

# 1 Introduction

Considérons un filament supraconducteur rectiligne et infini, ne transportant pas de courant et soumis à une induction magnétique variable et perpendiculaire à l'axe du filament.

Selon le modèle critique développé par Bean [1], le filament supraconducteur tend à écranter les variations du champ extérieur. Cet écrantage se fait par la création de courants de magnétisation appelés courants persistants à la périphérie du filament. La distribution de ces courants persistants est déterminée de manière à créer au cœur du filament une induction  $\vec{B}_1$  telle que

$$\vec{B}_1 + \Delta\vec{B}_e = \vec{0} \quad (1)$$

où  $\Delta\vec{B}_e$  représente les variations du champ appliqué.

Les calculs présentés sont analogues à ceux développés en [2].

## 2 Comportement magnétique d'un filament

### 2.1 Cas d'un filament vierge

Considérons le cas d'un filament vierge c'est à dire n'ayant jamais ressenti de champ magnétique, ce filament sera soumis à un champ magnétique croissant depuis  $\vec{0}$  jusqu'à un champ maximum  $\vec{B}$ , avec  $\vec{B}$  perpendiculaire à l'axe du filament.

En utilisant des modèles simples [3-5], la distribution des courants de magnétisation peut être représentée par une coquille à la périphérie du filament dont la limite intérieure est une ellipse (voir Fig. (1)). Lorsque le champ magnétique extérieur augmente, l'excentricité de l'ellipse décroît jusqu'à ce que les courants de magnétisation remplissent entièrement le filament (Fig. (1)). La valeur du champ pour laquelle ce remplissage a lieu est appelée champ de pénétration,  $B_{p,v}$ , et est déterminée par l'équation implicite

$$B_{p,v} = \frac{2\mu_0 J_c(B_{p,v}) r_f}{\pi} \quad (2)$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide,  $J_c$  la densité de courant critique à une température donnée et  $r_f$  le rayon du filament. Si le champ extérieur est augmenté au-delà de  $B_{p,v}$ , la distribution de courants de magnétisation reste la même.

Pour des valeurs de champs inférieures au champ de pénétration, l'excentricité,  $e_v$ , de l'ellipse peut être déterminée par l'équation implicite (voir Annexe A)

$$B = \frac{2\mu_0 J_c(B)}{\pi} r_f \left(1 - \frac{e_v \arcsin \sqrt{1 - e_v^2}}{\sqrt{1 - e_v^2}}\right) \quad \text{pour } B \bullet B_{p,v} \quad (3)$$

De plus, les effets des courants de magnétisation peuvent être représentés par un moment magnétique par unité de longueur de filament,  $\vec{M}_1$ , donné par (voir Annexe B)

$$\vec{M}_1(B) = -\frac{4}{3} J_c(B) \left[1 - e_v^2(B)\right] r_f^3 \vec{u} \quad \text{pour } B \bullet B_{p,v} \quad (4.a)$$

et

$$\vec{M}_1(B) = -\frac{4}{3} J_c(B) r_f^3 \vec{u} \quad \text{pour } B_{p,v} \bullet B \quad (4.b)$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire parallèle à  $\vec{B}$ .

La référence [6] propose de remplacer l'Eq. (4.a) par l'expression approchée

$$\vec{M}_1(B) \approx -\frac{4}{3} J_c(B) \left[1 - \left(1 - \frac{B}{B_{p,v}}\right)^3\right] r_f^3 \vec{u} \quad \text{pour } B \bullet B_{p,v} \quad (5)$$

## 2.2 descente du champ après le maximum

Supposons qu'après avoir atteint la valeur maximale,  $B_{top}$  (avec  $B_{top}$  plus grand que  $B_{p,v}$ ), le champ magnétique soit de nouveau diminué. Toujours d'après ces modèles, une nouvelle coquille est créée à la périphérie du filament où les courants de magnétisation circulent dans le sens opposé à ceux de la coquille initiale (Fig. (1)). La distribution est alors constituée par le chevauchement de deux coquilles : une première, créée pendant l'augmentation de champ de 0 à  $B_{top}$ , avec des densités de courants de magnétisation de  $[-J_c(B_{top})]$  d'un côté et de  $[J_c(B_{top})]$  de l'autre côté et une seconde coquille, créée pendant la diminution du champ magnétique de  $B_{top}$  à  $B$ , avec des densités de courants de magnétisation de  $[J_c(B_{top}) + J_c(B)]$  d'un côté et de  $[-J_c(B_{top}) - J_c(B)]$  de l'autre côté. Si l'on diminue le champ magnétique, la nouvelle coquille emplit de plus en plus le filament jusqu'à occuper entièrement sa surface. La

valeur du champ de pénétration pour laquelle cela a lieu,  $B_{p,dwn}$ , est donnée par l'équation implicite

$$B_{top} - B_{p,dwn} = \frac{2\mu_0 [J_c(B_{top}) + J_c(B_{p,dwn})]}{\pi} r_f \quad (6)$$

