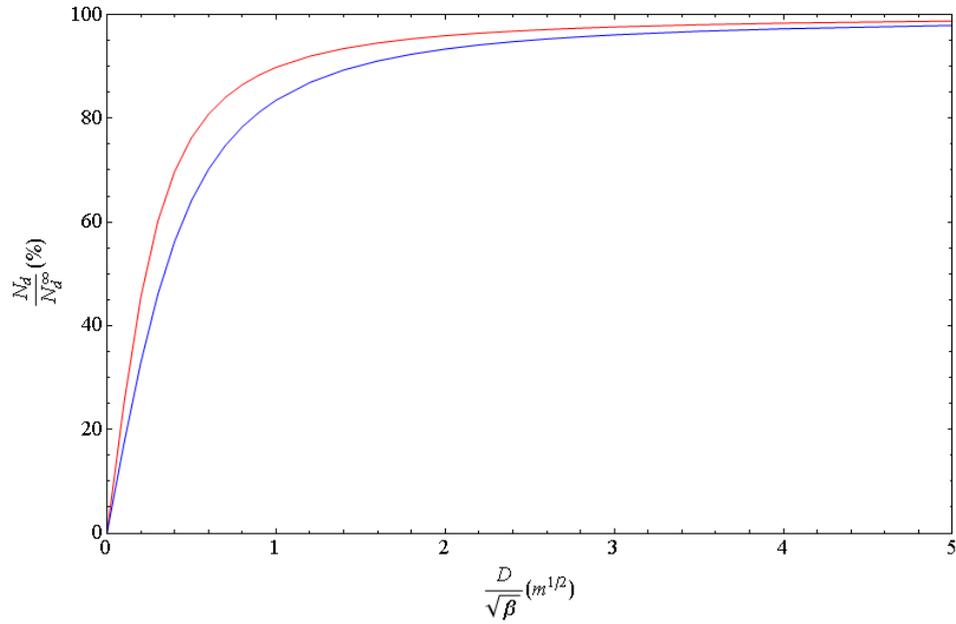


FIG. 7.14 – Rapport entre le nombre réel d’ions ayant décru entre deux injections successives et celui dans le cas d’une collimation en moment idéale en fonction de la dispersion normalisée au collimateur primaire pour un faisceau gaussien d’ ${}^6\text{He}^{2+}$ (en rouge) et de ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ (en bleu).

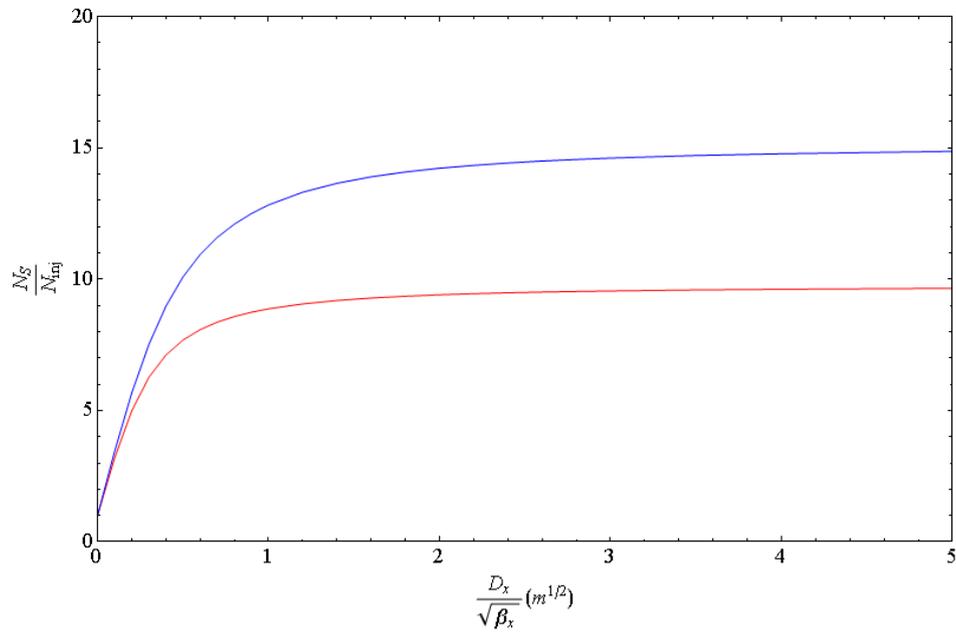


FIG. 7.15 – Rapport entre le nombre d’ions stockés dans l’anneau à l’équilibre et le nombre d’ions injectés en fonction de la dispersion normalisée au collimateur primaire pour un faisceau gaussien d’ ${}^6\text{He}^{2+}$ (en rouge) et de ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ (en bleu).

7.3 Conclusion

Finalement, cette partie a permis d'étudier les deux sources principales de pertes dans l'anneau et les moyens d'y faire face. La première source de pertes provient de la décroissance β des ions radioactifs. L'extraction des produits de décroissance n'étant pas possible dans les arcs à cause de la trop grande différence de rigidité magnétique avec les ions pères, l'insertion de blocs d'arrêt dans la structure est nécessaire afin de protéger les éléments magnétiques, supraconducteurs. L'optique de l'anneau a donc été modifiée dans ce sens et un code a été implémenté dans *BETA* afin d'y évaluer le niveau de pertes. En première approximation, les éléments magnétiques sont protégés mais des simulations plus poussées par transport *6D* d'un nuage de particules et utilisation de codes de simulation nucléaire comme *FLUKA* [106] ou *GEANT4* [107] seront nécessaires dans la suite.

La seconde source de pertes provient du gonflement dans l'espace des phases longitudinal du faisceau stocké du fait du programme RF réalisé entre deux injections. Contrairement au cas précédent, ces pertes sont localisées au niveau d'une section de collimation en énergie. Le principe du programme de mélange par le système RF est décrit en Chapitre 8 et les contraintes qui en découlent sur l'optique de cette section ont été exposées.

L'optique de l'anneau de décroissance a donc dû intégrer plusieurs contraintes que ce soit sur l'ouverture et la longueur des dipôles de l'arc ou la dispersion normalisée dans la section de collimation.

Chapitre 8

DYNAMIQUE LONGITUDINALE

Dans les Chapitre 4 et Chapitre 5, nous avons considéré le mouvement d'une particule dans le plan transverse. En l'absence de champ électrique, la force de Lorentz est toujours orthogonale au mouvement, ce qui fait qu'il n'y a pas de travail. Le faisceau n'est donc pas accéléré avec une optique uniquement composée d'éléments magnétiques. Le faisceau stocké dans un accélérateur est organisé en train de paquets de particules. Le faisceau est alors dit **groupé**. Cependant, le faisceau possède une distribution en énergie et donc en vitesses. Au fur et à mesure du transport, le faisceau va donc s'étaler dans la direction longitudinale. Pour garder le faisceau en paquets ou/et pour l'accélérer, des cavités accélératrices dans lesquelles circule une onde radio fréquence, dites cavités RF, sont alors utilisées.

Nous allons nous intéresser au formalisme lié au plan longitudinal puis nous traiterons le cas des beta-beams où deux cavités RF de tension et de déphasage variable sont utilisées [77, 78].

8.1 Cas d'une cavité

8.1.1 Notions de particule synchrone

Dans la suite, nous noterons V la loi de tension de la cavité RF, V_{RF} sa tension maximale et ω_{RF} sa pulsation. Il est possible que V_{RF} et ω_{RF} varient avec des temps longs devant la période de révolution des particules. Soit t le moment où une particule pénètre dans la cavité, nous poserons

$$\phi(t) = \int_0^t \omega_{\text{RF}}(\tau) d\tau + \phi(0) \approx 2\pi\omega_{\text{RF}}t + \phi_0$$

sa **phase RF** alors la tension de la cavité au moment du passage de la particule est [87, p 163-173], [115, 116] :

$$V(t) = V_{\text{RF}} \sin(\phi(t))$$

La cavité est supposée de longueur nulle. Nous négligerons ainsi le temps de transit de la particule à l'intérieur de la cavité. Pour des calculs plus détaillés, nous vous renvoyons à [115, 116].

Nous appellerons **particule synchrone** une particule pour laquelle la phase radio-fréquence est constante. En d'autres termes, si \mathcal{T} est l'ensemble des temps où cette particule traverse la cavité alors :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \phi(t) \equiv \phi_S [2\pi]$$

où ϕ_S est une constante appelée **phase synchrone**.

Dans la suite, nous utiliserons l'indice S pour désigner une particule synchrone, choisie arbitrairement, et nous ferons coïncider l'origine des temps avec son passage dans la cavité, si bien que $\phi(0) = \phi_S$. Nous noterons dans la suite $2\pi R_S$ la longueur de son orbite fermée, v_S sa vitesse, p_S sa quantité de mouvement, $\omega_S = \frac{v_S}{R_S}$ sa pulsation et m_0 sa masse au repos.

En supposant que la fréquence RF varie très lentement devant la période du tour, la différence de phase RF entre 2 passages successifs de la particule synchrone dans la cavité est :

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\omega_{\text{RF}}}{\omega_S} = 2\pi n \text{ avec } n \text{ entier}$$

La fréquence de la cavité RF est donc un multiple entier de la fréquence de révolution de la particule synchrone et nous avons :

$$\omega_{\text{RF}} = h\omega_S \quad (8.1)$$

h est appelé **nombre harmonique** de la cavité RF. Pour une cavité, il existe donc h particules synchrones possibles séparées en phase de $\frac{2\pi}{h}$.

A chaque tour, le gain en énergie $(\Delta E_S)_{\text{tour}}$ de la particule synchrone est :

$$(\Delta E_S)_{\text{tour}} = qV_{\text{RF}} \sin \phi_S$$

Afin de conserver la particule synchrone comme particule de référence pour le plan transverse, les champs magnétiques des éléments doivent varier afin de conserver la même force. Le gain en énergie par tour est relié à la dérivée de l'énergie de la particule synchrone par rapport au temps par :

$$(\Delta E_S)_{\text{tour}} = \dot{E}_S \cdot \frac{2\pi R_0}{v_S} \quad (8.2)$$

En écrivant que $E_S^2 = m_0^2 c^4 + p_S^2 c^2$ et donc que $E_S \dot{E}_S = p_S \dot{p}_S c^2 = E_S v_S \dot{p}_S$, nous avons finalement une relation entre la variation de la rigidité magnétique et l'accélération de la particule synchrone :

$$2\pi R_0 \frac{d(B\rho)}{dt} = V_{\text{RF}} \sin \phi_S$$

où $(B\rho) = \frac{p_S}{q}$ est la rigidité magnétique.

8.1.2 Oscillation synchrotron d'une particule

Nous allons nous intéresser au mouvement d'une particule P quelconque dans cet espace. Nous avons vu que si nous nous plaçons en un point quelconque A de la structure, la phase RF d'une particule synchrone P_S est une constante à 2π près. Aussi, nous faisons coïncider

l'origine de l'espace longitudinal avec une particule synchrone. L'énergie de référence sera prise égale à celle de la particule synchrone.

Soit $s(t)$ l'abscisse curviligne de la particule étudiée et $R(t)$ le rayon moyen de son orbite fermée alors nous définissons la **position azimutale** de la particule par la quantité $s(t)/R(t)$. L'abscisse de l'espace des phases longitudinal sera alors la différence $\theta(t)$ entre la position azimutale de la particule P et celle de la particule de référence P_S au moment où cette dernière passe par un point fixe A . Une valeur positive de θ signifiera que la particule P est en avance sur celle de référence. La particule P traverse alors la cavité à la phase RF $\phi_S - h\theta(t)$. Nous posons la position azimutale θ_S définie à $2\pi/h$ près de la particule synchrone :

$$h\theta_S = -\phi_S$$

L'avantage d'utiliser la variable θ_S est qu'elle ne dépend pas de la fréquence RF, et ceci prend tout son intérêt dans le cas où plusieurs cavités de fréquences différentes sont utilisées. Nous prendrons pour ordonnée la différence relative en moments δ entre les deux particules.

Le gain en énergie par tour de la particule P s'exprime alors par :

$$(\Delta E)_{\text{tour}} = -qV_{\text{RF}} \sin(h\theta + h\theta_S)$$

Dans cette partie, nous utiliserons le symbole Δ pour désigner une différence entre la particule P et la particule de référence. En utilisant l'Eq. (8.2) et en utilisant le fait que $\dot{E} = \dot{p}v$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2\pi R\dot{p} &= -qV_{\text{RF}} \sin(h\theta + h\theta_S) \\ 2\pi\Delta(R\dot{p}) &= -qV_{\text{RF}} [\sin(h\theta + h\theta_S) - \sin(h\theta_S)] \end{aligned}$$

Nous ne nous intéresserons ici qu'au développement au premier ordre du mouvement dans l'espace longitudinal. Nous avons alors [87] :

$$\begin{aligned} \Delta(R\dot{p}) &\approx R_S\Delta\dot{p} + \dot{p}_S\Delta R \\ &\approx \frac{d}{dt}(R_S\Delta p) \end{aligned}$$

Nous avons finalement la relation :

$$\frac{d}{dt}(2\pi R_S\Delta p) = -qV_{\text{RF}} [\sin(h\theta + h\theta_S) - \sin(h\theta_S)] \quad (8.3)$$

Par définition, la pulsation est la dérivée de la position azimutale en fonction du temps. Nous avons la relation :

$$\dot{\theta} = \Delta\omega$$

Il est à noter que par définition :

$$\omega = \frac{v}{R}$$

D'après Eq. (4.26), nous avons :

$$2\pi R = 2\pi R_S \left(1 + \alpha \frac{\Delta p}{p_S} \right)$$

En utilisant $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{p_S} &= \frac{\Delta(\beta\gamma)}{(\beta\gamma)_S} = \gamma_S^2 \frac{\Delta\beta}{\beta_S} \\ \frac{\Delta\omega}{\omega_S} &\approx \frac{\Delta\beta}{\beta_S} - \frac{\beta}{\beta_S} \alpha \frac{\Delta p}{p_S} \\ &\approx \frac{\Delta p}{p_S} \left(\frac{1}{\gamma_S^2} - \alpha \right) \end{aligned}$$

Nous introduisons ainsi le facteur η tel que :

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{\omega} / \frac{dp}{p} = \frac{1}{\gamma_S^2} - \alpha \quad (8.4)$$

η s'annule en changeant de signe pour la valeur de γ : $\gamma_{\text{tr}}^2 = 1/\alpha$. Cette valeur correspond au fait que l'augmentation de la vitesse due à une énergie plus élevée ne compense plus l'allongement de l'orbite fermée avec l'énergie. Nous verrons dans la suite que le critère de stabilité du faisceau dépendra du signe de η .

