

NNT : 2016SACLS307

THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY  
PRÉPARÉE À  
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD ET AU CEA SACLAY

ECOLE DOCTORALE N°127  
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE  
SPÉCIALITÉ DE DOCTORAT : ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

par  
M. MATHIEU GUENEL

---

**Dissipation de marée dans les étoiles de  
faible masse et les planètes géantes**  
**Ondes inertielles, structure interne et rotation différentielle**

---

Thèse présentée et soutenue à Saclay, le 21 octobre 2016

Composition du jury :

M. JØRGEN CHRISTENSEN-DALSGAARD, Professeur, *Aarhus University* ..... Rapporteur  
M. MICHAEL LE BARS, Directeur de Recherche CNRS, *IRPHE* ..... Rapporteur  
M. ALAIN ABERGEL, Professeur, *Université Paris-Sud* ..... Président du jury  
M. GORDON OGILVIE, Professeur, *University of Cambridge* ..... Examineur  
MME CAROLINE TERQUEM, Professeur, *University of Oxford* ..... Examinatrice  
M. STÉPHANE MATHIS, Chercheur CEA (HDR), *CEA Saclay* ..... Directeur de thèse  
M. MICHEL RIEUTORD, Professeur, *Université Toulouse III Paul Sabatier* ..... Invité  
M. CLÉMENT BARUTEAU, Chargé de Recherche CNRS, *IRAP* ..... Invité



# Résumé

## **Dissipation de marée dans les étoiles de faible masse et les planètes géantes : ondes inertielles, structure interne et rotation différentielle**

L'exemple d'interaction de marées le plus connu et étudié est le système Terre-Lune. La Terre y subit une attraction gravitationnelle non-uniforme de la part de la Lune (mais aussi du Soleil), qui est par exemple à l'origine des marées océaniques. L'énergie contenue dans les déformations et écoulements ainsi induits y est dissipée par des phénomènes de friction interne : c'est ce qui a provoqué la synchronisation de la rotation de la Lune avec son orbite, et continue à l'éloigner de la Terre de quelques centimètres par an, et à allonger la durée du jour terrestre. De la même façon, les étoiles et les planètes de tous types peuvent se déformer et être le siège de mouvements de marées du fait de la présence d'un compagnon en orbite autour d'eux. La dissipation d'énergie engendrée par les mécanismes de friction agissant sur ces déformations et écoulements de marée dans les intérieurs stellaires et planétaires modifie l'architecture orbitale des systèmes d'étoiles binaires et étoile-planète ainsi que l'évolution rotationnelle des corps les composant ; cette quantité est donc cruciale pour la compréhension de leur évolution dynamique à long terme.

Cette thèse étudie les mécanismes de dissipation de marée dans les étoiles de faible masse, possédant comme notre Soleil une enveloppe convective externe (*i.e.* de types M à F), ainsi que dans les planètes géantes gazeuses similaires à Jupiter et Saturne. En particulier, nous cherchons à comprendre et à caractériser l'influence de la structure et de la dynamique internes de ces corps sur les différents mécanismes physiques à l'origine de cette dissipation afin d'évaluer leur importance relative.

Dans le cas des planètes géantes, nous utilisons des modèles semi-analytiques préexistants et nous montrons que la dissipation induite par la présence éventuelle d'un cœur solide viscoélastique n'est pas négligeable par rapport à celle induite par les ondes inertielles (dont la force de rappel est l'accélération de Coriolis) dans l'enveloppe convective. Pour les étoiles de faible masse, nous développons de nouvelles méthodes semi-analytiques ainsi que des simulations numériques d'ondes inertielles de marée se propageant dans l'enveloppe convective externe, dont nous calculons et caractérisons la dissipation d'énergie associée. Pour la première fois, nous prenons en compte les effets d'une rotation différentielle latitudinale telle qu'observée dans le Soleil et prédite par de nombreuses simulations numériques de convection dans les étoiles de faible masse. Nous mettons en évidence l'existence de nouvelles familles de modes inertiels ainsi que l'importance des résonances de corotation pour la dissipation de marée. Enfin, nous dérivons une nouvelle prescription pour la viscosité turbulente appliquée à ces ondes de marées en prenant en compte l'influence de la rotation sur les propriétés de la convection le long de l'évolution des étoiles.

# *Abstract*

## **Tidal dissipation in low-mass stars and giant planets : inertial waves, internal structure and differential rotation**

The most well known and extensively studied example of tidal interactions is the Earth-Moon system. Earth is subject to a non-uniform gravitational pull from the Moon (and the Sun), which causes for instance the oceanic tides. The energy of the induced deformations and flows is dissipated by internal friction : this has led to the synchronization of the Moon's rotation with its orbit and still explains its outward migration by a few centimeters per year as well as the lengthening of the Earth day. Similarly, stars and planets of all types can deform and host tidal motions due to the presence of an orbiting companion. The energy dissipation generated through friction mechanisms acting on these tidal distortions and flows in stellar and planetary interiors modifies the orbital architecture of binary stars and star-planet systems as well as the rotational evolution of the bodies that compose them ; thus this quantity is crucial for our understanding of their long-term dynamical evolution.

This thesis studies the tidal dissipation mechanisms in low-mass stars that have an external convective envelope like the Sun (*i.e.* from M- to F-type stars), as well as in Jupiter- and Saturn-like gaseous giant planets. We particularly focus on understanding and characterizing the influence of the internal structure and dynamics of these bodies on the various physical mechanisms that cause this tidal dissipation, in order to assess their relative strength.

In the case of giant planets, we use preexisting semi-analytical models and we show that the dissipation induced by the possible presence of a viscoelastic solid core is not negligible compared to the one induced by inertial waves (whose restoring force is the Coriolis acceleration) in the convective envelope. For low-mass stars, we perform a new semi-analytic study as well as numerical simulations of tidal inertial waves propagating in the external convective envelope, and we compute the associated energy dissipation. For the first time, the effects of a background latitudinal differential rotation, as observed in the Sun and predicted by various numerical simulations of convection in low-mass stars, is taken into account. We highlight the existence of new families of inertial modes as well as the importance of corotation resonances for tidal dissipation. Finally, we derive a new prescription for the turbulent viscosity applied to these tidal waves that takes into account the influence of rotation on the properties of convective flows along the evolution of stars.

# Remerciements

Je commencerai par exprimer ma gratitude envers les membres qui ont composé le jury de cette thèse, à commencer par Monsieur Jørgen Christensen-Dalsgaard et Monsieur Michael Le Bars pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que Monsieur Gordon Ogilvie, Madame Caroline Terquem et Monsieur Alain Abergel pour avoir endossé le rôle d'examineur lors de ma soutenance. J'ai été très honoré de l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail, de discuter leurs commentaires, de répondre à leurs questions pertinentes, mais aussi de recevoir leurs félicitations.

J'ai aussi à cœur de remercier Monsieur Michel Rieutord et Monsieur Clément Baruteau, qui ont fait partie de ce même jury en tant qu'invités, mais font avant tout partie des personnes sans qui ce travail n'aurait pu être ce qu'il est. Il est le fruit de discussions scientifiques passionnantes et des échanges que nous avons développés et entretenus pendant l'intégralité de ces trois ans, et je les remercie pour leur encadrement bienveillant et encourageant, et tout particulièrement Clément pour le temps et l'énergie qu'il a consacrés à échanger avec moi sur nos recherches et à commenter ce manuscrit.

*Last but not least*, comme il aime à dire, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Stéphane Mathis, qui après avoir été mon professeur a accepté de diriger mon stage de fin d'études ainsi que cette thèse. Je substituerai cependant volontiers la dénomination de « directeur de thèse » pour celle de « guide » ou de « co-pilote de thèse », tant mes (ou plutôt nos) travaux ont bénéficié de ses idées et conseils. Au-delà de ses qualités scientifiques évidentes et du savoir qu'il a pu me transmettre, j'ai eu la chance de pouvoir compter sur sa disponibilité, sa générosité, sa franchise et son amitié sans lesquelles cette thèse aurait très bien pu ne jamais aboutir. J'ai également une pensée pour Monsieur Jean-Paul Zahn, que j'aurai eu l'honneur de rencontrer en quelques occasions et dont je mesure ce qu'il représente pour de nombreux membres de la communauté astrophysique. Cette thèse s'inscrit, je l'espère, dans l'héritage plus que jamais grandissant de ses travaux pionniers.

Je tiens aussi à remercier les membres du LDEE à commencer par son directeur, Sacha Brun, et aussi Françoise Remus pour notre collaboration et pour le temps qu'elle m'a consacré lors de sa dernière année de thèse alors que je débutais dans le monde de la recherche en astrophysique. Un grand merci à Rafa pour sa générosité en KitKat®, à tous les post-docs ou chercheurs associés au laboratoire : Sean, Rui pour ses conseils sur Porto, Antoine, Laurène, Micky, Jacobo et son appétit légendaire, Ching, Savita, Paul, David, Enrico et notre amour partagé pour la *pasta*, Christophe, Vincent, Kyle et nos apéros houblonnés, Delphine grâce à qui j'ai énormément appris sur moi-même, et enfin Julie pour son soutien crucial dans les moments les plus difficiles. Je n'oublie pas mes camarades thésards, déjà diplômés ou non : Françoise, Tugdual, Lucie, Pierre qui m'a fait découvrir la psychologie sociale, Victor qui m'a fait découvrir le bon gin, Constance, et plus récemment Mansour, Quentin, Roxane et Barbara. Je n'oublie pas non plus Siyi, qui n'est certes pas (encore) thésarde, mais vu que ce sont mes remerciements, eh bien je fais ce que je veux !

Plus largement, je veux aussi remercier certains membres du Service d'Astrophysique du CEA Saclay, à commencer par sa direction qui m'a offert un contrat de thèse au CEA, et en particulier Pascale Delbourgo pour nos discussions sur mon avenir personnel et professionnel, Jérôme Rodriguez pour son intérêt véritable envers l'ensemble des doctorants du service ; et puisque j'en suis là, Guillaume Pineau des Forêts pour avoir assuré avec une grande sympathie le rôle de représentant de l'ED 127. Je ne peux pas ne pas mentionner Julien dont j'ai alimenté et subi les facéties pendant près d'un an et demi, mais aussi Rémi, Sébastien, Thierry, Camilla, Sophia et bien d'autres. Je veux également remercier les membres du laboratoire PS2E de l'IRAP pour leur accueil chaleureux au cours de mes différentes visites.

Pendant ces trois dernières années, j'ai eu la chance de pouvoir enseigner à l'UFR de Physique de l'Université Paris-Sud en parallèle de ma thèse, expérience que j'ai appréciée et qui m'a beaucoup apporté au niveau pédagogique mais aussi pour ma confiance en moi, ce que je dois notamment à Medhi Zeghal, Alain Sarfati et Carole Gaulard pour m'avoir confié d'année en année la responsabilité de ces nombreuses heures d'enseignement.

Bien entendu, rien de tout cela n'aurait été possible sans le soutien de ma famille, notamment celui de mes parents qui m'ont toujours vaillamment soutenu moralement (et financièrement) pendant mes études, et qui ont toute ma reconnaissance et mon amour pour l'éducation qu'ils m'ont prodiguée (et pour tout le reste). J'embrasse également ma grande sœur préférée Elo, mon neveu (préféré aussi) Tom, mon papy Bernard dont les confitures ont égayé de nombreux petit-déjeuners pendant 3 ans, Annie, mes oncles et tantes Marco, Hervé, Inga, Chantal, Pascalou, Aimé, et mes cousins Sierik, Nils et Yann.

Enfin, un immense merci à Astrid ma coloc' actuelle préférée pour me supporter encore, Amandine mon ancienne coloc' préférée qui pour une raison obscure continue à bien m'aimer malgré tout ce que je lui fais subir, Simon pour nos séances natation et Dikkenek, et Marion la plus belle et drôle des picardes malgaches (ou l'inverse) que je connaisse. Merci Mite pour cette magnifique année presque-et-demi à tes côtés, et bon courage pour ta propre dernière ligne droite.

<b>Résumé - Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des Figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des Tableaux</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introduction : les systèmes planétaires</b>	<b>1</b>
1.1 La révolution des systèmes exoplanétaires : des découvertes récentes et d'une grande diversité . . . . .	1
1.1.1 Méthodes de détection d'exoplanètes et missions d'observation . . . . .	1
1.1.2 Des systèmes planétaires aux architectures variées . . . . .	3
1.2 Diversité des composantes des systèmes planétaires . . . . .	4
1.2.1 Des planètes de toutes sortes . . . . .	4
1.2.2 Structure interne des étoiles . . . . .	6
1.2.3 La dynamique des étoiles de faible masse : évolution, rotation, turbulence et magnétisme . . . . .	7
1.2.3.1 Evolution . . . . .	7
1.2.3.2 Rotation et convection turbulente . . . . .	8
1.2.3.3 Magnétisme et vent stellaire . . . . .	9
1.3 Des systèmes planétaires sièges de différentes interactions . . . . .	11
1.3.1 Interactions magnétohydrodynamiques . . . . .	11
1.3.2 Interactions de marées . . . . .	12
1.3.3 Vers une vision globale de la dynamique des systèmes planétaires . . . . .	13
1.4 Organisation du manuscrit . . . . .	14
<b>2 Théorie linéaire des marées fluides astrophysiques</b>	<b>17</b>
2.1 Description linéaire et formalisme . . . . .	17
2.1.1 Potentiel de marée, réponse linéaire . . . . .	17
2.1.2 Dissipation et évolution dynamique : nombres de Love et quantités de marées . . . . .	23
2.2 Marée d'équilibre et marée dynamique fluides . . . . .	28
2.2.1 Marée dynamique et forces de rappel dans les zones stablement stratifiées et les zones convectives . . . . .	30
2.2.2 Processus de dissipation dans les zones stablement stratifiées et convectives . . . . .	32
2.2.2.1 Processus de dissipation en zone stablement stratifiée . . . . .	32

2.2.2.2	Action de la convection turbulente sur les écoulements de marée . . . . .	33
2.3	Etat de l'art des marées fluides en astrophysique . . . . .	35
2.3.1	Théorie linéaire . . . . .	35
2.3.2	Limitations de la théorie linéaire . . . . .	37
2.3.3	Contraintes observationnelles . . . . .	38
2.3.4	Conséquences sur l'évolution dynamique des systèmes . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Écoulements dans les fluides en rotation et ondes inertielles</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	Notions sur les fluides en rotation . . . . .	44
3.2.1	Equation de Navier-Stokes, rotation et adimensionnement . . . . .	44
3.2.1.1	Equation de Navier-Stokes en référentiel inertiel . . . . .	44
3.2.1.2	Référentiel en rotation . . . . .	45
3.2.1.3	Adimensionnement . . . . .	46
3.2.2	Écoulement géostrophique et théorème de Taylor-Proudman . . . . .	47
3.3	Ondes inertielles linéaires en rotation solide dans le cas non-visqueux . . . . .	48
3.3.1	Propriétés de propagation, relation de dispersion, vitesses de phase et de groupe . . . . .	48
3.3.2	Equation de Poincaré . . . . .	49
3.3.3	Méthode des caractéristiques . . . . .	50
3.4	Modes inertiels propres et rôle de la viscosité . . . . .	51
3.4.1	Cas de la sphère pleine . . . . .	52
3.4.2	Cas de la coquille sphérique . . . . .	52
3.4.3	Latitudes critiques . . . . .	54
3.5	Calcul numérique spectral d'écoulements en géométrie sphérique . . . . .	54
3.6	Dissipation par les ondes inertielles de marées dans les zones convectives stellaires et planétaires . . . . .	57
3.6.1	État de l'art sur la dissipation de marée par les modes inertiels . . . . .	57
3.6.2	Interaction entre les ondes inertielles, le champ magnétique et d'autres écoulements à grande échelle . . . . .	59
3.6.3	Compétition avec d'autres processus de dissipation de marée dans les étoiles et les planètes . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Dissipation de marée dans les planètes géantes : ondes inertielles et cœur solide</b>	<b>63</b>
4.1	Contexte et motivations . . . . .	63
4.1.1	Scénarios de formation des planètes géantes gazeuses . . . . .	63
4.1.1.1	Scénario par accrétion de cœur . . . . .	63
4.1.1.2	Par instabilité gravitationnelle du disque protoplanétaire . . . . .	65
4.1.2	Structure interne des planètes géantes gazeuses . . . . .	65
4.1.3	Contraintes observationnelles sur la dissipation de marée dans Jupiter, Saturne et leurs satellites . . . . .	66
4.1.3.1	Estimations de la dissipation de marée dans Jupiter et Io . . . . .	67
4.1.3.2	Dissipation de marée dans Saturne . . . . .	68
4.2	Etude de la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses depuis le cœur jusqu'à la surface . . . . .	70
4.2.1	Modèle de structure interne bi-couche . . . . .	70
4.2.2	Définition et évaluation des réservoirs de dissipation . . . . .	71

4.2.3	Dissipation anélastique dans le cœur rocheux/glacé . . . . .	72
4.2.4	Dissipation par les ondes inertielles dans l'enveloppe convective . . . . .	74
4.3	Comparaison des deux mécanismes de dissipation . . . . .	75
4.3.1	En fonction de la taille du cœur solide . . . . .	76
4.3.2	En fonction de la masse du cœur solide . . . . .	77
4.4	Conclusions et perspectives . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Ondes inertielles dans les enveloppes convectives stellaires en rotation différentielle : modes libres</b>	<b>85</b>
5.1	Profil de rotation différentielle dans les enveloppes convectives stellaires . . . . .	86
5.1.1	La rotation différentielle observée dans le Soleil et les autres étoiles . . . . .	86
5.1.2	Des simulations numériques MHD pour la rotation différentielle des étoiles de faible masse . . . . .	87
5.1.3	Un profil de rotation différentielle générique et simple pour l'étude des ondes inertielles . . . . .	88
5.2	Formulation mathématique . . . . .	89
5.3	Etude des ondes inertielles dans le cas non-visqueux . . . . .	90
5.3.1	Deux familles de modes propres - résonances de corotation . . . . .	92
5.3.2	Relation de dispersion, vitesses de phase et de groupe . . . . .	94
5.4	Calculs numériques de modes propres en présence de viscosité . . . . .	95
5.4.1	Méthode numérique . . . . .	95
5.4.2	Modes D . . . . .	96
5.4.3	Modes DT . . . . .	97
5.4.4	Résonances de corotation et couches critiques . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Etude de la dissipation de marée par les ondes inertielles en rotation différentielle</b>	<b>119</b>
6.1	Formulation du problème forcé : marées d'équilibre et dynamique, forçage académique et bilan énergétique . . . . .	120
6.1.1	Séparation entre marée d'équilibre et marée dynamique . . . . .	120
6.1.2	Formulation mathématique en zone convective et en présence de rotation différentielle . . . . .	121
6.1.3	Décomposition en harmoniques sphériques . . . . .	125
6.1.4	Forçage unitaire simplifié par condition aux limites . . . . .	125
6.1.5	Equation de l'énergie . . . . .	126
6.2	Simulation numérique de modes forcés dans une enveloppe convective en rotation différentielle conique . . . . .	129
6.2.1	Adimensionnement et méthode de résolution numérique . . . . .	129
6.2.2	Cas du Soleil et influence de la viscosité . . . . .	131
6.2.3	Comparaison entre rotation solaire et anti-solaire . . . . .	134
6.2.4	Cas d'étoiles de masses différentes et influence de la taille du coeur . . . . .	136
6.3	Augmentation de la dissipation par les résonances de corotation . . . . .	138
6.4	Conclusion . . . . .	139
<b>7</b>	<b>Autre contribution : impact de la rotation sur la friction turbulente dans les zones convectives</b>	<b>141</b>
<b>8</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>155</b>

---

<b>A</b>	<b>Harmoniques sphériques et polynômes de Tchebychev</b>	<b>159</b>
A.1	Algèbre relative aux harmoniques sphériques . . . . .	159
A.1.1	Harmoniques sphériques scalaires . . . . .	159
A.1.1.1	Définitions et propriétés de base . . . . .	159
A.1.1.2	Cas des harmoniques sphériques axisymétriques . . . . .	160
A.1.1.3	Relations de récurrence - Relations différentielles linéaires . .	160
A.1.1.4	Décomposition d'une fonction scalaire sur les harmoniques sphériques . . . . .	161
A.1.2	Harmoniques sphériques vectorielles . . . . .	161
A.1.2.1	Définitions et propriétés de base . . . . .	161
A.1.2.2	Relations de récurrence - Relations différentielles linéaires . .	162
A.1.2.3	Décomposition d'un champ de vecteur sur les harmoniques sphériques vectorielles . . . . .	162
A.1.3	Formulaire . . . . .	163
A.1.3.1	Développement des opérateurs différentiels linéaires usuels .	163
A.1.3.2	Relations utiles pour la décomposition sur les harmoniques sphériques vectorielles des équations (5.5) et (6.50) du mou- vement . . . . .	165
A.2	Polynômes de Tchebychev de première espèce . . . . .	165
A.2.1	Définition et propriétés de base . . . . .	166
	<b>Bibliographie</b>	<b>169</b>

1.1	Illustration des deux principales méthodes de détection d'exoplanètes. <b>Gauche</b> : Principe de détection d'exoplanètes par la méthode des transits. Crédit : ESA/Hans Deeg. <b>Droite</b> : Mesures de la vitesse radiale de l'étoile 51 Pegasi. Crédit : Mayor & Queloz (1995). . . . .	2
1.2	<b>Haut</b> : Exemples de systèmes multi-planétaires observées par la mission Kepler (NASA). Crédit : D. Latham ; Fabrycky et al. (2012). <b>Bas</b> : Distribution des excentricités des exoplanètes confirmées (en date du 15/08/2016) en fonction du demi-grand axe (en unités astronomiques). Source : NASA Exoplanet Archive. . . . .	4
1.3	<b>Haut</b> : Structure interne des planètes telluriques du système solaire et de la Lune. <b>Bas</b> : Structure interne des planètes géantes gazeuses et glacées du système solaire. Crédit : JPL-Caltech. . . . .	5
1.4	Diagramme masse-rayon (en rayons et masses terrestres) d'un échantillon d'exoplanètes découvertes par le télescope spatial Kepler. La couleur des symboles représente le flux lumineux incident reçu par la planète de la part de son étoile, normalisé par la valeur du flux reçu par la Terre du Soleil. Les lignes grises pointillées sont des lignes de niveau de la densité moyenne, tandis que les autres lignes continues sont des exemples de composition interne simplifiées, ainsi que celle de la Terre (en rouge). Crédit : Lissauer et al. (2014). . . . .	6
1.5	<b>Gauche</b> : Diagramme de Kippenhahn pour la structure interne des étoiles sur la séquence principale en fonction de leur masse, décrivant la fraction de masse contenue dans la zone convective (régions grisées) et la zone radiative (régions blanches). Crédit : Mathis & Remus (2013), adapté de Kippenhahn & Weigert (1990). <b>Droite</b> : Evolution du rapport d'aspect $\eta = R_c/R_*$ entre le rayon $R_c$ du cœur radiatif et $R_*$ de l'étoile pour les étoiles de faible masse, depuis la pré-séquence principale jusqu'à la fin de la séquence principale. Crédit : Mathis (2015), calculé d'après les modèles stellaires de Siess et al. (2000). . . . .	7
1.6	<b>Gauche</b> : Evolution des taux de rotation moyens, normalisés par celui du Soleil actuel, du cœur radiatif (lignes discontinues) et de l'enveloppe convective (lignes continues) pour des étoiles semblables au Soleil. Les courbes et symboles bleus, rouges et verts correspondent respectivement au 90ème centile, 25ème centile et la médiane de la distribution de rotations d'étoiles semblables au Soleil dans des régions de formations d'étoiles et jeunes amas ouverts. Crédit : Gallet & Bouvier (2013). <b>Droite</b> : Profil de rotation différentielle interne du Soleil à partir d'observations héliosismiques. Crédit : García et al. (2007). . . . .	8
1.7	<b>Gauche</b> : Image du Soleil dans l'ultraviolet capturée par le satellite SDO sur laquelle ont été ajoutées les lignes de champ magnétique (en blanc) calculées par extrapolation potentielle. Crédit : NASA/SDO. <b>Droite</b> : Simulation magnétohydrodynamique de vent stellaire pour une étoile de type solaire possédant un champ magnétique dipolaire. Crédit : Réville et al. (2015) . . . .	9

- 1.8 **Gauche** : Illustration de l'interaction entre le vent stellaire et la magnéto-sphère d'une planète. Crédit : NASA/Goddard **Droite** : Simulation de l'interaction magnétohydrodynamique entre les champs magnétiques d'une étoile et celui d'une planète proche. Crédit : Strugarek et al. (2015). . . . . 11
- 1.9 **Gauche** : Vue d'artiste du système HD52265 observé par CoRoT comportant une étoile de type solaire et un « Jupiter chaud », siège d'interactions de marées. Crédit : Gizon et al. (2013). **Droite** : Champ de vitesse créé par interaction de marée à la surface d'une étoile complètement convective. La flèche rouge représente l'axe de rotation de l'étoile et la flèche orange la direction du compagnon de marée. Le potentiel de marée est donnée en dégradé de couleur. Crédit : Remus et al. (2012a). . . . . 12
- 2.1 Illustration de l'attraction gravitationnelle différentielle subie par un corps non ponctuel primaire  $A$  de masse  $m_A$  de la part d'un compagnon de marée (considéré ponctuel) de masse  $m_B$ . CM désigne le centre de masse du corps  $A$  et  $r_B$  la distance qui le sépare de  $B$ . Crédit : Correia & Laskar (2003). . . . 18
- 2.2 Repère inertiel de référence ( $\mathcal{R}_R$ ), repère orbital ( $\mathcal{R}_O$ ), et repère équatorial ( $\mathcal{R}_E$ ) en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  du corps primaire  $A$ , et angles d'Euler associés. Crédit : Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009). . . . . 19
- 2.3 Interaction de marée entre deux corps  $A$  et  $B$ . Dans une vision adiabatique des choses, la réponse de  $A$  au potentiel de marée exercé par  $B$  est dirigée selon la ligne des centres. Cependant, puisqu'il y a friction interne,  $A$  répond avec un retard temporel  $\Delta t$  par rapport au forçage de marée, qui peut aussi être mesuré par l'angle de marée  $2\delta$ , tous les deux reliés au facteur de qualité de marée  $Q$  (voir équation (2.20)). Chaque quantité dépend du couple  $(l, m)$  considéré et de la fréquence d'excitation. Crédit : Mathis & Remus (2013). . . 25
- 2.4 Principe de la dissipation de marée : d'abord, l'énergie potentielle gravitationnelle de marée génère des déplacements et/ou écoulements de marée possédant une certaine énergie cinétique. Ensuite, des mécanismes de friction internes, liés aux propriétés mécaniques et à la structure interne du corps étudié, dissipent cette énergie cinétique sous forme de chaleur. Cette dissipation mène à une évolution du système (spins et propriétés orbitales) et modifie aussi la structure interne par chauffage. Crédit : Mathis & Remus (2013). . . . 26
- 2.5 Champ de vitesse de la marée d'équilibre quadrupolaire d'une étoile ou d'une planète complètement convective. Les flèches rouge et orange désignent respectivement l'axe de rotation et la direction du compagnon perturbateur. **En haut à gauche** : Vue globale du champ de vitesse. **En haut à droite** : Champ de vitesse de surface (flèches noires) et intensité du potentiel de marée (en couleur). **En bas à gauche** : Vue de dessus. **En bas à droite** : Coupe méridienne. Crédit : Remus et al. (2012a). . . . . 29
- 2.6 Principaux types d'ondes dans les intérieurs stellaires et les couches fluides planétaires. Les interactions de marées excitent des ondes de basse fréquence comme les ondes inertielles dans les zones convectives ou gravito-inertielles dans les zones stablement stratifiées (que l'ont peut également qualifier de magnéto-inertielles ou magnéto-gravito-inertielles si le champ magnétique est pris en compte) ; les ondes acoustiques ont généralement une fréquence bien plus élevée et ne sont que perturbées par le potentiel de marée. Crédit : Mathis & Remus (2013). . . . . 31

- 2.7 **Gauche** : Représentation en 3D de la vitesse radiale (normalisée) simulée dans une étoile semblable au Soleil, avec un cœur radiatif s'étendant jusqu'à environ  $0.71 R_{\odot}$  et une enveloppe convective. Un quadrant a été retiré pour montrer la structure des ondes de gravité dans la zone radiative. Crédit : Alvan et al. (2014). **Droite** : Coupe méridienne montrant l'amplitude de la perturbation de vitesse d'une onde inertielle se propageant dans une enveloppe convective de rapport d'aspect 0.5 (correspondant à une étoile de type K sur la séquence principale avec une masse environ égale à  $0.5 M_{\odot}$ ). Crédit : Ogilvie (2009). . . . . 31
- 2.8 **Gauche** : Fluctuations de température dans une simulation locale de l'interaction entre la convection et un écoulement de marée. Crédit : Ogilvie & Lesur (2012). **Droite** : Dépendance à la fréquence de marée de la dissipation induite par la marée d'équilibre dans la zone convective du Soleil. La viscosité turbulente est estimée à l'aide de la théorie de la longueur de mélange, réduite par les prescriptions de Zahn (1966b) (courbes bleue et verte) et Goldreich & Nicholson (1977) (courbes rouge et noire) telles qu'elles apparaissent dans Zahn (1989). Les courbes bleue et rouge correspondent à la marée d'équilibre standard tandis que les courbes verte et noire utilisent la marée non-ondulatoire irrotationnelle (Goodman & Dickson, 1998; Terquem et al., 1998, e.g.). Crédit : Ogilvie (2014). . . . . 33
- 2.9 **Gauche** : Dissipation de marée normalisée induite par les ondes inertielles de marée dans l'enveloppe convective d'une planète géante gazeuse semblable à Jupiter, pour une viscosité qui correspond à un nombre d'Ekman  $E = 10^{-6}$ , en fonction de la fréquence de marée. Crédit : Ogilvie & Lin (2004). **Droite** : Dissipation de marée (paramétrée par le facteur de qualité effectif  $Q'$ ) induite par les ondes inertielles dans la zone convective d'une étoile semblable au Soleil mais dont la période de rotation est de seulement 10 jours, en fonction de la fréquence de marée dans le référentiel tournant. La viscosité estimée par les auteurs pour cette période de rotation correspond à un nombre d'Ekman  $E \approx 1.4 \times 10^{-5}$ , et la ligne pointillée montre l'effet d'une viscosité 10 fois plus élevée. La ligne discontinue illustre la dissipation engendrée lorsque l'accélération de Coriolis est négligée, c'est-à-dire par un écoulement irrotationnel de marée d'équilibre. Crédit : Ogilvie & Lin (2007). . . . . 37
- 2.10 **Haut** : Diagramme excentricité-période pour un ensemble de binaires contenant des étoiles de type solaire de l'amas M35. Crédit : Meibom & Mathieu (2005). **Bas** : Inclinaison (en haut) et vitesse radiale (en bas) projetées sur la ligne de visée de l'orbite de Jupiters chauds en fonction de la température effective de leur étoile hôte. Crédit : Albrecht et al. (2012). . . . . 39
- 2.11 **Haut** : Dissipation de marée (moyennée sur les fréquences et à rotation fixée) induite par les ondes inertielles dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse au cours de leur évolution. Crédit : Mathis (2015). **Bas** : Simulation de l'évolution d'un système constitué d'une planète de  $10 M_{\oplus}$  (à gauche) ou  $1 M_J$  (à droite) en orbite autour d'une étoile de  $1 M_{\odot}$  qui évolue au cours du temps, en incluant la dissipation de marée (qui évolue également) dans l'étoile. Dans chaque panneau (demi-grand axe, période de rotation de l'étoile et dissipation dans l'étoile), les différentes courbes correspondent à différentes conditions initiales pour la position de la planète. Crédit : Bolmont & Mathis (2016). . . . . 42
- 3.1 Schéma illustrant la propagation des ondes inertielles. Crédit : Sauret (2013). 49

3.2	Exemple de trajectoires caractéristiques dans le cas d'une sphère pleine. <b>Gauche</b> : orbite strictement périodique pour la fréquence $\omega = \sqrt{2}$ telle que $\gamma = \pi/4$ . <b>Droite</b> : orbite quasi-périodique pour la fréquence $\omega = 1.25$ . . . . .	52
3.3	Exemple de trajectoires caractéristiques dans le cas d'une coquille sphérique. <b>Gauche</b> : orbite quasi périodique dans une coquille sphérique de rapport d'aspect $\eta = 0.35$ (cas du cœur terrestre ou d'une étoile de pré-séquence principale). <b>Droite</b> : cycle limite (attracteur) de caractéristiques dans une coquille sphérique de rapport d'aspect solaire $\eta = 0.71$ . . . . .	53
3.4	Exposant de Lyapunov en fonction de la (demi-)fréquence $\omega/2$ (dans le référentiel en rotation) dans une coquille sphérique de rapport d'aspect $\eta = 0.35$ . Crédit : Rieutord et al. (2000). . . . .	54
3.5	Schéma illustrant la singularité de latitude critique (tiré de Sauret, 2013). . .	55
3.6	<b>Gauche</b> : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode inertiel axisymétrique ( $m = 0$ ) en rotation solide obtenu pour un rapport d'aspect $\eta = 0.35$ et un nombre d'Ekman $E = 10^{-7}$ . $ \omega $ est la valeur absolue de la fréquence propre obtenue et $\tau$ son taux d'amortissement. La résolution utilisée est $N_r \times L = 150 \times 400$ . <b>Droite</b> : Coefficients spectraux des composantes $u$ et $w$ du champ de vitesse. Le panneau supérieur montre la convergence numérique par rapport à la base des polynômes de Tchebychev ( $k < N_r$ ) et le panneau inférieur pour celle des harmoniques sphériques ( $l < L$ ). . . . .	57
3.7	Coupe méridienne des perturbations de densité (gauche) et de champ de vitesse (droite) associées à un mode inertiel régulier dans une sphère pleine. On remarque l'augmentation de l'amplitude des perturbations à l'approche de la singularité associée à la latitude critique sur la sphère externe, dont l'emplacement est marqué par les lignes droites. Crédit : Wu (2005a). . . . .	58
3.8	<b>Gauche</b> : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode inertiel propre en présence de rotation différentielle cylindrique. Crédit : Baruteau & Rieutord (2013). <b>Droite</b> : Génération de rotation différentielle cylindrique par interactions non-linéaires entre ondes inertielles de marées. Crédit : Favier et al. (2014). . . . .	60
4.1	Processus de formation d'une planète géante par accrétion de cœur, montrant l'évolution au cours du temps (en millions d'années) des masses (en masses terrestres) du cœur d'éléments lourds ( $M_Z$ ), d'hydrogène et d'hélium ( $M_{XY}$ ) et de la masse totale de la planète ( $M_p$ ). $\sigma_{\text{init}}$ est la densité de masse surfacique du disque. Crédit : Pollack et al. (1996). . . . .	64
4.2	Représentation schématique de la structure interne de Jupiter et Saturne. Crédit : Guillot (2005). . . . .	66
4.3	Représentation schématique de la structure interne de Saturne, avec une mince couche stablement stratifiée autour du cœur dense. Crédit : Fuller (2014). . . . .	67
4.4	Variation du rapport $(k_2^2/Q_2^2)_{\text{Saturne}} =  \text{Im}[k_2^2] _{\text{Saturne}}$ en fonction de la fréquence de marée $2(\Omega - n)$ , où $\Omega$ et $n$ sont respectivement le taux de rotation de Saturne et le moyen mouvement du satellite considéré. La ligne grise est la borne supérieure issue de Sinclair (1983), les lignes oranges correspondent à l'estimation donnée par l'équation (4.4), et les estimations en rouge et vert sont issues de deux groupes de travail (IMCCE/Observatoire de Paris et JPL/NASA) qui ont ajusté indépendamment leur propre modèle numérique d'évolution d'orbitale sur les données astrométriques. Crédit : Lainey et al. (2015). . . . .	69

- 4.5 Planète géante bi-couche  $A$  de masse  $M_p$  et de rayon total  $R_p$  et son compagnon de marée  $B$  de masse  $M_B$  en orbite autour de  $A$  avec un moyen mouvement  $n$ . Le cœur solide rocheux/glacé de rayon  $R_c$ , de densité  $\rho_c$  et de module de rigidité  $G$  (voir l'équation (4.12)) est entouré par une enveloppe fluide convective de densité  $\rho_o$ . Crédit : Guenel et al. (2014). . . . . 70
- 4.6 Mécanismes de dissipation de marée dans le modèle planétaire bi-couche : dissipation anélastique dans le cœur dense rocheux/glacé (gauche) ; dissipation due aux ondes inertielles de marée qui se propagent dans l'enveloppe convective fluide en se réfléchissant sur le cœur (droite). . . . . 72
- 4.7 Représentation du modèle viscoélastique de Maxwell et notations correspondantes . . . . . 73
- 4.8 Réservoir de dissipation pour la dissipation viscoélastique dans le cœur (rouge) et pour la dissipation par les ondes inertielles dans l'enveloppe fluide (bleu) dans une planète semblable à Jupiter (haut) et Saturne (bas) en fonction du rapport d'aspect du cœur  $R_c/R_p$  en fixant  $R_p$ ,  $M_c$  et  $M_p$ . Nous traçons plusieurs courbes en faisant varier le taux de rotation  $\Omega$  (pointillés bleus) et le module de rigidité du cœur  $G$  (pointillés rouges). Nous utilisons les valeurs fixes  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$  issues de Guillot (1999) et Hubbard et al. (2009) pour Jupiter et Saturne respectivement. Les lignes vertes marquent la valeur  $R_c/R_p = \{0.126, 0.219\}$  (voir la Table 4.1). . . . . 77
- 4.9 Identique à la fig. 4.8 mais cette fois en fonction du rapport de masse  $M_c/M_p$  avec  $M_p$ ,  $R_c$  et  $R_p$  fixés. Nous adoptons  $R_c/R_p = \{0.126, 0.219\}$  pour Jupiter et Saturne. Les larges intervalles de masse pour  $M_c$  sont  $[1, 3 - 25] M_{\oplus}$  pour Jupiter et  $[2 - 24] M_{\oplus}$  pour Saturne, et couvrent les valeurs considérées possibles par Guillot (1999); Nettelmann (2011); Nettelmann et al. (2013). Les lignes vertes marquent la valeur  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$  issues de Guillot (1999) et Hubbard et al. (2009) pour Jupiter et Saturne respectivement. . . . 78
- 5.1 Profil de rotation interne du Soleil depuis la surface jusqu'à environ  $0.2 R_{\odot}$  inversé à partir des modes d'oscillations du Soleil par l'héliosismologie. Crédit : García et al. (2007). . . . . 87
- 5.2 Profils de rotation interne obtenus par des simulations numériques 3D non-linéaires (code ASH) pour différentes masses stellaires et taux de rotation moyens. Les couleurs *claires/rouges* représentent une rotation prograde tandis que les couleurs *foncées/bleues* une rotation rétrograde par rapport à la rotation moyenne. **De gauche à droite** : Etoile de  $0.5 M_{\odot}$  tournant à  $5 \Omega_{\odot}$ . Etoile de  $0.9 M_{\odot}$  tournant à  $3 \Omega_{\odot}$  et  $1 \Omega_{\odot}$ . Etoile de  $1.1 M_{\odot}$  tournant à  $1 \Omega_{\odot}$ . La rotation diminue et le nombre de Rossby augmente donc également de gauche à droite. Crédit : Brun et al. (2015). . . . . 88
- 5.3 **En haut à gauche** : Exemple de cycle attracteur avec  $m = 2$ ,  $\omega_p = -3.75$  dans une enveloppe convective semblable à celle du Soleil ( $\varepsilon = 0.3$ ,  $\eta = 0.71$ ). **En haut à droite** : Idem avec  $m = 0$ , fréquence  $\omega_p = 1.68$ , et une rotation anti-solaire ( $\varepsilon = -0.3$ ) ; la ligne discontinue blanche montre la surface de retournement. **En bas à gauche** : Illustration de la convergence des caractéristiques vers l'intersection entre une surface de retournement (ligne blanche discontinue) et la sphère externe de la coquille sphérique (pour  $m = 0$ ,  $\omega_p = 2.4$ , and  $\varepsilon = 0.5$ ). **En bas à droite** : Pour  $m = 2$ ,  $\omega_p = -0.126$ , et  $\varepsilon = -0.90$  deux surfaces de retournement existent dans la coquille, permettant la propagation des caractéristiques près de l'équateur et des pôles, mais pas entre les deux. . . 91

- 5.4 Evaluation numérique de l'exposant de Lyapunov  $\Lambda$ , en fonction de la fréquence  $\omega_p$  pour  $m = 0$ ,  $\varepsilon = 0.30$ , et  $\omega_p \in [0.2, 2.0]$ . Les quatre panneaux correspondent aux valeurs du rapport d'aspect  $\eta = \{0.10, 0.35, 0.71, 0.90\}$ . Les carrés rouges correspondent aux modes propres montrés dans les figures 5.6 et 5.7. . . . . . 92
- 5.5 Illustration des deux types de modes inertiels pouvant se propager dans un fluide en rotation différentielle  $\Omega(\theta) = \Omega_0(\theta)/\Omega_{\text{ref}} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta$ , pour  $m = \{0, 1, 2, 4\}$ . La fréquence du mode  $\omega_p$  est en abscisse et le paramètre de rotation différentielle  $\varepsilon$  est en ordonnée. **Bleu** : domaine d'existence des modes D. **Blanc** : domaine d'existence des modes DT. **Rouge** : Pas de propagation possible ( $\xi < 0$  partout). **Orange** : Les modes situés entre les lignes oranges possèdent une résonance de corotation ( $\tilde{\omega}_p = 0$ ) dans la coquille. Les lignes noires pointillées (verticales), continues et discontinues correspondent à l'existence de surface de retournement en  $\theta = 0$  (aux pôles),  $\theta = \pi/2$  (à l'équateur) et  $\theta = \pi/4$  respectivement. . . . . . 93
- 5.6 **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique (normalisée à la valeur maximale) d'un mode D axisymétrique de fréquence propre  $\omega_p \approx 1.15$  obtenu pour  $E = 5 \times 10^{-8}$ , le rapport d'aspect et la rotation différentielle solaires ( $\eta = 0.71$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ). Le cycle attracteur obtenu par la méthode des caractéristiques pour ces paramètres est tracé en blanc. **Droite** : Évolution du taux d'amortissement en fonction du nombre d'Ekman  $E$ . La ligne pointillée est proportionnelle à  $E^{1/3}$ . . . . . . 96
- 5.7 **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique (normalisée) d'un mode D de fréquence propre  $\omega_p \approx 1.66$  obtenu pour  $E = 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.10$ , et  $\varepsilon = 0.30$ . Le cycle attracteur de caractéristiques (qui ne rebondit pas sur le cœur) est à nouveau tracé en blanc. **Droite** : Idem pour un mode D de fréquence  $\omega_p \approx 1.23$  obtenu pour  $E = 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.71$ , et une rotation anti-solaire  $\varepsilon = -0.25$ . Ce mode est associé à une orbite quasi-périodique et non à un attracteur de caractéristiques. . . . . . 97
- 5.8 Distribution des valeurs propres dans le plan complexe pour  $m = 0$ ,  $E = 10^{-5}$ , le rapport d'aspect solaire  $\eta = 0.71$  et une résolution spectrale de  $N_r = 60$  et  $L = 150$ . Les quatre panneaux correspondent à  $\varepsilon = \{-0.50, -0.25, 0.30, 0.60\}$ . Les lignes verticales bleues et rouges illustrent la transition entre le domaine des modes D et DT, et la limite du domaine d'existence des modes DT respectivement. . . . . . 98
- 5.9 **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode DT axisymétrique  $m = 0$  avec une fréquence  $\omega_p \approx -1.86$  obtenu pour  $E = 2.2 \times 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.71$  et  $\varepsilon = -0.25$ . La surface de retournement est en ligne blanche discontinue. **Droite** : Coefficients spectraux maximaux montrant la convergence numérique de la simulation pour la composante radiale ( $u$ ) et orthoradiale ( $w$ ) du champ de vitesse de ce mode, en fonction de l'index  $k$  de la base des polynômes de Tchebychev et de l'indice  $l$  de la base des harmoniques sphériques. . . . . . 99
- 5.10 Identique à la figure 5.8 mais pour  $m = 2$ . Les lignes orange sont les extrémités de l'intervalle de fréquence pour lesquelles une couche critique existe dans la coquille (voir Fig. 5.5). Les symboles rouges correspondent à des valeurs propres instables avec  $\text{Im}(\omega_p) > 0$ . . . . . . 99

5.11	<b>Gauche</b> : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode D stable avec $m = 2$ , de fréquence $\omega_p \approx -2.30$ obtenu pour $E = 10^{-9}$ , le rapport d'aspect et la rotation différentielle solaires ( $\eta = 0.71, \varepsilon = 0.3$ ). La ligne rouge discontinue marque l'emplacement de la couche de corotation. <b>Droite</b> : Évolution du taux d'amortissement avec le nombre d'Ekman $E$ . . . . .	100
5.12	<b>Gauche</b> : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode D instable avec $m = 2$ , de fréquence $\omega_p \approx 1.07$ obtenu pour $E = 10^{-8}$ , $\eta = 0.71$ et $\varepsilon = -0.5$ . La ligne rouge discontinue marque l'emplacement de la couche de corotation. <b>Droite</b> : Évolution du taux de croissance en fonction du nombre d'Ekman $E$ . Il y a plusieurs sauts de valeurs propres aux alentours de $E \approx \{5 \times 10^{-6}, 10^{-7}, 5 \times 10^{-8}\}$ . . . . .	101
6.1	Illustration des deux types de modes inertiels pouvant se propager dans un fluide en rotation différentielle $\Omega(\theta) = \Omega_0(\theta)/\Omega_{\text{ref}} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta$ , pour $m = 2$ . La fréquence du mode $\omega_p$ est en abscisse et le paramètre de rotation différentielle $\varepsilon$ est en ordonnée. <b>Bleu</b> : domaine d'existence des modes D. <b>Blanc</b> : domaine d'existence des modes DT. <b>Rouge</b> : Pas de propagation possible ( $\xi < 0$ partout). <b>Orange</b> : Les modes situés entre les lignes oranges possèdent une résonance de corotation ( $\tilde{\omega}_p = 0$ ) dans la coquille. Les lignes noires pointillées, continues et discontinues correspondent à l'existence de surface de retournement en $\theta = 0$ (aux pôles), $\theta = \pi/2$ (à l'équateur) et $\theta = \pi/4$ respectivement. . . . .	131
6.2	<b>Haut</b> : Coupe méridienne de la dissipation visqueuse (normalisée à sa valeur maximale) engendrée par un mode inertiel $m = 2$ forcé à la fréquence $\omega_p \approx -3.29$ dans une zone convective de type solaire ( $\eta = 0.71, \varepsilon = 0.30$ ) pour $E = 10^{-7}$ . Le forçage adopté est donné par l'équation (6.52). La résolution adoptée est $N_r \times L = 200 \times 800$ . <b>Bas</b> : Coefficients spectraux maximum du champ de vitesse $(u, v, w)$ et du champ de pression $p$ en fonction de l'indice $k$ sur la base des polynômes de Tchebychev et de l'indice $l$ sur la base des harmoniques sphériques. . . . .	132
6.3	Variation du taux de dissipation visqueuse (échelle logarithmique en unité de $\rho R^3 \Omega_{\text{ref}} A^2$ ) en fonction de la fréquence d'excitation dans une étoile semblable au Soleil ( $\eta = 0.71, \varepsilon = 0.30$ ) pour différentes valeurs du nombre d'Ekman $E = \{10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}\}$ . Le forçage adopté est donné par l'équation (6.52). . . . .	133
6.4	Contraste entre les valeurs maximale et minimale prise par le taux de dissipation visqueuse en fonction du nombre d'Ekman $E$ (échelle logarithmique). . . . .	134
6.5	Variation du taux de dissipation visqueuse (échelle logarithmique) en fonction de la fréquence d'excitation dans une étoile structurellement semblable au Soleil ( $\eta = 0.71$ ) mais pour différents paramètres de rotation différentielle anti-solaire ou solide $\varepsilon = \{-0.8, -0.5, -0.25, 0.0\}$ , avec $E = 10^{-6}$ et le forçage donné par (6.52). . . . .	135
6.6	Identique à la figure 6.5, cette fois avec $\varepsilon = \{0.0, 0.3, 0.5, 0.8\}$ . . . . .	136
6.7	Evolution au cours du temps du rapport d'aspect de la zone convective pour des étoiles de faible masse, de masses comprises entre 0.4 et $1.4 M_\odot$ , d'après la grille de modèles d'évolution stellaire de Siess et al. (2000). Crédit : Mathis (2015). . . . .	137

- 6.8 Variation du taux de dissipation visqueuse (échelle logarithmique) en fonction de la fréquence d'excitation dans une étoile possédant une rotation différentielle solaire ( $\varepsilon = 0.30$ ) pour différentes valeurs du rapport d'aspect  $\eta = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ . Les panneaux supérieur et inférieur correspondent à  $E = 10^{-5}$  et  $10^{-6}$  respectivement. Le forçage adopté est donné par l'équation (6.52). . . . . 137
- 7.1 **Haut** : Evolution du nombre d'Ekman  $E_{NR}$  évalué au milieu de la zone convective pour une gamme d'étoiles de faible masse comprise entre  $0.6$  et  $1.2 M_{\odot}$ . **Bas** : Identique au panneau supérieur mais cette fois pour le nombre d'Ekman  $E_{RC}$  prenant en compte la rotation. . . . . 143
- 8.1 Relations entre masse, rotation, rotation différentielle et nombre de Rossby convectifs issues de simulations magnétohydrodynamiques (cercles pleins) ou hydrodynamiques (étoiles). **(A)** Valeur absolue de la rotation différentielle entre l'équateur et la latitude  $60^{\circ}$ . **(B)** Energie cinétique de la rotation différentielle en fonction du nombre de Rossby. **(C)** Rotation différentielle en fonction du taux de rotation. **(D)** Rotation différentielle en fonction de la masse. Crédit : Varela et al. (2016). . . . . 156
- 8.2 Evolution orbitale d'une planète de  $10 M_{Jupiter}$  autour d'une étoile de  $1 M_{\odot}$  au cours de son évolution. Les lignes et symboles illustrent l'évolution du moyen mouvement de la planète (en vert), la vitesse angulaire de l'enveloppe convective de l'étoile (en rouge) et de son cœur radiatif (en bleu). Le fond coloré indique les différents modes d'évolution. **De gauche à droite** : La zone convective est en corotation avec un disque protoplanétaire avec une vitesse angulaire constante ; la planète se forme dans une orbite plus serrée que le rayon de corotation de l'étoile ; la vitesse angulaire de l'étoile s'accélère par contraction gravitationnelle et dépasse le moyen mouvement de la planète ; le vent stellaire extrait du moment cinétique de la surface de l'étoile, qui ralentit à nouveau en dessous du moyen mouvement de la planète ; le transfert de moment cinétique orbital vers l'étoile synchronise la rotation de surface de l'étoile avec l'orbite ; la synchronisation cède, l'étoile tourne moins vite que le moyen mouvement et la planète « spirale » dans l'étoile en y déposant son moment cinétique orbital, ce qui accélère brusquement la rotation de l'étoile, qui diminue ensuite à nouveau par l'effet du vent stellaire. Crédit : Penev et al. (2014). . . . . 158

2.1	Valeurs des fonctions d'obliquité $d_{j,m}^2(\varepsilon)$ dans le cas où $j \geq m$ . Les valeurs pour $j < m$ peuvent être déduites des propriétés de symétrie $d_{j,m}^l(\varepsilon) = (-1)^{j-m} d_{-j,-m}^l(\varepsilon) = d_{j,m}^l(-\varepsilon)$ (voir Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009). . . . .	22
2.2	Valeurs des fonctions d'inclinaison $F_{2,j,p}(I)$ pour $j > 0$ . Les valeurs pour $j < 0$ peuvent être déduites des propriétés de symétrie $F_{l,-j,p}(I) = (-1)^{l-j} \frac{(l-j)!}{(l+j)!} F_{l,j,p}(I)$ (voir Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009). . . . .	22
2.3	Valeurs des fonctions d'excentricité $G_{2,p,q}(e)$ , où plusieurs combinaisons $(p, q)$ donnent le même résultat (voir Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009). . . . .	22
4.1	Valeurs de référence pour les planètes semblables à Jupiter et Saturne . . . . .	75



*« Un jour j'irai vivre en Théorie, car en Théorie tout se passe bien. »*



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION : LES SYSTÈMES PLANÉTAIRES

### Sommaire

<b>1.1 La révolution des systèmes exoplanétaires : des découvertes récentes et d'une grande diversité</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1.1 Méthodes de détection d'exoplanètes et missions d'observation . . . . .	1
1.1.2 Des systèmes planétaires aux architectures variées . . . . .	3
<b>1.2 Diversité des composantes des systèmes planétaires</b> . . . . .	<b>4</b>
1.2.1 Des planètes de toutes sortes . . . . .	4
1.2.2 Structure interne des étoiles . . . . .	6
1.2.3 La dynamique des étoiles de faible masse : évolution, rotation, turbulence et magnétisme . . . . .	7
<b>1.3 Des systèmes planétaires sièges de différentes interactions</b> . . . . .	<b>11</b>
1.3.1 Interactions magnétohydrodynamiques . . . . .	11
1.3.2 Interactions de marées . . . . .	12
1.3.3 Vers une vision globale de la dynamique des systèmes planétaires . . . . .	13
<b>1.4 Organisation du manuscrit</b> . . . . .	<b>14</b>

Dans ce chapitre introductif, nous présentons de manière globale le contexte de l'étude astrophysique des systèmes planétaires dans lequel se place ce travail de thèse. En premier lieu, nous présentons et discutons la grande diversité des systèmes planétaires et des planètes et étoiles hôtes qui les composent. Puis nous présentons les différents types d'interactions dont ils sont le siège, en particulier les interactions de marées. Enfin, nous détaillons l'organisation du manuscrit.

## 1.1 La révolution des systèmes exoplanétaires : des découvertes récentes et d'une grande diversité

### 1.1.1 Méthodes de détection d'exoplanètes et missions d'observation

Depuis la première exoplanète géante gazeuse découverte par [Mayor & Queloz \(1995\)](#) et baptisée 51 Pegasi b, plus de 3000 exoplanètes confirmées<sup>1</sup> ont été découvertes en orbite autour d'étoiles de notre galaxie. La majorité d'entre elles ont été détectées par la mission de

1. Source : NASA Exoplanet Archive, <http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>.

photométrie spatiale Kepler/K2 (NASA, [Borucki et al., 2010](#)), mais un nombre conséquent ont également été découvertes par d'autres missions de photométrie, comme la mission spatiale CoRoT (CNES/ESA, [Baglin et al., 2006](#)) ou encore par les instruments au sol WASP ([Pollacco et al., 2006](#)) et HATNet/HATS ([Bakos et al., 2007](#)). Ces missions et instruments reposent tous sur la méthode des transits : il s'agit d'utiliser des instruments de photométrie de haute précision pour détecter la diminution temporaire et périodique de luminosité d'une étoile, laquelle est provoquée par le passage d'une planète entre l'étoile et l'observateur comme l'illustre le panneau gauche de la figure 1.1. Cette méthode permet de caractériser le rapport entre le rayon de la planète et celui de son étoile hôte ([Perryman, 2011](#)).

L'autre méthode principale de détection des exoplanètes est celle des vitesses radiales (utilisée notamment par les instruments HARPS (ESO, [Mayor et al., 2003](#)) et HARPS-N) : il s'agit de détecter par effet Doppler, à l'aide d'un spectromètre de haute précision, les variations de la vitesse projetée le long de la ligne de visée (d'où le nom de vitesse radiale) d'une étoile. Si un compagnon suffisamment proche et/ou massif est en orbite autour de cette étoile, alors le mouvement de cette dernière autour du centre de masse formé par les deux corps produit une modulation de sa vitesse radiale, ce qui permet de déterminer une borne inférieure pour le rapport entre la masse du compagnon et la masse de l'étoile, ainsi que de caractériser leurs orbites (voir [Perryman, 2011](#), et le panneau droit de la figure 1.1).

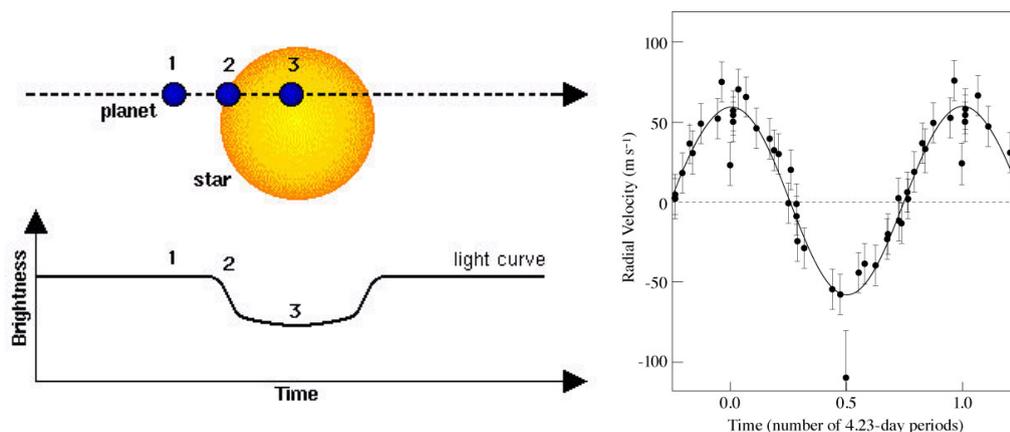


FIGURE 1.1: Illustration des deux principales méthodes de détection d'exoplanètes. **Gauche** : Principe de détection d'exoplanètes par la méthode des transits. Crédit : ESA/-Hans Deeg. **Droite** : Mesures de la vitesse radiale de l'étoile 51 Pegasi. Crédit : [Mayor & Queloz \(1995\)](#).

Ces méthodes ne sont pas exemptes de biais. La méthode des transits ne peut détecter que les planètes passant dans la ligne de visée de l'étoile, et préférentiellement celles qui occultent une fraction significative de la lumière stellaire : elle détecte donc plus facilement les planètes de grande taille et/ou proches de leur étoile. D'autre part, la méthode des vitesses radiales détecte plus facilement un compagnon suffisamment proche et/ou massif de son étoile hôte, et il est nécessaire de connaître l'inclinaison orbitale pour caractériser le rapport de masses entre l'étoile et son compagnon. Bien entendu, il existe des systèmes où les deux méthodes sont utilisables, ce qui permet d'éviter les faux positifs mais aussi de

mieux caractériser l'exoplanète détectée, et notamment sa densité moyenne (voir la figure 1.4).

La détermination des propriétés des exoplanètes détectées par ces méthodes repose aussi en grande partie sur la bonne connaissance des propriétés de son étoile hôte. C'est pourquoi les missions de recherche d'exoplanètes par photométrie ont été utilisées, simultanément à leur mission de détection, pour caractériser les étoiles hôtes grâce à leurs pulsations, en utilisant donc l'astérosismologie (Aerts et al., 2010; Silva Aguirre et al., 2015). C'était le cas de CoRoT et Kepler/K2, il en sera de même pour les futures missions TESS (NASA, lancement prévu en 2017, voir Ricker, 2015) et PLATO (ESA, lancement prévu en 2024, voir Rauer et al., 2014).

Enfin, il existe d'autres méthodes de détection d'exoplanètes (Perryman, 2011) comme la méthode de variations du moment du transit (*Transit Timing Variation* ou TTV en anglais) ou bien l'effet de micro-lentille gravitationnelle (e.g. OGLE). L'imagerie directe pour la détection de planètes autour d'étoiles proches est également un domaine prometteur pour la détection de planètes autour d'étoiles voisines du Soleil, qui est en plein développement aujourd'hui (e.g. SPHERE, Vigan et al., 2016).

### 1.1.2 Des systèmes planétaires aux architectures variées

Les nombreuses exoplanètes détectées pendant ces deux dernières décennies ont largement remis en question les certitudes acquises par l'étude du système solaire et de son architecture. En effet, on a maintenant découvert des systèmes exoplanétaires d'architectures très diverses et différentes du nôtre, avec par exemple des planètes géantes semblables à Jupiter orbitant très proches de leur étoile (ce sont les systèmes dits de Jupiter chauds, *Hot Jupiter* en anglais), ou des systèmes multi-planétaires (e.g. Fabrycky et al., 2012) où les différentes planètes sont distribuées de façon très différente par rapport à notre système solaire.

Par exemple, le panneau supérieur de la figure 1.2 illustre la diversité présente dans l'architecture de quelques systèmes extrasolaires multi-planétaires détectés par le télescope Kepler. Nous montrons également dans le panneau inférieur de la figure 1.2 la distribution des excentricités pour les exoplanètes confirmées à ce jour en fonction de leur période orbitale. On constate que les exoplanètes les plus proches de leur étoile hôte ont tendance à avoir des excentricités faibles, signe de l'existence d'interactions de marées, tandis qu'il existe simultanément une multitude d'exoplanètes d'orbites de toutes excentricités. Ceci pose des questions majeures pour notre compréhension de la formation, de l'évolution dynamique et de la stabilité des architectures orbitales (Laskar et al., 2012; Baruteau et al., 2016).

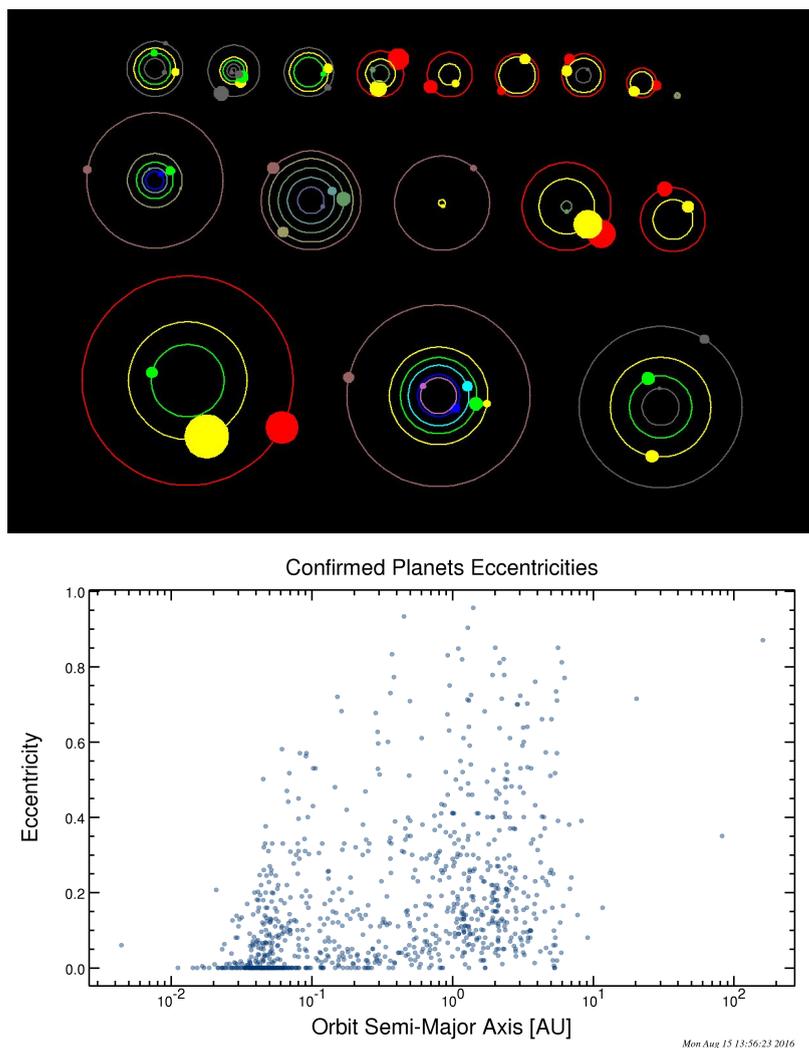


FIGURE 1.2: **Haut** : Exemples de systèmes multi-planétaires observées par la mission Kepler (NASA). Crédit : D. Latham ; [Fabrycky et al. \(2012\)](#). **Bas** : Distribution des excentricités des exoplanètes confirmées (en date du 15/08/2016) en fonction du demi-grand axe (en unités astronomiques). Source : NASA Exoplanet Archive.

## 1.2 Diversité des composantes des systèmes planétaires

Les systèmes planétaires connus à ce jour comportent également une large diversité dans la structure des objets qui les composent, tant pour les étoiles hôtes que pour les planètes qui sont en orbite autour d'elles. Nous présentons donc dans cette section les propriétés générales des diverses familles d'objets stellaires et planétaires.

### 1.2.1 Des planètes de toutes sortes

Historiquement, l'étude du système solaire a mené à définir trois grandes familles de planètes (voir figure 1.3) :

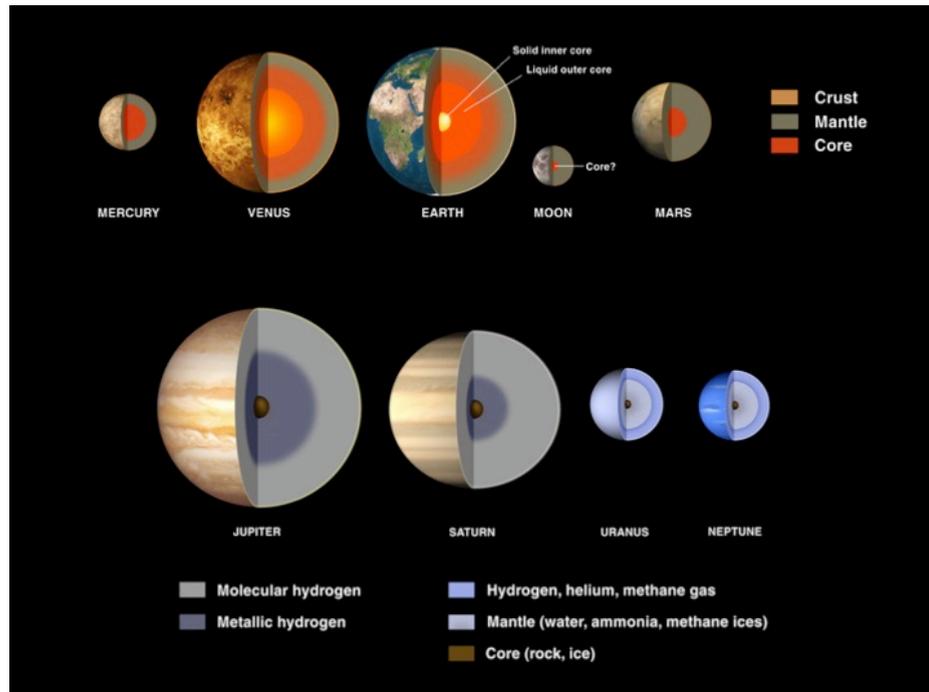


FIGURE 1.3: **Haut** : Structure interne des planètes telluriques du système solaire et de la Lune. **Bas** : Structure interne des planètes géantes gazeuses et glacées du système solaire. Crédit : JPL-Caltech.

- les planètes telluriques de petite taille comme la Terre, Vénus ou Mars, principalement formées de roches et de densité moyenne entre 4 et 5 g/cm<sup>3</sup> ;
- les planètes géantes gazeuses comme Jupiter et Saturne, plus grandes et massives que les planètes telluriques mais moins denses (environ 1 g/cm<sup>3</sup>) car elles sont en grande majorité composées d'une profonde enveloppe d'hydrogène et d'hélium ;
- les planètes géantes de glace comme Uranus et Neptune, de masse et de rayon intermédiaires, qui possèdent dans de plus faibles proportions une enveloppe d'hydrogène et d'hélium, mais également une large proportion de glaces.

Il est important de noter que les planètes géantes gazeuses et glacées sont susceptibles d'abriter un cœur central dense formé de roches et de glaces ; nous y reviendrons au chapitre 4.

La distinction entre ces catégories n'est plus aussi claire dans le cadre des systèmes planétaires extrasolaires. Il existe ainsi parmi les planètes détectées à peu près tous les intermédiaires entre ces trois catégories (e.g. [Jontof-Hutter et al., 2014](#); [Marcy et al., 2014](#)), tant en terme de rayon, de masse et de densité moyenne comme l'illustre la figure 1.4. On a ainsi découvert des planètes telluriques plus massives (entre 1 et 10M<sub>⊕</sub>) que celles du système solaire, appelées super-Terres. Par ailleurs, il existe de petites planètes géantes glacées appelées mini-Neptunes, et des planètes géantes gazeuses plus massives que Jupiter. Enfin, il existe des exoplanètes dont la structure se rapprocherait de celle des satellites de glace des planètes géantes de notre système solaire et parfois appelées *water-worlds* (e.g. [Perryman, 2011](#)).

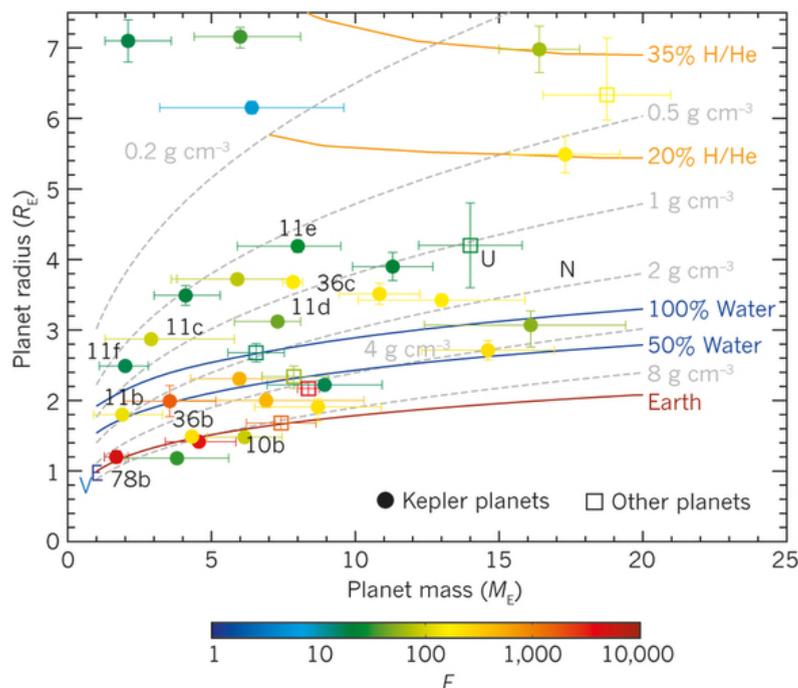


FIGURE 1.4: Diagramme masse-rayon (en rayons et masses terrestres) d'un échantillon d'exoplanètes découvertes par le télescope spatial Kepler. La couleur des symboles représente le flux lumineux incident reçu par la planète de la part de son étoile, normalisé par la valeur du flux reçu par la Terre du Soleil. Les lignes grises pointillées sont des lignes de niveau de la densité moyenne, tandis que les autres lignes continues sont des exemples de composition interne simplifiées, ainsi que celle de la Terre (en rouge). Crédit : [Lissauer et al. \(2014\)](#).

### 1.2.2 Structure interne des étoiles

De la même façon, des systèmes planétaires ont été détectés autour d'étoiles de toutes masses et de tous types spectraux. La structure interne d'une étoile dépend avant tout de sa masse et de son stade évolutif ([Kippenhahn & Weigert, 1990](#)). Sur la séquence principale, qui est la phase où les étoiles transforment de l'hydrogène en hélium par fusion thermonucléaire et où elles passent la majorité de leur existence, on distingue en général les types de structure interne suivants (voir le panneau gauche de la figure 1.5) :

- les naines rouges (du type spectral M) de très faible masse (inférieure à  $0.35M_{\odot}$ ) qui sont entièrement convectives ;
- les étoiles de faible masse (du type spectral M à F), entre  $0.4$  et  $1.4M_{\odot}$  environ, possèdent un cœur radiatif stablement stratifié où l'énergie est transportée par la radiation appelée zone radiative, entourée d'une enveloppe convective, où l'énergie est transportée par les mouvements turbulents, dont la profondeur diminue lorsque la masse croît ;
- les étoiles de masse intermédiaire et étoiles massives (de type A, B, O) possèdent un cœur convectif et une enveloppe radiative. Cette inversion de la structure interne est liée au fait que la production nucléaire est majoritairement assurée pour ces étoiles par le cycle CNO, beaucoup plus exothermique que le cycle pp qui domine dans les

étoiles de faible masse.

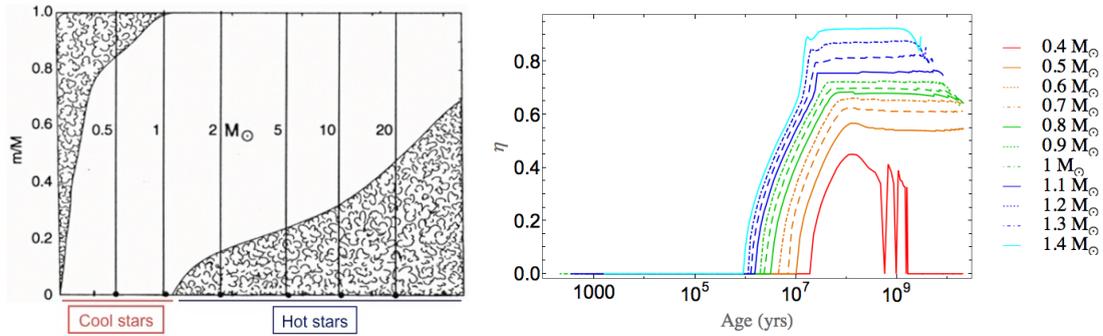


FIGURE 1.5: **Gauche** : Diagramme de Kippenhahn pour la structure interne des étoiles sur la séquence principale en fonction de leur masse, décrivant la fraction de masse contenue dans la zone convective (régions grisées) et la zone radiative (régions blanches). Crédit : [Mathis & Remus \(2013\)](#), adapté de [Kippenhahn & Weigert \(1990\)](#). **Droite** : Evolution du rapport d'aspect  $\eta = R_c/R_*$  entre le rayon  $R_c$  du cœur radiatif et  $R_*$  de l'étoile pour les étoiles de faible masse, depuis la pré-séquence principale jusqu'à la fin de la séquence principale. Crédit : [Mathis \(2015\)](#), calculé d'après les modèles stellaires de [Siess et al. \(2000\)](#).

Dans ce travail, nous nous intéresserons presque exclusivement aux étoiles de faible masse de type M à F possédant une enveloppe convective externe.

### 1.2.3 La dynamique des étoiles de faible masse : évolution, rotation, turbulence et magnétisme

#### 1.2.3.1 Evolution

En comparaison des planètes, la structure interne des étoiles de faible masse évolue fortement depuis leur formation jusqu'aux stades les plus avancés de leur évolution. En pratique, cette évolution est gouvernée par les différentes phases d'évolution nucléaire qu'elles traversent, dont le nombre et la durée dépendent avant tout de la masse de l'étoile (voir e.g. [Kippenhahn & Weigert, 1990](#), pour une description détaillée). Cette évolution est calculée numériquement par des codes d'évolution stellaire (e.g. [Christensen-Dalsgaard et al., 1996](#); [Paxton et al., 2011](#); [Amard et al., 2016](#)). Par exemple, l'évolution de la taille du cœur radiatif interne des étoiles de faible masse, depuis la pré-séquence principale jusqu'à la fin de la séquence principale, est illustrée par la figure 1.5. Ce rapport d'aspect sera une quantité essentielle pour les écoulements de marée comme nous le verrons dans la suite.

Cependant, les étoiles de faible masse sont des corps intrinsèquement dynamiques sur des échelles de temps plus courtes que leur durée de vie : ce sont des objets en rotation, dans lesquels il y a présence d'écoulements souvent turbulents ainsi que de champ magnétique. Nous allons voir que ces trois caractéristiques sont toutes interdépendantes.

## 1.2.3.2 Rotation et convection turbulente

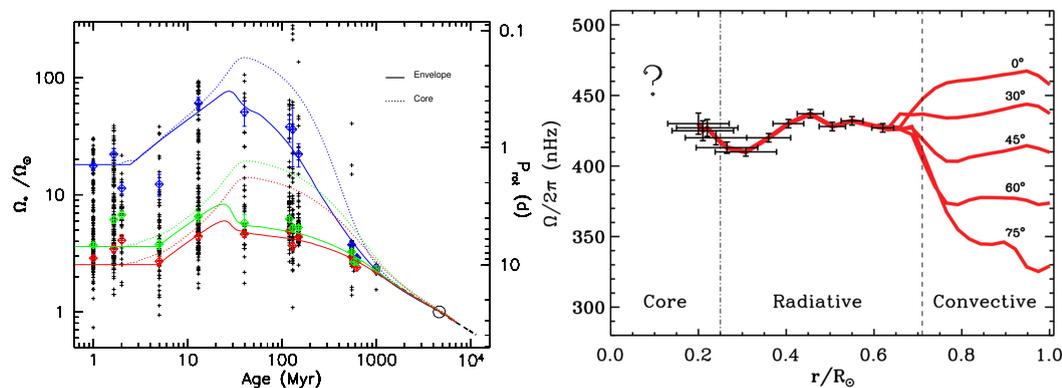


FIGURE 1.6: **Gauche** : Evolution des taux de rotation moyens, normalisés par celui du Soleil actuel, du cœur radiatif (lignes discontinues) et de l'enveloppe convective (lignes continues) pour des étoiles semblables au Soleil. Les courbes et symboles bleus, rouges et verts correspondent respectivement au 90ème centile, 25ème centile et la médiane de la distribution de rotations d'étoiles semblables au Soleil dans des régions de formations d'étoiles et jeunes amas ouverts. Crédit : [Gallet & Bouvier \(2013\)](#). **Droite** : Profil de rotation différentielle interne du Soleil à partir d'observations héliosismiques. Crédit : [García et al. \(2007\)](#).

D'abord, les étoiles sont en rotation durant toute leur évolution (e.g. [Maeder, 2009](#); [Bouvier, 2013](#); [Gallet & Bouvier, 2013, 2015](#)). Cette rotation est généralement différentielle, c'est-à-dire que la vitesse angulaire moyenne du fluide composant l'étoile dépend de la profondeur, avec un cœur radiatif et une enveloppe convective possédant des vitesses angulaires différentes, et/ou de la latitude comme observé dans le Soleil (voir les exemples de la figure 1.6).

La rotation des étoiles de faible masse est majoritairement gouvernée par trois phases, comme illustrée par le panneau gauche de la figure 1.6 :

- pour une (proto)étoile jeune, alors entièrement convective et encore entourée de son disque d'accrétion, on s'attendrait à ce que la contraction gravitationnelle mène à une accélération de la rotation de l'étoile par conservation du moment cinétique total. Pourtant, les observations indiquent que l'étoile conserve une période de rotation quasiment constante tant que le disque est présent : l'explication généralement adoptée pour expliquer ce phénomène de « verrouillage » en corotation avec le disque met en jeu des mécanismes complexes d'accrétion-éjection dans lequel le champ magnétique joue un rôle important (voir la revue de [Ferreira, 2013](#)) ;
- une fois le disque d'accrétion évaporé, la contraction gravitationnelle se poursuit et la vitesse de rotation de l'étoile augmente ;
- une fois la contraction gravitationnelle achevée à la fin de la pré-séquence principale, la rotation des étoiles sur la séquence principale diminue à cause de l'extraction de moment cinétique par le vent stellaire magnétisé (voir la section ci-après). On constate également qu'après environ 1 milliard d'années, les étoiles d'un âge donné

ont toutes la même vitesse de rotation : ce constat forme la base d'une discipline récente appelée gyrochronologie, dont le but est d'estimer l'âge des étoiles à partir de leur période de rotation (Barnes, 2003; Barnes & Kim, 2010; van Saders et al., 2016).

Tant dans les zones radiatives que convectives, la turbulence et les écoulements moyens (rotation différentielle et circulation méridienne), ainsi que les couples associés au champ magnétique et aux ondes redistribuent le moment cinétique (Zahn, 1992; Maeder, 2009; Mathis, 2013; Brun et al., 2015). Dans les zones convectives, cette redistribution a lieu sur une échelle de temps dynamique de l'ordre de celle de la convection turbulente, tandis qu'elle est beaucoup plus lente dans la zone radiative. Dans ce dernier cas, la redistribution de moment cinétique modifie la stratification des éléments chimiques, ce qui impacte l'évolution séculaire et nucléaire des étoiles. (voir Maeder, 2009; Mathis, 2013, pour plus de détails sur les processus de transport dans les étoiles).

### 1.2.3.3 Magnétisme et vent stellaire

Pour expliquer l'origine du vent stellaire mentionné précédemment, il est d'abord nécessaire de parler du magnétisme des étoiles, car le plasma d'hydrogène et d'hélium constituant les étoiles est un fluide conducteur dont la dynamique est couplée à celle du champ magnétique.

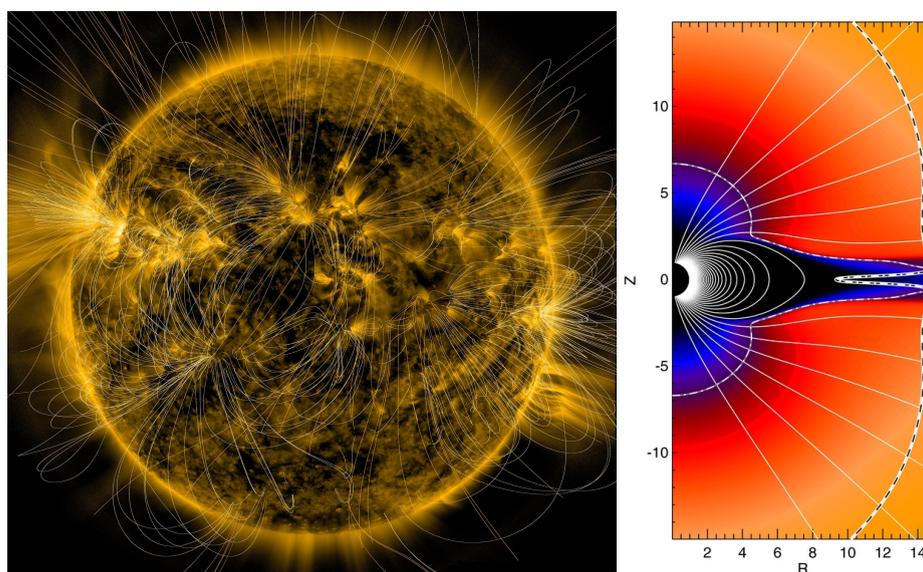


FIGURE 1.7: **Gauche** : Image du Soleil dans l'ultraviolet capturée par le satellite SDO sur laquelle ont été ajoutées les lignes de champ magnétique (en blanc) calculées par extrapolation potentielle. Crédit : NASA/SDO. **Droite** : Simulation magnétohydrodynamique de vent stellaire pour une étoile de type solaire possédant un champ magnétique dipolaire. Crédit : Réville et al. (2015)

Le Soleil et la plupart des étoiles de type solaire pour lesquelles les observations sont suffisamment bonnes montrent une activité magnétique (voir figure 1.7), souvent cyclique, dont la cause admise est un mécanisme de dynamo dans la zone convective (Mestel, 1999;

Donati & Landstreet, 2009; Brun et al., 2015) : il s'agit d'un processus magnétohydrodynamique capable de maintenir un champ magnétique contre la dissipation ohmique qui tend à le dissiper. Ce processus requiert la conversion d'énergie cinétique en énergie magnétique (et réciproquement) par des phénomènes d'induction, c'est-à-dire une interaction entre les écoulements (*i.e.* la rotation différentielle et la convection turbulente) et le champ magnétique. Outre les simulations numériques magnétohydrodynamiques 3D non-linéaires, notre compréhension de base des cycles d'activités magnétiques pour les étoiles de faible masse comme le Soleil repose essentiellement sur les modèles de dynamo cinématique du type  $\alpha - \Omega$  (Charbonneau, 2014; Brun et al., 2015). Il s'agit d'un modèle linéaire 2D simplifié, où les composantes non-axisymétriques du champ de vitesse et du champ magnétique sont considérés comme des fluctuations. Ce modèle fait appel à deux effets distincts permettant la génération et la conversion des composantes principales du champ magnétique :

- l'effet  $\alpha$  qui est une paramétrisation de la force électromotrice moyenne due à la convection turbulente hélicitaire, qui est capable de convertir un champ magnétique azimuthal en un champ contenu dans le plan méridien (et *vice versa* pour les dynamos du type  $\alpha^2$ ) ;
- l'effet  $\Omega$  du à la rotation différentielle qui, à partir d'un champ contenu dans le plan méridien, étire les lignes de champ pour recréer une composante azimuthale.

Il existe d'autres modèles de dynamo linéaire ne faisant pas appel à l'effet  $\alpha$  pour la génération de la composante méridienne du champ magnétique, mais au mécanisme de Babcock-Leighton (Babcock, 1961; Leighton, 1969) dont l'origine est la tendance montrée par les régions magnétiquement actives (des taches solaires et stellaires) à être inclinées par rapport à la direction Est-Ouest.

Le champ magnétique des étoiles de faible masse, ainsi entretenu par la dynamo dans l'enveloppe convective, est responsable (par effet Joule ou ondes d'Alfvén) d'un intense chauffage de la couronne stellaire, c'est-à-dire l'atmosphère de l'étoile, jusqu'à des températures de plusieurs millions de kelvins. Ce chauffage est accompagné d'une augmentation de pression qui atteint dans le cas du Soleil  $10^{14}$  fois celle du milieu interstellaire. C'est ce fort gradient de pression qui est responsable de l'expansion continue de l'atmosphère des étoiles de faible masse, appelée vent stellaire, menant ainsi à une perte de masse. A titre d'exemple, le taux de perte de masse du Soleil est actuellement estimé à environ  $10^{-14} M_{\odot}$  par an (Lamers & Cassinelli, 1999; Mestel, 1999).

Or, le champ magnétique tend à maintenir le plasma du vent stellaire en co-rotation avec la surface de l'étoile jusqu'au rayon d'Alfvén (qui est l'endroit où la vitesse du vent dépasse la vitesse d'Alfvén définie par  $v_A = B/\sqrt{\mu\rho}$ , où  $B$  est le champ magnétique, et  $\mu$  et  $\rho$  sont respectivement la perméabilité magnétique et la densité du milieu), si bien que l'effet combiné de la perte de masse, de la rotation et du champ magnétique mènent à une extraction de moment cinétique à cause d'un effet de bras de levier (Schatzman, 1962; Parker, 1963; Weber & Davis, 1967; Mestel, 1968). C'est ce phénomène qui est responsable du freinage magnétique des étoiles de faible masse que nous observons sur la figure 1.6. Les travaux les

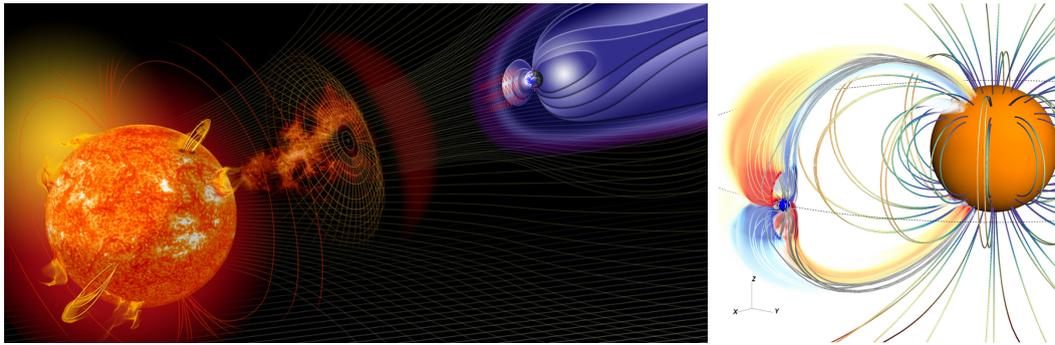


FIGURE 1.8: **Gauche** : Illustration de l'interaction entre le vent stellaire et la magnétosphère d'une planète. Crédit : NASA/Goddard **Droite** : Simulation de l'interaction magnétohydrodynamique entre les champs magnétiques d'une étoile et celui d'une planète proche. Crédit : [Strugarek et al. \(2015\)](#).

plus récents (e.g. [Cohen & Drake, 2014](#); [Réville et al., 2015](#); [Matt et al., 2015](#)) montrent que les propriétés du vent stellaire et les valeurs des pertes de masse et de moment cinétique sont toutes fortement dépendantes de la masse de l'étoile, de sa rotation ainsi que de l'intensité et de la topologie de son champ magnétique à grande échelle.

### 1.3 Des systèmes planétaires sièges de différentes interactions

Nous avons présenté les principales propriétés des étoiles de faible masse et des planètes composant les systèmes planétaires, mais nous n'avons pas encore abordé les différents types d'interactions qui peuvent exister entre ces objets, point clé de notre étude.

#### 1.3.1 Interactions magnétohydrodynamiques

Comme nous l'avons rappelé dans la section précédente, les étoiles sont des objets magnétiques. L'activité magnétique d'une étoile influe sur son environnement : par exemple, le vent stellaire magnétisé peut interagir avec la magnétosphère d'une planète (voir par exemple le panneau gauche de la figure 1.8), ou bien directement avec son atmosphère si la planète n'a pas de champ magnétique suffisamment fort. De récents travaux ([Cohen et al., 2009](#); [Strugarek et al., 2014, 2015](#)) ont montré que dans le cas où une planète magnétisée est située à l'intérieur de la surface d'Alfvén, il y a une interaction directe entre le champ magnétique de l'étoile et celui de la planète, avec des couples magnétiques magnétosphériques agissant sur chacun des deux corps susceptibles de modifier l'évolution séculaire du système et qui dépendent fortement de la topologie magnétique de l'interaction étoile-planète.

