

Université Toulouse III - Paul Sabatier

THESE pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE TOULOUSE III

Discipline : Astrophysique - Hydrodynamique et modélisation

présentée par

Pascal GALLETTI

**De l'instabilité advective-acoustique aux
explosions asymétriques des Supernovae de
type II**

soutenue le 25/10/2005 devant le jury :

Prof. Rieutord Michel	Président
DR-CNRS. Barret Didier	Directeur de thèse
Dr. Foglizzo Thierry	Directeur de thèse
Dr. Janka Hans-Thomas	
DR-CNRS. Mochkovitch Robert	Rapporteur
Prof. Müller Ewald	Rapporteur

**Service d'Astrophysique, DSM/DAPNIA/CEA-Saclay
Centre d'Etude Spatiale des Rayonnements, Toulouse**

Université Toulouse III - Paul Sabatier

THESE pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE TOULOUSE III

Discipline : Astrophysique - Hydrodynamique et modélisation

présentée par

Pascal GALLETTI

**De l'instabilité advective-acoustique aux
explosions asymétriques des Supernovae de
type II**

soutenue le 25/10/2005 devant le jury :

Prof. Rieutord Michel	Président
DR-CNRS. Barret Didier	Directeur de thèse
Dr. Foglizzo Thierry	Directeur de thèse
Dr. Janka Hans-Thomas	
DR-CNRS. Mochkovitch Robert	Rapporteur
Prof. Müller Ewald	Rapporteur

**Service d'Astrophysique, DSM/DAPNIA/CEA-Saclay
Centre d'Etude Spatiale des Rayonnements, Toulouse**

Résumé

Auteur : Pascal GALLETTI

Titre : De l'instabilité advective-acoustique aux explosions asymétriques des Supernovae de type II

Directeur de thèse : Thierry FOGLIZZO (SAP, CEA) & Didier BARRET (CESR)

Lieu et Date de soutenance : CEA-Saclay, 25/10/2005

Résumé :

Le cycle advectif-acoustique est un mécanisme hydrodynamique qui se caractérise par le couplage entre des ondes advectées (entropie, vorticité) et des ondes acoustiques. Déjà étudié en physique (sifflement de la bouilloire, grondement des statoréacteurs), il fut introduit en astrophysique par l'étude de l'instabilité du flot de Bondi-Hoyle-Lyttleton. Nous proposons dans ce travail de thèse d'expliquer l'asymétrie des explosions Supernovae de type II par ce cycle. Une première étude du cycle dans le cadre plus classique de l'accrétion sur une surface solide (naine blanche, étoile à neutrons) permet, par le calcul de modes propres d'oscillation mais également par l'étude d'un modèle simplifié, de mettre en avant le rôle joué par le cycle advectif-acoustique dans l'instabilité de cette accrétion. Fort de ces résultats et de simulations numériques encourageantes, une modélisation du flot dans la phase "stationnaire" des Supernovae gravitationnelles montre que le cycle advectif-acoustique est une explication naturelle à l'instabilité non-sphérique du choc, dominée par un mode $l = 1$ qui devrait être responsable des pulsar kicks observationnels.

Mots-clés : Accrétion - Hydrodynamique - Instabilités - Ondes de choc - Supernovae

Discipline : Astrophysique - Hydrodynamique et modélisation

Laboratoires :

CESR, 9 av du Colonel Roche, 31028 Toulouse Cedex 04
SAP-CEA, Orme des Merisiers, 91191 Gif sur Yvette

Remerciements

J'adresse mes plus sincères remerciements à :

L'ensemble du Service d'Astrophysique (SAp) du CEA-Saclay et son chef Pierre-Olivier Lagage, les secrétaires, le personnel de service, le groupe théorie et modélisation du SAp et le Professeur Jean-Pierre Chièze, le Centre d'Etude Spatiale des Rayonnements (CESR) de Toulouse, l'ensemble de l'Ecole Doctorale Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace de Toulouse et sa secrétaire Marie-Claude Cathala, l'Ecole Doctorale Astronomie et Astrophysique d'Ile-de-France et les responsables des enseignements post-DEA : Ghislaine Renoux et le Professeur Brigitte Rocca.

Mes deux directeurs de thèse Thierry Foglizzo du SAp et Didier Barret du CESR, et Philippe Ferrando qui fut mon directeur en attendant l'habilitation de Thierry.

Mon jury de thèse : le Professeur Michel Rieutord de l'OMP, mes deux rapporteurs les Professeurs Robert Mochkovitch de l'IAP et Ewald Müller du MPA Garching, notre collaborateur Hans-Thomas Janka du MPA Garching.

Nos collaborateurs Leonhard Scheck du MPA Garching et Maximilian Ruffert de l'Université d'Ebimbourg.

Mes co-bureau Yann et Matthias (et Amélie qui doit en plus s'occuper maintenant de Miguel), Nicolas mais pas sa raquette de badminton, Renaud et Sandrine (quoique, Sandrine faut voir), Delphine et John, Cédric et la numérologie, Samuel et bien sûr les autres thésards, post-docs, docteurs du second étage, les footeux mauvais perdant du premier étage, les footballeurs du mercredi-jeudi-s'il-fait-beau, Roland Lehoucq (pour Astrorobots), et Vincent Lonjou, mon "correspondant" à Toulouse.

Joël et Anne-Marie Colonna, le "village" : Jean-Marc, Guillaume et Anne-Marie, Vincent, Alain et Sonia, Alex et Elisabeth, Julien, Jeff, Philippe ... ; le "klub" : Aurèle, Sylvain, Maxime, Stéphane, Pierre et Gaëlle ; Nadège.

Maman, Papa et Annie, Caro, Sabrina et Jean-Claude (et le petit nouveau : Jean-Baptiste), Jean-Marc, Jean-Claude et Claudie et toute ma famille.

Et comme toujours le meilleur pour la fin : Céline.

Table des matières

Introduction	9
1 Présentation du Cycle Advectif-Acoustique	15
1.1 Mécanisme	15
1.2 Historique	18
1.3 Contexte : Le flot stationnaire	20
1.4 Analyse linéaire : Le flot perturbé	26
1.5 Approximation WKB	30
1.6 Conditions limites	33
1.6.1 Conditions limites au choc	33
1.6.2 Condition limite à la surface de l'étoile	36
1.7 Etude simplifiée du cycle : Cas adiabatique	36
1.7.1 Description	36
1.7.2 Un oscillateur excité	37
1.7.3 Importance de la condition limite inférieure	40
2 Stabilité des Chocs d'Accrétion	43
2.1 Cas des trous noirs	43
2.1.1 Accrétion par vent	43
2.1.2 Accrétion radiale	45
2.2 Accrétion sur une surface solide	47
2.2.1 Les naines blanches	47
2.2.2 Accrétion sur une étoile à neutrons	50
2.3 Conclusion	53
3 Toy-model	57
3.1 Description du flot stationnaire	59

3.1.1	Une couche mince de refroidissement	59
3.1.2	Une marche adiabatique	62
3.2	Les perturbations	62
3.3	Conditions limites	69
3.3.1	Un choc	69
3.3.2	Condition limite inférieure	71
3.4	Calcul de l'efficacité totale du cycle	75
3.5	Conclusion	79
4	Accrétion sur une Surface Solide	83
4.1	Description du problème	83
4.2	Résultats	86
4.3	Spectre de l'instabilité	98
4.4	Conclusion	101
5	Supernovae Gravitationnelles	105
5.1	Présentation	105
5.2	Des Explosions Asymétriques	110
5.2.1	Mélange du matériel éjecté	111
5.2.2	Spectro-polarimétrie des Supernovae	112
5.2.3	Connexion Supernovae-Sursauts Gammas	113
5.2.4	Pulsar Kicks	114
5.3	Modélisation des Supernovae de type II	118
5.3.1	Rayons caractéristiques	119
5.3.2	Chauffage et refroidissement	121
5.3.2.1	Capture électronique : absorption et émission	122
5.3.2.2	Bremsstrahlung, destruction de paires, diffusion	123
5.4	Calcul des modes propres dans le cas Supernovae de type II	124
5.4.1	Premiers résultats	124
5.4.2	Variations du taux de croissance	126
5.5	Conclusion	131
	Conclusion	135
	Rappel des principaux résultats	135
	Perspectives	137
	Annexes	143

A	Normalisation de la fonction de refroidissement	143
A.1	Cas sphérique	143
A.2	Cas du toy-model	144
B	Calculs numériques des modes propres d'oscillation	145
C	Toy-model	151
C.1	Exemple de calcul	151
C.2	De l'aspirateur au mur	152
C.3	Le cycle purement acoustique	155
D	Simulations numériques simplifiées de Supernovae gravitationnelles	157
E	Publication référée	159
	Table des figures	176
	Bibliographie	183

Introduction

Même avec un peu d'imagination, il est difficile de trouver un lien entre la ménagère qui, après une dure journée, décide lors de sa pause de se préparer une petite tasse de thé, et les étapes finales de l'évolution stellaire, les Supernovae, ces explosions violentes et primordiales. Même avec un peu de volonté, il n'est pas évident de trouver un fil conducteur entre un avion à réaction lorsqu'il fend bruyamment les airs et un pulsar, une étoile à neutrons en rotation, lorsqu'elle s'élanche dans le milieu interstellaire. Ce travail de thèse propose un mécanisme commun à ces quatre phénomènes.