De Eq. (8.3) et Eq. (8.4), nous avons finalement le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (2\pi R_S \Delta p) = -qV_{\text{RF}} [\sin(h\theta + h\theta_S) - \sin(h\theta_S)] \\ \dot{\theta} = \frac{\omega_S \eta}{2\pi R_S p_S} (2\pi R_S \Delta p) \end{cases} \quad (8.5)$$

En supposant des variations très lentes des paramètres R_S, p_S, η, ω_S et V_{RF} , nous aboutissons finalement à l'équation différentielle suivante :

$$h\ddot{\theta} + \frac{\Omega^2}{\cos(h\theta_S)} (\sin(h\theta + h\theta_S) - \sin(h\theta_S)) = 0 \quad (8.6)$$

avec $\Omega^2 = \frac{qV_{\text{RF}}}{p_S} \cdot \frac{h\omega_S \eta}{2\pi R_S} \cos(h\theta_S)$

L'Eq. (8.6) donne l'invariant du mouvement U_l suivant [87] :

$$\frac{1}{2} (h\dot{\theta})^2 - \frac{\Omega^2}{\cos(h\theta_S)} (\cos(h\theta + h\theta_S) + h\theta \sin(h\theta_S)) = \frac{1}{2} U_l \quad (8.7)$$

L'Eq. (8.7) définit l'ensemble des isohamiltoniennes relatives à l'invariant U_l . Dans le cas des beta-beams, l'absence d'accélération permet d'assimiler $\dot{\theta}$ à $\frac{\Delta p}{p_S}$ car p_S est constant. En utilisant les coordonnées de l'espace des phases, cela nous donne l'ensemble des isohamiltoniennes ($\mathcal{H}_{\text{const}}$) du système définies chacune à une constante près :

$$(\mathcal{H}_{\text{const}}) : \left(\frac{\Delta p}{p_S} \right)^2 = \frac{qV_{\text{RF}}}{\pi h \eta E_S \beta_S^2} (\cos(h\theta + h\theta_S) + h\theta \sin(h\theta_S)) + \text{const}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la zone de stabilité du faisceau et donc aux isohamiltoniennes appelées **séparatrices** définissant la frontière de ce domaine. La séparatrice définit l'**acceptance RF** de la machine. Cependant, elle ne délimite que la borne supérieure de l'acceptance en moment de la machine car la dispersion du nombre d'onde en fonction de l'énergie ou les ouvertures des éléments réduisent généralement l'acceptance transverse de la machine et donc l'acceptance totale en moment. L'une des élongations maximales pour la séparatrice est donnée par la valeur d'inversion de $\sin(h\theta + h\theta_S) - \sin(h\theta_S)$ d'après l'Eq. (8.6) soit $\pi/h - 2\theta_S$. En ce point, $\Delta p/p_S$ est nul et donc nous avons la valeur de const correspondant à la séparatrice :

$$C_{\max} = \frac{\pi h \eta E_S \beta_S^2}{q V_{\text{RF}}} [\cos(h\theta_S) - (\pi - 2h\theta_S) \sin(h\theta_S)]$$

Nous trouvons alors la valeur maximale pour la dispersion en énergie du faisceau acceptée par le système RF :

$$\left(\frac{\Delta p}{p_S}\right)_{\max} = \frac{1}{\beta_S} \sqrt{\frac{q V_{\text{RF}}}{\pi h \eta E_S} (2 \cos(h\theta_S) - (\pi - 2h\theta_S) \sin(h\theta_S))}$$

Dans le cas où θ est petit au cours du mouvement, la linéarisation de Eq. (8.6) donne :

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0$$

Nous retrouvons donc l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. Pour de faibles amplitudes, le mouvement de la particule dans l'espace de phase longitudinal est donc une ellipse de pulsation Ω . La stabilité du mouvement impose alors que $\Omega^2 > 0$ et donc le critère de stabilité

$$q V_{\text{RF}} \eta \cos(h\theta_S) > 0 \quad (8.8)$$

Ainsi, lorsque γ_S passe la valeur de transition γ_{tr} , le signe de Eq. (8.8) change, la phase synchrone stable de la cavité varie de π et le faisceau stocké devient instable dans la structure.

Dans le cas de l'anneau de décroissance des beta-beams et du faisceau d' ${}^6\text{He}^{2+}$, la cavité RF principale développe une tension maximale de 20 MV pour une fréquence de 40 MHz. Du fait du rayon moyen de l'anneau égal à celui du SPS (1100 m) et du facteur de Lorentz égal à $\gamma = 100$, nous en déduisons un nombre harmonique $h = 924$ pour une énergie au repos de $E_0 = 5.589$ GeV. L'énergie de référence est donc $E_S = 558.9$ GeV. Le momentum compaction de la structure est 1.376‰, ce qui nous donne dans ce cas $\eta = -1.276$ ‰. Il s'agit d'un anneau de stockage où l'énergie de référence est maintenue constante. Du fait du critère de stabilité, nous avons nécessairement $h\theta_S = \pi$ et obtenons les isohamiltoniennes de la FIG. 8.1.

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés au cas simple à une cavité. Dans le cas des beta-beams, des cavités additionnelles changent la forme des isohamiltoniennes et donc la dynamique du faisceau dans l'espace longitudinal. Dans la partie qui suit, nous allons traiter le cas général à plusieurs cavités puis l'appliquer aux beta-beams.

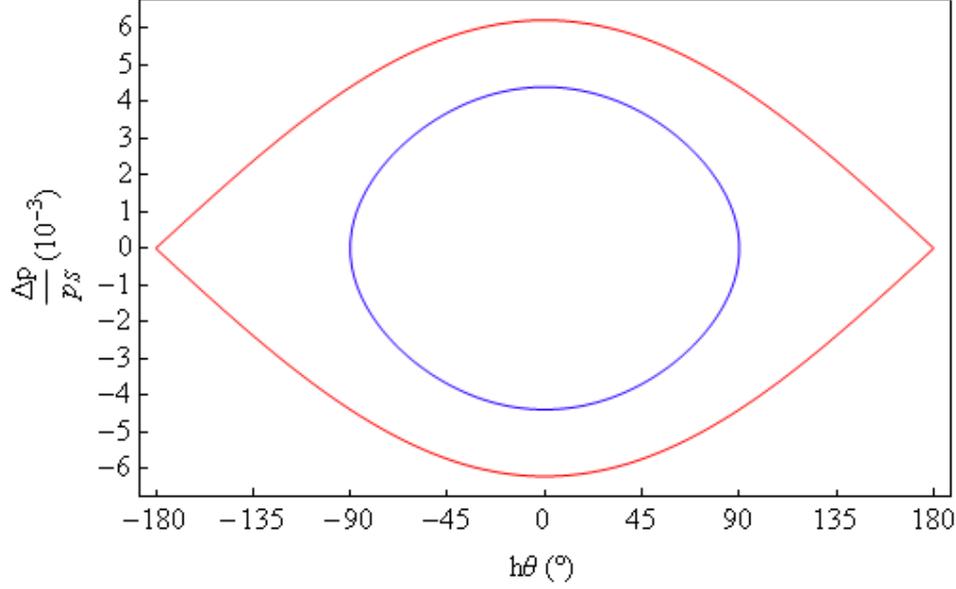


FIG. 8.1 – Isohamiltoniennes pour l’anneau de désintégration des beta-beams dans le cas de ${}^6\text{He}^{2+}$. En rouge, séparatrice.

8.2 Cas général à n cavités

Nous prenons maintenant une structure comportant n cavités, de tensions crêtes et de fréquences différentes. Nous choisissons arbitrairement l’une des particules synchrones comme particule de référence et nous faisons coïncider l’origine du repère avec cette particule. Nous désignerons par h_i le nombre harmonique et V_i la tension maximale de la i -ème cavité et noterons $-h_i\theta_i$ sa phase RF lors de sa traversée par la particule synchrone. L’avantage de la position azimutale de la particule par rapport à la phase RF est qu’elle est indépendante du nombre harmonique de la cavité traversée. Le gain par tour de la particule synchrone est donc :

$$(\Delta E)_{S_{\text{tour}}} = -q \sum_{i=0}^n V_i \sin(h_i\theta_i) \quad (8.9)$$

Le gain par tour d’une particule quelconque est alors :

$$(\Delta E)_{\text{tour}} = -q \sum_{i=0}^n V_i \sin(h_i\theta + h_i\theta_i)$$

De plus, la définition de θ implique que :

$$\forall t, \dot{\theta} = \omega_S \eta \frac{\Delta p}{p_S}$$

Dans le cas d’une particule synchrone, par définition, $\dot{\theta} = 0$. Une valeur non nulle de η implique donc que $\frac{\Delta p}{p_S} = 0$. Le gain en énergie par tour de deux particules synchrones est donc le même. Si θ_S est la différence de position azimutale entre une autre particule synchrone et

celle de référence alors nous avons d'après Eq. (8.9) :

$$\sum_{i=0}^n V_i \sin(h_i \theta_S + h_i \theta_i) = \sum_{i=0}^n V_i \sin(h_i \theta_i)$$

En reprenant le même raisonnement que précédemment, nous aboutissons au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(2\pi R_S \Delta p) = -q \sum_{i=0}^n V_i \sin(h_i(\theta + \theta_i)) - (\Delta E)_{S \text{ tour}} \\ \dot{\theta} = \frac{\omega_S \eta}{2\pi R_S p_S} (2\pi R_S \Delta p) \end{cases} \quad (8.10)$$

En supposant des variations lentes devant le temps de révolution des paramètres V_i , θ_i , R_S et p_S , nous avons finalement l'équation différentielle suivante d'après Eq. (8.10) :

$$\ddot{\theta} + \frac{q\omega_S \eta}{2\pi R_S p_S} \sum_{i=0}^n V_i [\sin(h_i(\theta + \theta_i)) - \sin(h_i \theta_i)] = 0 \quad (8.11)$$

Nous obtenons alors un invariant du mouvement U_l lié à l'Hamiltonien H du système donné par :

$$\forall t, \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{q\omega_S \eta}{2\pi R_S p_S} \sum_{i=0}^n \frac{V_i}{h_i} (\cos(h_i(\theta + \theta_i)) + h_i \theta \sin(h_i \theta_i)) = \frac{1}{2} U_l \quad (8.12)$$

Par l'Eq. (8.12), nous obtenons alors l'équation implicite de la famille des isohamiltoniennes (\mathcal{H}_C) du système à n cavités dans l'espace longitudinal :

$$(\mathcal{H}_C) : \left(\frac{\Delta p}{p_S} \right)^2 - \frac{q}{\pi \eta E_S \beta_S^2} \sum_{i=0}^n \frac{V_i}{h_i} (\cos(h_i(\theta + \theta_i)) + h_i \theta \sin(h_i \theta_i)) = C \quad (8.13)$$

L'Eq. (8.11) permet, comme précédemment, de dire que pour toute position azimutale θ_S d'une particule synchrone, nous avons $\ddot{\theta} = 0$ et réciproquement. Ainsi, les extrêma de $\dot{\theta}$ coïncident avec les positions des particules synchrones.

Soit C_S la constante désignant la séparatrice. Nous avons :

$$C > C_S \Leftrightarrow \forall \left(\theta, \frac{\Delta p}{p_S} \right) \in (\mathcal{H}_C), \frac{\Delta p}{p_S} \neq 0$$

Soit θ_0 une position azimutale où la séparatrice traverse l'axe des abscisses. Nous avons alors :

$$C_S = -\frac{q}{\pi \eta E_S \beta_S^2} \sum_{i=0}^n \frac{V_i}{h_i} (\cos(h_i(\theta_0 + \theta_i)) + h_i \theta_0 \sin(h_i \theta_i))$$

D'après la définition de la séparatrice :

$$\forall \theta, -\frac{q}{\pi\eta E_S \beta_S^2} \sum_{i=0}^n \frac{V_i}{h_i} (\cos(h_i(\theta + \theta_i)) + h_i \theta \sin(h_i \theta_i)) \leq C_S$$

Après simplification, nous aboutissons au fait que θ_0 est le minimum absolu de la fonction $\theta \rightarrow q\eta \sum_{i=0}^n \frac{V_i}{h_i} (\cos(h_i(\theta + \theta_i)) + h_i \theta \sin(h_i \theta_i))$. Un passage à la dérivée nous permet de conclure que le minimum est donné par l'une des positions des particules synchrones. Soit $\theta_{S \min}$ la valeur de cette position, nous avons alors :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n V_i (\sin(h_i(\theta_{S \min} + \theta_i)) - \sin(h_i \theta_i)) = 0 \\ \theta_{S \min} \text{ minimise } q\eta \sum_{i=0}^n \frac{V_i}{h_i} (\cos(h_i(\theta + \theta_i)) + h_i \theta \sin(h_i \theta_i)) \\ C_S = -\frac{q}{\pi\eta E_S \beta_S^2} \sum_{i=0}^n \frac{V_i}{h_i} (\cos(h_i(\theta_{S \min} + \theta_i)) + h_i \theta_{S \min} \sin(h_i \theta_i)) \end{cases} \quad (8.14)$$

Si nous linéarisons l'Eq. (8.11) pour de petites valeurs de θ autour d'une particule synchrone de position θ_S alors nous obtenons à nouveau l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta - \theta_S) + \left[\frac{q\omega_S \eta}{2\pi R_{SPS}} \sum_{i=0}^n h_i V_i \cos(h_i(\theta_S + \theta_i)) \right] (\theta - \theta_S) = 0$$

Nous obtenons donc le critère de stabilité à n cavités :

$$q\eta \sum_{i=0}^n V_i h_i \cos(h_i(\theta_S + \theta_i)) > 0 \quad (8.15)$$

La pulsation du mouvement pour de petites amplitudes autour d'une particule synchrone stable est alors donnée par $\Omega_n = \sqrt{\frac{q\omega_S \eta}{2\pi R_{SPS}} \sum_{i=0}^n h_i V_i \cos(h_i(\theta_S + \theta_i))}$.

8.3 Application aux beta-beams

Pour les beta-beams, les ions radioactifs sont stockés dans l'anneau de décroissance après accélération dans les machines précédentes. Les pertes dues à la décroissance sont compensées par des injections régulières en présence d'un faisceau stocké. Les ions sont injectés, à une énergie légèrement différente de celle du faisceau stocké, sur leur orbite chromatique. Ils sont ensuite mélangés au faisceau stocké en faisant varier la tension et le déphasage entre deux familles de cavités RF, l'une à la fréquence de 40 MHz et l'autre à une fréquence double. Un tel système a déjà été utilisé pour la création de halos ou pour la redistribution des particules dans l'espace longitudinal [117, 118]. Par contre, l'originalité des beta-beams est de l'utiliser à des fins d'injection. Ce principe a été prouvé expérimentalement pour l'injection d'un paquet vide [78].

L'injection comprend trois étapes (FIG. 3.3) :

- Le faisceau stocké est approché de la lame d'un aimant à septum à l'aide de déviateurs rapides. Le faisceau « off momentum » dévié par l'aimant à septum est alors injecté. A ce moment, les deux faisceaux sont synchrones. Les déviateurs rapides sont alors éteints.
- La cavité RF principale à 40 MHz est allumée, la secondaire étant éteinte. Après un quart de tour dans l'espace des phases longitudinal, le faisceau injecté se retrouve à la même énergie que le faisceau stocké mais est en retard.
- La cavité secondaire, de fréquence double (80 MHz), est allumée. Le mélange des deux faisceaux commence.

Dans un premier temps, nous allons préciser quelques particularités liées à ce système RF. Ensuite, nous donnerons un algorithme permettant le calcul des lois de phase et de tension pour les cavités RF destinées au mélange des faisceaux injecté et stocké. Le programme calculant ces lois a été réalisé sous Mathematica [119].