### 1.3.2 Interactions de marées

Discutons maintenant l'interaction entre corps célestes auquel ce travail de thèse s'intéresse, à savoir les phénomènes de marées dans les systèmes planétaires.

Dans le cas de la Terre, ce sont les attractions gravitationnelles non-uniformes de la Lune et du Soleil qui provoquent les marées océaniques que nous connaissons, c'est-à-dire des variations locales et quasiment périodiques du niveau des océans pouvant atteindre plusieurs mètres (Egbert & Ray, 2003; Simon et al., 2013). Cependant, ces attractions déforment en réalité toute notre planète, y compris ses parties solides : la croûte terrestre se soulève périodiquement de quelques dizaines de centimètres. Plus généralement, l'attraction non-uniforme et périodique créée par un corps  $B$  sur un corps  $A$  non-punctuel est susceptible de déformer et d'exciter des écoulements si  $A$  est constitué (au moins en partie) de fluide (Zahn, 1966a, 1975; Mathis & Remus, 2013; Ogilvie, 2014, , chapitre 2). Le panneau droit de la figure 1.9 illustre un écoulement de marée provoqué à la surface d'une étoile entièrement convective par un compagnon de marée. La périodicité de cette interaction est provoquée par la rotation du corps  $A$  et par le mouvement orbital du compagnon  $B$ .

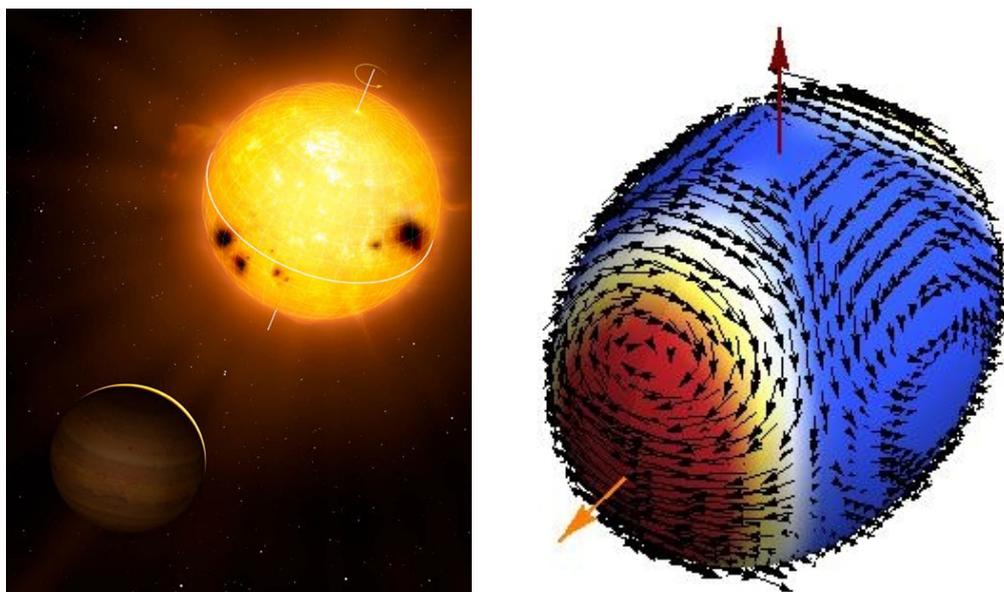


FIGURE 1.9: **Gauche** : Vue d'artiste du système HD52265 observé par CoRoT comportant une étoile de type solaire et un « Jupiter chaud », siège d'interactions de marées. Crédit : [Gizon et al. \(2013\)](#). **Droite** : Champ de vitesse créé par interaction de marée à la surface d'une étoile complètement convective. La flèche rouge représente l'axe de rotation de l'étoile et la flèche orange la direction du compagnon de marée. Le potentiel de marée est donné en dégradé de couleur. Crédit : [Remus et al. \(2012a\)](#).

Cette interaction peut exister entre deux corps quelconques dès que l'un d'entre eux est suffisamment massif et proche de l'autre. A l'échelle des systèmes planétaires, elles peuvent donc exister dans les systèmes d'étoiles binaires, entre une étoile et une planète proche (voir panneau gauche de la figure 1.9) ou bien encore entre une planète et un de ses satellites. Notons que le problème de la marée doit être vu comme un problème symétrique dans

lequel les deux corps peuvent être considérés soit comme le corps primaire  $A$ , soit comme le compagnon  $B$ . Nous détaillerons la théorie générale des marées astrophysiques dans le chapitre 2.

La dissipation de l'énergie cinétique de ces déformations et écoulements de marées sous forme d'énergie thermique conduit à une modification du bilan énergétique des corps mis en jeu (chauffage de marée) et à des transferts de moment cinétique entre la rotation propre de chaque corps et leur orbite. C'est par exemple cette dissipation qui a provoqué la synchronisation de la Lune avec son orbite, et qui provoque le ralentissement de la rotation terrestre de quelques millisecondes par an. Il s'agit donc d'un mécanisme fondamental pour l'évolution orbitale à long terme des systèmes planétaires et l'évolution rotationnelle de leurs composantes. Il conduit la dynamique de l'obliquité, de l'inclinaison orbitale, les phénomènes de synchronisation et circularisation ou les phénomènes de *spiraling* sur le corps central. Par leur action sur la rotation des planètes, qui influe leur climat et leur magnétisme, les marées ont une influence importante pour leur habitabilité (Heller & Armstrong, 2014).

Notons également l'existence d'un autre type de marées provoquées par l'irradiation asymétrique et périodique d'une planète par son étoile hôte et appelées marées thermiques (Chapman & Lindzen, 1970). Nous ne traiterons pas de ce type de marées dans ce travail.

### 1.3.3 Vers une vision globale de la dynamique des systèmes planétaires

Les sections précédentes révèlent la complexité de la dynamique à long terme des systèmes planétaires, en particulier ceux dont l'étoile hôte est une étoile de faible masse. Cette dynamique est le résultat de la compétition entre la dynamique intrinsèque de l'étoile et les différents types d'interactions qui existent dans les systèmes planétaires : d'une part, l'évolution de l'étoile centrale, et notamment le freinage par le vent stellaire magnétisé nous amènent à étudier des systèmes planétaires qui perdent du moment cinétique total (Barker & Ogilvie, 2009; Damiani & Lanza, 2015; Ferraz-Mello et al., 2015). De plus, les interactions magnétohydrodynamiques et de marées entre étoiles et planètes sont à l'origine de couples qui vont transférer du moment cinétique entre la rotation propre et les orbites des objets mis en jeu. La modélisation et la comparaison de ces différentes interactions, à partir de nos connaissances sur la structure interne et la dynamique intrinsèque des étoiles et des planètes, est fondamentale pour la modélisation et la compréhension de la dynamique à long terme des systèmes planétaires, en particulier pour la problématique de l'habitabilité des planètes extrasolaires. De récents travaux comme Bolmont et al. (2012); Mathis (2015); Bolmont & Mathis (2016) s'inscrivent par exemple dans cette démarche.

Dans ce cadre, l'objectif principal de ce travail de thèse est d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Quelle est l'influence de la structure interne sur la réponse de marée des corps célestes, en particulier celle des planètes géantes gazeuses et des étoiles de faible masse ?
- Quelle est l'influence de la dynamique intrinsèque de ces corps, c'est-à-dire la rotation, la rotation différentielle ou encore la convection turbulente, sur les mécanismes à l'origine de la dissipation de marée ?

## 1.4 Organisation du manuscrit

Outre ce chapitre d'introduction et de mise en contexte, ce manuscrit comprend deux chapitres dédiés à la présentation de notions générales nécessaires au traitement des interactions de marées gravitationnelles dans les planètes géantes et les étoiles de faible masse.

Ainsi, nous présentons de manière détaillée dans le chapitre 2 le cadre de travail et le formalisme généralement adoptés pour définir le problème académique de l'interaction de marée linéaire entre un corps primaire fluide (ou en partie fluide) et un compagnon, en insistant sur la définition du potentiel de marée et des quantités/paramètres permettant de décrire les échanges d'énergie et de moment cinétique entre les composantes du système. Le chapitre 3 introduit des notions de mécanique des fluides en rotation. Nous y présentons en particulier la théorie des ondes inertielles dans un corps fluide en rotation solide qui est un mécanisme fondamental pour la dissipation de marée dans les corps comportant une enveloppe convective externe.

Nous présentons dans les chapitres suivants les résultats originaux obtenus, et publiés pour certains, concernant la dissipation de marée dans les planètes géantes et les étoiles de faible masse.

Le chapitre 4 présente nos résultats sur l'influence de la structure interne, c'est-à-dire la masse et la taille d'un cœur solide s'il existe, pour la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses semblables à Jupiter et Saturne. Pour cela, nous comparons les ordres de grandeur des deux mécanismes principalement responsables de la dissipation de marée dans chacune des régions solide et fluide.

Les chapitres 5 et 6 traitent les deux facettes d'un même problème : celui de la dissipation de marée par les ondes inertielles dans une enveloppe convective stellaire en rotation différentielle latitudinale, telle qu'observée dans le Soleil et les simulations des enveloppes convectives des étoiles de faible masse. Dans le chapitre 5, nous étudions d'abord analytiquement les propriétés de propagation des ondes inertielles en présence de ce type de rotation différentielle avant de présenter des simulations numériques de modes inertiels propres. Dans le chapitre 6, nous discutons en détail le problème de la séparation entre marée d'équilibre et marée dynamique en présence de rotation différentielle, puis nous étudions le problème du chapitre précédent en y ajoutant un forçage académique simplifié, de manière à calculer la

dissipation engendrée par les ondes inertielles de marée en présence de rotation différentielle. Nous explorons sa dépendance aux paramètres du modèle, eux-mêmes étroitement liés aux propriétés de l'étoile et de son enveloppe convective.

Le chapitre 7 présente une nouvelle prescription qui prend en compte la rotation des étoiles pour l'estimation de la viscosité turbulente agissant sur les ondes de marée.

Enfin, les conclusions et perspectives de ce travail sont présentées et discutées au chapitre 8.



# CHAPITRE 2

## THÉORIE LINÉAIRE DES MARÉES FLUIDES ASTROPHYSIQUES

### Sommaire

<b>2.1 Description linéaire et formalisme</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1.1 Potentiel de marée, réponse linéaire . . . . .	17
2.1.2 Dissipation et évolution dynamique : nombres de Love et quantités de marées . . . . .	23
<b>2.2 Marée d'équilibre et marée dynamique fluides</b> . . . . .	<b>28</b>
2.2.1 Marée dynamique et forces de rappel dans les zones stablement stratifiées et les zones convectives . . . . .	30
2.2.2 Processus de dissipation dans les zones stablement stratifiées et convectives . . . . .	32
<b>2.3 Etat de l'art des marées fluides en astrophysique</b> . . . . .	<b>35</b>
2.3.1 Théorie linéaire . . . . .	35
2.3.2 Limitations de la théorie linéaire . . . . .	37
2.3.3 Contraintes observationnelles . . . . .	38
2.3.4 Conséquences sur l'évolution dynamique des systèmes . . . . .	41

Ce chapitre décrit la théorie linéaire des marées en astrophysique ainsi que le formalisme associé et les quantités habituellement utilisées dans la littérature. De plus, nous expliquons en quoi consiste la distinction entre marée d'équilibre et marée dynamique. Enfin, nous discutons l'état de l'art pour les marées astrophysiques, à la fois sur le plan théorique et observationnel.

## 2.1 Description linéaire et formalisme

### 2.1.1 Potentiel de marée, réponse linéaire

Un corps non-punctuel primaire  $A$  de masse  $m_A$ , doté d'un compagnon  $B$  de masse  $m_B$  en orbite autour de lui, subit toujours une attraction gravitationnelle différentielle de la part de ce dernier. En effet, comme le montre la figure 2.1, il s'exerce en chaque point du corps  $A$  une force dont l'amplitude dépend du point choisi puisque celle-ci est inversement proportionnelle au carré de la distance entre ce point et le compagnon  $B$ . Si celui-ci est suffisamment petit et/ou éloigné de  $A$ , on peut supposer qu'il est punctuel. En notant  $d_{AB}$

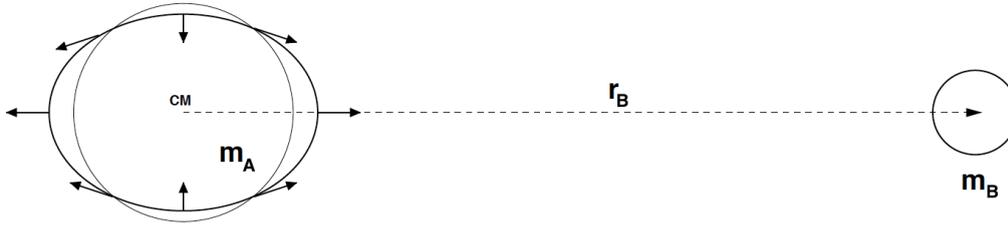


FIGURE 2.1: Illustration de l'attraction gravitationnelle différentielle subie par un corps non ponctuel primaire  $A$  de masse  $m_A$  de la part d'un compagnon de marée (considéré ponctuel) de masse  $m_B$ . CM désigne le centre de masse du corps  $A$  et  $r_B$  la distance qui le sépare de  $B$ . Crédit : [Correia & Laskar \(2003\)](#).

la distance entre les centres de masse de  $A$  et  $B$ , et  $R_A$  le rayon (ou la taille caractéristique) du corps primaire  $A$ , on peut faire cette approximation dès que  $d_{AB} \geq 5R_A$  ([Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009](#)).

Formellement, le potentiel gravitationnel  $U_B$  créé par le compagnon  $B$  se décompose en un potentiel  $U_{\text{orb}}$  permettant de décrire le mouvement képlérien du corps  $A$ , auquel s'ajoute un potentiel perturbateur de marée noté  $U$ .

Avant de procéder au calcul de ces quantités, il nous faut définir les angles d'Euler qui relient d'une part le repère équatorial  $\mathcal{R}_E : \{A, \mathbf{X}_E, \mathbf{Y}_E, \mathbf{Z}_E\}$  du corps central  $A$  et en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  de celui-ci, et d'autre part le repère orbital  $\mathcal{R}_O : \{A, \mathbf{X}_O, \mathbf{Y}_O, \mathbf{Z}_O\}$ , au repère quasi-inertiel  $\mathcal{R}_R : \{A, \mathbf{X}_R, \mathbf{Y}_R, \mathbf{Z}_R\}$  dont l'axe  $\mathbf{Z}_R$  pointe dans la direction du moment angulaire total du système binaire composé de  $A$  et  $B$ .

Pour localiser le repère orbital  $\mathcal{R}_O$  par rapport à  $\mathcal{R}_R$ , nous avons besoin des trois angles d'Euler suivants :

- $I$ , l'inclinaison du plan orbital de  $B$ ;
- $\omega^*$ , l'argument du périastre;
- $\Omega^*$ , la longitude du nœud ascendant.

Le repère équatorial  $\mathcal{R}_E$  est défini par rapport à  $\mathcal{R}_R$  par trois angles d'Euler supplémentaires :

- $\varepsilon$ , l'obliquité de l'axe de rotation de  $A$ ;
- $\Theta^*$ , l'angle sidéral moyen défini par  $\Omega = d\Theta^*/dt$ ;
- $\phi^*$ , l'angle de précession général.

La figure 2.2 illustre les positions relatives de ces trois repères et les angles associés. Par souci de clarté, tous les développements qui suivent sont écrits dans le repère équatorial  $\mathcal{R}_E$  de  $A$ , dans lequel le vecteur position  $\mathbf{r}_B$  du compagnon ponctuel  $B$  et ses coordonnées sphériques sont notées  $\mathbf{r}_B = (r_B, \theta_B, \varphi_B)$  tandis que la position du point courant est notée  $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ .

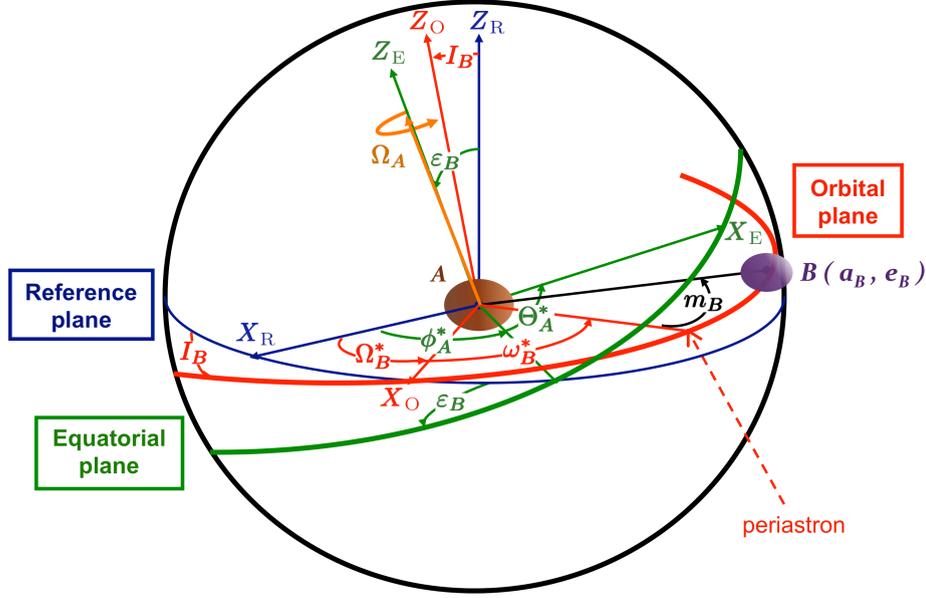


FIGURE 2.2: Repère inertiel de référence ( $\mathcal{R}_R$ ), repère orbital ( $\mathcal{R}_O$ ), et repère équatorial ( $\mathcal{R}_E$ ) en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  du corps primaire  $A$ , et angles d'Euler associés. Crédit : Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009).

Dans ce système de coordonnées, le potentiel total créé par  $B$  en un point  $\mathbf{r}$  de  $A$  s'écrit :

$$U_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = U_{\text{orb}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) + U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = -\frac{\mathcal{G} m_B}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|} = -\frac{\mathcal{G} m_B}{r_B} \left( 1 - 2 \frac{r}{r_B} \cos \Theta + \left( \frac{r}{r_B} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (2.1)$$

où  $\Theta$ , qui vérifie

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_B}{r r_B} = \cos \theta \cos \theta_B + \sin \theta \sin \theta_B \cos(\varphi - \varphi_B), \quad (2.2)$$

est simplement l'angle formé par les directions des vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_B$ . On développe alors classiquement  $U_B$  à l'aide des polynômes de Legendre  $P_l$  et du développement multipolaire associé :

$$U_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = -\frac{\mathcal{G} m_B}{r_B} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_B} \right)^l P_l(\cos \Theta). \quad (2.3)$$

Dans ce cadre, le potentiel  $U_{\text{orb}}$  est celui qui assure le mouvement orbital képlérien de  $A$  autour de  $B$  ; autrement dit, le mouvement qu'aurait  $A$  s'il était ponctuel. Par conséquent, il crée en tout point  $\mathbf{r}$  de  $A$  l'accélération centrale dirigée vers  $B$  :

$$-\nabla_{(\mathbf{r})} U_{\text{orb}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = \frac{\mathcal{G} m_B \mathbf{r}_B}{r_B^3} \quad (2.4)$$

dont la solution, à une constante additive près, est :

$$U_{\text{orb}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = -\frac{\mathcal{G} m_B}{r_B} \left( 1 + \frac{r}{r_B} \cos \Theta \right) = -\frac{\mathcal{G} m_B}{r_B} \left( P_0(\cos \Theta) + \frac{r}{r_B} P_1(\cos \Theta) \right). \quad (2.5)$$

Remarquons que la constante d'intégration est choisie de sorte à trouver le potentiel de marée  $U$  sous sa forme « effective », sans terme constant :

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = -\frac{\mathcal{G} m_B}{r_B} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_B} \right)^l P_l(\cos \Theta). \quad (2.6)$$

C'est donc ce potentiel  $U$  qui s'ajoute à l'attraction gravitationnelle entre corps ponctuels et crée l'attraction différentielle de marée dont il est fait mention au début de cette section. Si le compagnon  $B$  est suffisamment éloigné de  $A$  et/ou suffisamment petit, ce qui revient à faire l'hypothèse  $r_B \gg 5R_A$  (Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009), on remarque que le terme dominant est celui pour lequel  $l = 2$ . L'approximation qui consiste à négliger tous les termes  $l > 2$  s'appelle l'approximation quadrupolaire, et dans ce cas le développement du potentiel de marée se réduit à :

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = -\frac{\mathcal{G} m_B}{2r_B} \left( \frac{r}{r_B} \right)^2 (3 \cos^2 \Theta - 1). \quad (2.7)$$

A partir de l'équation (2.6) et à l'aide du théorème d'addition des polynômes de Legendre (voir l'équation (A.9) dans l'annexe), on peut facilement développer  $U$  en une série d'harmoniques sphériques. Ces fonctions forment une base orthonormale pour des fonctions suffisamment régulières sur la sphère unité et sont définies, pour  $l \geq 0$  et  $-l \leq m \leq l$ , par (voir annexe A et Abramowitz & Stegun, 1964) :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (2.8)$$

où  $P_l^m$  désigne les polynômes associés de Legendre (voir la définition (A.4)). Ces fonctions sont extrêmement utiles pour exprimer le potentiel de marée : d'une part parce qu'il est plus pratique de travailler avec les variables angulaires  $(\theta, \varphi)$  du système de coordonnées sphériques centré sur le corps primaire plutôt qu'avec  $\cos \Theta$ , et d'autre part parce qu'il est possible de développer n'importe quel champ scalaire suffisamment régulier défini sur la sphère unité en une série d'harmoniques sphériques puisque celles-ci forment une base orthonormale (e.g. Abramowitz & Stegun, 1964, voir également l'annexe A). Par ailleurs, nous verrons dans le chapitre 3 qu'il est également possible de développer n'importe quel champ de vecteurs suffisamment régulier (typiquement le champ de vitesse d'un fluide) sur les harmoniques sphériques vectorielles (voir la section A.1.2 dans l'annexe).

Le théorème d'addition des polynômes de Legendre (A.9) démontre que :

$$\forall l \geq 0, \quad P_l(\cos \Theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta_B, \varphi_B)^* \quad (2.9)$$

où l'astérisque désigne la conjugaison complexe, ce qui donne immédiatement pour l'expression (2.6) :

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[ -\frac{4\pi \mathcal{G} m_B}{2l+1} \frac{1}{r_B^{l+1}} Y_l^m(\theta_B, \varphi_B)^* \right] r^l Y_l^m(\theta, \varphi) \right\}. \quad (2.10)$$

Evidemment, en pratique,  $\mathbf{r}_B$  varie lorsque  $B$  parcourt son orbite autour de  $A$ . Essayons donc plutôt d'exprimer  $U$  non pas en fonction de  $\mathbf{r}_B$  mais des éléments orbitaux de  $B$ , à savoir son demi-grand axe  $a$ , son excentricité  $e$  et son moyen mouvement  $n$ . Pour cela, on utilise la transformée de Kaula (Kaula, 1962, 1964) :

$$\frac{1}{r_B^{l+1}} Y_l^m(\theta_B, \varphi_B) = \frac{1}{a^{l+1}} \sum_{j=-l}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q \in \mathbb{Z}} \left\{ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|j|)!}{(l+|j|)!}} \right. \\ \left. \times d_{j,m}^l(\varepsilon) F_{l,j,p}(I) G_{l,p,q}(e) e^{i\Psi_{l,m,j,p,q}(t)} \right\}, \quad (2.11)$$

où la phase de l'exponentielle complexe est donnée par

$$\Psi_{l,m,j,p,q}(t) = \sigma_{l,m,p,q}(n, \Omega) t + \tau_{l,m,j,p,q}(\omega^*, \Omega^*, \phi^*), \quad (2.12)$$

dans laquelle nous avons introduit la fréquence de marée :

$$\sigma_{l,m,p,q}(n, \Omega) = (l - 2p + q) n - m\Omega \quad (2.13)$$

et la phase :

$$\tau_{l,m,j,p,q} = (l - 2p)\omega^* + j(\Omega^* - \phi^*) + (l - m)\frac{\pi}{2}. \quad (2.14)$$

Les fonctions d'obliquité  $d_{j,m}^l(\varepsilon)$ , d'inclinaison  $F_{l,j,p}(I)$  et d'excentricité  $G_{l,p,q}(e)$  sont décrites en détail dans Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009). Nous renvoyons le lecteur à cet article pour les propriétés mathématiques de ces fonctions. Nous donnons dans les tables ci-après leurs expressions dans le cas du terme  $l = 2$  correspondant à l'approximation quadrupolaire.

On obtient donc finalement :

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{j=-l}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q \in \mathbb{Z}} -\frac{\mathcal{G} m_B}{a^{l+1}} \left\{ (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l-|j|)!}{(l+|j|)!}} \right. \\ \left. \times d_{j,m}^l(\varepsilon) F_{l,j,p}(I) G_{l,p,q}(e) e^{-i\Psi_{l,m,j,p,q}(t)} \right\} r^l Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (2.15)$$

$j$	$m$	$d_{j,m}^2(\varepsilon)$
2	2	$(\cos \frac{\varepsilon}{2})^4$
2	1	$-2 (\cos \frac{\varepsilon}{2})^3 (\sin \frac{\varepsilon}{2})$
2	0	$\sqrt{6} (\cos \frac{\varepsilon}{2})^2 (\sin \frac{\varepsilon}{2})^2$
1	1	$(\cos \frac{\varepsilon}{2})^4 - 3 (\cos \frac{\varepsilon}{2})^2 (\sin \frac{\varepsilon}{2})^2$
1	0	$-\sqrt{6} \cos \varepsilon (\cos \frac{\varepsilon}{2}) (\sin \frac{\varepsilon}{2})$
0	0	$1 - 6 (\cos \frac{\varepsilon}{2})^2 (\sin \frac{\varepsilon}{2})^2$

TABLE 2.1: Valeurs des fonctions d'obliquité  $d_{j,m}^2(\varepsilon)$  dans le cas où  $j \geq m$ . Les valeurs pour  $j < m$  peuvent être déduites des propriétés de symétrie  $d_{j,m}^l(\varepsilon) = (-1)^{j-m} d_{-j,-m}^l(\varepsilon) = d_{j,m}^l(-\varepsilon)$  (voir [Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009](#)).

$j$	$p$	$F_{2,j,p}(I)$
0	0	$\frac{3}{8} \sin^2 I$
0	1	$-\frac{3}{4} \sin^2 I + \frac{1}{2}$
0	2	$\frac{3}{8} \sin^2 I$
1	0	$\frac{3}{4} \sin I (1 + \cos I)$
1	1	$-\frac{3}{2} \sin I \cos I$
1	2	$-\frac{3}{4} \sin I (1 - \cos I)$
2	0	$\frac{3}{4} (1 + \cos I)^2$
2	1	$\frac{3}{2} \sin^2 I$
2	2	$\frac{3}{4} (1 - \cos I)^2$

TABLE 2.2: Valeurs des fonctions d'inclinaison  $F_{2,j,p}(I)$  pour  $j > 0$ . Les valeurs pour  $j < 0$  peuvent être déduites des propriétés de symétrie  $F_{l,-j,p}(I) = (-1)^{l-j} \frac{(l-j)!}{(l+j)!} F_{l,j,p}(I)$  (voir [Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009](#)).

$p$	$q$	$p$	$q$	$G_{2,p,q}(e)$
0	-2	2	2	0
0	-1	2	1	$-\frac{1}{2}e + \dots$
0	0	2	0	$1 - \frac{5}{2}e^2 + \dots$
0	1	2	-1	$\frac{7}{2}e + \dots$
0	2	2	-2	$\frac{17}{2}e^2 + \dots$
1	-2	1	2	$\frac{9}{4}e^2 + \dots$
1	-1	1	1	$\frac{3}{2}e + \dots$
		1	0	$(1 - e^2)^{-3/2}$

TABLE 2.3: Valeurs des fonctions d'excentricité  $G_{2,p,q}(e)$ , où plusieurs combinaisons  $(p, q)$  donnent le même résultat (voir [Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009](#)).

Plaçons-nous dans le cadre de l'approximation quadrupolaire où seuls les termes  $l = 2$  sont retenus. Le cas particulier où l'inclinaison ( $I$ ) et l'obliquité ( $\varepsilon$ ) sont nulles nous montrent que dans ce cas le potentiel de marée est directement proportionnel à l'harmonique sphérique  $Y_2^2$ . Sous cette hypothèse et dans le cas d'une orbite circulaire ( $e = 0$ ), il n'y a qu'une seule fréquence de marée, à savoir  $2(n - \Omega)$ . Si  $e \neq 0$ , d'autres fréquences de marées sont présentes. Dans le cas général où l'orbite de  $B$  est inclinée par rapport à l'axe de rotation du corps  $A$  ( $\varepsilon \neq 0$  ou  $I \neq 0$ ), il faut également prendre en compte le terme proportionnel à  $Y_2^1$ .

Notons que le formalisme utilisé dans [Ogilvie \(2014\)](#) définit  $I$  comme l'inclinaison relative entre l'axe de rotation du corps  $A$  et la normale à l'orbite du compagnon  $B$ , sans introduire l'obliquité  $\varepsilon$ . Ceci mène à un développement du potentiel de marée équivalent mais pas identique à (2.15).

Examinons maintenant la façon dont le corps  $A$  va répondre à l'existence de ce potentiel de marée.

### 2.1.2 Dissipation et évolution dynamique : nombres de Love et quantités de marées

Sous l'action du potentiel  $U$ , on peut intuitivement penser que le corps  $A$ , s'il est élastique et non pas rigide, tendrait à se déformer selon la ligne joignant son centre de masse et le compagnon, formant ainsi un simple bourrelet ou renflement (*bulge* en anglais). En effet, les points de  $A$  situés sur la ligne des centres subissent, dans un référentiel centré sur  $A$ , une accélération radiale dirigée vers l'extérieur de  $A$ , tandis que ceux situés dans le plan normal à cette ligne des centres subissent une accélération radiale dirigée vers le centre de  $A$  (voir figure 2.1). Cependant, la décomposition (2.15) du potentiel  $U$  sur les harmoniques sphériques nous indique en fait que chaque mode  $(l, m)$  du potentiel de marée va donner lieu à une certaine déformation de marée, dont les symétries dépendent du couple  $(l, m)$  considéré. Par exemple, si on ne considère que le mode  $(l = 2, m = 2)$  (comme indiqué précédemment, c'est le terme dominant du développement du potentiel de marée lorsque l'inclinaison  $I$  et l'obliquité  $\varepsilon$  sont faibles ou nulles), la déformation de marée a une forme ellipsoïdale, dont la direction du grand axe est celle de la ligne des centres reliant  $A$  et  $B$ .

Dans ce cadre, si l'orbite de la Lune ( $B$ ) autour de la Terre ( $A$ ) n'était pas inclinée, la Lune passerait à la verticale d'un même point de l'équateur terrestre toutes les 24 heures et 50 minutes environ, car la Lune se déplace simultanément sur son orbite pendant que la Terre tourne sur elle-même. On observerait donc un phénomène de marée semi-diurne, c'est-à-dire une marée haute et une marée basse par période de 12 heures et 25 minutes, ce qui est une description approximative mais pas mauvaise de ce qu'on peut observer à la surface de notre planète. On pense bien évidemment aux marées océaniques, mais le manteau terrestre, le fond marin et les continents se soulèvent également, avec une amplitude moindre du fait de la différence de comportement mécanique entre fluides et solides (voir [Mathis & Remus, 2013](#), pour une revue générale).

En réalité, d'autres composantes  $(l, m)$  de moindre intensité du potentiel de marée sont présentes à cause de l'obliquité de l'axe de rotation de la Terre et de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, en particulier la composante  $(l = 2, m = 1)$ . Ces dernières introduisent ainsi la composante diurne qui vient moduler l'onde de marée semi-diurne. Les manifestations de ces différentes composantes sont plus difficiles à discerner car elles sont de plus faible amplitude, et de plus la surface de notre planète présente une topologie complexe

(continents, profondeur des océans, etc) (Simon et al., 2013). De plus, l'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil joue aussi un rôle important et se combine avec celle exercée par la Lune. C'est ce qui explique que les déformations de marées sont plus importantes (*vives-eaux*) lorsque le Soleil, la Terre et la Lune sont sensiblement alignés (pleine lune et nouvelle lune), et sont au contraire plus faibles (*mortes-eaux*) lorsque les trois astres sont en quadrature (premier et dernier quartiers).

La description ci-dessus n'est valable que pour des matériaux au comportement mécanique idéal, c'est-à-dire non visqueux pour les fluides et parfaitement élastiques pour les solides. C'est pourquoi on appelle cet ajustement la marée adiabatique (Zahn, 1966a; Remus et al., 2012a; Efroimsky, 2012). Cependant, les corps fluides comme solides sont en réalité visqueux et viscoélastiques respectivement, et l'interaction de marée y engendre alors des couples de moyenne séculaire non-nulle, ainsi que des phénomènes de friction interne qui dissipent de l'énergie : c'est la marée dissipative (voir la figure 2.4). Dans les régions océaniques terrestres par exemple, l'immense majorité de cette dissipation est la conséquence de l'existence de couches limites au fond des océans, notamment lorsque le plancher océanique présente de forts gradients verticaux, comme par exemple à la jonction entre plancher océanique et plateau continental (Egbert & Ray, 2003).

Pour chaque mode  $(l, m)$ , cette dissipation est différente (de la même manière qu'un milieu continu a une réponse différente selon les fréquences d'excitation) et fait dévier le renflement du corps associé à ce mode de la ligne des centres (voir figure 2.3), menant à l'apparition d'un angle de marée, et donc d'un couple de moyenne non-nulle sur une orbite. Ce dernier modifie alors la dynamique orbitale du système et la rotation de ses composantes (e.g. Zahn, 1966a; Ogilvie, 2014). La somme des contributions de chaque mode  $(l, m)$  permet d'évaluer la dissipation totale et les couples moyens nets qui s'exercent dans le système.

Sous l'hypothèse de conservation du moment cinétique total  $L$  du système, Hut (1980) a démontré qu'il n'existe pas d'état d'équilibre lorsque celui-ci est inférieur à la valeur critique

$$L_{\text{cr}} = 4 \left( \frac{1}{27} \mathcal{G}^2 \frac{m_A^3 m_B^3}{m_A + m_B} (\bar{I}_A + \bar{I}_B) \right)^{1/4}, \quad (2.16)$$

où  $\bar{I}_A, \bar{I}_B$  sont les moments d'inertie des corps  $A$  et  $B$ . Si  $L > L_{\text{cr}}$ , alors il existe en général deux états d'équilibre d'énergie minimale (l'un stable, l'autre instable). Ces deux états d'équilibre sont caractérisés par une orbite circulaire, un alignement de l'axe de rotation de chaque corps ( $A$  et  $B$ ) avec la normale à l'orbite, et la synchronisation de la rotation de chaque corps avec le mouvement orbital. L'état d'équilibre stable ne peut être atteint que si au moins  $3/4$  du moment cinétique total est contenu dans le moment cinétique orbital :  $L_{\text{orb}} > 3/4L$ .

Les déformations induites sur  $A$  par le potentiel de marée dû au compagnon  $B$  ont une autre conséquence que nous n'avons pas encore explicitée : la nouvelle répartition des masses au sein du corps  $A$  va modifier le potentiel gravitationnel sphérique  $\Phi_0(\mathbf{r})$  créé par le corps  $A$

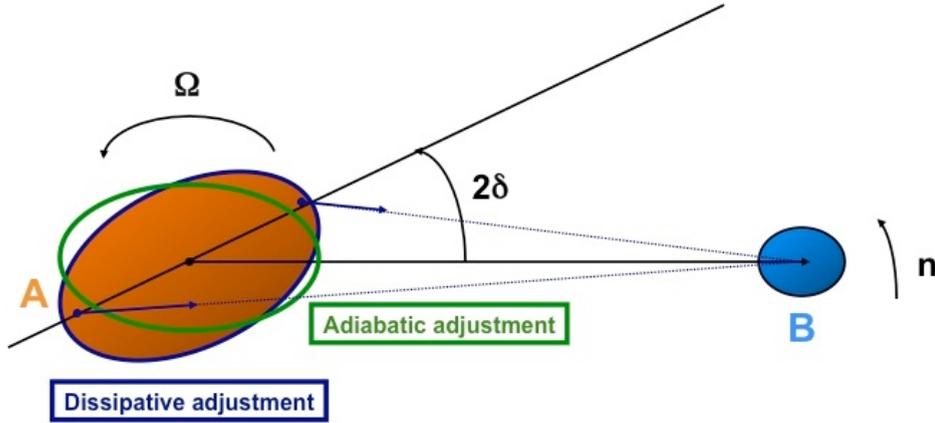


FIGURE 2.3: Interaction de marée entre deux corps  $A$  et  $B$ . Dans une vision adiabatique des choses, la réponse de  $A$  au potentiel de marée exercé par  $B$  est dirigée selon la ligne des centres. Cependant, puisqu'il y a friction interne,  $A$  répond avec un retard temporel  $\Delta t$  par rapport au forçage de marée, qui peut aussi être mesuré par l'angle de marée  $2\delta$ , tous les deux reliés au facteur de qualité de marée  $Q$  (voir équation (2.20)). Chaque quantité dépend du couple  $(l, m)$  considéré et de la fréquence d'excitation. Crédit : [Mathis & Remus \(2013\)](#).

non-déformé (auto-gravité), en lui ajoutant une contribution  $\Phi'(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B)$  réponse à la marée :

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \Phi'(\mathbf{r}, \mathbf{r}_B). \quad (2.17)$$

Pour exprimer  $\Phi'$ , on utilise alors les nombres de Love associés au potentiel gravitationnel, notés  $k$ , initialement inventés et introduits par [Love \(1911\)](#) pour décrire la réponse adiabatique du corps  $A$  au potentiel de marée. Dans notre cadre, ils dépendent du mode  $(l, m)$  et de la fréquence de marée  $\omega$ . Notons que plusieurs fréquences de marées interviennent dans l'expression du potentiel de marée, à savoir les  $\sigma_{l,m,p,q}$  définies par l'équation (2.13). Il est donc important de tenir compte du comportement mécanique du corps  $A$  en réponse à différentes fréquences d'excitation, lequel dépend de sa composition et de sa structure interne ([Efroimsky & Lainey, 2007](#); [Mathis & Remus, 2013](#); [Auclair-Desrotour et al., 2014](#)).

On considère alors une relation linéaire entre les causes et les effets (les marées étant traitées comme une perturbation linéaire du fait de leur faible amplitude) dans le sens où la composante  $(l, m)$  de  $\Phi'$  (la perturbation réponse du potentiel de  $A$ ) est reliée à la même composante  $(l, m)$  du potentiel perturbateur de marée  $U$  par la relation suivante :

$$\Phi_l^m [(r = R_A, \theta, \varphi), \mathbf{r}_B] = k_l^m(\omega) U_l^m [(r = R_A, \theta, \varphi), \mathbf{r}_B] \quad (2.18)$$

où  $R_A$  désigne le rayon du corps  $A$  non-déformé. Autrement dit, du fait du développement du potentiel perturbateur de marée  $U$ , les nombres de Love relient la transformée de Fourier temporelle de ce dernier à celle de la composante  $(l, m)$  de la perturbation réponse  $\Phi'$ .

Historiquement associés à la réponse adiabatique du corps  $A$ , les nombres de Love ont été définis en premier lieu comme des nombres réels. Cependant, l'existence des angles de

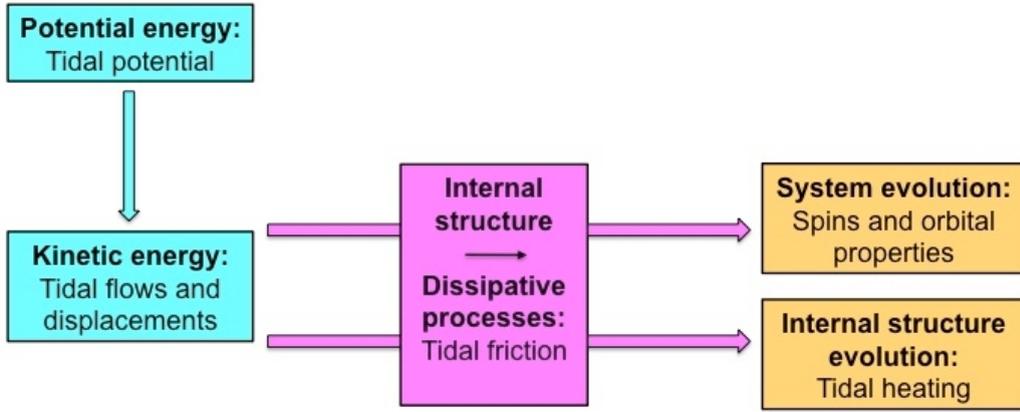


FIGURE 2.4: Principe de la dissipation de marée : d’abord, l’énergie potentielle gravitationnelle de marée génère des déplacements et/ou écoulements de marée possédant une certaine énergie cinétique. Ensuite, des mécanismes de friction internes, liés aux propriétés mécaniques et à la structure interne du corps étudié, dissipent cette énergie cinétique sous forme de chaleur. Cette dissipation mène à une évolution du système (spins et propriétés orbitales) et modifie aussi la structure interne par chauffage. Crédit : [Mathis & Remus \(2013\)](#).

marée et des dissipations associées nous poussent à les considérer comme des quantités complexes, dont la partie imaginaire quantifie la dissipation d’énergie ([Tobie et al., 2005](#); [Henning et al., 2009](#); [Ogilvie, 2013](#)). On définit donc des facteurs de qualité, notés  $Q_l^m(\omega)$ , par :

$$Q_l^m(\omega)^{-1} = \frac{|\text{Im}[k_l^m(\omega)]|}{|k_l^m(\omega)|}, \quad (2.19)$$

dont l’inverse  $Q_l^m(\omega)^{-1}$  est proportionnel au rapport de l’énergie dissipée pendant une orbite sur l’énergie maximum stockée par la déformation de marée (e.g. [Greenberg, 2009](#)). On peut aussi les définir par rapport au retard temporel  $\Delta t_l^m(\omega)$  présenté par la déformation vis-à-vis du forçage de marée, ou encore via l’angle de marée  $2\delta_l^m(\omega)$  (voir figure 2.3) :

$$\sin[\omega\Delta t_l^m(\omega)] = \sin[2\delta_l^m(\omega)] = \frac{1}{Q_l^m(\omega)}. \quad (2.20)$$

Historiquement, il existe deux modèles de réponse de marée simplifiés :

- le modèle où le déphasage géométrique  $\delta$  (et donc aussi  $Q$ ) est constant (indépendant de  $l, m$  et  $\omega$ , voir [MacDonald, 1964](#); [Kaula, 1964](#)) : ce modèle a l’avantage de produire des équations intégrables analytiquement pour l’évolution orbitale ([Efroimsky & Lainey, 2007](#)), mais il présente l’inconvénient d’être discontinu à la synchronisation  $\omega \rightarrow 0$ , car dans ce cas  $\text{Im}[k_l^m(\omega)] \propto \text{sign}(\omega)k_l^m/Q$ .
- le modèle où le retard temporel  $\Delta t$  est constant (indépendant de  $l, m$  et  $\omega$ , voir [Jeffreys, 1961](#); [Singer, 1968](#); [Mignard, 1979, 1980](#); [Hut, 1981](#)) : ce modèle corrige l’inconvénient du précédent, car dans ce cas le retard géométrique  $\delta \propto \omega\Delta t$  qui est continu à la synchronisation, mais qui diverge aux hautes fréquences.

On montre aussi que la dissipation et le couple de marée sont proportionnels à la quantité  $k_l^m(\omega)/Q_l^m(\omega) = |\text{Im}[k_l^m(\omega)]|$  (e.g. [Remus et al., 2012b](#); [Ogilvie, 2014](#)), ce qui permet de

dériver et d'écrire les équations d'évolution du demi-grand axe  $a$ , de l'excentricité  $e$  et de l'inclinaison  $I$  de l'orbite, ainsi que de l'obliquité  $\varepsilon$  et de la vitesse de rotation  $\Omega$  de  $A$  en fonction des nombres de Love et/ou des facteurs de qualité :

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{2}{n} \frac{4\pi}{5} \frac{\mathcal{G} M_B R_A^5}{a^8} \times \sum_{(m,j,p,q) \in \mathbb{I}} \left\{ (2 - 2p + q) \frac{k_2^m(\sigma_{2,m,p,q})}{Q_2^m(\sigma_{2,m,p,q})} [\mathcal{H}_{2,m,j,p,q}(e, I, \varepsilon)]^2 \right\}, \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = -\frac{1}{n} \frac{1 - e^2}{e^2} \frac{4\pi}{5} \frac{\mathcal{G} M_B R_A^5}{a^8} \times \sum_{(m,j,p,q) \in \mathbb{I}} \left\{ \left[ (2 - 2p) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \right) + q \right] \frac{k_2^m(\sigma_{2,m,p,q})}{Q_2^m(\sigma_{2,m,p,q})} [\mathcal{H}_{2,m,j,p,q}(e, I, \varepsilon)]^2 \right\}, \quad (2.22)$$

$$\frac{d(\cos I)}{dt} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{4\pi}{5} \frac{\mathcal{G} M_B^2 R_A^5}{a^8} \times \sum_{(m,j,p,q) \in \mathbb{I}} \left\{ [j + (2q - 2) \cos I] \frac{k_2^m(\sigma_{2,m,p,q})}{Q_2^m(\sigma_{2,m,p,q})} [\mathcal{H}_{2,m,j,p,q}(e, I, \varepsilon)]^2 \right\}, \quad (2.23)$$

$$\frac{d(\bar{I}_A \Omega)}{dt} = -\frac{8\pi}{5} \frac{\mathcal{G} M_B^2 R_A^5}{a^6} \sum_{(m,j,p,q) \in \mathbb{I}} \left\{ \frac{k_2^m(\sigma_{2,m,p,q})}{Q_2^m(\sigma_{2,m,p,q})} [\mathcal{H}_{2,m,j,p,q}(e, I, \varepsilon)]^2 \right\}, \quad (2.24)$$

$$\bar{I}_A \Omega \frac{d(\cos \varepsilon)}{dt} = \frac{4\pi}{5} \frac{\mathcal{G} M_B^2 R_A^5}{a^6} \times \sum_{(m,j,p,q) \in \mathbb{I}} \left\{ (j + 2 \cos \varepsilon) \frac{k_2^m(\sigma_{2,m,p,q})}{Q_2^m(\sigma_{2,m,p,q})} [\mathcal{H}_{2,m,j,p,q}(e, I, \varepsilon)]^2 \right\}, \quad (2.25)$$

où  $\mathbb{I}$  désigne l'ensemble des indices  $\{m, j, p, q\}$  apparaissant dans la somme (2.15), et les fonctions  $\mathcal{H}_{2,m,j,p,q}(e, I, \varepsilon)$  sont définies pour  $\{m, j, p, q\} \in \mathbb{I}$  par :

$$\mathcal{H}_{2,m,j,p,q}(e, I, \varepsilon) = \sqrt{\frac{5}{4\pi} \frac{(2 - |j|)!}{(2 + |j|)!}} d_{j,m}^2(\varepsilon) F_{2,j,p}(I) G_{2,p,q}(e). \quad (2.26)$$

Notons que ces expressions (issues de [Remus et al., 2012b](#)) sont valables pour toute excentricité si suffisamment de termes sont pris en compte dans le développement portant sur l'indice  $q$  ([Savonije, 2008](#)). On peut ainsi évaluer des temps caractéristiques de synchronisation, de circularisation, d'alignement du moment cinétique de  $A$  et d'alignement du moment

cinétique orbital ([Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009](#); [Remus et al., 2012b](#)) :

$$\frac{1}{t_{\text{sync}}} = -\frac{1}{\Omega - n} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{\bar{I}_A (\Omega - n)} \frac{d(\bar{I}_A \Omega)}{dt}, \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{t_{\text{circ}}} = -\frac{1}{e} \frac{de}{dt}, \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{t_{\text{align}_A}} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon \sin \varepsilon} \frac{d(\cos \varepsilon)}{dt}, \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{t_{\text{align}_{\text{Orb}}}} = -\frac{1}{I} \frac{dI}{dt} = \frac{1}{I \sin I} \frac{d(\cos I)}{dt}. \quad (2.30)$$

On en vient donc à se demander comment calculer les quantités que nous avons définies précédemment (nombres de Love complexes ou bien facteurs de qualité) qui sont d'une importance cruciale pour modéliser et comprendre l'évolution dynamique du système  $A$ - $B$ . Pour cela, il faut garder à l'esprit que la dissipation de marée dans le corps  $A$  dépend intrinsèquement de sa structure interne (laquelle peut évoluer au cours du temps, à cause de la marée ou non), tandis que l'architecture orbitale (elle aussi variable dans le temps) ne fait que modifier le forçage auquel cette structure interne est soumise. Nous allons maintenant étudier ces différents points dans les sections suivantes de ce chapitre.

## 2.2 Marée d'équilibre et marée dynamique fluides

L'approche la plus répandue pour étudier la réponse linéaire d'un corps fluide  $A$  à la présence d'un potentiel perturbateur de marée (créé par  $B$ ) consiste à séparer cette réponse en deux parties : la marée d'équilibre et la marée dynamique.

La notion de marée d'équilibre fluide a été introduite pour la première fois par [Zahn \(1966a,b\)](#) qui l'a étudiée dans le cadre des étoiles binaires serrées. Il s'agit d'une approximation de la véritable réponse de marée du corps fluide qui est associée à un déplacement (et/ou un champ de vitesse) à grande échelle. Formellement, les perturbations de pression et de densité de la marée d'équilibre doivent satisfaire l'équilibre hydrostatique associé à la perturbation totale du potentiel gravitationnel, c'est-à-dire  $U + \Phi'$ . Cette approximation est en général valable lorsque la fréquence de marée est faible devant les autres fréquences caractéristiques du corps en question ( $\omega \rightarrow 0$ , voir la section suivante sur les forces de rappel ci-après). Comme nous le verrons au début du chapitre 6, cette marée d'équilibre n'est pas toujours définie de façon univoque et certaines de ses propriétés peuvent varier selon les cas étudiés (voir [Terquem et al., 1998](#); [Ogilvie, 2013](#)). La figure 2.5 tirée de [Remus et al. \(2012a\)](#) montre un calcul de champ de vitesse pour la marée d'équilibre d'une étoile ou d'une planète complètement convective.

La marée dynamique est une correction qui vient s'ajouter à la marée d'équilibre et qui prend en compte les forces de rappel que sont, par exemple, l'accélération de Coriolis (due

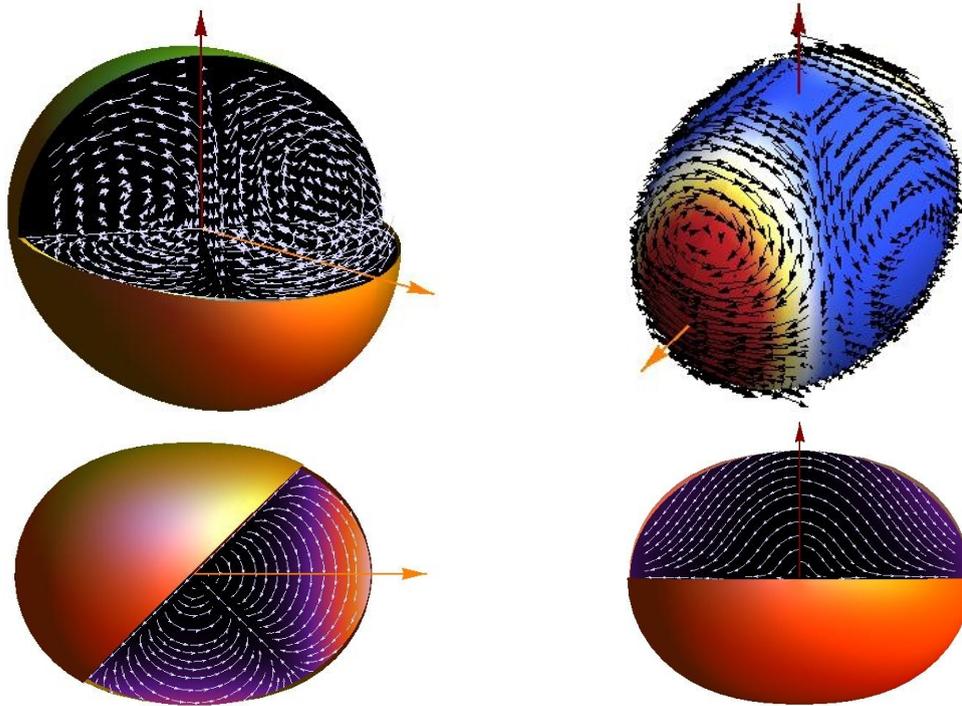


FIGURE 2.5: Champ de vitesse de la marée d'équilibre quadrupolaire d'une étoile ou d'une planète complètement convective. Les flèches rouge et orange désignent respectivement l'axe de rotation et la direction du compagnon perturbateur. **En haut à gauche** : Vue globale du champ de vitesse. **En haut à droite** : Champ de vitesse de surface (flèches noires) et intensité du potentiel de marée (en couleur). **En bas à gauche** : Vue de dessus. **En bas à droite** : Coupe méridienne. Crédit : [Remus et al. \(2012a\)](#).

à la rotation) ou la poussée d'Archimède (dans les zones stablement stratifiées) et dont les solutions présentent en général un caractère ondulatoire : il s'agit en fait des modes d'oscillations propres du corps  $A$  qui sont excités par le potentiel de marée  $U$ . [Zahn \(1975\)](#) a été le premier à étudier ce type d'écoulements, plus précisément les ondes de gravité excitées par la marée dans les enveloppes radiatives d'étoiles massives. Depuis lors, d'autres travaux théoriques et de simulations numériques ont également tenté de décrire les propriétés de la marée dynamique dans d'autres circonstances, par exemple dans les coeurs radiatifs et les enveloppes convectives des étoiles de faible masse ou des planètes géantes (e.g. [Terquem et al., 1998](#); [Ogilvie & Lin, 2004, 2007](#)).

Ensuite, il faut identifier les différents processus dissipatifs qui vont agir sur ces différents types d'écoulements de marées, et ainsi être responsables de la conversion de leur énergie cinétique sous forme de chaleur, c'est-à-dire de la dissipation de marée (voir figure 2.4). C'est l'objet du paragraphe 2.2.2, qui détaille les hypothèses et prescriptions existantes dans les zones stablement stratifiées (radiatives dans le cas stellaire) et convectives.

### 2.2.1 Marée dynamique et forces de rappel dans les zones stablement stratifiées et les zones convectives

Faisons d'abord l'inventaire des mécanismes donnant lieu à l'existence de forces de rappel dans les régions fluides stellaires et planétaires, et détaillons les différentes fréquences caractéristiques et les familles d'ondes qui y sont associées :

- la tension magnétique, qui tend à redresser les lignes courbées d'un champ magnétique (lorsqu'il est présent), est caractérisée par la fréquence d'Alfvén

$$\omega_A = \frac{B}{r \sin \theta \sqrt{\mu \rho}}, \quad (2.31)$$

où  $B$  est l'intensité du champ magnétique,  $r \sin \theta$  est le rayon cylindrique et  $\mu$  et  $\rho$  sont la perméabilité magnétique et la densité du milieu ;

- l'accélération de Coriolis, due à la rotation (possiblement différentielle) du corps sur lui-même, caractérisée par la fréquence inertielle  $2\Omega$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire du corps ;
- la poussée d'Archimède, due à la stratification en densité et en température, caractérisée par la fréquence de Brunt-Väisälä

$$N = \sqrt{-g \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{\partial P}{\partial r} \right)}, \quad (2.32)$$

où  $g$  est la gravité,  $\rho$  et  $P$  sont la densité et la pression du milieu, et  $\Gamma_1$  est l'exposant adiabatique. Cette force n'est une force de rappel que lorsque cette stratification est stable, à savoir lorsque  $N^2 > 0$ . Dans le cas contraire, elle est déstabilisatrice et mène au phénomène d'instabilité convective ;

- la compressibilité du fluide, caractérisée par la fréquence de Lamb

$$f_L = \sqrt{l(l+1)} \frac{c_s}{r}, \quad (2.33)$$

où  $l$  est le degré de l'harmonique sphérique du mode acoustique, et  $c_s$  est la vitesse du son définie par  $c_s = \sqrt{\Gamma_1 P / \rho}$ .

Chacune de ces forces de rappel donne lieu à un type d'onde donné possédant son propre domaine de fréquences : les ondes d'Alfvén ( $|\omega| < \omega_A$ ), les ondes inertielles ( $|\omega| < 2\Omega$ ), les ondes de gravité ( $|\omega| < N$ ) et les ondes acoustiques ( $|\omega| > f_L$ ). Si les domaines de fréquence de ces différents types d'ondes se superposent, cela peut mener à l'existence d'ondes mixtes pour lesquelles plusieurs de ces forces de rappel sont importantes, comme par exemple les ondes gravito-inertielles, ou magnéto-gravito-inertielles dans le cas des ondes de marée, qui sont généralement de basses fréquences. Pour éclaircir ce point, il est nécessaire d'évaluer l'ordre de grandeur de chacune des fréquences caractéristiques définies ci-dessus pour chaque corps étudié.

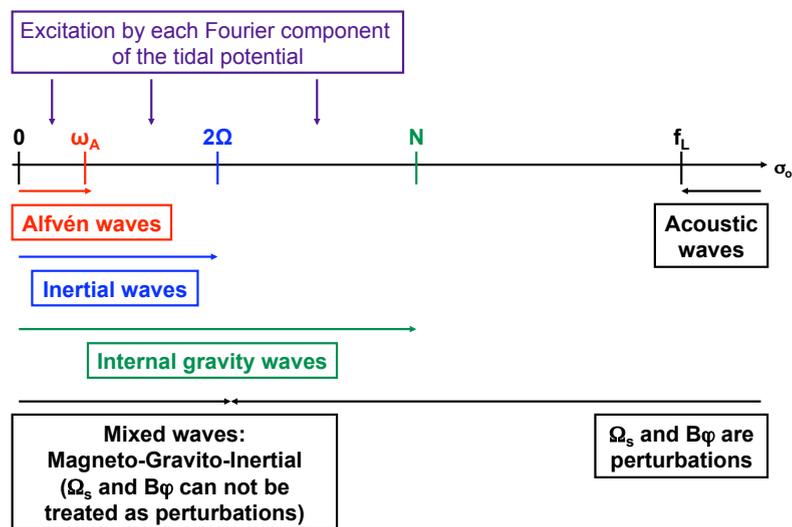


FIGURE 2.6: Principaux types d'ondes dans les intérieurs stellaires et les couches fluides planétaires. Les interactions de marées excitent des ondes de basse fréquence comme les ondes inertielles dans les zones convectives ou gravito-inertielles dans les zones stablement stratifiées (que l'on peut également qualifier de magnéto-inertielles ou magnéto-gravito-inertielles si le champ magnétique est pris en compte) ; les ondes acoustiques ont généralement une fréquence bien plus élevée et ne sont que perturbées par le potentiel de marée. Crédit : Mathis & Remus (2013).

Dans les étoiles de la séquence principale et l'intérieur des planètes géantes, on a généralement  $\omega_A < 2\Omega < N < f_L$ . A noter que pour les étoiles de faible masse évoluées, les cavités des modes de gravité et des modes acoustiques se couplent et l'on obtient des ondes gravito-acoustiques mixtes (e.g. Dziembowski, 1971; Dziembowski et al., 2001; Bedding et al., 2011; Beck et al., 2012).

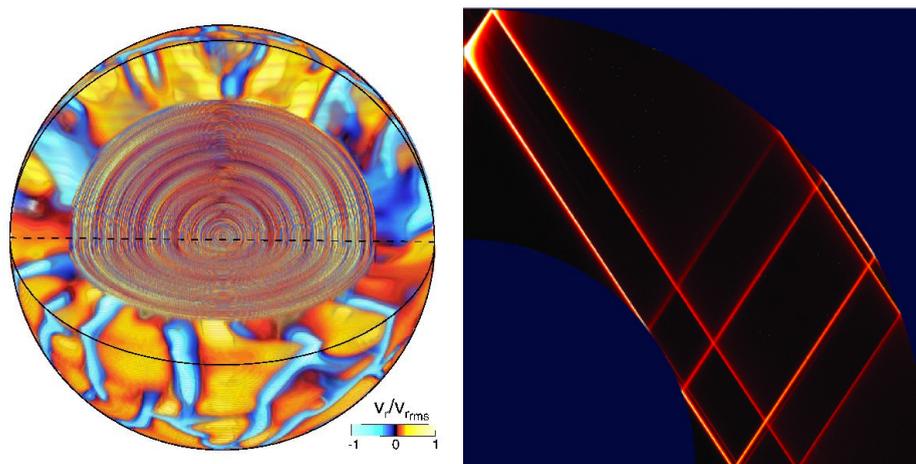


FIGURE 2.7: **Gauche** : Représentation en 3D de la vitesse radiale (normalisée) simulée dans une étoile semblable au Soleil, avec un cœur radiatif s'étendant jusqu'à environ  $0.71 R_\odot$  et une enveloppe convective. Un quadrant a été retiré pour montrer la structure des ondes de gravité dans la zone radiative. Crédit : Alvan et al. (2014). **Droite** : Coupe méridienne montrant l'amplitude de la perturbation de vitesse d'une onde inertielle se propageant dans une enveloppe convective de rapport d'aspect 0.5 (correspondant à une étoile de type K sur la séquence principale avec une masse environ égale à  $0.5M_\odot$ ). Crédit : Ogilvie (2009).

Ce travail se concentrant spécifiquement sur l'étude des ondes excitées par les phénomènes de marées, c'est-à-dire liés à la présence d'un compagnon, il est naturel de comparer les fréquences de marée qui apparaissent dans le développement du potentiel exciteur  $U$  (2.15) avec les domaines de fréquence de chaque famille d'ondes afin de déterminer quelles sont les forces de rappel les plus importantes pour l'étude de la marée dynamique. Les phénomènes de marées sont étroitement liés aux périodes de rotation et aux périodes orbitales des corps mis en jeu, et les fréquences associées ont typiquement un ordre de grandeur comparable à la fréquence inertielle  $2\Omega$  du corps central, qui correspond à la partie de basse fréquence des familles d'ondes identifiées ci-dessus. On s'attend donc à ce que le potentiel de marée se couple préférentiellement avec les modes d'oscillations propres de basses fréquences du corps central  $A$ . Dans l'hypothèse où les effets du champ magnétique sont négligés (ce qui sera le cas dans le restant de ce travail), la marée dynamique sera donc principalement constituée d'ondes inertielles dans les régions convectives ou bien gravito-inertielles dans les zones stablement stratifiées (voir figures 2.6). En figure 2.7, nous montrons deux exemples, pour illustration, de simulations d'ondes internes de gravité (dans le Soleil, [Alvan et al., 2014](#)) et d'ondes inertielles ([Ogilvie, 2009](#)).

### 2.2.2 Processus de dissipation dans les zones stablement stratifiées et convectives

Dans la section précédente, nous avons exposé la façon de séparer la réponse de marée du corps  $A$ , selon que l'on prend en compte ou non les forces de rappel, et dans le cas de la marée dynamique nous avons montré quelle(s) famille(s) d'ondes de marée sont les plus susceptibles d'être excitées par le potentiel de marée  $U$ . Puisque l'objectif de cette étude est de mieux comprendre la dissipation d'énergie engendrée par les écoulements de marée, il est indispensable de faire l'inventaire des processus dissipatifs dominants en fonction du caractère stablement stratifié ou convectif de la région stellaire ou planétaire étudiée, et ce aussi en fonction du type d'ondes de marées considéré.

#### 2.2.2.1 Processus de dissipation en zone stablement stratifiée

Dans les régions stablement stratifiées stellaires ou planétaires, la dissipation d'énergie est le résultat de la compétition entre l'amortissement radiatif, caractérisé par le coefficient de diffusivité thermique  $K$ , et la dissipation visqueuse caractérisée par la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ . Le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/K$  indique si l'un ou l'autre de ces processus est dominant.

Dans le coeur radiatif du Soleil par exemple, ce nombre est de l'ordre de  $10^{-5}$  ([Brun & Zahn, 2006](#)), ce qui indique que la diffusion thermique y est bien plus importante que la diffusion visqueuse. De plus, [Zahn \(1966c\)](#) a montré que dans les zones radiatives stellaires,

la dissipation induite par la diffusion thermique sur la marée d'équilibre (c'est-à-dire l'écoulement de marée à grande échelle résultant de la perturbation de l'équilibre hydrostatique) est négligeable. Il en découle que dans le cadre de la théorie linéaire, la principale source de dissipation de marée dans les zones stablement stratifiées stellaires est l'action de la diffusion thermique sur la marée dynamique, qui est donc principalement constituée d'ondes de gravité ou bien gravito-inertielles (Zahn, 1975; Ogilvie & Lin, 2007).

### 2.2.2.2 Action de la convection turbulente sur les écoulements de marée

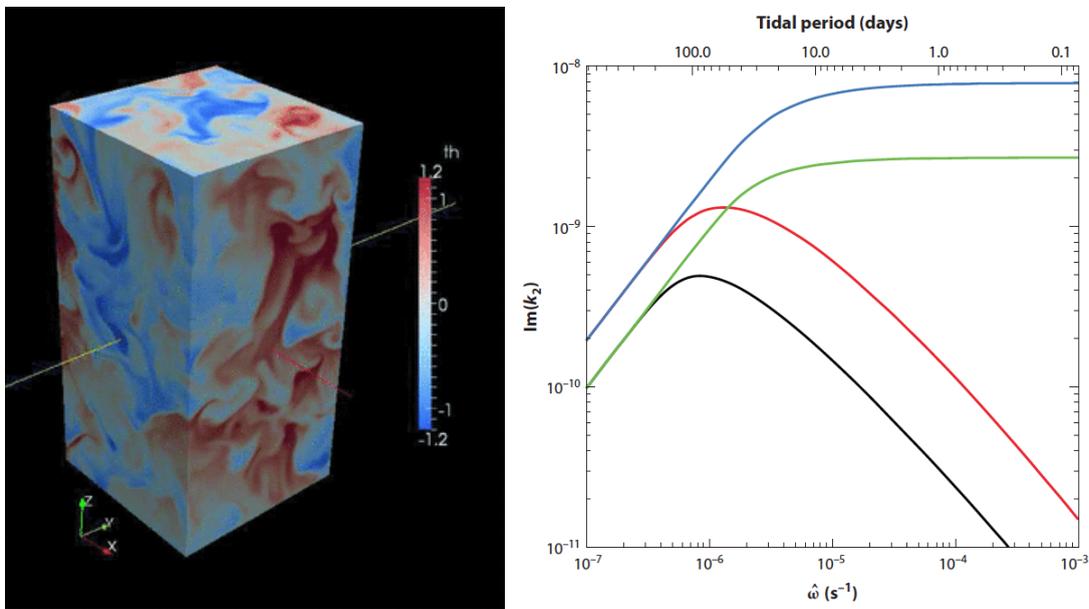


FIGURE 2.8: **Gauche** : Fluctuations de température dans une simulation locale de l'interaction entre la convection et un écoulement de marée. Crédit : Ogilvie & Lesur (2012). **Droite** : Dépendance à la fréquence de marée de la dissipation induite par la marée d'équilibre dans la zone convective du Soleil. La viscosité turbulente est estimée à l'aide de la théorie de la longueur de mélange, réduite par les prescriptions de Zahn (1966b) (courbes bleue et verte) et Goldreich & Nicholson (1977) (courbes rouge et noire) telles qu'elles apparaissent dans Zahn (1989). Les courbes bleue et rouge correspondent à la marée d'équilibre standard tandis que les courbes verte et noire utilisent la marée non-ondulatoire irrotationnelle (Goodman & Dickson, 1998; Terquem et al., 1998, e.g.). Crédit : Ogilvie (2014).

Contrairement aux zones radiatives, les zones convectives sont par nature le siège d'une instabilité turbulente non-linéaire. C'est la raison pour laquelle il est en général difficile de modéliser de manière satisfaisante l'interaction entre les différents types d'écoulements de marée qui s'y développent, à savoir la marée d'équilibre grande échelle et les ondes inertielles principalement, avec ces écoulements turbulents (dont les échelles spatiales et temporelles peuvent varier de plusieurs ordres de grandeur au sein d'un même objet).

Pour s'affranchir de ce problème, il est commun de considérer que l'action des écoulements convectifs sur les écoulements de marée est équivalente à celle d'une diffusion visqueuse, dont le coefficient n'est pas celui de la viscosité moléculaire du fluide (qui est très petite) mais un coefficient de « viscosité effective » aussi appelé « viscosité turbulente » (Zahn,

1966b). Cette approximation n'est valable que si l'échelle spatiale de l'écoulement de marée considéré est suffisamment grande devant celle de la convection. L'approximation de la viscosité turbulente semble donc *a priori* plus adapté au cas de l'écoulement grande échelle de la marée d'équilibre qu'aux écoulements ondulatoires de la marée dynamique, lesquels peuvent avoir des échelles spatiales bien plus faibles, en particulier au niveau des couches de cisaillement des ondes inertielles (voir chapitre 3 et le panneau droit de la figure 2.7). Elle reste cependant largement utilisée, faute de mieux, dans la plupart des travaux traitant de la marée dynamique (e.g. Ogilvie & Lin, 2004, 2007), y compris celui-ci.

Cependant, il faut aussi prendre en compte l'aspect temporel de ces deux écoulements : il est admis que l'efficacité de cette viscosité turbulente doit être réduite dans le régime de la marée « rapide », c'est-à-dire lorsque la période de l'écoulement de marée est faible devant le temps de retournement convectif, car alors la turbulence de la convection n'a pas le temps d'agir sur l'écoulement de marée. Deux prescriptions différentes pour le facteur de réduction ont été proposées dans ce régime de la marée rapide. La première, proposée par Zahn (1966b) se base sur des considérations de libre parcours moyen et prédit que le coefficient de viscosité turbulente est proportionnel à la période de marée, tandis que la seconde, proposée par Goldreich & Keeley (1977); Goldreich & Nicholson (1977) en considérant la durée de vie des tourbillons convectifs, dit qu'il est proportionnel à son carré. Le panneau droit de la figure 2.8 montre une comparaison entre ces deux prescriptions. Des simulations numériques directes de convection par Penev et al. (2007, 2009a,b) semblent confirmer la prescription de Zahn (1966b), mais d'autres travaux plus théoriques (Goodman & Oh, 1997; Ogilvie & Lesur, 2012) mettent en avant d'autres arguments en faveur de la réduction quadratique de Goldreich & Keeley (1977); Goldreich & Nicholson (1977). Ce problème reste encore largement ouvert à ce jour, même si la simulation numérique est une voie prometteuse (voir le panneau gauche de la figure 2.8).

De plus, les échelles caractéristiques de la convection sont souvent estimées à partir de modèles paramétriques de type « longueur de mélange » (Boussinesq, 1877). Un inconvénient majeur de ces modèles est qu'ils ne prennent en général pas compte des effets de la rotation sur les écoulements convectifs (e.g. Barker et al., 2014), comme nous le verrons plus en détail au chapitre 7 de ce travail, qui traite justement de ce sujet et en particulier de ses conséquences sur la friction turbulente appliquée aux écoulements de marée (Mathis et al., 2016).

Sans même dépasser le cadre de la théorie linéaire, de nombreux processus physiques restent donc soit traités de manière simpliste, soit sont à peine explorés ou même complètement ignorés par les modèles traitant les marées fluides. Parmi eux, on peut citer la présence de champ magnétique (Barker & Lithwick, 2014; Wei, 2016) ou bien encore l'impact de la rotation différentielle sur les écoulements de marées (e.g. Baruteau & Rieutord, 2013) et réciproquement (e.g. Morize et al., 2010; Favier et al., 2014), ainsi que leurs interactions respectives avec la turbulence et les processus dissipatifs idéalisés présentés ci-dessus.

Maintenant que nous avons expliqué la distinction entre marée d'équilibre et marée dynamique, ainsi que les processus dissipatifs associés, voyons maintenant les principales conclusions que l'on peut tirer des travaux ayant traité les marées fluides dans les étoiles et les planètes.

## 2.3 Etat de l'art des marées fluides en astrophysique

### 2.3.1 Théorie linéaire

Comme nous l'avons expliqué dans les sections précédentes, l'interaction de marée entre un corps fluide primaire  $A$  (étendu) et un compagnon  $B$  (ponctuel) en orbite autour de ce dernier résulte de la force d'attraction différentielle et variable dans le temps exercée par  $B$  sur  $A$ . Si l'orbite est suffisamment serrée, et donc l'amplitude du potentiel de marée suffisamment grande, ce forçage génère des écoulements de marée de différents types (marée d'équilibre, marée dynamique). Leur dissipation (par les processus évoqués ci-dessus) sous forme de chaleur extrait de l'énergie du système et s'accompagne d'échanges de moment cinétique entre l'orbite et les spins individuels de chacun des corps, ce qui mène à l'évolution de l'architecture orbitale du système sur des temps séculaires. Nous rappelons que selon la distribution initiale de moment cinétique dans le système, celui-ci peut soit évoluer vers un état d'équilibre stable où l'orbite est circulaire et les spins individuels sont alignés et synchronisés avec celle-ci, soit mener à une migration du compagnon  $B$  vers le corps central  $A$  jusqu'à la collision ou la dislocation à l'approche de la limite de Roche (Hut, 1980).

Nous présentons ici un état de l'art de la théorie des marées fluides en astrophysique, en insistant sur les différents processus pris en compte ou non dans les différents travaux cités.

Sur le plan théorique, la réponse de marée d'une étoile a été étudiée pour la première fois par Zahn (1966a,b,c) avec sa théorie de la marée d'équilibre, qui est l'écoulement induit par l'ajustement quasi-hydrostatique au potentiel perturbateur de marée. Il y a étudié sa dissipation par la friction turbulente dans les enveloppes convectives d'étoiles de faible masse. Ce travail a été complété par l'étude des modes de gravité excités par la marée (Zahn, 1970, 1975) dans les enveloppes radiatives d'étoiles massives. Ensuite, Zahn (1977) a estimé les ordres de grandeur respectifs de ces mécanismes en vue de calculer les temps caractéristiques de circularisation, synchronisation et d'alignement pour les systèmes d'étoiles binaires serrées. Depuis, la plupart des travaux traitant d'interactions de marée dans les corps fluides en astrophysique se sont basés sur l'approche pionnière de Zahn et ont essayé d'établir des descriptions plus réalistes des écoulements à l'origine de la dissipation de marée, en particulier en ce qui concerne la marée dynamique dans les enveloppes radiatives des étoiles massives. Par exemple, Savonije & Papaloizou (1983, 1984) ont réalisé des simulations numériques de modes de gravité excités par un potentiel de marée périodique dans une étoile massive dans le cas sans rotation, et ont à leur tour dérivé les temps caractéristiques pour

l'évolution orbitale des binaires massives. Les effets de la rotation sur ces modes de gravité et la dissipation de marée associée, ignorés par Zahn, ont ensuite été étudiés par [Rocca \(1987, 1989\)](#) qui a inclus pour la première fois les effets de l'accélération de Coriolis, et [Goldreich & Nicholson \(1989\)](#) qui a pris en compte la rotation différentielle qui peut exister dans ces régions.

Après la découverte des premiers systèmes planétaires extrasolaires après 1995 ([Mayor & Queloz, 1995](#); [Perryman, 2011](#)), l'étude des interactions de marée étoile-planète a connu un regain d'intérêt et les travaux se sont tournés vers les étoiles de faible masse possédant un coeur radiatif et une enveloppe convective, pour lesquelles le mécanisme de dissipation considéré comme dominant était alors la dissipation de la marée d'équilibre par la friction turbulente dans la zone convective. [Terquem et al. \(1998\)](#) et [Goodman & Dickson \(1998\)](#) ont réalisé des calculs numériques pour la marée dynamique dans le coeur radiatif d'étoiles de type solaire, en ignorant la rotation, et ont trouvé que les effets de résonance des modes et la dissipation de marée associée pourraient être plus efficace que la dissipation induite par la marée d'équilibre dans la zone convective. Progressivement, le régime des basses fréquences, où il est probable que la rotation ait les effets les plus importants, et qui avait été largement ignoré jusqu'ici, a été étudié par [Savonije et al. \(1995\)](#), [Savonije & Papaloizou \(1997\)](#) et [Papaloizou & Savonije \(1997\)](#) qui ont simulé la réponse de marée complète d'une étoile massive en rotation, et ont trouvé des signatures d'ondes inertielles de marée dans le coeur convectif ainsi que d'ondes gravito-inertielles dans l'enveloppe radiative. Enfin, [Witte & Savonije \(2002\)](#); [Savonije & Witte \(2002\)](#) y ont ajouté l'accélération de Coriolis dans le cadre de l'approximation traditionnelle où la composante horizontale du vecteur rotation est négligée.

Dans les zones convectives, la stratification en entropie est légèrement instable, contrairement à celle dans les zones radiatives. Par conséquent, les modes de gravité ne peuvent pas s'y propager. Pendant plus de trente ans, la possible existence et/ou importance d'une marée dynamique en zone convective a été ignorée en faveur de la théorie de la marée d'équilibre, tant pour les étoiles que pour les planètes géantes. Pourtant, une approche simple consiste à ignorer les mouvements convectifs et considérer des perturbations linéaires à un état d'équilibre dont la stratification est neutre ( $N^2 = 0$ ). Dans ce contexte, la marée dynamique est constituée d'oscillations basse fréquence dont la force de rappel est l'accélération de Coriolis, les ondes inertielles, qui se propagent soit dans une sphère (dans le cas d'un corps complètement convectif), soit dans une coquille sphérique (dans le cas d'étoiles de type solaire ou de planètes géantes avec un coeur solide). Ces ondes ont été étudiées dans des cas simples il y a plus d'un siècle par [Thomson \(1880\)](#); [Poincaré \(1885\)](#); [Bryan \(1889\)](#), ou encore [Cartan \(1922\)](#) et [Greenspan \(1968\)](#), mais leur étude dans le cadre des interactions de marée en astrophysique est beaucoup plus récente (voir [Ogilvie & Lin, 2004, 2007](#); [Ogilvie, 2009](#); [Goodman & Lackner, 2009](#); [Rieutord & Valdetaro, 2010](#); [Le Bars et al., 2015](#); [Braviner & Ogilvie, 2014, 2015](#)) dans le cas de la rotation uniforme. La dissipation de marée induite par ces ondes s'est révélée comme variant sur plusieurs ordres de grandeurs en fonction de leur

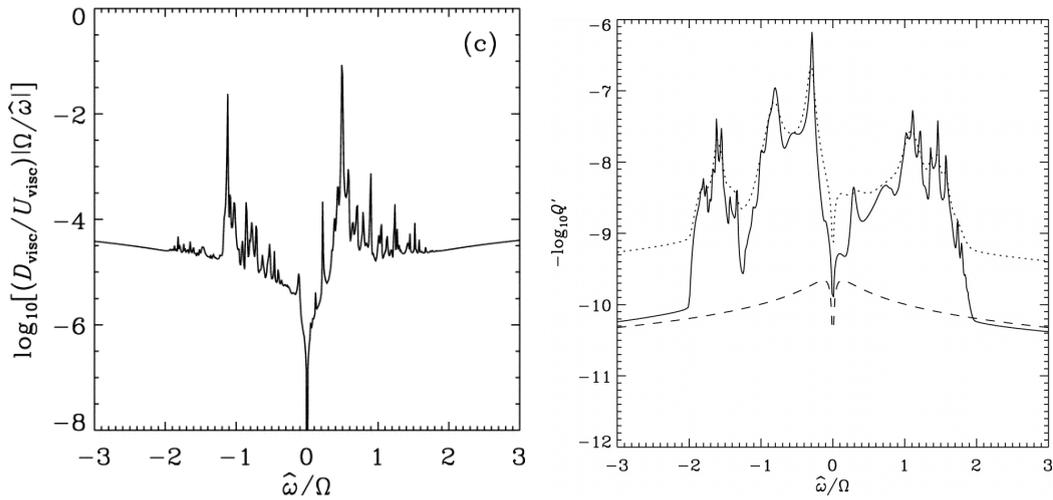


FIGURE 2.9: **Gauche** : Dissipation de marée normalisée induite par les ondes inertielles de marée dans l'enveloppe convective d'une planète géante gazeuse semblable à Jupiter, pour une viscosité qui correspond à un nombre d'Ekman  $E = 10^{-6}$ , en fonction de la fréquence de marée. Crédit : [Ogilvie & Lin \(2004\)](#). **Droite** : Dissipation de marée (paramétrée par le facteur de qualité effectif  $Q'$ ) induite par les ondes inertielles dans la zone convective d'une étoile semblable au Soleil mais dont la période de rotation est de seulement 10 jours, en fonction de la fréquence de marée dans le référentiel tournant. La viscosité estimée par les auteurs pour cette période de rotation correspond à un nombre d'Ekman  $E \approx 1.4 \times 10^{-5}$ , et la ligne pointillée montre l'effet d'une viscosité 10 fois plus élevée. La ligne discontinue illustre la dissipation engendrée lorsque l'accélération de Coriolis est négligée, c'est-à-dire par un écoulement irrotationnel de marée d'équilibre. Crédit : [Ogilvie & Lin \(2007\)](#).

fréquence d'excitation (voir la figure 2.9). Dans ce cadre, il est aussi possible d'obtenir analytiquement des moyennes en fréquence de cette dissipation ([Ogilvie, 2013](#)) permettant de donner des ordres de grandeur de son amplitude en fonction des paramètres de la structure interne des planètes géantes et des étoiles (voir chapitre 4 et [Guenel et al., 2014](#); [Mathis, 2015](#)).

Enfin, il a été démontré que la rotation différentielle peut affecter significativement les propriétés des modes inertiels ([Baruteau & Rieutord, 2013](#)) mais ceci requiert une investigation plus poussée que nous allons effectuer dans les chapitres 5 et 6.

Ainsi, l'étude des propriétés des ondes inertielles dans le cadre de la marée dynamique en zone convective constitue une large partie de ce travail de thèse, et nous reviendrons plus en détail sur celle-ci dans les chapitres suivants.

### 2.3.2 Limitations de la théorie linéaire

La théorie linéaire des marées repose sur l'hypothèse que l'amplitude du potentiel de marée  $U$  exercé par le compagnon  $B$ , qui détermine aussi celle des déformations de marée engendrées par celui-ci sur le corps central  $A$ , est faible devant le potentiel gravitationnel  $\Phi_0$  de ce dernier, pris à sa surface. Cette hypothèse est en général assez bien vérifiée par la plupart

des systèmes d'étoiles binaires serrées, étoile-planète, et planète-satellite dans le système solaire. En revanche, elle suppose également que les déformations ou écoulements de marée excités par les différentes composantes  $(l, m)$  du potentiel de marée n'interagissent pas entre eux, et aussi que les processus dissipatifs qui leur sont appliqués sont linéaires. Cette hypothèse est en général beaucoup moins bien vérifiée que la première.

En effet, on peut citer l'exemple des ondes de gravité excitées par la marée se propageant dans le coeur radiatif d'une étoile de faible masse. Par conservation d'énergie et concentration géométrique, son caractère non-linéaire augmente au fur et à mesure de sa propagation vers le centre de l'étoile (Press, 1981). Si son amplitude est suffisamment grande, il est possible que cette onde déstabilise localement la stratification stable du milieu où elle se propage (le gradient des fluctuations de température induites par l'onde devient aussi important que le gradient imposé par la balance radiative) et se mette ainsi à déferler, à la manière d'une vague sur une plage, dissipant son énergie localement sous forme de turbulence et déposant localement du moment cinétique. Ce phénomène, connu sous le nom de *wave breaking* a été étudié par des simulations numériques (Barker & Ogilvie, 2010; Barker, 2011).

De plus, dans les zones convectives en rotation rapide, la distinction entre ondes inertielles (de marée) et convection turbulente n'est plus claire car les interactions non-linéaires entre ondes peuvent elles-mêmes conduire à l'apparition d'écoulements turbulents (Sen et al., 2012; Jouve & Ogilvie, 2014), ou bien de rotation différentielle (Favier et al., 2014).

Enfin, on peut citer l'instabilité elliptique étudiée notamment par Kerswell (2002); Lacaze et al. (2004, 2005); Le Bars et al. (2007, 2010); Cebon et al. (2012); Cébron et al. (2013) qui résulte de l'interaction non-linéaire entre ondes de marée et l'écoulement de marée d'équilibre dont les lignes de courant sont déformées elliptiquement. Elle peut conduire à l'apparition de turbulence tant dans les régions convectives que dans les régions stablement stratifiées.

### 2.3.3 Contraintes observationnelles

Des études observationnelles ont mis en évidence la présence d'interactions de marée (synchronisation et circularisation) dans les étoiles binaires serrées, par exemple par Giuricin et al. (1984a,b); Verbunt & Phinney (1995) pour les binaires contenant au moins une étoile massive, ou par Giuricin et al. (1984c); Meibom & Mathieu (2005) pour les systèmes binaires d'étoiles contenant au moins une étoile de faible masse. Meibom & Mathieu (2005) ont d'ailleurs montré que les systèmes binaires les plus évolués possédaient des orbites circulaires (voir le panneau gauche de la figure 2.10). Cependant, la synchronisation de la rotation de ces étoiles binaires avec l'orbite n'est pas établie (Meibom et al., 2006).

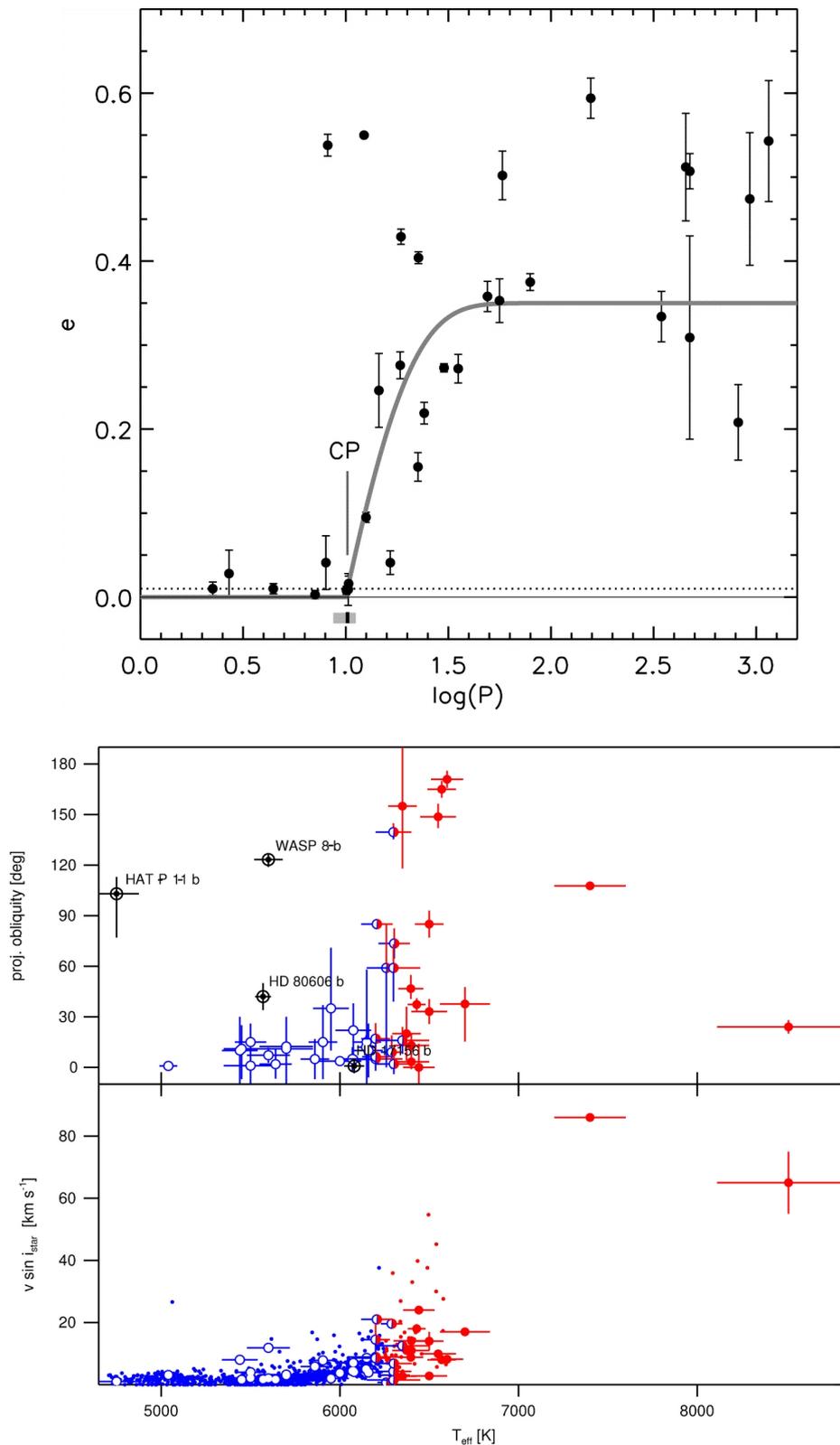


FIGURE 2.10: **Haut** : Diagramme excentricité-période pour un ensemble de binaires contenant des étoiles de type solaire de l’amas M35. Crédit : [Meibom & Mathieu \(2005\)](#). **Bas** : Inclinaison (en haut) et vitesse radiale (en bas) projetées sur la ligne de visée de l’orbite de Jupiters chauds en fonction de la température effective de leur étoile hôte. Crédit : [Albrecht et al. \(2012\)](#).

