Expression relativiste de la quantité de chaleur

Laurent SCHOEFFEL

CEA/Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Résumé : Nous exposons quelques aspects de la thermodynamique relativiste en reformulant des idées initiées par LOUIS DE BROGLIE. Nous démontrons la relation suivante pour la variance relativiste de la quantité de chaleur d'un corps en équilibre thermodynamique : $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$. De même pour sa température absolue : $T = T_0\sqrt{1-\beta^2}$. Ainsi, la température mesurée dans le référentiel propre d'un corps est toujours plus grande que celle obtenue dans n'importe quel autre référentiel galiléen.

1 Introduction

La variance relativiste de la quantité de chaleur est un problème délicat abordé par de nombreux physiciens peu après qu' ALBERT EINSTEIN eût établi la relativité restreinte en 1905 [1]. Dans l'article de 1907 où ALBERT EINSTEIN pose pour la première fois le problème de la gravitation [2], il introduit également l'expression relativiste de la quantité de chaleur. Il montre en particulier que la quantité de chaleur ne se transforme pas comme une énergie totale par changement de référentiel galiléen. LOUIS DE BROGLIE a repris ce problème quelques années plus tard en apportant des démonstrations originales. Dans la suite nous exposons et discutons les arguments de LOUIS DE BROGLIE, puis nous proposons un traitement du problème en thermodynamique statistique. Toute cette étude nous amène à revisiter la relativité restreinte dans le cas d'un corps contenant de la chaleur.

2 Expression relativiste de la quantité de chaleur

Considérons un corps C en équilibre thermodynamique dans le référentiel R_0 qui lui est lié. Soient T_0 et V_0 respectivement sa température absolue et son volume. Nous supposons dans un premier temps que le volume V_0 du corps C est invariable. On note M_0 la masse propre du corps C ; dans l'hypothèse où C est un gaz à la pression P_0, l'expression de M_0 est la suivante $M_0 = \frac{E_0+P_0V_0}{c^2}$, E_0 désignant l'énergie totale de toutes les molécules du gaz.

Plaçons nous maintenant dans le référentiel R dans lequel C se déplace à la vitesse constante v_C (on note $v_C = v = \beta c$). L'énergie de C dans R est donc égale à $\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Dans ce système de référence, on suppose maintenant qu'une source de chaleur fournit à C la quantité de chaleur Q, la vitesse βc étant conservée. L'énergie du corps C va donc augmenter. De plus, la vitesse étant conservée, l'énergie totale ne peut augmenter que par une augmentation de masse propre : l'énergie initiale $\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ devient donc $\frac{M_0' c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ suite à l'apport de la quantité de chaleur Q. Nous notons également que la masse propre variant et la vitesse restant constante, il faut fournir à C un travail $W = \int F v dt$ pour maintenir constante sa quantité de mouvement. En effet, l'apport de la quantité de chaleur Q doit se faire sans apport de quantité de mouvement. Nous revenons sur ce dernier point dans la suite de notre présentation. Alors, la relation fondamentale de la dynamique et l'équation de conservation de l'énergie s'écrivent comme suit :

$$\frac{(M_0' - M_0)v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \int F dt = \frac{W}{v} \tag{1}$$

$$\frac{(M_0' - M_0)c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = Q + W \tag{2}$$

Ainsi, le travail W et la quantité de chaleur Q absobés par le corps C ont accru son énergie interne donc sa masse propre et les équations ci-dessus nous permettent de relier cette augmentation de masse propre à la quantité de chaleur Q. Nous obtenons en effet (à partir des équations (1) et (2)) les relation suivantes :

$$W = \beta^2 \frac{Q}{1-\beta^2}$$
$$Q = (M_0' - M_0)c^2 \sqrt{1-\beta^2}$$

Revenons alors au référentiel propre de C (noté R_0). Dans ce système, il n'y a aucun travail effectué lors de l'apport de quantité de chaleur, la vitesse de C étant nulle dans R_0 (par définition de R_0). Le corps C reçoit donc uniquement la quantité de chaleur Q_0 (exprimée dans le référentiel R_0) telle que :

$$Q_0 = (M_0' - M_0)c^2$$

A partir des deux expressions de la chaleur dans les deux systèmes de référence R et R_0, soient $Q = (M_0' - M_0)c^2\sqrt{1-\beta^2}$ et $Q_0 = (M_0' - M_0)c^2$, on déduit :

$$Q = Q_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

Avant de discuter cette formule, nous étudions le cas où le volume du corps C n'est pas invariable. Le bilan énergétique s'écrit alors :

$$\frac{(M'_0 - M_0)c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = Q + W - P\Delta V \tag{3}$$

On note P et V la pression et le volume de C dans le référentiel R. La pression étant un invariant relativiste, on obtient $P = P_0$. L'expression du travail W est toujours $\frac{(M'_0 - M_0)v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \int F dt = \frac{W}{v}$, on déduit ainsi :

$$W = \beta^2 \frac{Q - P\Delta V}{1-\beta^2}$$

Puis :

$$Q - P\Delta V = (M'_0 - M_0)c^2\sqrt{1-\beta^2}$$

Dans le référentiel R_0, le même raisonnement nous montre que :

$$Q_0 - P_0\Delta V_0 = (M'_0 - M_0)c^2$$

Alors, on en déduit facilement la formule $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$, qui est bien la même expression que précédemment (cas du volume de C invariable).