8.3.1 Particularités du système RF

Nous nous trouvons dans un cas où nous avons 2 cavités dont l'une est à la fréquence double. Nous avons donc $h_2 = 2h_1$. Nous poserons r le rapport entre les tensions crête des deux cavités. La particule de référence n'est pas accélérée dans l'anneau, ce qui impose d'après Eq. (8.9) :

$$\begin{cases} \sin(h_1\theta_1) + r \sin(2h_1\theta_2) = 0 \\ \sin(h_1(\theta_S + \theta_1)) + r \sin(2h_1(\theta_S + \theta_2)) = 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

où θ_S reste la différence de position azimutale entre une autre particule synchrone et celle de référence

Nous obtenons alors après développement et en utilisant les règles trigonométriques :

$$\sin(h_1\theta_S) [\cos(h_1\theta_1) + 2r \cos(h_1\theta_S) \cos(2h_1\theta_2)] = (\cos(h_1\theta_S) - 1)(2 \cos(h_1\theta_S) + 1) \sin(h_1\theta_1)$$

En passant au carré, nous avons finalement que $\cos(h_1\theta_S)$ est racine du polynôme P d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} P[X] &= (1 - X) \left[(1 + X) (\cos(h_1\theta_1) + 2rX \cos(2h_1\theta_2))^2 - (1 - X)(2X + 1)^2 \sin^2(h_1\theta_1) \right] \\ &= (1 - X) \left[\cos(2h_1\theta_1) + (1 + 4r \cos(h_1\Delta\theta_1))X + 4r(r + \cos(h_1\Delta\theta_1))X^2 + 4r^2X^3 \right] \\ &= (1 - X)Q[X] \end{aligned}$$

où $\Delta\theta_1 = \theta_1 - 2\theta_2$

$$Q[X] = \cos(2h_1\theta_1) + (1 + 4r \cos(h_1\Delta\theta_1))X + 4r(r + \cos(h_1\Delta\theta_1))X^2 + 4r^2X^3$$

La recherche des racines de P passe donc par celles de Q .

Nous avons :

$$\begin{aligned} Q[-1] &= -2 \sin^2(h_1\theta_1) && \leq 0 \\ Q[1] &= 2 (\cos(h_1\theta_1) + 2r \cos(2h_1\theta_2))^2 && \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme Q admet au moins une racine réelle dans l'intervalle $[-1, 1]$ et donc il existe au moins une autre position azimutale quel que soit le déphasage entre les deux cavités.

La recherche des racines de ce polynôme donne alors les 4 valeurs possibles pour $\cos(h_1\theta_S)$. La relation précédente donne le signe de $\sin(h_1\theta_S)$; $h_1\theta_S$ est alors défini à 2π près et nous avons donc l'ensemble des particules synchrones de l'anneau.

En l'absence d'accélération, les isohamiltoniennes (\mathcal{H}_C) du système sont définies par la donnée d'une constante d'après l'Eq. (8.13) :

$$(\mathcal{H}_{\text{const}}) : \left(\frac{\Delta p}{p_S}\right)^2 - F [2 \cos(h_1(\theta + \theta_1)) + r \cos(2h_1(\theta + \theta_2))] = \text{const}$$

où F est une constante définie par

$$F = \frac{qV_1}{2\pi h_1 \eta E_S \beta_S^2}$$

En guise d'illustration, nous avons tracé sur la FIG. 8.2 la séparatrice donnée par l'Eq. (8.14) et les isohamiltoniennes pour l'anneau de décroissance des beta-beams, avec une tension maximale de 13.5 MV pour les deux cavités et un déphasage respectif de $-h_1\theta_1 = -140^\circ$ et $-2h_1\theta_1 = 40^\circ$ par rapport à la particule de référence. La valeur du second déphasage découle directement de l'Eq. (8.16).

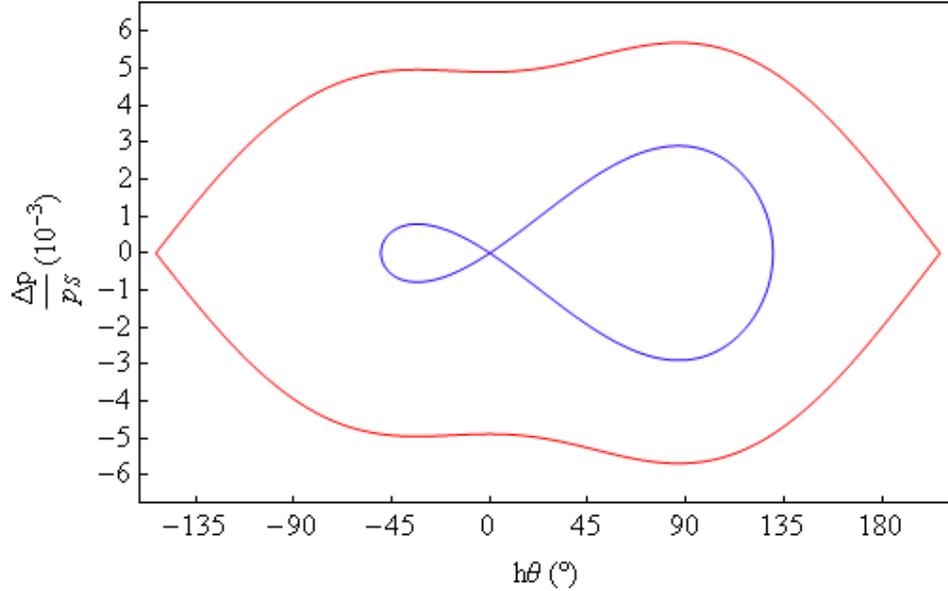


FIG. 8.2 – Séparatrice (en rouge) et isohamiltonienne pour un système à 2 cavités.

En plus de la séparatrice qui définit la zone de stabilité du système, nous voyons apparaître une isohamiltonienne particulière s'annulant en l'origine et présentant 2 lobes. Elle correspond donc à l'isohamiltonienne (\mathcal{H}_C) liée à la constante C_{lobe}

$$C_{\text{lobe}} = -\frac{2 \cos(h_1\theta_1) + r \cos(2h_1\theta_2)}{F}$$

Comme deux isohamiltoniennes ne se croisent pas sauf en un point singulier, nous en déduisons que ces deux lobes constituent ce que l'on peut appeler des séparatrices locales.

Toute particule située dans l'un de ces lobes y restera. Par commodité, nous appellerons dans la suite **bucket de gauche** le lobe pour les valeurs négatives de θ et **bucket de droite** celui pour les valeurs positives. Le lobe de gauche sera également appelé **bucket de capture** car il contiendra le faisceau injecté.

Nous obtenons alors les extensions des deux lobes en résolvant l'équation trigonométrique :

$$2(\cos(h_1(\theta + \theta_1)) - \cos(h_1\theta_1)) + r(\cos(2h_1(\theta + \theta_2)) - \cos(2h_1\theta_2)) = 0$$

En utilisant les relations trigonométriques et le fait que $\sin(h_1\theta_1) + r \sin(2h_1\theta_2) = 0$, nous aboutissons finalement au fait que les solutions θ de cette équation vérifient :

$$\theta = 0 \text{ ou } \begin{cases} \text{si } \sin(2h_1\theta_2) \neq 0, & \cos(h_1(\theta + 2\theta_2)) = \frac{\sin(h_1(\theta_1 - 2\theta_2))}{\sin(h_1\theta_1)} \\ \text{si } \sin(2h_1\theta_2) = 0, & \cos h_1\theta = \frac{1 - |r|}{1 + |r|} \end{cases}$$

Nous noterons θ_g et θ_d la racine négative et la racine positive. Les aires respectives A_g et A_d des buckets de gauche et droite sont alors données par :

$$\begin{aligned} A_g &= 2 \int_{\theta_g}^0 \sqrt{2F [2(\cos(h_1(\theta + \theta_1)) - \cos(h_1\theta_1)) + r(\cos(2h_1(\theta + \theta_2)) - \cos(2h_1\theta_2))]} d\theta \\ A_d &= 2 \int_0^{\theta_d} \sqrt{2F [2(\cos(h_1(\theta + \theta_1)) - \cos(h_1\theta_1)) + r(\cos(2h_1(\theta + \theta_2)) - \cos(2h_1\theta_2))]} d\theta \end{aligned} \quad (8.17)$$

Il est à noter que si nous calculons la quantité $\Delta_{sym} = \left(\frac{\Delta p}{p_S}\right)^2(\theta) - \left(\frac{\Delta p}{p_S}\right)^2(-\theta)$, correspondant à l'asymétrie des isohamiltoniennes, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \theta, \Delta_{sym} &= -2F [2 \sin(h_1\theta) \sin(h_1\theta_1) + r \sin(2h_1\theta) \sin(2h_1\theta_2)] \\ &= -4F \sin(h_1\theta) \sin(h_1\theta_1) (1 - \cos(h_1\theta)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{h_1}\right]$, Δ_{sym} est du même signe que $-qV_1\eta \sin(h_1\theta_1)$. Il s'en suit immédiatement que :

$$A_g < A_d \Leftrightarrow qV_1\eta \sin(h_1\theta_1) < 0$$

Les deux lobes ont donc la même aire si et seulement si $\sin(h_1\theta_1) = 0$ et dans ce cas, toutes les isohamiltoniennes sont symétriques. Dans la suite, nous appellerons **mélange symétrique** un mélange se réalisant sous cette condition en opposition au cas où les aires des deux lobes ne sont pas égales appelé **mélange asymétrique**.

8.3.2 Programme de mélange des deux faisceaux

Nous pouvons distinguer 4 grandes étapes dans le programme RF :

1. Rotation d'un quart de tour dans l'espace des phases longitudinal
2. Mélange asymétrique avec une aire constante pour le lobe de gauche
3. Mélange symétrique

4. Extinction progressive de la seconde cavité

Rotation d'un quart de tour dans l'espace des phases longitudinal

Dans un premier temps, seule la première cavité est allumée, le faisceau injecté effectue alors un quart de tour dans l'espace longitudinal. Connaissant la différence en moment Δ entre les deux faisceaux au moment de l'injection, nous déduisons la différence en position azimutale $\delta\theta_0$ entre leur centre après un quart de tour synchrotron d'après l'Eq. (8.13) :

$$\delta\theta_0 = \arccos \left(1 - \left| \frac{\pi h_1 \eta E_S}{q V_{RF}} \right| \beta^2 \Delta^2 \right)$$

Mélange asymétrique avec une aire constante pour le lobe de gauche

La seconde cavité est ensuite allumée et la tension crête de la première cavité est diminuée pour être maintenue égale à 13.5 MV par la suite pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$ et 8.1 MV pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ [77]. Le rapport entre les deux tensions crêtes est alors r_0 . Pour des raisons de synchronisme avec le SPS, la position du centre du faisceau stocké doit rester la même après le mélange. Le point fixe est donc le centre du lobe de droite. Cependant, par commodité et afin de réutiliser les notations précédentes, nous utiliserons comme particule de référence le point de croisement des deux lobes. Cela a pour effet de rajouter des déphasages respectifs par rapport à la particule de référence de $h_1\theta_S$ et $2h_1\theta_S$ pour les cavités. Comme θ_S est donné par la relation Eq. (8.16), le déphasage à appliquer est donc connu.

Le déphasage des deux cavités et leur tension crête doivent être tels que le plus grand nombre d'ions du faisceau injecté doit se trouver à l'intérieur du lobe de gauche. En effet, les ions injectés qui se trouveront en dehors se mettront à osciller autour des deux lobes. A la fin du mélange des deux faisceaux, ils seront alors à la périphérie et seront hors de l'acceptance de l'anneau. L'aire du lobe de capture est prise au moins égale à l'émittance totale longitudinale du faisceau injecté. Sa distribution est supposée parabolique dans l'espace de phase longitudinal. Durant toute cette étape, l'aire du lobe de gauche A_g sera maintenue constante. Les ions piégés dans le lobe de gauche y resteront donc pendant toute cette étape. Comme nous connaissons la différence en phase entre les centres des deux lobes, nous sommes en mesure d'après la FIG. 8.3 de connaître les valeurs initiales des déphasages des deux cavités $\theta_{1,0}$, $\theta_{2,0}$ et le rapport initial des tensions r_0 .

Comme A_g est uniquement fonction de θ_1 et θ_2 , il est alors possible de tracer la loi reliant θ_1 à θ_2 . L'émittance du faisceau injecté est prise égale à 1 eV.s dans le cas de l' ${}^6\text{He}^{2+}$ et nous obtenons alors la courbe reliant $2h_1\theta_2$ à $h_1\theta_1$ (FIG. 8.4), qui donne l'évolution des lobes présentée sur la FIG. 8.5. La différence entre le centre des deux lobes donnée sur FIG. 8.3 décroît linéairement avec le temps, donnant la loi en temps des tensions et phases des cavités. A un certain moment t_{sym} , les aires des deux lobes sont égales. Les isohamiltoniennes sont alors symétriques et $h_1\theta_1 = 180^\circ$ et $2h_1\theta_2 = 0^\circ$. Nous noterons r_{sym} la valeur du rapport entre les deux tensions à ce moment. Le mélange reste alors symétrique par la suite.

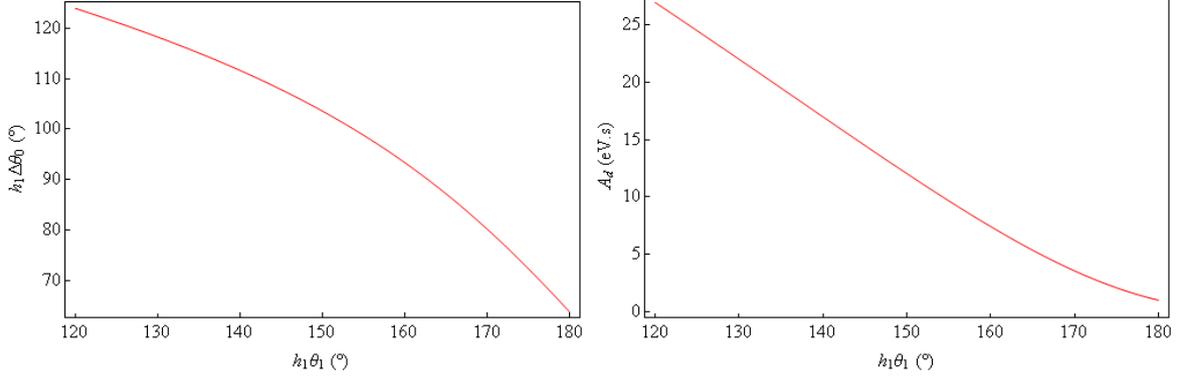


FIG. 8.3 – Différence de phase entre les centres des deux lobes (à gauche) et aire du lobe de droite (à droite) dans le cas de l' ${}^6\text{He}^{2+}$ en fonction du déphasage de la première cavité. L'aire du lobe de gauche est maintenue constante et égale à 1 eV.s.