En plus d'un demi-siècle, l'étude des Supernovae de type II, les Supernovae gravitationnelles, a fait des progrès considérables. Depuis la proposition d'une première explication de ces explosions surpuissantes par Zwicky en 1932, jusqu'aux récentes simulations numériques tri-dimensionnelles [42], le chemin parcouru est immense tant les Supernovae sont le lieu de nombreux domaines de la physique : hydrodynamique, physique nucléaire, relativité... Malgré ces avancées, de nombreux problèmes y compris le mécanisme même de l'explosion restent encore irrésolus [67]. Très étroitement lié à l'explosion, le mouvement rapide des pulsars nés lors de la Supernova, n'est pas encore expliqué : une forte asymétrie de l'explosion inculquerait une accélération suffisante à la proto-étoile à neutrons, au coeur de la Supernova, pour lui conférer une telle vitesse. Le travail présenté ici montre qu'un mécanisme d'instabilité purement hydrodynamique, relativement simple, explique de manière naturelle l'asymétrie de l'explosion. Ce mécanisme nous vient de l'étude des sifflements d'une bouilloire mais également des statoréacteurs. Dans le cadre astrophysique où il ne fut introduit qu'en l'an 2000, il répond au nom d' "instabilité advective-acoustique" [40].

L'instabilité advective-acoustique caractérise le couplage entre des perturbations d'entropie et de vorticité advectées avec un flot et des perturbations acoustiques. Ce couplage s'appuie généralement sur deux régions plus ou moins étendues et distinctes :

une première région où les ondes sonores donneront naissance à des ondes advectées et une deuxième où les ondes advectées exciteront des ondes sonores. Entre perturbations advectées et ondes acoustiques, il se crée donc un cycle. L'utilisation du cycle advectif-acoustique en astrophysique découle de la volonté d'expliquer l'instabilité, observée numériquement, du flot d'accrétion par vent sur un trou noir, un flot de type Bondi-Hoyle-Lyttleton [40]. Dans cette configuration de flot, les deux régions de couplage des perturbations sont d'une part un choc d'accrétion au dessus de la surface d'un objet compact, et d'autre part une zone plus ou moins étendue d'inhomogénéités du flot, les causes de ces inhomogénéités pouvant être diverses (gravité, refroidissement...).

Ce travail de thèse porte sur l'étude du cycle advectif-acoustique dans le cas de la stabilité des chocs d'accrétion. De part la configuration du flot d'accrétion sur un objet compact, la majeure partie de ce travail de thèse consistera en la prise en compte de processus non-adiabatiques dans les descriptions du flot et de leur influence sur le cycle advectif-acoustique.

Notre raisonnement est le suivant :

Les observations et les simulations de chocs d'accrétion sont la traduction d'une physique très complexe. De nombreux ingrédients (hydrodynamique, transfert radiatif, ...) s'y mêlent et il n'est pas toujours évident de mettre en avant un mécanisme physique dominant. Que ce soit dans le cas d'une naine blanche [65], dans le cas d'un trou noir [84] ou enfin dans celui d'une étoile à neutrons [50], la stabilité de ces chocs a engendré une littérature importante. Dans la majeure partie des cas, les travaux se limitent à des études numériques et analytiques de modes propres d'oscillation du choc comparés à ceux obtenus lors de simulations numériques plus complexes (voir (a) et (b) dans la figure 1). Ces études constituent une avancée dans la compréhension et la caractérisation de la stabilité du choc d'accrétion mais ne fournissent en aucun cas une explication physique du phénomène : peu de mécanismes physiques sont proposés.

L'originalité de ce travail est, au delà de compléter les travaux d'études de stabilité, de proposer un mécanisme physique robuste qui permet d'expliquer ces résultats : le cycle advectif-acoustique. Nous allons réaliser une étude de stabilité linéaire (voir (b) dans la figure 1), premier pas vers une meilleure compréhension de la physique observée. Ce type d'étude permet de caractériser l'instabilité, d'en faire ressortir les propriétés. Une telle étude de stabilité ne permet pas forcément de mettre le doigt sur l'origine physique de l'instabilité : savoir que certains flots d'accrétion sont instables n'explique pas pourquoi. L'utilisation d'un modèle simplifié (voir (c) dans la figure 1), un toy-model, où les rôles de chacun seront plus évidents, nous permet de mieux comprendre les mécanismes fondamentaux à l'oeuvre dans l'instabilité.

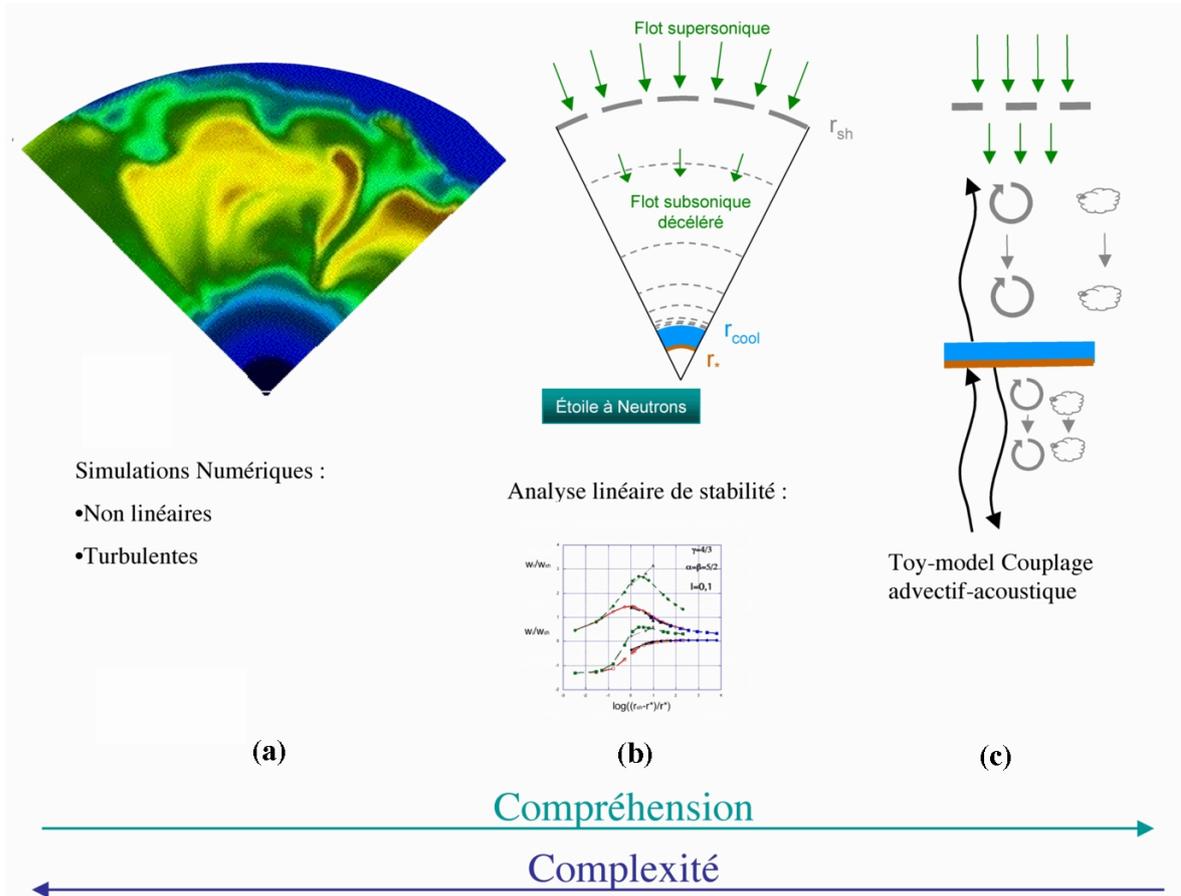


FIG. 1: A gauche (a), les résultats d'une simulation numérique de Supernova gravitationnelle [79]. Au centre (b), le schéma de l'accrétion radiale sur une étoile à neutrons et les résultats de calculs de modes linéaires d'oscillation. A droite (c), la présentation schématique d'un toy-model.