D'autre part, les observations de planètes extrasolaires par la méthode des vitesses radiales ou bien par la méthode des transits se sont rapidement développées durant les deux dernières décennies et ont motivé la recherche de signatures d'interactions de marées dans les systèmes étoile-planète. Par exemple, [Pont \(2009\)](#) a cherché à mesurer la rotation des étoiles hôtes de planètes proches pour savoir si celle-ci a pu être accélérée par une migration de la planète vers l'étoile. [Ceillier et al. \(2016\)](#) ont de même étudié la rotation des KOIs (*Kepler Objects of Interest*) pour comparer l'évolution rotationnelle des étoiles de type solaire avec ou sans planètes.

[Husnoo et al. \(2012\)](#) ont utilisé des mesures d'excentricité pour conclure que les interactions de marées jouent probablement un rôle déterminant dans la survie des Jupiters chauds (voir aussi [Lai, 2012](#); [Guillot et al., 2014](#)). De plus, [Jackson et al. \(2008\)](#) ont vérifié que les faibles excentricités mesurées pour les planètes proches de leur étoile hôte pouvaient bien être expliquées par des processus d'évolution de marées, et ont calibré les facteurs de qualité (stellaires et planétaires) correspondants. De la même façon, [Hansen \(2010\)](#) et [Penev et al. \(2012\)](#) ont calibré des modèles d'évolution de marée (basés sur des modèles de marée d'équilibre) à l'aide d'observations sur des systèmes planétaires extrasolaires pour contraindre la dissipation de marée dans les étoiles, et les deux résultats semblent incohérents avec la dissipation de marée déduite de la circularisation des étoiles binaires, ce qui suggère que différents mécanismes de dissipation sont à l'oeuvre dans chaque cas, ou bien qu'il existe un mécanisme dissipatif dont l'intensité peut varier sur plusieurs ordres de grandeur mais qui ne se déclenche que dans certaines conditions (seuil en amplitude, configuration orbitale, etc.). Enfin, [Winn et al. \(2010\)](#); [Albrecht et al. \(2012\)](#) ont proposé que la dissipation de marée dans les régions convectives stellaires pourrait être responsables des faibles obliquités observées pour les Jupiters chauds en orbite autour d'étoile de faible masse ayant une enveloppe convective épaisse (voir le panneau droit de la figure 2.10). Si la théorie de [Zahn \(1977\)](#) utilisée dans ces travaux prévoit effectivement que le temps caractéristique d'alignement croît avec la masse de l'étoile, celui-ci reste entre un et deux ordres de grandeur plus grand que l'âge des systèmes observés. De plus, [Mazeh et al. \(2015\)](#) ont trouvé que cette caractéristique s'étendait à des exoplanètes dont les périodes atteignent jusqu'à 50 jours, pour lesquelles les interactions de marées devraient être négligeables. La question reste donc ouverte dans ce dernier cas.

Enfin, dans le système solaire, [Lainey et al. \(2009, 2012, 2015\)](#) ont contraint la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses Jupiter et Saturne. Une dissipation plus élevée d'un ordre de grandeur que les valeurs communément admises ([Goldreich & Soter, 1966](#); [Sinclair, 1983](#)) a été déterminée. Nous reviendrons plus en détail sur ces mesures dans le chapitre 4 dédié à l'étude de la dissipation de marée dans ce type de planètes.

### 2.3.4 Conséquences sur l'évolution dynamique des systèmes

L'étude de la théorie linéaire des marées fluides que nous avons présentée jusqu'ici est une approche que l'on pourrait qualifier d'« instantanée », *i.e.* à un temps donné durant l'évolution d'un système où ont lieu des interactions de marées, et qui doit être replacée dans le contexte de l'évolution dynamique des systèmes à deux corps, qu'il s'agisse d'étoiles binaires, étoile-planète ou planète-satellite, et d'une manière générale les systèmes planétaires.

Tout d'abord, il faut aussi en toute rigueur calculer la dissipation de marée en inversant les rôles joués par  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire que  $A$  devient le compagnon (ponctuel) exerçant la marée et  $B$  devient le corps central perturbé par celle-ci. En effet, il n'est pas possible *a priori* de privilégier la dissipation de marée dans un seul des deux corps pour décrire correctement l'évolution de l'architecture du système (e.g. [Bolmont et al., 2015](#)).

En outre, les écoulements de marée calculés dans le formalisme présenté dans ce chapitre, et donc la dissipation associée, sont fonctions de l'architecture orbitale du système (via les composantes du potentiel de marée  $U$  et les différentes fréquences de marée de ses composantes  $(l, m)$ ) mais aussi de la structure interne du corps primaire  $A$  sur lequel s'exerce ce potentiel de marée. Hors, cette dernière n'est pas constante dans le temps, notamment dans le cas des étoiles ([Kippenhahn & Weigert, 1990](#)). Par conséquent, l'évolution dynamique induite par les phénomènes de marées dans les systèmes multiples est couplée avec l'évolution « propre » de la structure interne du corps  $A$  qui aurait lieu même si celui-ci était isolé (voir la figure 2.11 et aussi [Bolmont et al., 2012](#); [Zhang & Penev, 2014](#); [Mathis, 2015](#); [Bolmont & Mathis, 2016](#)). L'idéal serait de pouvoir simultanément modéliser et quantifier la rétroaction induite par les phénomènes de marées sur l'évolution structurelle et rotationnelle des corps mis en jeu ([Zahn, 1994](#)).

Enfin, l'évolution induite par les phénomènes de marée sont également couplés avec une quantité d'autres phénomènes dynamiques qui sont également responsables de l'évolution architecturale de tels systèmes. Par exemple, [Witte & Savonije \(1999, 2001, 2002\)](#) ont étudié via des simulations numériques l'évolution dynamique de systèmes d'étoiles binaires massives en incluant les effets de l'excitation résonante des modes gravito-inertiels, ainsi qu'un possible effet dynamique de « verrouillage en résonance » (*resonance locking*) qui est un subtil couplage entre la mécanique céleste et la réponse de marée d'un corps fluide et qui peut accélérer significativement l'évolution séculaire de tels systèmes (voir aussi [Fuller et al., 2016](#), pour les planètes géantes). On peut également citer la migration des planètes dans les disque protoplanétaires (e.g. [Baruteau et al., 2014](#)), les perturbations gravitationnelles entre planètes (e.g. [Chatterjee et al., 2008](#)), les oscillations de type Kozai-Lidov (e.g. [Naoz et al., 2011](#)), les interactions magnétiques étoile-planète (voir [Strugarek et al., 2014](#)) ou encore le freinage magnétique des étoiles par le vent stellaire (voir [Barker & Ogilvie, 2009](#); [Damiani & Lanza, 2015](#); [Ferraz-Mello et al., 2015](#)), si bien qu'il est pour l'instant important de comprendre les effets de chacun de ces mécanismes.

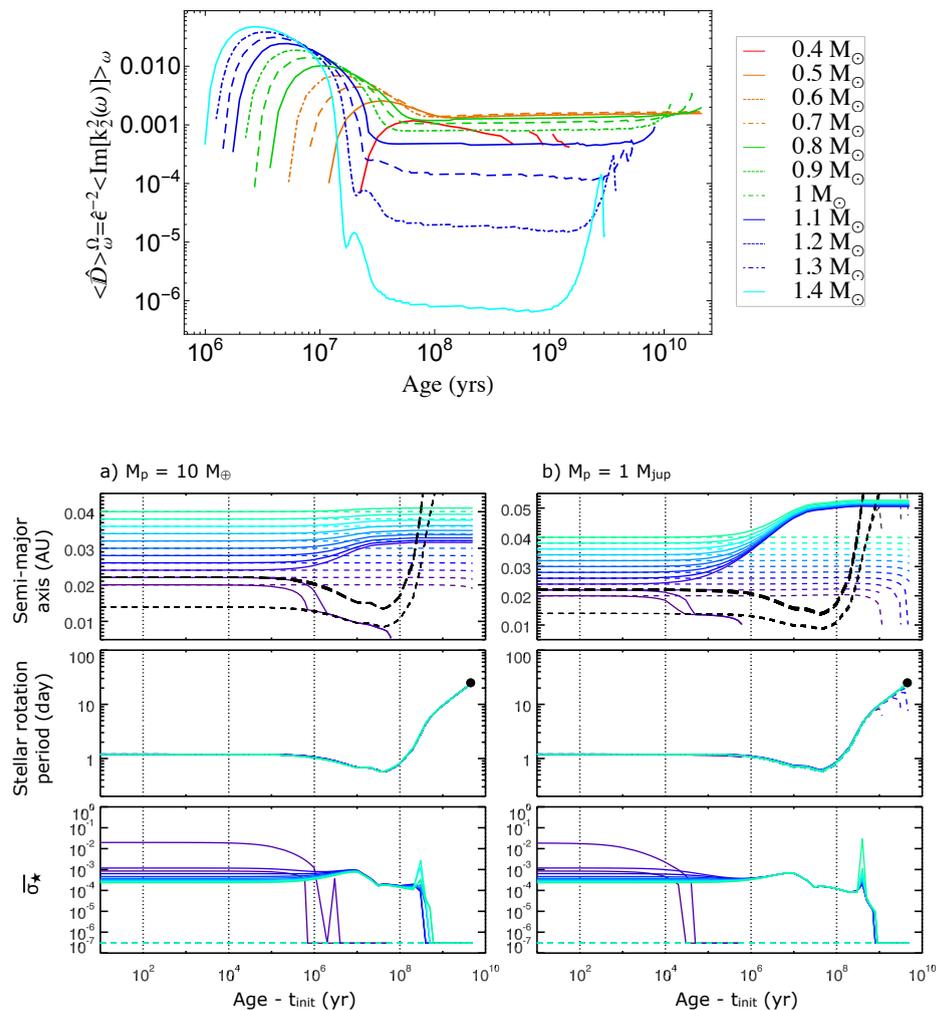


FIGURE 2.11: **Haut** : Dissipation de marée (moyennée sur les fréquences et à rotation fixée) induite par les ondes inertielles dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse au cours de leur évolution. Crédit : [Mathis \(2015\)](#). **Bas** : Simulation de l'évolution d'un système constitué d'une planète de  $10M_{\oplus}$  (à gauche) ou  $1 M_J$  (à droite) en orbite autour d'une étoile de  $1 M_{\odot}$  qui évolue au cours du temps, en incluant la dissipation de marée (qui évolue également) dans l'étoile. Dans chaque panneau (demi-grand axe, période de rotation de l'étoile et dissipation dans l'étoile), les différentes courbes correspondent à différentes conditions initiales pour la position de la planète. Crédit : [Bolmont & Mathis \(2016\)](#).

Dans le chapitre suivant, nous nous concentrons sur les écoulements en rotation et plus particulièrement sur les ondes inertielles de marée qui sont au cœur de ce travail de thèse.

# CHAPITRE 3

## ÉCOULEMENTS DANS LES FLUIDES EN ROTATION ET ONDES INERTIELLES

### Sommaire

<b>3.1 Introduction</b>	<b>43</b>
<b>3.2 Notions sur les fluides en rotation</b>	<b>44</b>
3.2.1 Equation de Navier-Stokes, rotation et adimensionnement	44
3.2.2 Écoulement géostrophique et théorème de Taylor-Proudman	47
<b>3.3 Ondes inertielles linéaires en rotation solide dans le cas non-visqueux</b>	<b>48</b>
3.3.1 Propriétés de propagation, relation de dispersion, vitesses de phase et de groupe	48
3.3.2 Equation de Poincaré	49
3.3.3 Méthode des caractéristiques	50
<b>3.4 Modes inertiels propres et rôle de la viscosité</b>	<b>51</b>
3.4.1 Cas de la sphère pleine	52
3.4.2 Cas de la coquille sphérique	52
3.4.3 Latitudes critiques	54
<b>3.5 Calcul numérique spectral d'écoulements en géométrie sphérique</b>	<b>54</b>
<b>3.6 Dissipation par les ondes inertielles de marées dans les zones convectives stellaires et planétaires</b>	<b>57</b>
3.6.1 État de l'art sur la dissipation de marée par les modes inertiels	57
3.6.2 Interaction entre les ondes inertielles, le champ magnétique et d'autres écoulements à grande échelle	59
3.6.3 Compétition avec d'autres processus de dissipation de marée dans les étoiles et les planètes	61

### 3.1 Introduction

Tous les corps célestes (les étoiles, les planètes et leurs satellites naturels, les astéroïdes, etc.) sont en rotation. La Terre effectue ainsi une rotation sur elle-même en un jour tandis que l'on peut observer la rotation (différentielle) du Soleil par le mouvement des taches à sa surface. Il en est évidemment de même pour les autres étoiles et les systèmes planétaires qu'elles abritent. Nous avons vu dans le chapitre 2 que la rotation est susceptible de produire des forces d'inerties (propres au référentiel non-galiléen) capables de modifier la

dynamique des fluides qui composent les étoiles et les planètes, mais celles-ci ont largement été ignorées en premier lieu, ou au mieux prises en compte partiellement dans l'histoire de l'étude des marées en astrophysique. Par conséquent, cette dernière requiert la compréhension des écoulements provoqués par cette rotation, et en particulier ceux des écoulements forcés par la présence d'un compagnon de marée et entretenus par la rotation.

Nous exposons dans ce chapitre les notions essentielles de mécanique des fluides en rotation, en exposant d'abord la forme que prend l'équation de la dynamique en présence de rotation, puis les propriétés principales des écoulements à grande échelle dont elle est à l'origine. Ensuite, nous expliquons comment la rotation peut donner lieu à la génération d'écoulements ondulatoires, les ondes inertielles, dont nous détaillerons les propriétés de propagation dans le cas linéaire, puis nous présentons brièvement la méthode spectrale utilisée dans ce travail pour le calcul numérique de leurs champs de vitesse et de pression et leur dissipation, et nous présentons aussi l'état de l'art de la dissipation par les ondes inertielles. Enfin, nous abordons les questions qui restent ouvertes à ce jour concernant les ondes inertielles de marée : en premier lieu, nous discutons les interactions ou rétroactions possibles entre ces ondes et les écoulements moyens à grande échelle avec lesquels ils coexistent, notamment le profil de rotation différentielle ou la turbulence avant d'aborder la question de la compétition entre la dissipation par les ondes inertielles et celles induites par d'autres mécanismes dissipatifs.

## 3.2 Notions sur les fluides en rotation

Considérons un fluide occupant un conteneur en rotation. La première intuition est de penser que le fluide accompagne le conteneur dans sa rotation comme le ferait un solide, c'est-à-dire qu'il est au repos dans le référentiel tournant avec le conteneur. Cette vision n'est cependant valable qu'en première approximation, car la moindre perturbation à cette rotation solide va être transmise à l'ensemble du fluide par l'action des forces d'inerties dues à la rotation.

### 3.2.1 Equation de Navier-Stokes, rotation et adimensionnement

#### 3.2.1.1 Equation de Navier-Stokes en référentiel inertiel

Dans un souci de simplification, considérons un fluide newtonien, incompressible, de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . On désigne respectivement par  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$  et  $P(\mathbf{r}, t)$  les champs de vitesse et de pression de ce fluide dans un référentiel inertiel, où  $\mathbf{r}$  et  $t$  désignent respectivement le vecteur position et le temps. Leur évolution dans ce référentiel est régie par l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u}_i, \quad (3.1)$$

où l'on néglige la perturbation de gravité créée par les ondes (approximation de Cowling) et la stratification en entropie ( $N^2 = 0$ ), ainsi que par l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0. \quad (3.2)$$

### 3.2.1.2 Référentiel en rotation

Plaçons-nous maintenant dans un référentiel en rotation par rapport au premier référentiel inertiel considéré, avec une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}$  constante dans le temps. On appelle  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse du fluide dans celui-ci, relié à  $\mathbf{u}_i$  par la relation

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (3.3)$$

L'accélération du fluide dans ce référentiel en rotation est reliée à celle dans le référentiel inertiel par la relation

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (3.4)$$

où l'on voit apparaître deux<sup>1</sup> termes d'accélération propres au référentiel non-inertiel :

- le terme  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$  est l'accélération de Coriolis qui est normale au mouvement du fluide dans le référentiel en rotation ;
- le terme  $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$  est l'accélération centrifuge. Il peut se réécrire sous la forme potentielle  $\nabla(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2/2$ .

Ce changement de référentiel provoque donc l'apparition de termes supplémentaires dans l'équation (3.1) qui se réécrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

où l'on a incorporé le terme d'accélération centrifuge dans le gradient de pression en définissant la pression réduite :

$$p = \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2, \quad (3.6)$$

ce qui indique donc que l'accélération centrifuge modifie la pression du fluide mais pas la forme générale des équations, et par conséquent ne modifie pas intrinsèquement la dynamique du fluide en rotation, contrairement à l'accélération de Coriolis qui apparaît explicitement dans (3.5) et qui s'applique au champ de vitesse. Enfin, comme  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 0$ , l'équation de continuité ne change pas de forme dans le référentiel en rotation dans le cas incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.7)$$

---

1. Lorsque l'on considère un référentiel en rotation avec une vitesse angulaire variable dans le temps  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  (ce qui n'est jamais le cas dans ce travail), il apparaît dans (3.4), et donc aussi (3.5), un terme supplémentaire qui s'écrit  $-\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right) \times \mathbf{r}$  connu sous le nom d'accélération de Poincaré.

Si on imagine que le domaine contenant le fluide est borné et que l'on complète les équations (3.5)-(3.7) par des conditions aux limites du type  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (dites de parois rigides) sur la frontière de ce domaine, on constate qu'une solution triviale est  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  avec une pression réduite  $p$  uniforme. Le champ de vitesse correspondant dans le référentiel inertiel est  $\mathbf{u}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  qui correspond donc à un écoulement de rotation solide à la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}$ . Cependant, cette solution n'est pas unique et on observe en général d'autres solutions (possiblement non-stationnaires) de ces équations.

### 3.2.1.3 Adimensionnement

Définissons maintenant des échelles de temps, de longueur et de vitesse caractéristiques qui vont nous permettre d'adimensionner 3.5 et de décrire la dynamique du fluide en rotation grâce à des nombres sans dimensions définis à partir de ces échelles caractéristiques. Dans le cas de notre fluide en rotation dans un conteneur de dimension caractéristique  $L$  tournant à la vitesse angulaire constante  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ , où  $\mathbf{e}_z$  est un vecteur unitaire, on peut utiliser respectivement  $L$ ,  $\Omega^{-1}$  et  $U$  comme échelles caractéristiques de longueur, temps et vitesse. L'échelle de pression associée est alors  $\rho \Omega L U$  (celle pour la pression réduite étant simplement  $\Omega L U$ ).

En conservant les notations  $\mathbf{r}$ ,  $t$ ,  $\mathbf{u}$  (ou  $\mathbf{u}_i$ ) et  $p$  pour désigner respectivement le vecteur position, le temps et les champs de vitesse et de pression réduite adimensionnés, l'équation (3.5) adimensionnée s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{Ro} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p + \text{E} \Delta \mathbf{u}, \quad (3.8)$$

toujours accompagnée de l'équation de continuité (adimensionnée)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.9)$$

L'adimensionnement choisi ici fait apparaître les termes associés à la dérivée temporelle du champ de vitesse, à l'accélération de Coriolis et au gradient de pression (réduite) comme des termes d'ordre  $O(1)$ . Par conséquent, l'ordre de grandeur de chacun des termes restants, à savoir le terme d'advection non-linéaire et celui associé à la force visqueuse, se compare à celui de l'accélération de Coriolis par l'intermédiaire d'un nombre sans dimension. Le premier d'entre eux est le nombre de Rossby, défini par

$$\text{Ro} = \frac{U}{L \Omega}, \quad (3.10)$$

qui mesure donc l'amplitude des termes non-linéaires par rapport à l'accélération de Coriolis. Le deuxième est le nombre d'Ekman, défini par

$$\text{E} = \frac{\nu}{\Omega L^2}, \quad (3.11)$$

qui compare le rapport entre la force visqueuse et l'accélération de Coriolis. Lorsque le nombre d'Ekman et le nombre de Rossby sont faibles devant l'unité, ce qui se produit préférentiellement pour des écoulements lents ( $V \ll \Omega L$ ) et/ou possédant une grande échelle spatiale ( $L \gg U/\Omega$  ou  $L \gg (\nu/\Omega)^{1/2}$ ), on constate que l'écoulement est dominé par la rotation. C'est le cas notamment des vents dans l'atmosphère ainsi que des courants marins sur Terre (e.g. [Pedlosky, 1992](#)).

Puisque nous nous intéressons au cas des écoulements dominés par la rotation, nous nous placerons toujours dans des cas où  $Ro \ll 1$  et  $E \ll 1$ .

### 3.2.2 Écoulement géostrophique et théorème de Taylor-Proudman

Dans ce cadre, l'écoulement géostrophique est par définition un écoulement stationnaire où les effets non-linéaires ainsi que ceux de la viscosité sont négligés. Il s'agit donc de la solution (si elle existe) de l'équation (3.8) dans laquelle on a fixé  $\partial/\partial t = 0$ ,  $Ro = 0$  et  $E = 0$  :

$$2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p. \quad (3.12)$$

Cette équation traduit l'équilibre entre l'accélération de Coriolis et le gradient de pression, connu sous le nom d'équilibre géostrophique. En prenant le rotationnel de (3.12) puis l'équation de continuité (3.7), on obtient alors la relation :

$$(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

qui est équivalente à

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

Autrement dit, l'écoulement géostrophique, lorsqu'il existe (ce n'est pas toujours le cas selon la forme du conteneur et le choix des conditions aux limites, voir [Rieutord \(2015\)](#) pour plus de détails), est un champ de vitesse invariant par rapport à la coordonnée (ici  $z$ ) le long de l'axe de rotation (ici  $\mathbf{e}_z$ ), et qui ne dépend donc que des coordonnées dans le plan normal à cet axe de rotation. Ce résultat constitue le théorème de Taylor-Proudman. On constate donc qu'une perturbation en un point P de l'écoulement géostrophique va se transmettre entièrement à une colonne de fluide parallèle à l'axe de rotation et passant par ce point P, conséquence qui reste généralement vraie en première approximation pour les écoulements stationnaires à grande échelle dominés par la rotation.

### 3.3 Ondes inertielles linéaires en rotation solide dans le cas non-visqueux

Nous avons vu dans la section précédente comment se transforment les équations de la dynamique des fluides dans un référentiel en rotation et présenté les nombres sans dimension caractérisant les écoulements tournants, ainsi qu'un des écoulements stationnaires dominé par la rotation à grande échelle, l'écoulement géostrophique. Cependant, les fluides en rotation peuvent également être le support de mouvements ondulatoires provoqués par cette rotation, appelés ondes inertielles, dont la force de rappel est l'accélération de Coriolis (Cartan, 1922; Greenspan, 1968).

#### 3.3.1 Propriétés de propagation, relation de dispersion, vitesses de phase et de groupe

Étudions donc maintenant le cas d'un écoulement ondulatoire linéaire dominé par la rotation, c'est-à-dire avec  $Ro \ll 1$  et  $E \ll 1$ , mais cette fois non-stationnaire, autrement dit les ondes inertielles. L'équation (3.8) devient donc

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p. \quad (3.15)$$

Cherchons des solutions à (3.15), toujours accompagnée de l'équation de continuité (3.7), sous la forme d'ondes planes avec un vecteur d'onde sans dimension  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_k$  et une pulsation sans dimension  $\omega$  (qu'on confondra avec la fréquence) dans le référentiel en rotation :

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{u}, p)_0 \exp^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (3.16)$$

Commençons par noter que l'équation de continuité indique immédiatement que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.17)$$

c'est-à-dire que les ondes inertielles sont des ondes transversales.

L'équation de la dynamique (3.15) devient alors

$$i\omega \mathbf{u} + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = i\mathbf{k} p. \quad (3.18)$$

En prenant deux fois le rotationnel de cette équation, et à l'aide de l'équation (3.17), on dérive la relation de dispersion des ondes inertielles :

$$\omega = \pm 2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z}{k} = \pm 2 \frac{k_z}{k} = \pm 2 \cos \gamma, \quad (3.19)$$

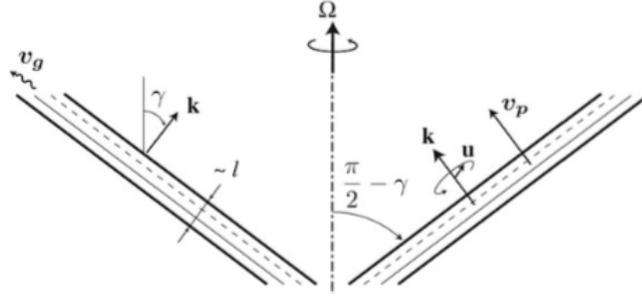


FIGURE 3.1: Schéma illustrant la propagation des ondes inertielles. Crédit : Sauret (2013).

où  $\gamma$  est l'angle entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et l'axe de rotation dirigé par  $\mathbf{e}_z$ . On constate donc que ces ondes sont dispersives puisque la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dépend de la fréquence de l'onde  $\omega$ . De plus, l'intervalle de fréquences possibles pour les ondes inertielles est borné à l'intervalle  $\pm 2$  : si on repasse aux variables dimensionnées, cela signifie que la fréquence d'une onde inertielle dans un fluide en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  est toujours inférieure (en valeur absolue) à la fréquence inertielle  $2\Omega$ .

On peut maintenant écrire la vitesse de phase des ondes inertielles

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k = \pm 2 \frac{k_z}{k^3} \mathbf{k} = \pm 2 \frac{\cos \gamma}{k^2} \mathbf{k} \quad (3.20)$$

et leur vitesse de groupe, qui correspond à la vitesse de propagation de l'énergie, est donnée par

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) = \pm 2 \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{k})}{k^3}. \quad (3.21)$$

On constate donc que l'énergie des ondes inertielles se propage perpendiculairement à la vitesse de phase et donc au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . La figure 3.1 illustre la géométrie relative des différentes quantités intervenant dans la propagation des ondes inertielles. Remarquons que le cas  $\omega = 0$  conduit à retrouver le théorème de Taylor-Proudman dans lequel  $\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ , et  $\mathbf{v}_g = \pm 2 k^{-1} \mathbf{e}_z$  : l'énergie se propage le long de colonnes alignées avec l'axe de rotation.

### 3.3.2 Equation de Poincaré

Une autre façon d'étudier les propriétés de propagation des ondes inertielles dans un fluide en rotation autour d'un axe dirigé suivant  $\mathbf{e}_z$  consiste à exprimer les composantes du champ de vitesse  $\mathbf{u}$  en fonction des dérivées partielles du champ de pression (réduite)  $p$  à l'aide de l'équation (3.15), puis d'utiliser l'équation de continuité (3.7) pour finalement obtenir une équation aux dérivées partielles du second ordre pour  $p$  valable pour toute fréquence  $\omega \neq 0$  :

$$\Delta p - \frac{4}{\omega^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (3.22)$$

où on a supposé que  $u$  et  $p$  oscillaient avec une fréquence  $\omega$ . En coordonnées cartésiennes, cette équation peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2 - 4}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (3.23)$$

ou bien dans un plan méridien en coordonnées cylindriques  $(s, \theta, z)$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \left( \frac{\omega^2 - 4}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (3.24)$$

après avoir éliminé les termes proportionnels aux dérivées d'ordres 0 et 1 en  $p$ , ce qui revient à supposer que l'échelle de longueur de variation de  $p$  (ou autrement dit celle des ondes) est petite.

Les équations (3.23) ou (3.24) n'ont pas de solutions à variables séparables en général, sauf dans quelques cas particuliers où la géométrie du problème le permet (voir la section 3.4 pour plus de détails), si bien que le problème est fondamentalement un problème à deux dimensions. Ceci nous amène donc à chercher des solutions par un moyen autre que la recherche de solutions à variables séparables.

### 3.3.3 Méthode des caractéristiques

Dans ce chapitre,  $\omega$  désigne la fréquence (sans dimension) de l'onde dans le référentiel en rotation. Celle-ci peut être reliée à la fréquence  $\omega_i$  (sans dimension) de l'onde dans le référentiel inertiel par le décalage Doppler décrit par la relation

$$\omega = \omega_i + m \quad (3.25)$$

où  $m$  est le nombre d'onde azimutal. Pour une fréquence  $\omega \neq 0$  dans le référentiel en rotation, le discriminant de l'équation aux dérivées partielles (3.24) s'écrit en tout point d'un plan méridien de coordonnées  $(s, z)$  :

$$\xi(s, z) = \frac{4(4 - \omega^2)}{\omega^2} = \left( \frac{4}{\omega} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 \right). \quad (3.26)$$

On remarque facilement que ce discriminant est constant et ne dépend pas des coordonnées d'espace. De plus, il est strictement positif pour toute fréquence telle que  $|\omega| < 2$ . L'équation aux dérivées partielles (3.24) est de nature hyperbolique si et seulement si  $|\omega| < 2$ , ce qui correspond au cas dans lequel les ondes inertielles peuvent se propager. En revanche, lorsque  $|\omega| > 2$ , elle est de nature elliptique et la propagation des ondes est impossible.

Il est généralement possible de décrire la solution d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique à l'aide de trajectoires appelées caractéristiques le long desquelles cette solution est constante. Vu les résultats ci-dessus, on va donc s'intéresser au cas où  $|\omega| < 2$  dans lequel

(3.24) est hyperbolique et calculer ces trajectoires caractéristiques. Dans un plan méridien, toujours en coordonnées cylindriques, leur pente est donnée par :

$$\frac{dz}{ds} = \pm \frac{\xi(s, z)^{1/2}}{2} \quad (3.27)$$

qui se réécrit sous la forme

$$\frac{dz}{ds} = \pm \frac{2}{|\omega|} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \pm |\tan \gamma|. \quad (3.28)$$

Dans le cas de la rotation solide qui nous intéresse ici, les trajectoires caractéristiques de l'équation de Poincaré pour les ondes inertielles sont des droites qui forment un angle  $\gamma = \arccos(\omega/2)$  avec le plan  $z = 0$ , c'est-à-dire un angle  $\frac{\pi}{2} - \gamma = \arcsin(\omega/2)$  avec l'axe de rotation dirigé par  $\mathbf{e}_z$  : il s'agit du même angle que celui formé par la vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g$  et  $\mathbf{e}_z$ . Par conséquent, la direction des caractéristiques indique celle de la propagation de l'énergie (voir figure 3.1).

### 3.4 Modes inertiels propres et rôle de la viscosité

Dans le cas où le fluide en rotation occupe un domaine borné, les ondes inertielles subissent des réflexions et peuvent se combiner entre elles pour former des modes propres, appelés modes inertiels, à certaines fréquences  $\omega$  données. Un mode inertiel n'est donc pas une simple onde progressive mais un champ de vitesse périodique qui est fonction des coordonnées d'espace, et qui doit satisfaire un ensemble de conditions aux limites. Les propriétés de ces modes sont en partie déterminées par la dynamique des trajectoires caractéristiques dans le conteneur considéré, laquelle dépend à la fois de la forme de ce dernier et de l'angle de propagation (lié à la fréquence  $\omega$ ).

En revanche, nous avons vu que la perturbation de pression  $p$  dans le cas non-visqueux doit satisfaire l'équation de Poincaré qui est hyperbolique dans l'intervalle  $|\omega| < 2$ . Comme  $p$  doit aussi satisfaire des conditions aux limites (liées à celles sur le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ ), le problème des oscillations inertielles d'un fluide en rotation constitue donc un problème mathématiquement mal posé qui peut ne pas avoir de solution continue et mener à l'apparition de singularités (Rieutord, 2008; Stewartson & Rickard, 1969). Autrement dit, dans la plupart des conteneurs, il n'existe tout simplement pas de modes inertiels propres réguliers pour un fluide homogène et non-visqueux. Certains conteneurs en possèdent cependant, car il est possible d'y procéder à une séparation des variables dans les géométries concernées.

### 3.4.1 Cas de la sphère pleine

Des solutions analytiques à variables séparées ont par exemple été calculées par Thomson (1880) pour le cylindre, et également pour la sphère et l'ellipsoïde de révolution (pleins) par Bryan (1889) (voir aussi Zhang et al., 2004), qui a trouvé des modes inertiels non-visqueux dont les fréquences propres sont denses dans  $|\omega| < 2$ . Toujours dans le cas de la sphère pleine, les trajectoires caractéristiques suivent des orbites périodiques (neutres) pour toutes les fréquences  $\omega$  telles que  $\gamma/\pi = \arccos(\omega/2)/\pi$  est rationnel, ensemble qui est dense dans  $|\omega| < 2$ . En revanche, lorsque  $\gamma/\pi$  est irrationnel, les trajectoires caractéristiques ont un comportement ergodique, c'est-à-dire qu'elles « remplissent » entièrement le domaine de propagation (orbite quasi-périodique) sans jamais converger vers un point d'arrêt ou un cycle limite (voir la figure 3.2).

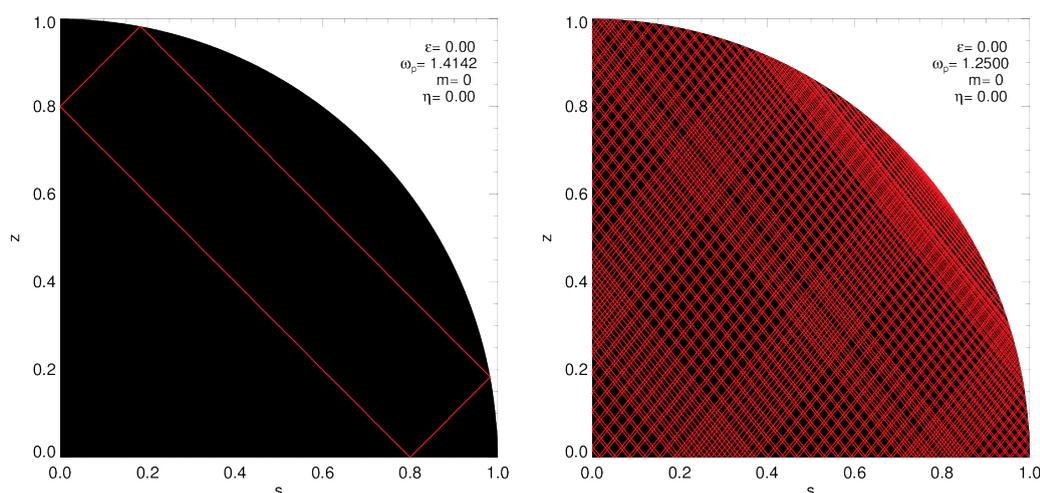


FIGURE 3.2: Exemple de trajectoires caractéristiques dans le cas d'une sphère pleine. **Gauche** : orbite strictement périodique pour la fréquence  $\omega = \sqrt{2}$  telle que  $\gamma = \pi/4$ . **Droite** : orbite quasi-périodique pour la fréquence  $\omega = 1.25$ .

### 3.4.2 Cas de la coquille sphérique

Le cas des modes inertiels dans une coquille sphérique, particulièrement étudié dans les dernières décennies (Rieutord & Valdettaro, 1997; Rieutord et al., 2000, 2001; Tilgner, 1999) du fait de leur intérêt astrophysique (e.g. enveloppe convective des étoiles de faible masse ( $0.35 M_{\odot} \leq M \leq 1.4 M_{\odot}$ ) et des planètes géantes, noyau liquide externe de la Terre, etc.) est en revanche plus complexe, en particulier car les trajectoires caractéristiques subissent des réflexions supplémentaires sur la sphère interne. Ceci mène à l'apparition de cycles limites appelés attracteurs de caractéristiques (Maas & Lam, 1995; Rieutord et al., 2001, voir aussi la figure 3.3) dans certains intervalles de fréquences, lesquels dépendent du rapport entre les rayons des sphères interne et externe, aussi appelé rapport d'aspect.

L'existence d'un ou plusieurs cycles attracteurs pour un ensemble de paramètres donnés peut être examinée par le calcul du taux de convergence exponentiel de deux caractéristiques proches après de multiples réflexions sur les frontières du domaine. Ce taux de convergence est quantifié par l'exposant de Lyapunov  $\Lambda$  (voir [Rieutord et al., 2001](#); [Baruteau & Rieutord, 2013](#); [Guenel et al., 2016](#), pour plus de détails) qui peut être défini par

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{dx_{k+1}}{dx_k} \right|, \quad (3.29)$$

où  $dx_k$  est la séparation entre deux caractéristiques après  $k$  réflexions. Dans notre cas, cette quantité peut être évaluée en utilisant les réflexions sur le plan équatorial ( $ds_k$ ), l'axe de rotation ( $dz_k$ ), ou bien sur les sphères interne et externe de la coquille sphérique (respectivement  $d\theta_k^{\text{int}}$  et  $d\theta_k^{\text{ext}}$ ).  $\Lambda \approx 0$  correspond au cas où les trajectoires caractéristiques « remplissent » le domaine (orbite quasi-périodique), tandis que  $\Lambda < 0$  identifie l'existence d'un attracteur (voir la figure 3.4).

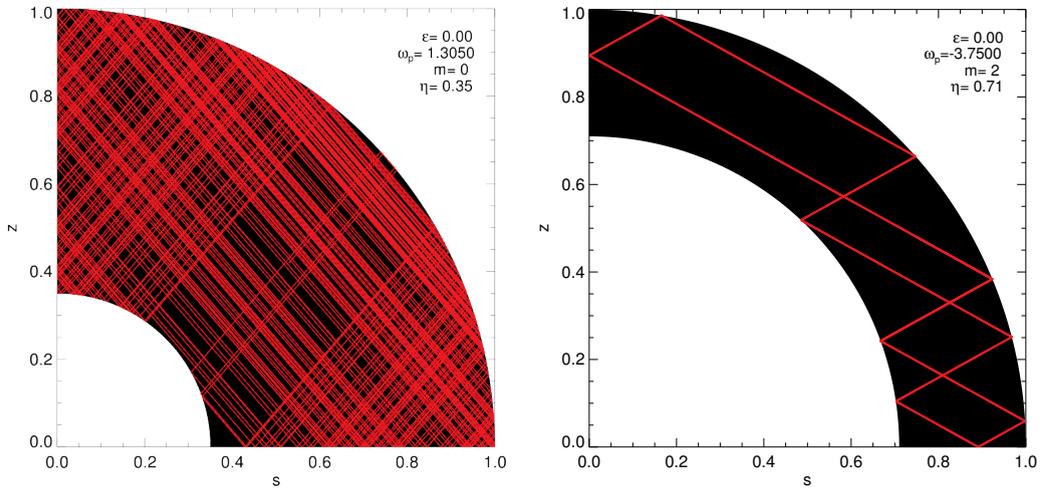


FIGURE 3.3: Exemple de trajectoires caractéristiques dans le cas d'une coquille sphérique. **Gauche** : orbite quasi périodique dans une coquille sphérique de rapport d'aspect  $\eta = 0.35$  (cas du cœur terrestre ou d'une étoile de pré-séquence principale). **Droite** : cycle limite (attracteur) de caractéristiques dans une coquille sphérique de rapport d'aspect solaire  $\eta = 0.71$ .

De manière générale, dans une coquille sphérique en l'absence de viscosité, il n'existe donc pas de modes inertiels réguliers dont le spectre de fréquences est dense dans  $|\omega| < 2$ . Néanmoins, il existe quelques modes propres toroïdaux (e.g. [Rieutord et al., 2001](#)) dont la fréquence (sans dimension) dans le référentiel en rotation s'écrit  $\omega = 2/(m + 1)$ . L'introduction de la viscosité ( $E \neq 0$ ) peut donner lieu à des modes dont l'énergie cinétique est localisée dans des couches de cisaillement situées autour des cycles attracteurs mentionnés précédemment ([Stewartson, 1972](#); [Rieutord & Valdettaro, 1997](#)). Ces modes peuvent donc engendrer une forte dissipation visqueuse s'ils sont excités par un mécanisme donné, comme dans le cas nous intéressant ici des marées dans l'enveloppe convective des planètes

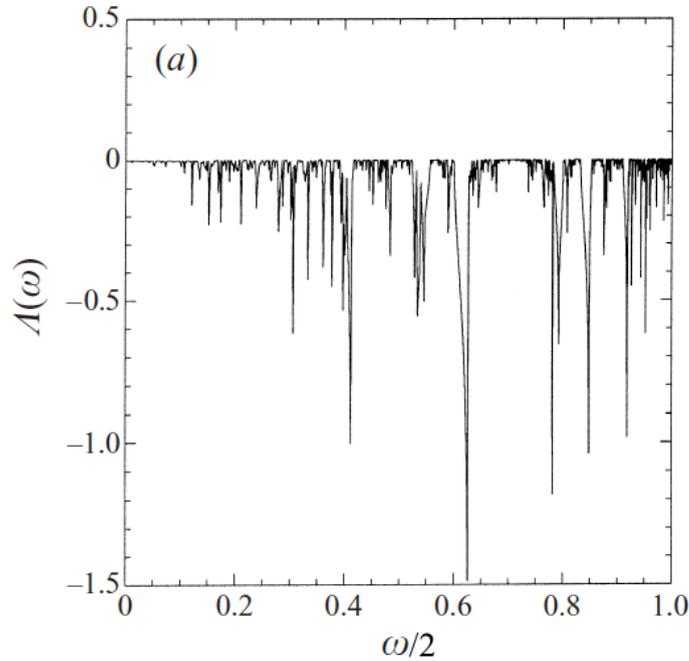


FIGURE 3.4: Exposant de Lyapunov en fonction de la (demi-)fréquence  $\omega/2$  (dans le référentiel en rotation) dans une coquille sphérique de rapport d'aspect  $\eta = 0.35$ . Crédit : Rieutord et al. (2000).

géantes (avec un cœur solide ou dense) et des étoiles de faible masse avec un cœur radiatif ( $M > 0.35 M_{\odot}$ ).

### 3.4.3 Latitudes critiques

Une singularité de nature différente peut également exister lorsqu'on recherche des modes inertiels, y compris en présence de viscosité. En effet, lorsque  $E \neq 0$ , des couches d'Ekman apparaissent près des frontières du domaine. Celles-ci créent en général un écoulement local secondaire d'épaisseur  $\sim E^{1/2}$ , qui peut devenir singulier en certains points de la frontière du conteneur et mener à l'émission d'une couche de cisaillement (Hollerbach & Kerswell, 1995; Kerswell, 1995). Dans le cas de la coquille sphérique, cela se produit lorsque les trajectoires caractéristiques sont tangentes aux sphères interne et externe, c'est-à-dire à la latitude critique  $\gamma_c = \arccos(\omega/2)$  (voir la figure 3.5). Nous rencontrerons ce cas de figure à de nombreuses reprises dans les résultats de nos simulations numériques présentés dans les chapitres 5 et 6.

## 3.5 Calcul numérique spectral d'écoulements en géométrie sphérique

Dans la plupart des géométries, il n'existe pas de modes inertiels propres réguliers dans le cas adiabatique ( $E = 0$ ). En effet, le problème aux valeurs propres correspondant est

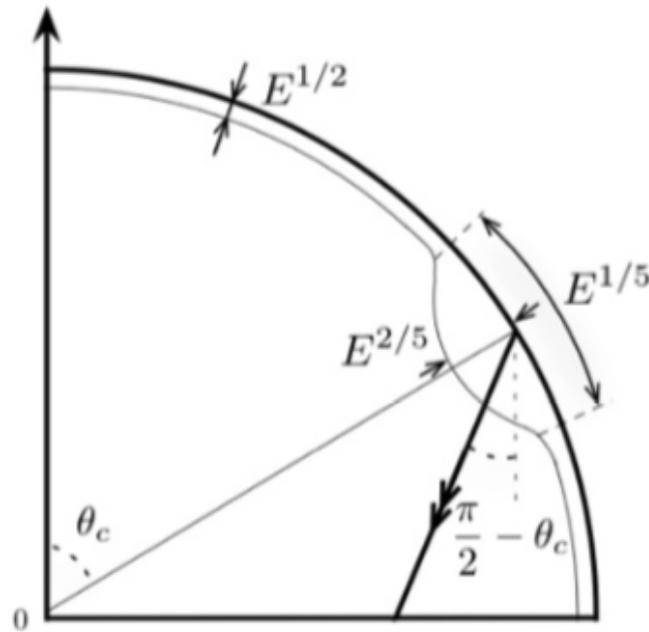


FIGURE 3.5: Schéma illustrant la singularité de latitude critique (tiré de [Sauret, 2013](#)).

régi par une équation aux dérivées partielles hyperbolique, et il constitue un problème de Cauchy mal posé lorsqu'on impose un ensemble de conditions aux limites sur les frontières d'un conteneur fermé ([Rieutord, 2008](#)). Seule l'inclusion d'un phénomène comme la diffusion visqueuse permet de transformer ce problème en un problème bien posé possédant une solution régulière. Dans ce cas, malheureusement, on ne sait pas en général calculer analytiquement les modes inertiels propres sauf localement au voisinage de points particuliers ou dans des cas simples ([Rieutord et al., 2001](#)). Par conséquent, il est nécessaire de calculer numériquement une approximation de ces derniers.

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode numérique utilisée dans les calculs d'écoulements d'ondes inertielles en géométrie sphérique présentés notamment dans les chapitres 5 et 6. Le principe est d'utiliser la décomposition unique des inconnues  $\mathbf{u}$  et  $p$  (champs de vitesse et de pression réduite de l'écoulement), toutes supposées périodiques en temps avec une fréquence  $\omega$ , et en azimut avec et un nombre azimutal  $m$  fixé, sur les harmoniques sphériques vectorielles et scalaires respectivement (voir annexe A et [Rieutord, 1987](#)).

Si  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  désigne l'harmonique sphérique de degré  $l$  et d'ordre azimutal  $m$  normalisée sur la sphère unité (voir l'équation (A.1)), alors on décompose  $\mathbf{u}$  et  $p$  respectivement comme une série infinie d'harmoniques sphériques multipliées par des fonctions de la coordonnée

radiale (sphérique)  $r$ , sous la forme :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ u_m^l(r) \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) + v_m^l(r) \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + w_m^l(r) \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}, \quad (3.30)$$

$$p = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ p_m^l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \right\}, \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{R}_l^m = Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{S}_l^m = \nabla_S Y_l^m$ , et  $\mathbf{T}_l^m = \nabla_S \times \mathbf{R}_l^m$ , avec  $\nabla_S = \mathbf{e}_\theta \partial_\theta + \mathbf{e}_\varphi (\sin \theta)^{-1} \partial_\varphi$  le gradient horizontal sur la sphère unité.

L'étape suivante consiste à introduire ces décompositions spectrales dans les équations linéaires qui gouvernent la dynamique du fluide en rotation, c'est-à-dire l'équation du moment (3.8) dans le cas où  $\text{Ro} = 0$ , accompagnée de l'équation de continuité (3.9) et de conditions aux limites. De cette façon, on peut obtenir une infinité d'équations différentielles linéaires couplées (du fait de l'accélération de Coriolis qui couple le mode  $(l, m)$  avec les modes  $(l-1, m)$  et  $(l+1, m)$ ) portant sur les fonctions radiales  $u_m^l(r)$ ,  $v_m^l(r)$ ,  $w_m^l(r)$  et  $p_m^l(r)$  (e.g. équations (2.2) de [Rieutord & Valdettaro, 1997](#)). Ce système d'équations constitue un problème aux valeurs propres de la forme

$$L_A X = \omega L_B X \quad (3.32)$$

où  $L_A$  et  $L_B$  sont deux opérateurs différentiels linéaires complexes, et  $X$  est le vecteur contenant les valeurs de toutes les fonctions  $u_m^l(r)$ ,  $v_m^l(r)$ ,  $w_m^l(r)$  et  $p_m^l(r)$ .

Pour résoudre numériquement ce problème aux valeurs propres, on discrétise les fonctions radiales  $u_m^l(r)$ ,  $v_m^l(r)$ ,  $w_m^l(r)$  et  $p_m^l(r)$  en utilisant les points de colocation de Gauss-Lobatto associés aux polynômes de Tchebychev (voir la section A.2 de l'annexe A). Ce système infini d'équations différentielles discrétisées est ensuite tronqué à l'ordre  $L$  pour la base des harmoniques sphériques et à l'ordre  $N_r$  pour la base des polynômes de Tchebychev. Ceci donne lieu à un problème linéaire aux valeurs propres dont la matrice a une taille proportionnelle à  $N_r \times L$  dont 3 diagonales par blocs seulement comportent des coefficients non-nuls.

Pour calculer numériquement des couples de valeurs (ou fréquences) propres et vecteurs propres associés (autrement dit les valeurs prises par  $u_m^l(r)$ ,  $v_m^l(r)$ ,  $w_m^l(r)$  et  $p_m^l(r)$  en chaque point de colocation radial, et ce pour tout  $l \geq m$ ), nous utiliserons un solveur linéaire basé sur l'algorithme itératif d'Arnoldi-Tchebychev incomplet (voir [Valdettaro et al., 2007](#)), développé par M. Rieutord et L. Valdettaro et utilisé pour divers problèmes linéaires de dynamique des fluides en astrophysique, notamment dans [Rieutord & Valdettaro \(1997\)](#); [Dintrans et al. \(1999\)](#); [Rieutord & Valdettaro \(2010\)](#); [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#). Un exemple de mode inertiel propre en rotation solide que j'ai calculé (pour un rapport d'aspect  $\eta = 0.35$  et un nombre d'Ekman  $E = 10^{-7}$ ) est représenté en figure 3.6. Nous y montrons aussi les spectres permettant de vérifier la convergence spectrale de la solution numérique.

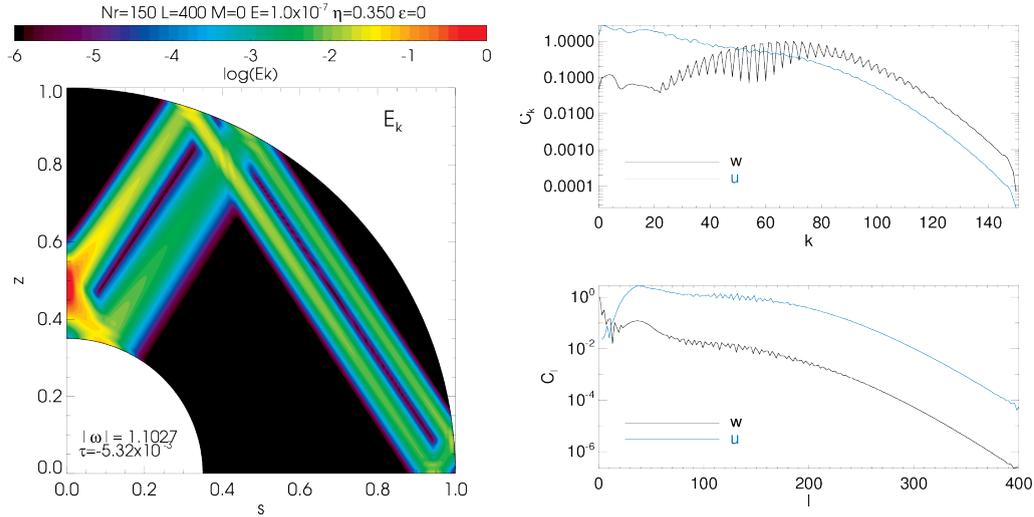


FIGURE 3.6: **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode inertiel axisymétrique ( $m = 0$ ) en rotation solide obtenu pour un rapport d'aspect  $\eta = 0.35$  et un nombre d'Ekman  $E = 10^{-7}$ .  $|\omega|$  est la valeur absolue de la fréquence propre obtenue et  $\tau$  son taux d'amortissement. La résolution utilisée est  $N_r \times L = 150 \times 400$ . **Droite** : Coefficients spectraux des composantes  $u$  et  $w$  du champ de vitesse. Le panneau supérieur montre la convergence numérique par rapport à la base des polynômes de Tchebychev ( $k < N_r$ ) et le panneau inférieur pour celle des harmoniques sphériques ( $l < L$ ).

### 3.6 Dissipation par les ondes inertielles de marées dans les zones convectives stellaires et planétaires

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, la dissipation de marée dans les systèmes planétaires est capable de modifier leur architecture orbitale, sur le long terme. C'est pourquoi il est important de comprendre l'étude des marées du point de vue de la mécanique des fluides, car elle peut produire des estimations des valeurs des facteurs de qualité  $Q_l^m(\omega)$  (ou bien de manière équivalente, celles de  $\text{Im}[k_l^m(\omega)]$ ) qui sont extrêmement importantes dans les équations dynamiques (2.21) à (2.25).

#### 3.6.1 État de l'art sur la dissipation de marée par les modes inertiels

Les premières études de la dissipation induite par la marée dynamique dans les zones convectives, autrement dit les ondes inertielles, sont relativement récentes. Dans le cas où les modes inertiels peuvent se propager dans une sphère pleine par exemple, Wu (2005a,b) ont généralisé le calcul des modes calculés par Bryan (1889) au cas d'un fluide de densité inhomogène pour l'étude de la dissipation de marée par les modes inertiels dans Jupiter ou des planètes géantes semblables (voir la figure 3.7). La conclusion est que le couplage entre ces modes propres et le potentiel de marée existe mais est assez peu efficace. Ces modes forcés restent susceptibles, via un mécanisme dissipatif de type viscosité turbulente (voir la section 2.2.2.2 et le chapitre 7), de produire une dissipation d'énergie qui varie sur plusieurs ordres de grandeurs en fonction de la fréquence  $\omega$  dans l'intervalle  $|\omega| < 2$ . La

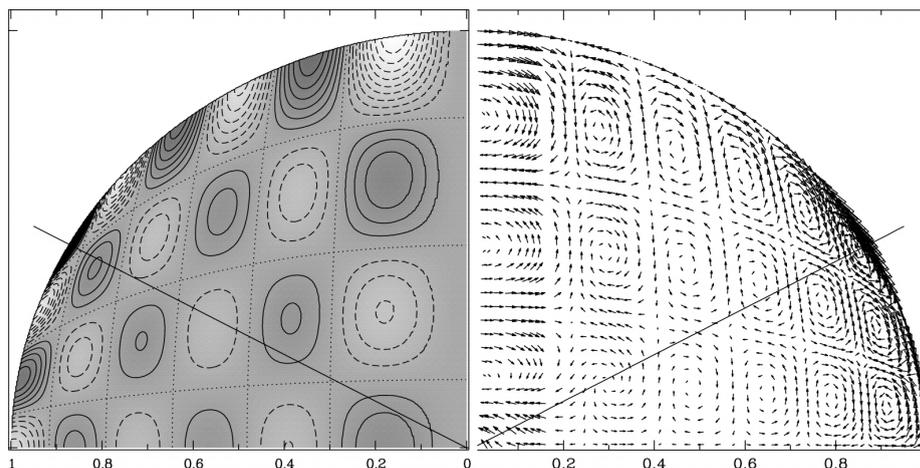


FIGURE 3.7: Coupe méridienne des perturbations de densité (gauche) et de champ de vitesse (droite) associées à un mode inertiel régulier dans une sphère pleine. On remarque l'augmentation de l'amplitude des perturbations à l'approche de la singularité associée à la latitude critique sur la sphère externe, dont l'emplacement est marqué par les lignes droites. Crédit : [Wu \(2005a\)](#).

dissipation moyenne sur cet intervalle de fréquences est bien supérieure à celle obtenue par l'action d'une viscosité turbulente sur la marée d'équilibre seulement. Ces résultats restent approximativement valables suite à l'introduction d'un cœur solide de petite taille au centre de la sphère, car les modes propres gardent une forme globalement similaire.

Mentionnons également les travaux de [Braviner & Ogilvie \(2014, 2015\)](#) sur les modes d'oscillations (inertiels et de gravité de surface pour les ordres  $l \leq 4$ ) dans un sphéroïde de Maclaurin, leur excitation par un forçage de marée et la dissipation associée. L'originalité de ces travaux réside notamment dans la prise en compte des ordres  $l = 3$  et  $l = 4$  du forçage de marée pour des orbites très serrées.

Pour ce qui est du cas des coquilles sphériques avec un cœur de taille substantielle, [Ogilvie & Lin \(2004\)](#) ont étudié la réponse fluide d'une planète géante polytropicque en rotation (*i.e.* avec une fonction d'état reliant la pression  $P$  et la densité  $\rho$  du type  $P = K\rho^\Gamma$ , où  $K$  et  $\Gamma$  sont respectivement la constante polytropicque et l'exposant adiabatique), munie d'un cœur solide, en incluant les modes inertiels dans les zones convectives et les modes gravito-inertiels dans les éventuelles zones stablement stratifiées de surface. [Ogilvie & Lin \(2007\)](#) ont adopté une démarche similaire pour l'étude de la dissipation de marée par les modes inertiels dans les enveloppes convectives des étoiles de type solaire et les modes gravito-inertiels dans le cœur radiatif. Des travaux complémentaires comme [Ogilvie \(2009\)](#) ainsi que [Rieutord & Valdettaro \(2010\)](#) ont étudié des configurations similaires. Ces études, en bon accord les unes avec les autres, démontrent que la dissipation d'énergie est grandement amplifiée par la prise en compte de l'accélération de Coriolis, c'est-à-dire de la rotation et des ondes inertielles, dans l'intervalle de fréquences  $|\omega| < 2$ . De plus, la dissipation engendrée par les ondes inertielles dépend de la taille du cœur à la puissance 5.

Comme dans le cas de la sphère pleine, cette dissipation montre un caractère résonant : elle est susceptible de varier sur plusieurs ordres de grandeurs en fonction de la fréquence de marée. Ce caractère résonant est plus prononcé au fur et à mesure que le nombre d'Ekman  $E$  décroît. L'origine sous-jacente de ce phénomène est que la propagation des ondes inertielles dans une coquille sphérique est très sensible à l'inclinaison des trajectoires caractéristiques (et donc à la fréquence), avec l'apparition de cycles attracteurs de caractéristiques dans certaines bandes de fréquence (voir les figures 3.3 et 3.6). Les couches de cisaillement localisées autour de ces attracteurs semblent alors être une source efficace pour la dissipation d'énergie par la viscosité turbulente, mais le comportement asymptotique à très faible nombre d'Ekman reste mal compris. Cependant, [Ogilvie \(2005\)](#) a montré que la dissipation devient indépendante de la valeur de  $E$ , et même du mécanisme de dissipation adopté si celui-ci est suffisamment petit. En revanche, ce phénomène rentre en compétition avec les couches de cisaillement émises à la singularité située à la latitude critique ([Goodman & Lackner, 2009](#); [Rieutord & Valdettaro, 2010](#)).

Enfin, [Ogilvie \(2013\)](#) a montré que sous certaines hypothèses, une moyenne pondérée (en fréquence  $\omega$ ) de la quantité  $\text{Im}[k_l^m(\omega)]$  associée aux ondes inertielles devient également indépendante de  $E$ , et même du mécanisme de dissipation pris en compte dans le modèle. Cependant, elle dépend encore de la rotation, du rapport d'aspect de la coquille sphérique, ainsi que du rapport de densité entre le cœur (fluide ou solide) et l'enveloppe convective où sont excités les modes inertiels. Cette approche moyennée en fréquence permet de prendre en compte de manière globale l'influence de la structure interne d'un corps astrophysique sur sa réponse de marée (voir chapitre 4 et [Goodman & Lackner, 2009](#); [Guenel et al., 2014](#); [Mathis, 2015](#)) et donc aussi par la suite dans l'évolution orbitale d'un système planétaire ([Bolmont & Mathis, 2016](#)).

### 3.6.2 Interaction entre les ondes inertielles, le champ magnétique et d'autres écoulements à grande échelle

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, la présence de champ magnétique dans les étoiles ou les planètes est susceptible de modifier significativement la nature et donc les propriétés de propagation des ondes de marées, ainsi que celles la dissipation associée, en particulier du fait de la dissipation ohmique supplémentaire ([Barker & Lithwick, 2014](#); [Wei, 2016](#)). Cependant, nous avons choisi dans ce travail d'ignorer ce phénomène et de nous concentrer plutôt sur les interactions hydrodynamiques entre les ondes inertielles et d'autres écoulements à grande échelle existant dans les zones convectives stellaires ou planétaires, qui de manière générale reste une question largement ouverte.

Une caractéristique commune à la plupart des travaux traitant des ondes inertielles dans les planètes ou dans les étoiles (voir références ci-dessus) est la suivante : la rotation d'ensemble du corps considérée, qui est nécessaire à l'existence d'ondes ou de modes inertiels, correspond le plus souvent à une rotation solide. Dans ce cas, comme nous l'avons vu, les

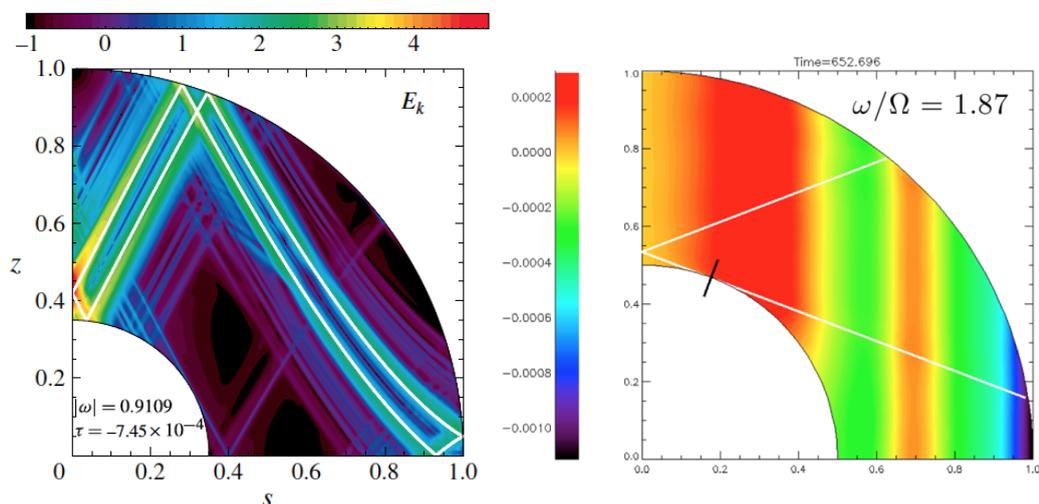


FIGURE 3.8: **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode inertiel propre en présence de rotation différentielle cylindrique. Crédit : Baruteau & Rieutord (2013). **Droite** : Génération de rotation différentielle cylindrique par interactions non-linéaires entre ondes inertielles de marées. Crédit : Favier et al. (2014).

ondes inertielles linéaires possèdent des propriétés de propagation assez particulières mais qui restent assez facilement descriptibles. Pourtant, il est connu que la rotation des corps fluides comme le Soleil (Schou et al., 1998; Thompson et al., 2003; García et al., 2004, 2007) et les étoiles en général (e.g. Deheuvels et al., 2012), ou encore les planètes géantes Jupiter ou Saturne (Simon & Beebe, 1996; Atkinson et al., 1996) est une rotation différentielle : la vitesse angulaire du mouvement de rotation d'ensemble n'est pas uniforme mais varie en fonction des coordonnées spatiales dans un plan méridien. Même s'il est plus difficile d'observer ce phénomène dans les systèmes extrasolaires, il est très probable que les régions fluides des étoiles (voir les sections correspondantes de l'introduction et du chapitre 5) et des planètes y sont également en rotation différentielle. Il est donc nécessaire de prendre en compte la rotation différentielle pour étudier les propriétés des ondes inertielles (Baruteau & Rieutord, 2013), mais aussi de comprendre comment l'existence de ces dernières peut rétroagir sur la première via des mécanismes non-linéaires (voir Tilgner, 2007; Morize et al., 2010; Favier et al., 2014, et la figure 3.8).

Les travaux où une rotation différentielle d'ensemble est prise en compte dans les équations décrivant les ondes de marées sont rares (e.g. Zahn, 1966a; Ogilvie & Lin, 2004; Baruteau & Rieutord, 2013), et très souvent seul le cas particulier de la rotation solide ou *shellular* (dépendante de la coordonnée radiale  $r$  seulement) y a fait l'objet d'une étude quantitative approfondie. En effet, il n'existe plus de référentiel en rotation privilégié en présence de rotation différentielle, et les équations de la dynamique des fluides ne sont pas simplifiées par l'étude dans un référentiel en rotation à la vitesse angulaire moyenne du corps, ce qui était le cas en rotation solide. Une première description des propriétés des modes propres inertielles dans une coquille sphérique en rotation différentielle a été récemment menée par

Baruteau & Rieutord (2013) (voir la figure 3.8) dans les cas des rotations différentielles cylindrique et *shellular*, et nous étendrons cette étude dans les chapitre 5 et 6.

Une seconde question ouverte est celle de l'interaction entre les ondes inertielles et les mouvements convectifs turbulents, dont nous avons déjà parlé au chapitre 2, et dont l'action peut sous certaines hypothèses se résumer à un phénomène de diffusion visqueuse associée à un coefficient de viscosité turbulente. Cependant, les prescriptions pour la viscosité turbulente utilisent le plus souvent les propriétés de la convection sans rotation, alors que cette dernière est susceptible de les modifier sensiblement (Barker et al., 2014; Mathis et al., 2016). Nous discuterons ce problème plus en détail dans le chapitre 7.

### 3.6.3 Compétition avec d'autres processus de dissipation de marée dans les étoiles et les planètes

Bien entendu, la dissipation de marée due à l'excitation de modes inertiels dans les zones convectives n'est pas la seule source de dissipation d'énergie induite par la marée dans les étoiles et les planètes. Celle-ci rentre en compétition avec d'autres écoulements ou déformations de marée, dont l'origine physique et le mécanisme de dissipation peuvent être très différents.

On pense bien entendu à la marée d'équilibre fluide et la dissipation qui y est associée. Cependant, les estimations de cette dissipation Zahn (1966b); Remus et al. (2012a) montrent que celle-ci a une dépendance régulière (et non résonante) à la fréquence de marée, avec une valeur moyenne bien inférieure à celle qu'atteint la dissipation associée aux modes inertiels (y compris dans le cas de la sphère pleine, *a fortiori* dans celui de la coquille sphérique). Il semble donc raisonnable de négliger la contribution de la marée d'équilibre à la dissipation de marée dans les zones convectives lorsque la fréquence de marée se situe dans la gamme de fréquences des ondes inertielles (Ogilvie & Lin, 2004; Auclair Desrotour et al., 2015).

En ce qui concerne les étoiles, il est important de comparer à la dissipation associée aux ondes inertielles de marée en zone convective à celle associée aux ondes de gravité de marée (dissipées par la diffusion thermique) en zone radiative (Zahn, 1966c, 1977; Savonije & Papaloizou, 1983, 1984; Terquem et al., 1998; Goodman & Dickson, 1998; Barker & Ogilvie, 2010; Barker, 2011) ou plus rarement gravito-inertielles si l'on prend en compte la rotation (Rocca, 1987, 1989; Ogilvie & Lin, 2007; Mirouh et al., 2016) en zone radiative. Pour les étoiles de masse intermédiaire ou massives ( $M > 2.0 M_{\odot}$ ) possédant un cœur convectif entouré d'une enveloppe radiative, avec une couche convective de surface extrêmement fine, il est probable que la dissipation par les modes de gravité dans l'enveloppe domine celle dans le cœur (cas des ondes inertielles en sphère pleine). Dans le cas des étoiles de type A et F ( $1.2 M_{\odot} < M < 2.0 M_{\odot}$ ) qui possèdent toujours un cœur convectif, une région radiative intermédiaire et une enveloppe convective fine mais non-négligeable, il est probable que la dissipation par les ondes inertielles dans l'enveloppe convective externe soit dominante,

car les ondes de gravité ne peuvent pas être dissipées par *breaking* au centre (Guillot et al., 2014). Enfin, dans le cas des étoiles de type solaire ( $M < 1.2 M_{\odot}$ ), il est possible que les ondes de gravité subissent le phénomène de *breaking* non-linéaire au centre de l'étoile, si bien que la comparaison avec la dissipation dans l'enveloppe convective doit être examinée de manière précise (Ogilvie & Lin, 2007).

Enfin, les planètes géantes pourraient également abriter un cœur solide formé de roches et de glaces enfoui sous la profonde enveloppe convective externe qui est le support d'ondes inertielles. Son existence même dans le cas de Jupiter et Saturne est cependant encore incertaine (Guillot, 1999, 2005; Nettelmann, 2011; Gaulme et al., 2011). Il est probable que la plupart des planètes géantes extrasolaires aient des structures semblables, et donc possèdent potentiellement un cœur rocheux et/ou glacé. Il est donc primordial de comprendre comment la présence de ce cœur peut modifier les propriétés des ondes inertielles de marée dans l'enveloppe, mais aussi comment la déformation de cette région solide, qui n'est pas parfaitement élastique, peut contribuer ou non à la dissipation de marée globale dans les planètes géantes (Dermott, 1979; Remus et al., 2012b; Storch & Lai, 2014). C'est ce dernier point que nous étudierons dans le chapitre 4.

# CHAPITRE 4

## DISSIPATION DE MARÉE DANS LES PLANÈTES GÉANTES : ONDES INERTIELLES ET CŒUR SOLIDE

### Sommaire

<b>4.1 Contexte et motivations</b> . . . . .	<b>63</b>
4.1.1 Scénarios de formation des planètes géantes gazeuses . . . . .	63
4.1.2 Structure interne des planètes géantes gazeuses . . . . .	65
4.1.3 Contraintes observationnelles sur la dissipation de marée dans Jupiter, Saturne et leurs satellites . . . . .	66
<b>4.2 Etude de la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses depuis le cœur jusqu'à la surface</b> . . . . .	<b>70</b>
4.2.1 Modèle de structure interne bi-couche . . . . .	70
4.2.2 Définition et évaluation des réservoirs de dissipation . . . . .	71
4.2.3 Dissipation anélastique dans le cœur rocheux/glacé . . . . .	72
4.2.4 Dissipation par les ondes inertielles dans l'enveloppe convective . . . . .	74
<b>4.3 Comparaison des deux mécanismes de dissipation</b> . . . . .	<b>75</b>
4.3.1 En fonction de la taille du cœur solide . . . . .	76
4.3.2 En fonction de la masse du cœur solide . . . . .	77
<b>4.4 Conclusions et perspectives</b> . . . . .	<b>78</b>

## 4.1 Contexte et motivations

### 4.1.1 Scénarios de formation des planètes géantes gazeuses

#### 4.1.1.1 Scénario par accrétion de cœur

Le scénario de formation le plus communément invoqué pour expliquer la formation des planètes géantes gazeuses est le scénario de type « accrétion de cœur » (Mizuno, 1980; Pollack et al., 1996) qui possède trois phases distinctes (voir la figure 4.1) :

1. D'abord, des particules solides (silicates, métaux, roches ou glaces) contenues dans le disque protoplanétaire entourant une étoile jeune s'agrègent et forment des planétésimaux par collisions successives, dont la masse peut atteindre environ  $10M_{\oplus}$  sur

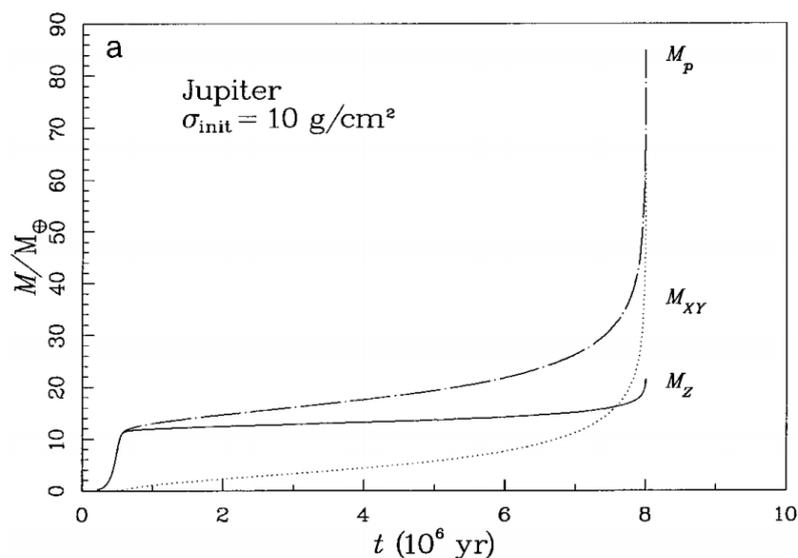


FIGURE 4.1 : Processus de formation d'une planète géante par accrétion de cœur, montrant l'évolution au cours du temps (en millions d'années) des masses (en masses terrestres) du cœur d'éléments lourds ( $M_Z$ ), d'hydrogène et d'hélium ( $M_{XY}$ ) et de la masse totale de la planète ( $M_P$ ).  $\sigma_{\text{init}}$  est la densité de masse surfacique du disque. Crédit : Pollack et al. (1996).

une échelle de temps inférieure ou égale au million d'années. Notons que les planétésimaux les plus massifs se forment préférentiellement au-delà de la ligne des glaces où les molécules légères comme l'eau, l'ammoniac, le méthane, le monoxyde et le dioxyde de carbone se condensent en des grains solides, augmentant ainsi la quantité de matériaux solides localement disponible. Différents travaux ont montré qu'au moment de la formation du système solaire, celle-ci se situait à une distance d'environ 3 unités astronomiques du Soleil (Hayashi, 1981; Podolak & Zucker, 2004; Martin & Livio, 2012).

2. S'il s'est formé un cœur solide suffisamment massif pour retenir une atmosphère gazeuse, et qu'il se situe dans une région du disque où il y a encore du gaz, alors une deuxième phase d'une durée de quelques millions d'années débute (Pollack et al., 1996; Inaba et al., 2003) : le cœur d'éléments lourds et l'enveloppe gazeuse (en équilibre hydrostatique) continuent à accrétier le matériau environnant, jusqu'à obtenir des objets de quelques dizaines de masses terrestres comportant une proportion comparable de matériaux solides et gazeux.
3. Lorsque le cœur atteint une masse critique (environ  $10 M_{\oplus}$ ), l'accrétion s'emballer rapidement et le gaz environnant s'effondre sur l'enveloppe. Ce processus prend fin lorsque l'apport en gaz disparaît : soit parce que le disque protoplanétaire s'est complètement évaporé, soit parce que la trajectoire de la planète dans le disque a formé une bande appauvrie en gaz (Bryden et al., 1999). La planète nouvellement formée rentre alors dans une phase de refroidissement et de contraction quasi-hydrostatique.

Le problème majeur de ce scénario est que la durée nécessaire pour former une planète géante de la masse de Jupiter (ou plus), qui est de l'ordre de quelques millions d'années, est souvent comparable ou supérieure à la durée de vie estimée des disques protoplanétaires (Wolk & Walter, 1996; Bally et al., 1998; Kokubo & Ida, 2002; Inaba et al., 2003).

#### 4.1.1.2 Par instabilité gravitationnelle du disque protoplanétaire

Un scénario de formation alternatif et moins communément admis a d'abord été proposé par Kuiper (1951); Cameron (1978) puis revisité par Laughlin & Bodenheimer (1994); Boss (1997, 1998, 2000) ou encore Mayer et al. (2002, 2004) : un disque protoplanétaire gravitationnellement instable peut se fragmenter localement et mener à la création de structures auto-gravitantes composées de gaz et de grains solides qui vont ensuite se contracter pour devenir des planètes géantes gazeuses. Ce mécanisme agirait sur une échelle de temps bien plus courte (de l'ordre du millier d'années) que celles mises en jeu dans le scénario d'accrétion de cœur. Notons qu'un cœur solide central peut également apparaître dans ce scénario suite à la coagulation et la sédimentation des grains solides avant que la planète ne se contracte et ne se réchauffe (Boss, 1998).

S'il évite l'écueil de la durée de vie éventuellement trop courte du disque protoplanétaire évoquée plus haut, ce scénario n'est pas exempt de défauts. Les principaux d'entre eux sont la survie incertaine des structures auto-gravitantes lorsque le disque évolue, et d'autre part la masse importante requise pour le disque (bien plus grande que la masse minimale admise pour la nébuleuse solaire) (voir Cassen & Moosman, 1981; Laughlin & Bodenheimer, 1994).

#### 4.1.2 Structure interne des planètes géantes gazeuses

Ainsi, en première approximation, les planètes géantes sont constituées d'un cœur d'éléments lourds, mélange de roches et de glaces, entouré d'une profonde enveloppe gazeuse majoritairement composée d'hydrogène et d'hélium. Cependant, les modèles de structure interne pour Jupiter et Saturne, qui sont les planètes géantes gazeuses du système solaire, restent incertains malgré les contraintes observationnelles que l'on peut obtenir comme leur masse totale, leur rayon ou leurs moments gravitationnels ( $J_2$ ,  $J_4$  et  $J_6$ ) qui dépendent du profil de rotation interne (e.g. Helled & Guillot, 2013). La construction de ces modèles repose sur la connaissance des équations d'état des matériaux composant ces planètes ; or, les conditions de température et de pression dans les régions centrales des planètes géantes gazeuses sont très difficilement reproductibles expérimentalement. Les modèles les plus sophistiqués à ce jour sont donc basés sur des simulations numériques d'équations d'état (e.g. Militzer & Hubbard, 2009; Wilson & Militzer, 2012; Wahl et al., 2013; González-Cataldo et al., 2014; Mazevet et al., 2015). Dans tous les cas, la taille de l'éventuel cœur solide reste très incertaine (Nettelmann, 2011).

En ce qui concerne Jupiter, on peut distinguer deux classes principales de modèles :

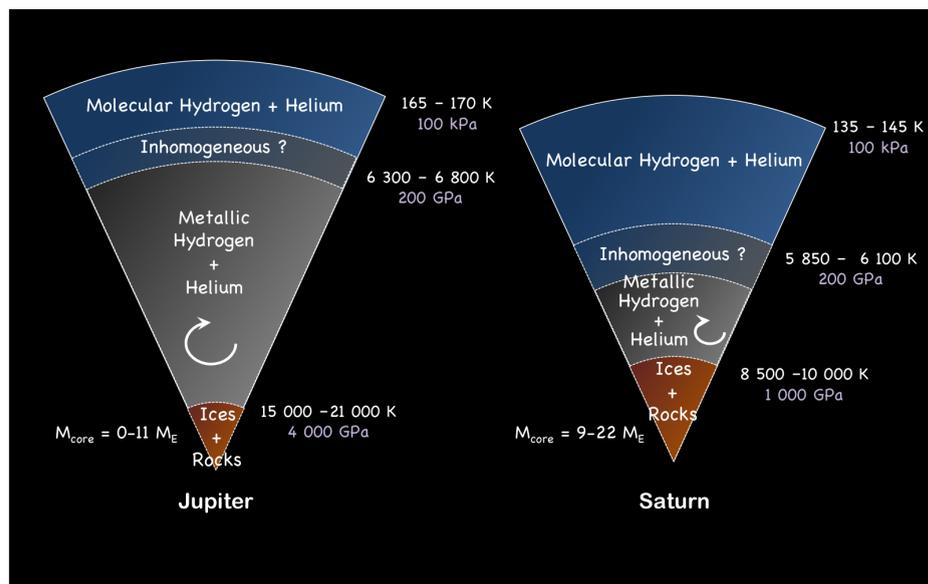


FIGURE 4.2: Représentation schématique de la structure interne de Jupiter et Saturne. Crédit : Guillot (2005).

- les modèles à trois couches (Guillot, 1999; Saumon & Guillot, 2004; Nettelmann et al., 2008), qui supposent que l’enveloppe fluide, majoritairement composée d’hydrogène et d’hélium, est divisée en une couche interne métallique, souvent considérée comme étant stablement stratifiée (Fuller, 2014) surmontée d’une couche externe convective où la matière est à l’état moléculaire et ionisé. Ces modèles prédisent en général que la masse du cœur n’excède pas  $10 M_{\oplus}$  ;
- les modèles à deux couches (Militzer et al., 2008; Militzer & Hubbard, 2009) où l’enveloppe, entièrement convective, n’est composée que d’hydrogène et d’hélium en phase moléculaire et entoure un cœur dense.

Pour Saturne, l’existence de la séparation de phase entre une couche métallique et une couche moléculaire dans l’enveloppe est en revanche plus communément admise, si bien que les modèles de structure interne les plus récents comportent trois couches (Guillot, 2005; Hubbard et al., 2009). Les figures 4.2 et 4.3 résument de manière schématique les structures internes de Jupiter et Saturne.

Quel est le rôle de cette structure interne, différenciée et complexe en comparaison du cas des étoiles, pour la dissipation de marée globale dans les planètes géantes ? Quelles sont les contributions respectives des différentes couches solides et/ou fluides ? Dans cette optique, quelles sont les contraintes observationnelles dont nous disposons ?

#### 4.1.3 Contraintes observationnelles sur la dissipation de marée dans Jupiter, Saturne et leurs satellites

Comme nous l’avons expliqué dans le chapitre 2, les interactions de marées entre les composantes d’un système génèrent des déplacements et des écoulements dont la dissipation

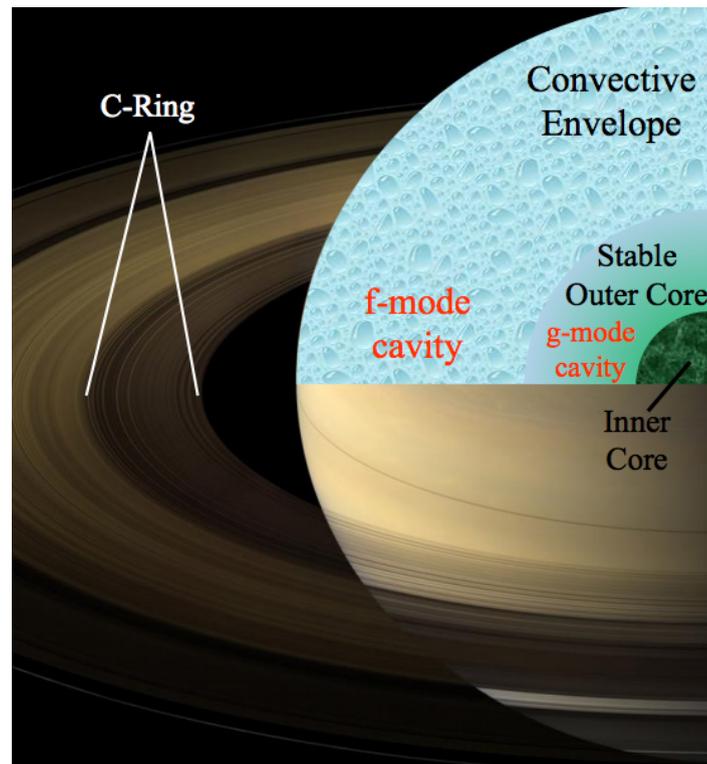


FIGURE 4.3: Représentation schématique de la structure interne de Saturne, avec une mince couche stablement stratifiée autour du cœur dense. Crédit : Fuller (2014).

d'énergie sous forme de chaleur mène à des échanges de moment cinétique entre l'orbite et la rotation des corps impliqués. Cette dissipation de marée peut donc être quantifiée indirectement à l'aide de données observationnelles portant sur l'évolution orbitale et rotationnelle d'un système multiple, à condition que celles-ci soient suffisamment précises et couvrent une durée suffisante et que l'on dispose d'un modèle d'évolution dynamique incluant la dissipation de marée dans chacun des corps du système. C'est l'objet des récents travaux de [Lainey et al. \(2009, 2012, 2015\)](#) qui ont évalué la dissipation de marée dans Jupiter et Saturne à partir de données astrométriques couvrant plus d'un siècle de mesures de positions des satellites galiléens de Jupiter et des principaux satellites de Saturne.

#### 4.1.3.1 Estimations de la dissipation de marée dans Jupiter et Io

Le modèle numérique d'évolution orbitale à N-corps utilisé dans [Lainey et al. \(2009\)](#) inclut des paramètres qui traduisent les effets de la dissipation de marée engendrée dans Jupiter par ses quatre satellites galiléens (Io, Europe, Ganymède et Callisto), ainsi que la dissipation de marée engendrée par Jupiter dans Io. En revanche, les dissipations de marée engendrées par Jupiter dans les trois autres satellites galiléens sont considérées comme inférieures d'au moins un ordre de grandeur et par conséquent négligées, de même que les interactions de marées entre satellites galiléens.

Pour chacune des interactions de marées considérées, le paramètre en question est en fait le nombre sans dimension  $k_2^2/Q_2^2 = |\text{Im}[k_2^2]|$  (qui est lié au formalisme des marées linéaires introduit dans le chapitre 2, voir l'équation (2.19)) considéré ici comme indépendant de la fréquence de marée. La dissipation de marée dans Jupiter est donc attribuée à sa réponse linéaire à la composante  $(l, m) = (2, 2)$  du potentiel de marée créé par chacun de ses quatre satellites galiléens. De même, la dissipation de marée dans Io est attribuée à sa réponse linéaire à cette même composante du potentiel de marée créé par Jupiter. En ajustant ce modèle aux données observationnelles couvrant la période (1891-2007), [Lainey et al. \(2009\)](#) ont pu en déduire les estimations suivantes :

$$\left| \text{Im}[k_2^2] \right|_{\text{Jupiter}} = (1.102 \pm 0.203) \times 10^{-5}, \quad (4.1)$$

$$\left| \text{Im}[k_2^2] \right|_{\text{Io}} = 0.015 \pm 0.003. \quad (4.2)$$

En considérant la valeur  $(k_2^2)_{\text{Jupiter}} = 0.379$  d'après [Gavrilov & Zharkov \(1977\)](#), on obtient alors  $(Q_2^2)_{\text{Jupiter}} = (3.56 \pm 0.56) \times 10^4$  qui est légèrement inférieure à la borne inférieure  $(Q_2^2)_{\text{Jupiter}} \geq 6 \times 10^4$  calculée par [Yoder & Peale \(1981\)](#) et basée sur un scénario de formation des satellites. Ces résultats dérivés de données astrométriques suggèrent donc que la dissipation de marée dans Jupiter et Io est supérieure aux estimations faites dans le passé et qui utilisaient des scénarios d'évolution des systèmes.

#### 4.1.3.2 Dissipation de marée dans Saturne

[Lainey et al. \(2012\)](#) ont procédé de manière similaire à l'aide de données couvrant la période (1886-2009) pour le système composé de Saturne et ses principaux satellites (Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan, Hypériorion et Japet), en considérant la dissipation de marée engendrée par les 8 satellites cités dans Saturne. En considérant toujours que le paramètre sans dimension quantifiant la dissipation de marée dans chaque corps  $k_2^2/Q_2^2 = |\text{Im}[k_2^2]|$  est indépendant de la fréquence de marée, les auteurs ont obtenu :

$$\left| \text{Im}[k_2^2] \right|_{\text{Saturne}} = (2.3 \pm 0.7) \times 10^{-4}, \quad (4.3)$$

soit un facteur de qualité  $(Q_2^2)_{\text{Saturne}} = (1.682 \pm 0.540) \times 10^3$  en utilisant la valeur du nombre de Love  $(k_2^2)_{\text{Saturne}} = 0.341$  obtenue par [Gavrilov & Zharkov \(1977\)](#).

Plus récemment, [Lainey et al. \(2015\)](#) ont révisé cette valeur du nombre de Love en incluant dans le modèle d'évolution orbitale quatre autres lunes co-orbitales de Saturne (Calypso, Télésto, Hélène et Pollux), et ont obtenu l'estimation  $(k_2^2)_{\text{Saturne}} = 0.390 \pm 0.024$ , compatible avec des modèles de structure interne récents ([Helled & Guillot, 2013](#)). De plus, le

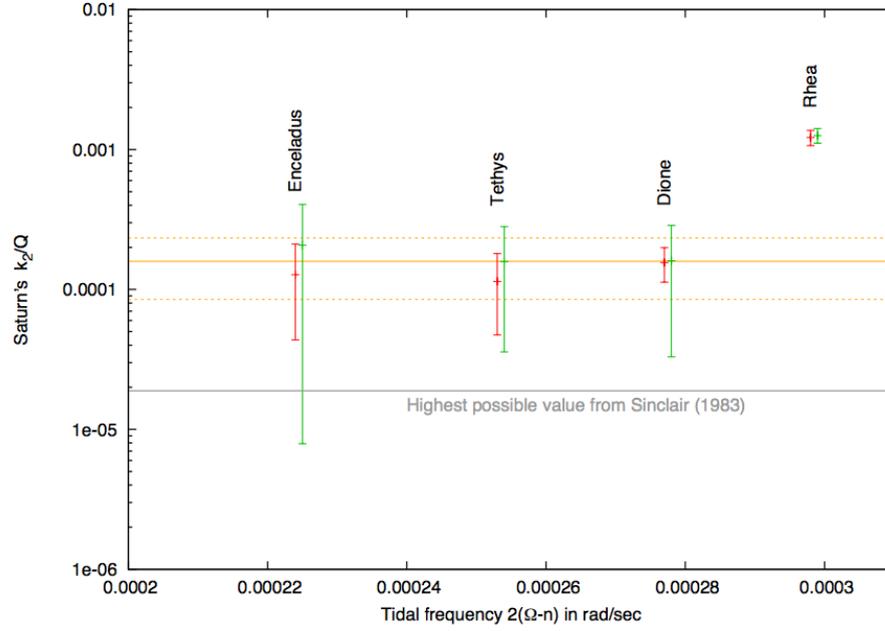


FIGURE 4.4: Variation du rapport  $(k_2^2/Q_2^2)_{\text{Saturne}} = |\text{Im}[k_2^2]|_{\text{Saturne}}$  en fonction de la fréquence de marée  $2(\Omega - n)$ , où  $\Omega$  et  $n$  sont respectivement le taux de rotation de Saturne et le moyen mouvement du satellite considéré. La ligne grise est la borne supérieure issue de [Sinclair \(1983\)](#), les lignes oranges correspondent à l'estimation donnée par l'équation (4.4), et les estimations en rouge et vert sont issues de deux groupes de travail (IMCCE/Observatoire de Paris et JPL/NASA) qui ont ajusté indépendamment leur propre modèle numérique d'évolution d'orbitale sur les données astrométriques. Crédit : [Lainey et al. \(2015\)](#).

paramètre quantifiant la dissipation de marée dans Saturne est alors estimé à

$$|\text{Im}[k_2^2]|_{\text{Saturne}} = (1.59 \pm 0.74) \times 10^{-4}. \quad (4.4)$$

ce qui donne encore un facteur de qualité  $(Q_2^2)_{\text{Saturne}}$  de l'ordre de quelques milliers, résultat confirmé par deux ajustements aux données réalisés indépendamment (IMCCE/Observatoire de Paris, et JPL/NASA). En incluant la dépendance de  $(Q_2^2)_{\text{Saturne}}$  à la fréquence de marée, on obtient même une valeur de quelques centaines à la fréquence de marée de Rhéa, ce qui est extrêmement faible. Cette différence d'un ordre de grandeur par rapport aux autres fréquences de marée (pour lesquelles la dissipation de marée varie peu et pouvant donc être expliquée par le mécanisme de dissipation anélastique dans le cœur solide proposé par [Dermott \(1979\)](#); [Remus et al. \(2012b, 2015\)](#), voir la section 4.2.3) est probablement due à l'action d'un mécanisme de dissipation de marée qui varie fortement avec la fréquence, comme par exemple l'excitation d'ondes inertielles de marée dans l'enveloppe convective de Saturne ([Ogilvie & Lin, 2004](#), voir la section 4.2.4), ou le piégeage en résonance d'ondes gravito-inertielles dans la région stablement stratifiée autour du cœur ([Fuller et al., 2016](#), voir la figure 4.3).