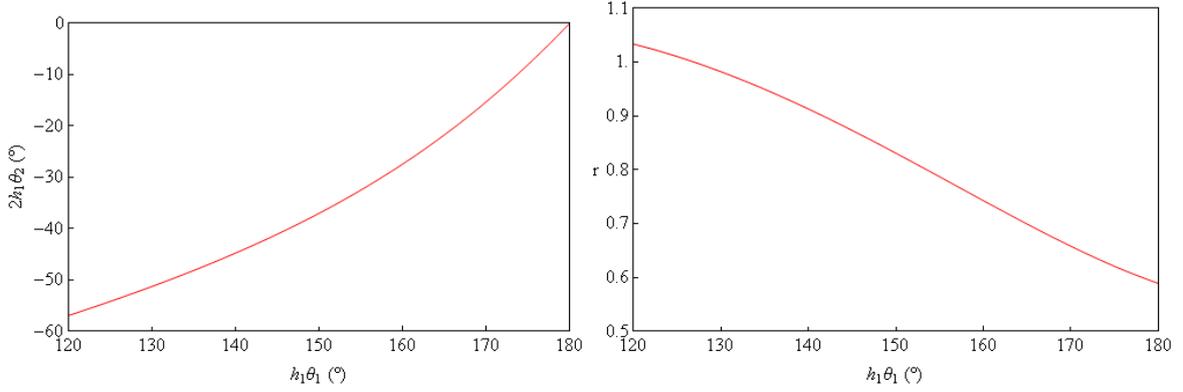


FIG. 8.4 – Lois de phase (à gauche) et de tension (à droite) dans le cas de l' ${}^6\text{He}^{2+}$ entre les deux cavités. L'aire du lobe de gauche est maintenue constante et égale à 1 eV.s.

Mélange symétrique

Durant cette étape, l'aire du lobe de gauche n'est plus maintenue constante et nous n'avons plus qu'un degré de liberté : le rapport r entre les tensions maximales des deux cavités. La distance entre le centre des deux lobes décroît linéairement avec le temps. Nous savons que leur position θ_S vérifie la relation Eq. (8.16) :

$$\sin(h_1\theta_S) = -r \sin(2h_1\theta_S)$$

Ainsi, $\sin(h_1\theta_S) = 0$ ou $2r \cos(h_1\theta_S) = -1$. L'existence de deux lobes implique donc directement que $|r| \geq 0.5$. La loi sur le rapport entre les deux tensions crête est donc de la forme :

$$r(t) = \frac{-1}{2 \cos(k(T - t + t_{\text{sym}}))}$$

où T est la durée du mélange symétrique et $k = \frac{1}{T} \arccos\left(\frac{1}{2r_{\text{sym}}}\right)$

Le temps caractéristique de cette étape est d'environ 0.2 s, nous obtenons alors l'évolution

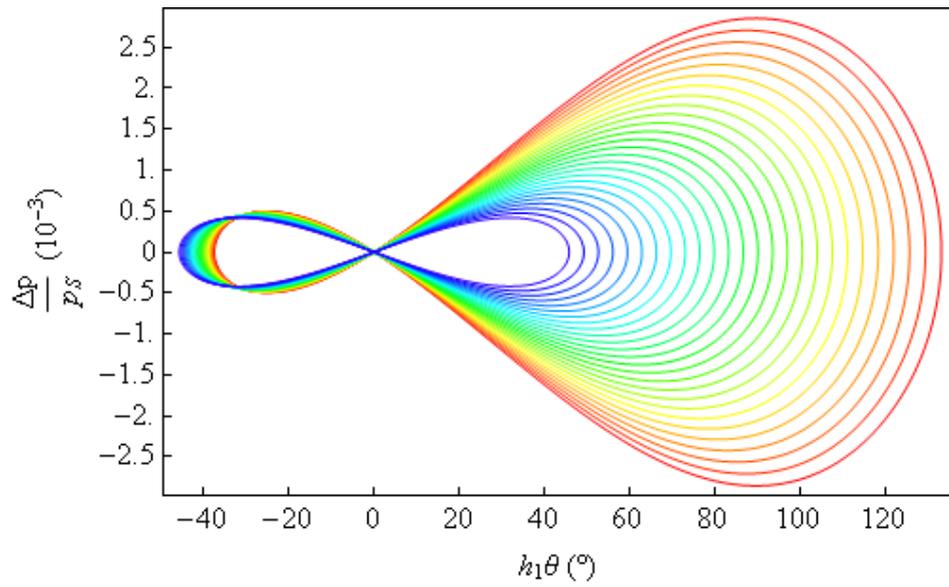


FIG. 8.5 – Évolutions des deux lobes au cours du programme RF pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$. L'aire du lobe de gauche est maintenue constante et égale à 1 eV.s.

des séparatrices sur la FIG. 8.6. Le mélange symétrique des deux faisceaux s'arrête lors de la disparition des deux lobes, soit lorsque $r = 0.5$.

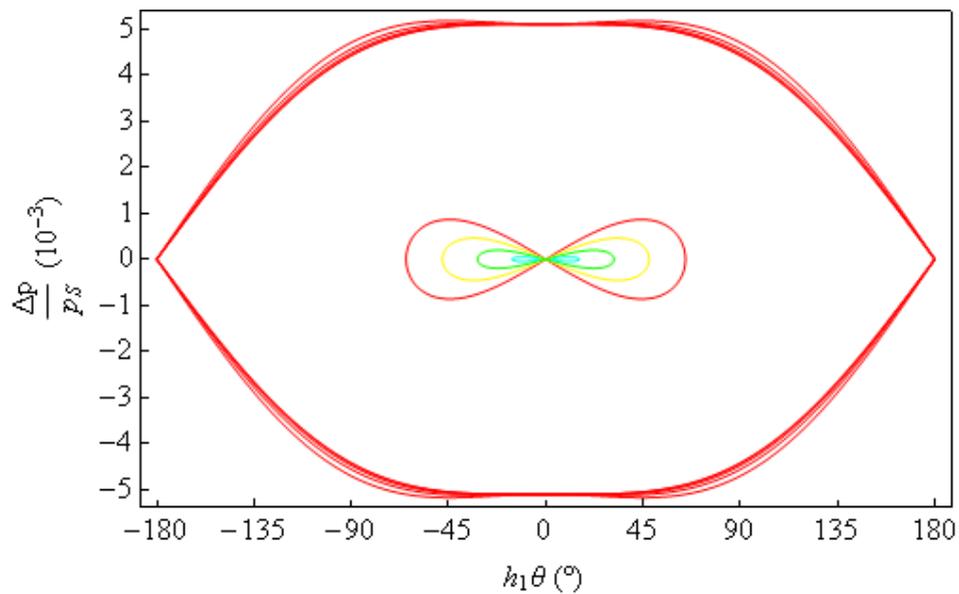


FIG. 8.6 – Évolutions des deux lobes et de la séparatrice au cours du mélange symétrique pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$.

Extinction progressive de la seconde cavité

A ce stade, la tension crête de la seconde cavité n'est plus suffisante pour générer deux lobes. Afin d'éviter une filamentation trop importante des particules, la tension crête de la première cavité est amenée linéairement avec le temps à une valeur de 20 MV tandis que la seconde cavité est progressivement éteinte. Le temps typique de cette étape a été fixé à environ 0.1 s.

Finalement, nous obtenons le programme de phase et de tension des deux cavités (FIG. 8.7)

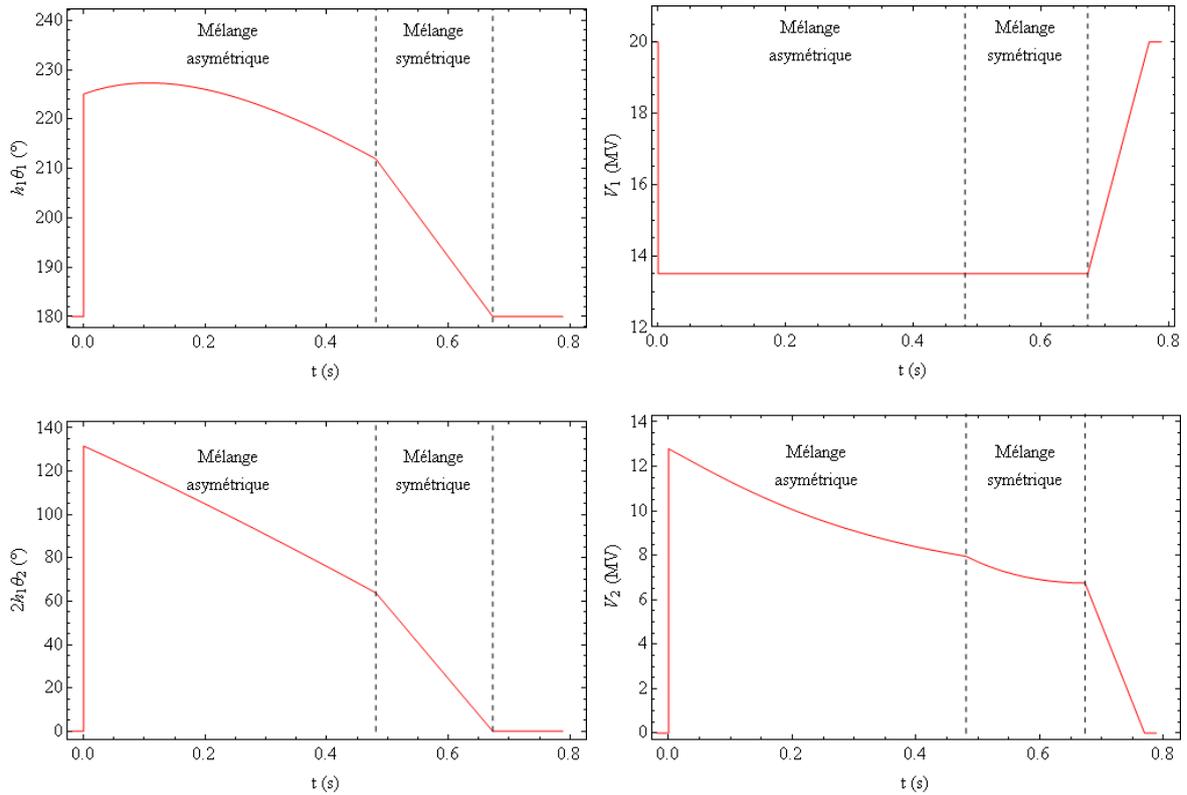


FIG. 8.7 – Variations de la phase et de la tension crête de la première cavité (en haut) et de la seconde cavité (en bas) au cours du mélange entre les deux faisceaux pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$.

8.3.3 Pertes liées au système RF

Le programme RF calculé sous Mathematica [119] et illustré sur FIG. 8.7 a été simulé à l'aide de *BETA* [1]. Afin de minimiser le nombre d'opérations et donc le temps de calcul, la structure a été modélisée par un élément de matrice de transport équivalente. Les cavités variables ont alors été ajoutées à la structure. Un faisceau de 10000 ions de distribution parabolique dans l'espace longitudinal a été injecté « off momentum » dans la machine à $\Delta = 5\%$ et le programme de mélange lui a été appliqué de manière cyclique. Sur la FIG. 8.12, les ions qui viennent d'être injectés ont été représentés à différentes étapes du programme. Il apparaît clairement qu'un halo se forme autour du faisceau injecté ; il correspond aux ions qui

n'ont pas été capturés dès le début. L'efficacité de capture atteinte est d'environ 90 % dans notre cas. Les paramètres d'injection ont été fixés afin d'améliorer cette efficacité. Cependant, le faisceau est injecté dans une zone de l'espace longitudinal où l'oscillation des ions autour du centre présente de fortes non linéarités. Par conséquent, après un quart de tour synchrotron, la forme du faisceau injecté est fortement perturbée et ne correspond pas exactement à la forme du lobe de capture. Enfin, l'aire apparente du faisceau injecté semble avoir doublé à la fin du processus. Ceci est normal car durant le mélange symétrique, l'aire du bucket de capture n'est plus maintenue constante, il se mélange avec l'autre lobe dont l'aire est précisément celle du faisceau capturé d'où le doublement de l'aire finale. Si T est le temps de cadencement de l'anneau alors la superposition des nuages de points aux instants $t, t+T, t+2.T, \dots, t+n.T$ permet d'obtenir le faisceau stocké à l'état d'équilibre à l'instant t (FIG. 8.8).

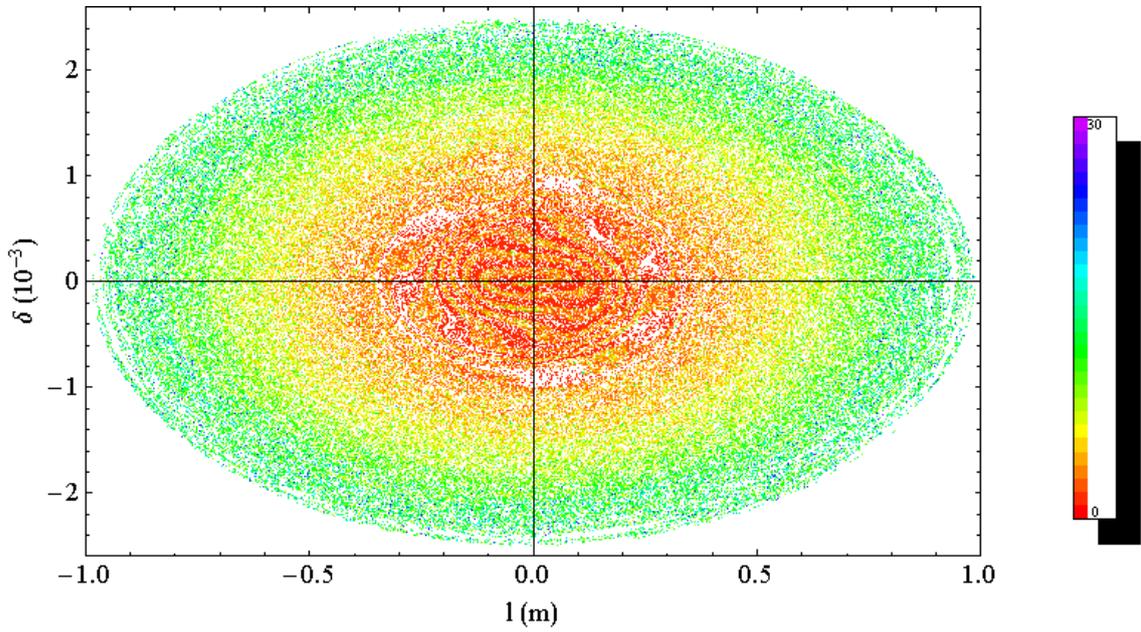


FIG. 8.8 – Représentation dans l'espace des phases longitudinal du faisceau injecté d' ${}^6\text{He}^{2+}$ injection après injection après exécution du programme de mélange (en rouge, après une injection, en violet après 30 injections). Le faisceau est supposé collimaté à $\delta = 2.5\text{‰}$.

Soient $N_{\text{inj}}(t)$ et $N_{\text{inj}}^d(t)$ les nombres d'ions du faisceau injecté restant en fonction du temps sans et avec décroissance ; l'instant 0 représente le moment où le faisceau entre dans l'anneau. Ces deux fonctions sont reliées par la formule :

$$N_{\text{inj}}^d(t) = N_{\text{inj}}(t) \cdot 2^{-\frac{t}{\gamma\tau}} \quad (8.18)$$

Le nombre d'ions stockés $N_S(t)$ à l'état d'équilibre est alors donné par :

$$N_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{\text{inj}}(t+n.T) 2^{-\frac{t+n.T}{\gamma\tau}} \quad (8.19)$$

Le nombre d'ions perdus $N_P(n)$ entre les injections n et $n + 1$ est donné par :

$$N_P(n) = N_{\text{inj}}^d(n.T) - N_{\text{inj}}^d((n + 1).T) \quad (8.20)$$

La question a alors été de déterminer la proportion d'ions qui ont été perdus par décroissance et celle par collimation. Le transport des ions à l'aide de *BETA* nous donne les valeurs $N_{\text{inj}}(n.T)$ (FIG. 8.9). Afin d'encadrer la proportion d'ions ayant décréû en moyenne entre deux injections, nous pouvons faire la supposition que la collimation en moment a lieu soit juste après l'entrée des ions dans l'anneau (cas le plus défavorable) soit juste avant (cas le plus favorable).