Pour des valeurs de champs au-dessus de  $B_{p,dwn}$ , l'excentricité,  $e_{dwn}$ , de la limite intérieure de la nouvelle coquille peut être déterminée par

$$B_{top} - B = \frac{2\mu_0 [J_c(B_{top}) + J_c(B)]}{\pi} r_f \left(1 - \frac{e_{dwn} \arcsin \sqrt{1 - e_{dwn}^2}}{\sqrt{1 - e_{dwn}^2}}\right) \quad \text{pour } B_{p,dwn} \bullet B \bullet B_{top} \quad (7)$$

La contribution de cette nouvelle coquille au moment magnétique par unité de longueur de filament,  $M_{dwn}$ , peut être estimé par

$$\vec{M}_{dwn}(B) = + \frac{4}{3} [J_c(B_{top}) + J_c(B)] [1 - e_{dwn}^2(B)] r_f^3 \vec{u} \quad \text{pour } B_{p,dwn} \bullet B \bullet B_{top} \quad (8.a)$$

et

$$\vec{M}_{dwn}(B) = + \frac{4}{3} [J_c(B_{top}) + J_c(B)] r_f^3 \vec{u} \quad \text{pour } B \bullet B_{p,dwn} \quad (8.b)$$

En utilisant de nouveau [6], l'Eq. (8.a) peut s'écrire

$$\vec{M}_{dwn}(B) \approx + \frac{4}{3} [J_c(B_{top}) + J_c(B)] \left[1 - \left(1 - \frac{B_{top} - B}{B_{top} - B_{p,dwn}}\right)^3\right] r_f^3 \vec{u} \quad \text{pour } B_{p,dwn} \bullet B \bullet B_{top} \quad (9)$$

### 2.3 Montée du champ après le minimum

Supposons qu'après avoir atteint la valeur minimale  $B_{bot}$  (avec  $B_{bot}$  plus petit que  $B_{p,dwn}$ ), le champ magnétique soit de nouveau augmenté. Une troisième coquille est alors créée à la périphérie du filament avec des courants de magnétisation circulant dans le sens opposé à ceux de la deuxième coquille. La valeur du champ de pénétration,  $B_{p,up}$ , pour laquelle la troisième coquille remplit entièrement le filament est déterminée par

$$B_{p,up} - B_{bot} = \frac{2\mu_0 [J_c(B_{bot}) + J_c(B_{p,up})]}{\pi} r_f \quad (10)$$

Pour des champs inférieurs à  $B_{p,up}$ , l'excentricité,  $e_{up}$ , de l'ellipse est définie par

$$B - B_{top} = \frac{2\mu_0 [J_c(B_{bot}) + J_c(B)]}{\pi} r_f \left(1 - \frac{e_{up} \arcsin \sqrt{1 - e_{up}^2}}{\sqrt{1 - e_{up}^2}}\right)$$

pour  $B_{bot} \bullet B \bullet B_{p,up}$  (11)

La contribution de cette nouvelle coquille au moment magnétique par unité de longueur de filament,  $\vec{M}_{up}$ , peut être estimée par

$$\vec{M}_{up}(B) = -\frac{4}{3} [J_c(B_{bot}) + J_c(B)] [1 - e_{up}^2(B)] r_f^3 \vec{u}$$

pour  $B_{bot} \bullet B \bullet B_{p,up}$  (12.a)

et

$$\vec{M}_{up}(B) = -\frac{4}{3} [J_c(B_{bot}) + J_c(B)] r_f^3 \vec{u}$$

pour  $B_{p,up} \bullet B$  (12.b)

En utilisant de nouveau [6], l'Eq. (12.a) peut s'écrire

$$\vec{M}_{up}(B) \approx -\frac{4}{3} [J_c(B_{bot}) + J_c(B)] \left[1 - \left(1 - \frac{B - B_{bot}}{B_{p,up} - B_{bot}}\right)\right] r_f^3 \vec{u}$$

pour  $B_{bot} \bullet B \bullet B_{p,up}$  (13)

Le moment magnétique total par unité de longueur de filament est alors

$$\vec{M}_f(B) = \vec{M}_v(B_{top}) + \vec{M}_{dwn}(B_{bot}) + \vec{M}_{up}(B) \quad (14)$$

## 2.4 Généralisation

Si l'on cherche à déterminer l'état de magnétisation d'un filament supraconducteur, il est nécessaire de connaître l'histoire des variations de champ magnétique subies par ce filament. Pour chaque variation de champ, on détermine alors les paramètres de la coquille des courants de magnétisation qui est créée et l'on somme ensuite les contributions des différentes coquilles.

### 3 Pertes par magnétisation dans un filament (pertes par hystérésis)

Introduisons la densité de flux magnétique complexe appliquée au filament,  $\mathbf{B}_a$ , définie par

$$\mathbf{B}_a = B_{a,y} + iB_{a,x} \quad (15)$$

où  $B_{a,x}$  et  $B_{a,y}$  sont les composantes du vecteur densité de flux magnétique appliqué suivant les axes  $x$  et  $y$ .