Globalement, les valeurs de  $(Q_2^2)_{\text{Saturne}}$  obtenues à partir des observations du dernier siècle sont au moins un ordre de grandeur inférieur à la borne inférieure  $(Q_2^2)_{\text{Saturne}} \geq 1.8 \times 10^4$  estimée par [Sinclair \(1983\)](#) à partir de scénario de formation des satellites, ce qui prouve

que la dissipation de marée dans Saturne est bien plus grande que ce qui était admis jusque là. Le problème qui se pose alors, au regard des deux mécanismes de dissipation proposés (anélastique dans le cœur ou mécanisme fluide dans l'enveloppe), est d'identifier la/les sources de dissipation et leur ordre de grandeur respectif.

## 4.2 Etude de la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses depuis le cœur jusqu'à la surface

Dans ce chapitre, nous étudions donc la dissipation de marée engendrée dans une planète géante gazeuse générique (qui constituera donc notre corps central  $A$ ) par la présence d'un compagnon ( $B$ ) en orbite autour de celle-ci (satellite ou étoile). Pour étudier les contributions respectives (à la dissipation de marée) de l'enveloppe fluide des planètes géantes gazeuses ainsi que du potentiel cœur solide formé de roches et de glaces qu'elles pourraient abriter, nous adoptons un modèle de structure interne simplifié déjà utilisé par [Remus et al. \(2012b\)](#) et [Ogilvie \(2013\)](#) (voir fig. 4.5). Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une lettre publiée dans *Astronomy & Astrophysics* ([Guenel et al., 2014](#)) rapportée à la fin de ce chapitre.

### 4.2.1 Modèle de structure interne bi-couche

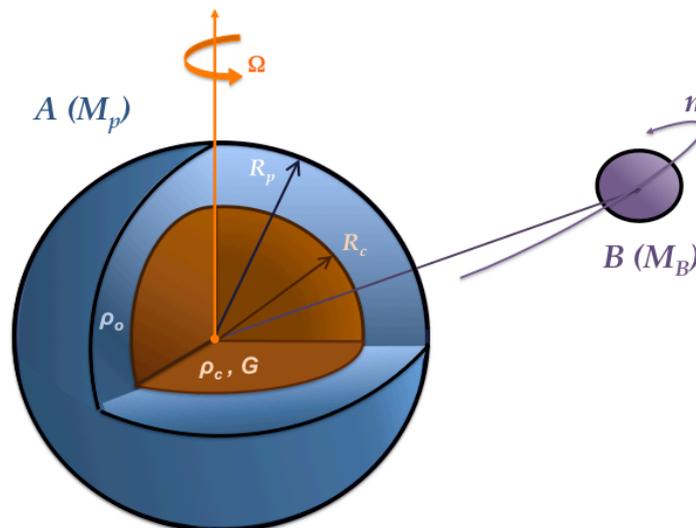


FIGURE 4.5: Planète géante bi-couche  $A$  de masse  $M_p$  et de rayon total  $R_p$  et son compagnon de marée  $B$  de masse  $M_B$  en orbite autour de  $A$  avec un moyen mouvement  $n$ . Le cœur solide rocheux/glacé de rayon  $R_c$ , de densité  $\rho_c$  et de module de rigidité  $G$  (voir l'équation (4.12)) est entouré par une enveloppe fluide convective de densité  $\rho_o$ . Crédit : [Guenel et al. \(2014\)](#).

Ce modèle consiste à considérer la planète géante centrale ( $A$ ) de masse  $M_p$  comme étant constituée d'un cœur solide homogène de rayon  $R_c$  et de densité  $\rho_c$ , entouré d'une enveloppe fluide elle aussi homogène de densité  $\rho_o$  qui s'étend jusqu'à la surface de la planète dont le

rayon est  $R_p$ . De plus, la planète est considérée comme étant en rotation solide à la vitesse angulaire  $\Omega$ , et nous faisons l'hypothèse que celle-ci vérifie

$$\epsilon^2 \equiv \frac{\Omega^2}{\mathcal{G}M_p/R_p^3} \ll 1, \quad (4.5)$$

où  $\mathcal{G}$  est la constante de gravitation. Autrement dit, la vitesse de rotation de la planète  $\Omega$  reste faible devant sa vitesse critique. De cette façon, le modèle conserve l'influence de la rotation via l'accélération de Coriolis (proportionnelle à  $\Omega$ ) tandis que l'accélération centrifuge (d'ordre  $\Omega^2$ ) et les déformations hydrostatiques qu'elle engendre sont négligées.

#### 4.2.2 Définition et évaluation des réservoirs de dissipation

Comme nous l'avons mentionné en section 3.6.1, il peut être intéressant de calculer une moyenne pondérée en fréquence de la quantité  $\text{Im}[k_l^m(\omega)]$  de façon à obtenir une estimation moyenne de la dissipation de marée indépendante de la fréquence de marée, mais dépendante de la structure interne considérée. Bien sûr, cette estimation filtre l'éventuel caractère résonant que possède la dissipation de marée (par exemple par les ondes inertielles), qui peut donc différer sensiblement de sa valeur moyenne à une fréquence donnée. Suivant [Ogilvie \(2013\)](#), on calculera la quantité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[k_l^m(\omega)] \frac{d\omega}{\omega}. \quad (4.6)$$

Plus spécifiquement, nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation quadrupolaire, et nous supposons aussi que l'orbite du compagnon perturbateur  $B$  est dans le plan équatorial du corps primaire  $A$ . Par conséquent, le potentiel de marée  $U$  ne possède qu'une seule composante proportionnelle à l'harmonique sphérique  $Y_2^2$ . Nous appelons alors « réservoir de dissipation » la quantité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[k_2^2(\omega)] \frac{d\omega}{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|k_2^2(\omega)|}{Q_2^2(\omega)} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (4.7)$$

qui donne l'ordre de grandeur de la dissipation de marée (moyennée en fréquence) associée à une structure interne donnée, pour une planète ([Guenel et al., 2014](#)) ou une étoile ([Mathis, 2015](#)).

A l'aide de cette quantité, examinons maintenant les deux mécanismes de dissipation que nous voulons comparer dans le cas de la planète géante bi-couche (figure 4.6) :

- dans la section 4.2.3, nous considérons la dissipation de marée associée à l'anélasticité du cœur central rocheux/glacé en suivant les résultats de [Remus et al. \(2012b, 2015\)](#) ;
- dans la section 4.2.4, nous nous concentrons sur la dissipation des ondes inertielles de marée par l'action de la friction turbulente dans la profonde enveloppe convective, en suivant la prescription de [Ogilvie \(2013\)](#). La quantité intégrale dans l'équation

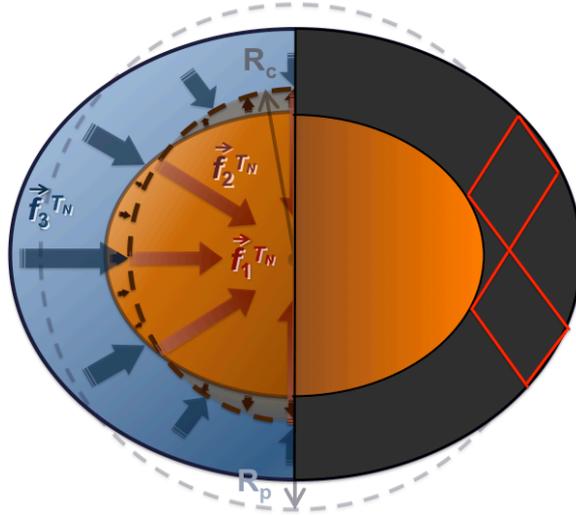


FIGURE 4.6: Mécanismes de dissipation de marée dans le modèle planétaire bi-couche : dissipation anélastique dans le cœur dense rocheux/glacé (gauche) ; dissipation due aux ondes inertielles de marée qui se propagent dans l'enveloppe convective fluide en se réfléchissant sur le cœur (droite).

(4.7) peut alors être évaluée sur l'intervalle restreint  $\omega \in [-2\Omega, 2\Omega]$  qui est celui dans lequel les ondes inertielles peuvent se propager.

### 4.2.3 Dissipation anélastique dans le cœur rocheux/glacé

La dissipation dans le cœur solide est la conséquence de son imparfaite élasticité : celui-ci possède une viscosité dynamique  $\eta_c$  qui va dissiper de l'énergie sous forme de chaleur lorsque le cœur se déforme sous l'action du potentiel de marée  $U$ . Pour le modèle bi-couche étudié ici, cette déformation est la résultante d'un ensemble de contraintes mécaniques, à savoir les forces gravitationnelles de marée ( $f_1^{TN}$ ), la force de rappel élastique du cœur suite à sa déformation ( $f_2^{TN}$ ), et enfin la pression hydrostatique exercée par l'enveloppe fluide qui l'entoure ( $f_3^{TN}$ ) qui est ici supposée statique et non dissipative (voir [Dermott, 1979](#); [Remus et al., 2012b](#), pour une discussion plus complète, ainsi que figure 4.6). Autrement dit, les couplages possibles entre les mécanismes de dissipation fluide et solide sont négligés ici.

Suivant [Remus et al. \(2012b\)](#) et [Remus \(2013\)](#), le nombre de Love  $k_2^2(\omega)$  est donné par

$$k_2^2(\omega) = \frac{\tilde{H} + \alpha + 3}{\frac{2}{3}\alpha\tilde{H} - \frac{3}{2}}, \quad (4.8)$$

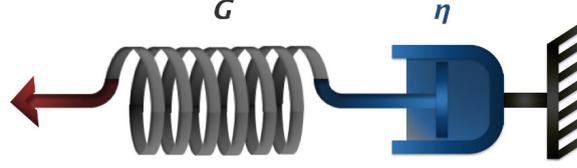


FIGURE 4.7: Représentation du modèle viscoélastique de Maxwell et notations correspondantes

où  $\alpha$  et  $\tilde{H}$  sont des fonctions du rapport d'aspect ( $R_c/R_p$ ), du rapport des densités ( $\rho_o/\rho_c$ ) et du module de cisaillement complexe effectif  $\hat{\mu}$  du cœur :

$$\alpha = 1 + \frac{5}{2} \frac{\rho_c}{\rho_o} \left( \frac{R_c}{R_p} \right)^3 \left( 1 - \frac{\rho_o}{\rho_c} \right), \quad (4.9)$$

$$\tilde{H} = \beta \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\rho_o}{\rho_c} \right) \left( 1 - \frac{\rho_o}{\rho_c} \right) + \hat{\mu}(\omega) \right], \quad (4.10)$$

$$\beta = \left( \frac{R_c}{R_p} \right)^{-5} \left( 1 - \frac{\rho_o}{\rho_c} \right)^{-2}, \quad \frac{\hat{\mu}(\omega)}{\bar{\mu}(\omega)} = \gamma = \frac{19}{2 \rho_c g_c R_c}, \quad (4.11)$$

où  $\bar{\mu}$  est le module de cisaillement complexe, et  $g_c$  est la gravité à la surface du cœur  $r = R_c$ . Notons également que  $\text{Im} [k_2^2(\omega)]$  est proportionnel à  $(R_c/R_p)^5$  lorsque  $R_c/R_p \rightarrow 0$ . Ce résultat est indépendant de la loi de comportement du cœur (rhéologie) tant que celle-ci est linéaire, et est semblable à celui obtenu pour les ondes inertielles (Goodman & Lackner, 2009; Ogilvie, 2009, 2013; Rieutord & Valdettaro, 2010). Cependant, le comportement mécanique du cœur dense rocheux/glacé éventuellement présent dans les planètes géantes gazeuses est mal connu (e.g. Henning et al., 2009). Pour cette raison, nous utilisons le modèle linéaire le plus simple, à savoir la rhéologie viscoélastique de Maxwell, pour laquelle :

$$\text{Re} [\bar{\mu}(\omega)] = \frac{\eta_c^2 G \omega^2}{G^2 + \eta_c^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad \text{Im} [\bar{\mu}(\omega)] = \frac{\eta_c G^2 \omega}{G^2 + \eta_c^2 \omega^2}, \quad (4.12)$$

où  $G$  est le module de rigidité et  $\eta_c$  est la viscosité dynamique (voir Henning et al., 2009; Remus et al., 2012b). Pour ce modèle, le cœur se comporte comme un solide lorsque  $\omega \gg \omega_M$  et comme un fluide lorsque  $\omega \ll \omega_M$ , où  $\omega_M = G/\eta_c$  est la fréquence de Maxwell.

En introduisant ce modèle dans l'équation (4.8), on peut déterminer analytiquement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} [k_2^2(\omega)] \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi G (3 + 2\alpha)^2 \beta \gamma}{\delta (6\delta + 4\alpha\beta\gamma G)}, \quad (4.13)$$

avec

$$\delta = \left[ \frac{2}{3} \alpha \beta \left( 1 - \frac{\rho_o}{\rho_c} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\rho_o}{\rho_c} \right) - \frac{3}{2} \right], \quad (4.14)$$

On remarque que le réservoir de dissipation (4.13) est indépendant de la viscosité  $\eta_c$  et s'annule pour de faibles valeurs de la rigidité  $G$ . Ceci peut s'expliquer en considérant la méthode de Ogilvie (2013) : on considère l'excitation impulsionnelle d'un déplacement de marée. Ce dernier, après un temps déterminé par ailleurs et qui dépend du processus dissipatif, est

dissipé. La moyenne sur l'ensemble des fréquences de la quantité d'énergie dissipée est alors indépendante du processus dissipatif et ne dépend que de la force de rappel, ici la rigidité du cœur solide  $G$ .

#### 4.2.4 Dissipation par les ondes inertielles dans l'enveloppe convective

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, la dissipation de marée dans l'enveloppe fluide convective de la planète géante  $A$  est surtout due à l'excitation par le compagnon  $B$  d'ondes inertielles de marée, dont la force de rappel est l'accélération de Coriolis. Celles-ci sont amorties par la friction turbulente que l'on modélise par une viscosité effective (Ogilvie & Lin, 2004; Ogilvie & Lesur, 2012). L'évaluation de cette dissipation dans le cadre du modèle bi-couche a été menée par Ogilvie (2013) qui suppose alors que le cœur solide homogène est parfaitement rigide, si bien qu'il ne contribue pas à la dissipation de marée, tandis que l'enveloppe fluide est homogène. Le système d'équations dynamiques pour le fluide dans l'enveloppe sont écrites dans le référentiel en co-rotation avec la planète (à la vitesse angulaire  $\Omega$ ) ; sa solution est séparée en une partie « non-ondulatoire » (avec indices  $_{nw}$  pour *non-wavelike*) qui correspond à l'ajustement quasi-hydrostatique de la marée d'équilibre (voir chapitre 6 et Terquem et al., 1998; Ogilvie, 2014), et une partie « ondulatoire » (avec indices  $_w$  pour *wavelike*) qui inclut l'accélération de Coriolis et correspond donc aux ondes inertielles :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{s}}_{nw} = -\nabla W_{nw}, \\ h'_{nw} + \Phi'_{nw} + U = 0, \\ \rho'_{nw} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{s}_{nw}), \\ \nabla^2 \Phi'_{nw} = 4\pi \mathcal{G} \rho'_{nw}, \end{cases} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{s}}_w + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{s}}_w = -\nabla W_w + \mathbf{f}, \\ h'_w = \Phi'_w = \rho'_w = 0, \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{s}_w) = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{s}$  est le vecteur déplacement qui vérifie  $\mathbf{u} = D\mathbf{s}/Dt$ ,  $\mathbf{e}_z$  est le vecteur unitaire aligné avec l'axe de rotation,  $h$  l'enthalpie spécifique,  $\Phi$  le potentiel gravitationnel créé par  $A$ , et  $\rho$  est la densité du fluide. Les quantités primées sont les perturbations eulériennes induites par la marée par rapport à l'état d'équilibre représenté par les variables non-primées. Notons que  $U$  et  $\mathbf{s}$  sont en fait aussi des perturbations. Enfin,  $W \equiv W_{nw} + W_w = h' + \Phi' + U$ , tandis que  $\mathbf{f} = -2\Omega \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{s}}_{nw}$  est l'accélération qui excite la partie ondulatoire de la solution. Les équations (4.16) qui déterminent cette partie ondulatoire s'obtiennent par soustraction des équations (4.15) dans le système d'équation primitif non-rappelé ici (voir l'équation (43) à (46) dans Ogilvie, 2013). Nous reviendrons en détail sur cette méthode dans le chapitre 6 dans le cas où la rotation différentielle est prise en compte.

Grâce à une méthode de calcul impulsienne, l'énergie cinétique de la solution ondulatoire peut être calculée sans résoudre complètement le système d'équations ci-dessus. Ainsi, comme expliqué à la fin de la section précédente, cette énergie cinétique sera entièrement dissipée en un temps fini par un processus de dissipation dont la nature importe finalement peu, même s'il est généralement vu comme une diffusion visqueuse équivalente. Cette énergie cinétique est reliée au réservoir de dissipation introduit dans l'équation (4.7), et le résultat final est (Ogilvie, 2013) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} \left[ k_2^2(\omega) \right] \frac{d\omega}{\omega} = \frac{100\pi}{63} \epsilon^2 \frac{(R_c/R_p)^5}{1 - (R_c/R_p)^5} \times \left[ 1 + \frac{1 - \rho_o/\rho_c}{\rho_o/\rho_c} (R_c/R_p)^3 \right] \left[ 1 + \frac{5}{2} \frac{1 - \rho_o/\rho_c}{\rho_o/\rho_c} (R_c/R_p)^3 \right]^{-2}, \quad (4.17)$$

qui dépend seulement de la structure interne et de l'intensité de l'accélération de Coriolis (via  $\epsilon$ , voir l'équation (4.5)).

### 4.3 Comparaison des deux mécanismes de dissipation

Notre but est de comparer quantitativement l'efficacité relative des deux mécanismes de dissipation de marée présentés ci-dessus, dans le but de déterminer si l'un d'entre eux est dominant ou négligeable dans les planètes géantes gazeuses similaires à Jupiter ou Saturne. Les masse et rayon respectifs de ces planètes du système solaire sont  $M_p = \{317.83, 95.16\} M_\oplus$  et  $R_p = \{10.97, 9.14\} R_\oplus$  où  $M_\oplus = 5.97 \cdot 10^{24}$  kg et  $R_\oplus = 6.37 \cdot 10^3$  km sont les masse et rayon de la Terre. Leur vitesse angulaire est  $\Omega_{\{J,S\}} = \{1.76 \cdot 10^{-4}, 1.63 \cdot 10^{-4}\} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Comme expliqué dans la section 4.1.2, les modèles de structure interne pour Jupiter et Saturne sont encore peu contraints et les incertitudes sur la taille et la masse de leur cœur solide sont grandes. C'est pourquoi nous choisissons d'explorer une large gamme de valeurs pour  $R_c$  – de manière à couvrir les valeurs considérées comme possibles par Guillot (1999) pour Jupiter et Hubbard et al. (2009) pour Saturne – mais aussi pour  $M_c$  (Guillot, 1999; Nettelmann, 2011; Nettelmann et al., 2013) dans notre étude de la dissipation dans des planètes semblables à Jupiter et Saturne. Nous fixerons parfois le rapport d'aspect  $R_c/R_p$  et/ou le rapport de masses  $M_c/M_p$  ainsi que le module de rigidité  $G$  du cœur solide aux valeurs de référence mentionnées dans la table 4.1.

TABLE 4.1: Valeurs de référence pour les planètes semblables à Jupiter et Saturne

	$R_c/R_p$	$M_c/M_p$	$G$
Jupiter	0.126 (Remus et al., 2012b)	0.02 (Guillot, 1999)	$4.46 \cdot 10^{10}$ Pa
Saturne	0.219 (Remus et al., 2012b)	0.196 (Hubbard et al., 2009)	$1.49 \cdot 10^{11}$ Pa

Les valeurs de référence choisies pour le module de rigidité  $G$  permettent de reproduire les valeurs de dissipation mesurées par Lainey et al. (2009) dans Jupiter à la fréquence de marée imposée par le satellite Io, et par Lainey et al. (2012) dans Saturne à la fréquence

de marée imposée par Encelade<sup>1</sup> (pour plus de détails, voir [Remus et al., 2012b, 2015](#)). Remarquons que ce choix donne la limite supérieure de la dissipation de marée dans le cœur solide.

### 4.3.1 En fonction de la taille du cœur solide

Commençons par regarder comment varient les réservoirs de dissipation (4.13) et (4.17), respectivement pour la dissipation dans le cœur solide et celle dans l'enveloppe convective en fonction de la taille du cœur solide dans des planètes similaires à Jupiter et Saturne. Pour cela, on fixe le rapport  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$  qui sont les valeurs issues des modèles de [Guillot \(1999\)](#) et [Hubbard et al. \(2009\)](#) pour Jupiter et Saturne respectivement, et nous traçons sur la figure 4.8 les réservoirs de dissipation en fonction du rapport d'aspect  $R_c/R_p$ , mais aussi en faisant varier le taux de rotation  $\Omega$  (qui apparaît dans (4.17)) et le module de rigidité du cœur  $G$  (qui apparaît dans (4.13)).

Cette figure montre que pour les planètes semblables à Saturne comme à Jupiter, le réservoir de dissipation  $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} [k_2^2(\omega)] d\omega/\omega$  pour les deux mécanismes de dissipation considérés ici croît fortement avec la taille du cœur, ce qui est cohérent avec la dépendance des réservoirs de dissipation au rapport d'aspect discutée précédemment. Cette tendance est présente jusqu'à atteindre une valeur critique pour  $R_c/R_p$  au-delà de laquelle l'enveloppe devient plus dense que le cœur ( $\rho_o/\rho_c > 1$ ) ce qui est physiquement impossible : c'est la limite de définition du modèle bi-couche et du régime de paramètres compatibles avec l'équation (4.13). Ici, nous avons adopté les valeurs fixes  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$  issues de [Guillot \(1999\)](#) et [Hubbard et al. \(2009\)](#) respectivement pour Jupiter et Saturne. Lorsque  $R_c/R_p > \{0.126, 0.219\}$ ,  $\Omega = \Omega_{\{J,S\}}$ , et  $G = G_{\{J,S\}}^R$ , la dissipation viscoélastique moyenne dans le cœur est légèrement supérieure à celle dans l'enveloppe fluide jusqu'à ce que la singularité ( $\rho_o/\rho_c > 1$ ) du modèle soit atteinte. On constate également que sur la plupart de l'intervalle  $R_c/R_p$  représenté dans la figure 4.8, les valeurs associées à chacun des mécanismes de dissipation diffèrent rarement de plus d'un ordre de grandeur au maximum, et diffèrent dans tous les cas de moins de deux ordres de grandeur si l'on fait varier la rigidité  $G$  ou la vitesse angulaire  $\Omega$ . Ceci montre que dans les planètes géantes gazeuses semblables à Jupiter et Saturne, il est important de considérer les deux processus de dissipation car ils peuvent tous les deux contribuer de manière significative à la dissipation de marée totale, et par conséquent ni l'un ni l'autre ne peuvent être négligés en général.

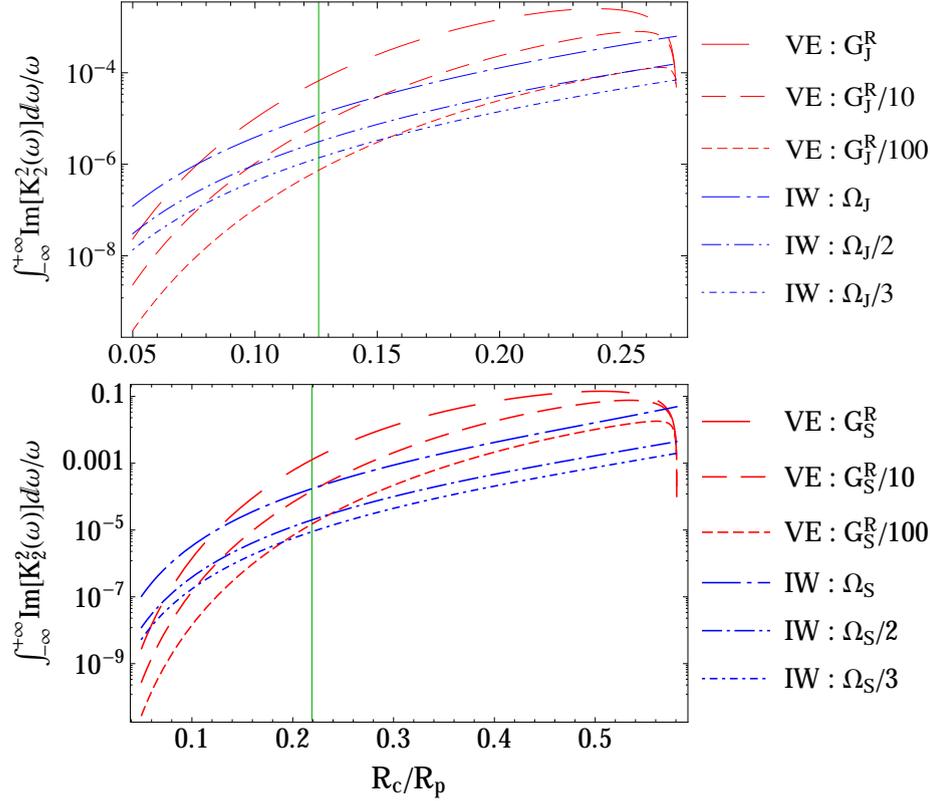


FIGURE 4.8: Réservoir de dissipation pour la dissipation viscoélastique dans le cœur (rouge) et pour la dissipation par les ondes inertielles dans l’enveloppe fluide (bleu) dans une planète semblable à Jupiter (haut) et Saturne (bas) en fonction du rapport d’aspect du cœur  $R_c/R_p$  en fixant  $R_p$ ,  $M_c$  et  $M_p$ . Nous traçons plusieurs courbes en faisant varier le taux de rotation  $\Omega$  (pointillés bleus) et le module de rigidité du cœur  $G$  (pointillés rouges). Nous utilisons les valeurs fixes  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$  issues de [Guillot \(1999\)](#) et [Hubbard et al. \(2009\)](#) pour Jupiter et Saturne respectivement. Les lignes vertes marquent la valeur  $R_c/R_p = \{0.126, 0.219\}$  (voir la Table 4.1).

### 4.3.2 En fonction de la masse du cœur solide

On étudie maintenant en figure 4.9 la dépendance de ces quantités en fonction de la masse du cœur interne, en conservant  $M_p$  et  $R_c/R_p$  fixés, on observe que le réservoir de dissipation  $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[k_2^2(\omega)] d\omega/\omega$  associé à chacun des mécanismes de dissipation est une fonction décroissante de  $M_c$ , car alors le rapport de densité  $\rho_o/\rho_c$  décroît également. Pour  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$ ,  $\Omega = \Omega_{\{J,S\}}$ , et  $G = G_{\{J,S\}}^R$ , la dissipation viscoélastique dans le cœur domine légèrement celle dans l’enveloppe fluide. De plus, comme dans le cas de la figure 4.8, ils possèdent un ordre de grandeur similaire y compris lorsqu’on l’on modifie la rigidité  $G$  du cœur ou la vitesse angulaire  $\Omega$ . Ceci indique que les deux mécanismes de dissipation peuvent rentrer en compétition dans le cas des exoplanètes géantes semblables à Jupiter et Saturne, si bien qu’il est important de les évaluer simultanément dans ces objets.

1. Pour reproduire ces valeurs, il faut également  $\eta_{c,\{J,S\}} = \{1.45 \cdot 10^{14}, 5.57 \cdot 10^{14}\}$  Pa · s mais ce paramètre n’apparaît pas dans l’équation (4.13).

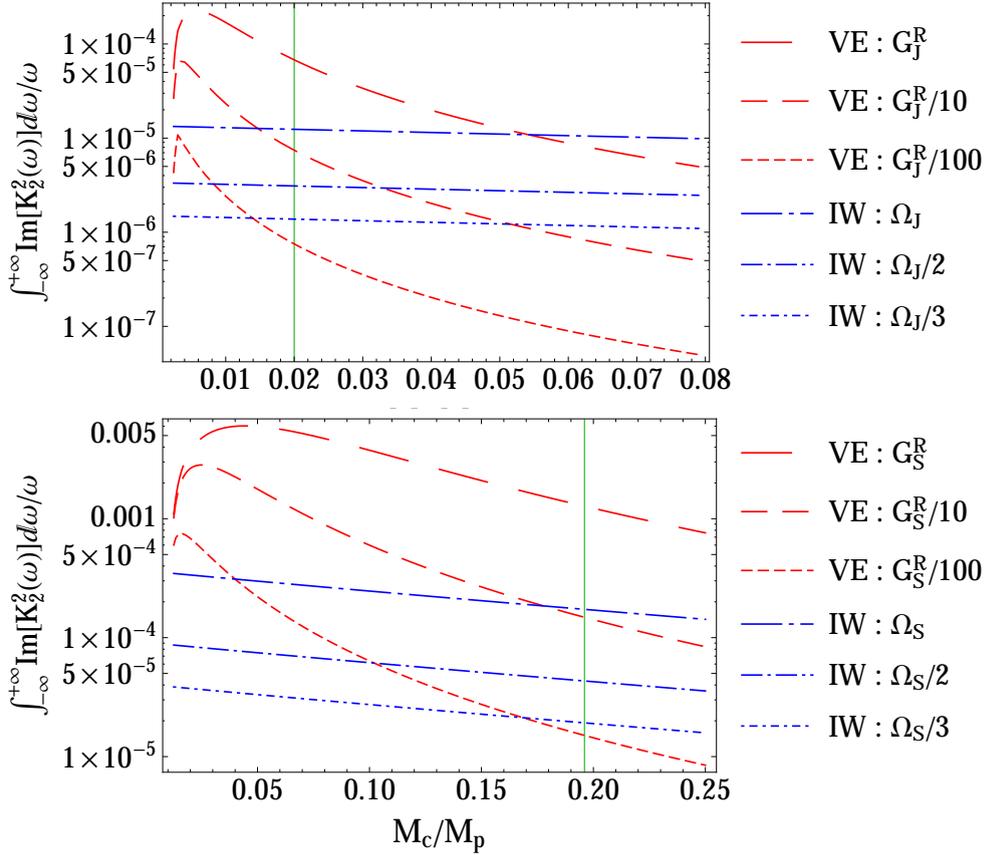


FIGURE 4.9: Identique à la fig. 4.8 mais cette fois en fonction du rapport de masse  $M_c/M_p$  avec  $M_p$ ,  $R_c$  et  $R_p$  fixés. Nous adoptons  $R_c/R_p = \{0.126, 0.219\}$  pour Jupiter et Saturne. Les larges intervalles de masse pour  $M_c$  sont  $[1,3 - 25] M_\oplus$  pour Jupiter et  $[2 - 24] M_\oplus$  pour Saturne, et couvrent les valeurs considérées possibles par [Guillot \(1999\)](#); [Nettelmann \(2011\)](#); [Nettelmann et al. \(2013\)](#). Les lignes vertes marquent la valeur  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$  issues de [Guillot \(1999\)](#) et [Hubbard et al. \(2009\)](#) pour Jupiter et Saturne respectivement.

Remarquons cependant que la variation de la masse du cœur induit des variations relatives bien moins importantes (deux ordres de grandeur au maximum) que ne le faisait la taille du cœur (jusqu'à cinq ordres de grandeur, voir la figure 4.8), en particulier dans le cas de la dissipation induite par les ondes inertielles (courbes bleues), qui sont bien plus sensibles au taux de rotation qu'au rapport de masse  $M_c/M_p$ .

#### 4.4 Conclusions et perspectives

Nous avons pour la première fois comparé l'importance relative des mécanismes de dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses. Il faut garder en tête que cette comparaison quantitative a été obtenue à l'aide d'un modèle de structure interne bi-couche simplifié, mais nous pensons qu'il s'agit d'une approche pertinente pour l'évaluation et la comparaison de la dissipation de marée dans les régions fluides et solides. Dans ce cadre, nous avons déterminé que si l'on veut reproduire la dissipation de marée mesurée par [Lainey et al., 2009](#),

2012) dans Jupiter et Saturne à l'aide du modèle de dissipation dans le cœur solide uniquement (Remus et al., 2012b, 2015), alors la dissipation engendrée par l'excitation d'ondes inertielles dans l'enveloppe convective est légèrement inférieure mais reste du même ordre de grandeur. Il est donc probable que la dissipation totale dans ces planètes soit le résultat d'une compétition entre ces deux processus, ce qui indique qu'il est nécessaire de développer des modèles *ab initio* pour la dissipation de marée, basés sur des modèles de structure interne complexes (multi-couches), non seulement pour les planètes géantes gazeuses mais pour toutes les exoplanètes constituées d'une superposition de régions fluides et solides.

Pour dériver des prédictions réalistes issues de modèles de dissipation de marées *ab initio* dans le futur, il est important d'améliorer simultanément notre compréhension du comportement mécanique des couches rocheuses ou glacées, mais aussi d'inclure des processus physiques tels que la stratification, la rotation différentielle, le champ magnétique ou bien les instabilités non-linéaires dans les régions fluides. De plus, la dissipation dans chacune de ces couches possède une dépendance spécifique à la fréquence de marée (résonante ou non, voir chapitres 2 et 3) et dont nous nous sommes affranchis ici grâce au concept de réservoir de dissipation, mais qui a un impact qualitatif sur l'évolution rotationnelle et l'architecture orbitale des systèmes planétaires (Efroimsky & Lainey, 2007; Auclair-Desrotour et al., 2014). C'est en partie pour cette raison que nous allons maintenant étudier dans les chapitres 5 et 6 les propriétés des ondes inertielles de marées ainsi que la dissipation d'énergie qui en résulte dans des enveloppes convectives en rotation différentielle, en particulier dans le cas des étoiles de faible masse.

LETTER TO THE EDITOR

# Unravelling tidal dissipation in gaseous giant planets

M. Guenel<sup>1</sup>, S. Mathis<sup>1,2</sup>, and F. Remus<sup>3,1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DSM – CNRS – Université Paris Diderot, IRFU/SaP Centre de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

e-mail: [mathieu.guenel;stephane.mathis]@cea.fr

<sup>2</sup> LESIA, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8109, UPMC, Université Paris-Diderot, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

<sup>3</sup> IMCCE, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8028, UPMC, USTL, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France  
e-mail: francoise.remus@obspm.fr

Received 16 April 2014 / Accepted 6 June 2014

## ABSTRACT

*Context.* Tidal dissipation in planetary interiors is one of the key physical mechanisms that drive the evolution of star-planet and planet-moon systems. New constraints on this dissipation are now obtained both in the solar and exo-planetary systems.

*Aims.* Tidal dissipation in planets is intrinsically related to their internal structure. Indeed, the dissipation behaves very differently when we compare its properties in solid and fluid planetary layers. Since planetary interiors consist of both types of regions, it is necessary to be able to assess and compare the respective intensity of the reservoir of dissipation in each type of layers. Therefore, in the case of giant planets, the respective contribution of the potential central dense rocky/icy core and of the deep convective fluid envelope must be computed as a function of the mass and the radius of the core. This will allow us to obtain their respective strengths.

*Methods.* Using a method that evaluates the reservoir of dissipation associated to each region, which is a frequency-average of complex tidal Love numbers, we compared the respective contributions of the central core and of the fluid envelope.

*Results.* For Jupiter- and Saturn-like planets, we show that the viscoelastic dissipation in the core could dominate the turbulent friction acting on tidal inertial waves in the envelope. However, the fluid dissipation would not be negligible. This demonstrates that it is necessary to build complete models of tidal dissipation in planetary interiors from their deep interior to their surface without any arbitrary assumptions.

*Conclusions.* We demonstrate how important it is to carefully evaluate the respective strength of each type of dissipation mechanism in planetary interiors and to go beyond the usually adopted ad-hoc models. We confirm the significance of tidal dissipation in the potential dense core of gaseous giant planets.

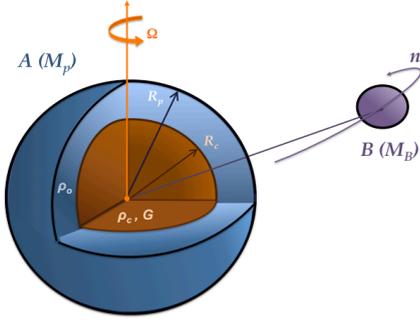
**Key words.** hydrodynamics – waves – celestial mechanics – planets and satellites: interiors – planet-star interactions – planets and satellites: dynamical evolution and stability

## 1. Introduction and context

The dissipation of tides is one of the key physical mechanisms that drive the evolution of planetary systems (Goldreich & Soter 1966). At the same time, we understand little of the related dissipative processes acting both in rocky/icy and in fluid planetary layers even though they significantly affect the dynamics of star-planet and planet-moon systems (e.g. Efroimsky & Lainey 2007; Auclair-Desrotour et al. 2014). Therefore, a strong effort must be undertaken to make realistic and reliable predictions for the dissipation rate of the kinetic energy of tidal displacements in planetary interiors. In this context, progress is achieved by using observational constraints in the solar and exoplanetary systems (e.g. Lainey et al. 2009; Husnoo et al. 2012; Albrecht et al. 2012). For example, tidal dissipation has been quantified for Jupiter and Saturn thanks to high-precision astrometric measurements as reported by Lainey et al. (2009, 2012) respectively. These works have demonstrated that these planets are likely to be the seat of strong dissipation, with in the case of Saturn at least a smooth dependence on the tidal excitation frequency. These results seem to favour the inelastic dissipation in their potential central dense rocky/icy core (e.g. Remus et al. 2012; Storch & Lai 2014). However, the mass, the size, and the rheology of these cores are still unknown. Moreover, tides excite inertial waves in the deep fluid convective envelope. Their restoring force is the

Coriolis acceleration, and their dissipation by turbulent friction may be strong and therefore non-negligible (e.g. Ogilvie & Lin 2004; Ogilvie 2013). As a result, it becomes necessary to explore and compare the reservoirs of tidal dissipation in each region with respect to their corresponding dissipative mechanism. This objective must be reached for all types of planets since they all potentially consist of a combination of solid and fluid layers.

In this first work, we focus on gaseous giant planets. By using simplified two-layer models as an exploratory tool for Jupiter- and Saturn-like planets, we apply the method described by Ogilvie (2013), which uses the frequency-dependent Love number to evaluate the reservoirs of dissipation both in their envelope and their core as a function of their mass and aspect ratios. This provides the first direct evaluation of the relative strength of the different mechanisms of tidal dissipation in a planet, which consists of different types of layers. In Sect. 2, we describe the main characteristics of our simplified planetary model. Next, we recall the method we used to compute the reservoirs of dissipation that is a result of viscoelastic dissipation in the core (Remus et al. 2012) and turbulent dissipation in the fluid envelope (Ogilvie 2013). In Sect. 3, we explore their respective strength for realistic values of the radius and the mass of the core, and we show why this approach is interesting. In conclusion, we discuss our results and the potential applications of this method.



**Fig. 1.** Two-layer planet A of mass  $M_p$  and mean radius  $R_p$  and point-mass tidal perturber B of mass  $M_B$  orbiting with a mean motion  $n$ . The rocky/icy solid core of radius  $R_c$ , density  $\rho_c$ , and rigidity  $G$  (see Eq. (4)) is surrounded by a convective fluid envelope of density  $\rho_o$ .

## 2. Modelling tidal dissipation in gaseous giant planets

### 2.1. Two-layer model

To study the respective contributions to the tidal dissipation of both the potential rocky/icy core and the fluid envelope of gaseous giant planets, we chose to adopt the simplified two-layer model used in Remus et al. (2012) and Ogilvie (2013, see Fig. 1). This model features a central planet A of mass  $M_p$  and mean radius  $R_p$  along with a point-mass tidal perturber B of mass  $m$  orbiting with a mean motion  $n$ . Body A is assumed to be in moderate solid-body rotation with an angular velocity  $\Omega$ , so that  $\epsilon^2 \equiv \Omega^2/\sqrt{\mathcal{G}M_p/R_p^3} \ll 1^1$ , where  $\mathcal{G}$  is the gravitational constant. The rocky (or icy) solid core of radius  $R_c$  and density  $\rho_c$  is surrounded by a convective fluid envelope of density  $\rho_o$ . Both are assumed to be homogeneous for the sake of simplicity.

### 2.2. Evaluating the tidal dissipation reservoirs

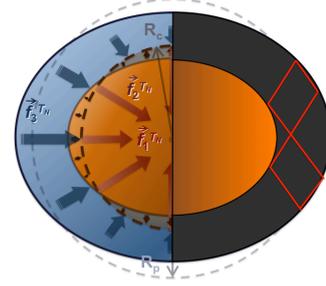
The Love numbers quantify the response to the tidal perturbation induced on A by the companion B. More precisely, the Love number  $k_l^m$ , associated with the  $(l, m)$  component of the time-dependent tidal potential  $U$  that corresponds to the spherical harmonic  $Y_l^m$ , measures the ratio of the tidal perturbation of its self-gravity potential over the tidal potential at the surface of body A ( $r = R_p$ ). These numbers are real for perfectly elastic or non-viscous layers, and in general depend on the tidal frequency  $\omega = sn - m\Omega$  (with  $s \in \mathbf{Z}$ ) (e.g. Efroimsky 2012; Remus et al. 2012) just like in any forced oscillating system. However, they are complex quantities in realistic planetary interiors where dissipation occurs, with a real part that accounts for the energy stored in the tidal perturbation, while the imaginary part accounts for the energy losses. Note that  $\text{Im}[k_l^m(\omega)]$  is proportional to  $\text{sgn}(\omega)$ .

This imaginary part can be expressed in terms of the quality factor  $Q_l^m(\omega)$ , or equivalently, the tidal angle  $\delta_l^m(\omega)$ , which both depend on the tidal frequency

$$Q_l^m(\omega)^{-1} = \sin[2\delta_l^m(\omega)] = \text{sgn}(\omega) |k_l^m(\omega)|^{-1} \text{Im}[k_l^m(\omega)]. \quad (1)$$

Then, following Ogilvie (2013), we calculate a weighted frequency-average of the imaginary part of the second-

<sup>1</sup> In this regime, the Coriolis acceleration, which scales as  $\Omega$ , is taken into account, while the centrifugal acceleration, which scales as  $\Omega^2$  is neglected.



**Fig. 2.** Mechanisms of tidal dissipation in our two-layer planetary model: the inelastic dissipation in the dense rocky/icy core (left) and the dissipation due to the tidal inertial waves that reflect onto the core in the fluid convective envelope (right).

order Love number  $k_2^2$ , which we call the tidal dissipation reservoir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[k_2^2(\omega)] \frac{d\omega}{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|k_2^2(\omega)|}{Q_2^2(\omega)} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (2)$$

This quantity can be defined for any values of  $(l, m)$ , but we here chose to consider the simplest case of a coplanar system for which the tidal potential ( $U$ ) reduces to the component (2, 2) as well as the quadrupolar response of A.

We now examine the two possible mechanisms of dissipation (see Fig. 2):

- in Sect. 2.3, we consider the dissipation associated to the inelasticity of the rocky/icy core following Remus et al. (2012);
- in Sect. 2.4, we focus on the dissipation of tidally excited inertial waves by the turbulent friction in the deep gaseous convective envelope following Ogilvie (2013). The integral in Eq. (2) then reduces to  $\omega \in [-2\Omega, 2\Omega]$  because higher-frequency acoustic waves are filtered out.

### 2.3. Inelastic dissipation in the core

The inelastic tidal dissipation in the solid core is the result of its internal viscosity ( $\eta$ ). For the studied two-layer model, it is modified by the set of mechanical constraints, namely the gravitational forces ( $f_1^{T_N}$ ), the loading of the core due to its deformation ( $f_2^{T_N}$ ), and the hydrostatic pressure exerted by the surrounding fluid envelope ( $f_3^{T_N}$ ), which is here assumed to be static and non-dissipative (see Dermott 1979; Remus et al. 2012, for a complete discussion and Fig. 2).

Following Remus et al. (2012) and Remus (2013), the second-order Love number  $k_2^2(\omega)$  is given by

$$k_2^2(\omega) = \frac{\tilde{H} + \alpha + 3}{\frac{2}{3}\alpha\tilde{H} - \frac{3}{2}}, \quad (3)$$

where  $\alpha$  and  $\tilde{H}$  are functions of the aspect ratio ( $R_c/R_p$ ), the density ratio ( $\rho_o/\rho_c$ ), and the complex effective shear modulus  $\hat{\mu}$  of the core:

$$\alpha = 1 + \frac{5}{2} \frac{\rho_c}{\rho_o} \left(\frac{R_c}{R_p}\right)^3 \left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_c}\right),$$

$$\tilde{H} = \beta \left[ \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\rho_o}{\rho_c}\right) \left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_c}\right) + \hat{\mu}(\omega) \right],$$

$$\beta = \left(\frac{R_c}{R_p}\right)^{-5} \left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_c}\right)^{-2}, \quad \frac{\hat{\mu}(\omega)}{\bar{\mu}(\omega)} = \gamma = \frac{19}{2\rho_c g_c R_c},$$

where  $\bar{\mu}$  is the complex shear modulus and  $g_c$  is the gravity at  $r = R_c$ . Note also that  $\text{Im}[k_2^2(\omega)]$  scales as  $(R_c/R_p)^5$  as  $R_c/R_p \rightarrow 0$ . This result is valid for any linear rheology, but the mechanical behaviour of the dense central rocky/icy cores in gaseous giant planets is poorly constrained (see e.g. [Henning et al. 2009](#)). For that reason, we used the simplest linear viscoelastic Maxwell model for which

$$\text{Re}[\bar{\mu}(\omega)] = \frac{\eta^2 G \omega^2}{G^2 + \eta^2 \omega^2} \quad \text{and} \quad \text{Im}[\bar{\mu}(\omega)] = \frac{\eta G^2 \omega}{G^2 + \eta^2 \omega^2}, \quad (4)$$

where  $G$  is the rigidity and  $\eta$  is the viscosity (see [Henning et al. 2009](#); [Remus et al. 2012](#)). For this model, the core behaves as a rigid body when  $\omega \gg \omega_M$ , and as a fluid body when  $\omega \ll \omega_M$ , where  $\omega_M = G/\eta$  is the Maxwell frequency. We find that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[k_2^2(\omega)] \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi G (3 + 2\alpha)^2 \beta \gamma}{\delta (6\delta + 4\alpha\beta\gamma G)}, \quad (5)$$

$$\text{with} \quad \delta = \left[ \frac{2}{3} \alpha \beta \left( 1 - \frac{\rho_o}{\rho_c} \right) \left( 1 + \frac{3\rho_o}{2\rho_c} \right) - \frac{3}{2} \right],$$

which is remarkably independent of the viscosity  $\eta$  and vanishes for low values of  $G$ .

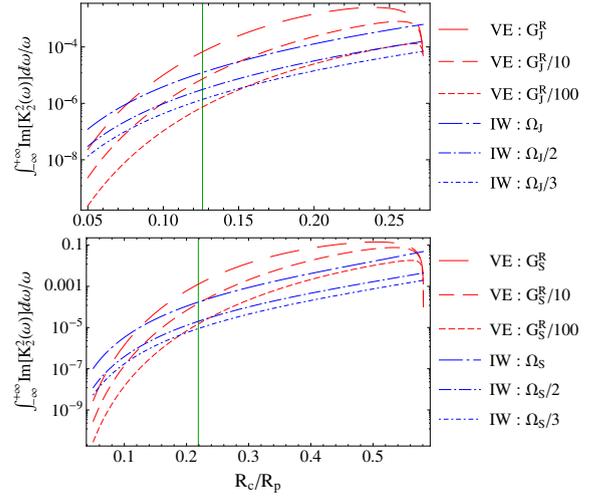
#### 2.4. Dissipation of inertial waves in the envelope

Tidal dissipation in the fluid convective envelope of A originates from the excitation by B of inertial waves, which are driven by the Coriolis acceleration. They are damped by the turbulent friction, which can be modelled using a turbulent viscosity ([Ogilvie & Lesur 2012](#)). Its evaluation in our two-layer model was conducted by [Ogilvie \(2013\)](#), who assumed an homogeneous and perfectly rigid solid core without inelastic dissipation, while the envelope is homogenous and incompressible. The solutions of the system of dynamical equations for the fluid envelope written in the co-rotating frame are separated into a non-wavelike part (with subscripts  $_{nw}$ ), which corresponds to the immediate hydrostatic adjustment to the external tidal potential ( $U$ ), and a wave-like part (with subscript  $_w$ ) driven by the action of the Coriolis acceleration on the non-wavelike part:

$$\begin{cases} \ddot{s}_{nw} = -\nabla W_{nw}, \\ h'_{nw} + \Phi'_{nw} + U = 0, \\ \rho'_{nw} = -\nabla \cdot (\rho s_{nw}), \\ \nabla^2 \Phi'_{nw} = 4\pi \mathcal{G} \rho'_{nw}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \ddot{s}_w + 2\Omega e_z \times \dot{s}_w = -\nabla W_w + f, \\ h'_w = \Phi'_w = \rho'_w = 0, \\ \nabla \cdot (\rho s_w) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

where  $s$  is the displacement,  $e_z$  the unit vector along the rotation axis,  $h$  the specific enthalpy,  $\Phi$  the self-gravitational potential of A, and  $\rho$  is the density. Primed variables denote an Eulerian perturbation in relation to the unperturbed state with unprimed variables. Note that  $U$  and  $s$  are actually perturbations as well. Finally,  $W \equiv W_{nw} + W_w = h' + \Phi' + U$ , while  $f = -2\Omega e_z \times \dot{s}_{nw}$  is the acceleration driving the wavelike part of the solution.

The kinetic energy of the wavelike part of the solution can be derived without solving the whole system of equations, thanks to an impulsive calculation. This kinetic energy will eventually be dissipated (regardless of the exact physical processes at stake here, even if we know that it can be modelled by a turbulent viscosity) and is related to the tidal dissipation reservoir introduced



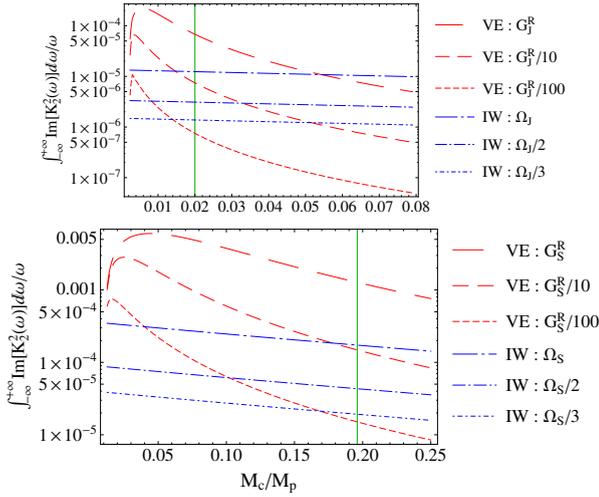
**Fig. 3.** Dissipation reservoirs for the viscoelastic dissipation in the core (red curves) and the turbulent friction in the fluid envelope (blue curves) in Jupiter- (above) and Saturn-like planets (below) as a function of the aspect ratio  $R_c/R_p$ , the rotation rate  $\Omega$ , and the rigidity of the core  $G$ , with fixed  $R_p$  and  $M_p$ . We use the values  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$  from [Guillot \(1999\)](#) and [Hubbard et al. \(2009\)](#) for Jupiter and Saturn, respectively. The vertical green line corresponds to  $R_c/R_p = \{0.126, 0.219\}$ .

in Eq. (2). The final result is ([Ogilvie 2013](#))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[k_2^2(\omega)] \frac{d\omega}{\omega} = \frac{100\pi}{63} \epsilon^2 \frac{(R_c/R_p)^5}{1 - (R_c/R_p)^5} \times \left[ 1 + \frac{1 - \rho_o/\rho_c}{\rho_o/\rho_c} (R_c/R_p)^3 \right] \left[ 1 + \frac{5}{2} \frac{1 - \rho_o/\rho_c}{\rho_o/\rho_c} (R_c/R_p)^3 \right]^{-2}. \quad (7)$$

### 3. Comparison of the two dissipation mechanisms

Our goal is to quantitatively compare the respective strength of the two dissipation mechanisms to determine if and when either one of them can be neglected in gaseous giant planets similar to Jupiter and Saturn. Their respective mass and radius are  $M_p = \{317.83, 95.16\} M_\oplus$  and  $R_p = \{10.97, 9.14\} R_\oplus$  with  $M_\oplus = 5.97 \times 10^{24}$  kg and  $R_\oplus = 6.37 \times 10^3$  km being the Earth's mass and radius. Their rotation rate are  $\Omega_{(J,S)} = \{1.76 \times 10^{-4}, 1.63 \times 10^{-4}\} \text{s}^{-1}$ . Internal structure models for these bodies are still only poorly constrained. This is why we chose to explore wide ranges of core radii in Fig. 3 (covering the values considered possible by [Guillot 1999](#), for Jupiter; and [Hubbard et al. 2009](#), for Saturn) and core masses in Fig. 4 (covering the values considered possible by [Guillot 1999](#); [Nettelmann 2011](#); and [Nettelmann et al. 2013](#)). To do this, we used fixed values for the mass ratios  $M_c/M_p$  (in Fig. 3) or for the aspect ratios  $R_c/R_p$  (in Fig. 4), along with specific values of the angular velocity,  $\Omega$ , for tidal inertial waves (Eq. (7)) and of the rigidity  $G$  (Eq. (5)) for the viscoelastic model. We chose to use as a reference  $G_{(J,S)}^R = \{4.46 \times 10^{10}, 1.49 \times 10^{11}\}$  Pa which allows this dissipation model to match the dissipation measured by [Lainey et al. \(2009, 2012\)](#) in Jupiter at the tidal frequency of Io and in Saturn at the frequency of Enceladus (with  $\eta_{(J,S)} = \{1.45 \times 10^{14}, 5.57 \times 10^{14}\} \text{Pa} \cdot \text{s}$ ). We assumed the core masses proposed by [Guillot \(1999\)](#) and [Hubbard et al. \(2009\)](#), that is  $M_c = \{6.41, 18.65\} M_\oplus$ , which yields the smallest core radii of  $R_c = \{0.126, 0.219\} R_p$ . This allows us to avoid underestimating the solid dissipation reservoir that a poor choice of parameters could cause (see Fig. 9 in [Remus et al. 2012](#)).



**Fig. 4.** Same as Fig. 3, but as a function of the mass ratio  $M_c/M_p$  with fixed  $M_p$  and  $R_p$ . We adopt  $R_c/R_p = \{0.126, 0.219\}$  for Jupiter and Saturn. The wide  $M_c$ -ranges  $[1, 3-25] M_\oplus$  for Jupiter and  $[2-24] M_\oplus$  for Saturn are those considered as possible by Guillot (1999), Nettelmann (2011), Nettelmann et al. (2013). The vertical green line corresponds to  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$ .

### 3.1. As a function of the core radius

Figure 3 shows that for both dissipation models and both planets, the tidal dissipation reservoirs generally increase with the core radius until a critical value is reached, where  $\rho_o/\rho_c = 1$ , which is a singularity of the model; the density ratio decreases with the core radius since  $R_p$  and  $M_c/M_p$  are fixed. Here, we adopted the values  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$  given by Guillot (1999) and Hubbard et al. (2009) respectively for Jupiter and Saturn. This result agrees with the predictions of Remus et al. (2012) for the core and of Ogilvie & Lin (2004), Goodman & Lackner (2009), Rieutord & Valdetaro (2010), and Ogilvie (2013), who explained that inertial waves in a fluid spherical shell experience multiple reflections on its boundaries and follow specific paths called attractors, where shear layers occur, leading to a higher viscous dissipation than for a full sphere (Wu 2005, and Fig. 2). These plots show that in Jupiter- and Saturn-like gaseous giant planets, the two distinct mechanisms exposed in Sect. 2 can both contribute to tidal dissipation, and that therefore none of them can be neglected in general. Moreover, when  $R_c/R_p > \{0.126, 0.219\}$ ,  $\Omega = \Omega_{(J,S)}$ , and  $G = G_{(J,S)}^R$ , the viscoelastic dissipation slightly dominates that in the fluid envelope until the singularity of the model is reached.

### 3.2. As a function of the core mass

If we now study the problem as a function of the core mass, we observe that the two tidal dissipation reservoirs associated with each model slightly decrease because the density ratio  $\rho_o/\rho_c$  decreases since  $M_p$  and  $R_c/R_p$  are fixed. Here, we adopted  $R_c/R_p = \{0.126, 0.219\}$  for Jupiter and Saturn following previous sections. Again, the order of magnitude of each dissipation reservoir can be similar and there is no clear indication that either one of them is negligible. For  $M_c/M_p = \{0.02, 0.196\}$ ,  $\Omega = \Omega_{(J,S)}$ , and  $G = G_{(J,S)}^R$ , the viscoelastic dissipation slightly dominates that in the fluid envelope.

## 4. Conclusions and perspectives

We computed for the first time a direct comparison of the relative strength of tidal dissipation mechanisms in the interiors of

gaseous giant planets. Even if it is necessary to keep in mind that this quantitative comparison was obtained using simplified two-layer planetary models, we are confident that this approach is reliable enough to explore and to evaluate the amplitude of both solid and fluid tidal dissipations and to compare them. In this framework, we find that to be able to reproduce the observed values of the tidal dissipation in Jupiter and in Saturn obtained thanks to high-precision astrometry (Lainey et al. 2009, 2012), we are in a situation where the viscoelastic dissipation in the core may dominate the turbulent friction acting on tidal inertial waves in the envelope. However, the fluid mechanism is not negligible, which shows that it is necessary to compute models that take into account all the possible dissipation mechanisms for complex planetary interiors. The action of each of them on the spins of bodies that constitute planetary systems and on their orbital architecture would be unveiled thanks to their behaviour as a function of the excitation frequency (Auclair-Desrotour et al. 2014) and of realistic formation/evolution simulations (e.g. Charnoz et al. 2011; Laskar et al. 2012). Moreover, this method which uses frequency-dependent complex Love numbers can be applied in the near future to realistically stratified solid and fluid regions (e.g. Ogilvie & Lin 2004; Tobie et al. 2005) and to other types of planets such as icy giant planets and super-Earths, which are also composed of a superposition of both solid and fluid regions.

To derive reliable predictions from an ab-initio treatment of the mechanisms of tidal dissipation, it would be also necessary to simultaneously improve our understanding of the rheological behaviour of rocky and icy planetary layers and to take into account possible stable stratification, differential rotation, magnetic fields, and non-linear processes such as instabilities and turbulence in fluid regions.

*Acknowledgements.* We thank the referee, whose comments allowed us to improve the manuscript. M. Guenel was supported by CEA. This work was funded partly by the Programme National de Planétologie (CNRS/INSU), the Campus Spatial de l'Université Paris Diderot, the "L'Oréal-Académie des Sciences-Unesco" fundation, and the Emergence-UPMC project EME0911 Encelade.

## References

- Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., et al. 2012, *ApJ*, 757, 18  
 Auclair-Desrotour, P., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2014, *A&A*, 561, L7  
 Charnoz, S., Crida, A., Castillo-Rogez, J. C., et al. 2011, *Icarus*, 216, 535  
 Dermott, S. F. 1979, *Icarus*, 37, 310  
 Efroimsky, M. 2012, *ApJ*, 746, 150  
 Efroimsky, M., & Lainey, V. 2007, *J. Geophys. Res. (Planets)*, 112, 12003  
 Goldreich, P., & Soter, S. 1966, *Icarus*, 5, 375  
 Goodman, J., & Lackner, C. 2009, *ApJ*, 696, 2054  
 Guillot, T. 1999, *Planet. Space Sci.*, 47, 1183  
 Henning, W. G., O'Connell, R. J., & Sasselov, D. D. 2009, *ApJ*, 707, 1000  
 Hubbard, W. B., Dougherty, M. K., Gautier, D., & Jacobson, R. 2009, *The Interior of Saturn*, eds. M. K. Dougherty, L. W. Esposito, & S. M. Krimigis, 75  
 Husnoo, N., Pont, F., Mazeh, T., et al. 2012, *MNRAS*, 422, 3151  
 Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, *Nature*, 459, 957  
 Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, *ApJ*, 752, 14  
 Laskar, J., Boué, G., & Correia, A. C. M. 2012, *A&A*, 538, A105  
 Nettelmann, N. 2011, *Ap&SS*, 336, 47  
 Nettelmann, N., Püster, R., & Redmer, R. 2013, *Icarus*, 225, 548  
 Ogilvie, G. I. 2013, *MNRAS*, 429, 613  
 Ogilvie, G. I., & Lesur, G. 2012, *MNRAS*, 422, 1975  
 Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, 610, 477  
 Remus, F. 2013, Ph.D. Thesis, Université Pierre et Marie Curie  
 Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2012, *A&A*, 541, A165  
 Rieutord, M., & Valdetaro, L. 2010, *J. Fluid Mech.*, 643, 363  
 Storch, N. I., & Lai, D. 2014, *MNRAS*, 438, 1526  
 Tobie, G., Mocquet, A., & Sotin, C. 2005, *Icarus*, 177, 534  
 Wu, Y. 2005, *ApJ*, 635, 674



# CHAPITRE 5

## ONDES INERTIELLES DANS LES ENVELOPPES CONVECTIVES STELLAIRES EN ROTATION DIFFÉRENTIELLE : MODES LIBRES

### Sommaire

<b>5.1 Profil de rotation différentielle dans les enveloppes convectives stellaires</b>	<b>86</b>
5.1.1 La rotation différentielle observée dans le Soleil et les autres étoiles	86
5.1.2 Des simulations numériques MHD pour la rotation différentielle des étoiles de faible masse	87
5.1.3 Un profil de rotation différentielle générique et simple pour l'étude des ondes inertielles	88
<b>5.2 Formulation mathématique</b>	<b>89</b>
<b>5.3 Etude des ondes inertielles dans le cas non-visqueux</b>	<b>90</b>
5.3.1 Deux familles de modes propres - résonances de corotation	92
5.3.2 Relation de dispersion, vitesses de phase et de groupe	94
<b>5.4 Calculs numériques de modes propres en présence de viscosité</b>	<b>95</b>
5.4.1 Méthode numérique	95
5.4.2 Modes D	96
5.4.3 Modes DT	97
5.4.4 Résonances de corotation et couches critiques	100

Dans ce chapitre, nous étudions à nouveau la dynamique des ondes inertielles que nous avons détaillée dans le chapitre 3 dans le cas de la rotation solide. Cette fois, nous prenons en compte l'impact de la rotation différentielle existant dans les zones convectives externes des étoiles de faible masse (de type M à F) sur les propriétés des ondes inertielles, problème abordé récemment pour la première fois par [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) dans le cas des rotations différentielles *shellular* ( $\Omega(r)$ ) et cylindrique ( $\Omega(r \sin \theta)$ ). Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur le cas de la rotation conique ( $\Omega(\theta)$ ) observée dans le Soleil, à la surface d'autres étoiles de faible masse et également dans les simulations numériques magnéto-hydrodynamiques de l'enveloppe convective des étoiles de faible masse. Ce travail a été effectué en collaboration avec le Dr. C. Baruteau et le Pr. M. Rieutord de l'IRAP<sup>1</sup>. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une publication dans *Astronomy & Astrophysics* ([Guanel et al., 2016](#)) rapportée à la fin de ce chapitre.

1. UMR 5277, CNRS/Université Toulouse III Paul Sabatier

## 5.1 Profil de rotation différentielle dans les enveloppes convectives stellaires

Commençons par discuter ce que l'on sait de la rotation différentielle dans les étoiles de faible masse possédant comme le Soleil un cœur radiatif et une enveloppe convective externe.

### 5.1.1 La rotation différentielle observée dans le Soleil et les autres étoiles

L'étoile la mieux connue à ce jour est évidemment le Soleil : dès la première moitié du XVII<sup>e</sup> siècle, Galilée, Johann Fabricius et Christoph Scheiner (entre autres) ont pu observer le mouvement des taches solaires à différentes latitudes à travers le disque solaire, révélant la rotation de surface non-uniforme de notre étoile : la région équatoriale a une période de rotation d'environ 25 jours, et celle-ci augmente de façon monotone avec la latitude pour dépasser 30 jours dans les régions polaires. On ne peut en revanche pas observer directement la rotation des régions plus profondes du Soleil.

C'est le développement de l'héliosismologie<sup>2</sup> qui a permis de sonder le profil de rotation interne du Soleil jusqu'à une profondeur d'environ  $0.2 R_{\odot}$  grâce à l'observation des *splittings* rotationnels (perturbations des fréquences dues à la rotation) des modes de pulsation acoustiques (modes  $p$ , voir entre autres Schou et al., 1998; Thompson et al., 2003; Couvidat et al., 2003; García et al., 2004, 2007). La figure 5.1 montre le profil de rotation différentielle du Soleil ainsi déterminé : on constate que la rotation différentielle de surface s'étend sur toute la profondeur de la zone convective, dont la base se situe à environ  $0.71 R_{\odot}$ , avec une faible dépendance radiale. La frontière entre l'enveloppe convective et la zone radiative, appelée tachocline (Spiegel & Zahn, 1992), marque également une transition en ce qui concerne le profil de rotation différentielle, car la zone radiative est en rotation quasiment solide jusqu'à une profondeur de  $0.2 R_{\odot}$ .

La rotation différentielle dans les étoiles autres que le Soleil reste à ce jour bien plus difficile à contraindre car les observations sont de moindre qualité (du fait de la résolution angulaire bien plus faible) et couvrent des durées bien inférieures à celles dont nous disposons pour le Soleil. Pourtant, des observations par imagerie Doppler ont révélé que les étoiles les plus massives (type F) ont tendance à avoir un gradient de rotation latitudinal plus marqué que les étoiles moins massives (G et K) (voir Donahue et al., 1996; Barnes et al., 2005; Collier Cameron, 2007).

---

2. L'héliosismologie est l'étude des modes d'oscillations du Soleil (e.g. figure 2.6 et Christensen-Dalsgaard, 2002) dont les propriétés, comme dans le cas terrestre, permettent de sonder l'intérieur du Soleil (sa structure interne, sa composition chimique et sa dynamique)

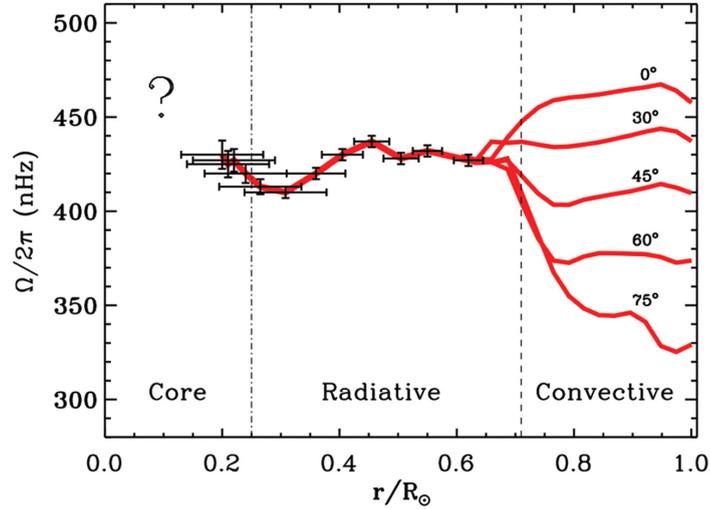


FIGURE 5.1: Profil de rotation interne du Soleil depuis la surface jusqu'à environ  $0.2 R_{\odot}$  inversé à partir des modes d'oscillations du Soleil par l'héliosismologie. Crédit : [García et al. \(2007\)](#).

### 5.1.2 Des simulations numériques MHD pour la rotation différentielle des étoiles de faible masse

Outre les observations, un autre moyen de comprendre et de prédire la dynamique des étoiles de type solaire est le développement de simulations numériques magnétohydrodynamiques non-linéaires en 3D utilisant par exemple les codes ASH ([Brun & Toomre, 2002](#); [Ballot et al., 2007](#); [Brown et al., 2008](#); [Matt et al., 2011](#); [Augustson et al., 2012](#)), MagIC ([Gastine et al., 2014](#)) et PENCIL ([Guerrero et al., 2013](#); [Käpylä et al., 2014](#)). Celles-ci permettent de mener des études systématiques de la rotation différentielle et de la circulation méridienne dans les zones convectives en fonction de propriétés telles que leur rapport d'aspect et la luminosité (tous deux liés à la masse stellaire), et les propriétés dynamiques telles que le taux de rotation moyen, les diffusivités visqueuse et thermique, l'intensité du champ magnétique, la dissipation ohmique, etc. ([Brun, 2014](#); [Brun et al., 2015](#)).

La tendance générale qui se dégage de ces modèles est que l'accélération de Coriolis (c'est-à-dire la rotation) est capable de modifier les propriétés de la convection pour établir un écoulement de rotation différentielle à grande échelle qui dépend de la rotation moyenne. En fait, dans le cas hydrodynamique, le profil de rotation différentielle généré dépend essentiellement du nombre de Rossby convectif  $Ro$  (voir [Brun, 2014](#), pour les différentes définitions possibles de ce nombre) qui mesure le rapport entre la fréquence de retournement caractéristique de la convection et la fréquence de rotation du corps :

$$Ro = \frac{U_c/L_c}{2\Omega}, \quad (5.1)$$

où l'on a introduit les échelles caractéristiques de vitesse  $U_c$  et de longueur  $L_c$  de la convection, si bien qu'une rotation rapide est caractérisée par  $Ro \ll 1$ , et une rotation lente par  $Ro \gg 1$ .

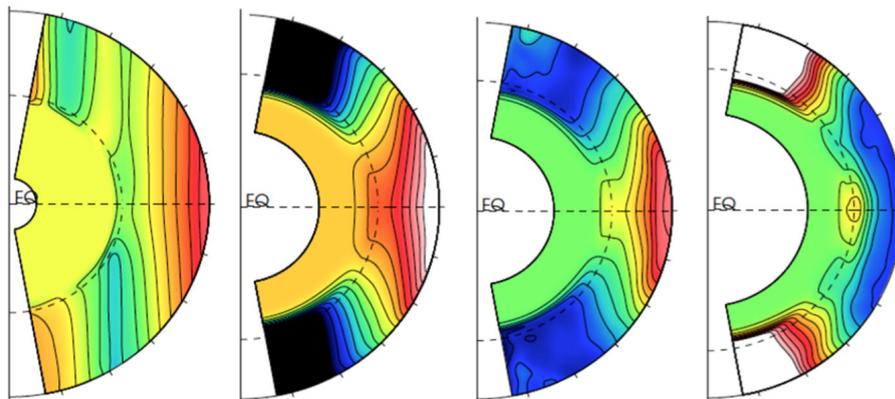


FIGURE 5.2: Profils de rotation interne obtenus par des simulations numériques 3D non-linéaires (code ASH) pour différentes masses stellaires et taux de rotation moyens. Les couleurs claires/rouges représentent une rotation prograde tandis que les couleurs foncées/bleues une rotation rétrograde par rapport à la rotation moyenne. **De gauche à droite** : Etoile de  $0.5 M_{\odot}$  tournant à  $5 \Omega_{\odot}$ . Etoile de  $0.9 M_{\odot}$  tournant à  $3 \Omega_{\odot}$  et  $1 \Omega_{\odot}$ . Etoile de  $1.1 M_{\odot}$  tournant à  $1 \Omega_{\odot}$ . La rotation diminue et le nombre de Rossby augmente donc également de gauche à droite. Crédit : Brun et al. (2015).

Les trois grands types de rotation différentielle apparaissant dans ces modèles sont les suivants :

- une rotation anti-solaire, avec des pôles qui tournent plus vite que l'équateur, obtenue en général pour une rotation lente *i.e.* un nombre de Rossby élevé ( $Ro \gtrsim 1$ ) ;
- une rotation semblable à celle du Soleil, avec un équateur tournant plus rapidement que les pôles, obtenus pour des nombres de Rossby intermédiaires ( $0.2 \lesssim Ro \lesssim 0.9$ ) ;
- une rotation quasi-cylindrique avec une alternance de vents zonaux progrades et rétrogrades, obtenue pour des nombres de Rossby faibles ( $Ro \lesssim 0.1$ ), semblable à ce que l'on attend par exemple dans Jupiter.

Ces différents cas sont illustrés par la figure 5.2 dans laquelle le nombre de Rossby augmente de gauche à droite. La cause de cette rotation différentielle sont les *Reynolds stresses* convectifs (e.g. Brun & Toomre, 2002). Notons enfin que ces simulations numériques parviennent à reproduire l'augmentation de la rotation différentielle latitudinale de surface avec la rotation et la masse.

### 5.1.3 Un profil de rotation différentielle générique et simple pour l'étude des ondes inertielles

Dans le cadre de notre étude, nous choisissons d'utiliser une prescription simplifiée pour le profil de rotation différentielle :

$$\Omega(\theta) = \Omega_0(\theta)/\Omega_{\text{ref}} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta, \quad (5.2)$$

de façon à ce que la vitesse angulaire (adimensionnée) de l'écoulement de rotation différentielle soit 1 aux pôles et  $1 + \varepsilon$  à l'équateur. Le paramètre  $\varepsilon$  décrit le comportement de la rotation différentielle :

- $\varepsilon > 0$  pour une rotation solaire (accélération équatoriale),
- $\varepsilon < 0$  pour une rotation anti-solaire (décélération équatoriale).

La valeur  $\varepsilon \approx 0.3$  donne une bonne approximation du profil de rotation différentielle dans la zone convective du Soleil (voir la figure 5.1).

Dans ce travail, l'interaction des ondes inertielles avec la convection est traitée par une viscosité effective et les champs de vitesse de l'écoulement de marée et des écoulements convectifs sont distincts (voir la discussion du chapitre 2, et la section 2.1 de [Guenel et al. \(2016\)](#) ci-après).

## 5.2 Formulation mathématique

Nous voulons étudier les effets du profil de rotation différentielle (5.2) sur les ondes inertielles pour compléter le travail de [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) et ainsi couvrir l'ensemble des familles de rotation différentielle présentées ci-dessus. C'est pourquoi nous nous plaçons dans un référentiel inertiel et non dans un référentiel tournant. Notons que le profil de rotation (5.2) ne satisfait pas le théorème de Taylor-Proudman pour un fluide homogène et incompressible dans la limite où celui-ci est non-visqueux (voir la section 3.2.2). Nous supposons dans la suite que ce profil est maintenu par une force volumique qui a pour origine les contraintes de Reynolds issues de la convection turbulente mais qui n'est pas incluse dans le modèle. Comme dans le chapitre 3, nous nous limitons donc au cas d'un fluide visqueux homogène et incompressible dans une coquille sphérique de rapport d'aspect  $\eta$  modélisant l'enveloppe convective d'une étoile de faible masse. Nous linéarisons l'équation de Navier-Stokes (adimensionnée) autour de l'écoulement de rotation différentielle ( $\Omega(\theta) \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ ) (dont la divergence est nulle) pour obtenir l'équation suivante (voir [Zahn, 1966a](#); [Baruteau & Rieutord, 2013](#)) portant sur les champs de vitesse  $\mathbf{u}$  et de pression réduite  $p$  inconnus qui se superposent à cette rotation différentielle d'ensemble :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} + 2 \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u}, \quad (5.3)$$

toujours assortie de l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5.4)$$

Nous voyons apparaître le terme d'entraînement ( $\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi}$ ) du fait du choix du référentiel inertiel, le terme d'accélération de Coriolis ( $2 \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}$ ) et le terme complémentaire ( $r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi$ ) dû à la rotation différentielle. De plus, nous utilisons des conditions aux limites de surface libre (*stress-free*) à la fois à la base et à la surface de la zone convective.

Nous recherchons des solutions pour les champs de vitesse  $\mathbf{u}$  et de pression réduite  $p$  sous la forme d'ondes possédant une fréquence  $\omega_p$  dans le référentiel inertiel et un nombre d'onde azimutal  $m$  donné :  $(\mathbf{u}, p) \propto \exp(i\omega_p t + im\varphi)$ . L'introduction de ces expressions dans (5.3) mène à l'équation suivante :

$$i\tilde{\omega}_p \mathbf{u} + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u}, \quad (5.5)$$

où  $\tilde{\omega}_p = \omega_p + m\Omega$  est la fréquence prenant en compte l'effet Doppler appliqué à l'onde. Dans le cas des ondes inertielles en rotation solide présenté au chapitre 3, il s'agissait de la fréquence de l'onde dans le repère tournant avec le fluide. Ici, il s'agit de la fréquence de l'onde vue dans un repère tournant *localement* avec le fluide : c'est donc une fonction des coordonnées d'espace (ici de la colatitude  $\theta$ ) et non plus une constante.

### 5.3 Etude des ondes inertielles dans le cas non-visqueux

Dans un premier temps, on se place dans le cas d'un fluide parfait non-visqueux ( $E = 0$ ), ce qui permet comme dans le chapitre 3 de dériver les relations utiles pour les propriétés de propagation des ondes inertielles, et notamment la dynamique des caractéristiques.

En procédant de manière similaire à ce que nous avons présenté dans le chapitre 3, il est possible d'obtenir une équation aux dérivées partielles sur la pression uniquement après avoir éliminé les composantes de la vitesse. C'est l'équation de Poincaré généralisée au cas de la rotation différentielle, que nous écrivons en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \frac{A_z}{\tilde{\omega}_p^2} \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial z} + \left(1 - \frac{A_s}{\tilde{\omega}_p^2}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \dots = 0, \quad (5.6)$$

où on a négligé les termes de dérivées d'ordre 1 ainsi que les termes constants, ce qui revient à supposer que l'échelle spatiale de l'onde est petite. Les coefficients  $A_s$  et  $A_z$  dans (5.6) sont définis par

$$A_s(s, z) = \frac{2\Omega}{s} \frac{\partial(s^2 \Omega)}{\partial s} \quad \text{et} \quad A_z(s, z) = \frac{2\Omega}{s} \frac{\partial(s^2 \Omega)}{\partial z}. \quad (5.7)$$

Notons que le critère d'instabilité de Rayleigh ( $A_s < 0$ ) est équivalent à  $\varepsilon < -1$  avec notre profil (5.2), si bien que nous n'utiliserons que des valeurs  $\varepsilon > -1$ .

Dans le cas de la rotation solide, cette équation aux dérivées partielles était soit hyperbolique, soit elliptique selon le rapport entre la fréquence dans le référentiel tournant et le taux de rotation de ce dernier (voir (3.26)). Comme dans ce cas, la propagation des ondes en présence de rotation différentielle est possible si et seulement si le discriminant  $\xi(s, z) = A_z^2 + 4\tilde{\omega}_p^2 (A_s - \tilde{\omega}_p^2)$  est positif (domaine hyperbolique), et ne l'est pas lorsqu'il est négatif (domaine elliptique). Or, à cause de la rotation différentielle, le discriminant dépend désormais des coordonnées d'espace et peut changer de signe dans le domaine d'étude, si bien que le domaine est séparé en sous-domaines hyperboliques et elliptiques, séparés par

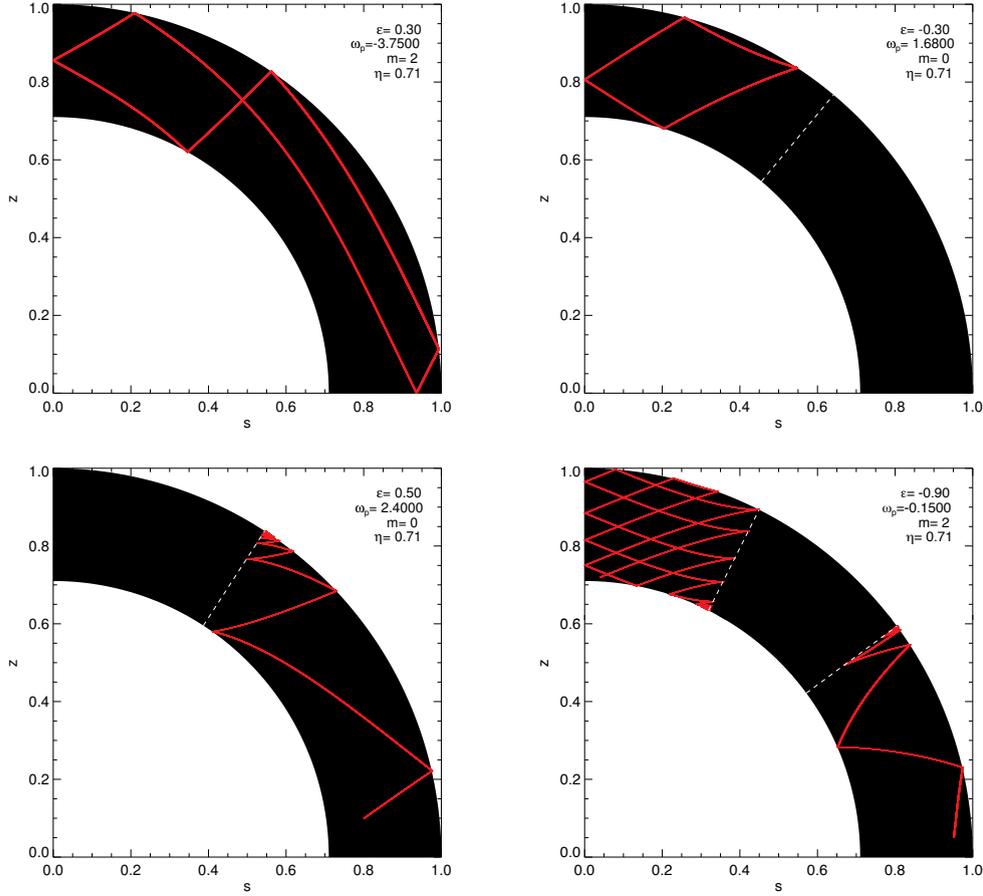


FIGURE 5.3: **En haut à gauche** : Exemple de cycle attracteur avec  $m = 2$ ,  $\omega_p = -3.75$  dans une enveloppe convective semblable à celle du Soleil ( $\varepsilon = 0.3$ ,  $\eta = 0.71$ ). **En haut à droite** : Idem avec  $m = 0$ , fréquence  $\omega_p = 1.68$ , et une rotation anti-solaire ( $\varepsilon = -0.3$ ) ; la ligne discontinue blanche montre la surface de retournement. **En bas à gauche** : Illustration de la convergence des caractéristiques vers l'intersection de la surface de retournement (ligne blanche discontinue) et la sphère externe de la coquille sphérique (pour  $m = 0$ ,  $\omega_p = 2.4$ , and  $\varepsilon = 0.5$ ). **En bas à droite** : Pour  $m = 2$ ,  $\omega_p = -0.126$ , et  $\varepsilon = -0.90$  deux surfaces de retournement existent dans la coquille, permettant la propagation des caractéristiques près de l'équateur et des pôles, mais pas entre les deux.

une ou plusieurs surface(s) de retournement définies implicitement par l'équation  $\xi = 0$ . Comme dans le chapitre 3, on calcule  $\xi$  pour le profil de rotation conique, ainsi que la direction prise par les trajectoires caractéristiques lorsque ce dernier est positif. Nous trouvons :

$$\frac{\xi}{4\tilde{\omega}_p^4} = A^2(\theta) \cos^2 \theta \sin^6 \theta + 2A(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{4\Omega^2(\theta) - \tilde{\omega}_p^2}{\tilde{\omega}_p^2} \quad (5.8)$$

et

$$\frac{dz}{ds} = -A(\theta) \cos \theta \sin^3 \theta \pm \left( \frac{\xi}{4\tilde{\omega}_p^4} \right)^{1/2}, \quad (5.9)$$

où

$$A(\theta) = 2\varepsilon \frac{\Omega(\theta)}{\tilde{\omega}_p^2}. \quad (5.10)$$

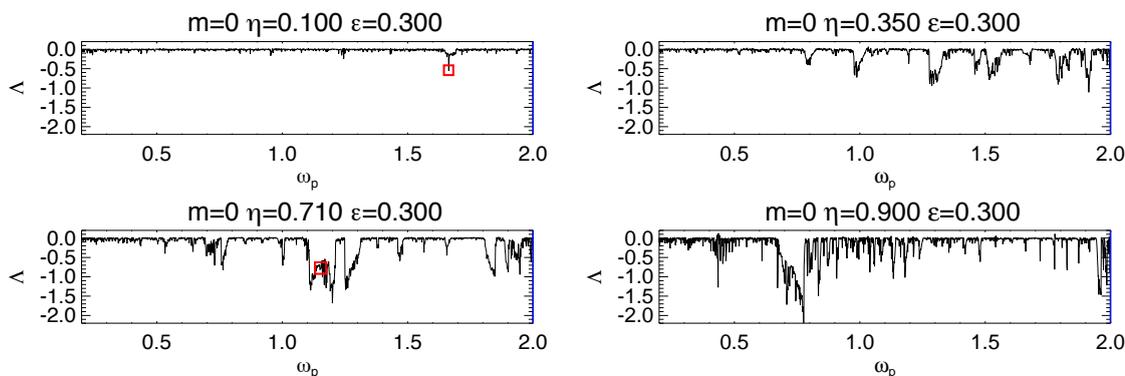


FIGURE 5.4: Evaluation numérique de l'exposant de Lyapunov  $\Lambda$ , en fonction de la fréquence  $\omega_p$  pour  $m = 0$ ,  $\varepsilon = 0.30$ , et  $\omega_p \in [0.2, 2.0]$ . Les quatre panneaux correspondent aux valeurs du rapport d'aspect  $\eta = \{0.10, 0.35, 0.71, 0.90\}$ . Les carrés rouges correspondent aux modes propres montrés dans les figures 5.6 et 5.7.

La figure 5.3 illustre différents cas rencontrés lorsque l'on intègre numériquement les trajectoires caractéristiques dans une coquille sphérique (un seul quadrant est montré pour des raisons de symétrie équatoriale). D'abord, ces trajectoires ne sont plus des lignes droites mais sont courbées par la rotation différentielle. Ensuite, on trouve toujours des cycles limites attracteurs comme dans le cas de la rotation solide. Leur occurrence dans un intervalle de fréquence donné augmente avec le rapport d'aspect  $\eta$  grâce aux nombreuses réflexions sur la sphère interne, que l'on peut diagnostiquer grâce aux exposants de Lyapunov  $\Lambda$  (voir l'équation (3.29)). Nous les estimons par intégration numérique de l'équation (5.9) à partir d'un point source dans la coquille sphérique, pour différents jeux de paramètres du modèle comme illustré par la figure 5.4. Cependant, on constate aussi l'existence d'attracteurs ponctuels vers lesquels convergent les caractéristiques : ils sont situés à l'intersection entre une surface de retournement (lorsqu'elle existe) avec la sphère interne ou externe de la coquille. Ce comportement avait déjà été observé par [Dintrans et al. \(1999\)](#) dans le cas des ondes gravito-inertielles en rotation solide. Enfin, dans de très rares cas, il peut exister deux surfaces de retournement dans la coquille (voir le panneau inférieur droit de la figure 5.3).

Notons également que contrairement au cas de la rotation solide, les caractéristiques dépendent ici du nombre d'onde azimutal  $m$  à travers la fréquence  $\tilde{\omega}_p$  qui est maintenant une fonction des coordonnées d'espace. C'est pourquoi en rotation différentielle, on ne peut plus déduire simplement les courbes caractéristiques à un  $m$  donné à partir de celles obtenues pour  $m = 0$ .