Dans le premier cas, le nombre total d'ions perdus par décroissance N_d^+ et celui par collimation N_C^+ entre deux injections sont alors :

$$\begin{aligned} N_d^+ &= \left(1 - 2^{-\frac{T}{\gamma\tau}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} N_{\text{inj}}((n + 1).T) 2^{-\frac{n.T}{\gamma\tau}} \\ N_C^+ &= \sum_{n=0}^{\infty} (N_{\text{inj}}(n.T) - N_{\text{inj}}((n + 1).T)) 2^{-\frac{n.T}{\gamma\tau}} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Dans le second cas, le nombre total d'ions perdus par décroissance N_d^- et celui par collimation N_C^- entre deux injections sont alors :

$$\begin{aligned} N_d^- &= \left(1 - 2^{-\frac{T}{\gamma\tau}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} N_{\text{inj}}(n.T) 2^{-\frac{n.T}{\gamma\tau}} \\ &= N_d^+ 2^{-\frac{T}{\gamma\tau}} + \left(1 - 2^{-\frac{T}{\gamma\tau}}\right) N_{\text{inj}}(0) \\ N_C^- &= \sum_{n=0}^{\infty} (N_{\text{inj}}(n.T) - N_{\text{inj}}((n + 1).T)) 2^{-\frac{(n+1).T}{\gamma\tau}} \\ &= N_C^+ 2^{-\frac{T}{\gamma\tau}} \end{aligned} \quad (8.22)$$

Nous retrouvons bien que $N_d^+ + N_C^+ = N_d^- + N_C^- = N_{\text{inj}}(0)$. L'injection d'un nouveau faisceau compense bien les pertes qui ont eu lieu entre deux injections successives. Les cumuls des pourcentages de pertes ayant lieu au cours des injections successives sont illustrés en FIG. 8.10 pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$ et le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$. Dans le cas de l' ${}^6\text{He}^{2+}$, environ 40 à 45 % des ions qui sont injectés dans l'anneau auront décréû avant d'être perdus. Par contre, dans le cas du ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$, seulement 20 % des ions injectés auront décréû. Si seules les décroissances ayant lieu dans la section droite pointant vers le détecteur sont considérées, la proportion d'ions injectés « utiles » est alors au mieux de l'ordre de 7 % dans le cas du ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$.

La connaissance des pertes issues des décroissances nous permet d'évaluer la distribution du faisceau dans l'espace longitudinal (FIG. 8.11). Dans le cas de l' ${}^6\text{He}^{2+}$, la distribution finale est plus de forme triangulaire que parabolique, avec un pic au centre. Comme les ions périphériques sont ceux provenant d'injections antérieures (typiquement après 10-15 injections), une partie non négligeable d'entre eux a décréû. Les bords de la distribution sont alors moins denses. Cet effet est plus faible dans le cas du ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ et les distributions du faisceau avec ou sans décroissance se recouvrent pratiquement. Le pic central provient de ce que le programme RF mélange les ions fraîchement injectés avec ceux provenant de l'injection antérieure en les

gardant dans la même aire. Ces derniers ne sont pas alors repoussés vers l'extérieur et sont tous acceptés par la machine. Le centre est alors plus dense.

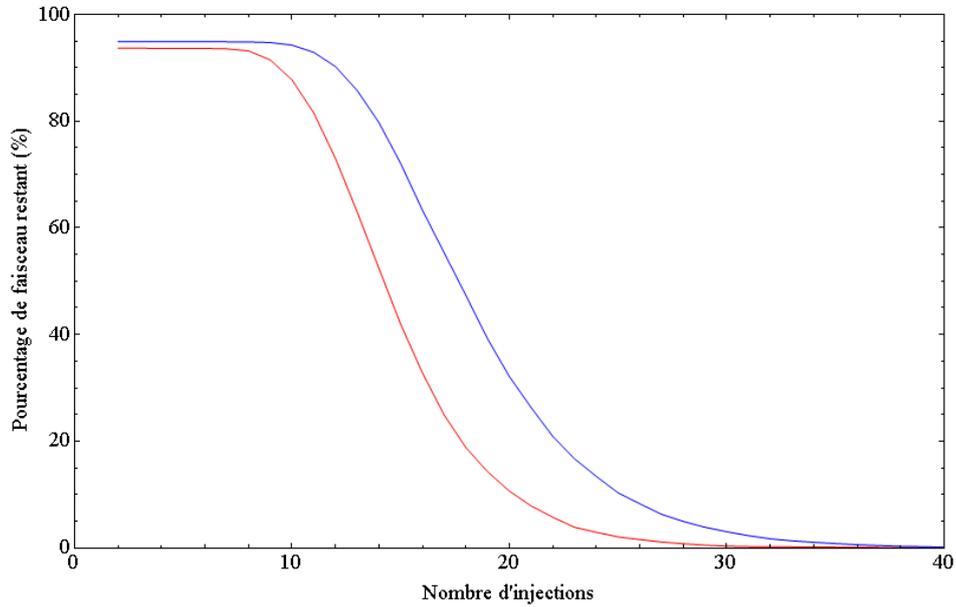


FIG. 8.9 – Survivance d'un paquet d'ions injecté en fonction du nombre d'injections réalisées ensuite pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$ (en rouge) et le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ (en bleu). Les décroissances β ne sont pas prises en compte.

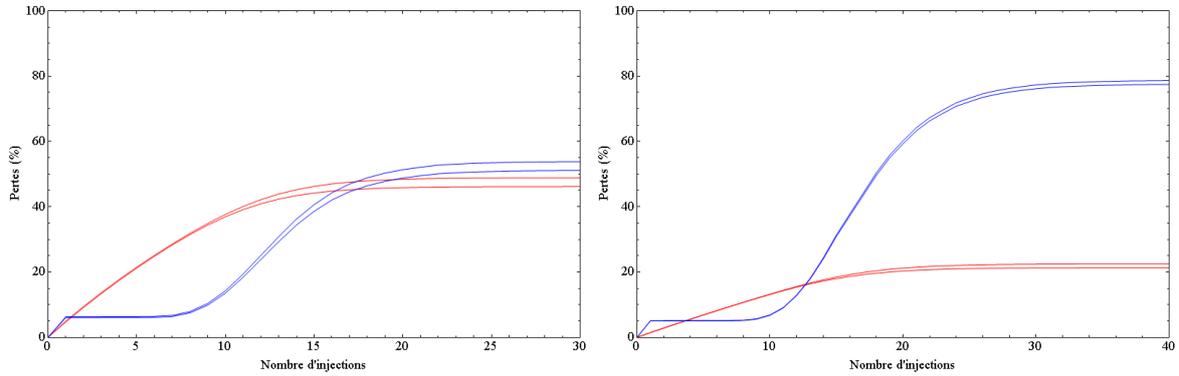


FIG. 8.10 – Cumul des pertes en fonction du temps pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$ à gauche et pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ à droite. A l'instant initial, le faisceau vient d'être injecté dans l'anneau. En rouge, sont représentées les pertes venant de la décroissance des ions et en bleu celles venant de la collimation en moment.

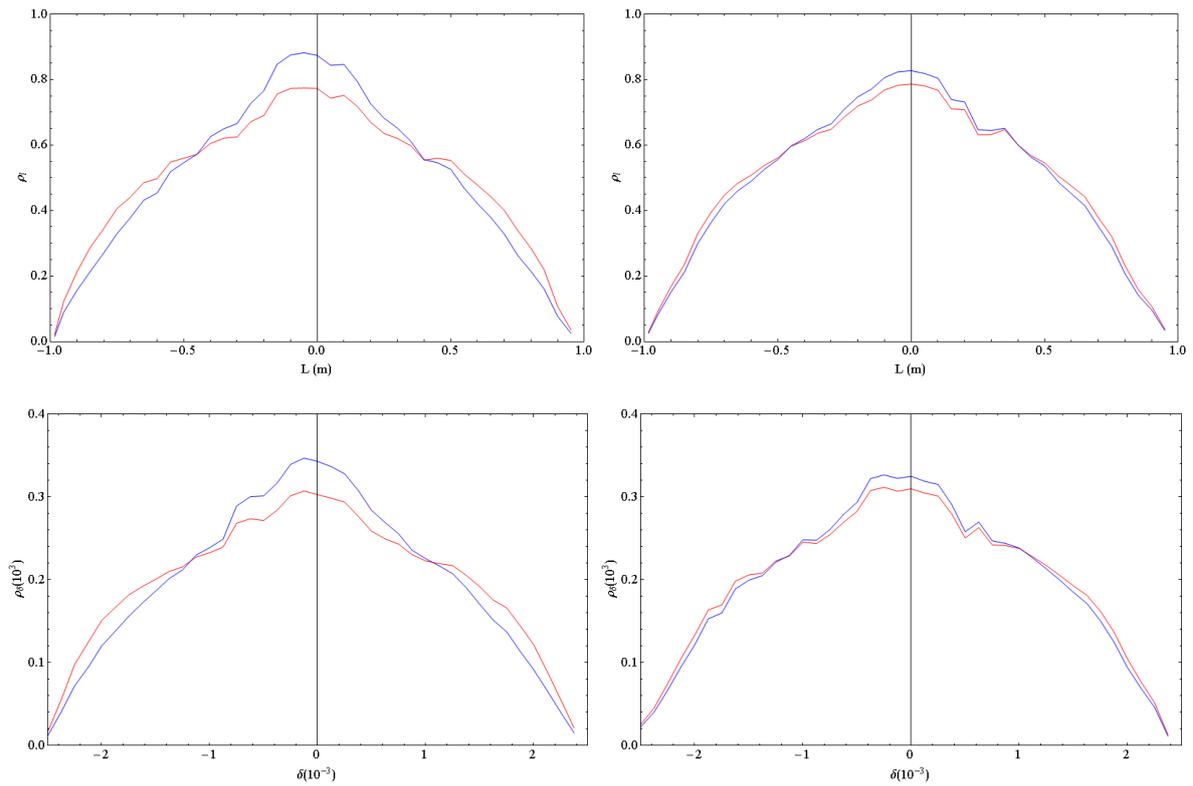


FIG. 8.11 – Distribution du faisceau stocké dans la direction longitudinale (en haut) et en moment (en bas) pour l' ${}^6\text{He}^{2+}$ (à gauche) et pour le ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$ (à droite). La courbe en rouge représente la distribution en supposant une collimation à $\delta = 2.5\%$. La courbe en bleu tient en plus compte de la décroissance des ions entre deux injections successives.

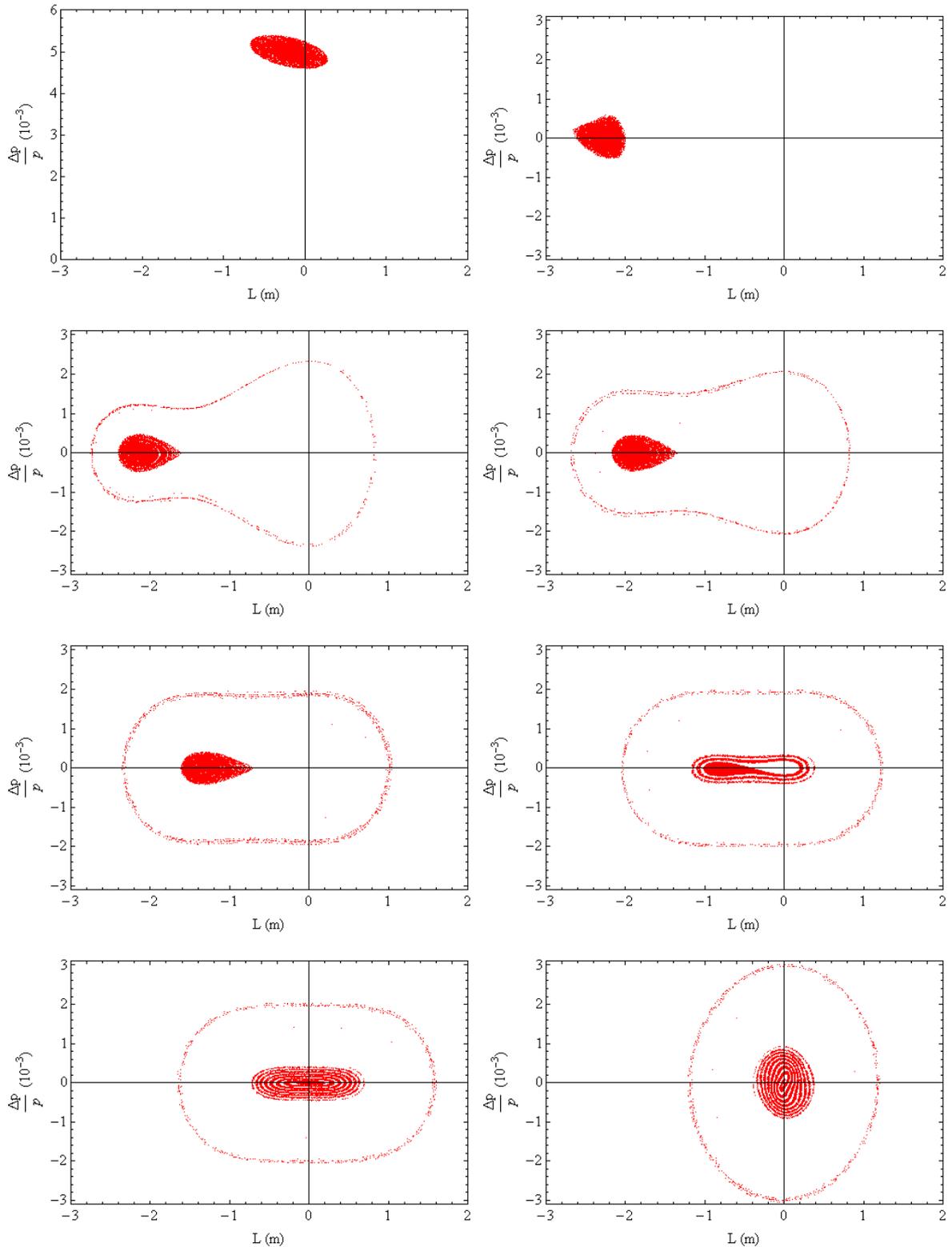


FIG. 8.12 – Représentation dans l'espace des phases longitudinal du faisceau injecté d' ${}^6\text{He}^{2+}$ pendant les différentes étapes du programme RF. Le premier graphe représente le faisceau au moment de l'injection, le second après un quart de tour, les troisième et quatrième pendant la phase de mélange asymétrique, les cinquième, sixième et septième au début, pendant et à la fin du mélange symétrique et le huitième à la fin du programme.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de la thèse était de réaliser une étude de faisabilité pour l'anneau de décroissance d'une usine à neutrinos de type beta-beams implantée au CERN, projet faisant partie du design study EURISOL. Après avoir détaillé l'ensemble des paramètres liés au schéma de base pour les beta-beams dans le Chapitre 3, les contraintes et problématiques liées à un tel type de projet ont été énoncées. Les principales problématiques traitées ici peuvent se résumer aux suivantes :

- Le système d'injection
- Le programme RF
- Les pertes ayant lieu dans l'anneau
- Les propriétés optiques
- Les défauts éventuels dans la structure

Afin de maximiser la quantité d'ions stockés dans l'anneau, un système d'injection un peu particulier a été mis en place afin de réaliser une injection en présence d'un faisceau circulant. La solution retenue a été d'injecter le faisceau à une énergie légèrement différente de celle du faisceau circulant d'où son nom d'« off momentum ». Dans une région dispersive, les deux faisceaux sont alors séparés dans l'espace transverse. L'optique du faisceau a donc été réalisée afin d'avoir une région avec une dispersion suffisamment grande pour permettre l'insertion d'un septum d'injection entre les deux faisceaux. L'arc étant naturellement dispersif, une insertion pour l'injection y a alors été ménagée. Les paramètres principaux de l'anneau sont résumés dans le TAB. 1.