Pour un cycle donné, les pertes par hystérésis par unité de longueur de filament,  $W_f$ , s'écrivent [7]

$$W_f = -\text{Re} \left[ \int_{\text{cycle}} \mathbf{M}_f^* d\mathbf{B}_a \right] = -\text{Re} \left[ \int_{\text{cycle}} \mathbf{M}_f d\mathbf{B}_a^* \right] \quad (16)$$

où  $\text{Re}$  désigne la partie réelle de l'expression entre crochet et le signe  $*$  désigne le complexe conjugué.

Considérons un filament soumis à un champ magnétique transverse variant trapézoïdalement entre  $(-B_m)$  et  $(+B_m)$ , où  $B_m$  est plus grand que la variation de champ  $\Delta B_{p,m}$  nécessaire à la remagnétisation complète du filament, après ou une descente en champ depuis  $(+B_m)$  ou une montée en champ depuis  $(-B_m)$ . Dans les deux cas, nous avons

$$\Delta B_{p,m} = \frac{2\mu_0 [J_c(B_m) + J_c(B_m - \Delta B_{p,m})]}{\pi} r_f \quad (17)$$

Il est à noter que dans l'Eq. (17),  $\Delta B_{p,m}$  est une fonction de  $r_f$ .

On peut alors montrer que les pertes par hystérésis par cycle et par unité de longueur de filament sont

$$W_f = +\frac{4r_f^3}{3} \int_{-B_m}^{-B_m + \Delta B_{p,m}} dB [1 - e_{\text{up}}^2(B)] J_c(B) + \frac{4r_f^3}{3} \int_{-B_m + \Delta B_{p,m}}^{+B_m} dB J_c(B) - \frac{4r_f^3}{3} \int_{+B_m}^{+B_m - \Delta B_{p,m}} dB [1 - e_{\text{down}}^2(B)] J_c(B) - \frac{4r_f^3}{3} \int_{+B_m - \Delta B_{p,m}}^{-B_m} dB J_c(B) \quad \text{pour } \Delta B_{p,m} \bullet B_m \quad (18)$$

Cette équation peut être réécrite

$$W_f = \frac{8r_f^3}{3} \int_{-B_m}^{+B_m} dB J_c(B) - \frac{4r_f^3}{3} \int_{-B_m}^{-B_m + \Delta B_{p,m}} dB e_{up}^2(B) J_c(B) + \frac{4r_f^3}{3} \int_{+B_m}^{+B_m - \Delta B_{p,m}} dB e_{down}^2(B) J_c(B) \quad \text{pour } \Delta B_{p,m} \ll B_m \quad (19)$$

Si  $B_m$  est très grand devant  $\Delta B_{p,m}$ , les deux dernières intégrales de l'Eq. (19) peuvent être négligées et  $W_f$  est alors égale à

$$W_f \approx \frac{8r_f^3}{3} \int_{-B_m}^{+B_m} dB J_c(B) \quad \text{pour } \Delta B_{p,m} \ll B_m \quad (20)$$

Si, de plus, nous supposons que  $J_c$  est constante et égale à  $J_c(B_m)$ , nous pouvons écrire

$$W_f \approx \frac{16r_f^3}{3} J_c(B_m) B_m \quad \text{pour } \Delta B_{p,m} \ll B_m \quad (21)$$

#### 4. Comportement d'un brin supraconducteur

Un brin supraconducteur est constitué d'un grand nombre de filaments noyés dans une matrice de métal. Le moment magnétique,  $\vec{M}_s$ , et les pertes par hystérésis,  $W_s$ , par unité de longueur de brin peuvent être calculés en sommant les contributions des filaments (on néglige alors l'influence d'un filament sur son voisin). Dans le cas où tous les filaments sont dans le même état de magnétisation, nous pouvons écrire

$$\vec{M}_s = n_f \vec{M}_f \quad (22.a) \quad \text{et} \quad W_s = n_f W_f \quad (22.b)$$

où  $n_f$  est le nombre de filaments.

Nous pouvons aussi définir un moment magnétique par unité de volume,  $\vec{m}_s$  et des pertes par hystérésis par unité de volume de non cuivre,  $w_s$ , en posant

$$\vec{m}_s = \frac{\vec{M}_s}{A} \quad (23.a) \quad \text{et} \quad w_s = \frac{W_s}{A} \quad (23.b)$$

où  $A$  est la section de non cuivre. Dans le cas où les filaments ont une taille bien définie et uniforme, nous pouvons écrire

$$A = n_f \pi r_f^2 \quad (24)$$

En combinant les Eqs. (22) à (24), nous pouvons écrire

$$\vec{m}_s = \frac{\vec{M}_f}{\pi r_f^2} \quad (25.a) \quad \text{et} \quad w_s = \frac{W_f}{\pi r_f^2} \quad (25.b)$$

Nous constatons que ces quantités ne dépendent pas du nombre de filaments. De plus, nous avons vu que  $\vec{M}_f$  est proportionnel à  $r_f^3$ , il en découle que  $\vec{m}_s$  et  $w_s$  varient linéairement en  $r_f$ . Par exemple, pour une montée en champ de 0 à  $B_0$ , nous avons

$$\vec{m}_s(B_0) = -\frac{4}{3\pi} J_c(B_0) r_f \vec{u} \quad \text{pour } B_{p,v} \bullet B_0 \quad (26)$$