L'organisation de ce manuscrit de thèse est donc la suivante. Dans un premier temps, l'acteur principal de ce travail, le cycle advectif-acoustique, est présenté. Le mécanisme du cycle entre les diverses ondes ainsi que les zones de couplages seront détaillés. On s'attache ensuite à décrire le cadre astrophysique dans lequel le cycle est étudié : un choc d'accrétion sur un objet compact. Les méthodes permettant l'étude numérique et analytique du cycle ainsi que le choix des conditions limites sont également exposés. Cette première partie s'achève sur l'étude d'un cas simple : le cas adiabatique. La deuxième partie de ce travail de thèse s'attache à présenter divers travaux et résultats obtenus dans les cas classiques de chocs d'accrétion, c'est à dire l'accrétion sur un

trou noir, sur une naine blanche et enfin sur une étoile à neutrons. Cette partie permet de rappeler et de détailler la manière dont l'instabilité advective-acoustique a fait son entrée en astrophysique : par l'étude de l'instabilité du flot de Bondi-Hoyle-Lyttleton. Cette étude a été l'objet d'un article qui sera joint en annexe.

Le troisième chapitre décrit un modèle simplifié, un toy-model. Le cycle advectif-acoustique y est décomposé en quatre étapes : advection des perturbations à travers une zone de refroidissement, excitation des ondes sonores, propagation des ondes vers un choc et enfin création d'ondes advectées par la perturbation du choc par les ondes sonores. Ce modèle permet d'étudier l'impact des phénomènes non-adiabatiques sur le cycle par le calcul de l'efficacité du cycle advectif-acoustique en fonction de divers paramètres.

Armé de ce modèle, nous présentons dans la quatrième partie de cette thèse, les résultats d'une analyse linéaire de stabilité de l'accrétion sur une surface solide (naine blanche, étoile à neutrons) . Cette analyse se démarque d'un travail réalisé en 1992 [50] notamment par la prise en compte de perturbations de vitesse transverse au niveau du choc. Dans un premier temps, les résultats sur le mode fondamental et le premier harmonique sont présentés. Puis, nous élargissons ces résultats à un domaine de fréquence plus large. L'analyse de l'ensemble des modes obtenus permet de proposer le cycle advectif-acoustique comme mécanisme responsable de l'instabilité.

Ces nouveaux résultats amènent à la dernière partie de ce travail de thèse. L'étude d'un choc d'accrétion au-dessus une étoile à neutrons présente de nombreuses similarités avec celle du choc "en panne" au dessus de la proto-étoile à neutrons au centre d'une Supernova gravitationnelle. Après un récapitulatif concernant les Supernovae de type II et de leur asymétrie, nous présentons une modélisation du flot de la Supernova gravitationnelle, moins d'une seconde après le rebond. En adaptant nos méthodes de calculs (calculs de modes propres et toy-model) à ce problème, nous montrons comment cette première étude du cycle advectif-acoustique dans le cas des Supernovae, permet de proposer le cycle comme mécanisme naturellement responsable de l'asymétrie des explosions Supernovae de type II.

CHAPITRE 1

Présentation du Cycle Advectif-Acoustique

Ce premier chapitre est à la fois une introduction générale à l'instabilité advective-acoustique mais également à nos méthodes de calculs. Le mécanisme basique de l'instabilité y est d'abord présenté dans le cadre de son utilisation en astrophysique. Un petit historique permet ensuite de rappeler l'origine de ce cycle. Les sections suivantes s'attachent à décrire la manière dont nous procédons pour étudier ce cycle : nous calculons d'abord un flot stationnaire que nous perturbons ensuite. L'analyse linéaire et l'approximation WKB permettent d'étudier ces perturbations ainsi que leurs conditions limites. La dernière partie de ce chapitre s'intéresse à un cas spécifique, le cas purement adiabatique, qui permet de nombreuses simplifications.

1.1 Mécanisme

Le mécanisme générale du cycle advectif-acoustique est la suivante (figure 1.1) : supposons que nous soyons en présence d'un flot radial, en chute sur un objet compact de rayon r_* . Ce flot fut étudié dans un contexte adiabatique par Bondi [13] et est généralement appelé "flot de Bondi". Notre flot passe par un choc au niveau du rayon, noté r_{sh} . Si ce flot est perturbé, il va donner naissance, entre autres, à une onde de pression se propageant en direction du choc. Lorsque cette onde sonore atteint le choc, elle le perturbe. Cette déformation donne lieu à une onde d'entropie et une onde de vorticité. Ces deux dernières ne peuvent être qu'advectées avec le flot, au contraire des ondes sonores qui ont deux directions de propagation : avec ou contre le flot. Au cours de leur advection jusqu'à la surface de l'étoile, elles produisent, lorsqu'elles rencontrent des gradients, de nouvelles perturbations de pression. Ces ondes sonores vont à nouveau

remonter le flot pour perturber le choc et boucler ainsi le cycle advectif-acoustique. Ce cycle est donc inévitable dans un flot d'accrétion choqué.

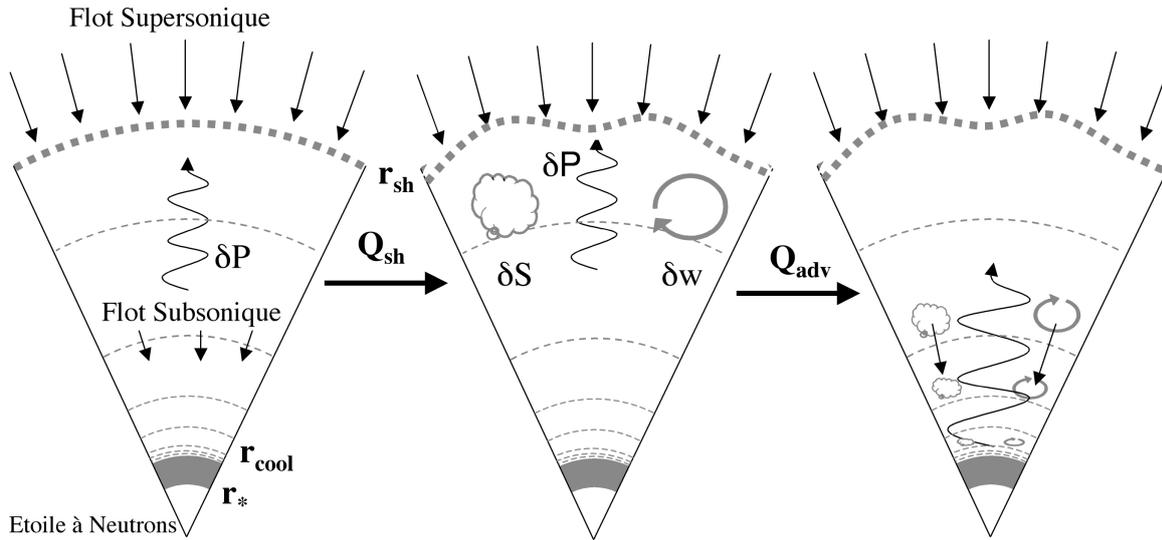


FIG. 1.1: Schéma du mécanisme du cycle entropique-acoustique dans l'accrétion sur une étoile à neutrons. La zone grisée correspond à une zone où le refroidissement domine. Voir texte pour plus d'explications.

Lors de cette description de l'évolution des perturbations, de nombreux phénomènes ont été négligés. Notamment, lors de la perturbation du choc par l'onde remontant le flot, en plus des deux ondes entropique et vorticale, une onde sonore descendante est également créée par réflexion. Cette onde se propage en direction de l'objet compact. Elle va pouvoir être réfractée par les gradients du flot ou bien se réfléchir sur la surface de l'objet. Il existe donc un cycle purement acoustique dans notre flot, entre ondes sonores montantes et descendantes. Ce cycle est généralement stable [40, 34] et ne joue qu'un rôle marginal de modulateur.