Afin de mélanger les ions injectés avec ceux circulant dans l'espace longitudinal, un programme RF spécifique utilisant deux familles de cavités à tension et à phase variables, l'une étant à la fréquence double a été étudié. Le Chapitre 8 en a dégagé les propriétés et ses différentes étapes. Après chaque mélange des deux faisceaux, les ions les plus extérieurs du faisceau circulant sont rejetés à la périphérie dans l'espace des phases longitudinal. Une partie des ions ne sont alors plus acceptés en énergie par l'anneau, ce qui entraîne des pertes. Ce chapitre a également quantifié le total de ces pertes et leur historique pour chacune des deux espèces. Dans cette partie, seul le mouvement longitudinal était considéré et les ions étaient donc supposés sans amplitude bêatron.

Une section de collimation a alors été réalisée afin de recueillir les ions qui ne sont plus acceptés par l'anneau. Le modèle lié à l'utilisation de plusieurs collimateurs a été présenté au Chapitre 7 ainsi que son application dans le cadre des beta-beams. Enfin, le total des pertes liées à la présence de collimateurs a été quantifié en fonction de la dispersion normalisée au premier collimateur. Le seuil à partir duquel la collimation est essentiellement sur le moment des particules et non sur leur amplitude bêatron a donc pu être identifié. Dans le même chapitre, une autre source de pertes, venant de la décroissance β des ions stockés, a également

TAB. 1 – Résumé des différents paramètres de l'anneau.

Longueur totale	m	6911.5
Rayon moyen	m	1100
$B\rho$ ${}^6\text{He}^{2+}$	T.m	934.93
$B\rho$ ${}^{18}\text{Ne}^{10+}$	T.m	559.26
ν_x	-	22.228
ν_y	-	12.162
ξ_x	-	-1.667
ξ_y	-	-2.347
α	-	1.376×10^{-3}
DIPOLES DE L'ARC		
angle	rad	$\pi/86$
$1/\rho$	m^{-1}	6.43×10^{-3}
QUADRIPOLES		
nombre total	-	176
K_{max}	m^{-2}	4.873×10^{-2}
SEXTUPOLES		
nombre de familles	-	8
nombre total	-	52
$S_{\text{max}}L$	m^{-2}	0.127

été identifiée. Les produits de décroissance sont alors à un état de charge différent de leur ion père, ce qui modifie leur transport. L'optique de l'anneau devra être réalisée de manière à limiter le dépôt des ions sur les parois des éléments magnétiques. Des sections d'extraction des produits de décroissance ont alors été réalisées à l'entrée des arcs. Par contre, la différence de rigidité est telle que l'extraction des produits de décroissance n'était pas possible dans les arcs de l'anneau. Des absorbeurs ont donc été insérés et une étude du dimensionnement nécessaire des dipôles a été faite. Afin d'évaluer le montant des dépôts ayant lieu dans les éléments magnétiques, un programme a été implémenté dans *BETA*. Les résultats ont montré que dans l'ensemble les éléments magnétiques étaient épargnés.

L'ensemble de ces considérations ont alors permis d'aboutir à une première version du design de l'anneau. Ses propriétés aux premier et second ordre ont été données dans le Chapitre 6. Dans l'ensemble, en l'absence de défauts, la structure présente une grande stabilité à la fois en amplitude (ouverture dynamique) et en moment (acceptance). Il a été ensuite question d'étudier la machine en présence de défauts. Une première étude sur les erreurs d'alignement des éléments ou de champ dans les dipôles, a donc également été présentée. Dans le cas d'erreurs d'alignement, l'introduction de correcteurs dipolaires dans l'anneau permet de garder la position centrale du faisceau dans des limites acceptables pour les beta-beams. Dans le cas des composantes multipolaires des dipôles, l'ouverture dynamique est considérablement diminuée. Un programme d'optimisation de l'ouverture dynamique a alors été implémenté, ce qui a élargi l'ouverture jusqu'à un minimum tolérable. Bien qu'il y ait eu une amélioration, le gain observé n'est pas suffisant et des développements dans le futur seront nécessaires. Ces études nous ont permis de dégager des premières valeurs de tolérance de fabrication et de positionnement pour les éléments magnétiques.

L'étude des pertes dans l'anneau reste une des premières priorités pour le futur. Si une section de collimation dédiée a été réalisée, elle n'a pas encore été complètement validée en effectuant un transport de particules. En effet, les interactions avec les parois n'ont pas encore été simulées. Ainsi, il faut encore vérifier si le système pourra tolérer les dépôts très intenses qui y auront lieu que ce soit en dépôt de chaleur ou en activation. De même, l'étude des dépôts de puissance dans les dipôles doit être affinée en effectuant un transport de particules.

Annexe A

Fichier donnant la structure de l'anneau

```

*** VERSION ***
BETA-LNS v7.60 /14/02/07/ 14/Jun/07 18:10:37
*** AUTHOR ***
CHANCE
*** TITRE ***
ANNEAU DECROISSANCE BETA-BEAM VERSION 25/05/2007
*** LIST OF ELEMENTS ***
  80
SDS      SD  .5000000E+00
SD01     SD  .1000000E+01
SD02     SD  .4913536E+01
SD03     SD  .8240530E+02
SD04     SD  .3000000E+01
SD05     SD  .2000000E+01
SD06     SD  .4916606E+01
SDB1     SD  .5874910E+01
SDIB1    SD  .4083394E+01
DSD01    SD  .8610257E+02
DSD02    SD  .8139883E+02
CSD01    SD  .4856453E+01
CSD02    SD  .2000000E+02
CSD03    SD  .4537448E+01
CSD04    SD  .3419385E-01
CSD05    SD  .9813290E-04
CSD06    SD  .7889978E+01
IQPKI    QP  .1000000E+01 .0000000E+00 .0000000E+00
IQPS     QP  .4000000E+01 .0000000E+00 .0000000E+00
QPKI     QP  .4167864E+01 .0000000E+00 .0000000E+00
QP1      QP  .1000000E+01 -.3161669E-01 .0000000E+00
QP2      QP  .1000000E+01 .4848336E-01 .0000000E+00
MQP1     QP  .1000000E+01 -.2679508E-01 .0000000E+00
MQP2     QP  .1000000E+01 .4873259E-01 .0000000E+00
MQP3     QP  .1000000E+01 -.3592675E-01 .0000000E+00
MQP4     QP  .1000000E+01 .4347985E-01 .0000000E+00
MQP5     QP  .1000000E+01 -.4591599E-01 .0000000E+00
MQP6     QP  .1000000E+01 .3998456E-01 .0000000E+00
IQP1     QP  .1500000E+01 .1469560E-01 .0000000E+00
IQP2     QP  .1500000E+01 .3070324E-02 .0000000E+00
IQP3     QP  .1500000E+01 .8979429E-02 .0000000E+00
IQP4     QP  .1500000E+01 -.2649757E-01 .0000000E+00
IQP5     QP  .1500000E+01 .1736728E-01 .0000000E+00
MDQP0    QP  .1000000E+01 .1840924E-01 .0000000E+00
MDQP1    QP  .1000000E+01 -.8170829E-02 .0000000E+00
MDQP2    QP  .1000000E+01 -.1478371E-01 .0000000E+00

```

MDQP3	QP	.1000000E+01	.4064920E-01	.0000000E+00					
MDQP4	QP	.1000000E+01	-.2663544E-01	.0000000E+00					
DQP1	QP	.5000000E+00	-.1115482E-01	.0000000E+00					
DQP2	QP	.5000000E+00	.1124347E-01	.0000000E+00					
DQP3	QP	.5000000E+00	-.1095150E-01	.0000000E+00					
DQP4	QP	.5000000E+00	.9777150E-02	.0000000E+00					
CQP1	QP	.1000000E+01	-.1417965E-01	.0000000E+00					
CQP2	QP	.5000000E+00	.2567166E-01	.0000000E+00					
CQP3	QP	.1000000E+01	.2410177E-01	.0000000E+00					
CQP4	QP	.1000000E+01	-.2858138E-01	.0000000E+00					
CQP7	QP	.5000000E+00	-.1114520E-01	.0000000E+00					
MCQP6	QP	.1000000E+01	.1203837E-01	.0000000E+00					
MCQP7	QP	.1000000E+01	-.9605210E-02	.0000000E+00					
FCQP1	QP	.1000000E+01	.1631880E-01	.0000000E+00					
FCQP2	QP	.1000000E+01	-.9283080E-02	.0000000E+00					
FCQP3	QP	.1000000E+01	.1374830E-01	.0000000E+00					
FCQP4	QP	.1000000E+01	-.8818270E-02	.0000000E+00					
FCQP5	QP	.1000000E+01	.3611200E-02	.0000000E+00					
FCQP6	QP	.1000000E+01	.5230690E-08	.0000000E+00					
FCQP7	QP	.1000000E+01	.1455040E-01	.0000000E+00					
FCQP8	QP	.1000000E+01	-.1095720E-01	.0000000E+00					
FCQP9	QP	.1000000E+01	.1013400E-01	.0000000E+00					
B1	BH	.3653010E-01	.1556690E+03	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
		.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
BN1	BH	.2000000E-01	.6000000E+03	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
		.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
BN2	BH	-.2000000E-01	-.6000000E+03	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
		.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
SX1	SX	.1000000E-05	-.1266427E+06	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
SX2	SX	.1000000E-05	.5757750E+05	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
SX3	SX	.1000000E-05	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
SX4	SX	.1000000E-05	.2950842E+05	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
SX5	SX	.1000000E-05	-.6249521E+05	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
SX6	SX	.1000000E-05	-.4595858E+05	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
SX7	SX	.1000000E-05	.8777469E+05	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
SX8	SX	.1000000E-05	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00			
KIE	KI	.4167864E-12	.0000000E+00	.0000000E+00					
IKI1	KI	.2993220E-13	.0000000E+00	.0000000E+00					
IKI2	KI	-.1551020E-13	.0000000E+00	.0000000E+00					
IKIS	KI	.1000000E-12	.0000000E+00	.0000000E+00					
MILIEU	OB								
EXTRAC	OB								
ISEPT	OB								
IFININJ	OB								
ISORTIE	OB								
COLL	OB								
ENTREE	OB								
*** STRUCTURE ***									
1374									

DQP1	SD02	SD03	MDQP0	MDQP0	SD04	SECTION D'EXTRACTION
SD02	MDQP1	MDQP1	SD01	SD01	B1	
SDS	SDS	SDB1	SDB1	SDB1	SDS	
SD01	MDQP2	MDQP2	SD01	SDS	SDB1	
SDB1	SDB1	SDS	SDS	B1	SD05	
MDQP3						
MDQP3	SD05	B1	SD05	B1	SD05	SECTION D'ADAPTATION
MDQP4	SX1	MDQP4	SD05	B1	SD05	
B1	SD05	QP2				
SX2	QP2	SD05	B1	SD05	B1	
SD05	QP1	SX3	QP1	SD05	B1	
SD05	B1	SD05	QP2	SX4	QP2	
SD05	B1	SD05	B1	SD05	QP1	
SX5	QP1	SD05	B1	SD05	B1	

SD05	QP2	SX4	QP2	SD05	B1	MAILLES FODO REGULIERES	
SD05	B1	SD05	QP1	SX6	QP1		
SD05	B1	SD05	B1	SD05	QP2		
QP2	SD05	B1	SD05	B1	SD05		
QP1	SX1	QP1	SD05	B1	SD05		
B1	SD05	QP2	SX7	QP2	SD05		
B1	SD05	B1	SD05	QP1	SX5		
QP1	SD05	B1	SD05	B1	SD05		
MQP6							
MQP6	SD05	B1	SD05	B1	SD05		
MQP5	SX8	MQP5	SD05	B1	SD05		
B1	SD05	MQP4	SX2	MQP4	SD05		
B1	SD05	B1	SD05	MQP3	SX6		
MQP3	SD05	B1	SD05	B1	SD05		
MQP2	MQP2	SD05	B1	SD05	B1		
SD05	MQP1	MQP1	SD05	B1	SD05		
B1	SD05	IQP1					
IQP1	SDS	SDS	SDS	SDS	B1	SECTION D'ADAPTATION	
SD05	B1	SD05	IQP2	IQP2	SD05		
B1	SD05	B1	SD05	IQP3	IQP3		
SDS	IKI1	IQPKI	IKI1	IQPKI	IKI1		
IQPKI	SDS	SD05	B1	SD05	SD05		
SDIB1	SDS	IQP4	IQP4	SDS	SD06		
IKI2	IQPKI	IKI2	SDS	IQP5	IQP5		
SDS	SD04	IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS		
IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS		
IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS		
IQPKI	IKIS	MILIEU	IQPKI	IKIS	IQPKI		
IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI		
IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI		
IKIS	IQPKI	IKIS	ISEPT	SD04	SDS		
IQP5	IQP5	SDS	IKI2	IQPKI	IKI2		
SDS	SD06	IQP4	IQP4	SDS	SDIB1		
SD01	SD01	SD01	SD01	B1	SDS		
SDS	SD01	SDS	IQPKI	IKI1	IQPKI		
IKI1	IQPKI	IKI1	SDS	IQP3	IQP3		
SDS	SD01	SDS	B1	SD05	B1		
SD05	IQP2	IQP2	SD05	B1	SDS		
SD01	SDS	B1	SDS	SDS	SDS		
SDS	IQP1						
IFININJ	IQP1	SD05	B1	SD05	B1		SECTION D'INJECTION
SD05	MQP1	MQP1	SD05	B1	SD05		
B1	SD05	MQP2	MQP2	SD05	B1		
SD05	B1	SD05	MQP3	SX6	MQP3		
SD05	B1	SD05	B1	SD05	MQP4		
SX2	MQP4	SD05	B1	SD05	B1		
SD05	MQP5	SX8	MQP5	SD05	B1		
SD05	B1	SD05	MQP6	MQP6	SDS		
SD01	SDS	B1	SD05	B1	SD05		
QP1	SX5	QP1	SD05	B1	SDS		
SD01	SDS	B1	SD05	QP2	SX7		
QP2	SD05	B1	SD05	B1	SDS		
SD01	SDS	QP1	SX1	QP1	SDS		
SD01	SDS	B1	SD05	B1	SD05		
QP2	QP2	SD05	B1	SDS	SD01		
SDS	B1	SD05	QP1	SX6	QP1		
SD05	B1	SD05	B1	SDS	SD01		
SDS	QP2	SX4	QP2	SDS	SD01		
SDS	B1	SD05	B1	SD05	QP1		
SX5	QP1	SD05	B1	SDS	SD01		
SDS	B1	SD05	QP2	SX4	QP2		
SD05	B1	SD05	B1	SDS	SD01		
SDS	QP1	SX3	QP1	SDS	SD01		

IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI
IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI	IKIS	IQPKI
IKIS	IQPKI	IKIS	ISEPT	SD04	SDS
IQP5	IQP5	SDS	IKI2	IQPKI	IKI2
SDS	SD06	IQP4	IQP4	SDS	SDIB1
SD01	SD01	SD01	SD01	B1	SDS
SD05	IQPKI	IKI1	IQPKI	IKI1	IQPKI
IKI1	IFININJ	SDS	IQP3	IQP3	SD05
B1	SD05	B1	SD05	IQP2	IQP2
SD05	B1	SD05	B1	SDS	SDS
SDS	SDS	IQP1	IQP1	SD05	B1
SD05	B1	SD05	MQP1	MQP1	SD05
B1	SD05	B1	SD05	MQP2	MQP2
SD05	B1	SD05	B1	SD05	MQP3
SX6	MQP3	SD05	B1	SD05	B1
SD05	MQP4	SX2	MQP4	SD05	B1
SD05	B1	SD05	MQP5	SX8	MQP5
SD05	B1	SD05	B1	SD05	MQP6
MQP6	SD05	B1	SD05	B1	SD05
QP1	SX5	QP1	SD05	B1	SD05
B1	SD05	QP2	SX7	QP2	SD05
B1	SD05	B1	SD05	QP1	SX1
QP1	SD05	B1	SD05	B1	SD05
QP2	QP2	SD05	B1	SD05	B1
SD05	QP1	SX6	QP1	SD05	B1
SD05	B1	SD05	QP2	SX4	QP2
SD05	B1	SD05	B1	SD05	QP1
SX5	QP1	SD05	B1	SD05	B1
SD05	QP2	SX4	QP2	SD05	B1
SD05	B1	SD05	QP1	SX3	QP1
SD05	B1	SD05	B1	SD05	QP2
ENTREE	SX2	QP2	SD05	B1	SD05
B1	SD05	MDQP4	SX1	MDQP4	SD05
B1	SD05	B1	SD05	MDQP3	MDQP3
SD05	B1	SDS	SDS	SDB1	SDB1
SDB1	SDS	SD01	MDQP2	MDQP2	SD01
SDS	SDB1	SDB1	SDB1	SDS	SDS
B1	SD05	MDQP1	MDQP1	SD02	SD04
MDQP0	MDQP0	SD03	SD02	DQP1	
DQP1					
DSD02	DQP4	DQP4	DSD02	DQP3	DQP3
DSD02	DQP4	DQP4	DSD02	DQP3	DQP3
DSD02	FCQP9	FCQP9	BN2	CSD02	SD05
SDB1	SD05	SDB1	SD05	CSD06	FCQP8
FCQP8	CSD02	SD05	SDB1	SD05	SDB1
SD05	CSD05	FCQP7	FCQP7	BN1	CSD02
SD05	SDB1	SD05	SDB1	SD05	FCQP6
FCQP6	CSD02	SD05	SDB1	SD05	SDB1
SD05	FCQP5	FCQP5	CSD02	SD05	SDB1
SD05	SDB1	SD05	FCQP4	FCQP4	CSD02
SD05	SDB1	SD05	SDB1	SD05	CSD04
BN1	FCQP3	FCQP3	CSD02	SD05	SDB1
SD05	SDB1	SD05	CSD03	FCQP2	FCQP2
CSD02	SD05	SDB1	SD05	SDB1	SD05
BN2	FCQP1	FCQP1	CSD02	SD05	SDB1
SD05	SDB1	SD05	MCQP7	MCQP7	CSD02
SD05	CSD01	SD05	CSD01	SD05	MCQP6
MCQP6	CSD02	SD05	CSD01	SD05	CSD01
SD05	MCQP7	COLL	MCQP7	CSD02	SD05
CSD01	SD05	CSD01	SD05	MCQP6	MCQP6
CSD02	SD05	CSD01	SD05	CSD01	SD05
MCQP7	MCQP7	CSD02	SD05	CSD01	SD05
CSD01	SD05	MCQP6	MCQP6	CSD02	SD05
CSD01	SD01	SD01	CSD01	SD05	MCQP7
MCQP7	CSD02	SD05	CSD01	SD05	CSD01

SD05	MCQP6	MCQP6	CSD02	SD05	CSD01
SD05	CSD01	SD05	MCQP7	MCQP7	CSD02
SD05	CSD01	SD05	CSD01	SD05	MCQP6
MCQP6	CSD02	SD05	CSD01	SD05	CSD01
SD05	MCQP7	MCQP7	CSD02	SD05	CSD01
SD05	CSD01	SD05	MCQP6	MCQP6	CSD02
SD05	CSD01	SD01	SD01	CSD01	SD05
MCQP7	MCQP7	CSD02	SD05	CSD01	SD05
CSD01	SD05	MCQP6	MCQP6	CSD02	SD05
CSD01	SD05	CSD01	SD05	MCQP7	MCQP7
SD05	CSD01	SD05	CSD01	SD05	CSD02
MCQP6	MCQP6	SD05	CSD01	SD05	CSD01
SD05	CSD02	MCQP7	MCQP7	SD05	SDB1
SD01	SD01	SDB1	SD05	CSD02	FCQP1
FCQP1	BN2	SD05	SDB1	SD05	SDB1
SD05	CSD02	FCQP2	FCQP2	CSD03	SD05
SDB1	SD05	SDB1	SD05	CSD02	FCQP3
FCQP3	BN1	CSD04	SD05	SDB1	SD01
SD01	SDB1	SD05	CSD02	FCQP4	FCQP4
SD05	SDB1	SD01	SD01	SDB1	SD05
CSD02	FCQP5	FCQP5	SD05	SDB1	SD01
SD01	SDB1	SD05	CSD02	FCQP6	FCQP6
SD05	SDB1	SD01	SD01	SDB1	SD05
CSD02	BN1	FCQP7	FCQP7	CSD05	SD05
SDB1	SD05	SDB1	SD05	CSD02	FCQP8
FCQP8	CSD06	SD05	SDB1	SD05	SDB1
SD05	CSD02	BN2	ISORTIE	FCQP9	FCQP9
DSD02	DQP3	DQP3	DSD02	DQP4	DQP4
DSD02	DQP3	DQP3	DSD02	DQP4	DQP4
DSD02	DQP1				

SECTION DE
COLLIMATION

*** PERIOD ***

1

*** OPTION ***

BETA

*** BEAM-MATRIX ***

1.8034887031E+01
 2.5352312183E-05 5.5448087860E-02
 -1.0474386242E-15 -1.2163011636E-21 3.7976917637E+00
 -1.0342626935E-21 0.0000000000E+00 2.1557942612E-05 2.6331784217E-01
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00

*** DISPERSION ***

1.0996005E+01 -6.1370256E-09
 0.0000000E+00 0.0000000E+00

*** PARTICLE TYPE ***

0

6 2

*** ENERGIE CINETIQUE (MeV) ***

5.5360800E+05
 5589.00928

*** EMITTANCE ***

2.2000000E-07 2.2000000E-07 1.5000001E-04

*** ENDFILE ***

Annexe B

Caractéristiques des différents éléments magnétiques

TAB. B.1 – Paramètres des dipôles dans l’anneau de décroissance.

DIPOLES				
Nom	Angle (mrad)	Rayon (m)	Longueur (m)	B (T)
Arcs				
B1	36.53	155.669	5.687	6.006
Section de collimation				
BN1	20	600	12.000	1.558
BN2	-20	-600	12.000	-1.558

TAB. B.2 – Paramètres des déviateurs rapides dans la section d’injection.

DEVIATEURS			
Nom	Longueur (m)	θ (mrad)	B (T)
IKI1	2	0.90	0.420
IKI2	1	-0.31	-0.290

TAB. B.3 – Paramètres des sextupôles dans l’anneau de décroissance.

SEXTUPOLES			
Nom	Longueur (m)	SL (m^{-2})	HL (T/m)
SX1	1	-0.127	-118.402
SX2	1	0.0576	53.831
SX3	1	0	0.000
SX4	1	0.0295	27.588
SX5	1	-0.0625	-58.429
SX6	1	-0.0460	-42.968
SX7	1	0.0878	82.063
SX8	1	0	0.000

TAB. B.4 – Paramètres des quadrupôles dans l’anneau de décroissance.

QUADRIPOLES			
Nom	Longueur (m)	K (m^{-2})	G (T/m)
Section droite			
DQP1	1	-1.115×10^{-2}	-10.429
DQP2	1	$+1.112 \times 10^{-2}$	10.512
Section d’adaptation entre la section droite et l’arc			
MDQP0	3	$+1.841 \times 10^{-2}$	17.211
MDQP1	3	-8.171×10^{-3}	-7.639
MDQP2	3	-1.478×10^{-2}	-13.822
MDQP3	3	$+4.065 \times 10^{-2}$	38.004
MDQP4	3	-2.664×10^{-2}	-24.902
Mailles FODO de l’arc			
QP1	2	-3.162×10^{-2}	-29.563
QP2	2	$+4.848 \times 10^{-2}$	45.326
Section d’adaptation entre les mailles FODO et l’insertion pour l’injection			
MQP1	2	-2.680×10^{-2}	-25.056
MQP2	2	$+4.873 \times 10^{-2}$	45.559
MQP3	2	-3.593×10^{-2}	-33.592
MQP4	2	$+4.348 \times 10^{-2}$	40.651
MQP5	2	-4.592×10^{-2}	-42.932
MQP6	2	$+3.998 \times 10^{-2}$	37.379
Insertion pour l’injection dans l’arc			
IQP1	3	$+1.470 \times 10^{-2}$	13.739
IQP2	3	$+3.040 \times 10^{-3}$	2.843
IQP3	3	$+8.979 \times 10^{-3}$	8.395
IQP4	3	-2.650×10^{-2}	-24.773
IQP5	3	$+1.737 \times 10^{-2}$	16.237
Section de collimation en moment			
DQP3	1	-1.091×10^{-2}	-10.198
DQP4	1	$+9.732 \times 10^{-3}$	9.099
FCQP1	2	$+1.632 \times 10^{-2}$	15.257
FCQP2	2	-9.283×10^{-3}	-8.679
FCQP3	2	$+1.375 \times 10^{-2}$	12.854
FCQP4	2	-8.818×10^{-3}	-8.244
FCQP5	2	$+3.611 \times 10^{-3}$	3.376
FCQP6	2	$+0.000 \times 10^{-2}$	0.000
FCQP7	2	$+1.456 \times 10^{-2}$	13.604
FCQP8	2	-1.096×10^{-2}	-10.244
FCQP9	2	$+1.013 \times 10^{-2}$	9.475
MCQP6	2	$+1.204 \times 10^{-2}$	11.255
MCQP7	2	-9.605×10^{-3}	-8.980

Bibliographie

- [1] J. Payet. code BETA.
- [2] G. Wilquet. *Masses, mélange et oscillations de neutrinos*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2004.
- [3] B. Kayser. The New World of Neutrino Physics Chapitre 1. European School of HEP, 28 Juin 2006.
- [4] B. Kayser. The New World of Neutrino Physics Chapitre 3. European School of HEP, 28 Juin 2006.
- [5] B. Kayser. The New World of Neutrino Physics Chapitre 4. European School of HEP, 28 Juin 2006.
- [6] J.N. Bahcall. SOLAR NEUTRINOS I. THEORETICAL. *Phys.Rev.Letter*, 12(300), 1964.
- [7] J.N. Bahcall, N. Bahcall, and G. Shaviv. Present Status of the Theoretical Predictions for the ^{36}Cl Solar-Neutrino Experiment. *Phys.Rev.Letter*, 20(1209), 1968.
- [8] J.N. Bahcall and H.A. Bethe. *Astrophycis Preprint IASSNS-AST 80/14*, 1990.
- [9] J.N. Bahcall, M.H. Pinsonneault, and S. Basu. *Astrophysics J.*, 555(990), 2001.
- [10] J.N. Bahcall, M.C. Gonzalez-Garcia, and C. Pena-Garci J. *High Energy Phys.*, 7(54), 2002.
- [11] R. Davis Jr. *Phys. Rev.*, 97(766), 1955.
- [12] R. Davis Jr. *Phys. Rev.Lett.*, 13(303), 1964.
- [13] R. Davis Jr., D. S. Harmer, and K. C. Hoffman. *Phys. Rev.Lett.*, 20(1205), 1968.
- [14] [GALLEX Collaboration], P.Anselmann, et al. *Phys. Rev.B.*, 285(376), 1992.
- [15] [GALLEX Collaboration], W. Hampel, et al. *Phys. Rev.B.*, 388(384), 1996.
- [16] [GALLEX Collaboration], W. Hampel, et al. *Phys. Rev.B.*, 436(158), 1998.
- [17] [GALLEX Collaboration], W. Hampel, et al. *Phys. Rev.B.*, 447(127), 1999.
- [18] [GNO Collaboration], M. Altmann, et al. *Phys. Rev.B.*, 490(16), 2000.
- [19] [SNO Collaboration], Q.R.Ahmad, et al. Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory. *arXiv : nucl-ex/0204008*, 2002.
- [20] [SNO Collaboration], S.N.Ahmed, et al. Measurement of the total active ^8B solar neutrino flux at the sudbury neutrino observatory with enhanced neutral current sensitivity. *arXiv : nucl-ex/0309004*, 2003.

-
- [21] [KamLAND Collaboration], K.Eguchi, et al. *Phys. Rev.Lett.*, 90(021802), 2003.
- [22] P. Aliani et al. Neutrino mass parameters from Kamland, SNO and other solar evidence. *Phys. Rev.D.*, 69(013005), 2004.
- [23] G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and A. Palazzo. Global analysis of three-flavor neutrino masses and mixings. *arXiv :hep-ph/0506083*, 2005.
- [24] Y. Fukuda et al. Super-K Collab. *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 1562, 1998.
- [25] Y. Ashie et al. Super-K Collab. *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 101801, 1998.
- [26] Site WEB de l'expérience K2K. <http://neutrino.kek.jp/>.
- [27] Site WEB de l'expérience MINOS. <http://www-numi.fnal.gov/>.
- [28] [CNGS Collaboration]. The CERN Neutrino Beam to Gran Sasso, Conceptual Technical Design. *CERN 98-02 INFN/AE-98/05*, 1998.
- [29] [CNGS Collaboration]. Addendum to The CERN Neutrino Beam to Gran Sasso, Conceptual Technical Design. *CERN-SL/99-034-DI INFN/AE-99/05*, 1999.
- [30] [CHOOZ Collaboration], M.Apollonio, et al. *Phys.Lett.B.*, 466(415), 1999.
- [31] Site WEB de l'expérience DOUBLE CHOOZ. <http://doublechooz.in2p3.fr/Public/French/welcome.php>.
- [32] BENE Steering Group. Midterm scientific report. Technical report, CERN, 2006.
- [33] M. Doneg. *Study of neutrino oscillations with a low energy conventional neutrino superbeam*. PhD thesis, Università degli Studi Milano, 2000.
- [34] S. Gilardoni. *Study of particle production and capture for a Neutrino Factory*. PhD thesis, Université de Genève, 2004.
- [35] Y. Itow et al. The JHF-Kamiokande neutrino project. *arXiv :hep-ex/0106019*, 2001.
- [36] [NO ν A Collaboration], D. S. Ayres, et al. Proposal to build a 30 kiloton off-axis detector to study $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$ oscillations in the NuMI beamline. *arXiv :hep-ex/0503053*, 2005.
- [37] [SPLSuperBeam], B. Autin, et al. Conceptual design of the SPL, a high-power superconducting H $^{-}$ linac at CERN. *CERN-2000-012*, 2000.
- [38] [SPLSuperBeam], J.J. Gomez-Cadenas, et al. Physics potential of very intense conventional neutrino beams. *Neutrino Telescopes*, pages 463–481, NuFact Venice 2001.
- [39] [SPLSuperBeam], A. Blondel, et al. Superbeam studies at CERN. *Nucl. Instrum. Meth. A.*, 503(p 173-178), 2003.
- [40] [SPLSuperBeam], M. Apollonio, et al. Oscillation physics with a neutrino factory. *arXiv :hep-ph/0210192*, 2002.
- [41] M. Mezzetto. SuperBeam studies at CERN. *Proceedings of NuFact 2001*, 2001.
- [42] M. Baylac et al. Conceptual Design of the SPL II : A high-power superconducting H $^{-}$ linac at CERN. *report CERN-2006-006*, 2006.
- [43] A.E. Ball, A. Blondel, S. Gilardoni, and N. Vassilopoulos. Updated results of the Horn Study for the Nufact. *Proceedings of NuFact 2000*, 2000.
- [44] A. de Bellefon et al. Memphys : A large scale water Čerenkov detector at fréjus. *arXiv :hep-ex/0607026*, 2006.
- [45] K. R. Symon et al. Fixed-Field Alternating Gradient. *Phys. Rev.* 103, 1837 - 1859 (1956), 1956.