De même, pour un brin soumis à un champ variant trapézoïdalement entre  $(-B_m)$  et  $(+B_m)$ , nous pouvons écrire

$$w_s = \frac{8r_f}{3\pi} \int_{-B_m}^{+B_m} dB J_c(B) - \frac{8r_f}{3\pi} \int_{-B_m}^{-B_m + \Delta B_{p,m}} dB e_{up}^2(B) J_c(B) \quad \text{pour } \Delta B_{p,m} \bullet B_m \quad (27)$$

Dans le cas de brins en niobium étain fabriqués suivant le procédé "étain interne", les Eqs. (26) et (27) peuvent être utilisées pour déterminer un rayon effectif de filament,  $r_{\text{eff}}$ , en écrivant

$$r_{\text{eff}} = \frac{3\pi}{4} \frac{|\vec{m}_s(B)|}{J_c(B)} \quad \text{pour } B_{p,v} \bullet B \quad (28)$$

ou en résolvant l'équation implicite

$$r_{\text{eff}} = \frac{3\pi}{8} \frac{w_s}{\int_{-B_m}^{+B_m} dBJ_c(B) - \int_{-B_m}^{-B_m + \Delta B_{p,m}} dB e_{\text{up}}^2(B) J_c(B)} \quad \text{pour } \Delta B_{p,m} \bullet B_m$$

(29)

où  $\vec{m}_s$ ,  $w_s$  et  $J_c$  désigne respectivement le moment magnétique, les pertes par hystérésis par unité de longueur et par unité de section de non cuivre et la densité de courant critique par unité de section de non cuivre.

Si  $B_m$  est très grand devant  $\Delta B_{p,m}$ , la deuxième intégrale de l'Eq. (29) peut être négligée et le rayon effectif s'écrit

$$r_{\text{eff}} = \frac{3\pi}{8} \frac{w_s}{\int_{-B_m}^{+B_m} dBJ_c(B)} \quad \text{pour } \Delta B_{p,m} \ll B_m$$

(30)



## REFERENCE

1. C.P. Bean, "Magnetization of High-Field Superconductors," *Reviews of Modern Physics*, Vol 36 (Part I), p. 31-39 (1964).
2. A. Devred, "Superconductor Magnetization," *CRYOMAG/97/002*, p. 1-8.
3. M.N. Wilson, "Superconducting Magnets," Clarendon Press, Oxford (1983), p.162.
4. H. Brück, R. Meinke, F. Muller, P. Schmüser, "Field distortions from persistent currents in HERA magnets," *Particles and Fields*, Vol. 44 (1989), p. 385-392 .
5. K.H. Mess, P. Schmüser, S. Wolff, "Superconducting Accelerator Magnets," World Scientific (1996), p.45-100.
6. P.C. Rem, "Numerical Models for AC Superconductors," *Doctoral Thesis*, Twente University (1986), p. 10.
7. T. Ogitsu, "Influence of Cable Eddy Currents on the magnetic field of Superconducting Particle Accelerator Magnets," *Doctoral Thesis*, Tsukuba University (1994).

## Annexe A : Calcul du potentiel-vecteur $\vec{A}$ associé à un distribution de courant en coquille.

### 1. Cas d'une ligne de courant à l'origine d'un repère

Soit une ligne de courant infiniment longue et située au centre d'un repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  parallèlement à  $\vec{e}_z$ . On peut alors définir un repère cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  définie par

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Le repère  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  se déduit du repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{e}_z$ .

Appliquons le théorème d'Ampère, i.e.

$$\oint B dl = \mu_0 I \quad (\text{A.2})$$

où  $I$  est le courant circulant sur cette ligne et  $\mu_0$  la perméabilité du vide, avec comme contour fermé, un cercle de rayon  $r$  et de centre le centre du repère trirectangle. Par symétrie, seule  $B_\theta$  existe. Nous avons alors

$$2\pi r B_\theta = \mu_0 I \quad (\text{A.3})$$

soit

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{A.4})$$

De plus, d'après les équations de Maxwell, nous avons

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A.5})$$

Dans le repère cylindrique, l'Eq. (A.5) s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.6.a})$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = B_0 \quad (\text{A.6.b})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.6.c})$$

La ligne de courant étant infiniment longue, on suppose que les composantes du potentiel-vecteur ne dépendent pas de la variable  $z$ . De là, en combinant les Eqs. (A.4) et (A.6.b), nous avons

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (\text{A.7})$$

où  $r_0$  est une constante à déterminer. De plus, par symétrie seule la composante  $A_z$  existe.