Il est également nécessaire de faire remarquer que si dans certains cas simples, il est facile de séparer les composantes purement entropique et purement tourbillonnaire du cycle advectif-acoustique, les cas plus réalistes sont moins accommodants : l'ensemble des perturbations du flot est couplé, et seules des hypothèses importantes permettent de le démembrer.

La description du cycle advectif-acoustique permet de définir des efficacités et des grandeurs caractéristiques. On peut définir deux efficacités de conversion des perturbations.

Tout d'abord, au niveau du choc, on définit l'efficacité de création d'entropie (δS) et/ou de vorticité (δw) par une onde sonore que l'on note respectivement : $Q_{-,sh}^S$ et $Q_{-,sh}^w$. Généralement, ces deux efficacités s'obtiennent assez simplement en raisonnant sur les conditions de saut au choc.

On définit également des efficacités de création d'ondes sonores par les gradients du flot lors de l'advection d'un grumeau d'entropie ou d'un vortex, respectivement : $Q_{S,adv}^-$ et $Q_{w,adv}^-$. Ces deux nouvelles grandeurs sont de caractère intégral : elles évaluent, tout au long du flot, la production d'ondes sonores. Leur calcul n'est donc pas toujours simple. La prépondérance de certaines zones du flot pour la création d'ondes sonores peut permettre de les évaluer simplement.

La définition de cet ensemble de grandeurs permet celle de l'efficacité globale du choc, Q . Dans le cas d'un cycle purement entropique par exemple, une perturbation d'entropie initialement cr ee au choc, $\delta S(t_0, r_{sh})$ est advectée vers l'étoile. Lors de sa descente, elle cr ee avec une efficacité $Q_{S,adv}^-$, un feedback acoustique qui remonte vers le choc. Ce flux acoustique induit une nouvelle perturbation d'entropie $\delta S(t_0 + \tau, r_{sh})$ avec une efficacité $Q_{-,sh}^S$, lorsqu'il atteint le choc et le déforme. Le temps τ correspond donc à la durée d'un cycle : une boucle du cycle advectif-acoustique équivaut grossièrement à un temps d'advection t_{adv} du choc à la surface de l'étoile auquel s'ajoute un temps acoustique de propagation des ondes sonores de l'étoile au choc. Le flot étant fortement subsonique, la durée d'un cycle est dominée par la phase d'advection :

$$\tau \sim \int_{r_*}^{r_{sh}} \frac{1}{1 - \mathcal{M}} \frac{dr}{|v|} \sim t_{adv} \equiv \int_{r_*}^{r_{sh}} \frac{dr}{|v|} \quad (1.1)$$

où v désigne la vélocité du fluide et \mathcal{M} désigne son nombre de Mach.

L'efficacité globale du cycle s'écrit alors :

$$Q = Q_{-,sh}^S Q_{S,adv}^- = \frac{\delta S(t_0 + \tau, r_{sh})}{\delta S(t_0, r_{sh})} \quad (1.2)$$

Dans notre convention de signe, les perturbations du flot dépendent du temps en étant proportionnelles à $e^{-i\omega t}$ où la partie imaginaire de la pulsation, ω_i , est le taux de

croissance des perturbations donc du cycle advectif-acoustique. L'équation de dispersion qui doit être vérifiée par ce taux est de la forme :

$$1 = Qe^{i\omega\tau} + Re^{i\omega\tau_{ac}} \quad (1.3)$$

où R et τ_{ac} se rapportent au cycle purement acoustique [40]. Ce cycle étant supposé négligeable, le taux de croissance du cycle advectif-acoustique s'exprime donc par :

$$\omega_i = \frac{1}{\tau} \log(Q_{-,sh}^S Q_{S,adv}^-) \quad (1.4)$$

Si ce taux est positif ($Q_{-,sh}^S Q_{S,adv}^- > 1$), les perturbations croissent exponentiellement avec le temps : le cycle est instable. S'il est négatif, les perturbations s'amortissent, le cycle est stable.

1.2 Historique

Le cycle advectif-acoustique n'est pas un mécanisme physique nouveau. Il a, en effet, déjà été le sujet d'études dans deux domaines de la physique autre que l'astrophysique. Dans les deux cas, le cycle fait intervenir un couplage entre perturbations advectées et feedback acoustique dans un fluide en mouvement subsonique. Son étude fut notamment motivée par la volonté d'augmenter l'efficacité de combustion des réacteurs mais également d'en diminuer les nuisances sonores.

Les physiciens des réacteurs type statoréacteurs ("Ramjet"), se sont intéressés à ce type de mécanisme. Le principe de fonctionnement du statoréacteur date du début du 20ème siècle. Il fut imaginé par Lorin en 1913. Le réacteur à combustion subsonique ou statoréacteur, se caractérise par l'intégration d'un moteur à propergol solide ou liquide dans la chambre du statoréacteur, destinée à l'accélération, et par l'utilisation d'entrées d'air latérales. Le fonctionnement en est le suivant : De l'air pénètre par les entrées latérales. Il passe par un diffuseur dont le but est d'en diminuer la vitesse. Cette diminution crée une compression du gaz. Une chambre de combustion permet ensuite d'ajouter chaleur et masse à l'air comprimé par la combustion du fuel (propergol). Une tuyère est utilisée pour convertir l'énergie thermique des produits de combustion en énergie cinétique et accélérer fortement le gaz. C'est cette énergie cinétique qui est responsable de la propulsion.

Une étude [1] a montré qu'une instabilité de combustion pouvait se développer dans un réacteur de ce type. Le principe est en fait celui d'un cycle entropique-acoustique. On peut schématiquement le décrire de la manière suivante (figure 1.2) : lors de la combustion, un grumeau de fuel est légèrement mal brûlé. Il constitue une perturbation d'entropie au sein du reste du mélange. Ce grumeau se propage jusqu'à la tuyère avec le gaz. Au niveau de la tuyère, les gradients du flot créent un couplage de la perturbation d'entropie avec les ondes sonores : du son est émis et peut se propager dans le mélange de combustion. En perturbant à nouveau la combustion, l'onde sonore va alors donner naissance à un nouveau grumeau, une nouvelle perturbation d'entropie. Il se met donc en place un cycle entre onde d'entropie, advectée de la zone de combustion à la tuyère, et onde de pression se propageant de la tuyère à la zone de combustion. Ce cycle a clairement été identifié [72, 20]. Des données expérimentales ont dévoilé une instabilité à basse fréquence qui lui a valu le nom "d'instabilité de grondement" ("rumble instability")[1].

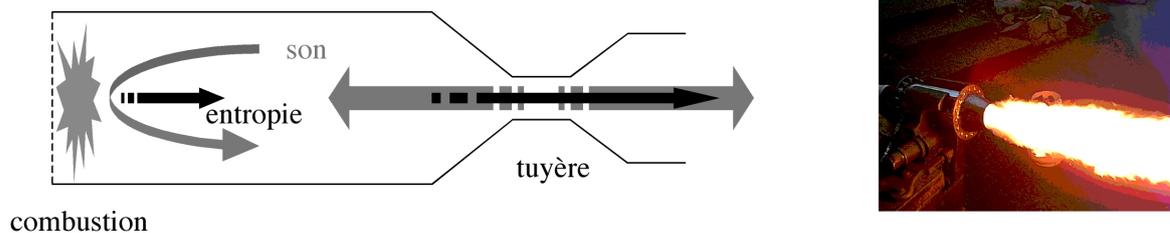


FIG. 1.2: Schéma du cycle entropique-acoustique dans la chambre de combustion d'un réacteur.