### 5.3.1 Deux familles de modes propres - résonances de corotation

La possible existence de surfaces de retournement (pour lesquelles  $\xi = 0$ ) dans le domaine d'étude mène à l'existence de deux classes possibles de modes inertielles en présence de rotation différentielle, illustrées par la figure 5.5 :

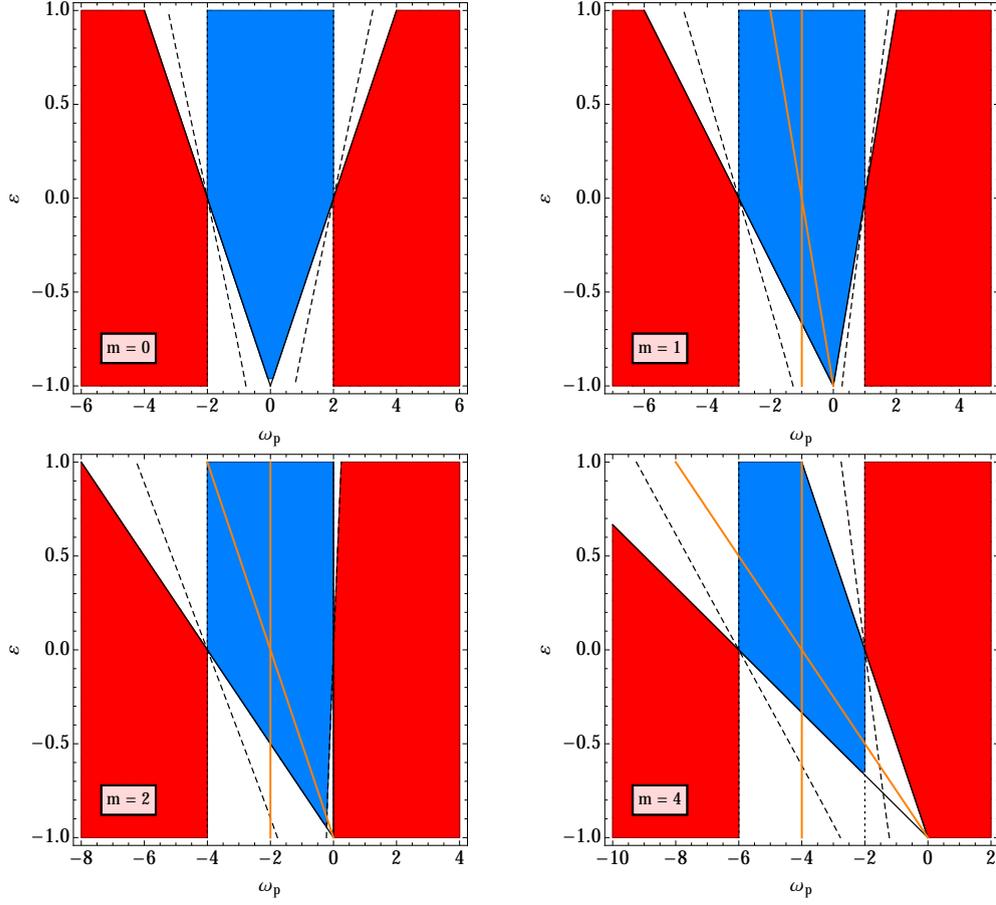


FIGURE 5.5: Illustration des deux types de modes inertiels pouvant se propager dans un fluide en rotation différentielle  $\Omega(\theta) = \Omega_0(\theta)/\Omega_{\text{ref}} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta$ , pour  $m = \{0, 1, 2, 4\}$ . La fréquence du mode  $\omega_p$  est en abscisse et le paramètre de rotation différentielle  $\varepsilon$  est en ordonnée. **Bleu** : domaine d'existence des modes D. **Blanc** : domaine d'existence des modes DT. **Rouge** : Pas de propagation possible ( $\xi < 0$  partout). **Orange** : Les modes situés entre les lignes oranges possèdent une résonance de corotation ( $\tilde{\omega}_p = 0$ ) dans la coquille. Les lignes noires pointillées (verticales), continues et discontinues correspondent à l'existence de surface de retournement en  $\theta = 0$  (aux pôles),  $\theta = \pi/2$  (à l'équateur) et  $\theta = \pi/4$  respectivement.

1. les modes pour lesquels il existe au moins une surface de retournement dans la coquille, que l'on appellera modes DT conformément à la terminologie définie dans [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) (D pour *differential rotation*, T pour *turning surface*), et dont le domaine d'existence est montré en blanc sur la figure 5.5 ;
2. les modes qui se propagent dans toute la coquille, appelés modes D ( $\xi > 0$  partout), dont le domaine d'existence est montré en bleu sur la figure 5.5.

On constate également que l'intervalle de fréquence habituellement considéré pour les ondes inertielles  $|\tilde{\omega}_p| \leq 2\Omega_{\text{ref}}$  est modifié par la rotation différentielle et dépend de  $m$ .

Pour les modes inertiels non-axisymétriques ( $m \neq 0$ ),  $\tilde{\omega}_p$  peut également s'annuler localement au niveau de ce que l'on appelle une couche de corotation (ou encore une couche critique) ([Booker & Bretherton, 1967](#); [Baruteau & Rieutord, 2013](#)). Leur position est donnée

par

$$\sin \theta = \sqrt{\varepsilon^{-1} \left( -1 - \frac{\omega_p}{m} \right)} \quad (5.11)$$

et elles n'existent que lorsque  $\omega_p \in [-m, -m(1 + \varepsilon)]$  (si  $m\varepsilon < 0$ ) ou lorsque  $\omega_p \in [-m(1 + \varepsilon), -m]$  (si  $m\varepsilon > 0$ ). Les couches critiques existent pour les modes D comme DT et sont illustrées par les lignes orange dans la figure 5.5. Comme on peut le voir à partir de l'équation (5.9), les trajectoires caractéristiques peuvent devenir localement verticales à l'approche d'une telle couche. Ces couches critiques peuvent être un lieu d'échange de moment cinétique entre les ondes et l'écoulement moyen de rotation différentielle (e.g. Booker & Bretherton, 1967; Goldreich & Nicholson, 1989).

### 5.3.2 Relation de dispersion, vitesses de phase et de groupe

Enfin, nous dérivons quelques relations importantes pour la propagation des ondes inertielles, à commencer par la relation de dispersion

$$\tilde{\omega}_p = \pm 2\Omega(\theta) \mathcal{B} \frac{|k_z|}{\|\mathbf{k}\|}, \quad (5.12)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde ( $\|\mathbf{k}\| = \sqrt{k_s^2 + k_z^2}$ ) et

$$\mathcal{B} = \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \varepsilon \sin^2 \theta} \right) + \frac{k_s \varepsilon \cos \theta \sin^3 \theta}{k_z (1 + \varepsilon \sin^2 \theta)} \right]^{1/2}, \quad (5.13)$$

est supposé réel (s'il ne l'est pas, la notion même de propagation d'ondes n'a plus de sens).

Les vitesses de phase et de groupe des ondes inertielles sont alors données respectivement par les relations

$$\mathbf{v}_p = \pm 2\Omega(\theta) \mathcal{B} \frac{k_z}{\|\mathbf{k}\|^3} \mathbf{k}, \quad (5.14)$$

et

$$\mathbf{v}_g = \pm 2\Omega(\theta) \frac{k_s}{\|\mathbf{k}\|^3} (-k_z \mathbf{e}_s + k_s \mathbf{e}_z) \left[ \mathcal{B} - \frac{2\Omega(\theta) \varepsilon \cos \theta \sin^3 \theta}{k_s k_z} \|\mathbf{k}\|^2 \mathcal{B}^{-1} \right]. \quad (5.15)$$

On remarque qu'on a toujours  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g = 0$  comme dans le cas des ondes inertielles se propageant dans un fluide en rotation solide. De plus, on note que la vitesse de phase  $\mathbf{v}_p$  est toujours nulle à l'approche d'une couche critique. Le comportement de la vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g$  au voisinage des couches de corotation est décrit en détail dans Guenel et al. (2016) ci-après.

## 5.4 Calculs numériques de modes propres en présence de viscosité

Nous rappelons brièvement la méthode numérique utilisée pour calculer des fréquences et modes inertiels propres en présence de viscosité. Ensuite, nous montrons les résultats numériques essentiels obtenus pour les modes D et DT, en particulier comment la structure spatiale est reliée à la dynamique des caractéristiques et aux cycles attracteurs. Enfin, nous examinons les propriétés de modes non-axisymétriques qui présentent une résonance de corotation, dont nous verrons la grande importance pour la dissipation de marée dans le chapitre 6.

### 5.4.1 Méthode numérique

Nous résolvons numériquement le système d'équations linéaires adimensionné (5.4)-(5.5) muni des conditions aux limites *stress-free* sur les sphères interne et externe. En fait, nous prenons le rotationnel de l'équation du mouvement pour se débarrasser du terme en  $\nabla p$ , ce qui réduit le nombre de variables du système mais fait apparaître des dérivées d'ordre 4 au lieu de dérivées d'ordre 2. Pour résoudre cette équation, nous utilisons une décomposition unique du champ de vitesse inconnu  $\mathbf{u}$  sur la base orthogonale des harmoniques sphériques vectorielles (Rieutord, 1987),

$$\mathbf{u}(x, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ u_m^l(x) \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) + v_m^l(x) \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + w_m^l(x) \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\} \quad (5.16)$$

avec

$$\mathbf{R}_l^m = Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{S}_l^m = \nabla_{\mathbf{H}} Y_l^m, \quad \mathbf{T}_l^m = \nabla_{\mathbf{H}} \times \mathbf{R}_l^m, \quad (5.17)$$

où  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  est l'harmonique sphérique de degré  $l$  et d'ordre  $m$  normalisée sur la sphère unité, et  $\nabla_{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_\theta \partial_\theta + \mathbf{e}_\varphi (\sin \theta)^{-1} \partial_\varphi$  est le gradient horizontal sur la sphère unité. Plus de détails sur ces fonctions sont disponibles dans le chapitre 3 et l'annexe A.

L'introduction de cette décomposition dans le système d'équations mène à un système linéaire d'équations différentielles couplées mettant en jeu les fonctions radiales  $u_m^l, v_m^l, w_m^l$  et  $p_m^l$  (pour différents  $l$ ) et leurs dérivées. Dans ce chapitre, la résolution numérique porte en fait sur l'équation (5.5) dont on a pris le rotationnel, ce qui permet d'éliminer  $p_m^l$  et  $v_m^l$  en utilisant (5.4). Cependant, cette façon de procéder augmente l'ordre des équations différentielles restantes sur  $u_m^l$  et  $w_m^l$ . De plus, la rotation différentielle et l'accélération de Coriolis couplent les différents degrés  $l$  jusqu'à  $l \pm 3$ , ce qui rend les équations bien plus complexes que dans le cas de la rotation solide. De lourds développements analytiques, non rapportés dans ce manuscrit du fait de leur longueur, ont été nécessaires pour les obtenir.

Le système d'équations différentielles linéaires couplées ainsi obtenu porte sur les fonctions radiales  $u_l^m$  et  $w_l^m$  et leurs dérivées (jusqu'à l'ordre 4 et 2 respectivement). Ce système

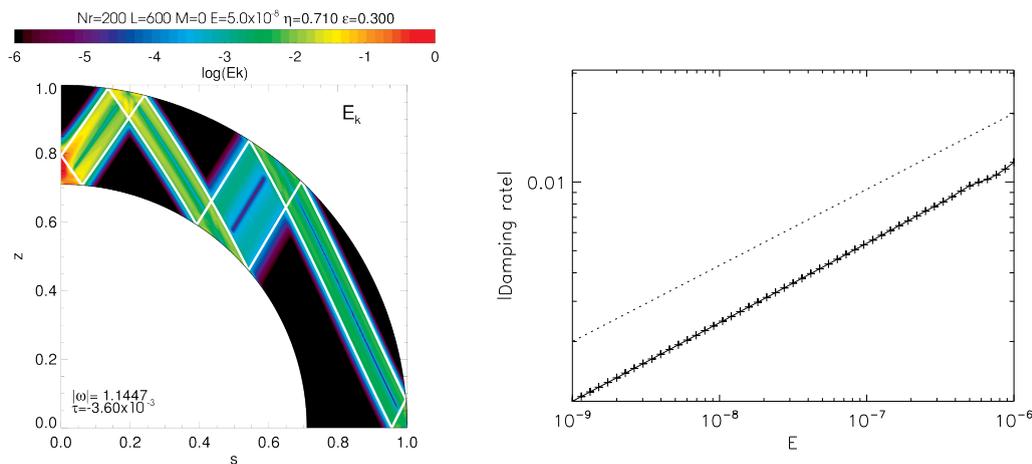


FIGURE 5.6: **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique (normalisée à la valeur maximale) d'un mode D axisymétrique de fréquence propre  $\omega_p \approx 1.15$  obtenu pour  $E = 5 \times 10^{-8}$ , le rapport d'aspect et la rotation différentielle solaires ( $\eta = 0.71$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ). Le cycle attracteur obtenu par la méthode des caractéristiques pour ces paramètres est tracé en blanc. **Droite** : Évolution du taux d'amortissement en fonction du nombre d'Ekman  $E$ . La ligne pointillée est proportionnelle à  $E^{1/3}$ .

est tronqué à l'ordre  $L$  pour la base des harmoniques sphériques, et nous discrétisons les fonctions radiales sur les noeuds de collocation de Gauss-Lobatto associés aux polynômes de Tchebychev (voir l'équation (A.50)) jusqu'à l'ordre  $N_r$ . Ceci transforme le problème de départ en un système linéaire de la forme :

$$AX = \omega_p BX, \quad (5.18)$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées diagonales par blocs (au plus sept diagonales par blocs non-nulles pour  $A$  correspondant aux couplages entre degrés  $l$  jusqu'à  $l \pm 3$ , une seule diagonale par bloc pour  $B$ ) de taille proportionnelle à  $N_r \times L$ , et  $X$  est le vecteur contenant les valeurs des fonctions  $u_m^l$  et  $w_m^l$  sur les noeuds de collocation. La valeur propre ( $\omega_p = \text{Re}[\omega_p] + i\tau$ ) est en général complexe, et sa partie réelle représente la fréquence propre tandis que sa partie imaginaire  $\tau$  représente le taux d'amortissement (ou de croissance) du mode. Nous recherchons maintenant des couples de valeurs propres et vecteurs propres de ce système linéaire à l'aide de l'algorithme incomplet d'Arnoldi-Tchebychev (voir Valdetaro et al., 2007), et ceci pour les grandes familles de modes inertielles que nous avons identifiées dans la section 5.3.

### 5.4.2 Modes D

Pour les modes D, nous constatons un accord clair entre la distribution d'énergie cinétique de ces modes propres et les trajectoires caractéristiques calculées semi-analytiquement. Ceci est encore plus frappant lorsqu'il existe un cycle attracteur de caractéristiques, l'énergie cinétique du mode étant alors concentrée dans un ensemble de couches de cisaillement localisées au voisinage de cet attracteur comme c'est le cas pour les figures 5.6 et le panneau

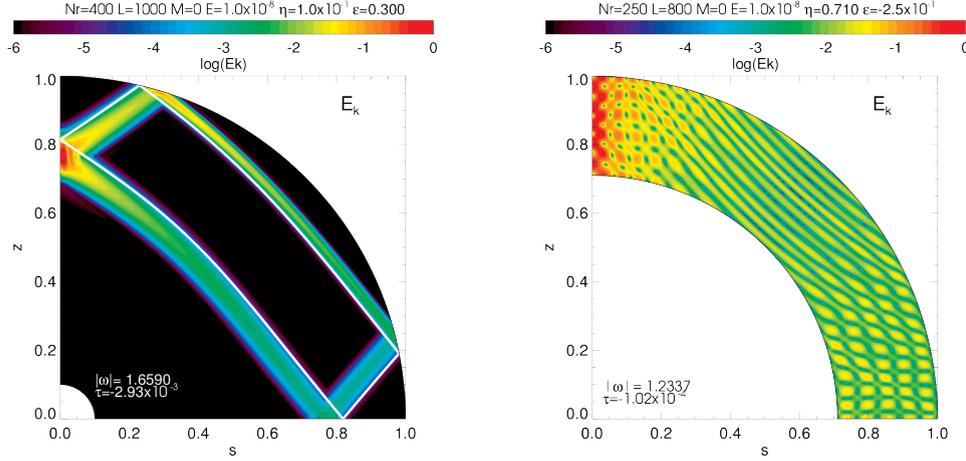


FIGURE 5.7: **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique (normalisée) d'un mode D de fréquence propre  $\omega_p \approx 1.66$  obtenu pour  $E = 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.10$ , et  $\varepsilon = 0.30$ . Le cycle attracteur de caractéristiques (qui ne rebondit pas sur le cœur) est à nouveau tracé en blanc. **Droite** : Idem pour un mode D de fréquence  $\omega_p \approx 1.23$  obtenu pour  $E = 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.71$ , et une rotation anti-solaire  $\varepsilon = -0.25$ . Ce mode est associé à une orbite quasi-périodique et non à un attracteur de caractéristiques.

gauche de la figure 5.7. De plus, les modes D (axisymétriques ou non) que nous avons calculés pour des paramètres en dehors du domaine d'existence d'une résonance de corotation possèdent des propriétés très similaires à celles des modes inertiels en rotation solide : leur taux d'amortissement et la largeur des couches de cisaillements, entre autres, suivent les mêmes lois d'échelles, comme illustré par le panneau droit de la figure 5.6 pour le taux d'amortissement qui suit une loi d'échelle en  $E^{1/3}$ .

### 5.4.3 Modes DT

Nous avons cherché à calculer numériquement des modes inertiels propres dans le domaine de paramètres correspondant aux modes DT. Du fait de la difficulté à en trouver, nous avons utilisé une méthode pour prédire ou non leur existence. Pour cela, nous avons dans un premier temps étudié la distribution des valeurs propres (fréquence propre et taux d'amortissement) en résolvant complètement ce dernier par une méthode de factorisation QZ dont le coût augmente très rapidement avec la taille du système et donc la résolution spectrale. Ceci n'est donc faisable que pour des résolutions relativement faibles, c'est pourquoi nous avons choisi un nombre d'Ekman assez élevé de l'ordre de  $10^{-5}$ , mais qui est néanmoins cohérent avec les valeurs de viscosité turbulente attendue dans les intérieurs stellaires (voir chapitre 7).

La figure 5.8 montre que lorsque  $\varepsilon > 0$ , les modes résonants (c'est-à-dire avec un taux d'amortissement faible) sont situés préférentiellement dans l'intervalle de fréquences correspondant aux modes D, alors qu'il n'y en a pas pour l'intervalle de fréquences des modes DT. Cette tendance est modifiée lorsque  $\varepsilon < 0$ , avec tout de même quelques modes propres peu amortis. Cette analyse concorde donc avec les difficultés que nous avons rencontrées

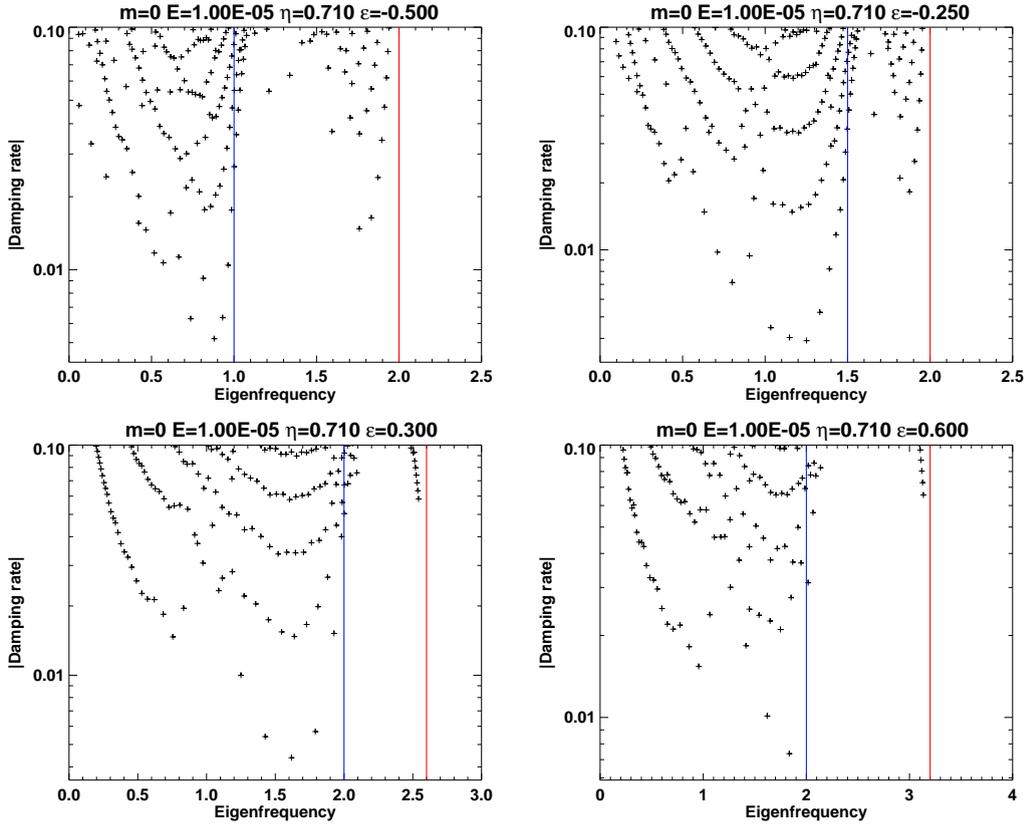


FIGURE 5.8: Distribution des valeurs propres dans le plan complexe pour  $m = 0$ ,  $E = 10^{-5}$ , le rapport d’aspect solaire  $\eta = 0.71$  et une résolution spectrale de  $N_r = 60$  et  $L = 150$ . Les quatre panneaux correspondent à  $\varepsilon = \{-0.50, -0.25, 0.30, 0.60\}$ . Les lignes verticales bleues et rouges illustrent la transition entre le domaine des modes D et DT, et la limite du domaine d’existence des modes DT respectivement.

pour trouver des modes DT à nombre d’Ekman plus faible et pour une rotation différentielle de type solaire. En revanche, nous avons tout de même réussi à calculer certains modes DT avec une rotation différentielle anti-solaire, comme le montre l’exemple de la figure 5.9.

Le mode DT axisymétrique montré en figure 5.9 a été calculé à partir d’un mode propre à la fréquence  $\omega_p \approx 1.82$  obtenu pour  $E = 10^{-5}$ . Ce mode a ensuite été suivi en diminuant  $E$  petit à petit (et en augmentant la résolution spectrale) jusqu’à  $E = 2.2 \times 10^{-8}$ . Comme attendu, l’énergie cinétique du mode est concentrée dans le domaine hyperbolique situé près de l’axe de rotation, et la couche de cisaillement émise à la latitude critique sur la sphère interne se réfléchit sur la ligne blanche discontinue symbolisant la surface de retournement, jusqu’à converger vers l’intersection entre la surface de retournement et de la sphère interne. En regardant de plus près la dynamique des caractéristiques (également tracées) pour ces paramètres, nous avons constaté que celles-ci convergeaient en effet vers un attracteur ponctuel situé à l’intersection de la surface de retournement et de la sphère interne. C’est d’ailleurs le cas que nous avons le plus fréquemment rencontré dans le cas des modes DT.

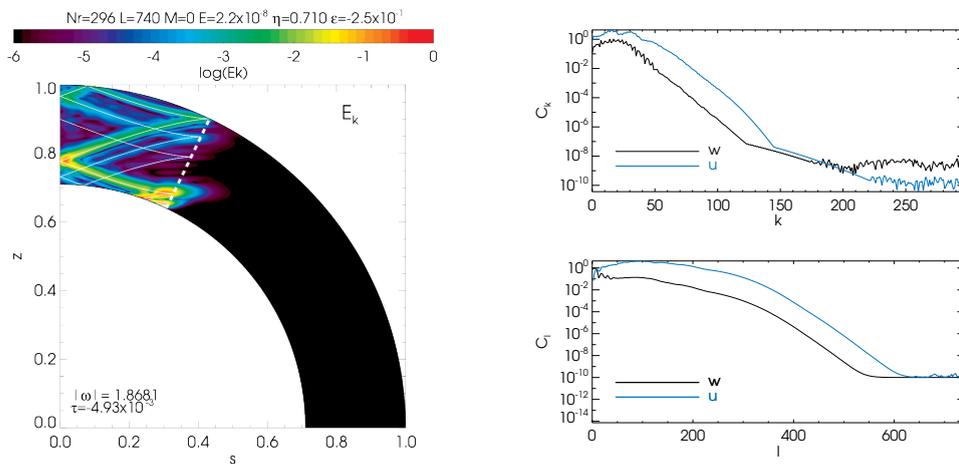


FIGURE 5.9: **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode DT axisymétrique  $m = 0$  avec une fréquence  $\omega_p \approx -1.86$  obtenu pour  $E = 2.2 \times 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.71$  et  $\varepsilon = -0.25$ . La surface de retournement est en ligne blanche discontinue. **Droite** : Coefficients spectraux maximaux montrant la convergence numérique de la simulation pour la composante radiale ( $u$ ) et orthoradiale ( $w$ ) du champ de vitesse de ce mode, en fonction de l'index  $k$  de la base des polynômes de Tchebychev et de l'indice  $l$  de la base des harmoniques sphériques.

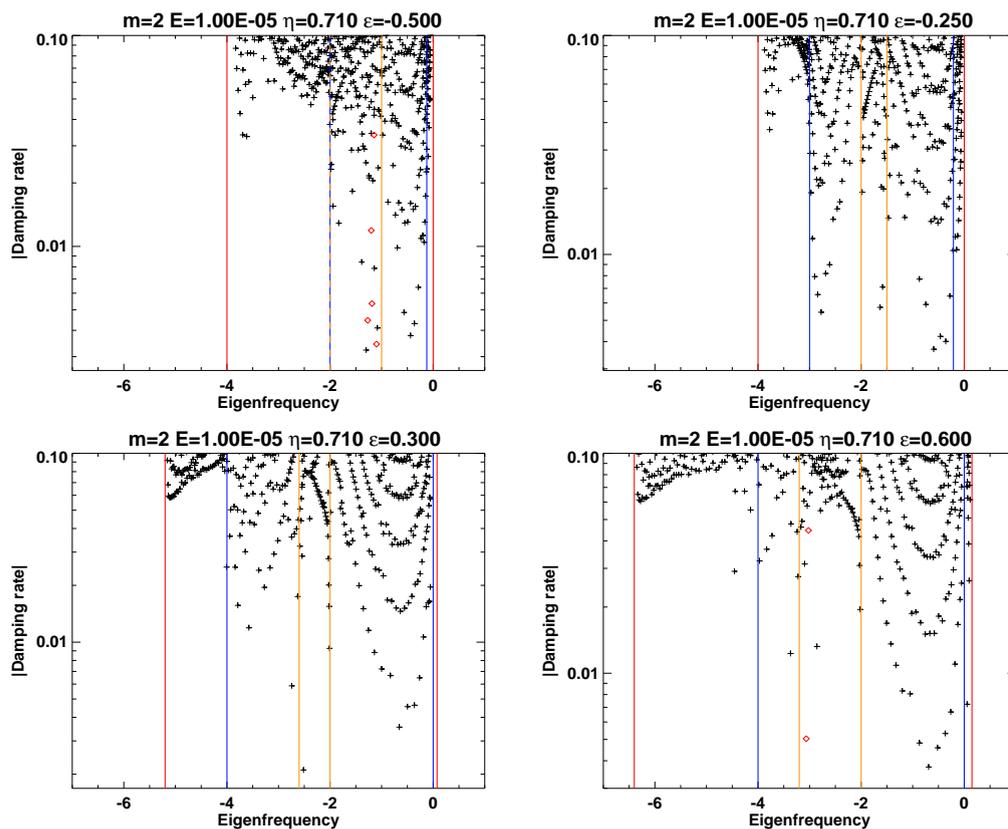


FIGURE 5.10: Identique à la figure 5.8 mais pour  $m = 2$ . Les lignes orange sont les extrémités de l'intervalle de fréquence pour lesquelles une couche critique existe dans la coquille (voir Fig. 5.5). Les symboles rouges correspondent à des valeurs propres instables avec  $\text{Im}(\omega_p) > 0$ .

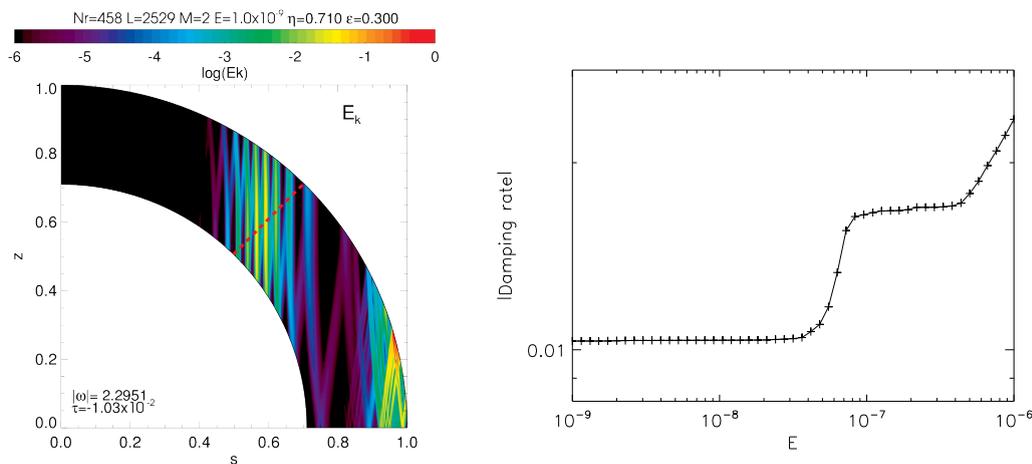


FIGURE 5.11: **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode D stable avec  $m = 2$ , de fréquence  $\omega_p \approx -2.30$  obtenu pour  $E = 10^{-9}$ , le rapport d'aspect et la rotation différentielle solaires ( $\eta = 0.71$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ). La ligne rouge discontinue marque l'emplacement de la couche de corotation. **Droite** : Évolution du taux d'amortissement avec le nombre d'Ekman  $E$ .

Nous avons effectué une étude similaire pour  $m = 2$ , et si la distinction entre les cas  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon < 0$  n'est plus très claire, il semble toujours que les modes résonants soient toujours préférentiellement des modes D et non des modes DT. Ainsi, les ondes inertielles dont la propagation est restreinte à une partie de la coquille sphérique par la rotation différentielle ne forment que peu de modes d'oscillation propres. Cependant, nous avons constaté l'existence de valeurs propres instables avec un taux d'« amortissement » négatif, c'est-à-dire un taux de croissance exponentiel. Celles-ci ne sont apparues que lorsque  $m \neq 0$  et dans l'intervalle correspondant à l'existence de résonances de corotation.

#### 5.4.4 Résonances de corotation et couches critiques

Nous avons donc ensuite calculé numériquement des modes propres avec  $m \neq 0$  et pour des paramètres correspondant à l'existence d'une résonance de corotation (voir la figure 5.5). Ce cas correspond à une singularité du problème non-visqueux avec une vitesse de groupe qui peut alors devenir verticale et infinie (voir la section 3.3 de Guenel et al., 2016). Nous avons trouvé des modes stables comme le mode D de la figure 5.11. Celui-ci possède une couche de cisaillement émise à la latitude critique externe, où l'énergie cinétique est maximale. Cette couche de cisaillement devient de plus en plus verticale à mesure qu'elle approche de la couche critique illustrée par la ligne discontinue rouge, mais parvient à la traverser. Le taux d'amortissement de ce mode a un comportement très différent des modes D ne possédant pas de résonance de corotation : ce n'est pas une loi de puissance en  $E$ . Au contraire, celui-ci tend vers une valeur constante lorsque  $E$  diminue (à noter le saut de valeur propre autour de  $E \approx 7 \times 10^{-8}$  dans le calcul présenté ici).

Le cas de la figure 5.12 est différent. Nous avons suivi une valeur propre instable de fréquence  $\omega_p \approx -1.10$  obtenue pour  $E = 10^{-5}$ ,  $m = 2$ ,  $\eta = 0.71$ , et  $\varepsilon = -0.5$  (voir le panneau

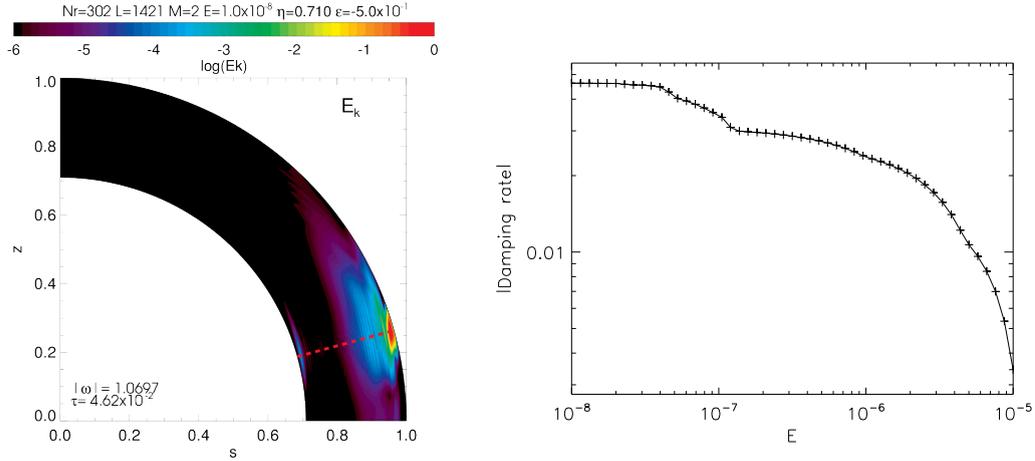


FIGURE 5.12: **Gauche** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique d'un mode D instable avec  $m = 2$ , de fréquence  $\omega_p \approx 1.07$  obtenu pour  $E = 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.71$  et  $\epsilon = -0.5$ . La ligne rouge discontinue marque l'emplacement de la couche de corotation. **Droite** : Évolution du taux de croissance en fonction du nombre d'Ekman  $E$ . Il y a plusieurs sauts de valeurs propres aux alentours de  $E \approx \{5 \times 10^{-6}, 10^{-7}, 5 \times 10^{-8}\}$ .

supérieur gauche de la figure 5.10) en diminuant petit à petit  $E$  jusqu'à  $E = 10^{-8}$ . Contrairement à tous les modes d'oscillation stables présentés jusqu'ici, le champ de vitesse montré ici ne semble posséder aucune structure ressemblant à des couches de cisaillement. On constate seulement une accumulation locale d'énergie cinétique dans une région proche de la couche critique. Ici encore, le taux de croissance ne suit pas une loi de puissance en  $E$ . Si l'on ignore les sauts de valeur propre, il devient approximativement constant et atteint des valeurs extrêmement grandes.

L'effet des couches de corotation sur les propriétés de propagation de différentes familles d'ondes dans des conteneurs variés a déjà été étudié dans la littérature (e.g. Grimshaw, 1979; Booker & Bretherton, 1967; Acheson, 1972; Alvan et al., 2013) mais toujours dans des cas où l'écoulement moyen crée un cisaillement dans la direction verticale, alors que notre profil de rotation différentielle conique crée lui un cisaillement horizontal. Dans tous les cas, les couches critiques ont un impact très important pour la propagation des ondes (gravito-)inertielles dans des fluides en rotation différentielle (stratifiés), avec potentiellement un fort échange de moment cinétique entre le champ de vitesse des ondes et l'écoulement de rotation différentielle et une dissipation visqueuse fortement modifiée (voir chapitre 6). Pour mieux comprendre le comportement des ondes inertielles de marée dans les enveloppes convectives en rotation différentielle conique, une approche intéressante serait un modèle local simplifié dans lequel une onde inertielle rencontre une couche critique induite par la présence d'un cisaillement horizontal.

# Tidal inertial waves in differentially rotating convective envelopes of low-mass stars

## I. Free oscillation modes

M. Guenel<sup>1</sup>, C. Baruteau<sup>2</sup>, S. Mathis<sup>1,3</sup>, and M. Rieutord<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DSM – CNRS – Université Paris Diderot, IRFU/SaP Centre de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France  
e-mail: [mathieu.guenel;stephane.mathis]@cea.fr

<sup>2</sup> Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie, Observatoire Midi-Pyrénées, Université de Toulouse, 14 avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France  
e-mail: [clement.baruteau;michel.rieutord]@irap.omp.eu

<sup>3</sup> LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 6, Univ. Paris-Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

Received 23 October 2015 / Accepted 17 January 2016

### ABSTRACT

*Context.* Star–planet tidal interactions may result in the excitation of inertial waves in the convective region of stars. In low-mass stars, their dissipation plays a prominent role in the long-term orbital evolution of short-period planets. Turbulent convection can sustain differential rotation in their envelopes with an equatorial acceleration (as in the Sun) or deceleration, which can modify the propagation properties of the waves.

*Aims.* We explore in this first paper the general propagation properties of free linear inertial waves in a differentially rotating homogeneous fluid inside a spherical shell. We assume that the angular velocity background flow depends on the latitudinal coordinate alone, close to what is expected in the external convective envelope of low-mass stars.

*Methods.* We use an analytical approach in the inviscid case to get the dispersion relation, from which we compute the characteristic trajectories along which energy propagates. This allows us to study the existence of attractor cycles and infer the different families of inertial modes. We also use high-resolution numerical calculations based on a spectral method for the viscous problem.

*Results.* We find that modes that propagate in the whole shell (D modes) behave the same way as with solid-body rotation. However, another family of inertial modes exists (DT modes), which can only propagate in a restricted part of the convective zone. Our study shows that they are less common than D modes and that the characteristic rays and shear layers often focus towards a wedge – or point-like attractor. More importantly, we find that for non-axisymmetric oscillation modes, shear layers may cross a corotation resonance with a local accumulation of kinetic energy. Their damping rate scales very differently from the value we obtain for standard D modes, and we show an example where it is independent of viscosity (Ekman number) in the astrophysical regime in which it is small.

**Key words.** hydrodynamics – waves – planet-star interactions – stars: rotation

## 1. Introduction

The tidal interaction between a star and its orbiting companion results from the differential force exerted by each body on the other. Indeed, the gravitational potential created by the companion is not uniform inside the star since it is an extended body and not a point-like mass. If the orbit is close enough, the star experiences a non-negligible periodical forcing which generates tidal flows. Their dissipation into heat through various friction mechanisms (see Zahn 2013; Mathis & Remus 2013; Ogilvie 2014) takes energy away from the system and allows for a redistribution of angular momentum, which leads to the evolution of the spin and orbital parameters on secular timescales. Depending on the initial distribution of angular momentum between the individual spins and the orbit, the system may evolve towards an equilibrium state where the orbit is circular and the spins of the bodies are synchronized and aligned with the orbit or lead to the inspiral or ejection of the companion (Hut 1980).

Observational evidence for ongoing tidal interactions was found in close binary stars, for instance by Giuricin et al. (1984), Verbunt & Phinney (1995), and more recently by

Meibom & Mathieu (2005) who showed that the oldest systems have circularized orbits, though the spin-orbit synchronization is still unclear (Meibom et al. 2006). Observations of extrasolar planets by the radial-velocity and transits methods have developed rapidly over the past decade and stimulated interest in looking for signatures of tidal interactions in star-planet systems. For instance, Pont (2009) looked for an excess rotation in stars with planets (due to substantial inward migration), while Husnoo et al. (2012) used observed eccentricities to conclude that tidal interactions play a prominent role in the orbital evolution and survival of hot Jupiters (see also Lai 2012; Guillot et al. 2014). Moreover, Jackson et al. (2008) consistently checked that the observed low eccentricities of close-in planets can be explained by tidal evolution processes, and calibrated the required tidal quality factors. Hansen (2010) and Penev et al. (2012) used observed populations of exoplanets and tidal evolution models to constrain tidal dissipation in stars, and both studies seem to agree that their results are inconsistent with the dissipation inferred from the circularization of binary stars, suggesting that a different mechanism is at play in this case. Winn et al. (2010) and Albrecht et al. (2012) also proposed that tidal dissipation in convective regions

could be responsible for the low obliquities of hot Jupiters orbiting around cool stars, though [Mazeh et al. \(2015\)](#) found that this property extends to *Kepler* objects of interest (KOIs) with orbital periods up to 50 days, for which tidal interactions should be negligible. These results have to be put into perspective since many other processes are responsible for shaping the architecture of the systems – such as migration in the protoplanetary disk (e.g. [Baruteau et al. 2014](#)), planet-planet scattering (e.g. [Chatterjee et al. 2008](#)), Kozai oscillations (e.g. [Naoz et al. 2011](#)), star-planet magnetic interactions (see [Strugarek et al. 2014](#)), magnetic spin-down of the star (see [Barker & Ogilvie 2009](#); [Damiani & Lanza 2015](#)) – and the global picture remains quite uncertain.

On the theoretical side, the tidal response of a star has been investigated in the past, starting with the theory of the equilibrium tide, which is the flow induced by the quasi-hydrostatic adjustment to the tidal potential, and its dissipation by turbulent friction in the convective envelope of low-mass stars ([Zahn 1966a,b](#)). This work was followed by the study of the radiative damping of tidal gravity modes ([Zahn 1975](#)) in more massive stars with an outer radiative region. [Zahn \(1977\)](#) then estimated the strengths of these mechanisms in order to derive the characteristic timescales for circularization, synchronization and alignment for binary stars. Since then, most works about tidal interactions were based on Zahn’s approach and focused on giving more realistic descriptions of the mechanisms thought to be responsible for tidal dissipation, especially the dynamical tide in radiative regions in early-type stars. For instance, [Savonije & Papaloizou \(1983, 1984\)](#) performed numerical simulations of gravity modes excited by a periodic tidal potential in a non-rotating massive star and derived the associated timescales for the orbital evolution of massive binaries. The effects of rotation on these gravity modes and the associated tidal dissipation, ignored by Zahn, were then investigated by [Rocca \(1987, 1989\)](#) who included the effects of the Coriolis acceleration, and [Goldreich & Nicholson \(1989\)](#) who took into account possible internal differential rotation.

After the discovery of the first exoplanetary systems in the mid 1990s, the study of star-planet tidal interaction regained interest and studies shifted towards lower-mass stars with radiative cores and convective envelopes, for which the accepted tidal dissipation mechanism so far was the viscous dissipation of Zahn’s equilibrium tide in the convective zone. [Terquem et al. \(1998\)](#), [Goodman & Dickson \(1998\)](#) and [Witte & Savonije \(2002\)](#) performed numerical calculations of the dynamical tide in the radiative core of non-rotating solar-like stars and studied the effect of resonances in the core of a solar-type star, and found that the associated tidal dissipation could be more efficient than the viscous dissipation of the equilibrium tide in the convective envelope. [Barker & Ogilvie \(2010, 2011\)](#) and [Barker \(2011\)](#) also studied the possible non-linear breaking of tidal gravity waves near the centre of a solar-type star and its influence on tidal dissipation and on the survival of hot Jupiters and angular momentum deposition. Progressively, the low-frequency regime – where rotation is likely to have the most important effects – of stellar oscillations regained interest with the works by [Savonije et al. \(1995\)](#), [Savonije & Papaloizou \(1997\)](#) and [Papaloizou & Savonije \(1997\)](#) who simulated the full tidal response of a uniformly rotating massive star and found signatures of tidally excited inertial waves in the convective core, as well as gravito-inertial waves in the radiative envelope. [Witte & Savonije \(1999, 2001\)](#) studied the tidal evolution of massive binary systems including the effects of resonant excitation of gravito-inertial modes and possible resonance locking, which can significantly speed up the secular evolution.

Unlike stably stratified radiative zones, stellar convective regions are very slightly unstably stratified and gravity modes cannot propagate inside them. For more than thirty years, the possible effects of a dynamical tide in convective zones have been overlooked in favour of Zahn’s equilibrium tide theory. However, a simple approach to modelling this dynamical tide is to simply ignore the convective motions and to consider linear disturbances to a neutrally stratified fluid. In this context, the dynamical tide consists of low-frequency oscillations primarily restored by the Coriolis acceleration, also known as inertial waves, that propagate in a sphere (if the body is fully convective) or a spherical shell (for Sun-like stars with an outer convective envelope). These waves were studied long ago in a uniformly rotating, incompressible and inviscid fluid by [Thomson \(1880\)](#), [Poincaré \(1885\)](#), [Bryan \(1889\)](#), and [Cartan \(1922\)](#) (and also [Greenspan 1968](#)), and they exhibit remarkable properties: their frequency  $\tilde{\omega}$  in the fluid frame (rotating with angular velocity  $\Omega$ ) is restricted to  $[-2\Omega, 2\Omega]$ , while their spatial structure is governed by a hyperbolic second-order partial differential equation named after Poincaré. They propagate along rays that are inclined with a constant angle  $\arcsin(\tilde{\omega}/2\Omega)$ . Such hyperbolic equations along with boundary conditions in a closed container generally yield an ill-posed problem whose solutions may be singular. The behaviour of inertial waves is driven by the ray properties. In a full sphere, they fill the whole domain for all frequencies, and a set of global normal modes with frequencies that is dense in  $[-2\Omega, 2\Omega]$  has been found in the case of a full sphere ([Bryan 1889](#)). This is not true in the case of a spherical shell ([Rieutord & Valdettaro 1997](#)), for which rays often focus towards limit cycles called attractors (see [Maas & Lam 1995](#); [Rieutord et al. 2001](#)) that exist in narrow frequency bands and depend on the size of the inner core. The inclusion of viscosity as a simplification of turbulence gives rise to peculiar modes that possess shear layers localized around the aforementioned attractors (e.g. [Rieutord et al. 2001](#)).

The tidal force exerted by a close planetary or stellar companion on its host star may therefore excite inertial waves in the external convective envelope of low-mass stars, if one or more components of the tidal potential has a frequency that falls into the inertial range. The energy dissipated and the angular momentum carried by these waves may play an important role on the evolution of the orbital architecture of close-in planetary systems and on the rotation of their components, yet it has only recently started to be investigated (see [Ogilvie & Lin 2004, 2007](#); [Ogilvie 2009](#); [Goodman & Lackner 2009](#); [Rieutord & Valdettaro 2010](#); [Le Bars et al. 2015](#)) in uniformly-rotating fluids. The tidal dissipation induced by forced inertial modes has been found to be a very erratic function of the excitation frequency and varies over several orders of magnitude, though frequency-averaged estimates can be obtained analytically ([Ogilvie 2013](#)) and evaluated along stellar evolution ([Mathis 2015](#)), showing strong variations with stellar mass, age, and rotation. It has been shown by [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) that differential rotation may strongly affect the propagation properties of linear inertial modes of oscillations. Their study was restricted to shellular and cylindrical rotation profiles, but turbulent convection can also establish various differential rotation profiles (see [Brun & Toomre 2002](#); [Brown et al. 2008](#); [Matt et al. 2011](#); [Gastine et al. 2014](#)), including conical rotation as observed in the Sun ([Schou et al. 1998](#); [García et al. 2007](#)). In this work, we explore the propagation and dissipation properties of inertial modes in stellar convective envelopes (for low-mass stars only) with conical differential rotation, namely differential rotation that only depends on latitude.

In Sect. 2, we expose our physical model and the associated hypotheses as well as the differential rotation profile we use. Then in Sect. 3, we carry out an analytical analysis which yields the general propagation properties of inertial waves in the inviscid case. These results are compared to the viscous problem in Sect. 4 where we compute numerically the velocity fields of such inertial modes, which sometimes have very different properties than in the solid-body rotation case. Finally, we identify in Sect. 5 which of these properties are important for the forced problem that we will treat in a subsequent paper, and in particular the evaluation of the tidal dissipation induced by these waves.

## 2. Inertial modes in differentially rotating convective envelopes

### 2.1. Physical model

Since we want to study the propagation of inertial waves in the differentially rotating convective envelopes of low-mass-stars, we will consider a simplified set-up with an incompressible, viscous fluid inside a spherical shell of external radius  $R$  and internal radius  $\eta R$  ( $0 < \eta < 1$ ) that accounts for the boundary between the radiative core and the convective envelope.

As motivated in Sect. 1, we use a conical differential rotation profile – depending only on the colatitude  $\theta$  – which reads

$$\Omega(\theta) = \Omega_0(\theta)/\Omega_{\text{ref}} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta, \quad (1)$$

so that the dimensionless angular velocity of the background flow is 1 at the poles and  $1 + \varepsilon$  at the equator. The quantity  $\varepsilon$  is a parameter that describes the behaviour of the differential rotation:

- $\varepsilon > 0$  is for solar differential rotation (equatorial acceleration);
- $\varepsilon < 0$  is for anti-solar differential rotation (equatorial deceleration).

The value  $\varepsilon \approx 0.3$  approximates the differential rotation profile in the Sun’s convective envelope.

We point out that the above rotation profile does not satisfy the Taylor-Proudman theorem, which states that the velocity field of a rotating incompressible homogeneous inviscid fluid must be constant along columns parallel to the rotation axis. As is now well known (e.g. Brun & Toomre 2002; Brown et al. 2008), this differential rotation profile is sustained by Reynolds stresses due to convective turbulent motions. This mean flow is assumed to be dynamically stable. Our analysis will show that some modes are unstable for some parameters of the model (see Eq. (19)). These instabilities, interesting per se, should be interpreted as giving the limits of the parameter range of this model, especially in its future use for tidally forced flows.

The waves that we study in the following are low-frequency waves; their frequency is less than  $2\Omega_{\text{max}}$ , where  $\Omega_{\text{max}}$  is the maximum angular velocity of the fluid. Such waves propagate on a turbulent background and presumably interact with eddies that have similar timescales (just like the stochastically excited acoustic modes of solar-type stars Zahn 1966b; Goldreich & Keeley 1977). In a Kolmogorov-type turbulence, the turn-over timescale of eddies decreases as  $\ell^{2/3}$  if  $\ell$  is the scale of the eddies. The equality between the turn-over timescale and rotation period determines what we call the “Rossby scale” below which turbulence is little influenced by rotation and is faster than the wave period. Our model assumes that eddies smaller

than the Rossby scale can be represented by a turbulent viscosity. For simplicity, we consider the example of the Sun. The bounding frequency  $2\Omega_{\text{max}}$  corresponds to waves with a period of 12.5 days. From Mixing-Length Theory, which says that the typical scale of turbulence is the mixing-length (about twice the pressure scale height), we note that the largest eddies have a typical scale of 100 Mm, with a typical velocity of  $50 \text{ m s}^{-1}$ . This would be the typical numbers for the so-called giant cells characterized by a 20-day turn-over timescale (Miesch et al. 2008). With these numbers we easily find that the Rossby scale is 50 Mm. Thus, all the eddies of a scale much smaller than 50 Mm are assumed to influence the inertial modes through a turbulent diffusion. The influence of turbulent motions with larger scales is admittedly much more difficult to take into account. However, we note that in the case of the Sun the differential rotation flow is much stronger than the large scale eddies ( $1 \text{ km s}^{-1}$  compared to  $50 \text{ m s}^{-1}$ ). Thus, as a first step, neglecting the direct interaction of these eddies with the inertial waves is consistent as far as orders of magnitude are concerned.

### 2.2. Mathematical formulation

In an inertial frame with the usual spherical coordinates  $(r, \theta, \varphi)$ , and after linearization of the Navier-Stokes equation around the steady state (described by the “0” subscripts), we obtain (e.g. Baruteau & Rieutord 2013)

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \varphi} + 2\Omega_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_1 + r \sin \theta (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \Omega_0) \mathbf{e}_\varphi = -\nabla p_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1, \quad (2)$$

where  $\partial/\partial t$  denotes the partial time-derivative,  $\Omega_0$  is the background angular velocity of the fluid,  $\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$  is the unit vector along the rotation axis,  $\mathbf{u}_1$  is the wave velocity field and  $p_1$  denotes the reduced pressure perturbation, which is the pressure perturbation divided by the reference density ( $\rho_0$ ). We note that only the last term of the left-hand side is proportional to the shear of the differential rotation, while the other terms are formally identical to the case of solid-body rotation.

Along with this equation, we use the linearized continuity equation

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (3)$$

since the fluid is also assumed to be incompressible.

We look for velocity ( $\mathbf{u}_1$ ) and reduced pressure ( $p_1$ ) perturbations of angular frequency  $\Omega_p$  (in the inertial frame) and azimuthal wavenumber  $m$ . This means they are proportional to  $\exp(i\Omega_p t + im\varphi)$ . Equations (2) and (3) can be recast as

$$\begin{cases} i\tilde{\Omega}_p \mathbf{u}_1 + 2\Omega_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_1 + r \sin \theta (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \Omega_0) \mathbf{e}_\varphi = -\nabla p_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

where  $\tilde{\Omega}_p = \Omega_p + m\Omega_0$  is the Doppler-shifted wave frequency (i.e. the local wave frequency in a frame rotating with the fluid).

We normalize all frequencies by  $\Omega_{\text{ref}}$  – which we define as the background angular velocity at the poles i.e.  $\Omega_0(\theta = 0)$  – and distances by  $R$ . We introduce the associated dimensionless quantities: the radius  $x = r/R$ , the velocity field  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1/R\Omega_{\text{ref}}$ , the reduced pressure  $p = p_1/R^2\Omega_{\text{ref}}^2$ , the differential rotation profile  $\Omega = \Omega_0/\Omega_{\text{ref}}$ , the wave frequency  $\omega_p = \Omega_p/\Omega_{\text{ref}}$  in the inertial frame (resp.  $\tilde{\omega}_p = \tilde{\Omega}_p/\Omega_{\text{ref}}$  in the fluid’s frame), and the Ekman

number  $E = \nu/R^2\Omega_{\text{ref}}$ . From now on, we use exclusively the dimensionless quantities defined above. This finally yields the dimensionless system that we solve numerically in Sect. 4:

$$\begin{cases} i\tilde{\omega}_p \mathbf{u} + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + x \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi = -\nabla p + E \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

We note that in the numerical simulations presented in Sect. 4 below, we actually take the curl of the first equation in order to get rid of the  $\nabla p$  term:

$$\begin{cases} \nabla \times (i\tilde{\omega}_p \mathbf{u} + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + x \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi) = E \nabla \times \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

In addition to Eqs. (6), we use stress-free boundary conditions ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r = 0$  and  $\mathbf{e}_r \times [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{e}_r = \mathbf{0}$ , where  $[\boldsymbol{\sigma}]$  is the viscous stress tensor) at the inner and outer boundaries of the spherical shell.

In the following section, we define several useful quantities for the description of the propagation properties of inertial waves, and Eq. (1) implies that they only depend on the colatitude  $\theta$  and are independent of the aspect ratio  $\eta$  of the spherical shell.

### 3. Inviscid analysis: paths of characteristics, existence of turning surfaces and corotation resonances

As a first step, we study the solutions to Eqs. (5) in the inviscid limit ( $E = 0$ ). It allows us to study the dynamics of characteristics of inertial waves, which are a very useful tool for understanding the solutions to the full viscous problem for small viscosities.

#### 3.1. General Poincaré-like equation

Following Baruteau & Rieutord (2013), we adopt cylindrical coordinates  $(s, \varphi, z)$  and we eliminate the components of the velocity perturbations, which yields a partial differential equation on  $p$  only. Focusing on the second-order terms, we obtain the following mixed-type partial differential equation:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \frac{A_z}{\tilde{\omega}_p^2} \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial z} + \left(1 - \frac{A_s}{\tilde{\omega}_p^2}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \dots = 0, \quad (7)$$

where zeroth and first order terms have been omitted, which corresponds to the WKBJ approximation. In Eq. (7),

$$A_s(s, z) = \frac{2\Omega}{s} \frac{\partial(s^2 \Omega)}{\partial s} \quad \text{and} \quad A_z(s, z) = \frac{2\Omega}{s} \frac{\partial(s^2 \Omega)}{\partial z}. \quad (8)$$

In the case of solid-body rotation ( $\varepsilon = 0$ ), Eq. (7) reduces to the well-known Poincaré equation for inertial waves (Cartan 1922; Greenspan 1968). It is hyperbolic in the domain where the discriminant  $\xi(s, z) = A_z^2 + 4\tilde{\omega}_p^2 (A_s - \tilde{\omega}_p^2)$  is positive (which we will refer to as the ‘‘hyperbolic domain’’) and becomes elliptic in the domain where  $\xi$  is negative (the ‘‘elliptic domain’’). In the former case, the equation governing the paths of characteristics in a meridional plane reads

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2\tilde{\omega}_p^2} (A_z \pm \xi^{1/2}), \quad (9)$$

which shows that, contrary to the case of solid-body rotation ( $A_z = 0$ ,  $\xi$  constant), differential rotation tends to curve paths of

characteristics since the right-hand side of Eq. (9) now depends on both  $s$  and  $z$ . On the other hand, no characteristics exist in the elliptic domain, therefore the relation  $\xi = 0$  defines ‘‘turning surfaces’’ on which characteristics reflect (see Friedlander 1982). We note that if the rotation profile is symmetric by  $z \rightarrow -z$ , then Eq. (7) is also symmetric by  $z \rightarrow -z$ , meaning only positive values of  $z$  can be considered. We detail below the case of the conical rotation profile defined in Eq. (1).

#### 3.2. Paths of characteristics, turning surfaces, and classes of inertial modes

##### 3.2.1. Paths of characteristics

For the rotation profile that we adopt (see Eq. (1)), we have

$$A_s = 4\Omega(\theta) (\Omega(\theta) + \varepsilon \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \quad (10)$$

and

$$A_z = -4\Omega(\theta) \varepsilon \cos \theta \sin^3 \theta, \quad (11)$$

so that

$$\begin{aligned} \xi = 16\Omega^2(\theta) \varepsilon^2 \cos^2 \theta \sin^6 \theta \\ + 4\tilde{\omega}_p^2 (4\Omega^2(\theta) + 4\Omega(\theta) \varepsilon \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \tilde{\omega}_p^2). \end{aligned} \quad (12)$$

We assume that  $\varepsilon > -1$  so that the Rayleigh stability criterion ( $A_s > 0$  everywhere in the shell) is always satisfied. From Eq. (9), the slope of the paths of characteristics in the hyperbolic domain reads

$$\frac{dz}{ds} = -A(\theta) \cos \theta \sin^3 \theta + \left(\frac{\xi}{4\tilde{\omega}_p^4}\right)^{1/2} \quad (13)$$

where

$$\frac{\xi}{4\tilde{\omega}_p^4} = A^2(\theta) \cos^2 \theta \sin^6 \theta + 2A(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{4\Omega^2(\theta) - \tilde{\omega}_p^2}{\tilde{\omega}_p^2} \quad (14)$$

and

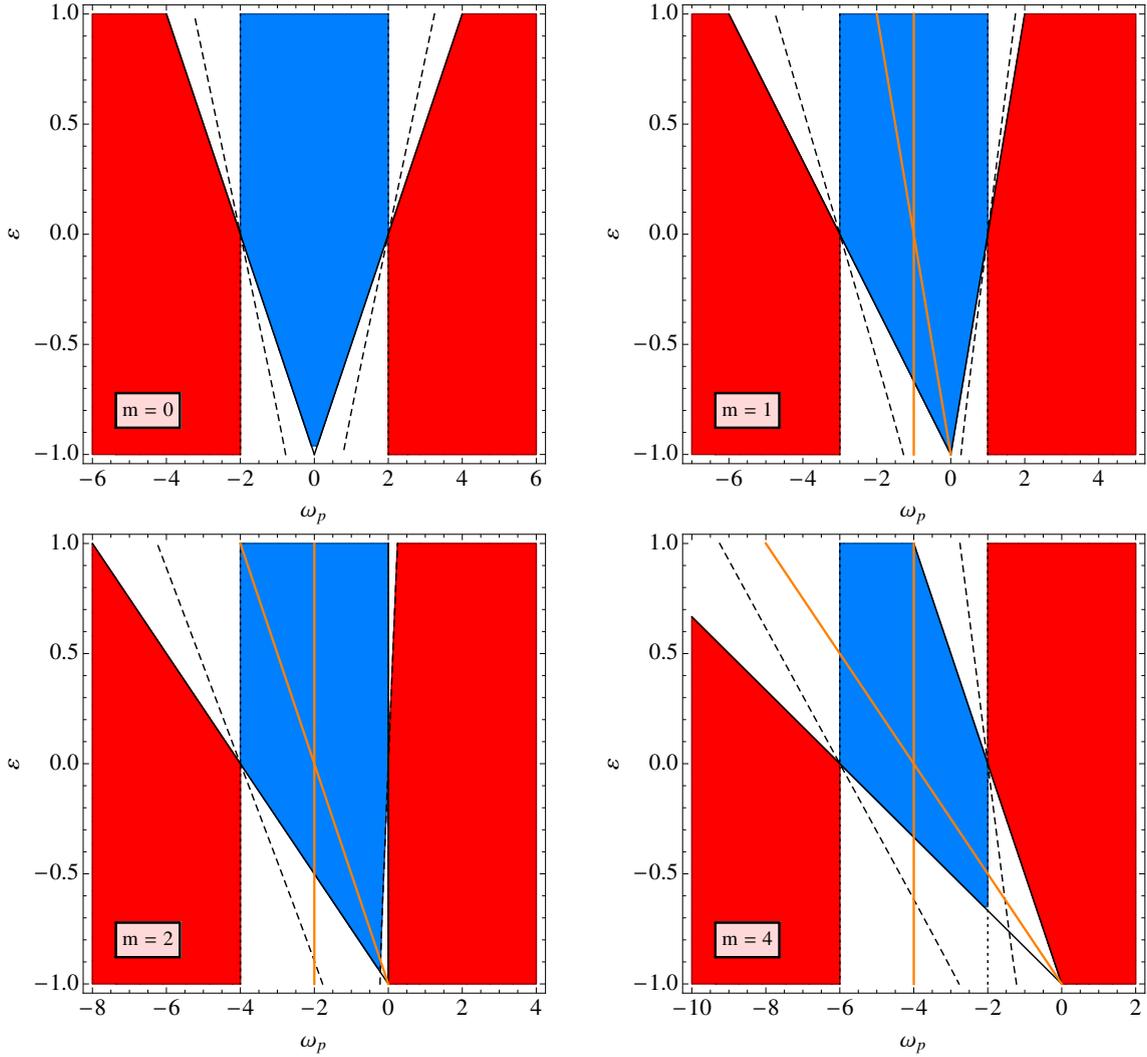
$$A(\theta) = 2\varepsilon \frac{\Omega(\theta)}{\tilde{\omega}_p^2}. \quad (15)$$

As expected, all the above quantities and the dynamics of characteristics depend on  $\theta$  alone.

##### 3.2.2. Turning surfaces

In the set-up described in 3.2.1,  $\xi$  is symmetric about the equatorial plane of the shell so only values  $\theta \in [0, \pi/2]$  need to be considered. As explained in the previous paragraph, equation  $\xi(\theta) = 0$  defines turning surfaces that separate the spherical shell into a hyperbolic domain ( $\xi > 0$ ) and an elliptic domain ( $\xi < 0$ ). Turning surfaces are portions of cones of axis  $z$  and aperture  $2\theta$ . However, their location cannot be determined analytically because  $\xi(\theta) = 0$  is a polynomial equation of degree 6 in  $X = \sin^2 \theta$ . Still their existence leads to two classes of inertial modes with conical rotation:

1. modes for which at least one turning surface exists within the shell, referred to as DT modes following the terminology introduced in Baruteau & Rieutord (2013) (D for differential rotation, T for turning surface);



**Fig. 1.** Illustration of the two kinds of inertial modes propagating in a fluid with conical rotation profile  $\Omega(\theta) = \Omega_0(\theta)/\Omega_{\text{ref}} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta$ , for  $m = \{0, 1, 2, 4\}$  from top left to bottom right. The eigenfrequency in the inertial frame  $\omega_p$  is shown in  $x$ -axis and the differential rotation parameter  $\varepsilon$  is in  $y$ -axis. Blue: D modes that exist in the whole shell ( $\xi > 0$  everywhere). White: DT modes that exhibit at least one turning surface inside the shell (the sign of  $\xi$  changes in the shell). Red: No inertial modes may exist in the shell ( $\xi < 0$  everywhere). Orange: the modes in the region between the two orange lines feature a corotation layer ( $\bar{\omega}_p = 0$ ) inside the shell. The meaning of the black solid, dotted, and dashed lines is explained in Sect. 3.2.2.

2. modes that propagate in the whole shell, which is entirely hyperbolic because there is no turning surface within it, named D modes.

The occurrence of D and DT modes is depicted in Fig. 1 for the axisymmetric case ( $m = 0$ ) and a few non-axisymmetric cases ( $m > 0$ ). White areas represent DT modes which have  $\xi < 0$  at least once within the shell, while blue regions represent D modes for which  $\xi > 0$  everywhere within the shell. The red areas illustrate the case where  $\xi < 0$  everywhere in the shell, for which the shell hosts no inertial modes. The curves that separate D and DT modes are implicitly defined by two equations:

- $\xi(\theta = 0) = 0$ , which corresponds to the case where the turning surface is on the rotation axis, and which can be recast as

$$\omega_p = -m \pm 2, \quad (16)$$

and is shown by the vertical dotted lines in Fig. 1;

- $\xi(\theta = \pi/2) = 0$  when the turning surface reaches the equator, which yields

$$\omega_p = (-m \pm 2)(1 + \varepsilon), \quad (17)$$

and is shown by the solid black lines in Fig. 1.

We point out that there may be two turning surfaces in a meridional plane for a given set of parameters. For instance, in the bottom left panel of Fig. 1 (where  $m = 2$ ), the transition from the central blue region to the white region around  $\omega_p = 0$  shows that two turning surfaces occur at  $\theta = \pi/4$  before splitting towards the pole and the equator. Our investigations show that this only occurs for  $m = \pm 2$  around  $\omega_p = 0$ , which we checked by solving numerically the equation  $\xi(\theta = \pi/4) = 0$  for every  $m$ , whose solutions are depicted by the black dashed lines in Fig. 1. An example is given in the following subsection (see the bottom right panel of Fig. 5).

We note that for D modes – for which  $\forall \theta, \xi(\theta) > 0$  – we have  $|\bar{\omega}_p(\theta)| < 2\Omega(\theta)$ , which means that for D modes, the standard

criterion for propagation of inertial waves is met everywhere locally.

### 3.2.3. Critical layers

For non-axisymmetric modes ( $m \neq 0$ ),  $\tilde{\omega}_p$  may vanish in the shell, which corresponds to what are known as corotation resonances or critical layers (Baruteau & Rieutord 2013). Since  $\tilde{\omega}_p$  is a function of  $\theta$  only, a critical layer is the intersection of a cone of axis  $z$  with the spherical shell. As can be seen from Eq. (13), paths of characteristics may become locally vertical at corotation layers. Their location is given by

$$\sin \theta = \sqrt{\varepsilon^{-1} \left( -1 - \frac{\omega_p}{m} \right)} \quad (18)$$

and they exist only when  $\omega_p \in [-m, -m(1 + \varepsilon)]$  (if  $m\varepsilon < 0$ ) or when  $\omega_p \in [-m(1 + \varepsilon), -m]$  (if  $m\varepsilon > 0$ ). Critical layers exist for the D and DT modes located between the two orange lines in the panels of Fig. 1.

### 3.3. Dispersion relation, phase and group velocities

We expand the study of the propagation of inertial waves in the inviscid limit by considering the wave dispersion relation. This relation is obtained by assuming solutions to Eq. (7) in the form  $p \propto \exp[i(k_s s + k_z z)]$  and adopting the short-wavelength approximation,

$$\tilde{\omega}_p^2 = \frac{k_z^2}{\|\mathbf{k}\|^2} \left[ A_s - \frac{k_s}{k_z} A_z \right], \quad (19)$$

where  $\|\mathbf{k}\| = \sqrt{k_s^2 + k_z^2}$ . Assuming the bracket-term is positive, which is equivalent to assuming that the background rotation profile is dynamically stable to inertial waves (see the discussion in Sec. 2.1), we can define

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left[ A_s - \frac{k_s}{k_z} A_z \right]^{1/2} \quad (20)$$

so that the wave dispersion becomes  $\tilde{\omega}_p = \pm \tilde{\mathcal{B}} |k_z| / \|\mathbf{k}\|$ . The phase and group velocities in a frame rotating with the fluid are then given by

$$\mathbf{v}_p = \pm \tilde{\mathcal{B}} \frac{k_z}{\|\mathbf{k}\|^3} \mathbf{k} \quad (21)$$

and

$$\mathbf{v}_g = \pm \frac{k_s}{\|\mathbf{k}\|^3} (-k_z \mathbf{e}_s + k_s \mathbf{e}_z) \left[ \tilde{\mathcal{B}} + \frac{A_z}{2} \frac{\|\mathbf{k}\|^2}{k_s k_z} \tilde{\mathcal{B}}^{-1} \right], \quad (22)$$

which corresponds to Eqs. (A9) and (A10) in Baruteau & Rieutord (2013). We note that  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g = 0$  as for pure inertial waves propagating in a solid-body rotating fluid.

Applying these formulae to our conical rotation profile  $\Omega(\theta) = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta$ , the dispersion relation is given by

$$\tilde{\omega}_p^2 = 4\Omega^2(\theta) \frac{k_z^2}{\|\mathbf{k}\|^2} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \varepsilon \sin^2 \theta} \right) + \frac{k_s \varepsilon \cos \theta \sin^3 \theta}{k_z (1 + \varepsilon \sin^2 \theta)} \right]. \quad (23)$$

Assuming the fluid is stable against the GSF instability, we define

$$\mathcal{B} = \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \varepsilon \sin^2 \theta} \right) + \frac{k_s \varepsilon \cos \theta \sin^3 \theta}{k_z (1 + \varepsilon \sin^2 \theta)} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

so that Eq. (23) becomes

$$\tilde{\omega}_p = \pm 2\Omega(\theta) \mathcal{B} \frac{|k_z|}{\|\mathbf{k}\|}. \quad (25)$$

For solid-body rotation,  $\mathcal{B} = 1$  and Eq. (25) is the usual dispersion relation for inertial waves. Consequently, the phase velocity in the frame rotating with the fluid is

$$\mathbf{v}_p = \pm 2\Omega(\theta) \mathcal{B} \frac{k_z}{\|\mathbf{k}\|^3} \mathbf{k}, \quad (26)$$

while the group velocity is given by

$$\mathbf{v}_g = \pm 2\Omega(\theta) \frac{k_s}{\|\mathbf{k}\|^3} (-k_z \mathbf{e}_s + k_s \mathbf{e}_z) \times \left[ \mathcal{B} - \frac{2\Omega(\theta) \varepsilon \cos \theta \sin^3 \theta}{k_s k_z} \|\mathbf{k}\|^2 \mathcal{B}^{-1} \right]. \quad (27)$$

From Eq. (25), we see that a critical layer may form in the shell ( $\tilde{\omega}_p = 0$ ) in the following formal cases:

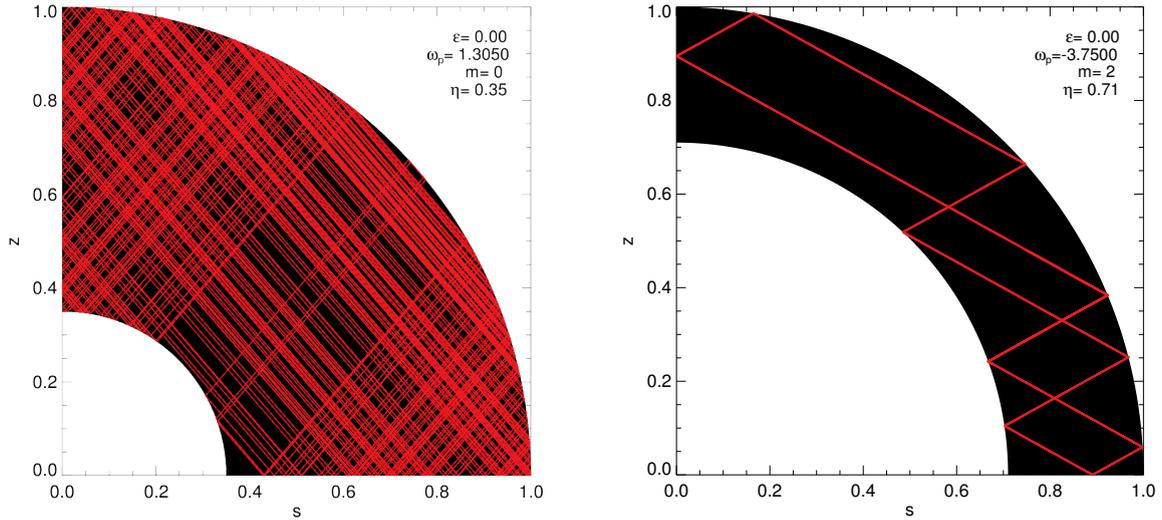
- $|k_s| \rightarrow \infty$  at finite  $k_z$ , so that  $\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{v}_g = \mathbf{0}$  at corotation and inertial waves cannot cross critical layers;
- $|k_z| \rightarrow 0$  at finite  $k_s$ , so that  $\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{0}$  and  $|\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z| \rightarrow \infty$ , indicating that inertial waves may propagate across a critical layer with locally vertical paths of characteristics;
- $\mathcal{B} \rightarrow 0$ , which implies again that  $\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$  while  $|\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_s| \rightarrow \infty$  and  $|\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_z| \rightarrow \infty$ , which means that in this case as well inertial waves may propagate across the corotation resonance with a finite slope for the paths of characteristics since  $\mathcal{B} = 0$  implies

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{k_s}{k_z} = -\frac{1 + \varepsilon \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)}{\varepsilon \cos \theta \sin^3 \theta}. \quad (28)$$

This result shows that when it comes to critical layers, conical and shellular rotation profiles behave similarly – in the sense that the three cases are possible – while cylindrical rotation stands out as the case where characteristics of inertial waves can formally never cross critical layers (see Baruteau & Rieutord 2013). It is important to keep in mind that this analysis only reflects the hyperbolic part of the problem, while the solutions to the full viscous problem (Sect. 4) may behave a bit differently than the characteristics of the purely inviscid problem (as shown for instance by Fig. 13 of Baruteau & Rieutord 2013).

### 3.4. Dynamics of the characteristics of inertial waves: attractor cycles, focusing points and Lyapunov exponents

In the case of solid-body rotation, the paths of characteristics in a meridional plane follow straight lines that form a constant angle with the rotation axis (i.e. the  $z$ -axis), which only depends on the uniform Doppler-shifted wavefrequency  $\tilde{\omega}_p = \omega_p + m$  (see the dispersion relation given in Eq. (25) for  $\varepsilon = 0$ ). For a given aspect ratio of the shell  $\eta$ , certain values of the frequency



**Fig. 2.** Paths of characteristics for solid-body rotation ( $\varepsilon = 0$ ). *Left:* paths of characteristics do not converge towards any periodic orbit ( $m = 0$ ,  $\omega_p = 1.305$ ,  $\eta = 0.35$ , and solid body-rotation  $\varepsilon = 0$ ). *Right:* example of an attractor cycle of the path of characteristics for  $m = 2$ ,  $\omega_p = -3.75$ , solid-body rotation ( $\varepsilon = 0$ ), and the solar aspect ratio  $\eta = 0.71$ .

$\omega_p$  cause the paths of characteristics to converge towards periodic orbits called “attractors”, while for some other frequencies, paths of characteristics nearly occupy the whole shell with no obvious periodic pattern. These two different behaviours are illustrated in Fig. 2. The existence of one or several attractor(s) for a given set of parameters can be investigated by studying the exponential convergence rate of two close characteristics along multiple reflections. This is quantified by the Lyapunov exponent  $\Lambda$  (for more details, see Rieutord et al. 2001; Baruteau & Rieutord 2013). The Lyapunov exponent can be defined as

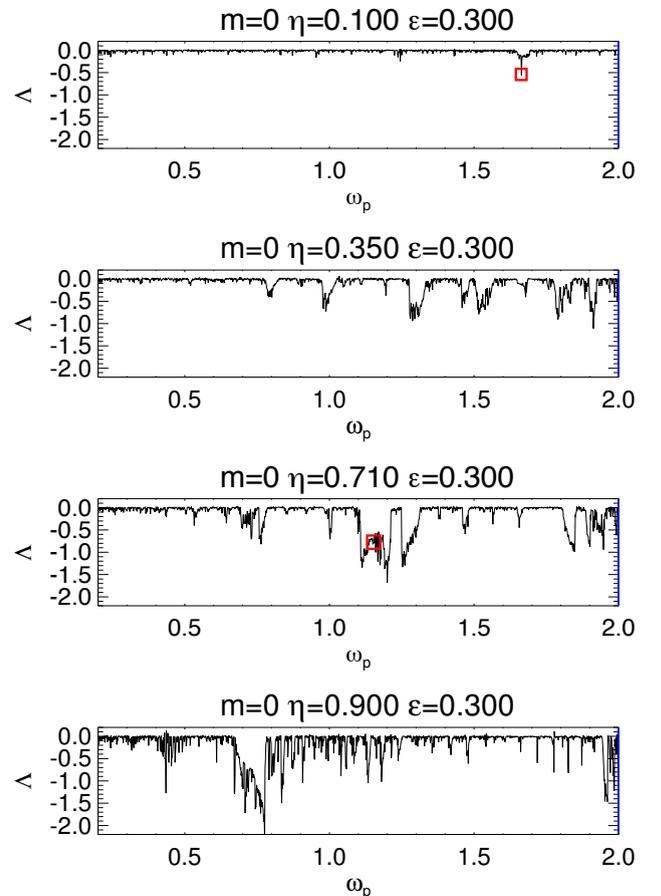
$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{dx_{k+1}}{dx_k} \right|, \quad (29)$$

where  $dx_k$  is the separation between two characteristics after  $k$  reflections. In our case, this quantity can be evaluated using either the reflections on the equator ( $ds_k$ ), on the rotation axis ( $dz_k$ ), or on the inner (resp. outer) boundary of the shell  $d\theta_k^{\text{in}}$  (resp.  $d\theta_k^{\text{out}}$ ). The value of  $\Lambda \approx 0$  corresponds to the case of “space-filling” paths of characteristics, whereas  $\Lambda < 0$  identifies the existence of an attractor (see left and right panel of Fig. 2, respectively).

In the case of solid-body rotation, the locations where characteristics bounce off the shell spherical boundaries, the equator or the rotation axis, can be determined analytically, thus allowing for a semi-analytic calculation of  $\Lambda$  (Rieutord et al. 2001). However, differential rotation requires the numerical integration of the path of characteristics. For this purpose, we choose a starting point in the shell and we follow the propagation by numerically integrating Eq. (13). Since characteristics cannot propagate in the elliptic domain, it is necessary to impose reflection at turning surfaces.

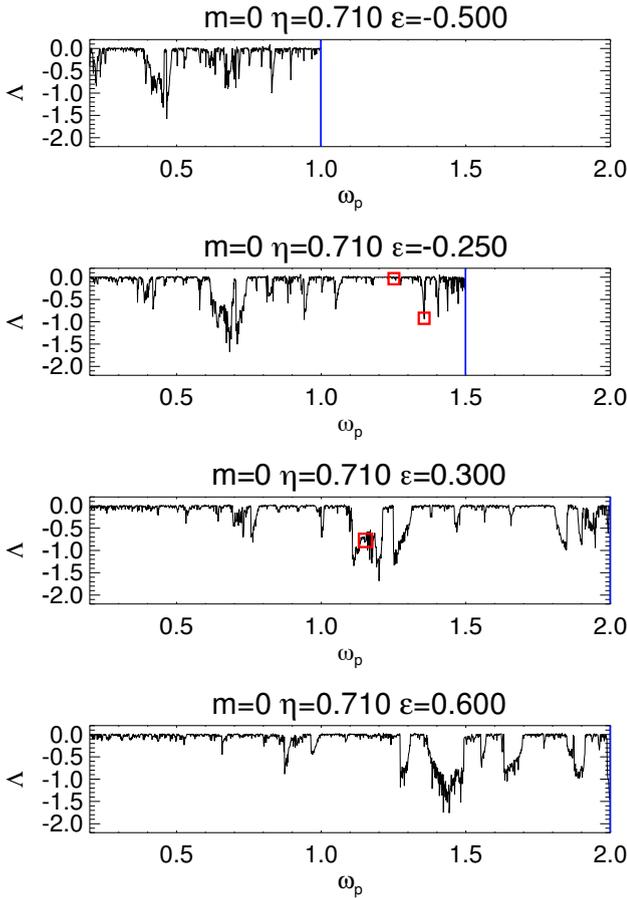
For illustration purposes, we evaluated numerically the Lyapunov exponents as a function of the eigenfrequency for  $m = 0$  for different values of  $\eta$  and  $\varepsilon$ :

- $\eta = \{0.10, 0.35, 0.71, 0.90\}$  along with a fixed solar-like value of the differential rotation parameter  $\varepsilon = 0.30$  for Fig. 3;
- $\varepsilon = \{-0.50, -0.25, 0.30, 0.60\}$  along with a fixed solar-like value of the convective shell aspect ratio  $\eta = 0.71$  for Fig. 4.



**Fig. 3.** Numerical spectrum of the Lyapunov exponent for  $m = 0$ ,  $\varepsilon = 0.30$ , and  $\omega_p \in [0.2, 2.0]$ . *From top to bottom:*  $\eta = \{0.10, 0.35, 0.71, 0.90\}$ . The red open squares correspond to the modes shown in Figs. 6 to 8.

We used 800 frequencies per unit interval of frequencies and ten pairs of characteristics for each data point before averaging the results. The results shown in Figs. 3 and 4 should therefore



**Fig. 4.** Numerical spectrum of the Lyapunov exponent for  $m = 0$ ,  $\eta = 0.71$ , and  $\omega_p \in [0.2, 2.0]$ . From top to bottom:  $\varepsilon = \{-0.50, -0.25, 0.30, 0.60\}$ . The blue solid line marks the frequency of the transition between the D and DT modes. The red open squares correspond to the modes shown in Figs. 6 to 8.

be considered a qualitative indicator of the presence of short-period attractor cycles rather than a quantitative one because our method probably yields substantial uncertainties on the values of  $\Lambda$ . We also note that the focusing of characteristics towards a wedge in the frequency range of DT modes (see the bottom left panel of Fig. 5 below) prevented us from computing values of  $\Lambda$  for the DT modes. As expected, attractors of various strengths exist in small intervals of frequencies where  $\Lambda$  is strictly negative, whereas intervals where  $\Lambda \approx 0$  are associated with very long-period attractors or quasi-periodic orbits of characteristics.

Figure 3 illustrates how the existence of short-period attractors in the frequency range of inertial waves can be affected by the size of the inner core. It seems that when the core is small, attractors of characteristics are very rare but still exist as illustrated by the region around  $\omega_p \approx 1.66$  in the top left panel of Fig. 3. We checked that this attractor exists regardless of the size of the inner core as long as the latter is small enough, and we computed the corresponding eigenmode (see Fig. 8, and Fig. 8 in Baruteau & Rieutord 2013). However, the other panels of Fig. 3 indicate that more and more attractors exist with increasing values of  $\eta$ , owing to increasingly numerous reflections on the inner core. The case where  $\eta = 0.90$  shows that a large number of short-period attractors exist over the frequency range of D modes.

Figure 4 shows the evolution of the Lyapunov exponent spectrum for a given core size, but for various values of the differential rotation parameter  $\varepsilon$ . We see that the occurrence of

short-period attractors is not sensitive to  $\varepsilon$ , but some features of the Lyapunov spectra can be tracked as they are progressively altered and shifted to higher frequencies with increasing  $\varepsilon$  (e.g. the deep double peak starting from  $\omega_p \in [0.3, 0.5]$  in the top left panel and shifted to  $\omega_p \in [1.25, 1.5]$  in the bottom right panel).

When the fluid differentially rotates with angular velocity  $\Omega(\theta)$ , paths of characteristics may still converge towards attractors – just like in the case of solid-body rotation – but with curved characteristics as illustrated in the top left panel of Fig. 5. They also depend on the azimuthal wavenumber  $m$  through the non-uniform Doppler-shifted frequency  $\tilde{\omega}_p$ . We can also find attractors of characteristics when a turning surface exists in the shell (top right panel). Sometimes characteristics tend to focus at the intersection of a turning surface with the boundaries of the shell as illustrated by the bottom left plot of Fig. 5, showing a behaviour that is similar to the one found by Dintrans et al. (1999) for gravito-inertial waves. Finally, we note that in rare cases, two turning surfaces can exist within the shell, affecting the waves' propagation domain accordingly: it is either restricted to the polar and equatorial regions (as illustrated in the bottom right panel of Fig. 5) or restricted to mid-latitude regions.

#### 4. Viscous problem: shear layers, comparison to inviscid analysis, behaviour at corotation resonances

Our study of the propagation properties of inertial waves in a differentially rotating inviscid fluid with a conical rotation profile (see Sect. 3) shows that two families of inertial modes of oscillation exist: D modes that may propagate in the entire shell, and DT modes that are trapped in part of the shell because of the existence of a turning surface. We find that paths of characteristics depend on  $m$  through the Doppler-shifted wavefrequency, which is not the case for solid-body rotation, but the main difference between  $m = 0$  and  $m \neq 0$  modes is the possible existence of corotation resonances in the latter case.

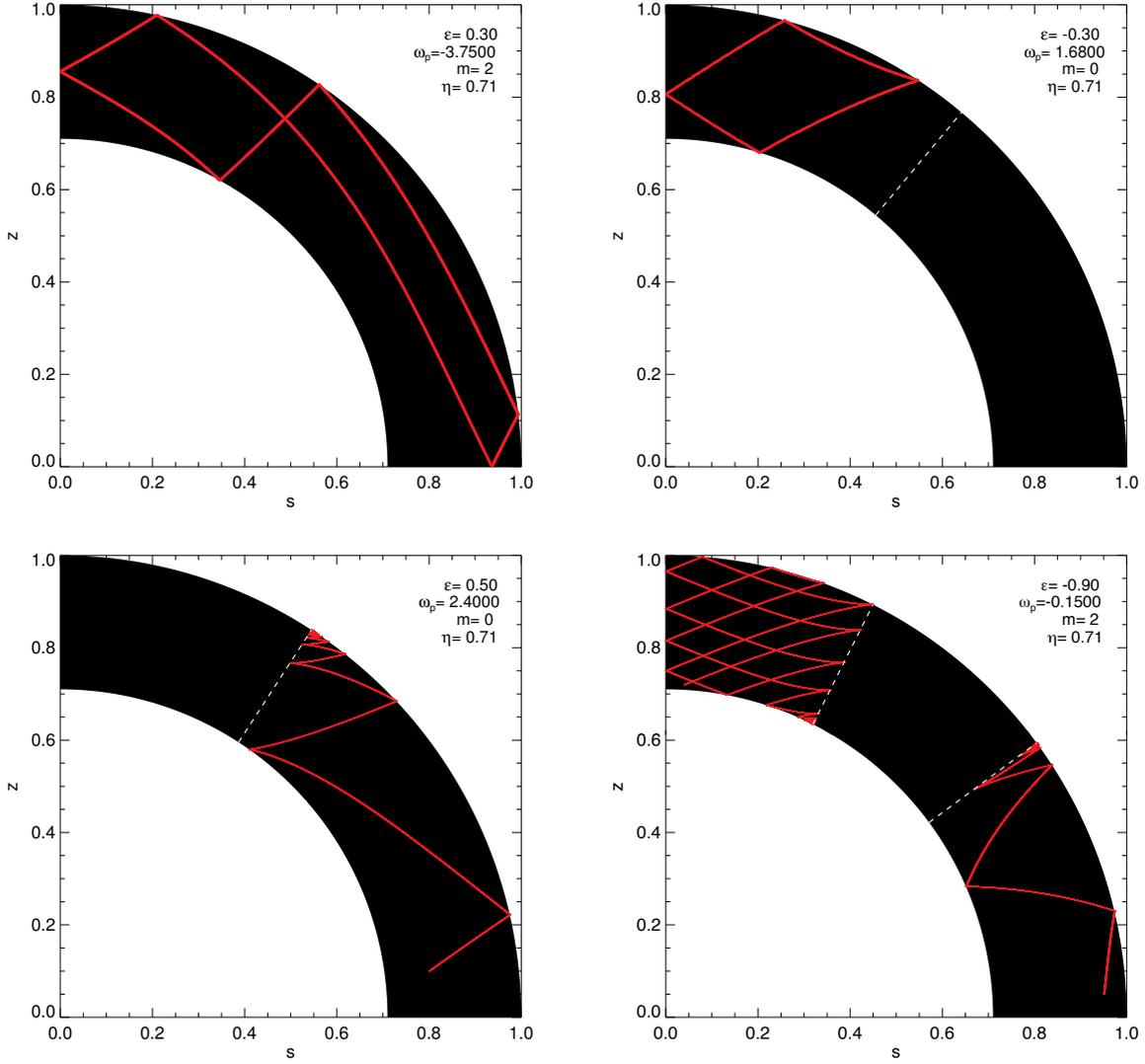
In Sect. 4.1, we briefly present the numerical method we used to solve the viscous problem exposed in Sect. 2.1. Then we study via numerical simulations in Sects. 4.2 and 4.3 respectively the general properties of weakly damped viscous D modes that propagate in the whole spherical shell and the DT modes that propagate in part of the shell. We show in particular how the shear layer structure can be related to the inviscid analysis detailed above in Sect. 3. As explained in the introduction of this work, we will mostly focus on singular modes for which a short-period attractor of characteristics exists since they may be related with strong viscous dissipation (Ogilvie 2005). Finally, we examine  $m \neq 0$  modes with corotation resonances in Sect. 4.4.

##### 4.1. Numerical method

The linearized dimensionless system of Eqs. (6) and the associated stress-free boundary conditions are solved using a unique decomposition of the unknown velocity field  $\mathbf{u}$  onto vectorial spherical harmonics (Rieutord 1987),

$$\mathbf{u}(x, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ u_m^l(x) \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) + v_m^l(x) \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + w_m^l(x) \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\} \quad (30)$$

with  $\mathbf{R}_l^m = Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{S}_l^m = \nabla_H Y_l^m$ , and  $\mathbf{T}_l^m = \nabla_H \times \mathbf{R}_l^m$ , where  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  is the usual spherical harmonic of degree  $l$  and order  $m$



**Fig. 5.** *Upper left:* example of attractor cycle for a D mode with  $m = 2$ ,  $\omega_p = -3.75$  in a solar-like convective envelope ( $\varepsilon = 0.3$ ,  $\eta = 0.71$ ). *Upper right:* same for a DT mode with  $m = 0$ , frequency  $\omega_p = 1.68$ , and anti-solar conical rotation ( $\varepsilon = -0.3$ ); the white dashed line shows the turning surface. *Bottom left:* illustration of the focusing of the paths of characteristics at the intersection of the turning surface (dashed line) and the outer boundary of the shell ( $m = 0$ ,  $\omega_p = 2.4$ , and  $\varepsilon = 0.5$ ). *Bottom right:* for  $m = 2$ ,  $\omega_p = -0.126$ , and  $\varepsilon = -0.90$  two turning surfaces exist within the shell, allowing the propagation of characteristics near the equator or the poles but not in between.

normalized on the unit sphere, and  $\nabla_H = e_\theta \partial_\theta + e_\varphi (\sin \theta)^{-1} \partial_\varphi$  is the horizontal gradient.