## 2. Cas d'une ligne de courant éloignée de l'origine du repère

On suppose maintenant que la ligne de courant n'est plus centrée mais qu'elle se trouve en un point  $P$  de coordonnées  $(a, \theta)$ . Cherchons à calculer le potentiel-vecteur en un point,  $Q$ , quelconque, de coordonnées  $(r, \phi)$  comme représenté sur la Fig. (2). En appelant  $d$  la distance entre les points  $P$  et  $Q$ , nous pouvons écrire

$$d^2 = \left[ a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) \right] \quad (\text{A.8})$$

Pour  $r < a$ , il est pratique d'écrire l'Eq. (A.8) sous la forme

$$\frac{d}{a} = \left[ 1 - \frac{r}{a} e^{i(\phi - \theta)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{r}{a} e^{-i(\phi - \theta)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } r < a \quad (\text{A.9})$$

d'où

$$\ln \frac{d}{a} = \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \frac{r}{a} e^{i(\phi - \theta)} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \frac{r}{a} e^{-i(\phi - \theta)} \right] \quad \text{pour } r < a \quad (\text{A.10})$$

En utilisant le développement limité de  $\ln(1-x)$ , nous pouvons écrire

$$\ln \frac{d}{a} = -\frac{1}{2} \sum_n \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^n \frac{e^{in(\phi-\theta)}}{n} + \left( \frac{r}{a} \right)^n \frac{e^{-in(\phi-\theta)}}{n} \right] \quad \text{pour } r < a \quad (\text{A.11})$$

Soit

$$\ln \frac{d}{a} = -\sum_n \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^n \frac{1}{n} \cos n(\phi-\theta) \right] \quad \text{pour } r < a \quad (\text{A.12})$$

De même pour  $r > a$ , nous pouvons écrire

$$\frac{d}{a} = \frac{r}{a} \left[ 1 - \frac{a}{r} e^{i(\phi-\theta)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{a}{r} e^{-i(\phi-\theta)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } r > a \quad (\text{A.13})$$

d'où

$$\ln \frac{d}{a} = \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \frac{a}{r} e^{i(\phi-\theta)} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \frac{a}{r} e^{-i(\phi-\theta)} \right] \quad \text{pour } r > a \quad (\text{A.14})$$

En utilisant le développement limité de  $\ln(1-x)$ , nous pouvons écrire

$$\ln \frac{d}{a} = \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{2} \sum_n \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^n \frac{e^{in(\phi-\theta)}}{n} + \left( \frac{a}{r} \right)^n \frac{e^{-in(\phi-\theta)}}{n} \right] \quad \text{pour } r > a \quad (\text{A.15})$$

Soit

$$\ln \frac{d}{a} = \ln \frac{r}{a} - \sum_n \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^n \frac{1}{n} \cos n(\phi-\theta) \right] \quad \text{pour } r > a \quad (\text{A.16})$$

En utilisant les Eqs. (A.7), (A.12) et (A.16), nous pouvons déterminer le potentiel-vecteur

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \frac{\cos n(\phi-\theta)}{n} \quad \text{pour } r < a \quad (\text{A.17})$$

et

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{r}{a} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \frac{\cos n(\phi-\theta)}{n} \right] \quad \text{pour } r > a \quad (\text{A.18})$$

### 3. Cas d'une distribution de courant en coquille

Dans le cas d'un distribution de courants en coquille (voir Fig. (1)), il apparait des symétries représentées sur la Fig. (3) : si l'on sépare cette coquille en quatre quadrants, associés aux axes du repères, alors, pour une ligne de courant d'intensité (+I) du premier quadrant et de coordonnées  $(a, \phi)$ , on peut associer une ligne de courant d'intensité (-I) situé dans le second quadrant et de coordonnées  $(a, \pi - \phi)$ , une ligne de courant d'intensité (-I) situé dans le troisième quadrant et de coordonnées  $(a, \pi + \phi)$  et une ligne de courant d'intensité (+I) situé dans le second quadrant et de coordonnées  $(a, -\phi)$ .

En utilisant l'Eq. (A.17) donnant le potentiel-vecteur pour  $r < a$ , on a pour ce quadruplet de lignes de courants

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{1}{n} (\cos n\phi + \cos n\theta + \sin n\phi + \sin n\theta) \quad \text{pour } r < a \quad (\text{A.19})$$

En utilisant les symétries obtenues, nous avons  $\sin n\phi = 0$  quelque soit  $n$ , et

$$\begin{aligned} \cos n\phi - \cos n(\pi - \phi) + \cos n(-\phi) - \cos n(\pi + \phi) &= 4 \cos n\phi & \text{si } n \text{ est impair} \\ &= 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

On a donc pour  $r < a$

$$A_z(r, \theta) = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} \frac{1}{2k+1} \cos[(2k+1)\phi] \cos[(2k+1)\theta] \quad \text{pour } r < a \quad (\text{A.21})$$

En opérant de même pour  $r > a$ , on a par symétrie

$$A_z(r, \theta) = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1} \frac{1}{2k+1} \cos[(2k+1)\phi] \cos[(2k+1)\theta] \quad \text{pour } r > a \quad (\text{A.22})$$