-
- [46] F. Lemuët. *Conception d'une usine à neutrinos : collecte et accélération du faisceau de muons*. PhD thesis, Université Paris Sud, 2007.
- [47] J.S. Berga, S.A. Kahna, and R.B. Palme. Overview of Acceleration for a Neutrino Factory. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Volume 14*, 2005.
- [48] Projet MERIT. <http://proj-hiptarget.web.cern.ch/proj-hiptarget/>.
- [49] D. Neuffer. Principles and applications of muon cooling. *Part. Accel. 14* 75-8, 1983.
- [50] Projet MUCOOL. http://www.fnal.gov/projects/muon_collider/cool/cool.html.
- [51] Projet MICE. <http://hepunix.rl.ac.uk/uknf/mice>.
- [52] P. Zucchelli. A novel concept for a neutrino factory : the beta-beam. *Phys. Lett. B*, 532 :166–172, 2002.
- [53] Projet EURISOL. <http://www.ganil.fr/eurisol/>.
- [54] R. Geller. *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and Ecr Plasmas*. CRC Press, 1996.
- [55] A. Lachaize and A. Tkatchenko. Preliminary design of a Rapid Cycling Synchrotron for the EURISOL Beta-Beam Facility. *EURISOL DS/TASK12/TN-06-02*, 2006.
- [56] A. Fabich and M. Benedikt. Decay losses along the accelerator chain of the EURISOL Beta-beam baseline design, 2006.
- [57] C. Rubbia. Ionization cooled ultra pure beta-beams for long distance $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ transitions, θ_{13} -phase and CP-violation. *Astroparticle Physics*, 2007.
- [58] M. Lindroos, J. d'Auria, J. Josè, and L. Buchmann. Measuring Difficult Reaction Rates Involving Radioactive Beams : A New Approach. *Proc. of science (NIC-IX) 006*, 2006.
- [59] A. Chancé and J. Payet. Simulation of the losses by decay in the decay ring for the beta-beams. *EURISOL DS/TASK12/TN-06-06*, 2006.
- [60] A. Chancé and J. Payet. Loss Management in the Beta-beam Decay Ring. *EPAC'06*, 2006.
- [61] A. Fabich and M. Benedikt. Decay losses along the accelerator chain of the Beta-beam. Technical report, EURISOL DS/TASK12/TN-05-05, mars 2006.
- [62] E. Wildner and C. Vollinger. Decay ring SC dipole design. *4th beta-beam task meeting*, 30 octobre 2006.
- [63] E. Wildner and C. Vollinger. A Large Aperture Superconducting Dipole for Beta Beams to Minimize Heat Deposition in the Coil. *PAC'07*, 2007.
- [64] F.W. Jones and E. Wildner. Simulation of Decays and Secondary Ion Losses in a Beta-beam Decay Ring. *PAC'07*, 2007.
- [65] M. Benedikt and S. Hancock. A novel scheme for injection and stacking of radioactive ions at high energy. *NIM A 550 (2005) 1-5*, 2005.
- [66] B. Autin, M. Benedikt, S. Hancock, H. Haseroth, A. Jansson*, U. Köster, M. Lindroos, S. Russenschuck, and F. Wenander. The acceleration and storage of radioactive ions for a neutrino factory. *NuFact 2002*, 2002.
- [67] M. Mezzetto. Physics reach of the beta-beam. *Journal of Physics G : Nuclear Particle Physics n°29*, pages 1771–1776, 2003.

- [68] M. Benedikt, A. Fabich, S. Hancock, and M. Lindroos. The EURISOL Beta-beam Facility Parameter and Intensity Values, Version 2, 2005.
- [69] J. Bouchez, M. Lindroos, and M. Mezzetto. Beta-beams : Present design and expected performance. *proc. NuFact 03*, New York 2003.
- [70] Liste des paramètres. <http://cern.ch/beta-beam-parameters>.
- [71] P. Bryant. Winagile. <http://bryant.home.cern.ch/bryant/>.
- [72] M. Mezzetto. Beta Beams. *Proceedings of Neutrino 2004*, 14-19 June 2004.
- [73] M. Benedikt and M. Lindroos. The Beta-beam within EURISOL DS. *EURISOL DS/TASK12/TN-06-01*, 2006.
- [74] C. Volpe. Physics potential of the beta-beams. *Nuclear Physics A*, 2004.
- [75] JJ. Bernabeu, J. Burguet-Castell, C. Espinoza, and M. Lindroos. Monochromatic neutrino beams. *JHEP*, 0512(014), 2005.
- [76] A. Chancé and J. Payet. Studies of the injection system in the decay ring of a Beta-beam neutrino source. *PAC'05*, 2005.
- [77] S. Hancock and A. Chancé. Stacking Simulations in the Beta-beam Decay Ring. *EPAC'06*, 2006.
- [78] M. Benedikt, S. Hancock, and J.-L. Vallet. A proof of principle of asymmetric bunch pair merging. *AB-Note-2003-080 MD*, 2003.
- [79] Liste des paramètres du Tevatron. http://www-fmi.fnal.gov/Preform%20Goals/Chapter_5.pdf.
- [80] Liste des paramètres du LHC. https://edms.cern.ch/file/445830/5/Vol1_1_Chapter_2.pdf.
- [81] Liste des paramètres du LHC. https://edms.cern.ch/file/445835/4/Vol1_1_Chapter_6.pdf.
- [82] Liste des paramètres de l'anneau principal de J-PARC. <http://hadron.kek.jp/~accelerator/TDA/tdr2003/index2.html>.
- [83] D. Boussard. Observation of Microwave Longitudinal Instabilities in the CPS. In *CERN internal report Lab II /RF/Int 75-2*, 1975.
- [84] H. Hereward. Coasting beam theory applied to bunches. In *Proc. of Isabelle Summer Study*, *BNL Report 20550*, page 555, 1975.
- [85] A. Tkatchenko. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique (courbure et focalisation transverse). DEA Physique et Technologie des Grands Instruments.
- [86] S. Fartoukh. *Méthodes d'analyse d'une ligne de focalisation finale dans le cadre du projet du collisionneur linéaire TESLA*. PhD thesis, Université Paris VI, 1997.
- [87] H. Bruck. *Accélérateurs circulaires de particules*. Bibliothèque des sciences et techniques nucléaires, 1966.
- [88] G. Leleux. Compléments sur la physique des accélérateurs. DEA Physique et Technologie des Grands Instruments, 1993.
- [89] O. Brüning. *CERN Accelerator School Intermediate accelerator physics*, chapter Linear imperfections, pages 129–181. CERN, DESY, Zeuthen, Germany 2003.
- [90] K.L. Brown. A first - and second - order matrix theory for the design of beam transport systems and charged particle spectrometers. Technical report, SLAC, 1967.

-
- [91] G. Leleux and P. Nghiem. Défauts dipolaires et quadrupolaires dans une ligne de transport. Technical report, Laboratoire National Saturne, 1991.
- [92] J. Payet. Correction des défauts dipolaires. Technical report, Laboratoire National Saturne, 1993.
- [93] P. Lapostolle, A. Lombardi, and T.P. Wangler. A model of non-linear space-charge forces in a charged particle beam. Technical report, CERN/PS 93-11(HI), 1993.
- [94] A. Lachaize and A. Tkatchenko. Déplacement des nombres d'ondes dus à la charge d'espace dans un synchrotron. Cas d'une distribution non linéaire parabolique de charge dans un faisceau continu de section elliptique, 25 janvier 2006.
- [95] K. Schindl. *CERN Accelerator School Intermediate accelerator physics*, chapter Space charge, pages 305–320. CERN, DESY, Zeuthen, Germany 2003.
- [96] A. Chancé and J. Payet. First design for the optics of the decay ring for the beta-beams. *EURISOL DS/TASK12/TN-06-05*, 2006.
- [97] A. Chancé and J. Payet. The Beta-Beam decay ring design. *EPAC'06*, 2006.
- [98] P. Audy. *Le mouvement transverse dans un accélérateur circulaire affecté de non linéarités hexapolaires. Application au problème de l'ouverture dynamique*. PhD thesis, Université Paris Sud, 1989.
- [99] E. Lebichev and P. Piminov. Algorithm for chromatic sextupole optimization and dynamic aperture increase. *EPAC'06*, 2006.
- [100] S. Fartoukh and O. Brüning. Field Quality Specification for the LHC Main Dipole Magnets. Technical report, LHC Project Report 501, 2001.
- [101] RHIC Design Manual. MAGNET SYSTEM (WBS 1.1). Technical report, 1996.
- [102] J. Wei et al. Misalignment evaluation of superconducting magnets in the relativistic heavy ion collider. *EPAC/96*, 1996.
- [103] C. Vollinger and E. Wildner. Communication privée, 2006.
- [104] A. Chancé and J. Payet. Studies of dipole field quality for the beta-beam decay ring. *PAC'07*, Juin 2007.
- [105] M. Magistris and M. Silari. Parameters of radiological interest for a beta-beam decay ring. Technical report, TIS-2003-017-RP-TN, 2003.
- [106] Code FLUKA. <http://www.fluka.org/Download.shtml>.
- [107] Code GEANT4. <http://geant4.web.cern.ch/geant4/support/download.shtml>.
- [108] C. Omet. Code StrahlSim. http://www.gsi.de/beschleuniger/groups/FSY/projekte/kollimator_vakuum/strahlsim_e.html.
- [109] P. Spiller. Vacuum simulations and requirements along the accelerator chain, 30 octobre 2006.
- [110] F.W. Jones. Code Accsim. <http://www.triumf.ca/compserv/accsim.html>.
- [111] A. Drozdhin. Beam collimation in the low and high energy accelerators. Technical report, CERN, 26 Juillet 2001.
- [112] J.B. Jeanneret. Optics of a two-stage collimation system. *Physical review special topic - Accelerators and beams*, 1998.
- [113] LHC Collaboration. Beam cleaning and collimation system. Technical report, LHC Design Report Volume I, Chapitre 18.

- [114] G. Robert-Demolaize. *Design and Performance Optimization of the LHC Collimation System*. PhD thesis, CERN-THESIS-2006-069, 2006.
- [115] N. Pichoff. *CERN Accelerator School Intermediate accelerator physics*, chapter Beam dynamics basics in RF linacs, pages 145–177. CERN, Zeegse, The Netherlands 2005.
- [116] N. Pichoff. *CERN Accelerator School Intermediate accelerator physics*, chapter Introduction to RF linear accelerators, pages 105–128. CERN, DESY, Zeuthen, Germany 2003.
- [117] C. Carli. Creation of Hollow Bunches using a double harmonic RF system. *CERN/PS 2001-073*, 2001.
- [118] C. Carli and M. Chanel. Creation of hollow bunches by redistribution of phase space surfaces. *EPAC'02*, 2002.
- [119] Wolfram Research. Mathematica. <http://www.wolfram.com/>.

Résumé

L'étude de l'oscillation du neutrino entre ses différentes saveurs requiert des flux purs et très intenses de neutrinos énergétiques, bien collimatés, dont le spectre en énergie est bien déterminé. Ainsi, une machine dédiée apparaît actuellement nécessaire. Parmi les différents concepts proposés d'usines à neutrinos, celui étudié ici, dénommé Beta-Beams, porte sur la production de neutrinos par la décroissance beta d'ions radioactifs préalablement accélérés. Plus précisément, la thèse est centrée sur l'étude et la conception de l'anneau de stockage, en forme de champ de course, des ions accélérés. Sa finalité est de stocker les ions jusqu'à leur décroissance. Après une brève description du mécanisme d'oscillation du neutrino et une revue des différentes expériences, une introduction sera donnée au concept des usines à neutrinos et plus particulièrement sur les Beta-Beams. Ensuite, les problématiques liées aux Beta-Beams seront énoncées. Après avoir décrit le formalisme du transport de particules dans un accélérateur, un premier design de l'anneau ainsi que ses propriétés optiques seront alors donnés. L'effet des défauts d'alignement ou de champ dans les dipôles a également été étudié ainsi que l'optimisation de l'ouverture dynamique. Le traitement des pertes par décroissance ou par collimation en énergie sera développé. Le besoin d'injecter en présence d'un faisceau circulant nécessite une injection off-momentum, qui sera décrite. Enfin, le mélange des deux faisceaux nécessite un programme radiofréquence spécifique qui sera présenté.

Mots-clés: usines à neutrinos, Beta-Beams, anneau de stockage, injection off-momentum, mélange de 2 faisceaux, optimisation d'ouverture dynamique, pertes par décroissance

Abstract

The study of the neutrino oscillation between its different flavours needs pure and very intense flux of energetic, well collimated neutrinos with a well determined energy spectrum. So, a dedicated machine seems necessary nowadays. Among the different concepts of neutrino facilities, the one which will be studied here, called Beta-Beams, lies on the neutrino production by beta decay of radioactive ions after their acceleration. More precisely, the thesis is focused on the study and the design of the race-track-shaped storage ring of the high energy ions. Its aim is to store the ions until decaying. After a brief description of the neutrino oscillation mechanism and a review of the different experiments, an introduction to the neutrino facility concept and more precisely to the Beta-Beams will be given. Then, the problematics linked to the Beta-Beams will be presented. After a description of the beam transport formalism, a first design and the optical properties of the ring will be then given. The effects of the misalignment and of the field errors in the dipoles have been studied. The dynamic aperture optimization is then realized. Handling of the decay losses or the energy collimation scheme will be developed. The off-momentum injection needed in presence of a circulating beam will be explained. Finally, the specific radiofrequency program needed by the beam merging will be presented.

Keywords: neutrino facilities, Beta-Beams, storage ring, off-momentum injection, beam merging, dynamic aperture optimization, decay losses