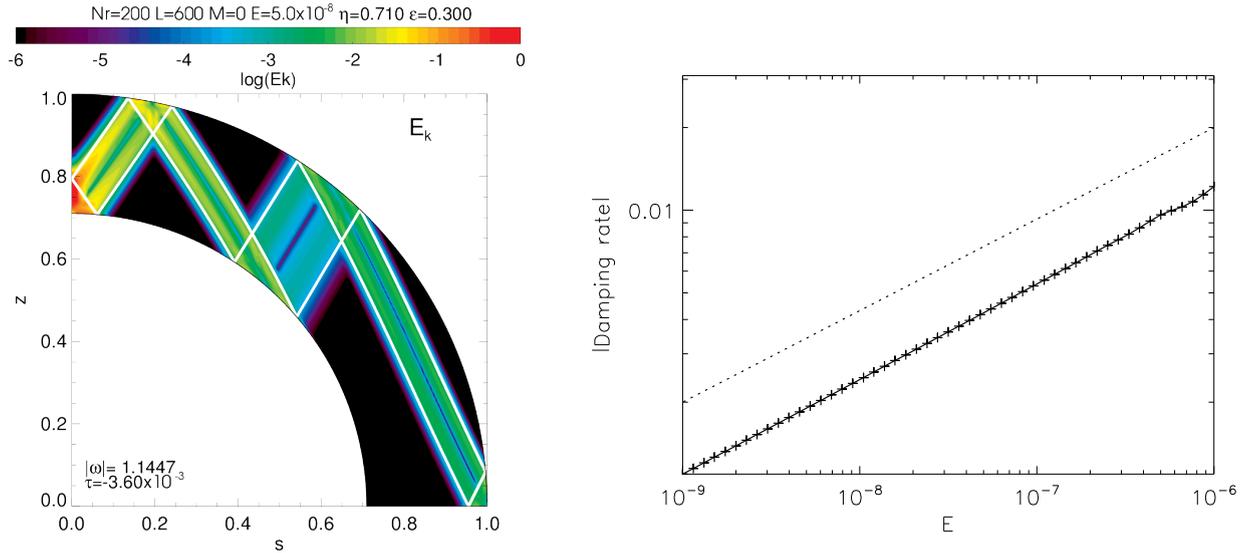
The projection of the continuity equation on  $Y_l^m$  gives  $v_m^l$  as a simple function of  $u_m^l$  and  $du_m^l/dx$ . The momentum equation is then projected on  $R_l^m$  and  $T_l^m$ , which yields two long ordinary differential equations involving only the radial functions  $u_m^l$  and  $w_m^l$  (since  $v_m^l$  can be eliminated):

1. the right-hand side of the second-order equation satisfied by  $w_m^l$  is a linear combination of  $u_m^{l\pm 3}$ ,  $du_m^{l\pm 3}/dx$ ,  $u_m^{l\pm 1}$ ,  $du_m^{l\pm 1}/dx$ , and  $w_m^{l\pm 2}$  (this term vanishes for  $m = 0$ );
2. the right-hand side of the fourth-order differential equation satisfied by  $u_m^l$  is a linear combination of  $w_m^{l\pm 3}$ ,  $dw_m^{l\pm 3}/dx$ ,  $w_m^{l\pm 1}$ ,  $dw_m^{l\pm 1}/dx$ ,  $u_m^{l\pm 2}$ ,  $du_m^{l\pm 2}/dx$ , and  $d^2 u_m^{l\pm 2}/dx^2$  (these last three terms vanish for  $m = 0$ ).

The fact that the radial functions  $u_m^l$ ,  $v_m^l$ , and  $w_m^l$  with different azimuthal wavenumbers  $m$  are not coupled is a consequence of the axisymmetry of the background flow. The coupling between

different latitudinal degrees (from  $l - 3$  to  $l + 3$ ) results from the choice of our specific conical rotation profile through the Coriolis acceleration terms.

In order to solve these equations numerically, they are discretized in the radial direction on the Gauss-Lobatto collocation nodes associated with Chebyshev polynomials. Each set of equations is truncated at order  $L$  for the spherical harmonics basis, and at order  $N_r$  for the Chebyshev basis. This yields a finite eigenvalue problem of order  $N_r \times L$  with a block banded matrix composed of up to seven block bands. Then we use the linear solver based on the incomplete Arnoldi-Chebyshev algorithm (see details in [Valdettaro et al. 2007](#)) to compute pairs of eigenvalues (equal to  $i\omega_p$ ) and eigenvectors (values of  $u_m^l$ ,  $v_m^l$  and  $w_m^l$  on each point of the radial grid), given an initial value guess for  $i\omega_p$ . Since the values of  $N_r$  and  $L$  required to achieve spectral convergence vary a lot from one mode to another, especially for the very demanding small values of  $E$ , some figures will be accompanied by the spectral content of the velocity field. In all the cases presented in this work we assumed symmetry



**Fig. 6.** *Left:* meridional cut of the normalized kinetic energy of an axisymmetric D mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx 1.15$  obtained with  $E = 5 \times 10^{-8}$ , the Sun’s aspect ratio  $\eta = 0.71$ , and conical differential rotation  $\varepsilon = 0.3$ . The attractor of characteristics for these parameters is overlotted by the white curve. *Right:* scaling of the damping rate with respect to the Ekman number  $E$ . The dashed line is proportional to  $E^{1/3}$ .

with respect to the equatorial plane, which explains why our results are only shown for positive values of  $z$ , but anti-symmetry is also possible.

#### 4.2. Axisymmetric and non-axisymmetric D modes with no corotation layer

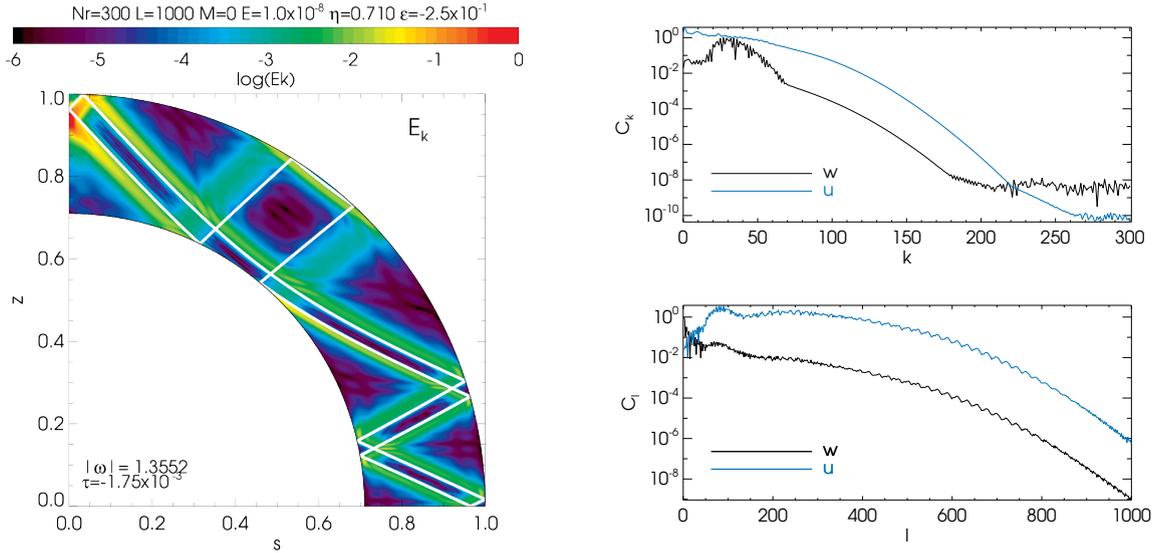
In this section we present our numerical results for a few representative D modes with a background conical rotation profile and Ekman numbers between  $10^{-7}$  and  $10^{-8}$ , and we compare the structural properties of the shear layers with the inviscid analysis detailed in Sect. 3. We note that in the rest of this paper we always show the kinetic energy distribution of the computed velocity fields, but that the viscous dissipation looks qualitatively very similar (e.g. Fig. 13 in Baruteau & Rieutord 2013).

Figure 6 displays the result of one of our numerical calculations for an axisymmetric ( $m = 0$ ) D mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx 0.91$  obtained in a spherical shell of solar aspect ratio  $\eta = 0.71$  with solar-like conical differential rotation ( $\varepsilon = 0.30$ ). The left panel shows the spatial distribution of the mode’s kinetic energy in a meridional quarter-plane. The amplitude of the mode reaches its maximum near the rotation axis which is a feature shared by inertial modes in a uniformly rotating fluid shell. This has been demonstrated in detail in Appendix A of Rieutord & Valdettaro (1997) who showed that the kinetic energy along characteristic trajectories grows as  $s^{-1/2}$  when  $s \rightarrow 0$ . The structure of this specific mode mostly consists of a shear layer following a short-period attractor formed by slightly curved lines, as expected in the case of differential rotation (see Sect. 3). This attractor is overlotted with a thick white curve, which is the prediction for the propagation of characteristics under the short-wavelength approximation. The patterns formed by the attractor and by the shear layers of the viscous mode are in very good agreement. The mode shown in Fig. 6 was extracted from a sequence of calculations in which we followed a particular mode while progressively decreasing the Ekman number from  $10^{-6}$  to  $10^{-9}$ . The damping rate of this mode is displayed as a function of  $E$  in the right panel of Fig. 6 where the dashed line clearly shows that it is proportional to  $E^{1/3}$ , which is the scaling

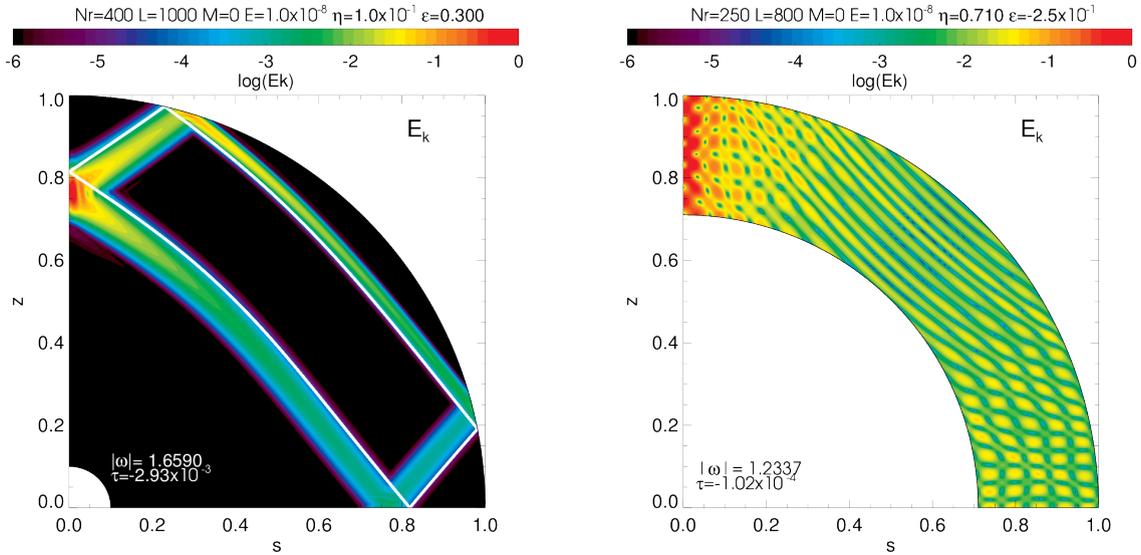
that is expected in the asymptotic regime for solid-body rotation (Rieutord & Valdettaro 1997), meaning that this kind of D mode is not deeply affected by differential rotation.

We show in Fig. 7 a qualitatively similar axisymmetric D mode of eigenfrequency  $\omega_p \approx 1.35$  that was obtained with the same aspect ratio but slightly lower Ekman number  $E = 10^{-8}$  and anti-solar differential rotation  $\varepsilon = -0.25$ . This time the amplitude of the mode still reaches its maximum at the rotation axis but is also quite large near the inner critical latitude (where the characteristics are tangent to the inner core), which is reminiscent of the solid-body rotation case where shear layers are sometimes emitted at the critical latitude. The right panel of Fig. 7 depicts the spectral content of  $u$  and  $w$  for this mode: the top panel shows the maximum Chebyshev coefficients  $C_k$  as a function of the Chebyshev order  $k$ , taking the highest value among all the spherical harmonics coefficients for a given  $k$ ; similarly, the bottom panel shows the maximum spherical harmonics coefficients  $C_l$  as a function of the spherical harmonic degree: for a given  $l$ , we take the highest value among all the Chebyshev coefficients. Therefore, we are certain that numerical convergence is achieved for this mode.

Finally, the axisymmetric mode of frequency  $\omega_p \approx 1.66$  presented in the left panel of Fig. 8 displays a shear layer that follows an attractor of characteristics that exists for arbitrarily small values of the aspect ratio  $\eta$ . This means that in conical differential rotation, attractors of characteristics may exist independently of the existence of an inner core, which was also found for cylindrical and shellular differential rotation profiles by Baruteau & Rieutord (2013). We checked that this mode exists for arbitrarily small cores, which contrasts with the fact that inertial modes in a full sphere are regular in the case of solid-body rotation (Greenspan 1968; Zhang et al. 2001). Our result shows that this is probably no longer the case when differential rotation is taken into account. The case where characteristics do not converge towards any limit cycle is shown in the right-panel of Fig. 8, which displays a mode of frequency  $\omega_p \approx 1.23$  with  $\eta = 0.71$  and  $\varepsilon = -0.25$ . This set of parameters corresponds to the open square in Fig. 4 for which  $\Lambda \approx 0$ . As expected, the shear layer patterns visible here follow the propagation of characteristics so that the



**Fig. 7.** *Left:* meridional cut of the normalized kinetic energy of a D mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx 1.355$  obtained with  $E = 10^{-8}$  and anti-solar differential rotation  $\varepsilon = -0.25$ . The attractor of characteristics is overplotted by the thick white curve. *Right:* spectral content of the radial ( $u$ ) and orthoradial ( $w$ ) components of the velocity field for this mode. Chebyshev and spherical harmonics coefficients are shown in the top and bottom panels, respectively.



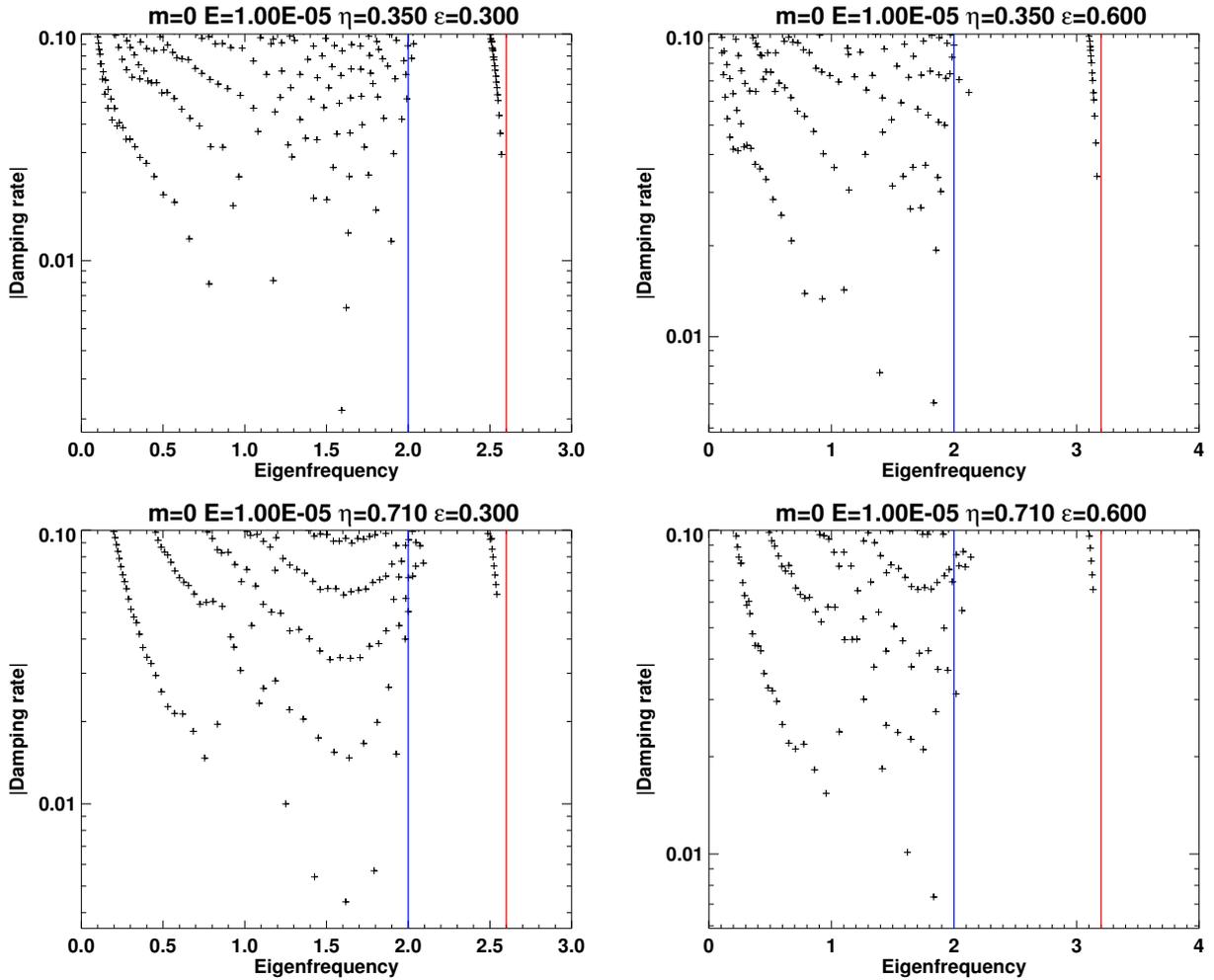
**Fig. 8.** *Left:* meridional cut of the normalized kinetic energy of a D mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx 1.66$  obtained with  $E = 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.10$ , and conical differential rotation  $\varepsilon = 0.30$ . The attractor of characteristics is again overplotted by the thick white curve. *Right:* meridional cut of the normalized kinetic energy of a D mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx 1.23$  obtained with  $E = 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.71$ , and conical differential rotation  $\varepsilon = -0.25$ . This mode is clearly associated with a quasi-periodic orbit of characteristics and not with an attractor.

kinetic energy is more smoothly distributed than in the previous attractor cases.

The four modes shown in Figs. 6 to 8 all correspond to one of the open squares in Figs. 3 and 4. This highlights the interest of the inviscid approach undertaken in Sect. 3 since the kinetic energy of a given mode is indeed more localized along thin shear layers when  $\Lambda < 0$  and more uniformly distributed in the shell when  $\Lambda \approx 0$ . As a conclusion, the inviscid analysis allows us to understand how differential rotation affects inertial modes, although we restricted ourselves to D modes that can propagate in the whole spherical shell. We see that D modes behave quite similarly to inertial modes for solid-body rotation. In the next section we turn to DT modes, which are specific to differential rotation.

#### 4.3. Axisymmetric and non-axisymmetric DT modes

In this section, we focus on modes for which a turning surface exists in the shell. The frequency range in which these modes can exist is indicated by the white areas in Fig. 1. However, not all sets of parameters falling in these white areas effectively correspond to an eigenmode. The inviscid analysis exposed in Sect. 3 reveals that characteristics cannot propagate in the elliptic domain of the shell, i.e. where  $\xi < 0$  or equivalently  $|\tilde{\omega}_p(\theta)| > 2\omega(\theta)$ . As a consequence, for sufficiently small Ekman numbers, DT modes are expected to be trapped in the hyperbolic domain out of which characteristics cannot propagate, a property which has always been verified by our numerical calculations. We also present results in cases where characteristics



**Fig. 9.** Distribution of eigenvalues in the complex plane for  $m = 0$  and  $E = 10^{-5}$  with a spectral resolution of  $N_r = 60$  and  $L = 150$ . The *top and bottom rows* are for thick and thin shells ( $\eta = 0.35$  and  $\eta = 0.71$ , respectively), while *the left and right columns* are for  $\varepsilon = 0.30$  and  $\varepsilon = 0.600$ . In all panels, the vertical blue (resp. red) line depicts the transition between the frequency ranges of D and DT modes (resp. DT and non-existent modes).

converge towards the intersection of a turning surface with the inner or outer shell boundaries (see Fig. 5).

#### 4.3.1. Existence of DT modes

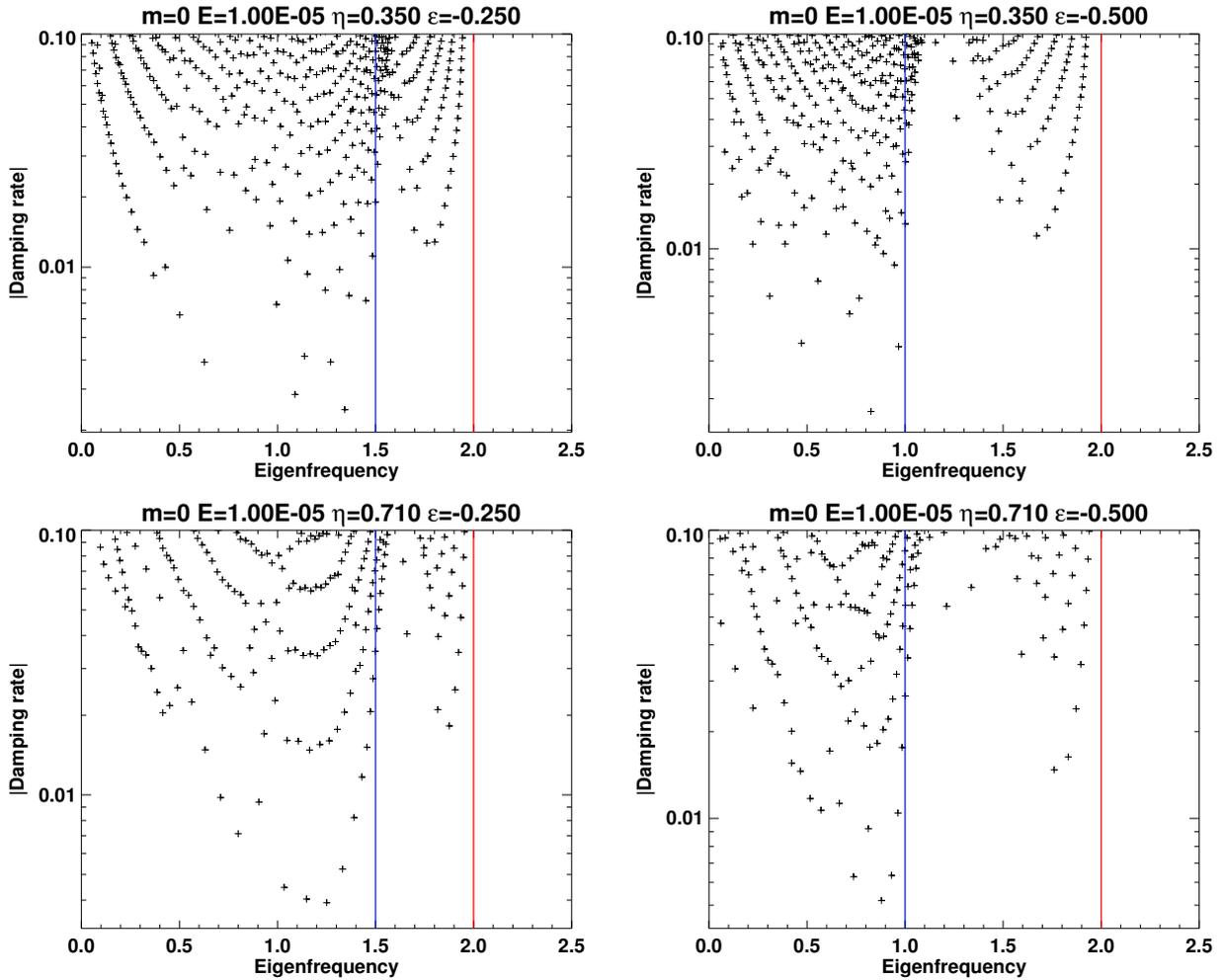
In order to find DT modes, as a first step we checked the distribution of the eigenvalues of our linear problem for a given set of parameters, using a QZ factorization method. This method rapidly becomes very costly as the spectral resolution (and thus the dimensions of the linear problem) increases; therefore, we are limited to moderate values of  $E$ . Despite this limitation, trends are still discernable, especially with the sign of the differential rotation parameter  $\varepsilon$ .

Figure 9 shows our results for a few sets of parameters with solar rotation ( $\varepsilon > 0$ ) that were obtained with a spectral resolution of  $N_r = 60$  and  $L = 150$ . This resolution is usually sufficient to achieve spectral convergence for all the modes we computed at  $E = 10^{-5}$ . We note that the eigenvalues with absolute damping rates above  $\sim 10^{-1}$  should be ignored because they are dominated by round-off errors and do not represent real resonant modes. We checked that the least damped eigenvalues located in the bottom part of each panel remained identical when slightly increasing

or decreasing either  $N_r$  or  $L$ , while the most damped eigenvalues changed substantially – as was expected.

In all cases presented here the least damped modes are all D modes, whereas the potential DT modes have a much higher absolute damping rate and tend to be located near the boundaries of the DT-frequency range displayed by the blue and red lines. This emphasizes that it is numerically much more difficult to compute DT modes than D modes, as we have indeed experienced. We followed one of these potential DT modes, starting with an eigenfrequency close to the maximum frequency allowed for DT modes (i.e. the red line in Fig. 9) and decreasing the Ekman number from  $10^{-5}$  to  $10^{-9}$ . We found that as  $E$  decreases, the eigenfrequency converges towards the maximum frequency. This frequency shift affects the location of the turning surface and therefore the size of the hyperbolic domain which simply disappears as  $E$  decreases. The very existence of this DT mode at lower Ekman numbers is therefore questionable.

Our comment on Fig. 9 that could explain the rarity of DT modes is no longer valid in the case of anti-solar differential rotation presented in Fig. 10. Though most of the least damped modes are still D modes, some of them have frequencies that belong to the DT-frequency range, independently of the values of the parameters  $\eta$  and  $\varepsilon$ . This indicates that resonant



**Fig. 10.** Same as Fig. 9 except that the left and right columns are for  $\varepsilon = -0.25$  and  $\varepsilon = -0.50$ .

axisymmetric DT modes in conical differential rotation mostly exist in the anti-solar case ( $\varepsilon < 0$ ), which is consistent with our attempts to compute DT modes; this means that the QZ factorization method is a precious tool in the exploration of the different families of inertial modes.

As can be seen in Fig. 11, the trend indicating that resonant modes preferentially exist in the frequency range of D modes rather than of DT modes is still valid in the case of non-axisymmetric  $m = 2$  modes. As explained in the introduction we chose  $m = 2$  because it is the dominant non-axisymmetric component of the tidal potential. The red symbols depict unstable modes which surprisingly exist even at Ekman numbers as high as  $10^{-5}$ . All of them feature a critical layer inside the shell where the Doppler-shifted wavefrequency  $\tilde{\omega}_p$  vanishes, which is reminiscent of the inviscid case exposed at the end of Sect. 3. We present our results of the non-axisymmetric modes with corotation resonances in Sect. 4.4.

#### 4.3.2. Examples

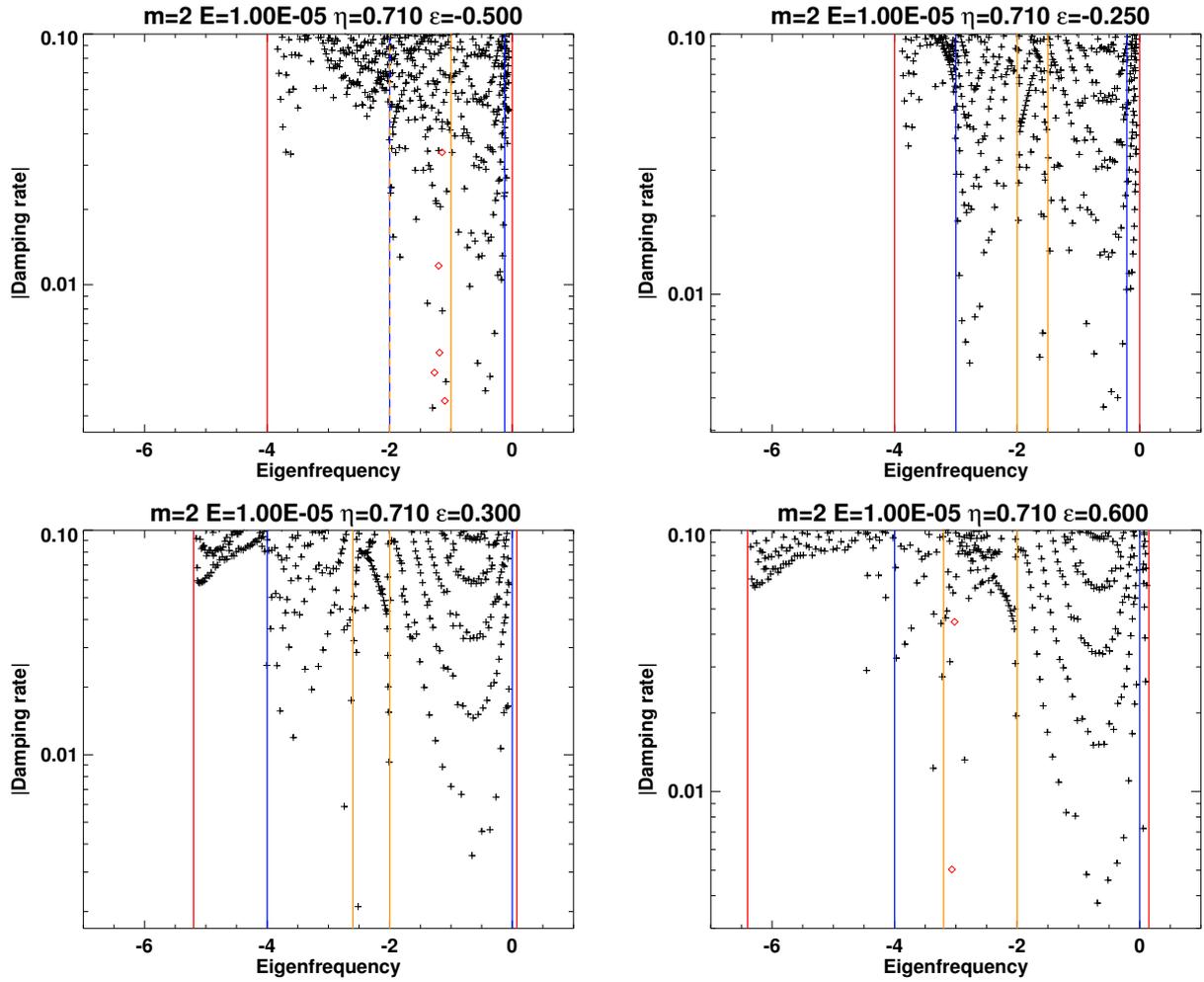
The axisymmetric DT mode presented in Fig. 12 was computed with  $\eta = 0.71$  and anti-solar rotation parameter  $\varepsilon = -0.25$ . In order to do this we first computed a DT mode at eigenfrequency  $\omega_p \approx 1.82$  and Ekman number  $E = 10^{-5}$  before decreasing  $E$  step-by-step (typical steps being a relative change of a few per cent), using the eigenfrequency of a given step as an initial guess

for the next step, along with increasing the spectral resolution. This method gives a better understanding of how the width of the shear layers and/or damping rates scale with  $E$  as we approach the astrophysically relevant regime of small  $E$ . As expected, the mode's kinetic energy is restricted to the hyperbolic domain located near the rotation axis, and the shear layer emitted at the inner critical latitude indeed reflects on the white dashed line that represents the turning surface. Looking at the behaviour of the paths of characteristics for this set of parameters, we find that they eventually focus at the intersection of the inner core with the turning surface, as does the shear layer of the viscous mode.

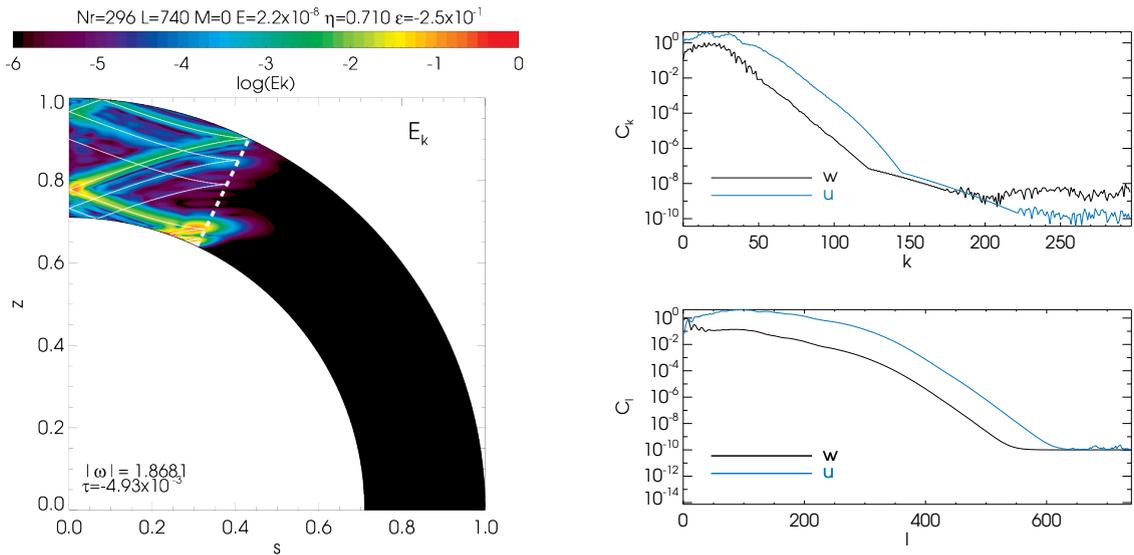
Another interesting  $m = 2$  DT mode is shown in Fig. 13 for  $\omega_p \approx 3.22$  and  $\varepsilon = -0.43$ . This mode features a shear layer that passes through both the inner and outer critical latitudes, and which focuses at the intersection between the inner core and the turning surface depicted by the white dashed line in the figure. We carefully checked that the paths of characteristics for these parameters indeed focus at this point.

#### 4.4. Critical layers

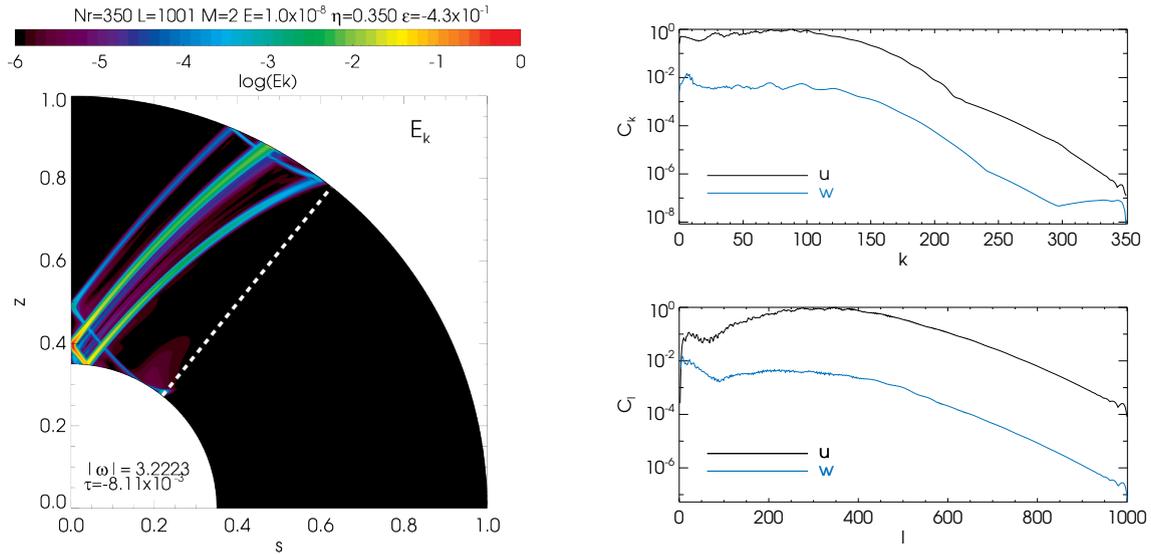
The goal of this section is to show a few results of non-axisymmetric inertial modes for which a corotation layer exists – by construction – a cone (see Eq. (18)). As pointed out at the end of Sect. 3, the fact that the Doppler-shifted wavefrequency  $\tilde{\omega}_p$



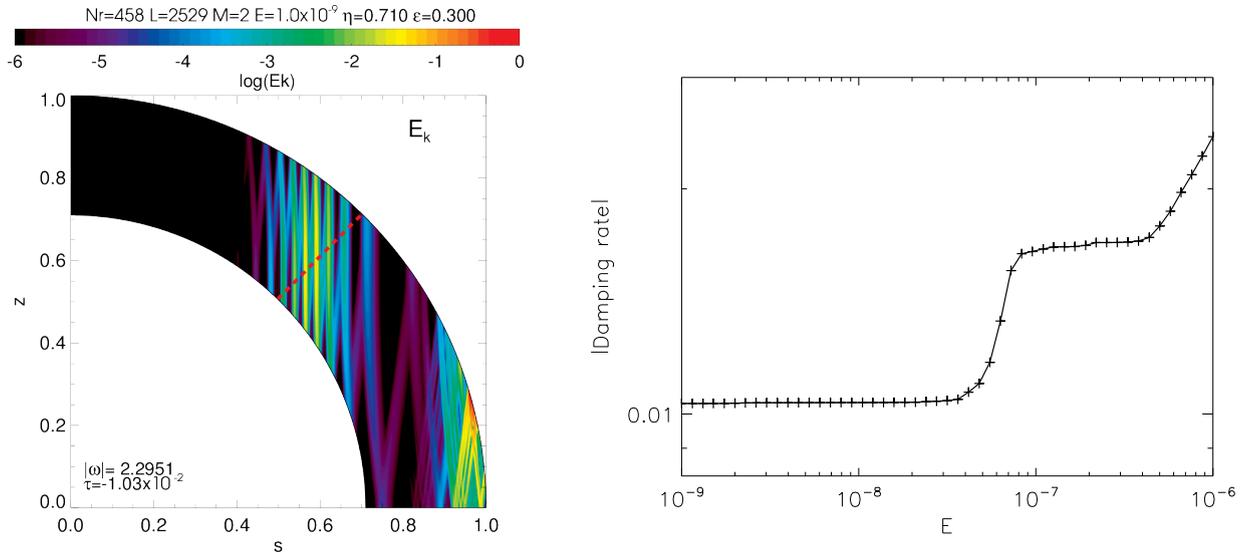
**Fig. 11.** Same as Fig. 9, but for  $m = 2$  and solar aspect ratio  $\eta = 0.71$ . The *four panels* are for  $\varepsilon = \{-0.50, -0.25, 0.30, 0.60\}$ . Orange solid lines are the boundaries of the frequency range in which a corotation layer exists inside the shell (see Fig. 1). Red symbols depict unstable eigenvalues for which  $\text{Re}(i\omega_p) > 0$ .



**Fig. 12.** *Left:* meridional cut of the normalized kinetic energy of a  $m = 0$  DT mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx -1.86$  obtained with  $E = 2.2 \times 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.71$ , and conical differential rotation  $\varepsilon = -0.25$ . The location of the turning surface is depicted by the white dashed line. *Right:* spectral content of the radial ( $u$ ) and orthoradial ( $w$ ) components of the velocity field for this mode.



**Fig. 13.** *Left:* meridional cut of the normalized kinetic energy of a  $m = 2$  DT mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx 3.22$  obtained with  $E = 10^{-8}$ ,  $\eta = 0.35$ , and conical differential rotation  $\varepsilon = -0.43$ . The location of the turning surface is depicted by the white dashed line. *Right:* spectral content of the radial ( $u$ ) and orthonormal ( $w$ ) components of the velocity field for this mode.



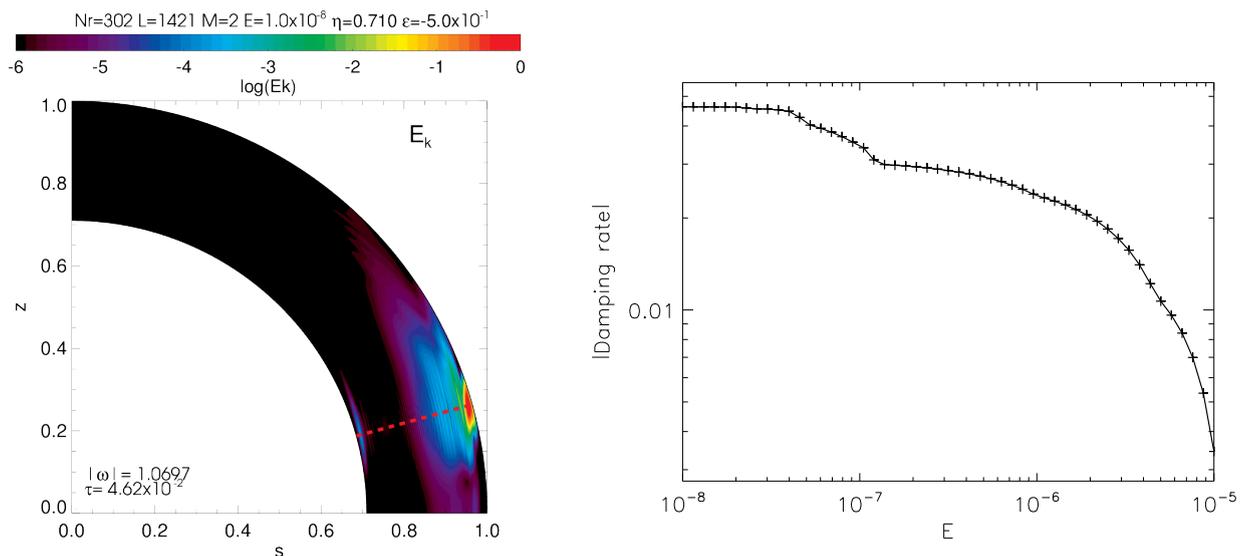
**Fig. 14.** *Left:* meridional cut of the normalized kinetic energy of an  $m = 2$  D mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx -2.30$  obtained with  $E = 10^{-9}$ , the Sun’s aspect ratio  $\eta = 0.71$ , and conical differential rotation  $\varepsilon = 0.3$ . The corotation layer is overplotted by the red dashed line. *Right:* scaling of the damping rate with respect to the Ekman number  $E$ . A jump between two different modes is visible around  $E \approx 7 \times 10^{-8}$ .

vanishes has important consequences on the propagation properties of inertial waves, since it is a singularity of the inviscid problem. The wave phase velocity  $v_p$  in the frame rotating with the fluid tends to zero at corotation while the group velocity may either tend to zero, have an infinite vertical component or have a finite slope in the case where  $\mathcal{B} = 0$ .

Figure 14 features a stable D mode obtained with high spectral resolution for  $m = 2$  with  $\omega_p \approx -2.30$ , solar parameters  $\eta = 0.71$  and  $\varepsilon = 0.3$ , and  $E = 10^{-9}$ . It was obtained by following a mode from  $E = 10^{-6}$  to  $E = 10^{-9}$ . For these parameters, the corotation resonance is located at  $\theta \approx \pi/4$  and is depicted by the red dashed line. A shear layer is emitted at the external critical latitude and the kinetic energy of the mode reaches its maximum there. The shear layer becomes more and more vertical as it approaches the corotation resonance, which is in agreement with the propagation properties of characteristics at that

location. However, the corotation resonance does not seem to have any consequences other than a local energy accumulation around the critical layer. Unlike the axisymmetric D mode depicted in Fig. 6, the damping rate of this mode does not scale as a power of  $E$ , but seems to plateau to a constant value. The “jump” around  $E \approx 7 \times 10^{-8}$  occurs because our method always keeps the least damped mode at a given step and may therefore switch from one mode to another during the process. Put simply, it might just be an interaction with another eigenvalue.

The case of the mode depicted in Fig. 15 is different. We started from the unstable  $m = 2$  D mode of eigenfrequency  $\omega_p \approx -1.10$  along with  $\eta = 0.71$ ,  $\varepsilon = -0.5$ , and  $E = 10^{-5}$ , which corresponds to the lowest red symbol in the top left panel of Fig. 11, and then progressively decreased  $E$  from  $10^{-5}$  to  $10^{-8}$  with a series of small steps. At each step, we used the eigenfrequency and damping rate of the previous step as the initial



**Fig. 15.** *Left:* meridional cut of the normalized kinetic energy of an  $m = 2$  D mode with eigenfrequency  $\omega_p \approx -2.30$  obtained with  $E = 10^{-9}$ , the Sun's aspect ratio  $\eta = 0.71$ , and conical differential rotation  $\varepsilon = 0.3$ . The corotation layer is overplotted by the red dashed line. *Right:* scaling of the growth rate with respect to the Ekman number  $E$ . A few jumps between different modes are visible around  $E \approx \{5 \times 10^{-6}, 10^{-7}, 5 \times 10^{-8}\}$ .

guess and selected the least damped (or most unstable) mode. The left panel of Fig. 15 displays a cut of the kinetic energy of the unstable velocity field obtained for  $E = 10^{-8}$ . Unlike all the stable oscillation modes presented so far, it shows no recognizable shear layer structure. Instead, a patch of kinetic energy shows up around the location of the critical layer depicted by the red dashed line. The dependance of the growth rate of this particular mode with the Ekman number shown in the right panel also clearly differs from the classical  $E^{1/3}$ -scaling presented in Fig. 7 for D modes, and is not even a power law. If we ignore the jumps between different modes (around  $E = 10^{-7}$  for instance), it seems that for a small enough  $E$ , the growth rate becomes roughly constant and reaches a very large value.

The role of critical layers in the propagation properties of different kinds of waves in various containers has been studied before in the fluid mechanics literature; for instance, Grimshaw (1979) studied the effect of critical levels on linear wave propagation as well as the associated absorption (Booker & Bretherton 1967) and valve effects (Acheson 1972, 1973). However, these works were restricted to the case where the mean flow is sheared in the vertical direction while our differential rotation profile is sheared in the horizontal direction. Using a different approach, Watson (1981) studied the stability of a conical rotation profile similar to ours with respect to non-axisymmetric wavelike perturbations, but was restricted to the case of two-dimensional Rossby waves with negligible radial velocity.

Nevertheless, it seems that critical layers can play a prominent role in the energy and momentum exchanges between the mean background flow and the waves velocity fields and may also strongly affect viscous dissipation. In order to understand the behaviour of inertial waves at corotation resonances, an interesting approach would be the study of a local one-dimensional model in which an inertial wave meets a critical layer induced by a horizontal shear in the background flow. This study is beyond the scope of this paper and is postponed to future work.

## 5. Conclusions and perspectives

In this work, we investigated the impact of conical differential rotation on the properties of free inertial waves in a

homogeneous fluid inside a spherical shell container. This study is motivated by the possible important role of tidally driven inertial waves in the dynamical evolution of close star-planet or stellar binary systems.

First, we found that differential rotation implies different families of inertial waves and that the frequency range in which they exist can be broadened substantially compared to the solid-body rotation case, provided that a large enough latitudinal differential rotation exists in the convective envelopes of low-mass stars (Brun & Toomre 2002; Brown et al. 2008; Matt et al. 2011). We also showed that the D mode regime for which waves can propagate in the entire shell is essentially similar to the solid-body rotation case: wave attractors (which follow curved paths of characteristics) still exist in narrow frequency ranges (whose number increases with the size of the inner core, see Sect. 3) and viscous D modes seem to follow the same scaling relations with Ekman number. Moreover, the least damped modes seem to be found preferentially in the D mode frequency range. In addition, differential rotation also affects their allowed propagation domain: in the DT regime, modes are trapped around the poles or the equator by a turning surface. It seems, however, that resonant DT modes are rare especially for solar-like differential rotation. It is important to note that these conclusions only stand for axisymmetric modes or non-axisymmetric modes without corotation resonances. Indeed, we found that these corotation layers strongly modify the behaviour of inertial waves since the wave phase velocity always vanishes there, and the paths of characteristics and the associated viscous shear layers may become vertical while crossing the resonance. Among all the numerical calculations performed in the viscous case, we mostly found stable modes, but we also found several unstable modes at Ekman numbers as high as  $10^{-5}$  which all featured a corotation resonance. As discussed when introducing the physics of the model, these unstable modes delineate the range of allowed parameters, since the background flow needs to be stable.

From the astrophysical perspective, these conclusions could have important dynamical implications for systems where inertial waves are excited, sustained and finally dissipated in a low-mass star with a latitudinal gradient of differential rotation in its convective envelope. One possible source of this excitation is

tides raised by a close-in stellar or planetary companion. This requires that one or more of the components of the tidal potential, which depends on the orbital configuration of the system, has a frequency that falls in the inertial range with a high enough amplitude so that the kinetic energy stored by inertial oscillations and the subsequent viscous dissipation alters the orbital and rotational dynamics of the system. In a subsequent paper, we shall derive analytically the forcing term due to tides before computing numerically the velocity field and viscous dissipation of such tidally excited inertial waves. This will allow us to investigate the influence of differential rotation (e.g. through turning surfaces, corotation layers) in the convective envelope of low-mass stars on tidal dissipation for various parameters related to stellar mass, rotation, companion mass, and orbital parameters.

Finally, we point out the limitations and possible improvements of our work. In addition to the conditions of stability that we already mentioned, we note that our model only accounts for the direct effects of the viscous dissipation of inertial waves in convective envelopes, which may not be the only mechanism responsible for tidal dissipation – the non-linear breaking of gravity waves in the radiative interior is another mechanism, see [Barker & Ogilvie \(2010, 2011\)](#), [Barker \(2011\)](#) – especially in cases where these waves are likely not to be excited. Additionally, we point out that our study assumes the fluid to be incompressible and does not include the effects of non-linearities (see [Jouve & Ogilvie 2014](#); [Favier et al. 2014](#)), which could become important for tidal oscillations of high amplitude, or the effects of other processes that could affect the very nature of the low-frequency oscillations studied here, such as the magnetic field, the centrifugal distortion ([Braviner & Ogilvie 2014](#); [Barker & Lithwick 2014](#)), or the possible interactions with turbulent convective motions ([Ogilvie & Lesur 2012](#)). However, the effects of differential rotation on the physical processes driving tidal dissipation have not yet been investigated, making this work a step towards a more detailed understanding of binary systems and star-planet interactions.

*Acknowledgements.* We warmly thank the referee A. J. Barker for his constructive comments which allowed us to improve the paper. M. Guenel and S. Mathis acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. This work was also supported by the Programme National de Planétologie (CNRS/INSU) and CNES PLATO grant at CEA-Saclay.

## References

- Acheson, D. J. 1972, *J. Fluid Mech.*, **53**, 401  
Acheson, D. J. 1973, *J. Fluid Mech.*, **58**, 27  
Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., et al. 2012, *ApJ*, **757**, 18  
Barker, A. J. 2011, *MNRAS*, **414**, 1365  
Barker, A. J., & Lithwick, Y. 2014, *MNRAS*, **437**, 305  
Barker, A. J., & Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, **395**, 2268  
Barker, A. J., & Ogilvie, G. I. 2010, *MNRAS*, **404**, 1849  
Barker, A. J., & Ogilvie, G. I. 2011, *MNRAS*, **417**, 745  
Baruteau, C., & Rieutord, M. 2013, *J. Fluid Mech.*, **719**, 47  
Baruteau, C., Crida, A., Paardekooper, S.-J., et al. 2014, *Protostars and Planets VI*, 667  
Booker, J. R., & Bretherton, F. P. 1967, *J. Fluid Mech.*, **27**, 513  
Braviner, H. J., & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, **441**, 2321  
Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2008, *ApJ*, **689**, 1354  
Brun, A. S., & Toomre, J. 2002, *ApJ*, **570**, 865  
Bryan, G. H. 1889, *Roy. Soc. London Philos. Trans. Ser. A*, **180**, 187  
Cartan, E. 1922, *Bull. Sci. Math.*, **46**, 317  
Chatterjee, S., Ford, E. B., Matsumura, S., & Rasio, F. A. 2008, *ApJ*, **686**, 580  
Damiani, C., & Lanza, A. F. 2015, *A&A*, **574**, A39  
Dintrans, B., Rieutord, M., & Valdetarro, L. 1999, *J. Fluid Mech.*, **398**, 271  
Favier, B., Barker, A. J., Baruteau, C., & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, **439**, 845  
Friedlander, S. 1982, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, **21**, 189  
García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, **316**, 1591  
Gastine, T., Yadav, R. K., Morin, J., Reiners, A., & Wicht, J. 2014, *MNRAS*, **438**, L76  
Giuricin, G., Mardirossian, F., & Mezzetti, M. 1984, *A&A*, **134**, 365  
Goldreich, P., & Keeley, D. A. 1977, *ApJ*, **211**, 934  
Goldreich, P., & Nicholson, P. D. 1989, *ApJ*, **342**, 1079  
Goodman, J., & Dickson, E. S. 1998, *ApJ*, **507**, 938  
Goodman, J., & Lackner, C. 2009, *ApJ*, **696**, 2054  
Greenspan, H. P. 1968, *The theory of rotating fluids* (Cambridge University Press)  
Grimshaw, R. 1979, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, **14**, 303  
Guillot, T., Lin, D. N. C., Morel, P., Havel, M., & Parmentier, V. 2014, in *EAS PS*, **65**, 327  
Hansen, B. M. S. 2010, *ApJ*, **723**, 285  
Husnoo, N., Pont, F., Mazeh, T., et al. 2012, *MNRAS*, **422**, 3151  
Hut, P. 1980, *A&A*, **92**, 167  
Jackson, B., Greenberg, R., & Barnes, R. 2008, *ApJ*, **678**, 1396  
Jouve, L., & Ogilvie, G. I. 2014, *J. Fluid Mech.*, **745**, 223  
Lai, D. 2012, *MNRAS*, **423**, 486  
Le Bars, M., Cébron, D., & Le Gal, P. 2015, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **47**, 163  
Maas, L. R. M., & Lam, F.-P. A. 1995, *J. Fluid Mech.*, **300**, 1  
Mathis, S. 2015, *A&A*, **580**, L3  
Mathis, S., & Remus, F. 2013, in *Lect. Not. Phys.*, **857**, eds. J.-P. Rozelot, & C. Neiner (Berlin: Springer Verlag), 111  
Matt, S. P., Do Cao, O., Brown, B. P., & Brun, A. S. 2011, *Astron. Nachr.*, **332**, 897  
Mazeh, T., Perets, H. B., McQuillan, A., & Goldstein, E. S. 2015, *ApJ*, **801**, 3  
Meibom, S., & Mathieu, R. D. 2005, *ApJ*, **620**, 970  
Meibom, S., Mathieu, R. D., & Stassun, K. G. 2006, *ApJ*, **653**, 621  
Miesch, M. S., Brun, A. S., De Rosa, M. L., & Toomre, J. 2008, *ApJ*, **673**, 557  
Naoz, S., Farr, W. M., Lithwick, Y., Rasio, F. A., & Teyssandier, J. 2011, *Nature*, **473**, 187  
Ogilvie, G. I. 2005, *J. Fluid Mech.*, **543**, 19  
Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, **396**, 794  
Ogilvie, G. I. 2013, *MNRAS*, **429**, 613  
Ogilvie, G. I. 2014, *ARA&A*, **52**, 171  
Ogilvie, G. I., & Lesur, G. 2012, *MNRAS*, **422**, 1975  
Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, **610**, 477  
Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2007, *ApJ*, **661**, 1180  
Papaloizou, J. C. B., & Savonije, G. J. 1997, *MNRAS*, **291**, 651  
Penev, K., Jackson, B., Spada, F., & Thom, N. 2012, *ApJ*, **751**, 96  
Poincaré, H. 1885, *Acta Math.*, **7**, 259  
Pont, F. 2009, *MNRAS*, **396**, 1789  
Rieutord, M. 1987, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, **39**, 163  
Rieutord, M., & Valdetarro, L. 1997, *J. Fluid Mech.*, **341**, 77  
Rieutord, M., & Valdetarro, L. 2010, *J. Fluid Mech.*, **643**, 363  
Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdetarro, L. 2001, *J. Fluid Mech.*, **435**, 103  
Rocca, A. 1987, *A&A*, **175**, 81  
Rocca, A. 1989, *A&A*, **213**, 114  
Savonije, G. J., & Papaloizou, J. C. B. 1983, *MNRAS*, **203**, 581  
Savonije, G. J., & Papaloizou, J. C. B. 1984, *MNRAS*, **207**, 685  
Savonije, G. J., & Papaloizou, J. C. B. 1997, *MNRAS*, **291**, 633  
Savonije, G. J., Papaloizou, J. C. B., & Albers, F. 1995, *MNRAS*, **277**, 471  
Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al. 1998, *ApJ*, **505**, 390  
Strugarek, A., Brun, A. S., Matt, S. P., & Réville, V. 2014, *ApJ*, **795**, 86  
Terquem, C., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., & Lin, D. N. C. 1998, *ApJ*, **502**, 788  
Thomson, S. W. 1880, *Philosophical Magazine Series 5*, **10**, 155  
Valdetarro, L., Rieutord, M., Braconnier, T., & Fraysse, V. 2007, *J. Comp. Appl. Math.*, **205**, 382  
Verbunt, F., & Phinney, E. S. 1995, *A&A*, **296**, 709  
Watson, M. 1981, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, **16**, 285  
Winn, J. N., Fabrycky, D., Albrecht, S., & Johnson, J. A. 2010, *ApJ*, **718**, L145  
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 1999, *A&A*, **350**, 129  
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 2001, *A&A*, **366**, 840  
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 2002, *A&A*, **386**, 222  
Zahn, J. P. 1966a, *Annales d'Astrophysique*, **29**, 313  
Zahn, J. P. 1966b, *Annales d'Astrophysique*, **29**, 489  
Zahn, J.-P. 1975, *A&A*, **41**, 329  
Zahn, J.-P. 1977, *A&A*, **57**, 383  
Zahn, J.-P. 2013, in *Lect. Notes Phys.* **861**, eds. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda, (Berlin: Springer Verlag), 301  
Zhang, K., Earnshaw, P., Liao, X., & Busse, F. H. 2001, *J. Fluid Mech.*, **437**, 103

# CHAPITRE 6

## ETUDE DE LA DISSIPATION DE MARÉE PAR LES ONDES INERTIELLES EN ROTATION DIFFÉRENTIELLE

### Sommaire

<b>6.1 Formulation du problème forcé : marées d'équilibre et dynamique, forçage académique et bilan énergétique</b>	<b>120</b>
6.1.1 Séparation entre marée d'équilibre et marée dynamique	120
6.1.2 Formulation mathématique en zone convective et en présence de rotation différentielle	121
6.1.3 Décomposition en harmoniques sphériques	125
6.1.4 Forçage unitaire simplifié par condition aux limites	125
6.1.5 Equation de l'énergie	126
<b>6.2 Simulation numérique de modes forcés dans une enveloppe convective en rotation différentielle conique</b>	<b>129</b>
6.2.1 Adimensionnement et méthode de résolution numérique	129
6.2.2 Cas du Soleil et influence de la viscosité	131
6.2.3 Comparaison entre rotation solaire et anti-solaire	134
6.2.4 Cas d'étoiles de masses différentes et influence de la taille du coeur	136
<b>6.3 Augmentation de la dissipation par les résonances de corotation</b>	<b>138</b>
<b>6.4 Conclusion</b>	<b>139</b>

Dans le chapitre 5, nous avons étudié les propriétés de propagation des ondes inertielles en présence de rotation différentielle conique, et nous avons étudié numériquement le problème aux valeurs propres que constituait la recherche de modes inertiels libres. Dans ce chapitre, nous étudions maintenant le régime forcé associé aux ondes inertielles dans ce même profil de rotation différentielle, qui correspond physiquement au problème de la marée dynamique dans l'enveloppe convective des étoiles de faible masse.

D'abord, nous discutons de la séparation entre marée d'équilibre et marée dynamique en présence de rotation différentielle pour aboutir à la formulation mathématique du problème forcé, dans laquelle nous définissons également un forçage simplifié et toutes les quantités utiles pour l'étude de la dissipation de marée. Ensuite, nous explorons le domaine de paramètres et présentons les résultats de simulations numériques calculant des modes inertiels en régime forcé. Enfin, nous interprétons les résultats obtenus sur la dissipation de marée et notamment le rôle crucial joué par les résonances de corotation.

## 6.1 Formulation du problème forcé : marées d'équilibre et dynamique, forçage académique et bilan énergétique

### 6.1.1 Séparation entre marée d'équilibre et marée dynamique

Comme nous l'avons exposé dans le chapitre 2, la réponse d'un corps fluide (ou comportant une région fluide) primaire  $A$  à la présence d'un compagnon de marée  $B$  est classiquement séparée en deux composantes :

- « la » marée d'équilibre, qui est une perturbation de densité et de pression satisfaisant l'équilibre hydrostatique dans le potentiel gravitationnel total qui inclut le potentiel créé par le corps  $A$  seulement (il faut y inclure la perturbation créée par la marée par rapport au cas où  $A$  est isolé) et le potentiel de marée externe créé par  $B$ . Elle n'est pas en général solution des équations de la dynamique lorsque la fréquence de marée est non-nulle ;
- et « la » marée dynamique, qui se superpose à la marée d'équilibre. Les corrections contenues dans la marée dynamique doivent prendre en compte l'accélération et les forces de rappel agissant sur le fluide (Zahn, 1975; Ogilvie & Lin, 2004), et incluent généralement des solutions de nature ondulatoire.

Cependant, la marée d'équilibre n'a pas été définie de manière univoque dans la littérature : si l'équilibre hydrostatique définissant la marée d'équilibre est bien défini (c'est une relation entre les perturbations du potentiel gravitationnel, de pression et de densité), le champ de vitesse (ou de déplacement) qui est associé à la redistribution de masse n'est en revanche pas défini de manière unique.

La première théorie de la marée d'équilibre adiabatique en zone convective de Zahn (1966a,b) (voir aussi Goldreich & Nicholson, 1989; Remus et al., 2012a) suppose que la matière est transportée le long des équipotentielles du potentiel total, ce qui conduit à un champ de vitesse à divergence nulle qui peut être calculé analytiquement. Celui-ci n'est valable Ogilvie (2014) que lorsque la fréquence de marée est faible devant la fréquence de Brünt-Vaisala ( $N$ ) caractérisant la stratification, si bien que le champ de vitesses obtenu n'est pas valable en général, notamment dans les zones où la stratification est quasiment neutre ( $N \approx 0$ ) comme c'est le cas des zones convectives stellaires. Dans ce cas, on peut superposer à ce champ de vitesse à divergence nulle un autre champ de vitesse (ou de déplacement) à grande échelle anélastique arbitraire sans modifier les perturbations de pression et de densité associées, si bien que l'équilibre hydrostatique définissant la marée d'équilibre est préservé.

Toujours dans les zones où la stratification est neutre ( $N \approx 0$ ), et dans le cas où la rotation est lente devant la fréquence de marée, (Terquem et al., 1998; Goodman & Dickson, 1998) ont proposé que le champ de vitesse (ou de déplacement) de marée est irrotationnel et dérive donc d'un gradient, formulation également adoptée par Ogilvie (2013). Dans le

cas contraire où la fréquence de marée est bien plus lente que la rotation, la marée d'équilibre pourrait être décrite par l'équilibre géostrophique vu au chapitre 3 (Ogilvie, 2014). Ces propositions variées montrent que différentes définitions du champ de vitesse associé à la marée d'équilibre ont été données en fonction des ordres de grandeur respectifs des fréquences associées à la marée, à la rotation et à la stratification.

### 6.1.2 Formulation mathématique en zone convective et en présence de rotation différentielle

Dans cette section, nous exposons notre formulation mathématique du problème de la marée d'équilibre et de la marée dynamique dans les zones convectives, où la stratification du fluide est approximativement neutre, et en présence de rotation différentielle. Dans une première étape, nous considérons donc la zone convective externe (de rapport d'aspect  $\eta$ ) d'un corps primaire  $A$  et écrivons l'équation du moment, l'équation de continuité et l'équation de Poisson en référentiel inertiel et en présence d'un potentiel de marée externe  $U$  (voir les équations (1.3) à (1.6) dans Zahn, 1966a) :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \rho \nabla (\Phi + U) + \mathbf{F}(\mathbf{v}), \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.2)$$

$$\Delta \Phi + 4\pi \mathcal{G} \rho = 0, \quad (6.3)$$

qu'il faut compléter par le fait que la zone convective est isentropique ( $S = \text{constante}$ ), et par l'équation d'état du fluide. Dans ces équations,  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ ,  $P$ , et  $\Phi$  désignent respectivement le champ de vitesse total du fluide, la densité, la pression et le potentiel gravitationnel total créé par le corps  $A$ . La convention de signe adoptée ici pour le lien entre potentiel gravitationnel et accélération est la même que dans Zahn (1966a), à savoir  $\mathbf{g} = +\nabla \Phi$ . Ici,  $\mathbf{F}(\mathbf{v})$  est une force visqueuse agissant sur le fluide que nous n'explicitons pas encore, mais que nous supposons linéaire.

L'état d'équilibre hydrostatique de l'étoile seule sans rotation est décrit par des variables indicées par  $_0$  qui vérifient :

$$-\nabla P_0 + \rho_0 \nabla \Phi_0 = 0, \quad (6.4)$$

$$\Delta \Phi_0 + 4\pi \mathcal{G} \rho_0 = 0, \quad (6.5)$$

$$S_0 = 0, \quad (6.6)$$

ou la dernière équation est uniquement valable dans la zone convective considérée comme isentropique.

Nous développons alors toutes les grandeurs scalaires (à savoir  $\rho$ ,  $P$  et  $\Phi$ ) sous la forme  $X = X_0 + X'$ , où  $X'$  représente la perturbation eulérienne de la grandeur  $X$ . Notons que

le potentiel de marée  $U$  est considéré comme une perturbation du potentiel  $\Phi_0$ , et que  $\Phi'$  est du même ordre que  $U$ . Nous décomposons également le champ de vitesse total  $\mathbf{v}$  en un écoulement de rotation moyenne  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ , où  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(r, \theta) \mathbf{e}_z$  est le vecteur rotation du fluide dont le module est la moyenne azimutale du profil de vitesse angulaire du fluide, c'est-à-dire :

$$\Omega(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (6.7)$$

auquel se superpose un champ de vitesse  $\mathbf{u}$  (alors considéré comme une perturbation à cet écoulement moyen) qui vérifie par conséquent la relation

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{u}. \quad (6.8)$$

Nous introduisons ces notations dans les équations (6.1) à (6.3) et ne conservons que les termes du premier ordre, c'est-à-dire que nous négligeons le terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  (voir les équations (1.7) à (1.9) dans Zahn, 1966a). De plus, nous négligeons le terme d'accélération centrifuge, et nous obtenons :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} + 2 \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi \right) = -\nabla P' + \rho_0 \nabla (\Phi' + U) + \rho' \nabla \Phi_0 + \mathbf{F}, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho'}{\partial \varphi} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0, \quad (6.10)$$

$$\Delta \Phi' + 4\pi \mathcal{G} \rho' = 0, \quad (6.11)$$

où l'on reconnaît les termes d'entraînement  $\Omega \partial / \partial \varphi$  ainsi que le terme dû à la rotation différentielle  $(r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi)$  qui est complémentaire à l'accélération de Coriolis  $(2 \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u})$ .

Il est mathématiquement correct de séparer arbitrairement l'inconnu d'un système d'équations en deux composantes, tant que les sous-systèmes qui en résultent sont équivalents à celui de départ : c'est ce caractère arbitraire qui a mené aux différentes propositions disponibles dans la littérature pour la définition du champ de vitesse associé à la marée d'équilibre (voir l'équation (6.26)). Nous proposons de décomposer toutes les quantités perturbées, c'est-à-dire le champ de vitesse inconnu  $\mathbf{u}$  ainsi que les quantités perturbées, sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_d, \quad (6.12)$$

$$\rho' = \rho'_h + \rho'_d, \quad (6.13)$$

$$P' = P'_h + P'_d, \quad (6.14)$$

$$\Phi' = \Phi'_h + \Phi'_d, \quad (6.15)$$

où les quantités indicées par  $h$  sont associées à l'ajustement hydrostatique du corps (ce qu'on appelle habituellement la marée d'équilibre) tandis que leur complément indicé par  $d$  correspond à la correction (nécessaire pour vérifier l'équation du moment) que constitue

la marée dynamique. Dans cette optique, nous allons constituer deux système d'équations couplés respectivement associés aux indices  $h$  et  $d$ .

Avant de réécrire le nouveau système d'équations, nous faisons les hypothèses et approximations suivantes :

- comme nous considérons une zone convective stratifiée adiabatiquement, nous pouvons négliger le terme  $\rho'_d \nabla \Phi_0$  associé à la « flottabilité » (*buoyancy* en anglais), c'est-à-dire la force de rappel d'Archimède associée aux ondes de gravité dans les zones stablement stratifiées ;
- nous appliquons ensuite l'approximation de Cowling (Cowling, 1941) qui consiste à négliger la redistribution de potentiel gravitationnel associé à la marée dynamique ( $\rho_0 \nabla \Phi'_d$ ) dans l'équation du mouvement ;
- nous ne considérons pas l'action de la force visqueuse dissipative sur la marée d'équilibre ( $\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) = \mathbf{0}$ ) ;
- enfin, nous filtrons les ondes acoustiques dans la marée dynamique, car leur fréquence est généralement bien supérieure à celles des fréquences de marée, en faisant l'approximation anélastique qui conduit à

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \rho'_d \approx 0 \quad \text{et} \quad \nabla(\rho_0 \mathbf{u}_d) \approx 0. \quad (6.16)$$

Nous arrivons alors au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \varphi} + 2 \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_h + r \sin \theta (\mathbf{u}_h \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi \right) \\ + \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial \varphi} + 2 \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_d + r \sin \theta (\mathbf{u}_d \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi \right) \\ = -\nabla P'_h - \nabla P'_d + \rho_0 \nabla(\Phi'_h + U) + \rho'_h \nabla \Phi_0 + \mathbf{F}(\mathbf{u}_d), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \rho'_h}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho'_h}{\partial \varphi} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_h) = 0, \quad (6.18)$$

$$\Delta \Phi'_h + 4\pi \mathcal{G} \rho'_h = 0, \quad (6.19)$$

$$\Delta \Phi'_d + 4\pi \mathcal{G} \rho'_d = 0. \quad (6.20)$$

Le système est fermé par l'équation de la chaleur isentropique  $\partial S' / \partial t = 0$ .

Nous nous plaçons dans le cas adiabatique ( $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ) et écrivons la composante horizontale de l'équilibre hydrostatique associé à la marée d'équilibre en présence du potentiel de marée  $U$  en suivant Zahn (1966b) :

$$P'_h = \rho_0(\Phi'_h + U), \quad (6.21)$$

dont on prend le gradient des deux membres pour obtenir

$$\nabla P'_h = \rho_0 \nabla(\Phi'_h + U) + (\Phi'_h + U) \nabla \rho_0. \quad (6.22)$$

On peut aussi utiliser l'équation (6.17) privée de son membre de gauche et des termes associés à la marée dynamique pour obtenir

$$-\nabla P'_h + \rho'_h \nabla \Phi_0 + \rho_0 \nabla (\Phi'_h + U) = 0, \quad (6.23)$$

que l'on combine avec (6.22) pour obtenir l'expression de la perturbation de densité associée à la marée d'équilibre :

$$\rho'_h = -\frac{1}{g_0} \frac{d\rho_0}{dr} (\Phi'_h + U), \quad (6.24)$$

où  $g_0 = \nabla \Phi_0$  est la gravité non-perturbée.

Sachant que le potentiel de marée  $U$  est harmonique dans l'étoile, *i.e.*  $\Delta U = 0$ , l'équation de Poisson (6.19) peut alors se réécrire sous la forme

$$\Delta \Phi'_h = \Delta (\Phi'_h + U) = \frac{4\pi G}{g_0} \frac{d\rho_0}{dr} (\Phi'_h + U) = -4\pi \mathcal{G} \rho'_h, \quad (6.25)$$

dont la résolution permet donc de calculer  $\Phi'_h$ , puis  $\rho'_h$  lorsque l'on connaît  $U$  et l'état d'équilibre de l'étoile isolée.

En plus des hypothèses décrites ci-dessus, il est nécessaire d'utiliser une relation supplémentaire (relation de fermeture) afin de pouvoir calculer  $\mathbf{u}_h$ . Il s'agit d'un *choix arbitraire* : chaque définition possible du champ de vitesse de la marée d'équilibre *doit* être accompagnée de la marée dynamique complémentaire, sans quoi la séparation n'a pas de sens. Dans ce travail, nous définirons le champ de vitesse  $\mathbf{u}_h$  en supposant qu'il est conservé le long des équipotentielles du potentiel total :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\Phi' + U) + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \Phi_0 = 0, \quad (6.26)$$

suisant en cela Zahn (1966b) et la littérature sur les marées océaniques.

Cette équation permet de calculer la composante radiale de  $\mathbf{u}_h$ , et on utilise l'équation de continuité pour la marée d'équilibre (6.18) pour calculer ses autres composantes. La résolution explicite de ces équations pour un potentiel de marée  $U$  et une rotation différentielle  $\Omega$  donnés (et développés sur les harmoniques sphériques) peut être effectuée en utilisant leur algèbre, les harmoniques sphériques vectorielles et leurs couplages (voir annexe A).

Ayant maintenant caractérisé  $\mathbf{u}_h$ , nous écrivons le système d'équations pour la marée dynamique :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial \varphi} + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_d + r \sin \theta (\mathbf{u}_d \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi \right) = -\nabla P'_d + \mathbf{F}(\mathbf{u}_d) + \rho_0 \mathbf{f}(\mathbf{u}_h), \quad (6.27)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_d) = 0, \quad (6.28)$$

où  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_h) = -\left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \varphi} + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_h + r \sin \theta (\mathbf{u}_h \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi\right)$  représente le forçage par unité de masse induit sur la marée dynamique par l'action de l'entraînement et de l'accélération de Coriolis sur le champ de vitesse de la marée d'équilibre (approche semblable à celles de [Ogilvie, 2005, 2013](#)).

Si on suppose que les variations de densité du fluide sont négligeables pour la marée dynamique (ondes inertielles de petites échelles spatiales), et que la force visqueuse s'écrit  $\mathbf{F}(\mathbf{u}_d) = \rho_0 \nu \Delta \mathbf{u}_d$ , alors ce système est identique au système adimensionné (voir les équations (5.3) et (5.4)) que nous avons écrites pour l'étude des ondes inertielles libres en présence de rotation différentielle dans le chapitre 5, à l'exception du second membre où le forçage apparaît.

### 6.1.3 Décomposition en harmoniques sphériques

Pour résoudre le système d'équations (6.27)-(6.28), nous utilisons à nouveau la décomposition spectrale présentée dans les chapitres 3 et 5 (voir également l'annexe A) pour exprimer le champ de vitesse et de pression, mais aussi le forçage  $\mathbf{f}$  :

$$\mathbf{u}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ u_m^l(t, r) \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) + v_m^l(t, r) \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + w_m^l(t, r) \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{f}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ f_m^l(t, r) \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) + g_m^l(t, r) \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + h_m^l(t, r) \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}, \quad (6.30)$$

$$p(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ p_m^l(t, r) Y_l^m(\theta, \varphi) \right\}. \quad (6.31)$$

### 6.1.4 Forçage unitaire simplifié par condition aux limites

Le problème du forçage de la marée dynamique est donc complexe : le potentiel de marée n'agit pas directement sur celle-ci mais sur la marée d'équilibre, sur laquelle l'action des forces de rappel excite indirectement la marée dynamique.

Analysons les résultats de la section précédente en remarquant qu'en présence de rotation différentielle, chaque composante spectrale  $(l, m)$  du potentiel de marée  $U$  ( $\propto Y_2^2$  dans le cas d'une orbite circulaire dans le plan équatorial du corps primaire) va donner naissance, à cause des termes où apparaissent le profil de rotation non-uniforme  $\Omega(r, \theta)$ , à plusieurs composantes spectrales  $\mathbf{R}_{l'}^m$  et  $\mathbf{S}_{l'}^m$  avec  $l' \neq l$  pour le champ de vitesse de la marée d'équilibre. Cependant, le problème linéaire que nous considérons ici permet d'étudier séparément chaque composante spectrale  $(l, m)$  contenue dans le forçage  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_h)$  (et de considérer une amplitude unitaire pour chacune d'elle) afin de comprendre la nature de la réponse du fluide à ce dernier.

De plus, nous suivons l'approche présentée par Ogilvie (2009) qui a montré que lorsque la fréquence du forçage est faible devant la vitesse angulaire critique du corps, et que la viscosité est faible (voir l'équation (27) dans Ogilvie (2009)), ce que nous supposons vérifié dans ce travail, alors un forçage de la forme

$$\mathbf{f} = \nabla \left[ U_m^l (r/R)^l Y_l^m(\theta, \varphi) \right] e^{i\Omega_p t}, \quad (6.32)$$

c'est-à-dire un forçage « direct » par un potentiel d'amplitude quelconque  $U_m^l$ , périodique en temps et proportionnel à une harmonique sphérique  $(l, m)$  donnée, peut être choisi nul et remplacé par une condition aux limites équivalente sur la sphère externe pour la même composante spectrale de la vitesse radiale qui s'écrit :

$$u_m^l(t, r = R) = \frac{U_m^l}{R \Omega_{\text{ref}}} e^{i\Omega_p t}, \quad (6.33)$$

où  $u_m^l(t, r)$  est la fonction radiale décrivant la vitesse radiale dans la décomposition spectrale (6.29) tandis que les autres composantes spectrales de la vitesse radiale y sont nulles ( $u_m^{l'}(t, R) = 0$  si  $l' \neq l$ ). Bien que dans notre cadre de travail, la marée dynamique ne soit pas forcée directement par le potentiel de marée, nous conservons ce forçage académique simplifié dans ce travail, car nous nous intéressons avant tout au rôle joué par la rotation différentielle.

### 6.1.5 Equation de l'énergie

A partir de cette section, nous nous plaçons à nouveau dans le cas d'un fluide homogène de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , et nous utilisons à nouveau le profil de rotation différentielle conique défini par l'équation

$$\Omega(\theta) = \Omega_{\text{ref}}(1 + \varepsilon \sin^2 \theta). \quad (6.34)$$

De plus, nous abandonnons l'indice  $_d$  associé aux champs de vitesse et de pression de la marée dynamique, que nous notons plus simplement  $\mathbf{u}$  et  $P'$  respectivement, si bien que le système d'équations (6.27)-(6.28) devient :

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi \right) = -\nabla P' + \rho \nu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}(\mathbf{u}_h), \quad (6.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6.36)$$

où  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$  désigne la dérivée particulière.

Nous faisons l'hypothèse que le forçage  $\mathbf{f}$  est périodique en temps avec une fréquence  $\Omega_p$  dans le référentiel inertiel, et en  $\varphi$  avec un nombre d'onde azimutal  $m$  donné :

$$\mathbf{f} \propto e^{i(\Omega_p t + m\varphi)}. \quad (6.37)$$

Sachant que les différents  $m$  qui apparaissent dans les décompositions (6.29), (6.30) et (6.31) ne sont pas couplés par l'équation linéaire (6.35), nous cherchons des solutions sous la forme d'ondes de même fréquence  $\Omega_p$  et de même nombre azimutal  $m$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{u}, P' \propto e^{i(\Omega_p t + m\varphi)}. \quad (6.38)$$

Ensuite, nous multiplions scalairement l'équation (6.35) décrivant la marée dynamique par le complexe conjugué du champ de vitesse  $\mathbf{u}^*$  et intégrons sur le volume  $V$  de la zone convective, autrement dit la coquille sphérique de rapport d'aspect  $\eta$  occupé par le fluide, pour obtenir l'équation de l'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u}^* dV + \iiint_V \rho r \sin \theta \left( u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) u_\varphi^* dV \\ = - \iiint_V \nabla P' \cdot \mathbf{u}^* dV + \iiint_V \rho \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* dV + \iiint_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* dV, \end{aligned} \quad (6.39)$$

où  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ , et où le terme de Coriolis n'apparaît pas puisqu'il ne travaille pas.

Or,  $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u}^* = i(\Omega_p + m\Omega)|\mathbf{u}|^2$  est un nombre imaginaire pur. Son intégrale sur le volume  $V$  est également un nombre imaginaire pur, et nous pouvons effacer ce terme de l'équation de l'énergie. En revanche, toutes les autres intégrales sont à valeurs réelles, ce qui signifie que le terme  $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u}^*$  est en quadrature de phase par rapport à tous les autres termes de l'équation de l'énergie. On peut alors simplifier l'équation (6.39) en prenant sa partie réelle. Nous définissons alors la dissipation visqueuse, le travail du terme de flux acoustique et le travail du forçage  $\mathbf{f}$  (intégrés sur le volume de la coquille sphérique) respectivement par les relations :

$$D_\nu = \iiint_V \rho \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* dV, \quad (6.40)$$

$$\epsilon_{P'} = - \iiint_V \nabla P' \cdot \mathbf{u}^* dV, \quad (6.41)$$

$$\epsilon_{\mathbf{f}} = \iiint_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* dV. \quad (6.42)$$

Enfin, le terme comportant la rotation différentielle peut se réécrire sous la forme :

$$\iiint_V \rho r \sin \theta \left( u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) u_\varphi^* dV = \int_{r=\eta R}^R \int_{\theta=0}^\pi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \mathcal{F}_\theta^{AM} r^2 dr \sin \theta d\theta \quad (6.43)$$

où  $\mathcal{F}_\theta^{AM} = \rho r \sin \theta \int_\varphi u_\theta u_\varphi^* d\varphi$  est le flux de moment cinétique transporté par les Reynolds stresses du champ de vitesse de la marée dynamique. L'équation de l'énergie (6.39) se réécrit donc finalement sous la forme :

$$\int_{r=\eta R}^R \int_{\theta=0}^\pi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \mathcal{F}_\theta^{AM} r^2 dr \sin \theta d\theta = \epsilon_{P'} + D_\nu + \epsilon_{\mathbf{f}}, \quad (6.44)$$

La moyenne de l'équation de l'énergie (6.44) sur une période  $T = 2\pi/\Omega_p$  s'écrit finalement sous la forme :

$$\int_{r=\eta R}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \langle \mathcal{F}_{\theta}^{AM} \rangle_T r^2 dr \sin \theta d\theta = \langle \epsilon_{P'} \rangle_T + \langle D_{\nu} \rangle_T + \langle \epsilon_f \rangle_T, \quad (6.45)$$

où les crochets  $\langle \ \rangle_T$  représentent la moyenne sur une période. Comme toutes les quantités physiques  $\text{Re}[\mathbf{u}]$ ,  $\text{Re}[P']$  et  $\text{Re}[\mathbf{f}]$  sont en fait proportionnelles à  $\cos(\Omega_p t)$ , il suffit de multiplier les quantités calculées précédemment par la moyenne de  $\cos^2$  sur une période, c'est-à-dire  $1/2$ .

### Expression à partir des fonctions radiales des décompositions spectrales

On peut calculer  $\langle \epsilon_{P'} \rangle_T$ ,  $\langle D_{\nu} \rangle_T$  et  $\langle \epsilon_f \rangle_T$  à partir des fonctions radiales apparaissant dans les décompositions (6.29), (6.30) et (6.31) en utilisant les relations d'orthogonalités entre harmoniques sphériques vectorielles (voir annexe A).

D'abord, l'équation de continuité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  issue de (6.36) nous permet d'écrire

$$\nabla P' \cdot \mathbf{u}^* = \nabla \cdot (P' \mathbf{u}^*) \quad (6.46)$$

si bien qu'on obtient grâce au théorème de flux-divergence

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{P'} \rangle_T &= \frac{1}{2} \epsilon_{P'} = -\frac{1}{2} \iiint_V \nabla P' \cdot \mathbf{u}^* dV \\ &= -\frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (P' \mathbf{u}^*) dV \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial V} P' \mathbf{u}^* \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial V} P' u_r^* r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{l=m}^{\infty} \left[ (\eta R)^2 P_m^l(\eta R) u_m^l(\eta R)^* + R^2 P_m^l(R) u_m^l(R)^* \right], \end{aligned} \quad (6.47)$$

Ce terme est donc facilement calculable à partir des valeurs prises par les fonctions radiales  $P_m^l$  et  $u_m^l$  prises en  $r = \eta R$  et  $r = R$ . Dans le cas où les conditions aux limites sur la vitesse radiale sont celles d'une surface libre sur les sphères internes et externes, alors  $u_m^l(\eta R) = u_m^l(R) = 0$  pour toutes les valeurs de  $l$ , et ce terme est nul. En revanche, un seul des termes n'est pas nul dans le cas du forçage par les conditions aux limites sur la sphère externe décrit par l'équation (6.33), auquel cas il représente le travail de celui-ci.

Les moyennes temporelles sur une période de la dissipation visqueuse et du travail du forçage volumique  $\mathbf{f}$ , à savoir  $\langle \epsilon_f \rangle_T$  et  $\langle D_\nu \rangle_T$  respectivement, s'écrivent aussi à partir des fonctions radiales apparaissant dans les décompositions (6.29) et (6.30) (e.g. Rieutord, 1987) :

$$\begin{aligned} \langle D_\nu \rangle_T = \frac{1}{2} D_\nu = \frac{1}{2} \rho \nu \sum_{l=m}^{+\infty} \int_{\eta R}^R & \left[ 2 \left| \frac{\partial u_m^l}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{2u_m^l - l(l+1)v_m^l}{r} \right|^2 \right. \\ & + l(l+1) \left( \left| \frac{\partial v_m^l}{\partial r} + \frac{u_m^l - v_m^l}{r} \right|^2 + \left| r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w_m^l}{r} \right) \right|^2 \right) \\ & \left. + (l-1)l(l+1)(l+2) \frac{|v_m^l|^2 + |w_m^l|^2}{r^2} \right] r^2 dr, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\langle \epsilon_f \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon_f = \frac{1}{2} \rho \sum_{l=m}^{+\infty} \int_{\eta R}^R \left[ u_m^l f_m^{l*} + l(l+1) (v_m^l g_m^{l*} + w_m^l h_m^{l*}) \right] r^2 dr. \quad (6.49)$$

## 6.2 Simulation numérique de modes forcés dans une enveloppe convective en rotation différentielle conique

### 6.2.1 Adimensionnement et méthode de résolution numérique

Comme dans le chapitre 5, nous adimensionnons les équations (6.35)-(6.36) en utilisant le rayon externe  $R$  de la coquille sphérique comme échelle de longueur (son rayon interne étant toujours  $\eta R$ ), la vitesse angulaire aux pôles  $\Omega_{\text{ref}}$  de l'écoulement de rotation différentielle comme échelle de fréquence, et la densité  $\rho$  du fluide homogène comme unité de masse. Pour ne pas alourdir les notations, nous conservons les notations  $\mathbf{u}$ ,  $P'$  et  $\Omega(\theta)$  pour les versions adimensionnées des champs de vitesse et de pression et du profil de rotation différentielle. De plus, nous adoptons la notation du chapitre 5  $\omega_p = \Omega_p / \Omega_{\text{ref}}$  pour la version adimensionnée de la fréquence imposée par le forçage de marée (qui n'est plus une fréquence propre) ainsi que  $\tilde{\omega}_p = \omega_p + m\Omega(\theta)$  pour la fréquence Doppler.

Le système d'équations adimensionnées résolu numériquement dans la suite de cette section est donc le suivant :

$$i\tilde{\omega}_p \mathbf{u} + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi = -\nabla P' + \mathbf{E} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{f}), \quad (6.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.51)$$

accompagné des conditions aux limites de surface libre sur les sphères interne et externe, à l'exception du forçage par la condition aux limites que nous adoptons : il s'agit de remplacer  $\mathbf{f}$  par un forçage d'amplitude  $A$  portant sur la condition aux limites sur la sphère externe

pour la composante ( $l = 2, m = 2$ ) de la vitesse radiale (voir l'équation (6.33))

$$u_2^2(r = 1) = A, \quad (6.52)$$

si bien que tous les modes forcés que nous calculons numériquement sont non-axisymétriques avec  $m = 2$ . Notons que contrairement au chapitre 5, nous ne prenons pas le rotationnel de l'équation du moment pour éviter des problèmes de bruit numérique dûs à des termes de dérivées radiales d'ordre élevé.

Pour la résolution numérique, nous utilisons exactement la même décomposition des champ de vitesse (3.30) et de pression (3.31) sur les harmoniques sphériques vectorielles et scalaires, que dans les chapitres 3 et 5. Une fois ces décompositions introduites dans le système d'équations (6.50)-(6.51), nous obtenons un ensemble infini d'équations différentielles linéaires couplées portant sur les fonctions  $u_m^l(r)$ ,  $v_m^l(r)$ ,  $w_m^l(r)$  et  $p_m^l(r)$  et leurs dérivées, avec un couplage opéré par les termes d'accélération de Coriolis et allant jusqu'à  $l \pm 3$ . Nous discrétisons ces fonctions radiales sur les noeuds de collocation de Gauss-Lobatto associés aux polynômes de Tchebychev, puis tronquons l'ensemble d'équations couplées à un ordre maximal  $N_r$  pour la base des polynômes de Tchebychev, et à l'ordre  $L$  pour celle des harmoniques sphériques.