Nous pouvons maintenant calculer le potentiel-vecteur associé à notre distribution en coquille. En décomposant la coquille comme une somme de lignes de courant et en utilisant l'Eq. (A.22), nous avons

$$dA_z(r, \theta) = \frac{2\mu_0 dI}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} \frac{1}{2k+1} \cos[(2k+1)\phi] \cos[(2k+1)\theta] \quad \text{pour } r < a \quad (\text{A.23})$$

avec

$$dI = J_c da \quad (\text{A.24})$$

où  $J_c$  est la densité de courant circulant dans la coquille. De l'Eq. (A.23), on tire

$$A_z(r_f, \theta) = \frac{2\mu_0 J_c}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} \cos[(2k+1)\phi] \cos[(2k+1)\theta] a da d\phi \quad (\text{A.25})$$

où  $a_{\min}$  et  $a_{\max}$  sont respectivement le rayon intérieur et extérieur de la coquille (voir Fig. 4).  $a_{\max}$  est égale au rayon du filament,  $r_f$ , et  $a_{\min}$  est définie par

$$a_{\min} = \frac{er_f}{\sqrt{1 - (1 - e^2) \sin^2 \phi}} \quad (\text{A.26})$$

$e$  étant l'excentricité de l'ellipse qui représente la limite intérieur de la coquille.

En première approximation, on peut calculer le potentiel-vecteur à partir de l'Eq. (A.25) développé au premier ordre i.e.

$$A_z(r_f, \theta) = \frac{2\mu_0 J_c}{\pi} r \cos \theta \int_{a_{\min}}^{r_f} da \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \quad (\text{A.27})$$

D'où

$$A_z(r_f, \theta) = \frac{2\mu_0 J_c}{\pi} r_f \cos \theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r_f - a_{\min}) \cos \phi d\phi \quad (\text{A.28})$$

En utilisant l'Eq. (A.26), cette équation peut s'écrire

$$A_z(r_f, \theta) = \frac{2\mu_0 J_c}{\pi} r_f \cos\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( r_f - \frac{er_f}{\sqrt{1 - (1 - e^2) \sin^2 \phi}} \right) \cos\phi d\phi \quad (\text{A.29})$$

Tous calculs fait, il vient

$$A_z(r_f, \theta) = \frac{2\mu_0 J_c}{\pi} r_f^2 \cos\theta \left( 1 - \frac{e \arcsin \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}} \right) \quad (\text{A.30})$$

En utilisant l'Eq. (A.30), on en déduit l'induction magnétique  $\vec{B}$

$$B_x = 0 \quad (\text{A.31.a})$$

$$B_y(r_f, \theta) = -\frac{2\mu_0 J_c}{\pi} r_f \left( 1 - \frac{e \arcsin \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}} \right) \quad (\text{A.31.b})$$

$$B_z = 0 \quad (\text{A.31.c})$$

## Annexe B : Calcul du moment magnétique associée à une distribution en coquille

Considérons à présent un filament de longueur élémentaire  $dl$ . La distribution de courants en coquille peut être décomposé en une somme de boucles élémentaires parallèles à l'axe du filament comme représenté sur la Fig. (5). Le moment magnétique créé par une boucle élémentaire s'écrit

$$d^2 \vec{m} = -\vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) 2x dl dx dy \quad (\text{B.1})$$

où  $2x$  représente la largeur de la boucle et  $dy$  sa hauteur.

En intégrant sur la surface de la coquille, il vient

$$\vec{m} = -2\vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) dl \left[ \int_{-a}^a \left( \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} x dx \right) dy \right] \quad (\text{B.2})$$

où  $a$  est le rayon du filament.

$x_{\min}(y)$  est donné par l'équation de l'ellipse :

$$\frac{x_{\min}^2(y)}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{soit} \quad x_{\min}^2(y) = b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \quad (\text{B.3})$$

où  $b$  et  $a$  représentent le demi petit axe et le demi grand axe de l'ellipse (égale au rayon du filament), comme représenté sur la Fig. (5), et  $x_{\max}(y)$  se déduit de l'équation du cercle :

$$x_{\max}^2(y) + y^2 = a^2 \quad \text{soit} \quad x_{\max}^2(y) = a^2 - y^2 \quad (\text{B.4})$$

D'où pour le moment magnétique:

$$\vec{m} = -2\vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) dl \left[ \int_{-a}^a \left( \frac{x^2}{2} \right)_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} dy \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{m} = -\vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) dl \int_{-a}^a \left[ (a^2 - y^2) - b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \right] dy \quad (\text{B.6})$$

Soit en introduisant l'excentricité  $e = b/a$  et en poursuivant l'intégration



$$\vec{m} = -\vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) dl \left[ \left( a^2 y - \frac{y^3}{3} \right)_{-a}^a - b^2 \left( y - \frac{y^3}{3a^2} \right)_{-a}^a \right] \quad (\text{B.7})$$

D'où

$$\vec{m} = -\vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) dl \left[ \left( 2a^3 - \frac{2a^3}{3} \right) - b^2 \left( 2a - \frac{2a^3}{3a^2} \right) \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\vec{m} = -\vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) dl \left[ \left( 2a^3 - \frac{2a^3}{3} \right) - e^2 \left( 2a^3 - \frac{2a^3}{3} \right) \right] \quad (\text{B.9})$$

Finalement le moment magnétique s'écrit

$$\vec{m} = -\frac{4}{3} \vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) dl a^3 (1 - e^2) \quad (\text{B.10})$$