Le cycle advectif-acoustique a également été identifié dans des systèmes propulsifs à propergol solide. L'instabilité observée est du même type que celle responsable du sifflement d'une bouilloire. Dans ces deux cas, le mécanisme de l'instabilité est un cycle de type vortical-acoustique. Le principe en est le suivant (figure 1.3) : Un flot (gaz propulsifs, vapeur d'eau) entre dans une chambre en passant par exemple à travers un orifice, une embouchure (l'entrée du bec de la théière). Au niveau de cette entrée, le flot rencontre une zone de cisaillement. Des perturbations de vorticité sont amplifiées par une instabilité de type Kelvin-Helmholtz. Tout comme les grumeaux d'entropie précedents, ces petits tourbillons sont advect s avec le flot vers la sortie de la chambre. Lorsqu'ils rencontrent un obstacle (la sortie du moteur, l'échappement de la théière), les tourbillons sont déformés, tordus, et donnent naissance à des perturbations acoustiques qui vont se propager dans la chambre. Une onde sonore peut alors remonter le

flot jusqu'à la zone d'origine des vortex. A ce niveau, elle perturbe le flot entrant et engendre de nouvelles perturbations de vorticité. On est donc ici en présence d'un cycle où se couplent onde sonore et onde de vorticité. Ce type d'instabilité a été l'objet de nombreuses études [22, 89, 88]. En effet, cette instabilité peut être responsable de d t riations et de vibrations dans les moteurs d'engins spatiaux telles les fusées Ariane [78]. De par sa nature, cette instabilité se retrouve généralement dans ces travaux sous le nom d'instabilité "aéroacoustique" [78].

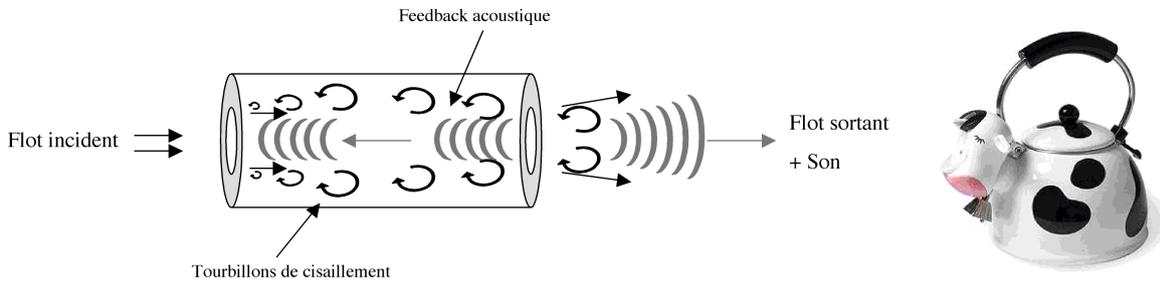


FIG. 1.3: Schéma du cycle vortical-acoustique dans le bec d'une bouilloire.

Le cycle advectif-acoustique ne fut introduit en astrophysique qu'en l'an 2000 par Foglizzo et Tagger [40]. Il a ensuite été étudié, comme nous le verrons, dans divers contextes reliés à l'accrétion sur un objet compact [33, 34, 36].

1.3 Contexte : Le flot stationnaire

Notre étude astrophysique du cycle advectif-acoustique porte sur la stabilité ou non d'un flot stationnaire bien défini. Supposons que de la matière, un gaz parfait ($\frac{P}{\rho} \propto T$), défini par son index polytropique γ ($1 < \gamma \leq 5/3$), est accrété par un objet central de masse M , une sphère de rayon fini r_* . Infiniment loin de cette étoile, le gaz est supposé au repos avec une température finie T_∞ . Cet  tat nous sert à normaliser les grandeurs physiques du gaz. Ainsi, les distances sont normalisées par $\frac{GM}{c_\infty^2}$ et les vitesses par la vitesse du son   l'infini : $c_\infty = \sqrt{\gamma \frac{P_\infty}{\rho_\infty}}$.

Le mouvement du flot lors de l'accrétion est supposé être purement radial, à la manière du flot étudié par Bondi en 1952 [13]. Le taux d'accrétion de la matière sur l'étoile est supposé constant. Sa valeur est fixée à la valeur maximale de Bondi obtenu

pour un flot transsonique :

$$\dot{M} = 4\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left(\frac{5-3\gamma}{4}\right)^{-\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}} (GM)^2 \rho_\infty c_\infty^{-3} \quad (1.5)$$

Au cours de l'accrétion, le flot transsonique devient supersonique et un choc se forme à un rayon r_{sh} . Avant ce choc, le flot est adiabatique. Le flot est chauffé lors de son passage par le choc. S'il l'est suffisamment, il se refroidit en émettant de la lumière. Ce refroidissement du flot est caractérisé par une fonction du type :

$$\mathcal{L} = A\rho^{\beta-\alpha}P^\alpha \quad (1.6)$$

avec α et β positifs.

Pour référence, la fonction de refroidissement traduit un refroidissement par émission Bremsstrahlung non-relativiste pour $\gamma = 5/3$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 2$. Elle caractérise également, dans certaines gammes de température, un refroidissement par émission de neutrino dans un gaz dominé par sa pression de radiation pour $\gamma = 4/3$ et $\alpha = \beta = 5/2$ [50]. Enfin, toujours dans un gaz dominé par sa pression de radiation ($\gamma = 4/3$), elle exprime les pertes d'énergie par capture d'électron et de positron pour $\alpha = 6$ et $\beta = 1$ [10].

Le refroidissement n'est pas forcément important dès le choc si le choc ne chauffe pas suffisamment le gaz. Cependant, la température d'un flot adiabatique augmente lors de sa chute vers l'étoile. La densité du gaz va aussi augmenter lors de cette chute et, le rayon de l'étoile étant fini, elle sera importante à la surface de l'étoile. Les dépendances en température et densité de la fonction de refroidissement font que le refroidissement augmente lors de la chute et sera donc toujours important proche de la surface de l'étoile. Le flot continue donc sa chute en décélérant, pour arriver sur la surface de l'étoile avec une vitesse nulle.

Notre étude porte sur le comportement de la zone post-choc du flot. Les équations qui décrivent le flot dans cette zone sont les 3 équations classiques de la mécanique des fluides :

La conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (1.7)$$

L'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{w} \wedge \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} - \frac{GM}{r} \right) = c^2 \vec{\nabla} \frac{S}{\gamma} \quad (1.8)$$

où $\vec{w} = \vec{\text{rot}} \vec{v}$ est la vorticité de flot. Il est à noter que dans cette équation, la force de gravité ne fait appel qu'à la masse de l'étoile, on néglige l'autogravit  du fluide. La conduction et la viscosité du fluide sont également négligées.

La dernière équation s'obtient en définissant l'entropie S du gaz :

$$S \equiv \frac{\mu}{R(\gamma - 1)} \text{Log} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) \quad (1.9)$$

L'équation d'évolution de l'entropie fait directement intervenir le refroidissement :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) S + \frac{\mathcal{L}}{P} = 0 \quad (1.10)$$

Dans la suite de notre travail, on utilisera la normalisation $\frac{\mu}{R} = 1$.

L'équation d'évolution de la vorticité est aussi utilisée dans notre étude. Elle s'obtient à partir du rotationnel de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{w}}{\rho} = \left(\frac{\vec{w}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} c^2 \wedge \vec{\nabla} \frac{S}{\gamma} \quad (1.11)$$

Le mouvement du flot stationnaire est supposé purement radial et par conséquent irrotationnel ($\vec{w} = 0$).

L'hypothèse de stationarité du flot se traduit par $\partial/\partial t = 0$. En intégrant l'équation de conservation de la masse, on fait apparaître le taux d'accrétion :

$$4\pi r^2 \rho |v| = \dot{M} \quad (1.12)$$

La valeur absolue de la vitesse vient du fait que, le fluide étant en chute, sa vitesse est négative : $v < 0$. D'ailleurs, le nombre de Mach du flot est défini par $\mathcal{M} \equiv -v/c$ afin que ce soit toujours une grandeur positive.

Par souci de simplicité dans les notations, v sera généralement utilisé pour désigner la vitesse radiale plutôt que v_r .

Les gradients des grandeurs physiques du fluide s'écrivent :

$$\frac{\nabla v}{v} = \frac{1}{1 - \mathcal{M}^2} \left[\nabla S \frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{1}{r^2 c^2} - \frac{2}{r} \right] \quad (1.13)$$

$$\frac{\nabla c}{c} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{1 - \mathcal{M}^2} \left[\nabla S \frac{(1 - \gamma \mathcal{M}^2)}{\gamma} + \frac{2}{r} \mathcal{M}^2 - \frac{1}{r^2 c^2} \right] \quad (1.14)$$

$$\frac{\nabla \mathcal{M}}{\mathcal{M}} = \frac{1}{2(1 - \mathcal{M}^2)} \left[\nabla S \frac{\gamma - 1}{\gamma} (1 + \gamma \mathcal{M}^2) + \frac{\gamma + 1}{r^2 c^2} - \frac{4}{r} \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \mathcal{M}^2 \right) \right] \quad (1.15)$$

$$\frac{\nabla \rho}{\rho} = -\frac{\nabla v}{v} - \frac{2}{r} \quad (1.16)$$

$$\nabla S = \frac{-\mathcal{L}}{Pv} \quad (1.17)$$

($\nabla \equiv d/dr$)

Notre méthode de calcul du flot stationnaire est la suivante. La position r_{sh} du choc est déterminée par la donnée de l'index adiabatique γ et du nombre de Mach supersonique avant le choc, $\mathcal{M}_1 > 1$ (dans toute la suite, l'indice 1 désigne les grandeurs pré-chocs et l'indice 2 les grandeurs post-chocs). Le choc est supposé stationnaire par rapport à la surface de l'étoile r_* .