Le calcul de la réponse du fluide au forçage de marée simplifié consiste alors à fixer les paramètres  $\eta$ ,  $\varepsilon$ ,  $E$  et  $\omega_p$  : le problème est alors réduit à un système linéaire classique de la forme

$$MX = \omega_p X, \quad (6.53)$$

où  $M$  est une matrice creuse comportant jusqu'à 7 bandes par blocs (correspondant aux couplages jusqu'à  $l \pm 3$ , voir chapitre 5 et annexe A), et  $X$  est le vecteur inconnu contenant les coefficients spectraux des champs de vitesse et de pression. Notons que le fait de ne pas prendre le rotationnel de l'équation du mouvement fait qu'il n'y a pas de second opérateur linéaire au second membre. Une fois la solution du système calculée dans l'espace spectral, on peut en déduire le taux de dissipation visqueuse  $\langle D \rangle_T$  moyen sur une période (en unités de  $\rho R^3 \Omega_{\text{ref}} A^2$ ) à l'aide de l'équation (6.48).

Nous montrons à nouveau en figure 6.1 le diagramme (déjà présenté dans la section 5.3.1) décrivant les différents types de modes inertiels pouvant exister dans une coquille sphérique en fonction de  $\omega_p$  et  $\varepsilon$  (nous rappelons que ceci est indépendant du rapport d'aspect  $\eta$ ).

Dans les paragraphes suivants, nous présentons les résultats essentiels issus de calculs numériques de modes inertiels forcés en présence de rotation différentielle conique. Nous explorons l'espace des paramètres de notre modèle, à savoir notamment le nombre d'Ekman  $E$ , le rapport d'aspect de la zone convective  $\eta$  ou encore le paramètre de rotation différentielle  $\varepsilon$ . Nous présentons les résultats obtenus sous la forme de spectres représentant le taux de dissipation visqueuse moyenné sur une période  $\langle D_\nu \rangle_T$  en fonction de la fréquence d'excitation  $\omega_p$ .

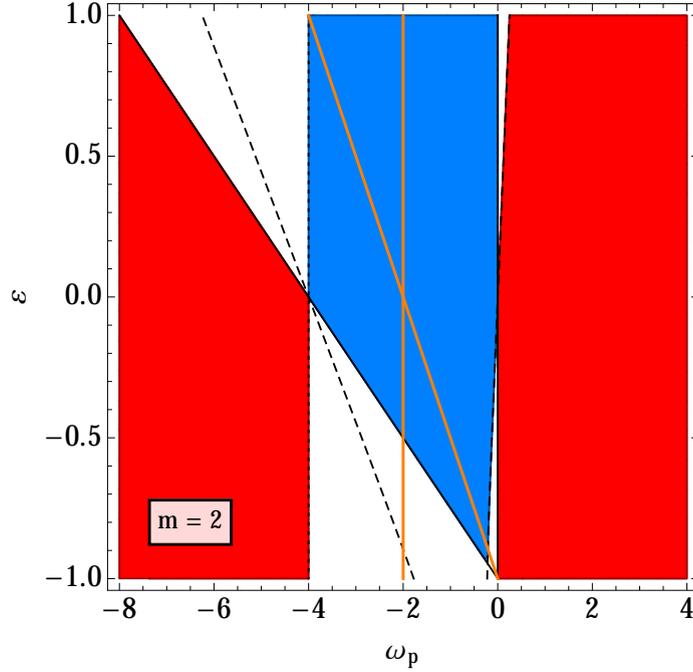


FIGURE 6.1: Illustration des deux types de modes inertiel pouvant se propager dans un fluide en rotation différentielle  $\Omega(\theta) = \Omega_0(\theta)/\Omega_{\text{ref}} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta$ , pour  $m = 2$ . La fréquence du mode  $\omega_p$  est en abscisse et le paramètre de rotation différentielle  $\varepsilon$  est en ordonnée. **Bleu** : domaine d'existence des modes D. **Blanc** : domaine d'existence des modes DT. **Rouge** : Pas de propagation possible ( $\xi < 0$  partout). **Orange** : Les modes situés entre les lignes oranges possèdent une résonance de corotation ( $\tilde{\omega}_p = 0$ ) dans la coquille. Les lignes noires pointillées, continues et discontinues correspondent à l'existence de surface de retournement en  $\theta = 0$  (aux pôles),  $\theta = \pi/2$  (à l'équateur) et  $\theta = \pi/4$  respectivement.

### 6.2.2 Cas du Soleil et influence de la viscosité

Pour commencer, étudions l'influence de la valeur prise par le nombre d'Ekman  $E$  dans le cas d'une étoile semblable au Soleil, dont la zone convective a un rapport d'aspect  $\eta = 0.71$  avec un profil de rotation différentielle de paramètre  $\varepsilon = 0.30$ . Pour ces paramètres, l'intervalle de fréquences dans lequel des modes inertiel peuvent exister est  $-4.6 \leq \omega_p \leq 0.075$ , mais celui des modes D (voir la section 5.3.1) est restreint à  $-4 \leq \omega_p \leq 0$ . De plus, la bande de fréquences dans laquelle il existe une couche critique est  $-2.6 \leq \omega_p \leq -2$ .

Pour chacune des valeurs  $E = \{10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}\}$ , nous avons calculé numériquement la réponse du fluide au forçage simplifié présenté ci-avant, pour un échantillon de 1000 fréquences de forçage comprises dans l'intervalle de fréquences  $-6 \leq \omega_p \leq 1$ . La figure 6.2 montre une coupe méridienne de la dissipation visqueuse pour un exemple de mode D forcé pour la fréquence  $\omega_p \approx -3.29$  et  $E = 10^{-7}$ , accompagnée d'une représentation du contenu spectral du mode montrant la convergence numérique du résultat. Dans un second temps, nous avons extrait le taux de dissipation visqueuse moyen sur une période  $\langle D_\nu \rangle_T$  apparaissant dans l'équation (6.45) pour chacune de ces fréquences. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 6.3.

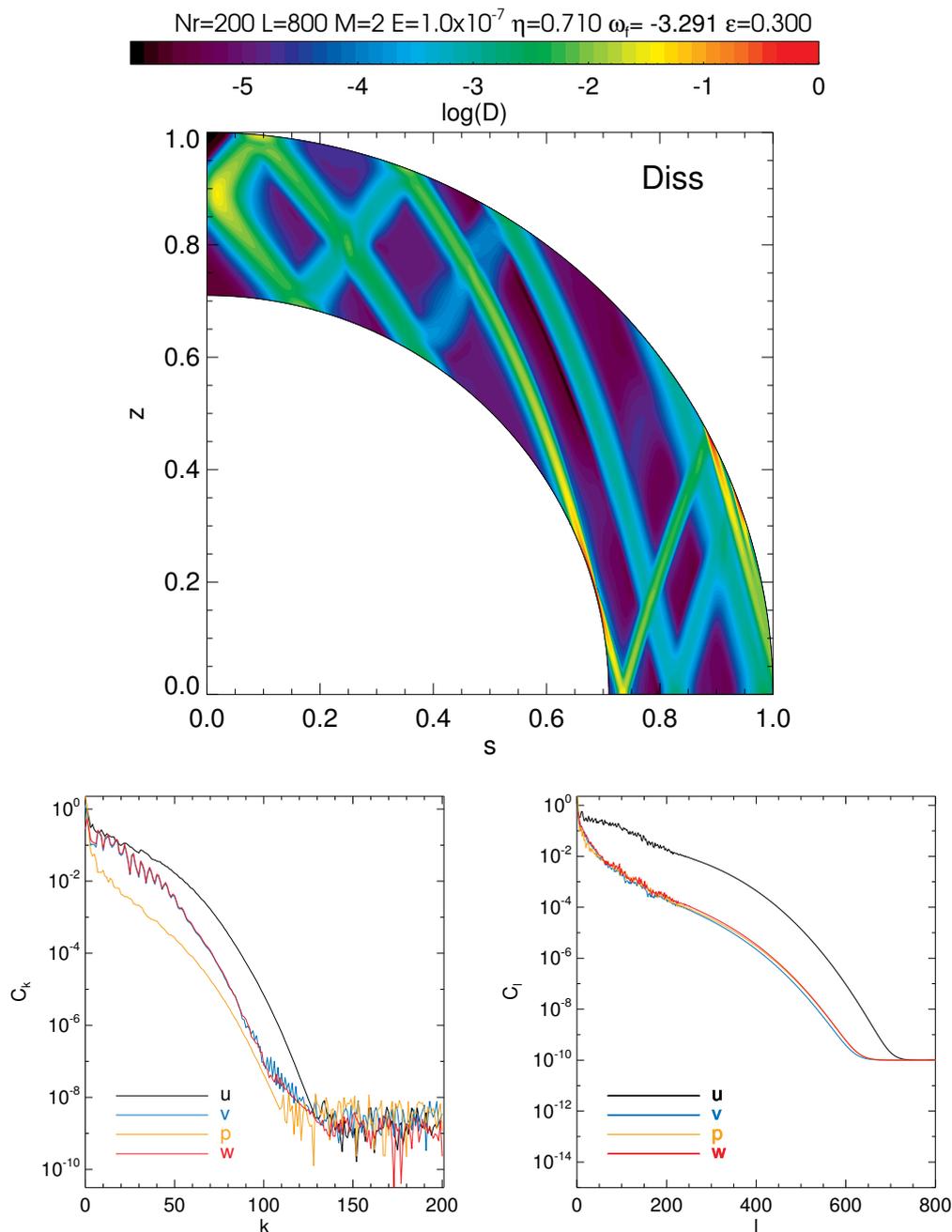


FIGURE 6.2: **Haut** : Coupe méridienne de la dissipation visqueuse (normalisée à sa valeur maximale) engendrée par un mode inertiel  $m = 2$  forcé à la fréquence  $\omega_p \approx -3.29$  dans une zone convective de type solaire ( $\eta = 0.71, \varepsilon = 0.30$ ) pour  $E = 10^{-7}$ . Le forçage adopté est donné par l'équation (6.52). La résolution adoptée est  $N_r \times L = 200 \times 800$ . **Bas** : Coefficients spectraux maximum du champ de vitesse ( $u, v, w$ ) et du champ de pression  $p$  en fonction de l'indice  $k$  sur la base des polynômes de Tchebychev et de l'indice  $l$  sur la base des harmoniques sphériques.

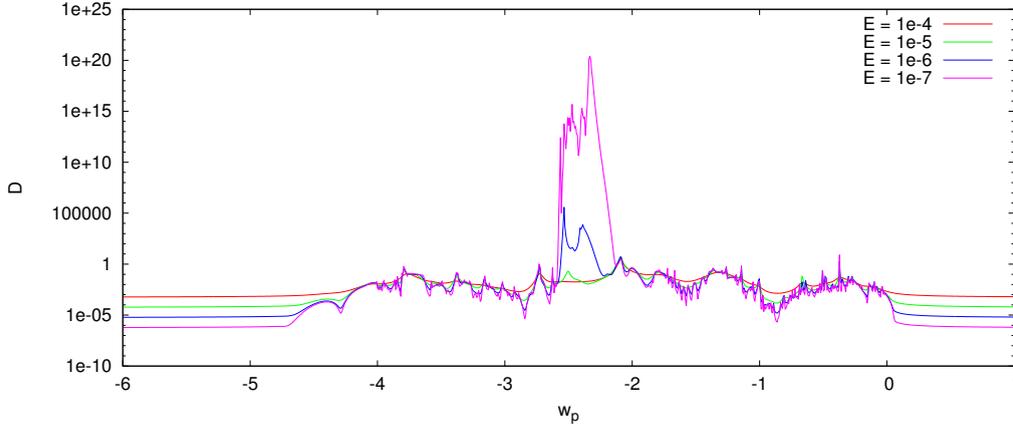


FIGURE 6.3: Variation du taux de dissipation visqueuse (échelle logarithmique en unité de  $\rho R^3 \Omega_{\text{ref}} A^2$ ) en fonction de la fréquence d'excitation dans une étoile semblable au Soleil ( $\eta = 0.71, \varepsilon = 0.30$ ) pour différentes valeurs du nombre d'Ekman  $E = \{10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}\}$ . Le forçage adopté est donné par l'équation (6.52).

On constate tout d'abord que la dissipation est quasiment constante en dehors de l'intervalle  $-4.6 \leq \omega_p \lesssim 0.075$ , et ne présente pas le caractère résonant habituellement associé aux ondes inertielles, ce qui constitue un résultat attendu et semblable (à l'exception des bornes de l'intervalle) au cas de la rotation solide. Ce fond non-résonant est presque constant et constitue la plus petite valeur obtenue pour la dissipation. Nous avons vérifié que cette valeur est directement proportionnelle à  $E$  (e.g. Ogilvie & Lin, 2004; Auclair Desrotour et al., 2015). Dans l'intervalle de fréquences  $-4 \leq \omega_p \leq 0$  correspondant aux modes D (qui correspondent aux modes existant en rotation solide), on constate un comportement semblable au cas de la rotation solide (e.g. Ogilvie, 2009; Rieutord & Valdettaro, 2010) où la dissipation a un comportement de plus en plus erratique lorsque  $E$  décroît, c'est-à-dire des pics de plus en plus fins et nombreux. Par contre, on ne voit pas de pics dans les intervalles de fréquences des modes DT ( $-4.6 \leq \omega_p \leq -4$  et  $0 \leq \omega_p \lesssim 0.075$ ), ce qui semble confirmer nos résultats du chapitre 5 : dans une coquille sphérique en rotation différentielle conique, il y a peu de modes propres inertiels DT susceptibles d'être excités par un forçage externe, si bien que le taux de dissipation visqueuse qui en résulte ne présente pas de caractère résonant et reste faible.

Enfin, dans l'intervalle de fréquence  $-2.6 \leq \omega_p \leq -2$  où il existe une résonance de corotation, on constate un phénomène nouveau dans le cas où  $E = 10^{-6}$ , avec une augmentation de plusieurs ordres de grandeur du taux de dissipation visqueuse. Ce phénomène est encore plus prononcé lorsque  $E = 10^{-7}$ . En revanche, rien de significatif ne se produit pour  $E = 10^{-4}$  et  $E = 10^{-5}$  malgré l'existence de la même couche critique, ce qui semble indiquer qu'il existe un seuil de déclenchement dépendant de la viscosité. Notons que ce résultat n'est pas d'origine numérique, car nous avons vérifié la convergence des calculs numériques et les valeurs de dissipation visqueuse associées en modifiant la résolution spectrale utilisée.

La figure 6.4 montre que le rapport entre les valeurs maximale et minimale prises par le

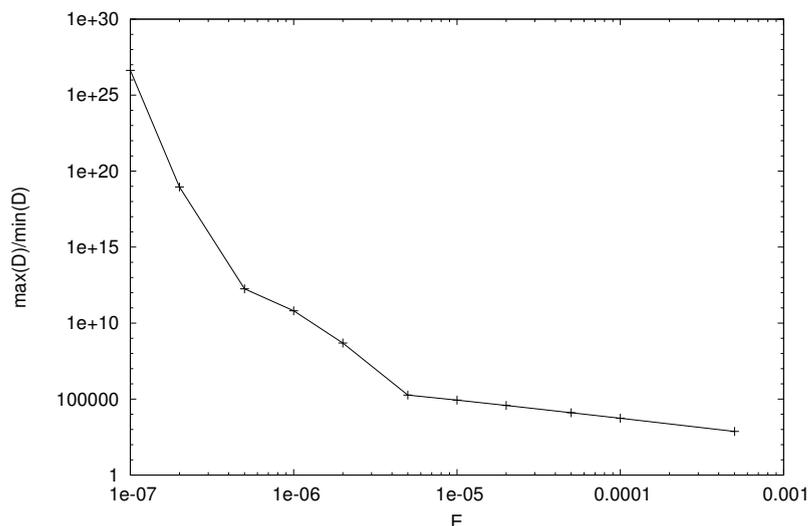


FIGURE 6.4: Contraste entre les valeurs maximale et minimale prise par le taux de dissipation visqueuse en fonction du nombre d'Ekman  $E$  (échelle logarithmique).

taux de dissipation visqueuse augmente de manière plus rapide qu'une loi de puissance en  $E$  lorsque celui-ci décroît. Nous discuterons plus en détail l'origine de ce phénomène dans la section 6.3.

### 6.2.3 Comparaison entre rotation solaire et anti-solaire

Dans ce paragraphe, nous conservons le rapport d'aspect solaire  $\eta = 0.71$  et un nombre d'Ekman égal à  $E = 10^{-6}$ , mais nous faisons varier le paramètre de rotation différentielle  $\varepsilon$ . Contrairement au paragraphe précédent où les intervalles de fréquences dans lesquels peuvent exister des modes inertiels (D ou DT) et des couches critiques ne dépendaient pas de  $E$ , ceux-ci dépendent de  $\varepsilon$  (voir la figure 6.1).

La figure 6.5 montre quatre spectres de taux de dissipation visqueuse correspondant à trois profils de rotation différentielle anti-solaires et au profil de rotation solide à titre de comparaison. On peut d'ailleurs constater de nombreuses similitudes entre le dernier panneau de cette figure (après avoir appliqué une symétrie horizontale sur les fréquences) et le deuxième panneau de la figure 2 de [Ogilvie \(2009\)](#), calculé pour un rapport d'aspect  $\eta = 0.7$  et un coefficient de friction (de type Rayleigh) au lieu d'une diffusion visqueuse.

En ce qui concerne les panneaux supérieurs correspondant à  $\varepsilon = \{-0.8, -0.5, -0.25\}$ , on constate encore une fois le phénomène d'amplification du taux de dissipation visqueuse dans l'intervalle de fréquences où existe une couche de corotation (respectivement  $-2 \leq \omega_p \leq -0.4$ ,  $-2 \leq \omega_p \leq -1$  et  $-2 \leq \omega_p \leq -1.5$ ). L'amplitude de ce phénomène semble augmenter avec  $|\varepsilon|$ .

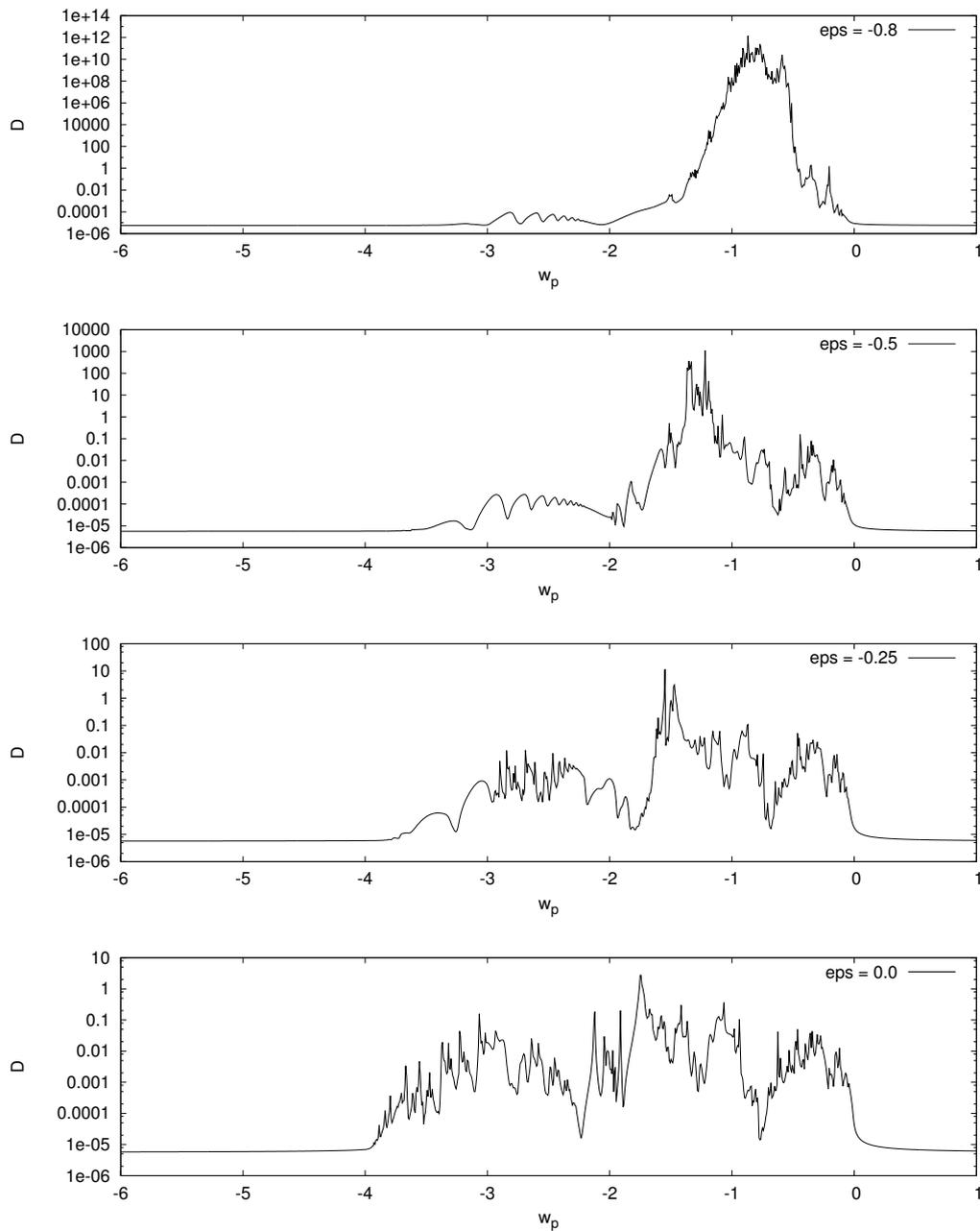


FIGURE 6.5: Variation du taux de dissipation visqueuse (échelle logarithmique) en fonction de la fréquence d'excitation dans une étoile structurellement semblable au Soleil ( $\eta = 0.71$ ) mais pour différents paramètres de rotation différentielle anti-solaire ou solide  $\varepsilon = \{-0.8, -0.5, -0.25, 0.0\}$ , avec  $E = 10^{-6}$  et le forçage donné par (6.52).

De manière similaire, la figure 6.6 montre quatre spectres de taux de dissipation visqueuse correspondant à trois profils de rotation différentielle de type solaire et du cas de la rotation solide à titre de comparaison. Dans les panneaux inférieurs correspondant à  $\varepsilon = \{0.3, 0.5, 0.8\}$ , on constate encore une fois le phénomène d'amplification du taux de dissipation visqueuse dans l'intervalle de fréquences où il existe une couche de corotation (respectivement  $-2.6 \leq \omega_p \leq -2$ ,  $-3 \leq \omega_p \leq -2$  et  $-3.6 \leq \omega_p \leq -2$ ). Comme dans le cas

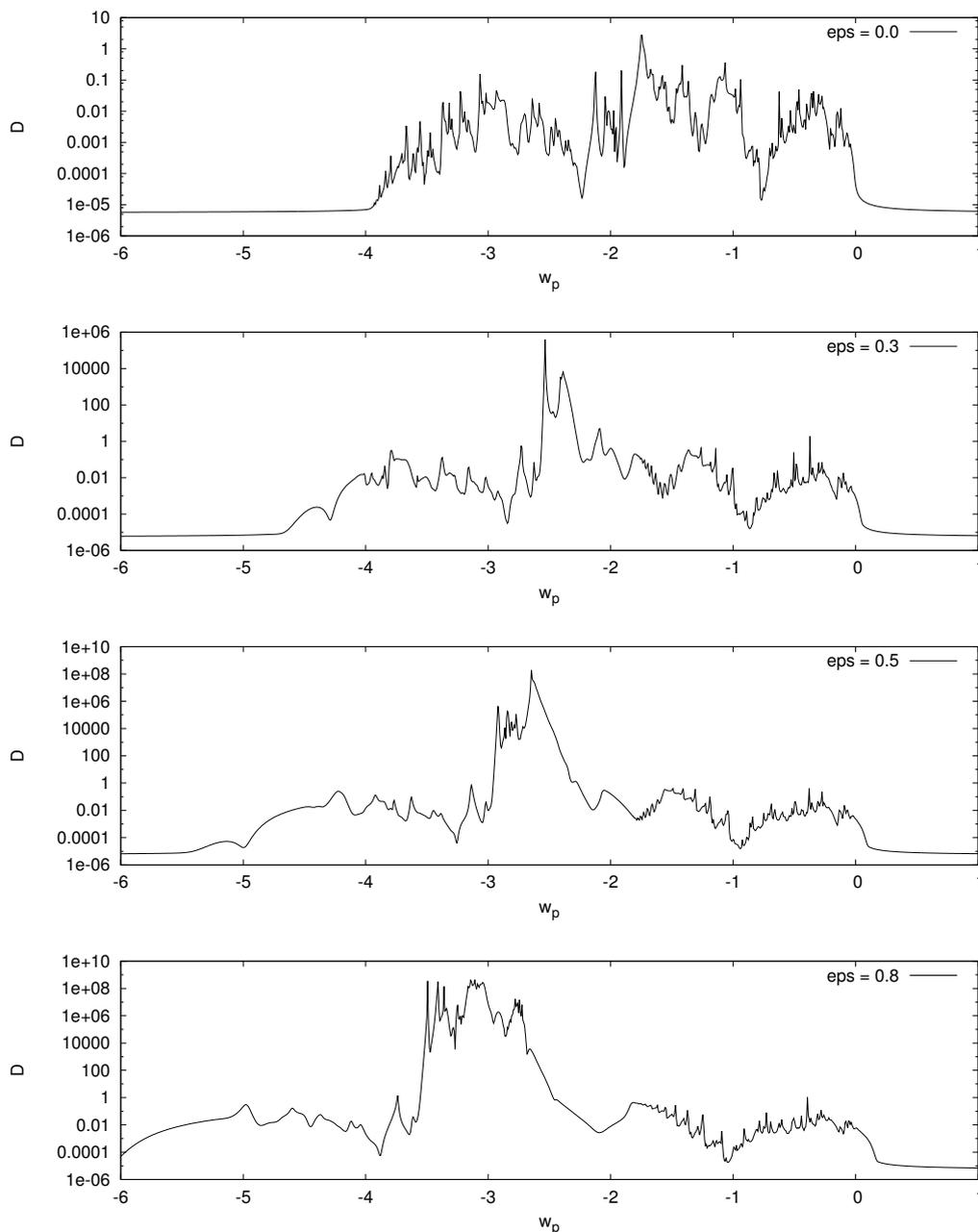


FIGURE 6.6: Identique à la figure 6.5, cette fois avec  $\varepsilon = \{0.0, 0.3, 0.5, 0.8\}$ .

des rotations de type anti-solaire, le phénomène est plus marqué pour les valeurs les plus élevées de  $|\varepsilon|$ .

#### 6.2.4 Cas d'étoiles de masses différentes et influence de la taille du coeur

Comme le montre la figure 6.7, les étoiles de faible masse possèdent une zone convective dont le rapport d'aspect croît dans les premiers millions d'années de sa vie, pour ensuite se stabiliser sur la séquence principale à une valeur comprise entre 0.5 et 0.95 en fonction de la masse de l'étoile. Seules les naines M d'environ  $0.4 M_{\odot}$  perdent par moments leur cœur

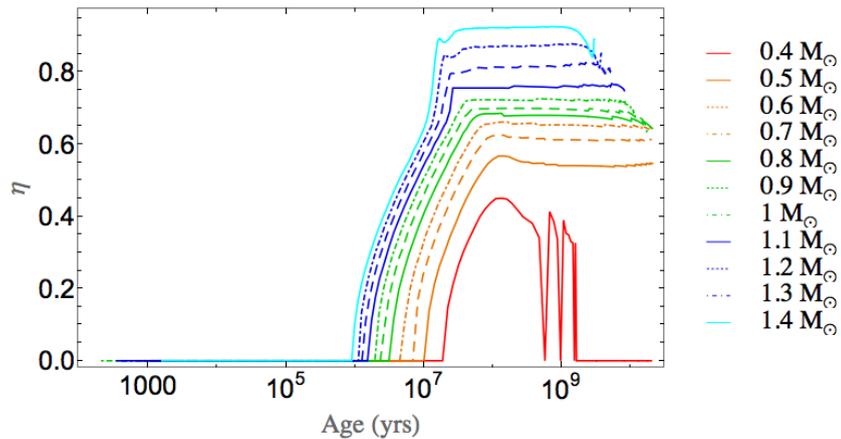


FIGURE 6.7: Evolution au cours du temps du rapport d'aspect de la zone convective pour des étoiles de faible masse, de masses comprises entre  $0.4$  et  $1.4 M_{\odot}$ , d'après la grille de modèles d'évolution stellaire de Siess et al. (2000). Crédit : Mathis (2015).

radiatif sur la séquence principale avec des phases où le rapport d'aspect varie entre 0 et 0.5 environ.

Dans ce paragraphe, nous souhaitons étudier la dépendance du taux de dissipation visqueuse au rapport d'aspect  $\eta$  de la zone convective. Pour cela, nous fixons le paramètre de rotation différentielle à la valeur solaire  $\varepsilon = 0.30$ .

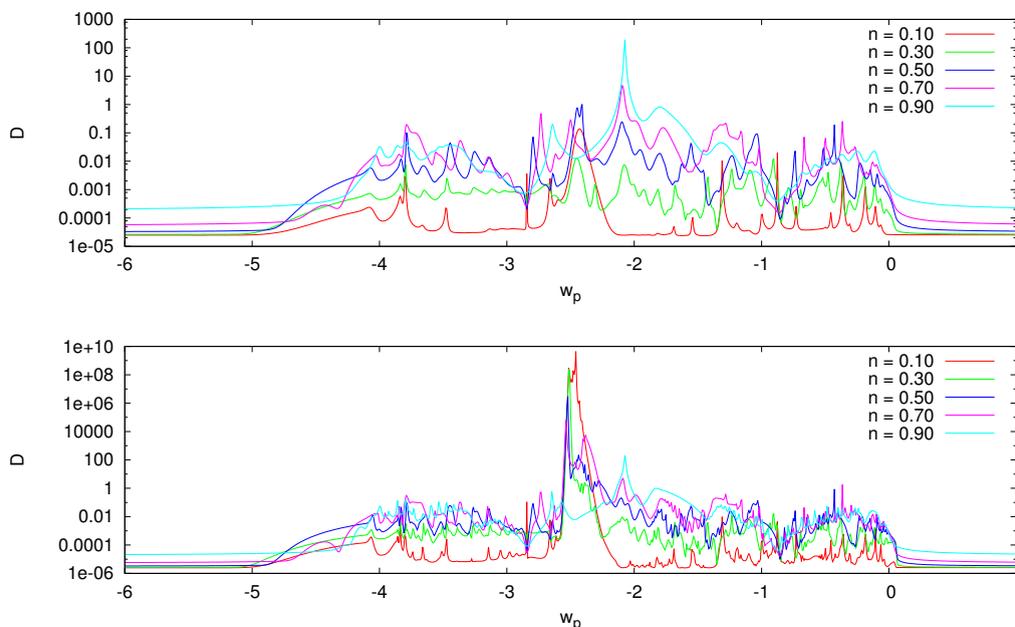


FIGURE 6.8: Variation du taux de dissipation visqueuse (échelle logarithmique) en fonction de la fréquence d'excitation dans une étoile possédant une rotation différentielle solaire ( $\varepsilon = 0.30$ ) pour différentes valeurs du rapport d'aspect  $\eta = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ . Les panneaux supérieur et inférieur correspondent à  $E = 10^{-5}$  et  $10^{-6}$  respectivement. Le forçage adopté est donné par l'équation (6.52).

La figure 6.8 montre les résultats obtenus pour cinq valeurs du rapport d'aspect  $\eta$  comprises entre 0.10 et 0.90, et pour deux valeurs du nombre d'Ekman  $E$ . Notons d'abord que dans les deux panneaux, le fond non-résonant du taux de dissipation visqueuse croît avec  $\eta$  comme c'était déjà le cas dans Ogilvie (2009).

Il existe cependant une différence notable entre les deux panneaux : comme dans le cas de la figure 6.3, on constate dans le cas  $E = 10^{-6}$  une importante augmentation du taux de dissipation visqueuse dans l'intervalle de fréquences où il existe une couche de corotation dans la coquille sphérique, ici  $-2.6 \leq \omega_p \leq -2$ . En revanche, on constate que plus  $\eta$  est faible, plus cette augmentation locale est marquée, le cas  $\eta = 0.90$  étant à peine sensible au passage de  $E = 10^{-5}$  à  $10^{-6}$ .

### 6.3 Augmentation de la dissipation par les résonances de corotation

L'augmentation du taux de dissipation visqueuse dans les intervalles d'existence des résonances de corotation est un phénomène que nous avons pu observer de manière répétée dans nos résultats. L'amplitude de cette augmentation est cependant disproportionnée, avec des augmentations de 5 à 10 ordres de grandeurs en général, voir plus dans les cas où le nombre d'Ekman est très faible. Ce phénomène n'est pas d'origine numérique car le calcul des modes forcés est convergé, et nous avons vérifié la robustesse des valeurs de dissipation en modifiant la résolution. L'origine de ce phénomène peut s'expliquer en observant la moyenne sur une période de l'équation de l'énergie (6.45) : un terme supplémentaire existe en présence de rotation différentielle. Il implique le flux de moment cinétique lié à l'interaction entre le profil de rotation différentielle et le champ de vitesse des ondes.

Il semble donc que lorsqu'il existe une résonance de corotation, les *Reynolds stresses* du champ de vitesse des ondes inertielles de marées sont capables d'extraire de l'énergie du profil de rotation différentielle, dont l'énergie va ensuite être dissipée à petite échelle par la viscosité (voir Lindzen & Barker, 1985; Alvan et al., 2013). Ce phénomène semble se produire préférentiellement pour des valeurs relativement faibles du rapport d'aspect  $\eta$ . De plus, il semble exister un seuil compris entre  $10^{-5} \gtrsim E \gtrsim 10^{-6}$  à partir duquel le phénomène se déclenche. Son amplitude n'est cependant pas une loi de puissance en  $E$  et atteint des valeurs extrêmement grandes qui ne semblent pas physiquement possibles. La cause possible de ce phénomène vient de l'hypothèse selon laquelle le profil de rotation différentielle conique est supposé maintenu par la convection turbulente dans l'étoile (qui est un mécanisme totalement absent de notre modèle) : autrement dit, il n'y a aucune rétroaction de la réponse de marée sur ce profil de rotation différentielle. Dans cette optique, le profil de rotation différentielle que nous avons imposé constitue pour les ondes inertielles de marée un réservoir inépuisable d'énergie à extraire et à dissiper par la viscosité. Il est probable que l'augmentation du taux de dissipation que nous avons constaté ici soit atténuée dans un

modèle plus réaliste incluant de telles rétroactions permettant une saturation (non-linéaire) du processus, en particulier si la rétroaction des ondes de marée sur le profil de rotation sont telles que ce dernier devient instable. Dans ce cadre, il devient donc primordial de se demander dans quelle mesure la rétroaction des ondes inertielles sur le profil de rotation différentielle (voir les travaux de [Tilgner, 1999, 2007](#); [Morize et al., 2010](#); [Favier et al., 2014](#)) peut modifier nos résultats.

## 6.4 Conclusion

Nous avons mis en évidence le rôle clé des résonances de corotation dans l'estimation de la dissipation de marée par les ondes inertielles dans les enveloppes convectives en rotation différentielle conique : dans ce modèle linéaire où le profil de rotation différentielle est fixé, on constate une augmentation très importante du taux de dissipation visqueuse dans les intervalles de fréquences où ces résonances existent. Cependant, ce phénomène n'est actif que si la viscosité est suffisamment faible, et il est encore plus marqué lorsque  $\eta$  est faible et/ou  $|\varepsilon|$  est grand.

Discutons maintenant de l'impact de ces résultats sur l'évolution dynamique des systèmes d'étoiles binaires ou étoile-planète. Supposons que le système comporte une étoile de faible masse dont la zone convective est en rotation différentielle, et que celle-ci a un compagnon de marée proche susceptible d'exciter des ondes inertielles. Suite à l'évolution dynamique passée du système, il est possible qu'une des fréquences d'excitation contenues dans le potentiel de marée rentre dans l'intervalle où il existe une résonance de corotation. Plusieurs cas de figure peuvent se présenter :

1. la viscosité turbulente appliquée aux ondes inertielles correspond à  $E \gtrsim 10^{-5}$ , et la dissipation est peu modifiée par rapport à celle engendrée par les ondes inertielles dans le cas de la rotation solide ;
2. si au contraire,  $E \lesssim 10^{-6}$ , alors la dissipation est grandement amplifiée dans l'intervalle où existent des résonances de corotation, ce qui mène à une évolution orbitale extrêmement rapide. L'impact global de ce cas sur la dynamique orbitale devra être examiné dans le futur avec des simulations numériques de mécanique céleste similaires à celles de [Auclair-Desrotour et al. \(2014\)](#) ;

Enfin, discutons les limites de notre modèle. Les ordres de grandeur constatés ici pour la dissipation en présence de couches de corotation sont très probablement surestimés, car une dissipation aussi grande pourrait rapidement modifier le profil de rotation différentielle. La question qui se pose alors est : selon la valeur du nombre d'Ekman, comment se comparent les *Reynolds stresses* de la convection turbulente et ceux des ondes inertielles de marées lorsqu'il y a une résonance de corotation ? Une telle problématique reste aujourd'hui inexplorée et ouvre de nouveaux champs d'investigation.



## AUTRE CONTRIBUTION : IMPACT DE LA ROTATION SUR LA FRICTION TURBULENTE DANS LES ZONES CONVECTIVES

Nous avons vu dans le chapitre précédent l'importance du nombre d'Ekman pour le modèle de dissipation de marée par les ondes inertielles dans les enveloppes convectives des étoiles de faible masse. Or, son estimation dans les zones convectives reste incertaine et ne prend généralement pas en compte la rotation.

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement de nouveaux résultats obtenus sur l'impact de la rotation sur la friction turbulente (c'est-à-dire la diffusion visqueuse effective appliquée aux écoulements de marée notamment) dans les zones convectives. Le principal intérêt de cette étude dans le cadre de ce manuscrit est l'obtention d'une estimation du nombre d'Ekman au cours de l'évolution des étoiles de faible masse en prenant en compte la rotation. Ce chapitre est plus court que les précédents car il s'agit d'un travail auquel j'ai collaboré et qui a mené à la publication d'un article dont je suis co-auteur dans la revue *Astronomy & Astrophysics* ([Mathis et al., 2016](#)) rapporté à la fin de ce chapitre.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, il est courant de modéliser l'action des mouvements convectifs sur d'autres écoulements, par exemple les écoulements de marée, par un coefficient de viscosité effective ou viscosité turbulente. Cette approche repose sur les hypothèses suivantes [Zahn \(1966b, 1989\)](#) :

- il existe une séparation d'échelle spatiale entre l'écoulement de marée et les écoulements convectifs ;
- la convection turbulente est isotrope ;
- on peut représenter la friction appliquée par la turbulence par une diffusion visqueuse impliquant une viscosité turbulente  $\nu_T$ .

La viscosité turbulente dans les zones convectives stellaires est alors généralement estimée à partir des échelles de longueur  $L_c$  et de vitesse  $V_c$  de la convection obtenues par des modèles du type « longueur de mélange » ([Boussinesq, 1877](#); [Zahn, 1966b](#)). Pourtant, les estimations les plus largement utilisées de ces échelles ont été dérivées dans le cas où la rotation, dont le rôle est pourtant primordial dans la modélisation des écoulements de marée et tout particulièrement des ondes inertielles, n'est pas prise en compte. Nous notons  $\nu_{T;NR}$  (pour *non-rotating*) le coefficient de viscosité turbulente ainsi dérivé :

$$\nu_{T;NR} = \frac{1}{3} V_c(\Omega = 0) L_c(\Omega = 0) \times f(P_{tide}/P_c) \quad (7.1)$$

où  $P_{tide}$  est la période de forçage de marée,  $P_c = L_c/V_c$  est le temps de retournement convectif et  $f$  représente la perte d'efficacité de la friction turbulente lorsque  $P_{tide} < P_c$  (voir la discussion de la section 2.2.2.2, ainsi que Zahn, 1966b; Remus et al., 2012a; Ogilvie, 2014).

Il est vrai que la convection turbulente en présence de rotation est par nature anisotrope (Julien et al., 2012; Sen et al., 2012) du fait de l'action de l'accélération de Coriolis, et on sait donc que ses propriétés sont fortement influencées par la rotation des étoiles (e.g. Ballot et al., 2007; Brown et al., 2008). Dans ce cadre, Stevenson (1979) a dérivé, à l'aide d'un modèle local cartésien utilisant la théorie de la « longueur de mélange », des lois d'échelles asymptotiques pour  $L_c$  et  $V_c$  dans les régimes de rotations lente et rapide, respectivement définis par  $Ro_c \gg 1$  et  $Ro_c \ll 1$ , où  $Ro_c = V_c/2\Omega L_c$  est le nombre de Rossby convectif, qui compare la période de rotation  $P_\Omega \propto 1/2\Omega$  et le temps de retournement convectif  $P_c = L_c/V_c$ .

Les lois d'échelles proposées par Stevenson (1979) s'écrivent, dans le régime de rotation lente :

$$\frac{V_c(Ro_c)}{V_c(\Omega = 0)} = 1 - \frac{1}{242(Ro_c)^2}, \quad \frac{L_c(Ro_c)}{L_c(\Omega = 0)} = \left(1 + \frac{1}{82(Ro_c)^2}\right)^{-1}, \quad (7.2)$$

tandis que dans le régime de rotation rapide, elles s'écrivent :

$$\frac{V_c(Ro_c)}{V_c(\Omega = 0)} = 1.5(Ro_c)^{1/5}, \quad \frac{L_c(Ro_c)}{L_c(\Omega = 0)} = 2(Ro_c)^{3/5}. \quad (7.3)$$

Ces lois d'échelles ont été récemment validées par les simulations numériques 3D haute résolution de convection turbulente dans un modèle local cartésien en rotation rapide Barker et al. (2014), si bien qu'on peut alors dériver une viscosité turbulente  $\nu_{T;RC}$  (pour *rotating convection*) prenant en compte la rotation à l'aide des lois d'échelle (7.2) et (7.3) :

$$\nu_{T;RC} = \frac{1}{3} V_c(Ro_c) L_c(Ro_c) \times f(P_{tide}/P_c). \quad (7.4)$$

Dans le régime de rotation rapide examiné en (7.3),  $\nu_{T;RC} \propto Ro_c^{4/5} \propto \Omega^{-4/5}$ , donc la friction turbulente devient moins efficace lorsque  $\Omega$  augmente. Ceci est cohérent avec l'inhibition de la convection en rotation rapide qui tend à décaler le seuil d'instabilité (Chandrasekhar, 1953) et diminuer l'amplitude des vitesses convectives et l'efficacité du transport de la chaleur.

De manière similaire, on peut définir deux nombres d'Ekman dans le modèle local  $E_{NR}$  et  $E_{RC}$  par

$$E_{NR} = \frac{2\pi^2 \nu_{T;NR}}{\Omega R^2}, \quad E_{RC} = \frac{2\pi^2 \nu_{T;RC}}{\Omega R^2}, \quad (7.5)$$

le deuxième prenant en compte l'impact de la rotation sur les propriétés de la convection. Le facteur  $2\pi^2$  vient du choix du modèle local d'ondes inertielles de marée (voir l'annexe de

(Ogilvie & Lin, 2004; Auclair Desrotour et al., 2015) considéré dans ce travail et correspondant aux études de Stevenson (1979) et de Barker et al. (2014).

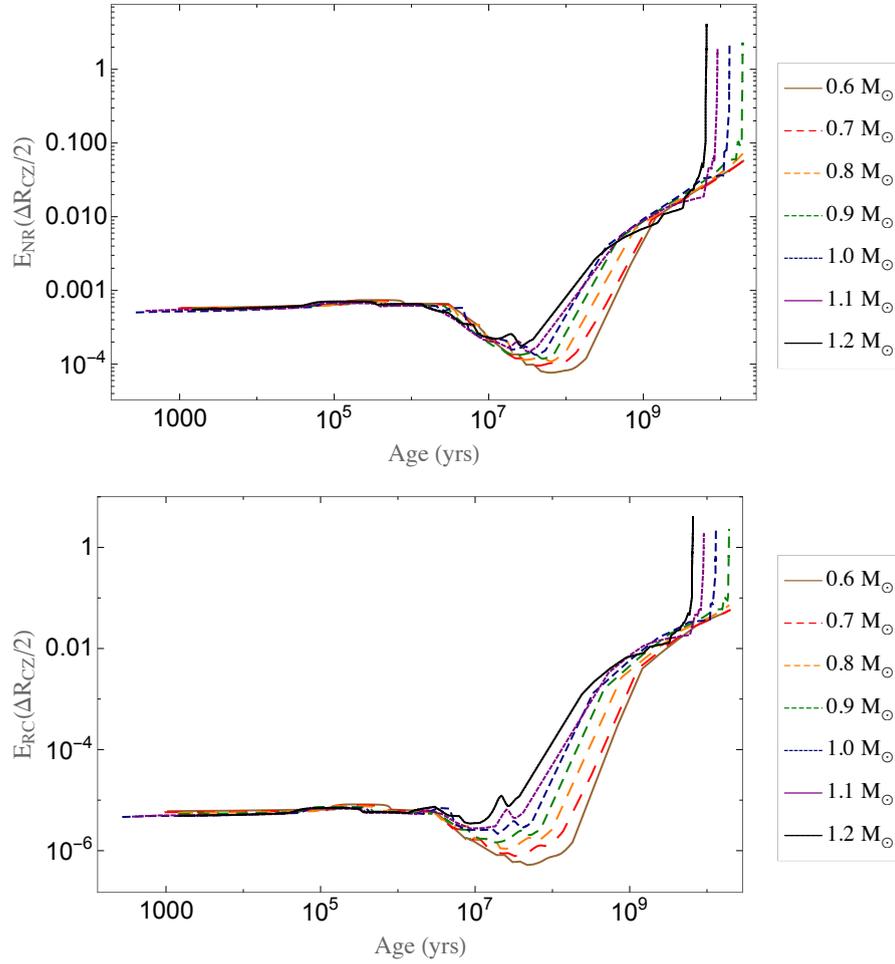


FIGURE 7.1: **Haut** : Evolution du nombre d'Ekman  $E_{NR}$  évalué au milieu de la zone convective pour une gamme d'étoiles de faible masse comprise entre 0.6 et 1.2  $M_{\odot}$ . **Bas** : Identique au panneau supérieur mais cette fois pour le nombre d'Ekman  $E_{RC}$  prenant en compte la rotation.

Nous avons calculé une nouvelle grille de modèles d'évolution stellaire pour les étoiles de faible masse avec le code STAREVOL suivant la méthode de Amard et al. (2016) prenant en compte leur évolution rotationnelle. On obtient alors une estimation du nombre de Rossby convectif (au milieu de la zone convective) au cours de celle-ci. Ceci permet ensuite d'utiliser les lois d'échelles (7.2) et (7.3) pour calculer  $\nu_{T;RC}$  et  $E_{RC}$ , et de les comparer à  $\nu_{T;NR}$  et  $E_{NR}$  respectivement, au cours de l'évolution des étoiles.

Les deux panneaux de la figure 7.1 comparent les valeurs de  $E_{RC}$  à celles de  $E_{NR}$  obtenues en utilisant les propriétés de la convection sans rotation. On constate une différence de deux ordres de grandeur entre  $E_{NR}$  et  $E_{RC}$  sur la pré-séquence principale et au début de la séquence principale, du fait de la rotation rapide des étoiles jeunes. Après un milliard d'années environ, la rotation des étoiles a suffisamment été freinée par les vents stellaires (voir le chapitre 1, ainsi que Skumanich, 1972; Kawaler, 1988, et la section correspondante

dans l'article rapporté à la fin de ce chapitre) pour retrouver le régime où la convection est peu influencée par la rotation.

Ces nouvelles estimations montrent donc l'importance d'avoir une bonne prescription pour l'estimation de la friction turbulente et du nombre d'Ekman, dont nous rappelons que l'ordre de grandeur modifie fortement le comportement des modèles de dissipation de marée par les ondes inertielles, notamment l'amplitude de la marée d'équilibre, ainsi que l'amplitude des résonances associées aux ondes inertielles de marées, et des résonances de corotation en présence de rotation différentielle.

# The impact of rotation on turbulent tidal friction in stellar and planetary convective regions

S. Mathis<sup>1,2</sup>, P. Auclair-Desrotour<sup>3,1</sup>, M. Guenel<sup>1</sup>, F. Gallet<sup>4</sup>, and C. Le Poncin-Lafitte<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DSM – CNRS – Université Paris Diderot, IRFU/SaP Centre de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France  
e-mail: [stephane.mathis@cea.fr](mailto:stephane.mathis@cea.fr)

<sup>2</sup> LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

<sup>3</sup> IMCCE, Observatoire de Paris, UMR 8028 du CNRS, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

<sup>4</sup> Department of Astronomy, University of Geneva, Chemin des Maillettes 51, 1290 Versoix, Switzerland

<sup>5</sup> SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, LNE, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

Received 12 October 2015 / Accepted 27 April 2016

## ABSTRACT

*Context.* Turbulent friction in convective regions in stars and planets is one of the key physical mechanisms that drive the dissipation of the kinetic energy of tidal flows in their interiors and the evolution of their systems. This friction acts both on the equilibrium/non-wave-like tide and on tidal inertial waves in these layers.

*Aims.* It is thus necessary to obtain a robust prescription for this friction. In the current state-of-the-art, it is modelled by a turbulent eddy-viscosity coefficient, based on mixing-length theory, applied to tide velocities. However, none of the current prescriptions take into account the action of rotation that can strongly affect turbulent convection. Therefore, a new prescription that takes this into account must be derived.

*Methods.* We use theoretical scaling laws for convective velocities and characteristic lengthscales in rotating stars and planets that have been recently confirmed by 3D high-resolution non-linear Cartesian numerical simulations to derive the new prescription. A corresponding local model of tidal waves is used to understand the consequences for the linear tidal dissipation. Finally, new grids of rotating stellar models and published values of planetary convective Rossby numbers are used to discuss astrophysical consequences.

*Results.* The action of rotation on convection deeply modifies the turbulent friction applied on tides. In the regime of rapid rotation (with a convective Rossby number below 0.25), the eddy-viscosity may be decreased by several orders of magnitude. It may lead to a loss of efficiency of the viscous dissipation of the equilibrium tide and to a more efficient complex and resonant dissipation of tidal inertial waves in the bulk of convective regions.

*Conclusions.* To understand the complete evolution of planetary systems, tidal friction in rapid rotators such as young low-mass stars, giant and Earth-like planets must be evaluated. Therefore, we need a completely coupled treatment of the tidal evolution of star-planet systems and multiple stars, and of the rotational evolution of their components with a coherent treatment of the variations of tidal flows, and of their dissipation as a function of rotation.

**Key words.** turbulence – planet-star interactions – stars: rotation – planets and satellites: dynamical evolution and stability – hydrodynamics – waves

## 1. Introduction

Tidal friction is one of the mechanisms that drives the evolution of star-planet and planet-moon systems (e.g. Hut 1981; Laskar et al. 2012; Bolmont et al. 2012). It shapes their orbital architecture and the rotational dynamics of each of their components. Its properties strongly depend on their internal structure and dynamics (e.g. Goldreich & Soter 1966; Mathis & Remus 2013; Ogilvie 2014). Indeed, tidal dissipation that converts the kinetic energy of tidal flows into heat in stars and fluid planetary layers strongly differs from that in rocky/icy regions (Efroimsky & Lainey 2007; Auclair-Desrotour et al. 2014). The variation of tidal dissipation in fluids as a function of the forcing frequency is strongly resonant (Ogilvie & Lin 2004, 2007; Auclair Desrotour et al. 2015). These resonances are due to the

excitation of low-frequency inertial waves in convective layers and of gravito-inertial waves in stably-stratified regions. Their properties are the functions of rotation, stratification, and viscous and thermal diffusivities (Zahn 1975; Ogilvie & Lin 2004, 2007; Auclair Desrotour et al. 2015). More and more observational constraints are becoming available in the Solar and extrasolar systems (see e.g. Lainey et al. 2009, 2012; Winn et al. 2010; Albrecht et al. 2012; Valsecchi & Rasio 2014b,a, and reviews in Ogilvie 2014; and Auclair-Desrotour et al. 2015).

In this context, tidal friction in the turbulent convective envelopes of low-mass stars (from M to F stellar types), giant planets, and the cores of telluric planets must be carefully evaluated. In the present state-of-the-art, the turbulent friction acting on tidal flows in these regions is modelled with an effective turbulent viscosity coefficient. This corresponds to the

assumptions that we have a scale-separation between tidal and turbulent convective flows, that turbulence is close to being isotropic and that the friction can be described through a viscous force (Zahn 1966). The properties of the turbulent viscosity thus describe the effective efficiency of the couplings between turbulence and tidal flows. Therefore, the turbulent viscosity depends on the frequency of the forcing and on the dynamical parameters that impact stellar and planetary convection (Zahn 1966, 1989; Goldreich & Keeley 1977; Goodman & Oh 1997; Penev et al. 2007; Ogilvie & Lesur 2012).

Rotation is one of the parameters that must be taken into account. Indeed, the Coriolis acceleration strongly affects the dynamics of turbulent convective flows (e.g. Brown et al. 2008; Julien et al. 2012; Barker et al. 2014). In this framework, the rotation of stars and planets can strongly vary along the evolution of planetary systems (e.g. Bouvier 2008; Gallet & Bouvier 2013, 2015; Amard et al. 2016, for low-mass stars). Therefore, it is absolutely necessary to get a robust prescription for the turbulent friction applied on tidal waves by rotating convection in stellar and planetary interiors as a function of their angular velocity. Properties of rotating turbulent flows such as their characteristic velocities and length scales must be known if we wish to model this friction using the mixing-length framework (Zahn 1966). In this context, the work by Stevenson (1979) is particularly interesting since he derived them in the asymptotic regimes of slow and rapid rotation. Moreover, these asymptotic scaling laws have now been confirmed by Barker et al. (2014) in the regime of rapid rotation using high-resolution non-linear 3D Cartesian simulations of turbulent convection.

In this work, we thus propose a new prescription for tidal friction in rotating turbulent convective stellar and planetary zones that takes rotation into account using the results obtained by Stevenson (1979) and Barker et al. (2014). First, in Sect. 2, we recall the state-of-the-art prescriptions that do not take rotation into account. In Sect. 3, we propose our new prescription for the turbulent friction applied by rotating convective flows. In Sect. 4, we discuss consequences for the viscous dissipation of tidal flows in rotating stellar and planetary convection zones and corresponding scaling laws (Auclair Desrotour et al. 2015). In Sect. 5, we examine consequences for tidal dissipation in convective regions in low-mass stars during the pre-main-sequence (PMS) and the main sequence (MS) and in planets. Finally, we conclude and present the perspectives of this work for the evolution of planetary systems.

## 2. Prescription for the friction applied by turbulent non-rotating convection

The first study of the friction applied by turbulent convection on tidal flows was achieved by Zahn (1966) in the case of binary stars (see also Zahn 1989). In his work, he examined the coupling between turbulence and the large-scale equilibrium/non-wave-like tide induced by the hydrostatic adjustment of the star due to the tidal perturber (e.g. Zahn 1966; Remus et al. 2012; Ogilvie 2013). His approach was based on three main assumptions. First, he assumed a scale-separation between tidal and turbulent convective flows. Second, he assumed that the friction applied by turbulence can be described using a viscous force involving an eddy-viscosity  $\nu_T$ . This implies the third assumption of an isotropic turbulence. Finally, the characteristic velocity and length scale of turbulent convection, respectively  $V_c$  and

$L_c$ , were described using the mixing-length theory. We have

$$V_c(\Omega = 0) \approx \left( \frac{L_b}{\bar{\rho}_{CZ} R^2} \right)^{1/3} \quad \text{and} \quad L_c(\Omega = 0) \approx \alpha H_p, \quad (1)$$

where  $L_b$ ,  $R$ ,  $\bar{\rho}_{CZ}$ ,  $\alpha$ ,  $H_p$  and  $\Omega$  are the body luminosity and radius, the mean density in the studied convective region, the free mixing-length parameter, the pressure height-scale and the angular velocity, respectively (Brun 2014). In this framework, he derived the following prescription for the eddy-viscosity:

$$\nu_{T;NR} = \frac{1}{3} V_c(\Omega = 0) L_c(\Omega = 0) f \left( \frac{P_{\text{tide}}}{P_c} \right). \quad (2)$$

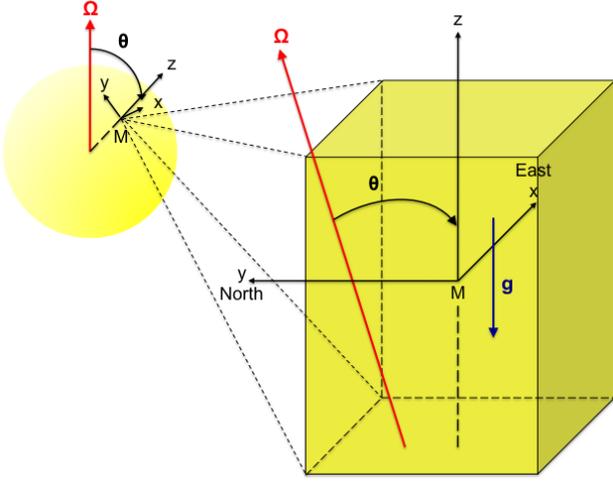
In this expression, NR stands for non-rotating convection and  $f$  is a function that describes the loss of efficiency of tidal friction in convective regions in the case of rapid tide when  $P_{\text{tide}} \ll P_c$ ,  $P_{\text{tide}}$  and  $P_c = L_c/V_c$  which are respectively the tidal period and the characteristic convective turn-over time. Two expressions have been proposed for  $f$  in the literature. Zahn (1966) proposed a linear attenuation with  $f \propto (P_{\text{tide}}/P_c)$  and Goldreich & Keeley (1977) proposed a quadratic one, that is  $f \propto (P_{\text{tide}}/P_c)^2$ . These prescriptions have been examined both by theoretical work (Goodman & Oh 1997) and by local high-resolution 3D numerical simulations (Penev et al. 2007; Ogilvie & Lesur 2012). If numerical simulations computed by Penev et al. (2007) seem to confirm the linear attenuation proposed by Zahn (1966), those by Ogilvie & Lesur (2012) are in favour of the quadratic one, so the  $f$  prescription is still debated.

As mentioned above, (rapid) rotation strongly affects turbulent convective flows (e.g. Brown et al. 2008; Julien et al. 2012; Barker et al. 2014). First, the Coriolis acceleration stabilizes the flow leading to a shift of the threshold of the convective instability (Chandrasekhar 1953). Next, the efficiency of the heat transport and the turbulent energy cascade are inhibited (e.g. Sen et al. 2012; King et al. 2012, 2013; Barker et al. 2014). Finally,  $V_c$ ,  $L_c$ , and as a consequence  $\nu_T$  vary with rotation. In the present state-of-the-art, we are thus in a situation where the action of the Coriolis acceleration is taken into account in the physical description of tidal flows (e.g. Ogilvie & Lin 2004, 2007; Remus et al. 2012; Auclair Desrotour et al. 2015) while it is ignored in the description of the turbulent friction. This should be improved since the angular velocity of celestial bodies can vary by several orders of magnitude along their evolution. Therefore, the turbulent convective friction must also be described as a function of the rotation rate ( $\Omega$ ).

## 3. Prescription for the friction applied by turbulent rotating convection

### 3.1. Modelling and assumptions

To study the modification of the turbulent friction applied on tidal flows in rotating stellar and planetary convective regions, we will use theoretical results first derived by Stevenson (1979) and confirmed in the rapid rotation regime by high-resolution numerical Cartesian simulations computed by Barker et al. (2014). We thus choose to consider a local Cartesian set-up with a box centered around a point  $M$  in a rotating convective zone (see Fig. 1) with an angular velocity  $\Omega$ ;  $(M, x, y, z)$  is the associated reference frame. The box has a characteristic length  $L$  and is assumed to have a homogeneous density  $\rho$ . Its vertical axis, which is aligned with the gravity  $\mathbf{g}$ , is inclined with an angle  $\theta$  with respect to the rotation axis. The convective turbulent flow has characteristic velocity  $V_c$  and length scale  $L_c$  to which we associate



**Fig. 1.** Local Cartesian model. M is the origin of the set-up. The east, north and gravity ( $\mathbf{g}$ ) directions are along the  $x$ ,  $y$  and  $z$  axis, respectively. The angle  $\theta$  is the inclination of the rotation axis with respect to gravity.

the kinematic eddy-viscosity  $\nu_T$  (see Eqs. (2) and (5)) describing the turbulent friction.

Next, we introduce the control parameters of the system:

- the convective Rossby number defined as in [Stevenson \(1979\)](#)

$$R_o^c = \left( \frac{V_c(\Omega = 0)}{2\Omega L_c(\Omega = 0) |\cos \theta|} \right) = \frac{P_\Omega}{P_c(\Omega = 0)}, \quad (3)$$

where we introduce the dynamical time  $P_\Omega = \frac{1}{2\Omega |\cos \theta|}$  and

we recall the definition of the characteristic convective turnover time  $P_c = L_c/V_c$ ;  $R_o^c \ll 1$  and  $R_o^c \gg 1$  correspond to rapid and slow rotation regimes, respectively;

- the Ekman number

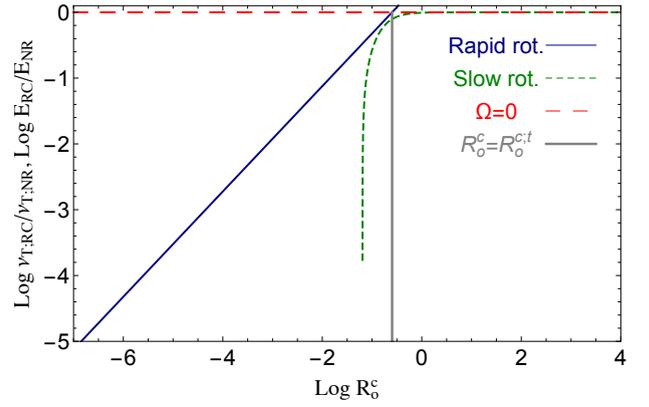
$$E = \frac{2\pi^2 \nu_T}{\Omega L^2}, \quad (4)$$

which compares the respective strength of the viscous force and of the Coriolis acceleration (see also [Auclair Desrotour et al. 2015](#)).

### 3.2. The new eddy-viscosity prescription

As in previous works, which do not take into account the action of rotation on convection (see Sect. 2), we assume that: i) we have a scale-separation between turbulent convective flows and tidal velocities and ii) the turbulent friction on this latter can be modelled through a viscous force involving an eddy-viscosity coefficient.

To derive this coefficient, we have to know the variation of  $V_c$  and  $L_c$  as a function of  $\Omega$  and to verify that the mixing-length approach that is generally used in stellar and planetary models can be assumed in our context. Actually, in presence of (rapid) rotation, convective turbulence becomes highly anisotropic because of the action of the Coriolis acceleration (e.g. [Julien et al. 2012](#); [Sen et al. 2012](#); [King et al. 2012, 2013](#)) and one must verify that a simplified mixing-length approach can be assumed as a first step. In this framework, this is the great interest of the work by [Barker et al. \(2014\)](#). It demonstrated that scaling laws obtained for  $V_c$  and  $L_c$  as a function of  $R_o^c$  by [Stevenson \(1979\)](#) using such



**Fig. 2.** Logarithm of the ratio  $\nu_{T,RC}/\nu_{T,NR}$  (and  $E_{RC}/E_{NR}$ ) as a function of  $\log R_o^c$ . The small-dashed green and solid blue lines correspond to the slow- and rapid-rotation asymptotic regimes, respectively. The vertical grey solid line corresponds to the transition Rossby number  $R_o^{c,t} \approx 0.25$  between these two asymptotic regimes. The red long-dashed line corresponds to the non-rotating case.

a mixing-length formalism is robust and verified when computing high-resolution Cartesian numerical simulations of rapidly rotating turbulent convective flows in a set-up corresponding to the one studied here.

We can thus generalize the prescription proposed in Eq. (2) to the rotating case by

$$\nu_{T,RC} = \frac{1}{3} V_c(R_o^c) L_c(R_o^c) f\left(\frac{P_{\text{tide}}}{P_c}\right), \quad (5)$$

where RC stands for rotating convection. To get  $V_c(R_o^c)/V_c(\Omega = 0)$  and  $L_c(R_o^c)/L_c(\Omega = 0)$ , we use the scaling laws that have been derived by [Stevenson \(1979\)](#) and verified by [Barker et al. \(2014\)](#) in the rapidly rotating regime:

- in the slow rotation regime, we have

$$\frac{V_c(R_o^c)}{V_c(\Omega = 0)} = 1 - \frac{1}{242(R_o^c)^2}, \quad (6)$$

and

$$\frac{L_c(R_o^c)}{L_c(\Omega = 0)} = \left(1 + \frac{1}{82(R_o^c)^2}\right)^{-1}; \quad (7)$$

- in the rapid rotation regime, we have

$$\frac{V_c(R_o^c)}{V_c(\Omega = 0)} = 1.5(R_o^c)^{1/5} \quad \text{and} \quad \frac{L_c(R_o^c)}{L_c(\Omega = 0)} = 2(R_o^c)^{3/5}. \quad (8)$$

In Fig. 2, we plot  $\log(\nu_{T,RC}/\nu_{T,NR})$  and the corresponding ratio for the Ekman number (see Eq. (4)) as a function of  $\log R_o^c$ . We have defined a first Ekman number computed with the turbulent viscosity prescription where the modification of turbulent friction by rotation is ignored:

$$E_{NR} = \frac{2\pi^2 \nu_{T,NR}}{\Omega L^2}, \quad (9)$$

and a second one where it is taken into account:

$$E_{RC} = \frac{2\pi^2 \nu_{T,RC}}{\Omega L^2}. \quad (10)$$

In the regime of rapidly rotating convective flows ( $R_o^c \ll 1$ ), the turbulent friction decreases by several orders of magnitude

with a scaling  $\nu_{T,RC}/\nu_{T,NR} \propto (R_0^c)^{4/5} \propto \Omega^{-4/5}$ . It can be understood by returning to the action of (rapid) rotation on the convective instability and turbulence (see the discussion at the end of Sect. 2). Indeed, the Coriolis acceleration tends to stabilize the flow and thus the degree of turbulence decreases with increasing rotation as well as the corresponding turbulent friction and eddy-viscosity.

Consequences for the viscous dissipation of the kinetic energy of tidal flows in rotating stellar and planetary convective regions must now be examined.

## 4. Consequences for tidal dissipation

### 4.1. A local model to quantify tidal dissipation

The linear response of planetary and stellar rotating convection zones to tidal perturbations is constituted by the superposition of an equilibrium/non-wave-like tide displacement and of tidally excited inertial waves, the dynamical tide (e.g. Zahn 1966; Ogilvie & Lin 2004, 2007; Remus et al. 2012; Ogilvie 2013). The restoring force of inertial waves is the Coriolis acceleration. Because of their dispersion relation  $\sigma = \pm 2\Omega k_z/|\mathbf{k}|$ , where  $\sigma$  is their frequency and  $\mathbf{k}$  their wave number, they propagate only if  $\sigma \in [-2\Omega, 2\Omega]$ .

To understand the impact of rapid rotation on the turbulent friction derived in the previous section on the equilibrium and dynamical tides, we now consider the linear response of the Cartesian set-up studied here (cf. Fig. 1) to a periodic tidal forcing. As a first step, we thus neglect the non-linear interactions between tidal inertial waves and those with turbulent convective flows (see, e.g. Galtier 2003; Sen et al. 2012; Favier et al. 2014; Clark di Leoni et al. 2014; Campagne et al. 2015). We follow the reduced and local analytical approach introduced by Ogilvie & Lin (2004) in the appendix of their paper and generalized by Auclair Desrotour et al. (2015) to understand tidal dissipation in convective regions with taking into account here the inclination angle  $\theta$ . In this framework, the velocity field of the tide  $\mathbf{u}$  excited by the tidal periodic volumetric forcing  $\mathbf{F}$  per unit-mass is governed by the linearized momentum and continuity equations<sup>1</sup>:

$$\partial_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (11)$$

where  $\nu$  is the (effective turbulent) viscosity and  $\Pi = P/\rho$  with  $P$  and  $\rho$  being the pressure and density respectively. We follow Ogilvie & Lin (2004) and Auclair Desrotour et al. (2015) by expanding  $\mathbf{u}$ ,  $\Pi$ , and  $\mathbf{f} = \mathbf{F}/2\Omega$  as Fourier series in time and space

$$\begin{aligned} u_x &= \Re \left[ u(X, Z) e^{-i\omega T} \right], & u_y &= \Re \left[ v(X, Z) e^{-i\omega T} \right], \\ u_z &= \Re \left[ w(X, Z) e^{-i\omega T} \right], & \Pi &= \Re \left[ \psi(X, Z) e^{-i\omega T} \right], \\ f_x &= \Re \left[ f(X, Z) e^{-i\omega T} \right], & f_y &= \Re \left[ g(X, Z) e^{-i\omega T} \right], \\ f_z &= \Re \left[ h(X, Z) e^{-i\omega T} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

with

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m,n} u_{mn} e^{i2\pi(mX+nZ)}, & v &= \sum_{m,n} v_{mn} e^{i2\pi(mX+nZ)}, \\ w &= \sum_{m,n} w_{mn} e^{i2\pi(mX+nZ)}, & \psi &= \sum_{m,n} \psi_{mn} e^{i2\pi(mX+nZ)}, \\ f &= \sum_{m,n} f_{mn} e^{i2\pi(mX+nZ)}, & g &= \sum_{m,n} g_{mn} e^{i2\pi(mX+nZ)}, \\ h &= \sum_{m,n} h_{mn} e^{i2\pi(mX+nZ)}. \end{aligned} \quad (13)$$

We have introduced the normalized space coordinates<sup>2</sup>  $X = x/L$  and  $Z = z/L$ , horizontal and vertical wave numbers  $m$  and  $n$ , time  $T = 2\Omega t$ , and tidal frequency  $\omega = (s\tilde{n} - M\Omega)/(2\Omega)$ ;  $\tilde{n}$  is the mean orbital motion,  $s \in \mathbf{Z}$  and  $M = mL/(r \sin \theta) = \{1, 2\}$  ( $r$  is the radial spherical coordinate of M). The boundary conditions are periodic in the two directions that corresponds to normal modes excited by tides (e.g. Wu 2005; Braviner & Ogilvie 2015). It would be also possible to tackle the case of singular modes leading to inertial wave attractors by imposing rigid boundary conditions to our tilted Cartesian box (Ogilvie 2005; Jouve & Ogilvie 2014).

From the momentum and the continuity equations, we get the following system:

$$\begin{cases} -i\omega u_{mn} - \cos \theta v_{mn} + \sin \theta w_{mn} = -im\Lambda \psi_{mn} - E(m^2 + n^2)u_{mn} + f_{mn} \\ -i\omega v_{mn} + \cos \theta u_{mn} = -E(m^2 + n^2)v_{mn} + g_{mn} \\ -i\omega w_{mn} - \sin \theta u_{mn} = -in\Lambda \psi_{mn} - E(m^2 + n^2)w_{mn} + h_{mn} \\ mu_{mn} + nw_{mn} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

where  $\Lambda = 1/(2\Omega L)$ . Following Auclair Desrotour et al. (2015), we solve it analytically. This allows us to derive each Fourier coefficient of the velocity field

$$\begin{cases} u_{mn} = n \frac{i\tilde{\omega}(nf_{mn} - mh_{mn}) - n \cos \theta g_{mn}}{(m^2 + n^2)\tilde{\omega}^2 - n^2 \cos^2 \theta} \\ v_{mn} = \frac{n \cos \theta (nf_{mn} - mh_{mn}) + i[(m^2 + n^2)\tilde{\omega}]g_{mn}}{(m^2 + n^2)\tilde{\omega}^2 - n^2 \cos^2 \theta} \\ w_{mn} = -m \frac{i\tilde{\omega}(nf_{mn} - mh_{mn}) - n \cos \theta g_{mn}}{(m^2 + n^2)\tilde{\omega}^2 - n^2 \cos^2 \theta}, \end{cases} \quad (15)$$

with  $\tilde{\omega} = \omega + iE(m^2 + n^2)$ , and to compute the viscous dissipation per unit mass of the kinetic energy of tidal flows

<sup>2</sup> As in Ogilvie & Lin (2004) and Auclair Desrotour et al. (2015), we focus on solutions, which depend only on  $X$  and  $Z$ , since adding the third coordinate  $Y$  will not modify the qualitative behaviour of the system.

<sup>1</sup> In this work the action of thermal diffusivity is ignored.

(Auclair Desrotour et al. 2015)

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{L^2} \int_0^1 \int_0^1 \langle -\mathbf{u} \cdot \nu \nabla_{X,Z}^2 \mathbf{u} \rangle dX dZ \\ &= \frac{2\pi^2 \nu}{L^2} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (m^2 + n^2) (|u_{mn}^2| + |v_{mn}^2| + |w_{mn}^2|), \end{aligned} \quad (16)$$

where  $\nabla_{X,Z}^2 = 1/L^2 \nabla^2$  and  $\langle \dots \rangle$  is the average in time, and the corresponding energy dissipated per rotation period

$$\zeta = \frac{2\pi}{\Omega} \mathcal{D} = 2\pi E \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (m^2 + n^2) (|u_{mn}^2| + |v_{mn}^2| + |w_{mn}^2|). \quad (17)$$

Because of the form of the forced velocity field (Eq. (15)), the tidal dissipation spectrum ( $\zeta$ ) is a complex resonant function of the normalized tidal frequency ( $\omega$ ). It corresponds to resonances of the inertial waves that propagate in planetary and stellar convection zones. An example of such resonant spectra is computed in Fig. 3 (top panel) for  $E = 10^{-4}$  and  $\theta = 0$ . Here we use the academic forcing  $f_{mn} = -i/(4|m|n^2)$ ,  $g_{mn} = 0$  and  $h_{mn} = 0$  adopted by Ogilvie & Lin (2004) and Auclair Desrotour et al. (2015). As discussed in Auclair Desrotour et al. (2015), such an academic forcing already allows us to study properly the variation of  $\zeta$  as a function of rotation, viscosity and frequency forcing. Following this latter work, we characterize  $\zeta$  by the following physical quantities and scaling laws in the local model:

- the non-resonant background of the dissipation spectra  $H_{bg}$ , which corresponds to the viscous dissipation of the equilibrium/non-wave-like tide, that scales as  $H_{bg} \propto E$ ;
- the number of resonant peaks  $N_{kc}$  that scales as  $N_{kc} \propto E^{-1/2}$ ;
- their width at half-height  $l_{mn}$  that scales as  $l_{mn} \propto E$ ;
- their height  $H_{mn}$  that scales as  $H_{mn} \propto E^{-1}$ ;
- the sharpness of the spectrum defined as  $\Xi = H_{11}/H_{bg}$ , which evaluate the contrast between the dissipation of the dynamical and equilibrium tides, that scales as  $\Xi \propto E^{-2}$ .

From now on,  $X_{RC}$  is a quantity evaluated with  $E_{RC}$  (i.e. with  $\nu_{T,RC}$ ) while  $X_{NR}$  is computed using  $E_{NR}$  (i.e. with  $\nu_{T,NR}$ ).

#### 4.2. The impact of rotation on the turbulent convective friction applied to tidal flows

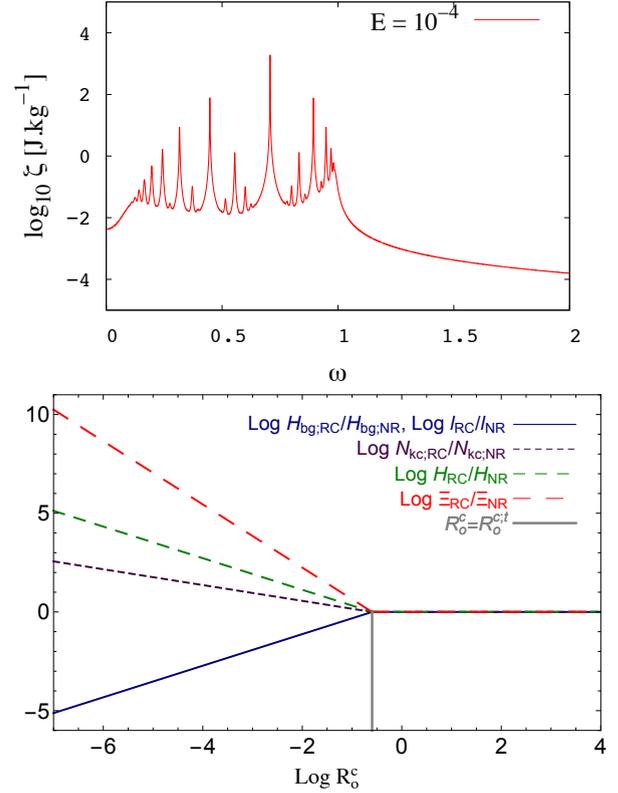
We can thus deduce interesting conclusions from the results obtained with this simplified model for both the equilibrium and dynamical tides.

##### 4.2.1. The equilibrium tide

In our local Cartesian set-up, the equilibrium tide is represented by the non-resonant background  $H_{bg}$ . Using Eq. (10), we thus deduce that its efficiency scales as  $\Omega^{-9/5}$  in the regime of rapid rotation. This loss of efficiency of the equilibrium tide in rapidly rotating convective regions is illustrated in Fig. 3 where we plot  $\log(H_{bg,RC}/H_{bg,NR})$  as a function of  $\log R_0^c$ .

##### 4.2.2. The dynamical tide

We use scaling laws obtained for the resonances of tidal inertial waves. We deduce that as soon as studied convective regions are in the regime of rapid rotation, their number and height respectively increase as  $N_{kc} \propto \Omega^{9/10}$  and  $H_{mn} \propto \Omega^{9/5}$  while their width decreases as  $l_{mn} \propto \Omega^{-9/5}$ . The sharpness of  $\zeta$  is increased



**Fig. 3.** *Top:* tidal dissipation frequency spectrum for the academic forcing chosen here (see also Ogilvie & Lin 2004; Auclair Desrotour et al. 2015) for  $E = 10^{-4}$  and  $\theta = 0$  (in logarithm scale for the dissipation). *Bottom:* variations of the logarithm of the ratios  $H_{bg,RC}/H_{bg,NR}$ ,  $l_{RC}/l_{NR}$  (solid blue line),  $N_{kc,RC}/N_{kc,NR}$  (dashed purple line),  $H_{RC}/H_{NR}$  (dashed green line) and  $\Xi_{RC}/\Xi_{NR}$  (long-dashed red line) as a function of  $\log R_0^c$  when taking into account (or not) the action of rotation on turbulent friction. The vertical grey solid line corresponds to the transition Rossby number  $R_0^{c:it} \approx 0.25$ .

as  $\Xi \propto \Omega^{18/5}$ . These variations of the properties of the resonant tidal dissipation frequency spectra is illustrated in Fig. 3 where we plot  $\log(N_{kc,RC}/N_{kc,NR})$ ,  $\log(l_{RC}/l_{NR})$ , and  $\log(\Xi_{RC}/\Xi_{NR})$  as a function of  $\log R_0^c$ .

As demonstrated by Auclair-Desrotour et al. (2014; see also Witte & Savonije 1999), this may have important consequences for the evolution of the spin of the host body and of the orbits of the companions, for example in the cases of star-planet and planet-moon systems. Indeed, the relative migration induced by a resonance scales as  $\Delta a/a \equiv l_{mn} H_{mn}^{1/4} \propto \Omega^{-27/20}$ .

## 5. Astrophysical discussion

It is now important to discuss our results in the context of stellar and planetary interiors hosting turbulent convection regions. We focus here on the convective envelopes of low-mass stars (from M- to F-types) and of gaseous/icy giant planets and of the cores of telluric bodies.

### 5.1. The case of low-mass and solar-type stars

As demonstrated by Zahn (1966), Ogilvie & Lin (2007) and Mathis (2015), external convective zones of low-mass stars are key contributors for the dissipation of tidal kinetic energy in

these objects<sup>3</sup>. This is illustrated by the observations of the state of the orbits and of stellar spins in planetary systems and binary stars (see the synthetic review in [Ogilvie 2014](#), and references therein). An illustrative example is given by the need to understand the orbital properties of hot Jupiters and the inclination angle of their orbits relative to the spin axis of their host stars (e.g. [Winn et al. 2010](#); [Albrecht et al. 2012](#); [Valsecchi & Rasio 2014b,a](#)), which vary with their properties (i.e. their mass, age, rotation, etc.).

In this context, the rotation rates of low-mass stars strongly vary along their evolution (e.g. [Barnes 2003](#); [Gallet & Bouvier 2013, 2015](#); [Amard et al. 2016](#); [McQuillan et al. 2014](#); [García et al. 2014](#)). They are first locked in co-rotation with their initial circumstellar accretion disk because of complex MHD star-disk-wind interactions (e.g. [Matt et al. 2010, 2012](#); [Ferreira 2013](#)). Next, because of their contraction, they spin up along the PMS until the zero-age main-sequence (ZAMS). Finally, they spin down during the MS because of the torque applied by magnetized stellar winds (e.g. [Schatzman 1962](#); [Kawaler 1988](#); [Chaboyer et al. 1995](#); [Réville et al. 2015](#); [Matt et al. 2015](#)). These variations of the angular velocity strongly affect the properties of convective flows because of the action of the Coriolis acceleration. Indeed, rapid rotation during the PMS modifies and constrains convective turbulent flow patterns, large-scale meridional circulations and differential rotation ([Ballot et al. 2007](#); [Brown et al. 2008](#)). The key control parameters to unravel such a complex dynamic is the convective Rossby number  $R_0^c$  defined in Eq. (3). For example, it allows us to predict the latitudinal behaviour of the differential rotation established by convection ([Matt et al. 2011](#); [Gastine et al. 2014](#); [Käpylä et al. 2014](#)) while it controls the friction applied to tidal flows (see Eq. (5)) and the properties of the frequency spectrum of their dissipation (see Sect. 4.2).

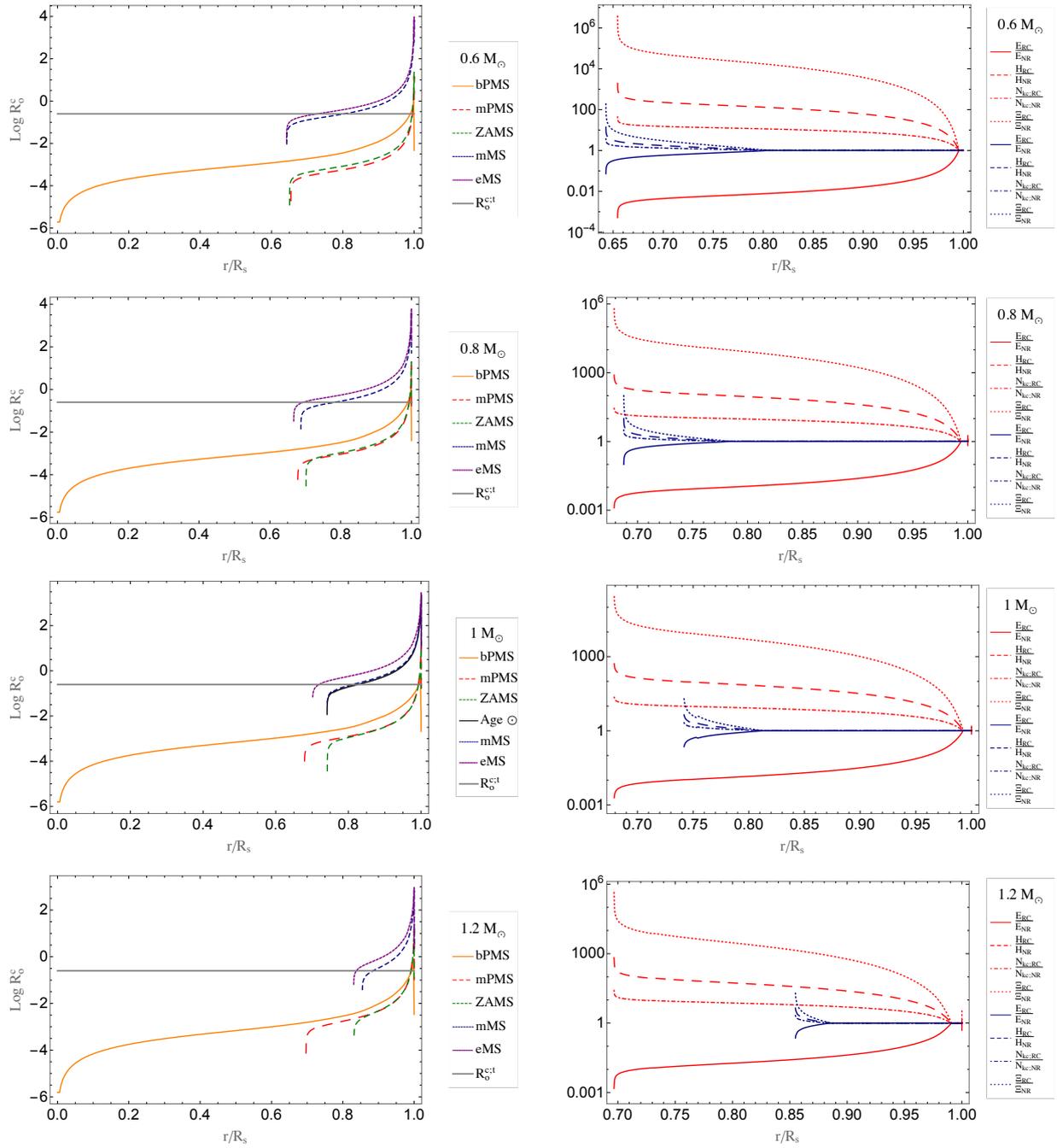
It is thus interesting to compute the variations of  $R_0^c$  along the evolution of low-mass stars. This will allow us to evaluate the impact of the action of rotation on the turbulent convective friction and on the properties of the tidal dissipation along stellar evolution thanks to Eqs. (5)–(8) and to scaling laws given in Sect. 4.1. To reach this objective, we choose to compute new grids of stellar rotating models for stars with masses between  $0.6 M_\odot$  and  $1.2 M_\odot$  (i.e. from K- to F-types) with a solar metallicity. We follow the methodology first proposed by [Landin et al. \(2010\)](#). This allows us to study the variations of the rotation and  $R_0^c$  as a function of time and radius along the evolution of these stars from the beginning of the PMS to the end of the MS. We use the latest version of the STAREVOL stellar evolution code described in details (e.g. for the equation of state, nuclear reaction, opacities, etc.) in [Amard et al. \(2016\)](#); see also [Siess et al. 2000](#); [Palacios et al. 2003](#); [Lagarde et al. 2012](#)). The mixing-length parameter is chosen to be  $\alpha = 1.6267$ . Convective regions are modelled assuming uniform rotation while radiation zones rotate according to redistribution of angular momentum by shear-induced turbulence and meridional flows, which are treated using formalisms derived by [Zahn \(1992\)](#), [Maeder & Zahn \(1998\)](#), [Mathis & Zahn \(2004\)](#), [Mathis et al. \(2004\)](#). Angular momentum losses at the stellar surface due to pressure-driven magnetized stellar winds are taken into account using the prescription adopted by [Matt et al. \(2015\)](#), the two parameters of this model are given in Eqs. (6) and (7) of this paper, and we choose  $\chi = 10$  and  $p = 2$ ), which allows the authors to verify the Skumanich

law ([Skumanich 1972](#)). Since our interest here is on the impact of rapid rotation, we choose to compute the evolution of initially rapidly rotating low-mass stars, which all have the same initial rotation period of 1.4 days and disc-locking time of  $3 \times 10^6$  yr. In addition, we have also computed the evolution of initially slow and median rotators that allows us to compare and validate our results with those obtained by [Landin et al. \(2010\)](#).