On a montré ainsi que la quantité de chaleur ne se transforme pas comme une énergie totale par changement de référentiel galiléen ($Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ comparée à $E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$), ce qui n'est pas évident a priori. En fait, seule l'énergie totale se transforme selon la relation $E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et les décompositions en *énergie cinétique+énergie potentielle* ou bien *travail+chaleur* ne sont pas covariantes car les différentes formes d'énergie se transforment différemment. Notons également que la variance relativiste de la chaleur permet de déduire la variance pour la température absolue. En effet, l'entropie étant un invariant relativiste, nous obtenons $T = T_0\sqrt{1-\beta^2}$: la température mesurée dans le référentiel propre est toujours plus grande que celle obtenue dans n'importe quel autre référentiel galiléen.

3 Définition de la quantité de chaleur

Lors de la démonstration précédente, nous avons mentionné une propriété importante de la quantité de chaleur Q : l'apport de la quantité Q à un corps se fait sans variation de la quantité de mouvement. Cette propriété est en fait intimement liée à la définition de la quantité de chaleur Q dont il existe plusieurs formulations. On peut dire qu'une quantité de chaleur est une énergie échangeable entre un corps matériel et son environnement (dans un sens ou dans l'autre), sans modification des paramètres externes de ce corps. Louis de Broglie a donné une définition plus inspirée de la physique statistique : une énergie interne d'un corps en équilibre a le caractère d'une énergie de chaleur chaque fois q'elle est due à des mouvements internes dont la quantité de mouvement totale est nulle dans le système de référence propre du corps. L'énergie de masse d'un corps (dans son référentiel propre) M_0c^2 peut ainsi être consiréré comme une quantité de chaleur.

Nous avons montré précédemment que la variance relativiste de la chaleur s'exprime comme suit $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$. Il est donc intéressant de décomposer l'énergie totale sous la forme :

$$E = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4}$$

où $M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ représente une quantité de chaleur et la grandeur $\frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ correspond à une énergie de translation. La relation ci-dessus est fondamentale en thermodynamique relativiste. Elle signifie que l'énergie totale d'un corps chaud en mouvement est la somme de son énergie interne de chaleur et de son énergie de translation d'ensemble.

On peut noter également que l'énergie de translation d'ensemble du corps, qui s'écrit $E_T = \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ est différente de l'expression relativiste habituelle de l'énergie cinétique, soit $E_c = M_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)$. Cependant, $E_T = \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ est une grandeur bien connue en physique statistique relativiste. En effet, on peut montrer que pour un coprs C constitué par exemple d'un grand nombre de molécules réparties suivant une distribution de Boltzmann, la relation suivante relie l'énergie de translation d'ensemble et la température absolue du corps C :

$$< \frac{M_0v^2}{2\sqrt{1-\beta^2}} >= \frac{3}{2}k_BT_0$$

où la moyenne est définie au sens de Boltzmann et T_0 est la température absolue du corps (en équilibre thermodynamique).

La formule précédente $E = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, qui est une simple identité (donc toujours vraie) prend alors un sens physique important avec notre discussion sur la variance relativiste de la chaleur et sur l'énergie de translation.

4 Nouvelles preuves de la relation $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$

Nous allons maintenant revenir sur la relation $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$. Dans un premier temps, nous donnons une justification intuitive du fait que la relation $Q = \frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ est impossible.

Supposons que le corps C, en éqilibre thermodynamique, soit constitué par un ensemble de molécules. Une molécule M possède dans le référentiel propre de C (R_0) un vecteur vitesse (u_{0x}, u_{0y}, u_{0z}).

Dans le système R (où C a une vitesse βc suivant z), la molécule M a la vitesse (u_x, u_y, u_z) avec :

$$u_x = \frac{u_{0x}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\frac{u_{0z}}{c}}$$

$$u_y = \frac{u_{0y}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\frac{u_{0z}}{c}}$$

$$u_z = \frac{u_{0z}+\beta c}{1+\beta\frac{u_{0z}}{c}}$$

Ainsi, quand β tend vers 1, u_x, u_y tendent vers 0 et u_z tend vers c. Donc, plus la vitesse du corps C est voisine de c (suivant l'axe Oz), plus la vitesse relative de la molécule M dans le système R est petite. Toute l'énergie interne du corps tend ainsi à devenir une énergie de translation d'ensemble, l'énergie d'agitation interne tendant vers zéro. Dans le référentiel R, on ne voit plus de désordre. Si un observateur du référentiel R_0 mesure une quantité de chaleur Q_0, un observateur en mouvement à vitesse constante $v \to c$ mesure une quantité de chaleur tendant vers zéro. Donc la relation $Q = \frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ est impossible et le raisonnement précédent s'interprète aisément sur la relation :