Les relations de Rankine-Hugoniot nous fournissent les valeurs des grandeurs post-choc juste après la discontinuité qu'est le choc. Elles expriment la conservation de la quantité de matière ($\rho v = \text{constante}$), de la pression dynamique ($P + \rho v^2 = \text{constante}$) et de l'énergie ($v^2/2 + c^2/(\gamma - 1) = \text{constante}$) lors de la traversée du choc par le fluide. On les exprime dans le repère lié au choc :

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (1.18)$$

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (1.19)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{c_2^2}{\gamma - 1} \quad (1.20)$$

A partir de ces trois équations, on peut exprimer les rapports des grandeurs physiques pré-chocs et post-chocs en fonction par exemple du nombre de Mach pré-choc \mathcal{M}_1 [64] :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2}{(\gamma + 1)\mathcal{M}_1^2} \quad (1.21)$$

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{[2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2][2\gamma\mathcal{M}_1^2 - (\gamma - 1)]}{(\gamma + 1)^2\mathcal{M}_1^2} \quad (1.22)$$

Connaissant les valeurs des grandeurs physiques post-choc au choc, on intègre ensuite du choc vers la surface l'étoile grâce aux équations différentielles précédentes. On définit alors la surface de l'étoile r_* par le rayon auquel la vitesse radiale du gaz s'annule (en pratique, la vitesse n'étant jamais exactement nulle, on s'arrête lorsqu'elle vaut une certaine fraction de la vitesse post-choc v_{sh}).

Une normalisation de l'intensité A de la fonction de refroidissement a été utilisée dans nos calculs numériques (voir Annexe A).

Les données du nombre de Mach incident \mathcal{M}_1 , de l'index polytropique γ et de la fonction de refroidissement \mathcal{L} , définissent entièrement le flot stationnaire pré-choc et post-choc (figure 1.4). On note que le flot peut présenter un maximum en température si le refroidissement n'est pas trop étendu (donc peu intense) car la température croît dans la zone adiabatique et décroît ensuite.

Le caractère stationnaire du flot ainsi calculé introduit une singularité au niveau de la surface de l'étoile. Le taux d'accrétion sur l'étoile est supposé constant. Le produit ρv est donc lui aussi fini et non nul à la surface de l'étoile. Puisque la vitesse doit tendre vers zéro lorsqu'on s'approche de l'étoile, la densité du gaz doit y diverger. La surface de l'étoile est donc un point singulier. La nullité de la vitesse à la surface de l'étoile, en plus de la divergence de la densité, pose la question de savoir si on atteint effectivement cette surface en un temps fini, c'est-à-dire si le temps d'advection t_{adv} (Eq 1.1) du choc à l'étoile est fini.

Pour discuter de la finitude du temps d'advection, il est nécessaire de connaître le comportement du fluide proche de l'étoile. On constate d'après les équations du flot stationnaire (Eq 1.13-1.17) que la convergence du flot (termes en $1/r$) ne joue pas de rôle dans le comportement du flot proche de la surface de l'étoile (donc à r fixé) au contraire du refroidissement (termes en ∇S) et de la gravité (termes en $1/r^2 c^2$ avec $c \rightarrow 0$ proche de la surface). La recherche de comportements simples tels que des lois de puissance permet de distinguer deux cas de figure en fonction de la nature du refroidissement. On suppose que les grandeurs du flot sont proportionnelles à une puissance de $(r - r_*)^\alpha$. Le signe de $\beta - \alpha$ apparaît comme le paramètre clef :

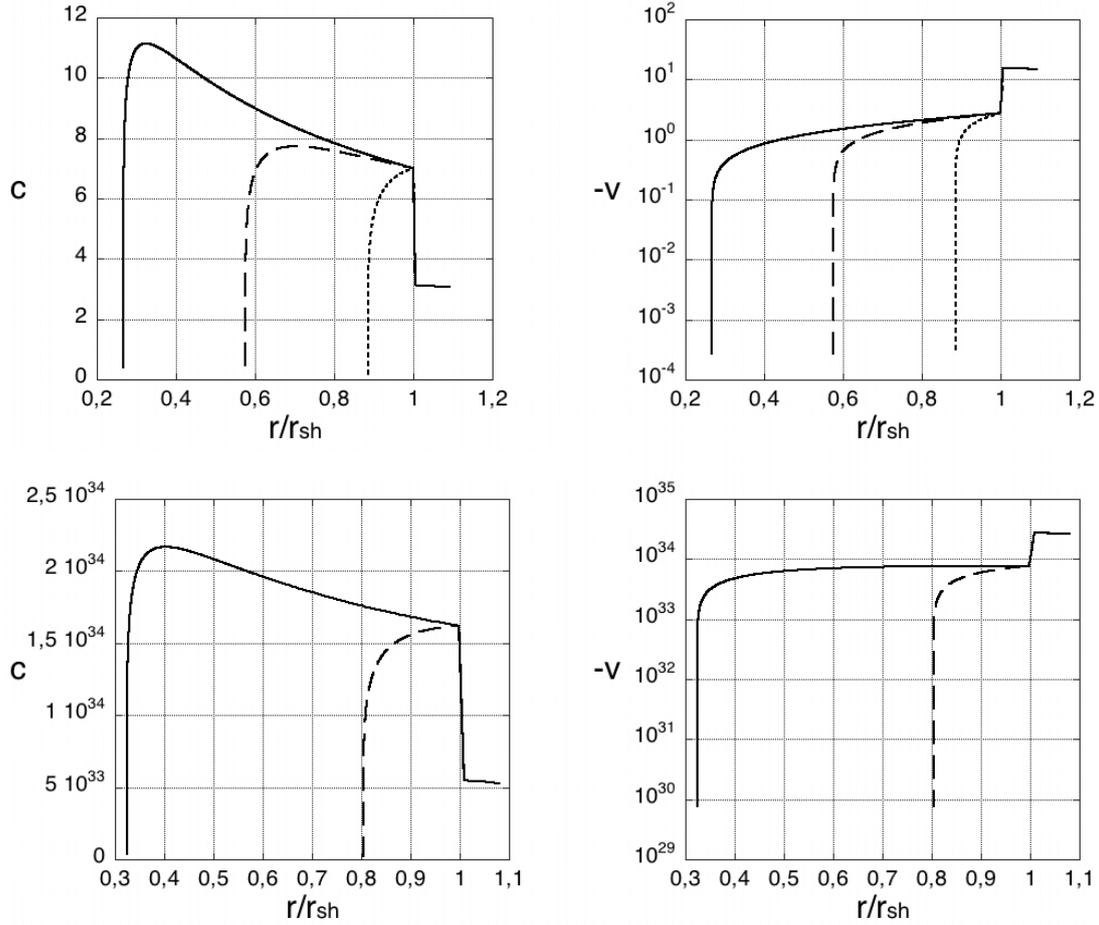


FIG. 1.4: Divers flots stationnaires. En haut, vitesse du son et vitesse du fluide pour $\gamma = 4/3$, $\beta = 2$, $\alpha = 1/2$ et pour une taille de cavité de $r_{sh}/r_* \sim 3,75$ (trait plein), $r_{sh}/r_* \sim 1,74$ (tirets), $r_{sh}/r_* \sim 1,13$ (pointillés). En bas, vitesse du son et vitesse du fluide pour $\gamma = 5/3$, $\beta = 2$, $\alpha = 1/2$, pour une taille $r_{sh}/r_* \sim 3,07$ (trait plein), $r_{sh}/r_* \sim 1,24$ (tirets). La distance est normalisée au rayon du choc r_{sh} .