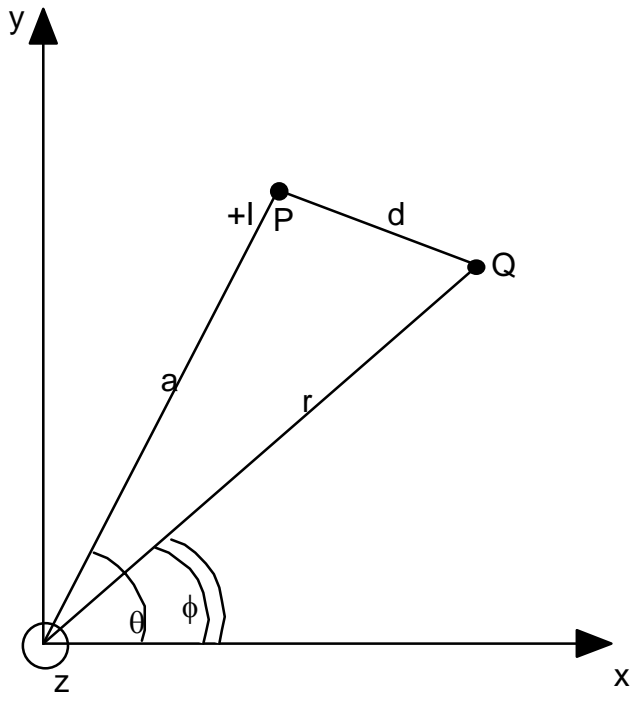
De la dernière équation, nous pouvons déterminer le moment magnétique par unité de longueur de filament,  $\vec{M}_1$

$$\vec{M}_1 = -\frac{4}{3} \vec{J}_c(B_e, T, \varepsilon) a^3 (1 - e^2) \quad (\text{B.11})$$

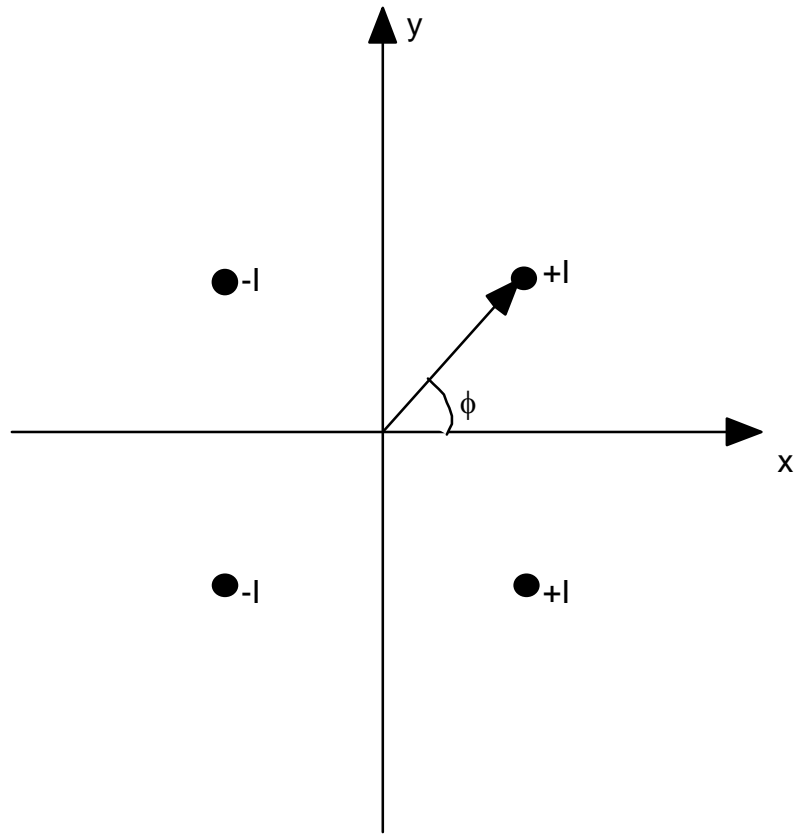
## **LISTE DES FIGURES**

- Figure 1. Modélisation des couronnes de courant de magnétisation avec une limite intérieure elliptique [3,4] : (a) montée en champ à partir d'un état vierge, (b) pénétration complète et (c) descente en champ après pénétration complète.
- Figure 2. Représentation d'une ligne de courant éloignée du centre du repère.
- Figure 3. Représentation des symétries associées à une distribution des courants de magnétisation en coquille.
- Figure 4. Représentation de la distribution des courants de magnétisation en coquille.
- Figure 5. Représentation d'une boucle de courant élémentaire issue de la distribution des courants de magnétisation en coquille.