$$E = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Quand $\beta \to 1$, E tend vers l'énergie de translation d'ensemble $E_T = \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Une autre approche due à Louis de Broglie est également intéressante du fait de la simplicité de la démonstration. Il considère un corps C contenant un grand nombre N d'oscillateurs harmoniques au repos dans R_0 et qui ont tous la même fréquence propre ν_0. L'énergie de C dans R_0 est donc $E_0 = \sum_{k=1}^{N} n_k h\nu_0$ où les n_k sont des entiers ou demi-entiers invariants relativistes. Pour un tel corps E_0 représente bien une énergie interne sans mouvement d'ensemble et peut donc être considérée comme une quantité de chaleur Q_0. Dans le référentiel R (où $v_C = \beta c$), l'énergie interne du corps s'écrit $E_i = \sum_{k=1}^{N} n_k h\nu_0\sqrt{1-\beta^2}$. En effet, chaque oscillateur constitue une petite horloge dont la fréquence est ralentie par changement de référentiel galiléen ($\nu_0 \to \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$ quand $R_0 \to R$). De plus, les nombres n_k et N sont invariants relativistes. Donc nous obtenons $E_i = Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ et retrouvons ainsi le résultat précédent.

5 Traitement en thermodynamique statistique

On considère maintenant que le corps C est un gaz parfait dans un cylindre. Pour simplifier, nous supposons également que le gaz est à une dimension (Ox), c'est-à-dire que les molécules de masses m_0 se déplacent paralèllement à l'axe du cylindre (Ox). A l'équilibre thermodynamique, pour la température T_0, la fonction de distribution de Boltzmann du gaz s'écrit :

$$f(u) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi k_B T_0}} exp(-\frac{m_0 u_0^2}{2k_B T_0})$$

Dans cette expression, u_0 représente la vitesse de la molécule m_0 dans le référentiel propre R_0. En particulier, la température peut être obtenue par la relation ci-dessous :

$$\frac{1}{2}k_B T_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m_0 u_0^2 f(u_0) du_0$$

et la distribution de Boltzmann est normalisée comme suit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_0)du_0 = 1$.

Dans le référentiel R (en mouvement de translation uniforme à la vitesse $v = \beta c$ par rapport à R_0), nous pouvons étendre les formules précédentes (dans le cadre de la relativité restreinte). La température est ainsi définie de manière générale par la relation :

$$\frac{1}{2}k_B T = E_{cA} - E_{cM}$$

avec les expressions suivantes pour les énergies cinétiques E_{cA} et E_{cM} :

$$E_{cA} = \int_{-\infty}^{+\infty} m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} - 1) f(u) du$$

$$E_{cM} = m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1)$$

De plus, la vitesse u (dans R) se déduit aisément par la relation de transformation relativiste des vitesses ($u_0 \to u$ quand $R_0 \to R$), soit $u = \frac{u_0+v}{1+\frac{u_0 v}{c^2}}$.

De plus, nous devons prendre en compte le travail des forces de pression qui apparaissent dans la contraction du tube de la longueur L_0 à L (quand $R_0 \to R$), soit $L = L_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$.

Le principe du calcul est ensuite relativement simple, nous effectuons un développement limité des expressions précédentes au premier ordre (en se limitant aux termes en $(\frac{v}{c})^2$). On obtient alors :

$$Q = Q_0(1 - \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2)$$

ainsi que $T = T_0(1-\frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2)$. Nous retrouvons ainsi les résultats précédents au premier ordre, c'est-à-dire que notre traitement en thermodynamique statistique nous donne le premier ordre en β^2 des expressions $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ et $T = T_0\sqrt{1-\beta^2}$.

6 Conclusions

Dans cet article, nous avons démontré de plusieurs manières différentes les relations $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ et $T = T_0\sqrt{1-\beta^2}$. Ainsi, la température mesurée dans le référentiel propre d'un corps est toujours plus grande que celle obtenue dans n'importe quel autre référentiel galiléen. Les preuves abordées dans notre exposé reposent largement sur des idées initiées par Louis de Broglie. En particulier, la définition suivante de la quantité de chaleur est importante en thermodynamique relativiste : une énergie interne d'un corps en équilibre a le caractère d'une énergie de chaleur chaque fois q'elle est due à des mouvements internes dont la quantité de mouvement totale est nulle dans le système de référence propre du corps.

Références

[1] Albert Einstein, Annalen der Physik 17 (1905) 891.

[2] Albert Einstein , Jahrbuch der Radiaktivitat und Electronik 4 (1907) 411.

[3] Louis de Broglie, Recherches d'un demi-siècle, (1976).