1 - Pour $\beta - \alpha > 0$:

$$v \propto c^2 \propto (r - r_*)^{\frac{1}{\beta+1-\alpha}} \propto e^{\frac{\gamma-1}{\gamma} S} \quad (1.23)$$

Dans ce cas, le refroidissement s'emballa et l'influence de la gravité est négligeable proche de l'étoile. La pression tend vers une constante. La puissance de la vitesse étant plus petite que un, le temps d'accrétion est fini. On est dans un contexte d'instabilité de refroidissement.

2 - Pour $\beta - \alpha < 0$:

$$v \propto (r - r_*)^{\frac{\alpha}{\beta}} \propto e^{\frac{(\gamma-1)\frac{\alpha}{\beta}}{1+(\gamma-1)\frac{\alpha}{\beta}} S} \quad (1.24)$$

$$c^2 \propto (r - r_*) \propto e^{(\gamma-1)\frac{1}{1+(\gamma-1)\frac{\alpha}{\beta}} S} \quad (1.25)$$

La gravité n'est plus négligeable : elle aide à la décélération mais chauffe fortement au point d'être en compétition avec le refroidissement : $c^2 \nabla S$ est du même ordre que $\nabla GM/r$ (Eq 1.8).

La pression tend vers l'infini. L'intégrale permettant de calculer le temps d'accrétion ne converge pas en r_* . Le temps d'advection tend donc vers l'infini.

Afin de vérifier numériquement ces deux comportements distincts du flot, on a exprimé les grandeurs du flot en fonction de l'entropie.

Dans tous les cas, la vitesse du fluide tend vers zéro lorsqu'on approche de la surface de l'étoile. Il en est de même pour sa température ($T \propto c^2$). L'entropie du flot et la densité sont, elles, des grandeurs divergentes (figure 1.5).

1.4 Analyse linéaire : Le flot perturbé

Nous avons dans la partie précédente calculé et caractérisé un flot stationnaire. Afin d'étudier la stabilité de ce flot, nous allons effectuer une analyse linéaire. Le principe de l'analyse linéaire est simple et facilite grandement les calculs.

Le flot stationnaire est maintenant très légèrement perturbé. Chaque grandeur physique x du flot stationnaire s'écrit donc : $x + \delta x$, la perturbation δx pouvant dépendre du temps. L'hypothèse de linéarité suppose que les perturbations soient infimes : $\delta x/x \ll 1$. On remplace alors, dans chaque équation décrivant le fluide, les grandeurs

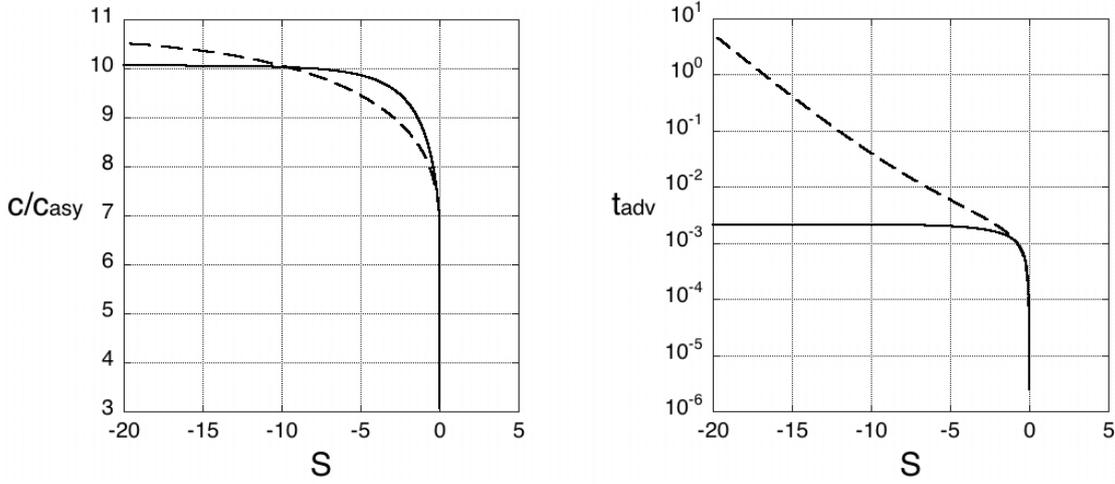


FIG. 1.5: Divergence ou convergence du temps d'advection. En fonction de l'entropie ($S = 0$ au choc et $S \rightarrow -\infty$ à la surface), le rapport vitesse du son du fluide par rapport à la loi de puissance (à gauche) et le temps d'advection (à droite) pour deux flots avec $\gamma = 4/3$ et : $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$, $r_{\text{sh}}/r_* \sim 1,74$ (trait plein) et $\alpha = 6$, $\beta = 1$, $r_{\text{sh}}/r_* \sim 3,51$ (pointillés).

par leurs nouvelles valeurs. Un développement limité au premier ordre par rapport à chacune des grandeurs permet d'obtenir un système d'équations linéaires. Les inconnues de ce système sont les perturbations δx . Ce système est beaucoup plus simple à résoudre numériquement et analytiquement que le système non-linéaire des équations non-stationnaires du fluide. Une instabilité du flot, qui se traduit par une augmentation des perturbations avec le temps, brisera en générale l'hypothèse $\delta x/x \ll 1$. L'analyse linéaire n'est donc pas en mesure de prédire le comportement non-linéaire d'une instabilité après son développement mais peut tout de même :

- 1- montrer l'existence d'une instabilité,
- 2- la caractériser par la détermination de sa fréquence et de son taux de croissance linéaire, en fonction des paramètres du flot.

Une transformée de Fourier temporelle des perturbations permet de se débarrasser de la dépendance temporelle des équations sur les perturbations. Ces dernières s'écrivent donc maintenant : $x + \delta x(r, \theta, \phi)e^{-i\omega t}$ où ω est une grandeur complexe : $\omega = \omega_r + i\omega_i$. La partie réelle ω_r est associée à la fréquence réelle de la perturbation alors que la partie imaginaire ω_i est reliée à son taux de croissance temporel.

Le flot stationnaire est purement radial. Les perturbations doivent, cependant, pouvoir traduire des comportements non-radiaux du flot perturbé. Dans ce but, nous projetons

les perturbations sur l'ensemble des harmoniques sphériques (figure 1.6). Au final, les perturbations introduites dans nos équations s'écrivent :

$$x + \delta x(r)Y_{lm}(\theta, \phi)e^{-i\omega t}$$

(θ, ϕ étant les deux angles qui viennent compléter la distance radiale r en coordonnées sphériques).

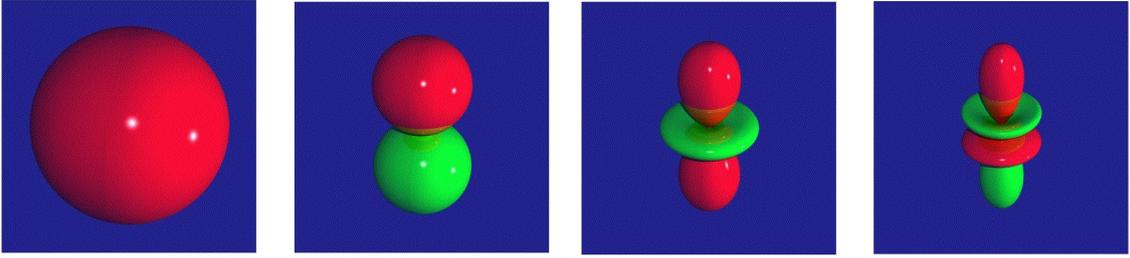


FIG. 1.6: Représentations des harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \phi)$ pour $m = 0$ et, de gauche à droite, $l = 0, 1, 2, 3$.

Pour la suite de notre étude, on définit 3 perturbations :

$$f \equiv \delta B = v_r \delta v_r + \frac{2c\delta c}{\gamma - 1} \quad (1.26)$$

$$h \equiv g - \delta S = \frac{\delta \dot{M}}{\dot{M}} = \frac{\delta v_r}{v_r} + \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (1.27)$$

$$\Psi \equiv v_r h + \frac{1}{v_r} \left(f - \frac{c^2}{\gamma} \delta S \right) \quad (1.28)$$

La première perturbation correspond à la perturbation du nombre de Bernouilli $B (\equiv v^2/2 + c^2/(\gamma - 1) - 1/r)$, la seconde à une perturbation du taux d'accrétion \dot{M} ($\propto r^2 \rho v$). La dernière perturbation permet, elle, d'obtenir la perturbation de la pression dynamique :

$$\delta(P + \rho v^2) = \rho \Psi$$

La vorticité est une grandeur qui joue un rôle important dans le cycle advectif-acoustique. Des perturbations des vitesses non-radiales sont donc également prises en compte : $\delta v_\theta, \delta v_\phi$. La nature symétrique du flot fait que ces deux perturbations peuvent

être intégrées dans l'étude d'une seule perturbation [33] :

$$\delta K \equiv r^2 \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \delta \vec{w}) + l(l+1)c^2 \frac{\delta S}{\gamma} \quad (1.29)$$

où $\delta \vec{w}$ représente une perturbation $(\delta w_r, \delta w_\theta, \delta w_\phi)$ de la vorticit e $\vec{w} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ du flot. Seul le nombre l des harmoniques sph eriques interviendra donc dans les  equations.