In Fig. 4 (left-hand panel), we first represent the radial profiles of  $\log R_0^c$  for different masses (i.e. 0.6, 0.8, 1.0, and  $1.2 M_\odot$ ) and ages: the beginning of the PMS, the mid PMS, the ZAMS, the middle of the MS, the end of the MS, and the solar age for the  $1 M_\odot$  solar-type star<sup>4</sup>. In these plots (and in Fig. 5), we also recall the value of the critical convective Rossby number  $R_0^{c:it} \approx 0.25$ . It corresponds to the transition between the rapidly ( $R_0^c < R_0^{c:it}$ ) and slowly ( $R_0^c > R_0^{c:it}$ ) rotating regimes. For all stellar masses and ages, a large radial variation of  $R_0^c$  over several orders of magnitude is obtained with a monotonic increase towards the surface. This result is coherent with previously published results in the case of the Sun (see Fig. 1 in [Käpylä et al. 2005](#)). Therefore, the impact of rotation on the turbulent friction applied on tidal flows may be stronger close to the basis of the convective envelope than in surface regions. This may have different impacts on equilibrium and dynamical tides. On one hand, the equilibrium tide varies at the zeroth-order as  $r^2 Y_2^M(\theta, \varphi)$ , where  $Y_2^M$  is the quadrupolar spherical harmonics (see e.g. [Zahn 1966](#); [Remus et al. 2012](#)). On the other hand, the dynamical tide constituted by tidal inertial waves propagate in the whole convective region. In the case of fully convective low-mass stars (at the beginning of the PMS or in M-type stars), inertial waves propagate as regular modes ([Wu 2005](#)). In the case of convective shells, they propagate along waves' attractors ([Ogilvie & Lin 2007](#)). Therefore, for a given age, the turbulent friction applied on tidal inertial waves propagating deep inside convective zones would be more strongly affected by the action of the Coriolis acceleration on convective flows than the one applied on the equilibrium tide. However, for all stellar masses, we can see that the impact of rotation on the friction stays important everywhere during all the PMS and the beginning of the MS where stars are rotating rapidly. Indeed, during these evolution phases, the plotted radial profiles show that  $R_0^c < R_0^{c:it}$  for all radii except just below the surface layers. This is confirmed in Fig. 5, where the convective Rossby number in the middle of the convective envelope (i.e. at  $r = \Delta R_{CZ}/2 = (R_s - R_c)/2$ , where  $R_s$  and  $R_c$  are the radius of the star and those of the basis of the convective envelope respectively) is plotted as a function of time. Indeed, Fig. 4 (left-hand panel) shows how  $R_0^c(\Delta R_{CZ}/2)$  can provide a reasonable intermediate order of magnitude for  $R_0^c$  in tidal dissipation studies. At these evolutionary stages, we thus expect a strong action of the dynamical tide, constituted by inertial waves, with associated highly resonant tidal dissipation frequency-spectra. This result is very important since [Zahn & Bouchet \(1989\)](#) demonstrated that the most important phase of orbital circularization in late-type binaries occurs during the PMS where the convective envelopes of the components are thick. Moreover, it perfectly matches the results obtained by [Mathis \(2015\)](#) and [Bolmont & Mathis \(2016\)](#) where a strong action of tidal inertial waves all along the PMS has been identified. In Figs. 4 (right-hand panels) and 6, we represent the ratios between the values of the turbulent eddy-viscosity (and of the corresponding Ekman number) and those of the dissipation frequency spectrum properties ( $H_{bg}$ ,  $l$ ,  $H$ ,  $N_k$  and  $\Xi$ ) (respectively as a function of  $r$  for  $\{0.6, 0.8, 1, 1.2\} M_\odot$

<sup>3</sup> [Zahn \(1977\)](#) showed that tidal dissipation in intermediate-mass and massive stars is dominated by thermal diffusion acting on gravity waves in their radiative envelope.

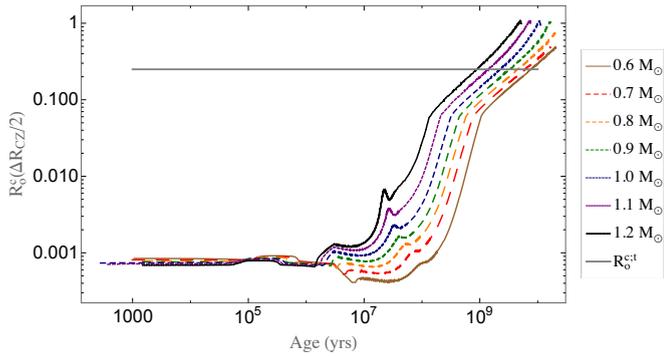
<sup>4</sup> Note here that we consider a  $1 M_\odot$  solar-type star and not a helioseismic calibrated solar model.



**Fig. 4.** *Left-hand panels:* radial profiles of  $\log R_0^c$  for  $\{0.6, 0.8, 1, 1.2\} M_\odot$  stars at different ages: the beginning of the PMS (solid orange line; labelled bPMS), the mid PMS (dashed red line; labelled mPMS), the ZAMS (dashed green line), the middle of the MS (dashed blue line; labelled mMS), the end of the MS (dashed purple line; labelled eMS) and the solar age for the  $1 M_\odot$  solar-type star (solid black line; labelled Age  $\odot$ );  $r/R_s$  is the normalized radius, where  $R_s$  is the radius of the star. The critical convective Rossby number  $R_0^{c,1} \approx 0.25$  giving the transition between the rapidly and the slowly rotating regimes is represented by the solid thick grey line. *Right-hand panels:* radial profiles of  $E_{RC}/E_{NR}$  (and  $\nu_{T,RC}/\nu_{T,NR}$ ,  $H_{bg,RC}/H_{bg,NR}$  and  $l_{RC}/l_{NR}$ ; solid line),  $H_{bg,RC}/H_{bg,NR}$  (dashed line),  $N_{RC}/N_{NR}$  (dot-dashed line) and  $\Xi_{RC}/\Xi_{NR}$  (dotted line) for each stellar mass at the mid PMS (in red) and mid MS (in blue).

stars at the middle of the PMS and MS in Fig. 4 (right-hand panels) and as a function of time for  $r = \Delta R_{CZ}/2$  for stellar masses from  $0.6$  to  $1.2 M_\odot$  in Fig. 6) when taking into account the modification of the turbulent friction by rotation or not. In each case, we see that differences by several orders of magnitude can be obtained for each quantity that must be taken into account. It demonstrates that the rapidly-rotating regime enhances the highly resonant dynamical tide while it decreases the efficiency of the equilibrium tide because the amplitudes of their

viscous dissipation increases and decreases respectively with  $\nu_T$ . Therefore, it strengthens the general conclusion that tidal evolution of star-planet systems and of binary stars must be treated taking into account the dynamical tide and not only the equilibrium tide (e.g. Auclair-Desrotour et al. 2014; Savonije & Witte 2002; Witte & Savonije 2002). As a consequence, the predictions obtained using simplified equilibrium tide models such as the constant tidal quality factor and the constant tidal lag models (e.g. Kaula 1964; Hut 1981) must be considered very carefully.



**Fig. 5.** Evolution of  $R_o^c$ , evaluated in the middle of the convective envelope (at  $r = \Delta R_{CZ}/2$ ), as a function of stellar age (in logarithm scales) computed using the grid of rotating stellar models for  $0.6 M_\odot$  (dashed brown line),  $0.7 M_\odot$  (dashed red line),  $0.8 M_\odot$  (dashed orange line),  $0.9 M_\odot$  (dashed green line),  $1 M_\odot$  (dashed blue line),  $1.1 M_\odot$  (dashed purple line) and  $1.2 M_\odot$  (solid black line) stars. The critical convective Rossby number  $R_o^{c, \text{crit}} \approx 0.25$  giving the transition between the rapidly and the slowly rotating regimes is represented by the solid thick grey line.

As a conclusion, these results demonstrate how it is necessary to have an integrated and coupled treatment of the rotational evolution of stars, which directly impacts tidal dissipation in their interiors, and of the tidal evolution of the surrounding planetary or stellar systems (e.g. Penev et al. 2014; Bolmont & Mathis 2016). In addition, tidal torques may also modify the rotation of stars as a back reaction (e.g. Bolmont et al. 2012; Bolmont & Mathis 2016).

Finally, variations of  $E_{NR}$  and  $E_{RC}$  (with  $L = R_s$ ; see Eqs. (9) and (10)) evaluated at  $r = \Delta R_{CZ}/2$  as a function of stellar mass and age are given in Fig. 7 with  $f$  (in Eq. (5)) fixed to one, in left- and right-hand panels respectively. STAREVOL models allow us to coherently compute  $V_c$ ,  $L_c$  and  $R_o^c$  (Eq. (5)) for each stellar mass, age and radius. In these plots, we identify the phase of co-rotation of the stars with the surrounding disk (up to  $3 \times 10^6$  yr), the acceleration phase, and the stellar spin-down due to the breaking by the wind. This provides key inputs for future numerical simulations of tidal dissipation in spherical convective shells for which the Ekman number is one of the key physical control parameters (e.g. Ogilvie & Lin 2007; Baruteau & Rieutord 2013; Guenel et al. 2016). It allows us to improve step by step the evaluation of tidal friction in the convective envelope of low-mass stars all along their evolution by combining hydrodynamical studies and stellar modelling.

## 5.2. The case of planets

As in the case of young low-mass stars, convective flows are strongly constrained by the Coriolis acceleration in rapidly rotating planetary interiors. The most evident cases are those of the Earth liquid core and of the envelopes of gaseous (Jupiter and Saturn) and icy (Uranus and Neptune) giant planets (Glatzmaier 2013). In this context, the importance of rotation on tidal flows and their dissipation has been demonstrated both in the case of the Earth (e.g. Buffett 2010) and of giant planets (e.g. Ogilvie & Lin 2004; Wu 2005).

Therefore, as in the case of stars, it is interesting to collect values of the convective Rossby numbers for planetary interiors. We choose here to use the orders of magnitude given in Schubert & Soderlund (2011) for the Earth and in

**Table 1.** Orders of magnitude for planetary Rossby numbers (given in Schubert & Soderlund 2011, for the Earth, and in Soderlund et al. 2013, for giant planets).

Parameter	Earth	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptune
$R_o^c$	$10^{-7}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$

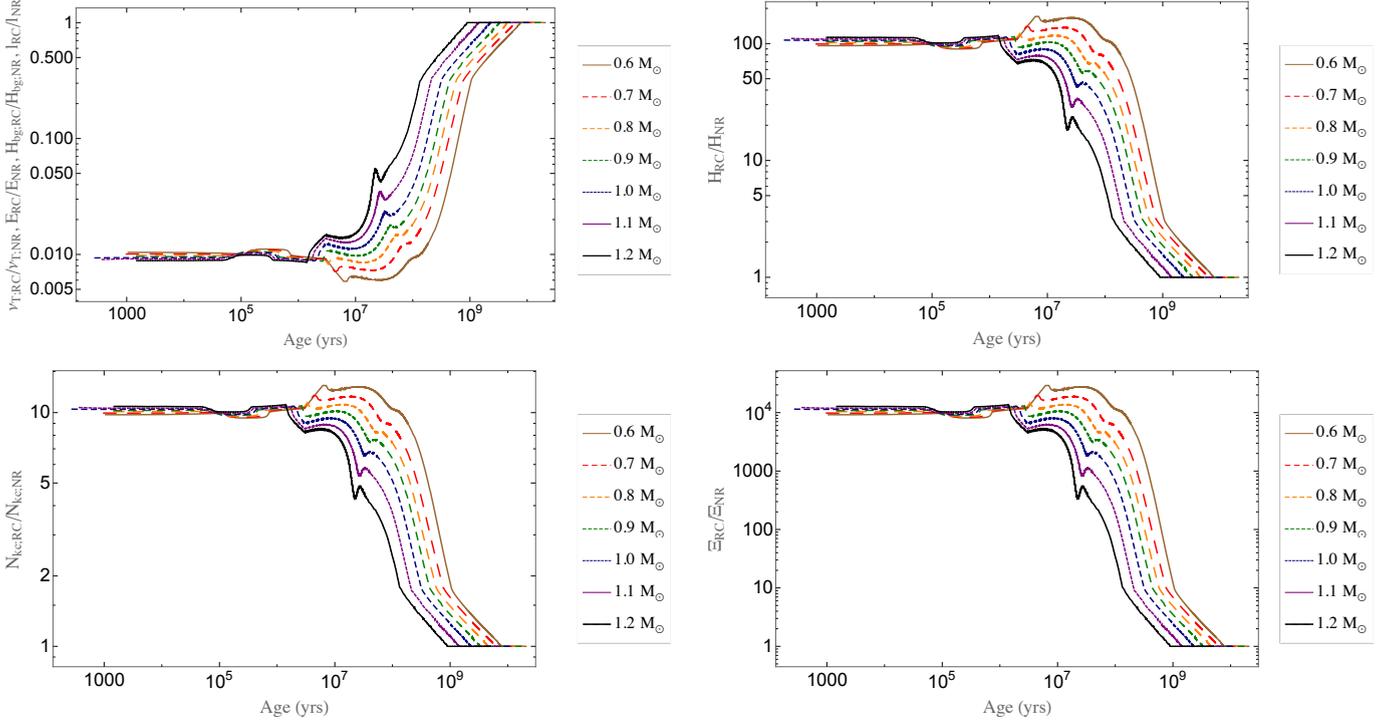
Soderlund et al. (2013) for giant planets. They are reported in the following table.

From our previous results, we conclude that the rapidly-rotating regime (see Fig. 2) applies in the cases of the Earth, Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune. Therefore, the action of the Coriolis acceleration on the convective turbulent friction cannot be neglected. It will strengthen the importance of tidal inertial waves and of their resonant viscous dissipation with corresponding numerous and strong resonances (see, e.g. Fig. 3). Note that such a result is particularly important for our understanding of tidal dissipation in the deep convective envelope of giant planets in our Solar System (Ogilvie & Lin 2004; Guenel et al. 2014) for which we obtained new constraints through high precision astrometry (Lainey et al. 2009, 2012, 2015).

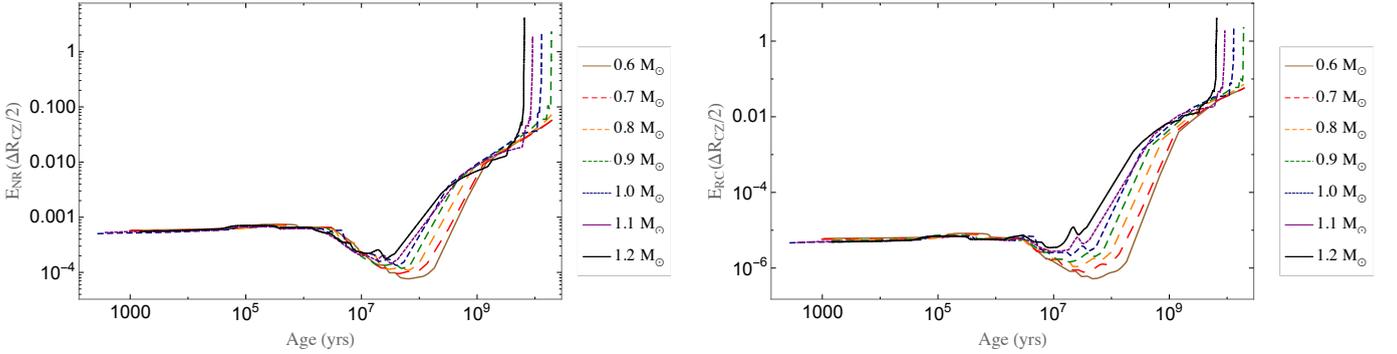
We can thus conclude that in most of the astrophysical situations relevant for the evolution of planetary systems, the action of rotation on the turbulent friction applied by convection on linear tidal waves must be taken into account. Moreover, it demonstrates that it is necessary to build a coupled modelling of the tidal evolution of planetary systems with the rotational evolution of their components, rotation being a key parameter for the amplitude and the frequency dependence of tidal dissipation in their interiors.

## 6. Conclusions and perspectives

Using results obtained by Barker et al. (2014) on the scaling of velocities and length scales in rotating turbulent convection zones, we proposed a new prescription for the eddy-viscosity coefficient, which allows us to describe tidal friction in such regions. In their work, Barker et al. (2014) confirmed scalings for convective velocities and length scales as a function of rotation in the rapidly rotating regime that were first derived by Stevenson (1979) using mixing-length theory. Using his results, we derive a new prescription for the turbulent friction, which takes into account the action of the Coriolis acceleration on the convective flows. This allows us to generalize previous studies where the action of rotation on linear tidal flows was accounted for while its impact on the turbulent friction applied on them by convection was ignored. We demonstrated that the eddy-viscosity may be decreased by several orders of magnitude in the rapidly rotating regime. It leads to a deep modification of the tidal dissipation frequency spectrum. On one hand, its background that corresponds to the so-called equilibrium/non-wave-like tide is decreased because it scales as  $E \propto \nu_T$ . On the other hand, resonances of tidal inertial waves (i.e. the dynamical tide) become more and more numerous, higher and sharper since their number, width at half-height, height, and sharpness respectively scales as  $E^{-1/2}$ ,  $E$ ,  $E^{-1}$ , and  $E^{-2}$  (Auclair Desrotour et al. 2015). In this framework, we demonstrated using new grids of rotating low-mass stars and values of convective Rossby numbers in planetary interiors (Schubert & Soderlund 2011; Soderlund et al. 2013), that this modification of the turbulent



**Fig. 6.** *Top left:* evolution of  $v_{T,RC}/v_{T,NR}$ ,  $E_{RC}/E_{NR}$ ,  $H_{bg,RC}/H_{bg,NR}$  and  $l_{RC}/l_{NR}$  at  $r = \Delta R_{CZ}/2$  (not written on labels to lighten notations) as a function of stellar age (in logarithm scales) for stellar masses from  $0.6 M_{\odot}$  to  $1.2 M_{\odot}$  (colours have been defined in the caption of Fig. 5). *Top right:* same for  $H_{RC}/H_{NR}$ . *Bottom left:* same for  $N_{RC}/N_{NR}$ . *Bottom right:* same for  $\Xi_{RC}/\Xi_{NR}$ .



**Fig. 7.** Evolution of the Ekman numbers  $E_{NR}$  (left panel) and  $E_{RC}$  (right panel) at  $r = \Delta R_{CZ}/2$  as a function of stellar age (in logarithm scales) for stellar masses from  $0.6 M_{\odot}$  to  $1.2 M_{\odot}$  (colours defined in the caption of Fig. 5).

friction is important for low-mass stars along their PMS and at the beginning of MS during which they are rapidly rotating and in rapidly rotating planets as the Earth and giant gaseous/icy planets. Because of the radial variation of the effects of rotation on the friction, they may be stronger for tidal inertial waves that propagate in the whole convective zone than for the equilibrium tide which has a higher amplitude in surface regions. As demonstrated by Auclair-Desrotour et al. (2014), such a behaviour must be taken into account in the study of the tidal evolution of star-planet and planet-moon systems. Indeed, the angular velocity of their components vary through time because of structural modifications and of applied (tidal and electromagnetic) torques. These torques are themselves complex functions of rotation (this work; Mathis 2015; Matt et al. 2012, 2015; Réville et al. 2015). It is thus necessary to have a completely coupled treatment of the tidal evolution of planetary systems and multiple stars and of the rotational evolution of their components

with a coherent treatment of the variations of tidal flows and of their dissipation as a function of rotation.

In our work, the non-linear wave-wave interactions and those between tidal and convective flows have been ignored (e.g. Sen et al. 2012; Sen 2013; Barker & Lithwick 2013; Favier et al. 2014). Moreover, stratified convection, with intermediate stably stratified diffusive layers can take place in giant planets because of double-diffusive instabilities (Leconte & Chabrier 2012). Finally, stellar and planetary convective regions are differentially rotating and magnetized (Baruteau & Rieutord 2013; Guenel et al. 2016; Barker & Lithwick 2014). In the near future, these four aspects of the problem will be examined carefully to improve our knowledge of tidal friction in stars and planets.

*Acknowledgements.* The authors thank the referee for his positive and constructive report which allowed us to improve the article. The authors acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. This work was also supported by the Programme National de Planétologie

(CNRS/INSU), the GRAM specific action (CNRS/INSU-INP, CNES), the Axe Etoile of the Paris Observatory Scientific Council and the International Space Institute (ISSI team ENCELADE 2.0). We dedicate this article to our friend Pr. André Brahic who was continuously promoting research, culture and education and to his values “Courage, Liberté, Egalité, Fraternité”.

## References

- Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., et al. 2012, *ApJ*, **757**, 18
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F., & Bouvier, J. 2016, *A&A*, **587**, A105
- Auclair-Desrotour, P., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2014, *A&A*, **561**, L7
- Auclair-Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, *A&A*, **581**, A118
- Ballot, J., Brun, A. S., & Turck-Chièze, S. 2007, *ApJ*, **669**, 1190
- Barker, A. J., & Lithwick, Y. 2013, *MNRAS*, **435**, 3614
- Barker, A. J., & Lithwick, Y. 2014, *MNRAS*, **437**, 305
- Barker, A. J., Dempsey, A. M., & Lithwick, Y. 2014, *ApJ*, **791**, 13
- Barnes, S. A. 2003, *ApJ*, **586**, 464
- Baruteau, C., & Rieutord, M. 2013, *J. Fluid Mechanics*, **719**, 47
- Bolmont, E., & Mathis, S. 2016, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, in press [[arXiv:1603.06268](https://arxiv.org/abs/1603.06268)]
- Bolmont, E., Raymond, S. N., Leconte, J., & Matt, S. P. 2012, *A&A*, **544**, A124
- Bouvier, J. 2008, *A&A*, **489**, L53
- Braviner, H. J., & Ogilvie, G. I. 2015, *MNRAS*, **447**, 1141
- Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2008, *ApJ*, **689**, 1354
- Brun, A. S. 2014, in IAU Symp. 302, eds. P. Petit, M. Jardine, & H. C. Spruit, 114
- Buffett, B. 2010, *Nature*, **468**, 952
- Campagne, A., Gallet, B., Moisy, F., & Cortet, P.-P. 2015, *Phys. Rev. E*, **91**, 043016
- Chaboyer, B., Demarque, P., & Pinsonneault, M. H. 1995, *ApJ*, **441**, 865
- Chandrasekhar, S. 1953, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A*, **217**, 306
- Clark di Leoni, P., Cobelli, P. J., Mininni, P. D., Dmitruk, P., & Matthaeus, W. H. 2014, *Phys. Fluids*, **26**, 035106
- Efroimsky, M., & Lainey, V. 2007, *J. Geophys. Res.*, **112**, 12003
- Favier, B., Barker, A. J., Baruteau, C., & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, **439**, 845
- Ferreira, J. 2013, in EAS Pub. Ser. 62, eds. P. Hennebelle & C. Charbonnel, 169
- Gallet, F., & Bouvier, J. 2013, *A&A*, **556**, A36
- Gallet, F., & Bouvier, J. 2015, *A&A*, **577**, A98
- Galtier, S. 2003, *Phys. Rev. E*, **68**, 015301
- García, R. A., Ceillier, T., Salabert, D., et al. 2014, *A&A*, **572**, A34
- Gastine, T., Yadav, R. K., Morin, J., Reiners, A., & Wicht, J. 2014, *MNRAS*, **438**, L76
- Glatzmaier, G. A. 2013, *Introduction to Modelling Convection in Planets and Stars* (Princeton University Press)
- Goldreich, P., & Keeley, D. A. 1977, *ApJ*, **211**, 934
- Goldreich, P., & Soter, S. 1966, *Icarus*, **5**, 375
- Goodman, J., & Oh, S. P. 1997, *ApJ*, **486**, 403
- Guenel, M., Mathis, S., & Remus, F. 2014, *A&A*, **566**, L9
- Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016, *A&A*, **589**, A22
- Hut, P. 1981, *A&A*, **99**, 126
- Jouve, L., & Ogilvie, G. I. 2014, *J. Fluid Mech.*, **745**, 223
- Julien, K., Knobloch, E., Rubio, A. M., & Vasil, G. M. 2012, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 254503
- Käpylä, P. J., Korpi, M. J., Stix, M., & Tuominen, I. 2005, *A&A*, **438**, 403
- Käpylä, P. J., Käpylä, M. J., & Brandenburg, A. 2014, *A&A*, **570**, A43
- Kaula, W. M. 1964, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **2**, 661
- Kawaler, S. D. 1988, *ApJ*, **333**, 236
- King, E. M., Stellmach, S., & Aurnou, J. M. 2012, *J. Fluid Mech.*, **691**, 568
- King, E. M., Stellmach, S., & Buffett, B. 2013, *J. Fluid Mech.*, **717**, 449
- Lagarde, N., Decressin, T., Charbonnel, C., et al. 2012, *A&A*, **543**, A108
- Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, *Nature*, **459**, 957
- Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, *ApJ*, **752**, 14
- Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2015, *ArXiv e-prints* [[arXiv:1510.05870](https://arxiv.org/abs/1510.05870)]
- Landin, N. R., Mendes, L. T. S., & Vaz, L. P. R. 2010, *A&A*, **510**, A46
- Laskar, J., Boué, G., & Correia, A. C. M. 2012, *A&A*, **538**, A105
- Leconte, J., & Chabrier, G. 2012, *A&A*, **540**, A20
- Maeder, A., & Zahn, J.-P. 1998, *A&A*, **334**, 1000
- Mathis, S. 2015, *A&A*, **580**, L3
- Mathis, S., & Remus, F. 2013, in *Lect. Not. Phys.* 857 (Berlin: Springer Verlag), eds. J.-P. Rozelot, & C. Neiner, 111
- Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2004, *A&A*, **425**, 229
- Mathis, S., Palacios, A., & Zahn, J.-P. 2004, *A&A*, **425**, 243
- Matt, S. P., Pinzón, G., de la Reza, R., & Greene, T. P. 2010, *ApJ*, **714**, 989
- Matt, S. P., Do Cao, O., Brown, B. P., & Brun, A. S. 2011, *Astron. Nachr.*, **332**, 897
- Matt, S. P., Pinzón, G., Greene, T. P., & Pudritz, R. E. 2012, *ApJ*, **745**, 101
- Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, *ApJ*, **799**, L23
- McQuillan, A., Mazeh, T., & Aigrain, S. 2014, *ApJS*, **211**, 24
- Ogilvie, G. I. 2005, *J. Fluid Mech.*, **543**, 19
- Ogilvie, G. I. 2013, *MNRAS*, **429**, 613
- Ogilvie, G. I. 2014, *ARA&A*, **52**, 171
- Ogilvie, G. I., & Lesur, G. 2012, *MNRAS*, **422**, 1975
- Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, **610**, 477
- Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2007, *ApJ*, **661**, 1180
- Palacios, A., Talon, S., Charbonnel, C., & Forestini, M. 2003, *A&A*, **399**, 603
- Penev, K., Sasselov, D., Robinson, F., & Demarque, P. 2007, *ApJ*, **655**, 1166
- Penev, K., Zhang, M., & Jackson, B. 2014, *PASP*, **126**, 553
- Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2012, *A&A*, **544**, A132
- Réville, V., Brun, A. S., Matt, S. P., Strugarek, A., & Pinto, R. F. 2015, *ApJ*, **798**, 116
- Savonije, G. J., & Witte, M. G. 2002, *A&A*, **386**, 211
- Schatzman, E. 1962, *Ann. Astrophys.*, **25**, 18
- Schubert, G., & Soderlund, K. M. 2011, *Phys. Earth Planet. Interiors*, **187**, 92
- Sen, A. 2013, *ArXiv e-prints* [[arXiv:1312.7497](https://arxiv.org/abs/1312.7497)]
- Sen, A., Mininni, P. D., Rosenberg, D., & Pouquet, A. 2012, *Phys. Rev. E*, **86**, 036319
- Siess, L., Dufour, E., & Forestini, M. 2000, *A&A*, **358**, 593
- Skumanich, A. 1972, *ApJ*, **171**, 565
- Soderlund, K. M., Heimpel, M. H., King, E. M., & Aurnou, J. M. 2013, *Icarus*, **224**, 97
- Stevenson, D. J. 1979, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **12**, 139
- Valsecchi, F., & Rasio, F. A. 2014a, *ApJ*, **787**, L9
- Valsecchi, F., & Rasio, F. A. 2014b, *ApJ*, **786**, 102
- Winn, J. N., Fabrycky, D., Albrecht, S., & Johnson, J. A. 2010, *ApJ*, **718**, L145
- Witte, M. G., & Savonije, G. J. 1999, *A&A*, **350**, 129
- Witte, M. G., & Savonije, G. J. 2002, *A&A*, **386**, 222
- Wu, Y. 2005, *ApJ*, **635**, 688
- Zahn, J. P. 1966, *Ann. Astrophys.*, **29**, 489
- Zahn, J.-P. 1975, *A&A*, **41**, 329
- Zahn, J.-P. 1977, *A&A*, **57**, 383
- Zahn, J.-P. 1989, *A&A*, **220**, 112
- Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, **265**, 115
- Zahn, J.-P., & Bouchet, L. 1989, *A&A*, **223**, 112

Cette thèse s'inscrit dans une démarche de modélisation *ab initio* de la réponse de marée des corps composant les systèmes planétaires, en particulier celle des planètes géantes gazeuses et des étoiles de faible masse. Pour améliorer notre compréhension des effets de marées dans ces objets, nous avons étudié de nouveaux processus physiques rarement pris en compte jusqu'ici.

Tout d'abord, dans le chapitre 4 où l'on a examiné le cas des planètes géantes gazeuses semblables à Jupiter et Saturne, l'utilisation d'un modèle de structure interne bi-couche simplifié nous a permis de mettre en évidence l'importance de la structure interne multicouche et différenciée de ces objets pour la dissipation de marée. En effet, chacun des mécanismes de dissipation considérés dans ce modèle (dissipation viscoélastique dans le cœur solide constitué de roches et de glaces et ondes inertielles dans l'enveloppe convective) sont capables de reproduire les contraintes observationnelles obtenues récemment sur la dissipation de marée dans Jupiter et Saturne (Lainey et al., 2009, 2012, 2015). Dans ce cadre, nous avons démontré que les moyennes (sur les fréquences de marée) des dissipations associées à ces deux mécanismes peuvent être du même ordre de grandeur (Guenel et al., 2014). Il est donc probable que ces deux processus soient en compétition et que l'un domine l'autre (et *vice versa*) à certaines fréquences de marée.

Ensuite, nous avons développé dans les chapitres 5 et 6 un nouveau modèle hydrodynamique qui montre l'impact de la rotation différentielle sur la dissipation de marée dans les corps fluides tels que les étoiles de faible masse. Nous avons commencé par étendre l'étude de Baruteau & Rieutord (2013) au cas des profils de rotation différentielle coniques et étudié les propriétés des ondes inertielles se propageant dans un tel écoulement moyen (Guenel et al., 2016). Nous avons ainsi mis en évidence la modification des modes propres inertiels (D) déjà présents dans le cas de la rotation solide, ainsi que l'apparition d'une nouvelle famille de modes propres inertiels (DT) ne se propageant que dans une partie de la zone convective, ces derniers étant relativement rares en comparaison des modes D. Puis, nous avons étudié la dynamique particulière qui se met en place au niveau des couches de corotation, d'abord dans le régime libre puis dans le régime forcé. Suivant la valeur de la viscosité, ces dernières peuvent alors conduire à une amplification de plusieurs ordres de grandeur de la dissipation de marée. Ces résultats sont d'une grande importance tant pour les intérieurs stellaires que planétaires qui sont le siège de rotation différentielle.

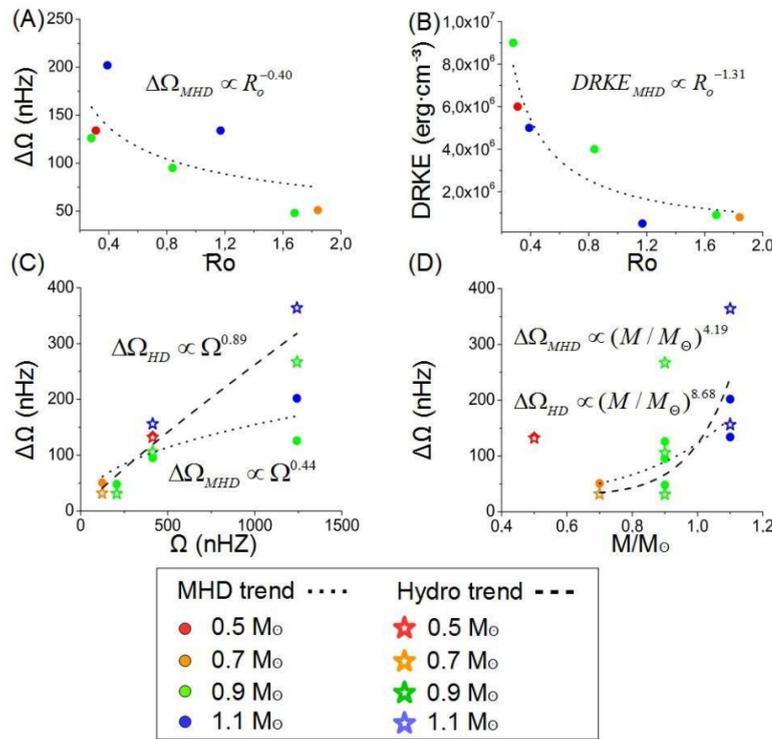


FIGURE 8.1: Relations entre masse, rotation, rotation différentielle et nombre de Rossby convectifs issues de simulations magnétohydrodynamiques (cercles pleins) ou hydrodynamiques (étoiles). (A) Valeur absolue de la rotation différentielle entre l'équateur et la latitude  $60^{\circ}$ . (B) Energie cinétique de la rotation différentielle en fonction du nombre de Rossby. (C) Rotation différentielle en fonction du taux de rotation. (D) Rotation différentielle en fonction de la masse. Crédit : [Varela et al. \(2016\)](#).

Enfin, dans le chapitre 7, nous avons montré ([Mathis et al., 2016](#)) comment la rotation peut modifier de plusieurs ordres de grandeur la viscosité effective appliquée par la convection turbulente sur les écoulements de marée.

De manière plus large, ces résultats montrent donc qu'il est important de considérer les ordres de grandeurs respectifs des différents processus de dissipation de marée dans n'importe quel corps composé d'une succession de couches fluides et solides (qu'il s'agisse de planètes géantes gazeuses ou glacées mais aussi des planètes telluriques et des étoiles de différentes masses le long de leur évolution) et donc la compétition possible entre ceux-ci. De même, les effets de la rotation différentielle et des écoulements moyens en général (par exemple la convection turbulente) sur les ondes de marées doivent être inclus dans les modèles de marée dynamique. Dans cette optique, les résultats du chapitre 6 et leurs perspectives semblent indiquer que les résonances de corotation sont capables sous certaines conditions d'extraire du moment cinétique de l'écoulement moyen de rotation différentielle pour le dissiper par la viscosité turbulente, ce qui pourrait mener à une modification conséquente du profil de rotation interne dans les régions convectives des étoiles subissant des effets de marée importants. Cette modification pourrait cependant rester temporaire, par

exemple dans le scénario où l'orbite du compagnon de marée finit par imposer une fréquence de marée telle qu'il n'y a plus de résonance de corotation : la convection turbulente pourrait alors rétablir le profil de rotation différentielle initial. Réciproquement, des modèles hydrodynamiques incluant des effets de rétroaction non-linéaires des ondes de marées sur les flots moyens ont été développés ces dernières années (e.g. [Barker & Ogilvie, 2010](#); [Favier et al., 2014](#)), démontrant par exemple le transfert de moment cinétique depuis les ondes inertielles (calculées en rotation solide) vers un écoulement de rotation différentielle ([Favier et al., 2014](#); [Tilgner, 2007](#); [Lacaze et al., 2005](#)). Un futur modèle d'ondes de marées plus réaliste devra donc prendre en compte les interactions non-linéaires entre ondes et écoulements moyens. De plus, on peut espérer obtenir dans le futur de meilleurs prescriptions à inclure dans les modèles de marée fluide pour la modélisation de l'interaction des ondes de marée avec les écoulements turbulents tels que la convection, par exemple grâce à des simulations numériques ([Ogilvie & Lesur, 2012](#); [Clark di Leoni et al., 2014](#)) ou des expériences de laboratoire ([Yarom & Sharon, 2014](#); [Campagne et al., 2015](#)).

Les travaux entrepris dans les chapitres 5 et 6 permettent aussi d'envisager la production de spectres de dissipation de marée par les ondes inertielles pour une grille de modèles stellaires réalistes (e.g. [Mathis, 2015](#)), en utilisant les relations existant entre les paramètres de structure (rapport d'aspect  $\eta$ ) et de rotation différentielle du modèle ( $\epsilon$ ) et les principaux paramètres stellaires comme la masse, l'âge ou encore la rotation, qui peuvent être fournies par l'utilisation combinée de modèles d'évolution stellaire et de simulations numériques de magnétohydrodynamique non-linéaires (e.g. [Varela et al., 2016](#), voir la figure 8.1), faisant ainsi le lien entre l'aspect purement hydrodynamique et l'évolution stellaire.

La figure 8.1 montre également que l'aspect hydrodynamique ne suffit pas pour comprendre les liens entre masse stellaire, rotation (différentielle) et convection dans les étoiles, car le champ magnétique les modifie et est modifié en retour via le mécanisme de dynamo stellaire dont les régions convectives sont le siège (e.g. [Charbonneau, 2010, 2014](#); [Brun et al., 2015](#)). La prise en compte du champ magnétique pour les effets de marées reste un domaine peu exploré ([Lacaze et al., 2006](#); [Cebon et al., 2012](#); [Barker & Lithwick, 2014](#)), y compris par ce travail, qu'il faudra inclure dans le futur afin d'étudier par exemple des ondes de marée magnéto-inertielles ou magnéto gravito-inertielles (dans les zones stablement stratifiées, voir [Mathis & de Brye, 2011](#); [Schmitt et al., 2013](#)).

Enfin, les modèles dynamiques de mécanique céleste pour les systèmes planétaires commencent à traiter simultanément plusieurs types d'interactions entre étoiles binaires ou entre étoiles et planètes (e.g. figure 8.2, [Penev et al., 2014](#); [Zhang & Penev, 2014](#); [Damiani & Lanza, 2015](#); [Bouvier & Cébron, 2015](#)) en utilisant des prescriptions de plus en plus réalistes pour les couples de marée, les vents stellaires ([Kawaler, 1988](#); [Matt et al., 2012, 2015](#); [Réville et al., 2015](#)) ou encore les couples magnétosphériques ([Strugarek et al., 2014, 2015](#)), tout en prenant en compte les évolutions structurelles et rotationnelles des corps, en particulier de l'étoile hôte. Ce travail s'inscrit donc également dans l'objectif d'amélioration de ces modèles d'évolution par la modélisation *ab initio* des phénomènes de marées

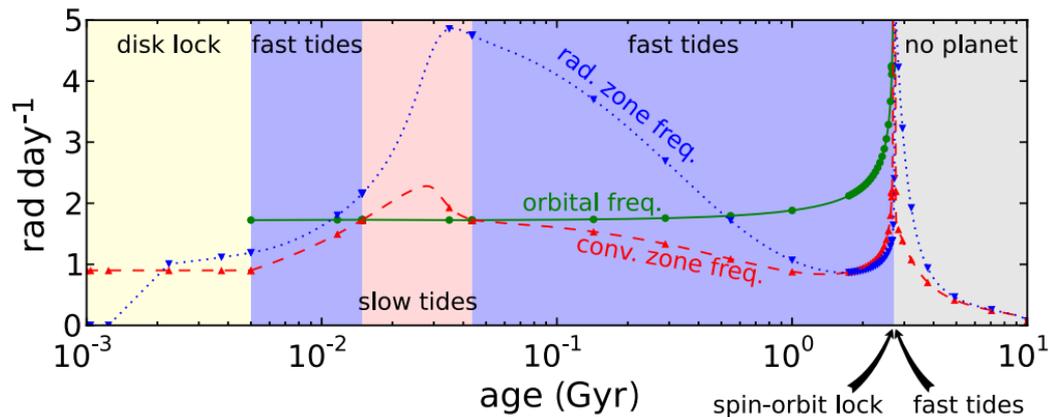


FIGURE 8.2: Evolution orbitale d'une planète de  $10 M_{\text{Jupiter}}$  autour d'une étoile de  $1 M_{\odot}$  au cours de son évolution. Les lignes et symboles illustrent l'évolution du moyen mouvement de la planète (en vert), la vitesse angulaire de l'enveloppe convective de l'étoile (en rouge) et de son cœur radiatif (en bleu). Le fond coloré indique les différents modes d'évolution. **De gauche à droite** : La zone convective est en corotation avec un disque protoplanétaire avec une vitesse angulaire constante ; la planète se forme dans une orbite plus serrée que le rayon de corotation de l'étoile ; la vitesse angulaire de l'étoile s'accélère par contraction gravitationnelle et dépasse le moyen mouvement de la planète ; le vent stellaire extrait du moment cinétique de la surface de l'étoile, qui ralentit à nouveau en dessous du moyen mouvement de la planète ; le transfert de moment cinétique orbital vers l'étoile synchronise la rotation de surface de l'étoile avec l'orbite ; la synchronisation cède, l'étoile tourne moins vite que le moyen mouvement et la planète « spirale » dans l'étoile en y déposant son moment cinétique orbital, ce qui accélère brusquement la rotation de l'étoile, qui diminue ensuite à nouveau par l'effet du vent stellaire. Crédit : [Penev et al. \(2014\)](#).

dans les étoiles et les planètes. Les résultats actuels et à venir de ces travaux sont et seront d'une grande importance dans le cadre de l'exploitation scientifique des missions spatiales en cours (K2, Cassini, Juno), mais aussi de la préparation et de l'exploitation des instruments au sol et des missions spatiales à venir (CHEOPS, TESS, PLATO, SPIROU, JUICE, etc.) dédié(e)s à la compréhension des systèmes étoile-planètes ou planète-satellites et des interactions qui y ont lieu. Ils ouvrent notamment des voies nouvelles pour l'interprétation et la prédiction de leur architecture orbitale, ainsi que de la dynamique rotationnelle des corps qui les composent.

## A.1 Algèbre relative aux harmoniques sphériques

### A.1.1 Harmoniques sphériques scalaires

#### A.1.1.1 Définitions et propriétés de base

Les harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  sont les fonctions propres de l'opérateur Laplacien sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , décrite par les coordonnées  $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ . Elles sont définies pour tout couple d'entiers  $(l, m)$  tels que  $l \geq 0$  et  $-l \leq m \leq l$ , par (Abramowitz & Stegun, 1964) :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \mathcal{N}_l^m P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{A.1})$$

où le coefficient de normalisation  $\mathcal{N}_l^m$  est

$$\mathcal{N}_l^m = (-1)^{\frac{(m+|m|)}{2}} \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.2})$$

et  $P_l^m$  est le polynôme associé de Legendre qui vérifie l'équation différentielle ordinaire (définie sur l'intervalle  $x \in [-1, 1]$ , avec  $0 \leq m \leq l$ ) (Abramowitz & Stegun, 1964) :

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_l^m}{dx^2}(x) - 2x \frac{d P_l^m}{dx}(x) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_l^m(x) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Dans le cas où  $m = 0$ ,  $P_l^0 = P_l$  est le polynôme de Legendre usuel, qui est relié aux polynômes associés de Legendre par la relation

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}. \quad (\text{A.4})$$

On peut étendre la définition de  $P_l^m$  pour les  $-l \leq m \leq 0$  à partir de l'équation précédente par la relation

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (\text{A.5})$$

Les harmoniques sphériques obéissent à la relation d'orthogonalité suivante sur la sphère unité :

$$\int_{\Omega} \left( Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) \right)^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}, \quad (\text{A.6})$$

où  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  est l'angle solide sur la sphère unité, et où l'harmonique sphérique conjuguée est donnée par :

$$\left( Y_l^m(\theta, \varphi) \right)^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \varphi). \quad (\text{A.7})$$

Enfin, soient  $\mathbf{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$  et  $\mathbf{r}_2 = (r_2, \theta_2, \varphi_2)$  deux vecteurs décrits par leurs coordonnées sphériques. L'angle  $\Theta$  formé par ces deux vecteurs vérifie

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (\text{A.8})$$

Le théorème d'addition des harmoniques sphériques permet d'écrire l'identité suivante :

$$P_l(\cos \Theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^m(\theta_2, \varphi_2)^*, \quad l \geq 0. \quad (\text{A.9})$$

#### A.1.1.2 Cas des harmoniques sphériques axisymétriques

Dans ce cas,  $m = 0$ , et on a :

$$Y_l^0(\theta, \varphi) = \mathcal{N}_l^0 P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^0(\theta, \varphi) = \mathcal{N}_l^0 \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0, \\ -\mathcal{N}_l^0 P_l^1(\cos \theta) & \text{si } l > 0. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

#### A.1.1.3 Relations de récurrence - Relations différentielles linéaires

Nous rappelons que les harmoniques sphériques sont solutions de l'équation aux dérivées partielles sur la sphère unité :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y_l^m(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{A.12})$$

Nous définissons les coefficients de couplage suivants (qui dépendent tous de  $m$ ) :

$$\alpha_{l-1}^l = \alpha_l^{l-1} = \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}}, \quad (\text{A.13})$$

$$\beta_{l-1}^l = (l-1)\alpha_{l-1}^l \quad \text{et} \quad \beta_l^{l-1} = -(l+1)\alpha_{l-1}^l, \quad (\text{A.14})$$

$$\beta_{l+1}^l = -(l+2)\alpha_{l+1}^l \quad \text{et} \quad \beta_l^{l+1} = l\alpha_{l+1}^l, \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma_{l-1}^l = \frac{l-1}{l}\alpha_{l-1}^l \quad \text{et} \quad \gamma_l^{l-1} = \frac{l+1}{l}\alpha_{l-1}^l, \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma_{l+1}^l = \frac{l+2}{l+1}\alpha_{l+1}^l \quad \text{et} \quad \gamma_l^{l+1} = \frac{l}{l+1}\alpha_{l+1}^l. \quad (\text{A.17})$$

Les harmoniques sphériques vérifient les relations de récurrence suivantes, déduites de celles vérifiées par les polynômes associés de Legendre :

$$\cos \theta Y_l^m = \alpha_l^{l-1} Y_{l-1}^m + \alpha_l^{l+1} Y_{l+1}^m, \quad (\text{A.18})$$

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m = \beta_l^{l-1} Y_{l-1}^m + \beta_l^{l+1} Y_{l+1}^m. \quad (\text{A.19})$$

#### A.1.1.4 Décomposition d'une fonction scalaire sur les harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques forment une famille complète de fonctions, et la relation d'orthogonalité (A.6) vérifiée par les harmoniques sphériques assure que toute fonction scalaire  $f(\theta, \varphi)$  suffisamment régulière peut être développée de manière unique sur les harmoniques sphériques :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_m^l Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{A.20})$$

où

$$f_m^l = \int_{\Omega} f(\theta, \varphi) (Y_l^m(\theta, \varphi))^* d\Omega. \quad (\text{A.21})$$

### A.1.2 Harmoniques sphériques vectorielles

#### A.1.2.1 Définitions et propriétés de base

Suivant [Rieutord \(1987\)](#), les harmoniques sphériques vectorielles  $\mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi)$ ,  $\mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi)$ ,  $\mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi)$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) &= Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) &= \nabla_S Y_l^m(\theta, \varphi), \\ \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) &= \nabla_S \times \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

avec le gradient horizontal :

$$\nabla_S = \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\text{A.23})$$

où  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_\varphi$  sont les vecteurs unitaires dans les directions  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  respectivement. Ces fonctions vectorielles satisfont les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}_{l_1}^{m_1} \cdot \mathbf{S}_{l_2}^{m_2} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{R}_{l_1}^{m_1} \cdot \mathbf{T}_{l_2}^{m_2} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S}_{l_1}^{m_1} \cdot \mathbf{T}_{l_2}^{m_2} d\Omega = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{R}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{R}_{l_2}^{m_2})^* d\Omega &= \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}, \quad \text{et} \\ \int_{\Omega} \mathbf{S}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{S}_{l_2}^{m_2})^* d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{T}_{l_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{T}_{l_2}^{m_2})^* d\Omega = l_1(l_1 + 1) \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

### A.1.2.2 Relations de récurrence - Relations différentielles linéaires

Les harmoniques sphériques vectorielles définies par les équations (A.22) vérifient également des relations de récurrence linéaires :

$$\cos \theta \mathbf{S}_l^m = \gamma_l^{l-1} \mathbf{S}_{l-1}^m + \gamma_l^{l+1} \mathbf{S}_{l+1}^m - \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{T}_l^m, \quad (\text{A.26})$$

$$\cos \theta \mathbf{T}_l^m = \gamma_l^{l-1} \mathbf{T}_{l-1}^m + \gamma_l^{l+1} \mathbf{T}_{l+1}^m + \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{S}_l^m, \quad (\text{A.27})$$

$$\sin \theta Y_l^m \mathbf{e}_\theta = \frac{\beta_{l-1}^l}{l(l-1)} \mathbf{S}_{l-1}^m + \frac{\beta_{l+1}^l}{(l+1)(l+2)} \mathbf{S}_{l+1}^m - \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{T}_l^m, \quad (\text{A.28})$$

$$\sin \theta Y_l^m \mathbf{e}_\varphi = -\frac{\beta_{l-1}^l}{l(l-1)} \mathbf{T}_{l-1}^m - \frac{\beta_{l+1}^l}{(l+1)(l+2)} \mathbf{T}_{l+1}^m - \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{T}_l^m. \quad (\text{A.29})$$

### A.1.2.3 Décomposition d'un champ de vecteur sur les harmoniques sphériques vectorielles

Les harmoniques sphériques vectorielles forment également une famille complète, et les relations d'orthogonalité (A.24) et (A.25) assurent que tout champ de vecteurs  $\mathbf{u}(r, \theta, \varphi)$  suffisamment régulier peut être développé de manière unique sur les harmoniques sphériques vectorielles sous la forme :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ u_m^l(r) \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) + v_m^l(r) \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + w_m^l(r) \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}, \quad (\text{A.30})$$

où

$$\begin{aligned} u_m^l &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi))^* d\Omega, \\ v_m^l &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi))^* d\Omega, \\ w_m^l &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi))^* d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Notons que  $\mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi)$  et  $\mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi)$  représentent la composante poloïdale, et  $\mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi)$  la composante toroïdale du champ de vecteurs  $\mathbf{u}$ . Cette décomposition unique du champ de vecteur  $\mathbf{u}$  permet de séparer explicitement les variables angulaires  $\theta$  et  $\varphi$  dans les équations aux dérivées partielles vectorielles décrivant le problème dont  $\mathbf{u}$  est solution. Ainsi, dans le cas de champs de vecteurs dont la dépendance temporelle est harmonique ( $\propto e^{i\omega t}$ ), nous réduisons le problème à la résolution d'équations différentielles ordinaires sur les fonctions  $u_m^l, v_m^l$  et  $w_m^l$  qui ne dépendent que de la variable radiale  $r$ .

Le champ de vecteur  $\mathbf{u}$  peut à nouveau être exprimé sur la base vectorielle classique  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  des coordonnées sphériques à l'aide des harmoniques sphériques scalaires :

$$\mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ u_m^l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r + \left[ v_m^l(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) + w_m^l(r) \frac{im}{\sin \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \right] \mathbf{e}_\theta + \left[ v_m^l(r) \frac{im}{\sin \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) - w_m^l(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \varphi) \right] \mathbf{e}_\varphi \right\}. \quad (\text{A.32})$$

### A.1.3 Formulaire

#### A.1.3.1 Développement des opérateurs différentiels linéaires usuels

##### Gradient :

Le gradient d'une fonction scalaire  $f(r, \theta, \varphi)$ , développée sur les harmoniques sphériques comme dans (A.20), s'écrit :

$$\nabla f(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{\partial}{\partial r} f_m^l \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) + \frac{f_m^l}{r} \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) \right\}. \quad (\text{A.33})$$

##### Divergence :

La divergence d'un champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  décomposé comme dans (A.30) est donnée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_m^l) - l(l+1) \frac{v_m^l}{r} \right] Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{A.34})$$

où l'on remarque que si  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle, alors il existe une relation entre  $u_m^l$  et  $v_m^l$  :

$$v_m^l = \frac{1}{l(l+1)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_m^l). \quad (\text{A.35})$$

##### Laplacien d'une fonction scalaire :

En utilisant la propriété  $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$ , on peut dériver, à partir des expressions pour le gradient d'une quantité scalaire et pour la divergence d'un champ de vecteurs, celle pour le

laplacien d'une fonction scalaire :

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_m^l) - l(l+1) \frac{f_m^l}{r^2} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Delta_l f_m^l Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{A.36})$$

où  $\Delta_l$  est l'opérateur laplacien de degré  $l$  :

$$\Delta_l = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) - \frac{l(l+1)}{r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (\text{A.37})$$

**Rotationnel :**

De même, le rotationnel d'un champ de vecteurs s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[ l(l+1) \frac{w_m^l}{r} \right] \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_m^l) \right] \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + \left[ \frac{u_m^l}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_m^l) \right] \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}. \quad (\text{A.38}) \end{aligned}$$

A l'aide de ce résultat, on en déduit l'expression du laplacien d'un champ de vecteurs. D'abord, on a :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[ \frac{l(l+1)}{r} \left( \frac{u_m^l}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_m^l) \right) \right] \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u_m^l - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r v_m^l) \right] \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + \left[ -\Delta_l w_m^l \right] \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\} \quad (\text{A.39}) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[ \Delta_l u_m^l - \frac{2}{r^2} (u_m^l - l(l+1) v_m^l) \right] \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) \right. \\ \left. + \left[ \Delta_l v_m^l + 2 \frac{u_m^l}{r^2} \right] \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + \left[ \Delta_l w_m^l \right] \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}, \quad (\text{A.40}) \end{aligned}$$

qui devient dans le cas où  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle (cf. (A.35)) :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[ \frac{1}{r} \Delta_l (r u_m^l) \right] \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\Delta_l (r u_m^l)}{l(l+1)} \right) \right] \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) + \left[ \Delta_l w_m^l \right] \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}. \quad (\text{A.41}) \end{aligned}$$

### A.1.3.2 Relations utiles pour la décomposition sur les harmoniques sphériques vectorielles des équations (5.5) et (6.50) du mouvement

Pour le terme d'accélération de Coriolis, il est utile d'avoir l'expression du produit vectoriel entre le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_z$ , qui dirige l'axe vertical du système de coordonnées sphériques et choisi suivant l'axe de rotation, et un champ de vecteurs quelconque  $\mathbf{u}$ . Celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[ \beta_{l-1}^l w_m^{l-1} + \beta_{l+1}^l w_m^{l+1} - imv_m^l \right] \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) \right. \\ & + \left[ \gamma_{l-1}^l w_m^{l-1} + \gamma_{l+1}^l w_m^{l+1} - \frac{im}{l(l+1)}(u_m^l + v_m^l) \right] \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) \\ & \left. + \left[ -\gamma_{l-1}^l v_m^{l-1} - \gamma_{l+1}^l v_m^{l+1} - \frac{imw_m^l + \beta_{l-1}^{l-1} u_m^{l-1} + \beta_{l+1}^{l+1} u_m^{l+1}}{l(l+1)} \right] \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}. \quad (\text{A.42}) \end{aligned}$$

On note ici la présence d'un couplage entre les fonctions  $u_m^l$ ,  $v_m^l$  et  $w_m^l$  pour différentes valeurs de  $l$ , à savoir de  $l-1$  à  $l+1$ . La convention de sommation sur les indices  $l$  et  $m$  doit donc être vue comme ignorant les termes du type  $X_m^{l'}$  lorsque  $l' < 0$ , où  $X = \{u, v, w\}$ .

De la même manière, l'action du profil de rotation différentielle conique utilisé dans les chapitres 5 et 6 fait souvent appel à l'expression de  $\sin^2 \theta \mathbf{u}$ , qui fait apparaître de nouveaux couplages (jusqu'à  $l \pm 2$ ) que nous détaillons ici :

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta \mathbf{u} = & (1 - \cos^2 \theta) \mathbf{u} \\ = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \left[ 1 - \alpha_{l-2}^{l-1} \alpha_{l-1}^l u_m^{l-2} - (\alpha_{l-1}^{l-2} + \alpha_{l+1}^{l-2}) u_m^l - \alpha_{l+2}^{l+1} \alpha_{l+1}^l u_m^{l+2} \right] \mathbf{R}_l^m(\theta, \varphi) \right. \\ & + \left[ 1 - \gamma_{l-2}^{l-1} \gamma_{l-1}^l v_m^{l-2} - \left( \gamma_{l-1}^l \gamma_{l-1}^{l-1} + \gamma_{l+1}^l \gamma_{l+1}^{l+1} + \frac{m^2}{l^2(l+1)^2} \right) v_m^l - \gamma_{l+2}^{l+1} \gamma_{l+1}^l v_m^{l+2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2im\gamma_{l-1}^l}{(l-1)(l+1)} w_m^{l-1} - \frac{2im\gamma_{l+1}^l}{l(l+2)} w_m^{l+1} \right] \mathbf{S}_l^m(\theta, \varphi) \\ & \left. + \left[ 1 - \gamma_{l-2}^{l-1} \gamma_{l-1}^l w_m^{l-2} - \left( \gamma_{l-1}^l \gamma_{l-1}^{l-1} + \gamma_{l+1}^l \gamma_{l+1}^{l+1} + \frac{m^2}{l^2(l+1)^2} \right) w_m^l - \gamma_{l+2}^{l+1} \gamma_{l+1}^l w_m^{l+2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2im\gamma_{l-1}^l}{(l-1)(l+1)} v_m^{l-1} + \frac{2im\gamma_{l+1}^l}{l(l+2)} v_m^{l+1} \right] \mathbf{T}_l^m(\theta, \varphi) \right\}. \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

## A.2 Polynômes de Tchebychev de première espèce

Si les harmoniques sphériques présentées ci-dessus nous permettent de traiter les dépendances suivant  $\theta$  et  $\varphi$ , les polynômes de Tchebychev, dont nous allons présenter ici les propriétés principales, sont d'une grande importance pour les méthodes numériques spectrales pour le traitement de la direction radiale (Rieutord & Valdettaro, 1997).

### A.2.1 Définition et propriétés de base

Les polynômes de Tchebychev de première espèce  $T_n(x)$  sont définis pour tout  $x \in [-1, 1]$  par :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{où } n \geq 0. \quad (\text{A.44})$$

Ils vérifient par conséquent les propriétés suivantes pour tout  $n \geq 0$ ,  $x \in [-1, 1]$  et  $\theta \in [0, \pi]$  :

$$-1 \leq T_n(x) \leq 1, \quad (\text{A.45})$$

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad (\text{A.46})$$

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n. \quad (\text{A.47})$$

De plus, la trigonométrie nous permet de démontrer qu'ils vérifient la relation de récurrence suivante :

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \quad (\text{A.48})$$

si bien que le polynôme  $T_n$  est de degré  $n$ .

De plus, les racines  $\tilde{x}_i$  du polynôme de Tchebychev  $T_n$ , aussi appelés points de Gauss, sont données par :

$$\tilde{x}_i = \cos\left(\frac{(i + 1/2)\pi}{n}\right), \quad \text{où } i = \{0, \dots, n-1\}. \quad (\text{A.49})$$

Par ailleurs, le polynôme  $T_n$  atteint ses extrema (qui valent  $\pm 1$ ) aux points  $x_i$ , aussi appelés points de Gauss-Lobatto, et donnés par :

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad \text{où } i = \{0, \dots, n\}. \quad (\text{A.50})$$

Ces polynômes forment une base pour les fonctions définies sur l'intervalle  $x \in [-1, 1]$  pour la fonction de pondération  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ , car ils vérifient la relation d'orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)w(x)dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \pi/2 & \text{si } n = m \neq 0, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

si bien qu'il est possible de décomposer de manière unique toute fonction  $f$  régulière de l'intervalle  $x \in [-1, 1]$  sur cette base :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}_n T_n(x), \quad (\text{A.52})$$

où

$$\hat{f}_n = \frac{2}{\pi c_n} \int_{-1}^1 f(x)T_n(x)w(x)dx \quad \text{avec } \begin{cases} c_n = 2 & \text{si } n = 0, \\ c_n = 1 & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

On choisit de tronquer ce développement à un degré maximal  $N$  pour obtenir une approximation de la fonction  $f$  :

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N \hat{f}_n T_n(x). \quad (\text{A.54})$$

Considérant le développement tronqué (A.54), on veut calculer les coefficients  $\hat{f}_n$  en utilisant une méthode numérique de collocation (ou d'interpolation). Celle-ci consiste à imposer que le résidu  $R_N = f - f_N$  s'annule sur un sous-ensemble discret de  $N + 1$  points de l'intervalle  $x \in [-1, 1]$  : les points de collocation. Nous choisissons dans ce travail les points de Gauss-Lobatto  $x_i$  définis par (A.50) qui constituent un choix judicieux pour les méthodes de collocation.

Pour plus de détails sur les méthodes numériques spectrales et méthodes de collocations associées à ces décompositions, nous invitons le lecteur à consulter des ouvrages dédiés, par exemple [Canuto et al. \(2007\)](#).



## BIBLIOGRAPHIE

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1964, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, ninth dover printing, tenth gpo printing edn. (New York : Dover)
- Acheson, D. J. 1972, *Journal of Fluid Mechanics*, 53, 401
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, *Asteroseismology*
- Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., et al. 2012, *ApJ*, 757, 18
- Alvan, L., Brun, A. S., & Mathis, S. 2014, *A&A*, 565, A42
- Alvan, L., Mathis, S., & Decressin, T. 2013, *A&A*, 553, A86
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F., & Bouvier, J. 2016, *A&A*, 587, A105
- Atkinson, D. H., Pollack, J. B., & Seiff, A. 1996, *Science*, 272, 842
- Auclair-Desrotour, P., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2014, *A&A*, 561, L7
- Auclair Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, *A&A*, 581, A118
- Augustson, K. C., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2012, *ApJ*, 756, 169
- Babcock, H. W. 1961, *ApJ*, 133, 572
- Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., et al. 2006, in *ESA Special Publication*, Vol. 1306, *The CoRoT Mission Pre-Launch Status - Stellar Seismology and Planet Finding*, ed. M. Fridlund, A. Baglin, J. Lochard, & L. Conroy, 33
- Bakos, G. Á., Noyes, R. W., Kovács, G., et al. 2007, *ApJ*, 656, 552
- Ballot, J., Brun, A. S., & Turck-Chièze, S. 2007, *ApJ*, 669, 1190
- Bally, J., Testi, L., Sargent, A., & Carlstrom, J. 1998, *AJ*, 116, 854
- Barker, A. J. 2011, *MNRAS*, 414, 1365
- Barker, A. J., Dempsey, A. M., & Lithwick, Y. 2014, *ApJ*, 791, 13
- Barker, A. J. & Lithwick, Y. 2014, *MNRAS*, 437, 305
- Barker, A. J. & Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, 395, 2268

- Barker, A. J. & Ogilvie, G. I. 2010, *MNRAS*, 404, 1849
- Barnes, J. R., Collier Cameron, A., Donati, J.-F., et al. 2005, *MNRAS*, 357, L1
- Barnes, S. A. 2003, *ApJ*, 586, 464
- Barnes, S. A. & Kim, Y.-C. 2010, *ApJ*, 721, 675
- Baruteau, C., Bai, X., Mordasini, C., & Mollière, P. 2016, *Space Sci. Rev.*[arXiv:1604.07558]
- Baruteau, C., Crida, A., Paardekooper, S.-J., et al. 2014, *Protostars and Planets VI*, 667
- Baruteau, C. & Rieutord, M. 2013, *Journal of Fluid Mechanics*, 719, 47
- Beck, P. G., Montalban, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, 481, 55
- Bedding, T. R., Mosser, B., Huber, D., et al. 2011, *Nature*, 471, 608
- Bolmont, E. & Mathis, S. 2016, *ArXiv e-prints* [arXiv:1603.06268]
- Bolmont, E., Raymond, S. N., Leconte, J., Hersant, F., & Correia, A. C. M. 2015, *A&A*, 583, A116
- Bolmont, E., Raymond, S. N., Leconte, J., & Matt, S. P. 2012, *A&A*, 544, A124
- Booker, J. R. & Bretherton, F. P. 1967, *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 513
- Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, *Science*, 327, 977
- Boss, A. P. 1997, *Science*, 276, 1836
- Boss, A. P. 1998, *ApJ*, 503, 923
- Boss, A. P. 2000, *ApJ*, 536, L101
- Boussinesq, J. 1877, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Vol. 23 (Mem. Pr's. Acad. Sci., Paris), 46
- Bouvier, J. 2013, in *EAS Publications Series*, Vol. 62, *EAS Publications Series*, ed. P. Hennebelle & C. Charbonnel, 143–168
- Bouvier, J. & Cébron, D. 2015, *MNRAS*, 453, 3720
- Braviner, H. J. & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, 441, 2321
- Braviner, H. J. & Ogilvie, G. I. 2015, *MNRAS*, 447, 1141
- Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2008, *ApJ*, 689, 1354
- Brun, A. S. 2014, in *IAU Symposium*, Vol. 302, *Magnetic Fields throughout Stellar Evolution*, ed. P. Petit, M. Jardine, & H. C. Spruit, 114–125

- Brun, A. S., García, R. A., Houdek, G., Nandy, D., & Pinsonneault, M. 2015, *Space Sci. Rev.*, 196, 303
- Brun, A. S. & Toomre, J. 2002, *ApJ*, 570, 865
- Brun, A. S. & Zahn, J.-P. 2006, *A&A*, 457, 665
- Bryan, G. H. 1889, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 180, 187
- Bryden, G., Chen, X., Lin, D. N. C., Nelson, R. P., & Papaloizou, J. C. B. 1999, *ApJ*, 514, 344
- Cameron, A. G. W. 1978, *Moon and Planets*, 18, 5
- Campagne, A., Gallet, B., Moisy, F., & Cortet, P.-P. 2015, *Phys. Rev. E*, 91, 043016
- Canuto, C., Hussaini, M., & [et al.], A. Q. 2007, *Spectral methods : evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*, Scientific computation (Berlin : Springer)
- Cartan, E. 1922, *Bull. Sci. Math.*, 46, 317
- Cassen, P. & Moosman, A. 1981, *Icarus*, 48, 353
- Cébron, D., Bars, M. L., Gal, P. L., et al. 2013, *Icarus*, 226, 1642
- Cebon, D., Le Bars, M., Moutou, C., & Le Gal, P. 2012, *A&A*, 539, A78
- Ceillier, T., van Saders, J., García, R. A., et al. 2016, *MNRAS*, 456, 119
- Chandrasekhar, S. 1953, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 217, 306
- Chapman, S. & Lindzen, R. 1970, *Atmospheric tides. Thermal and gravitational*
- Charbonneau, P. 2010, *Living Reviews in Solar Physics*, 7
- Charbonneau, P. 2014, *ARA&A*, 52, 251
- Chatterjee, S., Ford, E. B., Matsumura, S., & Rasio, F. A. 2008, *ApJ*, 686, 580
- Christensen-Dalsgaard, J. 2002, *Reviews of Modern Physics*, 74, 1073
- Christensen-Dalsgaard, J., Dappen, W., Ajukov, S. V., et al. 1996, *Science*, 272, 1286
- Clark di Leoni, P., Cobelli, P. J., Mininni, P. D., Dmitruk, P., & Matthaeus, W. H. 2014, *Physics of Fluids*, 26, 035106
- Cohen, O. & Drake, J. J. 2014, *ApJ*, 783, 55
- Cohen, O., Drake, J. J., Kashyap, V. L., et al. 2009, *ApJ*, 704, L85
- Collier Cameron, A. 2007, *Astronomische Nachrichten*, 328, 1030
- Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2003, *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 108, 9
- Couvidat, S., García, R. A., Turck-Chièze, S., et al. 2003, *ApJ*, 597, L77

- Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, 101, 367
- Damiani, C. & Lanza, A. F. 2015, *A&A*, 574, A39
- Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, *ApJ*, 756, 19
- Dermott, S. F. 1979, *Icarus*, 37, 310
- Dintrans, B., Rieutord, M., & Valdettaro, L. 1999, *Journal of Fluid Mechanics*, 398, 271
- Donahue, R. A., Saar, S. H., & Baliunas, S. L. 1996, *ApJ*, 466, 384
- Donati, J.-F. & Landstreet, J. D. 2009, *ARA&A*, 47, 333
- Dziembowski, W. A. 1971, *Acta Astron.*, 21, 289
- Dziembowski, W. A., Gough, D. O., Houdek, G., & Sienkiewicz, R. 2001, *MNRAS*, 328, 601
- Efroimsky, M. 2012, *A&A*, 544, A133
- Efroimsky, M. & Lainey, V. 2007, *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 112, E12003
- Egbert, G. D. & Ray, R. D. 2003, *Geophys. Res. Lett.*, 30, 1907
- Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Steffen, J. H., et al. 2012, *ApJ*, 750, 114
- Favier, B., Barker, A. J., Baruteau, C., & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, 439, 845
- Ferraz-Mello, S., Tadeu dos Santos, M., Folonier, H., et al. 2015, *ApJ*, 807, 78
- Ferreira, J. 2013, in *EAS Publications Series*, Vol. 62, *EAS Publications Series*, ed. P. Hennebelle & C. Charbonnel, 169–225
- Fuller, J. 2014, *Icarus*, 242, 283
- Fuller, J., Luan, J., & Quataert, E. 2016, *MNRAS*, 458, 3867
- Gallet, F. & Bouvier, J. 2013, *A&A*, 556, A36
- Gallet, F. & Bouvier, J. 2015, *A&A*, 577, A98
- García, R. A., Corbard, T., Chaplin, W. J., et al. 2004, *Sol. Phys.*, 220, 269
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591
- Gastine, T., Yadav, R. K., Morin, J., Reiners, A., & Wicht, J. 2014, *MNRAS*, 438, L76
- Gaulme, P., Schmider, F.-X., Gay, J., Guillot, T., & Jacob, C. 2011, *A&A*, 531, A104
- Gavrilov, S. V. & Zharkov, V. N. 1977, *Icarus*, 32, 443
- Giuricin, G., Mardirossian, F., & Mezzetti, M. 1984a, *A&A*, 134, 365
- Giuricin, G., Mardirossian, F., & Mezzetti, M. 1984b, *A&A*, 135, 393

- Giuricin, G., Mardirossian, F., & Mezzetti, M. 1984c, *A&A*, 141, 227
- Gizon, L., Ballot, J., Michel, E., et al. 2013, *Proceedings of the National Academy of Science*, 110, 13267
- Goldreich, P. & Keeley, D. A. 1977, *ApJ*, 211, 934
- Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1977, *Icarus*, 30, 301
- Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1989, *ApJ*, 342, 1079
- Goldreich, P. & Soter, S. 1966, *Icarus*, 5, 375
- González-Cataldo, F., Wilson, H. F., & Militzer, B. 2014, *ApJ*, 787, 79
- Goodman, J. & Dickson, E. S. 1998, *ApJ*, 507, 938
- Goodman, J. & Lackner, C. 2009, *ApJ*, 696, 2054
- Goodman, J. & Oh, S. P. 1997, *ApJ*, 486, 403
- Greenberg, R. 2009, *ApJ*, 698, L42
- Greenspan, H. P. 1968, *The theory of rotating fluids*, by H. P. Greenspan (Cambridge U.P London), xii, 327 p.
- Grimshaw, R. 1979, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 14, 303
- Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016, *A&A*, 589, A22
- Guenel, M., Mathis, S., & Remus, F. 2014, *A&A*, 566, L9
- Guerrero, G., Smolarkiewicz, P. K., Kosovichev, A. G., & Mansour, N. N. 2013, *ApJ*, 779, 176
- Guillot, T. 1999, *Planet. Space Sci.*, 47, 1183
- Guillot, T. 2005, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 33, 493
- Guillot, T., Lin, D. N. C., Morel, P., Havel, M., & Parmentier, V. 2014, in *EAS Publications Series*, Vol. 65, *EAS Publications Series*, 327–336
- Hansen, B. M. S. 2010, *ApJ*, 723, 285
- Hayashi, C. 1981, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70, 35
- Helled, R. & Guillot, T. 2013, *ApJ*, 767, 113
- Heller, R. & Armstrong, J. 2014, *Astrobiology*, 14, 50
- Henning, W. G., O'Connell, R. J., & Sasselov, D. D. 2009, *ApJ*, 707, 1000
- Hollerbach, R. & Kerswell, R. R. 1995, *Journal of Fluid Mechanics*, 298, 327

- Hubbard, W. B., Dougherty, M. K., Gautier, D., & Jacobson, R. 2009, *The Interior of Saturn*, ed. M. K. Dougherty, L. W. Esposito, & S. M. Krimigis, 75
- Husnoo, N., Pont, F., Mazeh, T., et al. 2012, *MNRAS*, 422, 3151
- Hut, P. 1980, *Astronomy & Astrophysics*, 92, 167
- Hut, P. 1981, *A&A*, 99, 126
- Inaba, S., Wetherill, G. W., & Ikoma, M. 2003, *Icarus*, 166, 46
- Jackson, B., Greenberg, R., & Barnes, R. 2008, *ApJ*, 678, 1396
- Jeffreys, H. 1961, *MNRAS*, 122, 339
- Jontof-Hutter, D., Lissauer, J. J., Rowe, J. F., & Fabrycky, D. C. 2014, *ApJ*, 785, 15
- Jouve, L. & Ogilvie, G. I. 2014, *Journal of Fluid Mechanics*, 745, 223
- Julien, K., Knobloch, E., Rubio, A. M., & Vasil, G. M. 2012, *Physical Review Letters*, 109, 254503
- Käpylä, P. J., Käpylä, M. J., & Brandenburg, A. 2014, *A&A*, 570, A43
- Kaula, W. M. 1962, *AJ*, 67, 300
- Kaula, W. M. 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 661
- Kawaler, S. D. 1988, *ApJ*, 333, 236
- Kerswell, R. R. 1995, *Journal of Fluid Mechanics*, 298, 311
- Kerswell, R. R. 2002, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34, 83
- Kippenhahn, R. & Weigert, A. 1990, *Stellar Structure and Evolution*, 192
- Kokubo, E. & Ida, S. 2002, *ApJ*, 581, 666
- Kuiper, G. P. 1951, *Proceedings of the National Academy of Science*, 37, 1
- Lacaze, L., Herreman, W., Le Bars, M., Le Dizès, S., & Le Gal, P. 2006, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 100, 299
- Lacaze, L., Le Gal, P., & Le Dizès, S. 2004, *Journal of Fluid Mechanics*, 505, 1
- Lacaze, L., Le Gal, P., & Le Dizès, S. 2005, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 151, 194
- Lai, D. 2012, *MNRAS*, 423, 486
- Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, *Nature*, 459, 957
- Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2015, *ArXiv e-prints* [arXiv:1510.05870]

- Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, *ApJ*, 752, 14
- Lamers, H. J. G. L. M. & Cassinelli, J. P. 1999, *Introduction to Stellar Winds*, 452
- Laskar, J., Boué, G., & Correia, A. C. M. 2012, *A&A*, 538, A105
- Laughlin, G. & Bodenheimer, P. 1994, *ApJ*, 436, 335
- Le Bars, M., Cébron, D., & Le Gal, P. 2015, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47, 163
- Le Bars, M., Lacaze, L., Le Dizès, S., Le Gal, P., & Rieutord, M. 2010, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 178, 48
- Le Bars, M., Le Dizès, S., & Le Gal, P. 2007, *Journal of Fluid Mechanics*, 585, 323
- Leighton, R. B. 1969, *ApJ*, 156, 1
- Lindzen, R. S. & Barker, J. W. 1985, *Journal of Fluid Mechanics*, 151, 189
- Lissauer, J. J., Dawson, R. I., & Tremaine, S. 2014, *Nature*, 513, 336
- Love, A. E. H. 1911, *Some Problems of Geodynamics*
- Maas, L. R. M. & Lam, F.-P. A. 1995, *Journal of Fluid Mechanics*, 300, 1
- MacDonald, G. J. F. 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 467
- Maeder, A. 2009, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars*
- Marcy, G. W., Isaacson, H., Howard, A. W., et al. 2014, *ApJS*, 210, 20
- Martin, R. G. & Livio, M. 2012, *MNRAS*, 425, L6
- Mathis, S. 2013, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 865, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, ed. M. Goupil, K. Belkacem, C. Neiner, F. Lignières, & J. J. Green, 23
- Mathis, S. 2015, *A&A*, 580, L3
- Mathis, S., Auclair-Desrotour, P., Guenel, M., Gallet, F., & Le Poncin-Lafitte, C. 2016, *A&A*, 592, A33
- Mathis, S. & de Brye, N. 2011, *A&A*, 526, A65
- Mathis, S. & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, *A&A*, 497, 889
- Mathis, S. & Remus, F. 2013, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 857, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, ed. J.-P. Rozelot & C. . Neiner, 111–147
- Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, *ApJ*, 799, L23
- Matt, S. P., Do Cao, O., Brown, B. P., & Brun, A. S. 2011, *Astronomische Nachrichten*, 332, 897

- Matt, S. P., MacGregor, K. B., Pinsonneault, M. H., & Greene, T. P. 2012, *ApJ*, 754, L26
- Mayer, L., Quinn, T., Wadsley, J., & Stadel, J. 2002, *Science*, 298, 1756
- Mayer, L., Quinn, T., Wadsley, J., & Stadel, J. 2004, *ApJ*, 609, 1045
- Mayor, M., Pepe, F., Queloz, D., et al. 2003, *The Messenger*, 114, 20
- Mayor, M. & Queloz, D. 1995, *Nature*, 378, 355
- Mazeh, T., Perets, H. B., McQuillan, A., & Goldstein, E. S. 2015, *ApJ*, 801, 3
- Mazevet, S., Tsuchiya, T., Taniuchi, T., Benuzzi-Mounaix, A., & Guyot, F. 2015, *Phys. Rev. B*, 92, 014105
- Meibom, S. & Mathieu, R. D. 2005, *ApJ*, 620, 970
- Meibom, S., Mathieu, R. D., & Stassun, K. G. 2006, *ApJ*, 653, 621
- Mestel, L. 1968, *MNRAS*, 138, 359
- Mestel, L. 1999, *Stellar magnetism*
- Mignard, F. 1979, *Moon and Planets*, 20, 301
- Mignard, F. 1980, *Moon and Planets*, 23, 185
- Militzer, B. & Hubbard, W. B. 2009, *Ap&SS*, 322, 129
- Militzer, B., Hubbard, W. B., Vorberger, J., Tamblyn, I., & Bonev, S. A. 2008, *ApJ*, 688, L45
- Mirouh, G. M., Baruteau, C., Rieutord, M., & Ballot, J. 2016, *Journal of Fluid Mechanics*, 800, 213
- Mizuno, H. 1980, *Progress of Theoretical Physics*, 64, 544
- Morize, C., Le Bars, M., Le Gal, P., & Tilgner, A. 2010, *Physical Review Letters*, 104, 214501
- Naoz, S., Farr, W. M., Lithwick, Y., Rasio, F. A., & Teyssandier, J. 2011, *Nature*, 473, 187
- Nettelmann, N. 2011, *Ap&SS*, 336, 47
- Nettelmann, N., Holst, B., Kietzmann, A., et al. 2008, *ApJ*, 683, 1217
- Nettelmann, N., Püstow, R., & Redmer, R. 2013, *Icarus*, 225, 548
- Ogilvie, G. I. 2005, *Journal of Fluid Mechanics*, 543, 19
- Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, 396, 794
- Ogilvie, G. I. 2013, *MNRAS*, 429, 613
- Ogilvie, G. I. 2014, *ARA&A*, 52, 171

- Ogilvie, G. I. & Lesur, G. 2012, MNRAS, 422, 1975
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2007, ApJ, 661, 1180
- Papaloizou, J. C. B. & Savonije, G. J. 1997, MNRAS, 291, 651
- Parker, E. N. 1963, Interplanetary dynamical processes.
- Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, ApJS, 192, 3
- Pedlosky, J. 1992, Journal of Physical Oceanography, 22, 652
- Penev, K., Barranco, J., & Sasselov, D. 2009a, ApJ, 705, 285
- Penev, K., Jackson, B., Spada, F., & Thom, N. 2012, ApJ, 751, 96
- Penev, K., Sasselov, D., Robinson, F., & Demarque, P. 2007, ApJ, 655, 1166
- Penev, K., Sasselov, D., Robinson, F., & Demarque, P. 2009b, ApJ, 704, 930
- Penev, K., Zhang, M., & Jackson, B. 2014, PASP, 126, 553
- Perryman, M. 2011, The Exoplanet Handbook
- Podolak, M. & Zucker, S. 2004, Meteoritics and Planetary Science, 39, 1859
- Poincaré, H. 1885, Acta Mathematica, 7, 259
- Pollacco, D. L., Skillen, I., Collier Cameron, A., et al. 2006, PASP, 118, 1407
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., et al. 1996, Icarus, 124, 62
- Pont, F. 2009, MNRAS, 396, 1789
- Press, W. H. 1981, ApJ, 245, 286
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, Experimental Astronomy, 38, 249
- Remus, F. 2013, PhD thesis, thèse de doctorat dirigée par Zahn, Jean-PaulLainey, Valéry et Mathis, Stéphane Astronomie et Astrophysique Paris 6 2013
- Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2012a, A&A, 544, A132
- Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2012b, A&A, 541, A165
- Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2015, A&A, 573, A23
- Réville, V., Brun, A. S., Matt, S. P., Strugarek, A., & Pinto, R. F. 2015, ApJ, 798, 116
- Ricker, G. R. 2015, in AAS/Division for Extreme Solar Systems Abstracts, Vol. 3, AAS/Division for Extreme Solar Systems Abstracts, 503.01

- Rieutord, M. 1987, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 39, 163
- Rieutord, M. 2008, in *EAS Publications Series*, Vol. 29, *EAS Publications Series*, ed. M.-J. Goupil & J.-P. Zahn, 127–147
- Rieutord, M. 2015, *Fluid Dynamics : An Introduction*
- Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdetaro, L. 2000, *Physical Review Letters*, 85, 4277
- Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdetaro, L. 2001, *Journal of Fluid Mechanics*, 435, 103
- Rieutord, M. & Valdetaro, L. 1997, *Journal of Fluid Mechanics*, 341, 77
- Rieutord, M. & Valdetaro, L. 2010, *Journal of Fluid Mechanics*, 643, 363
- Rocca, A. 1987, *A&A*, 175, 81
- Rocca, A. 1989, *A&A*, 213, 114
- Saumon, D. & Guillot, T. 2004, *ApJ*, 609, 1170
- Sauret, A. 2013, PhD thesis, thèse de doctorat dirigée par Le Dizès, Stéphane et Le Bars, Michael Mécanique et Physique des Fluides Aix-Marseille 2013
- Savonije, G.-J. 2008, in *EAS Publications Series*, Vol. 29, *EAS Publications Series*, ed. M.-J. Goupil & J.-P. Zahn, 91–125
- Savonije, G. J. & Papaloizou, J. C. B. 1983, *MNRAS*, 203, 581
- Savonije, G. J. & Papaloizou, J. C. B. 1984, *MNRAS*, 207, 685
- Savonije, G. J. & Papaloizou, J. C. B. 1997, *MNRAS*, 291, 633
- Savonije, G. J., Papaloizou, J. C. B., & Alberts, F. 1995, *MNRAS*, 277, 471
- Savonije, G. J. & Witte, M. G. 2002, *A&A*, 386, 211
- Schatzman, E. 1962, *Annales d'Astrophysique*, 25, 18
- Schmitt, D., Cardin, P., La Rizza, P., & Nataf, H.-C. 2013, *European Journal of Mechanics B Fluids*, 37, 10
- Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al. 1998, *ApJ*, 505, 390
- Sen, A., Mininni, P. D., Rosenberg, D., & Pouquet, A. 2012, *Phys. Rev. E*, 86, 036319
- Siess, L., Dufour, E., & Forestini, M. 2000, *A&A*, 358, 593
- Silva Aguirre, V., Davies, G. R., Basu, S., et al. 2015, *MNRAS*, 452, 2127
- Simon, A. A. & Beebe, R. F. 1996, *Icarus*, 121, 319

- Simon, B., Lemaitre, A., & Souchay, J. 2013, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 861, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, ed. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda, 83
- Sinclair, A. T. 1983, in *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 106, IAU Colloq. 74 : *Dynamical Trapping and Evolution in the Solar System*, ed. V. V. Markellos & Y. Kozai, 19–25
- Singer, S. F. 1968, *Geophysical Journal International*, 15, 205
- Skumanich, A. 1972, *ApJ*, 171, 565
- Spiegel, E. A. & Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, 265, 106
- Stevenson, D. J. 1979, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 12, 139
- Stewartson, K. 1972, *Journal of Fluid Mechanics*, 54, 749
- Stewartson, K. & Rickard, J. A. 1969, *Journal of Fluid Mechanics*, 35, 759
- Storch, N. I. & Lai, D. 2014, *MNRAS*, 438, 1526
- Strugarek, A., Brun, A. S., Matt, S. P., & Réville, V. 2014, *ApJ*, 795, 86
- Strugarek, A., Brun, A. S., Matt, S. P., & Réville, V. 2015, *ApJ*, 815, 111
- Terquem, C., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., & Lin, D. N. C. 1998, *ApJ*, 502, 788
- Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003, *ARA&A*, 41, 599
- Thomson, S. W. 1880, *Philosophical Magazine Series 5*, 10, 155
- Tilgner, A. 1999, *Phys. Rev. E*, 59, 1789
- Tilgner, A. 2007, *Physical Review Letters*, 99, 194501
- Tobie, G., Mocquet, A., & Sotin, C. 2005, *Icarus*, 177, 534
- Valdettaro, L., Rieutord, M., Braconnier, T., & Fraysse, V. 2007, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205, 382
- van Saders, J. L., Ceillier, T., Metcalfe, T. S., et al. 2016, *Nature*, 529, 181
- Varela, J., Strugarek, A., & Brun, A. S. 2016, *ArXiv e-prints* [arXiv:1608.02920]
- Verbunt, F. & Phinney, E. S. 1995, *A&A*, 296, 709
- Vigan, A., Bonnefoy, M., Ginski, C., et al. 2016, *A&A*, 587, A55
- Wahl, S. M., Wilson, H. F., & Militzer, B. 2013, *ApJ*, 773, 95
- Weber, E. J. & Davis, Jr., L. 1967, *ApJ*, 148, 217

- Wei, X. 2016, ArXiv e-prints [arXiv:1606.06232]
- Wilson, H. F. & Militzer, B. 2012, ApJ, 745, 54
- Winn, J. N., Fabrycky, D., Albrecht, S., & Johnson, J. A. 2010, ApJ, 718, L145
- Witte, M. G. & Savonije, G. J. 1999, A&A, 350, 129
- Witte, M. G. & Savonije, G. J. 2001, A&A, 366, 840
- Witte, M. G. & Savonije, G. J. 2002, A&A, 386, 222
- Wolk, S. J. & Walter, F. M. 1996, AJ, 111, 2066
- Wu, Y. 2005a, ApJ, 635, 674
- Wu, Y. 2005b, ApJ, 635, 688
- Yarom, E. & Sharon, E. 2014, Nature Physics, 10, 510
- Yoder, C. F. & Peale, S. J. 1981, Icarus, 47, 1
- Zahn, J. P. 1966a, Annales d'Astrophysique, 29, 313
- Zahn, J. P. 1966b, Annales d'Astrophysique, 29, 489
- Zahn, J. P. 1966c, Annales d'Astrophysique, 29, 565
- Zahn, J. P. 1970, A&A, 4, 452
- Zahn, J.-P. 1975, A&A, 41, 329
- Zahn, J.-P. 1977, A&A, 57, 383
- Zahn, J.-P. 1989, A&A, 220, 112
- Zahn, J.-P. 1992, A&A, 265, 115
- Zahn, J.-P. 1994, A&A, 288
- Zhang, K., Liao, X., & Earnshaw, P. 2004, Journal of Fluid Mechanics, 504, 1
- Zhang, M. & Penev, K. 2014, ApJ, 787, 131



**Titre :** Dissipation de marée dans les étoiles de faible masse et les planètes géantes : ondes inertielles, structure interne et rotation différentielle

**Mots clés :** marées, hydrodynamique, ondes, turbulence, interactions étoile-planète

**Résumé :** Cette thèse étudie les mécanismes de dissipation de marée dans les étoiles de faible masse, possédant comme notre Soleil une enveloppe convective externe (*i.e.* de types M à F), ainsi que dans les planètes géantes gazeuses similaires à Jupiter et Saturne. En particulier, nous cherchons à comprendre et à caractériser l'influence de la structure et de la dynamique internes de ces corps sur les différents mécanismes physiques à l'origine de cette dissipation afin d'évaluer leur importance relative.

Dans le cas des planètes géantes, nous utilisons des modèles semi-analytiques préexistants et nous montrons que la dissipation induite par la présence éventuelle d'un cœur solide viscoélastique n'est pas négligeable par rapport à celle induite par les ondes inertielles (dont la force de rappel est l'accélération de Coriolis) dans l'enveloppe convective. Pour les étoiles de

faible masse, nous développons de nouvelles méthodes semi-analytiques ainsi que des simulations numériques d'ondes inertielles de marée se propageant dans l'enveloppe convective externe, dont nous calculons et caractérisons la dissipation d'énergie associée. Pour la première fois, nous prenons en compte les effets d'une rotation différentielle latitudinale telle qu'observée dans le Soleil et prédite par de nombreuses simulations numériques de convection dans les étoiles de faible masse. Nous mettons en évidence l'existence de nouvelles familles de modes inertiels ainsi que l'importance des résonances de corotation pour la dissipation de marée. Enfin, nous dérivons une nouvelle prescription pour la viscosité turbulente appliquée à ces ondes de marées en prenant en compte l'influence de la rotation sur les propriétés de la convection le long de l'évolution des étoiles.

**Title :** Tidal dissipation in low-mass stars and giant planets : inertial waves, internal structure and differential rotation

**Keywords :** tides, hydrodynamics, waves, turbulence, star-planet interactions

**Abstract :** This thesis studies the tidal dissipation mechanisms in low-mass stars that have an external convective envelope like the Sun (*i.e.* from M- to F-type stars), as well as in Jupiter- and Saturn-like gaseous giant planets. We particularly focus on understanding and characterizing the influence of the internal structure and dynamics of these bodies on the various physical mechanisms that cause this tidal dissipation, in order to assess their relative strength.

In the case of giant planets, we use preexisting semi-analytical models and we show that the dissipation induced by the possible presence of a viscoelastic solid core is not negligible compared to the one induced by inertial waves (whose restoring force is the Coriolis acceleration) in the convective envelope. For low-mass

stars, we perform a new semi-analytic study as well as numerical simulations of tidal inertial waves propagating in the external convective envelope, and we compute the associated energy dissipation. For the first time, the effects of a background latitudinal differential rotation, as observed in the Sun and predicted by various numerical simulations of convection in low-mass stars, is taken into account. We highlight the existence of new families of inertial modes as well as the importance of corotation resonances for tidal dissipation. Finally, we derive a new prescription for the turbulent viscosity applied to these tidal waves that takes into account the influence of rotation on the properties of convective flows along the evolution of stars.