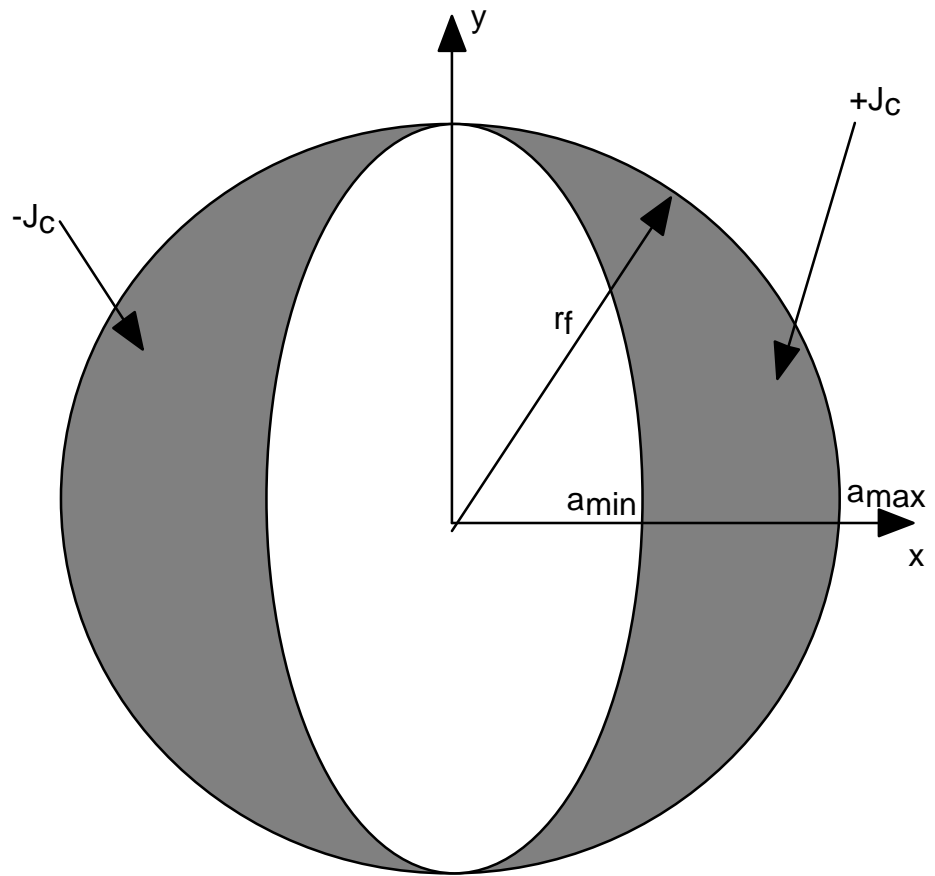




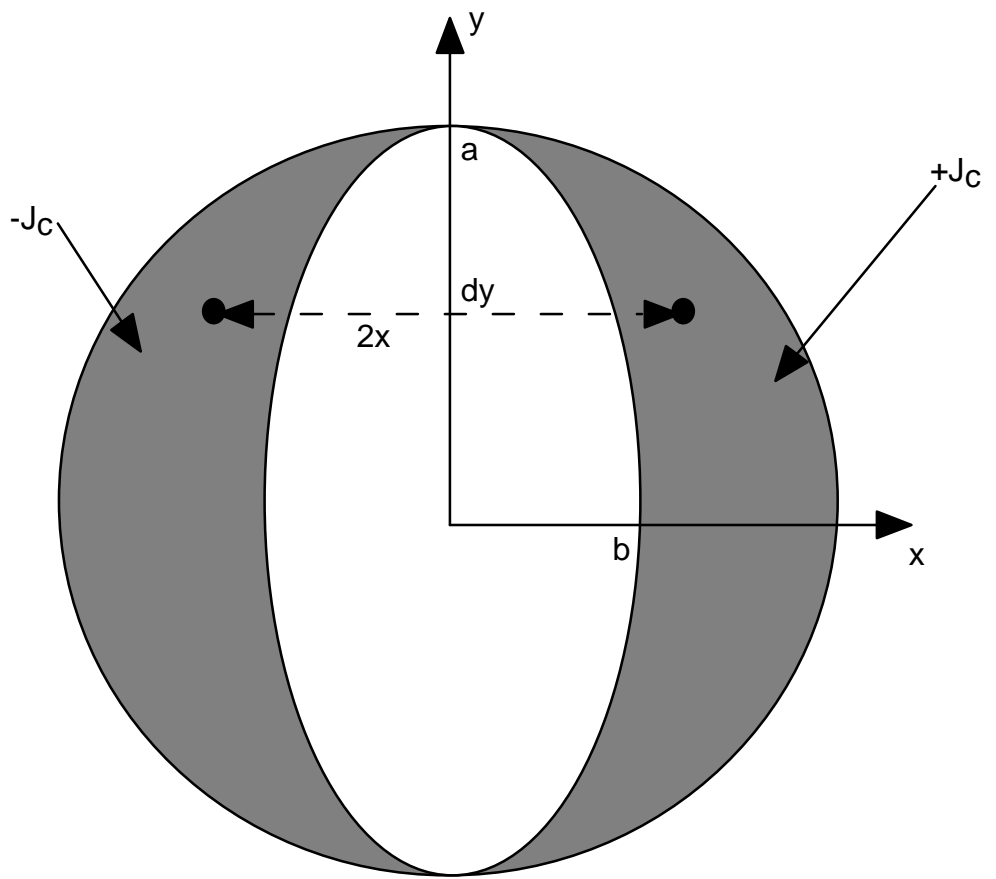
**Fig. 2**



**Fig. 3**



**Fig. 4**



**Fig. 5**