Si on note δS la perturbation d'entropie, toutes les perturbations du flot s'obtiennent rapidement  a l'aide des 4 perturbations pr ec edentes :

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{1}{1 - \mathcal{M}^2} \left(g - \frac{f}{c^2} \right) \quad (1.30)$$

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2 - 1} \left(g - \frac{f}{v^2} \right) \quad (1.31)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2 - 1} \left(g - \frac{f}{v^2} \right) - \delta S \quad (1.32)$$

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\gamma \mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2 - 1} \left(g - \frac{f}{v^2} \right) - \delta S \quad (1.33)$$

La lin earisation des  equations du fluide (Eq 1.7, 1.8, 1.10, 1.11) donne 4  equations qui r egissent l' evolution des perturbations. Pour une fonction de refroidissement quelconque, le syst eme d' equation est le suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{i\omega v}{1 - \mathcal{M}^2} \left[h - \frac{f}{c^2} + \left(\gamma - 1 + \frac{1}{\mathcal{M}^2} \right) \frac{\delta S}{\gamma} \right] - \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{\rho v} \right) \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{i\omega}{v(1 - \mathcal{M}^2)} \left[\frac{\mu^2}{c^2} f - \mathcal{M}^2 h - \delta S \right] + \frac{i\delta K}{\omega v r^2} \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial r} = \frac{i\omega}{v} \delta S - \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{P v} \right) \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \delta K}{\partial r} = \frac{i\omega}{v} \delta K - L^2 \delta \left(\frac{\mathcal{L}}{\rho v} \right) \quad (1.37)$$

avec les notations :

$$L^2 \equiv l(l+1) \quad (1.38)$$

$$\mu^2 \equiv 1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2} (1 - \mathcal{M}^2) \quad (1.39)$$

($\mu = 1$ correspond à $l = 0$ c'est à dire à un mode d'oscillation purement radial)

Comme prévu, l'analyse linéaire nous a donc conduit à un système différentiel linéaire qui régit l'évolution des perturbations du flot. Le système est dans le cas général du refroidissement, d'ordre 4. Il généralise le système d'ordre 2 obtenu dans le cas purement adiabatique [33]. Les perturbations de vorticité et d'entropie sont couplées aux autres perturbations du flot mais également entre elles.

Or, on remarque que seule le cycle entropique-acoustique est présent dans le flot dans le cas de perturbations radiales $l = 0$ puisque dans ce cas δK est nulle (Eq 1.29).

1.5 Approximation WKB

L'approximation WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) est un outil puissant, complémentaire de l'analyse linéaire. C'est une méthode de calcul approximé qui permet de passer de la mécanique classique à la mécanique ondulatoire. La théorie WKB permet d'obtenir une estimation de la solution d'une équation différentielle linéaire, dont le terme d'ordre de dérivation le plus élevé est affecté d'un paramètre petit. Utilisé dans de très nombreux domaines, nous en faisons ici une présentation simple adaptée à notre travail.

La méthode WKB permet de distinguer, au niveau des ondes sonores, les ondes qui se propagent avec le flot vers la surface de l'étoile (index "+") de celles qui remontent le flot vers le choc (index "-"). Ainsi, en approximation WKB, une perturbation acoustique du nombre de Bernoulli, peut se décomposer sous la forme de deux ondes sonores "+" et "-" [33] :

$$f = f^+ + f^- \quad (1.40)$$

$$f^\pm \sim \frac{\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} c^2}{\mu^{\frac{1}{2}}} e^{-i\omega \int^r \frac{\mathcal{M} \pm \mu}{1 - \mathcal{M}^2} \frac{dr}{c}} \quad (1.41)$$

(Cette écriture suppose que les perturbations d'entropie et de vorticité sont nulles).

Cette approximation n'est valable que dans le cas de petites longueurs d'onde, c'est-à-dire si la longueur d'onde des perturbations est bien plus petite que la longueur caractéristique des gradients du flot. Soit, pour $\omega r/c \gg 1$. Cela revient donc à dire que, lors de sa propagation, l'onde sonore "voit" un flot pratiquement homogène. Elle se comporte donc pratiquement comme dans un flot homogène en mouvement uniforme. Le calcul de la propagation d'une onde de pression plane, longitudinale dans un flot en

mouvement uniforme conduit à :

$$f^{\pm} \propto e^{-i\omega \frac{\mathcal{M} \pm 1}{1 - \mathcal{M}^2} \frac{r}{c}}$$

L'ajout de la variation d'amplitude dans l'approximation WKB permet une meilleure description.

De manière plus générale, l'approximation WKB va permettre la décomposition des perturbations en quatre ondes. Ainsi, les perturbations f et g s'écrivent sous la forme [34] :

$$f = f^+ + f^- + f^S + f^K \quad (1.42)$$

$$g = g^+ + g^- + g^S + g^K \quad (1.43)$$

où les grandeurs indexées S sont les composantes dues à une onde d'entropie δS , celles indexées K sont dues à une perturbation δK , et celles indexées \pm dues respectivement à des ondes sonores descendantes et remontantes.

Ces composantes s'expriment aisément en fonction de leur "source" dans une approximation de flot uniforme. En effet, cette décomposition va essentiellement servir au choc où le flot peut être supposé adiabatique, à moins d'un refroidissement très intense. Elle sera également utilisée à la surface de l'étoile ou du moins au niveau d'une condition limite inférieure. Supposons donc que le flot est uniforme. Les perturbations d'entropie et de vorticité sont, dans ce cas, simplement advectées avec le flot :

$$\begin{aligned} \delta S &\propto e^{i\omega \frac{r}{v}} \\ f^S, g^S &\propto e^{i\omega \frac{r}{v}} \end{aligned}$$

Pour chaque "source de perturbation" (ie : S , K , ondes acoustiques \pm), nous déterminons les valeurs de f et g à partir du système linéaire différentiel des perturbations (voir annexe Eq B.1, B.4).

Pour une onde d'entropie :

$$\delta K^S = 0 \quad (1.44)$$

$$f^S = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{c^2}{\gamma} \delta S \quad (1.45)$$

$$g^S = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{\mu^2}{\gamma} \delta S \quad (1.46)$$

Pour une onde acoustique :

$$\delta K^\pm = 0 \quad (1.47)$$

$$\delta S^\pm = 0 \quad (1.48)$$

$$g^\pm = \pm \frac{\mu}{\mathcal{M}c^2} f^\pm \quad (1.49)$$

Pour une onde de vorticité :

$$\delta S^K = 0 \quad (1.50)$$

$$f^K = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{v^2}{\omega^2 r^2} \delta K \quad (1.51)$$

$$g^K = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{1}{\omega^2 r^2} \delta K \quad (1.52)$$

On constate dans ces équations, notamment celles des ondes acoustiques (Eq 1.49), que la valeur de μ est nécessaire, en plus de celle de μ^2 . La définition précédente de μ (Eq 1.39) donne pourtant deux possibilités, de signes opposées, pour μ . Pour lever cette dégénérescence, il faut se souvenir (Eq 1.41) que le nombre d'onde k^\pm des ondes acoustiques est donné par :

$$k^\pm = \frac{\omega}{c} \frac{\mathcal{M} \pm \mu}{1 - \mathcal{M}^2} \quad (1.53)$$

Or, on impose que :

(i) $\text{Im}(k^+) < 0$ quand $\text{Re}(\mu^2) < 0$, c'est à dire que dans le cas d'ondes évanescentes, une onde acoustique non divergente se propage avec le flot vers la surface de l'étoile,

(ii) $\text{Re}(k^+) < 0$ quand $\text{Re}(\mu^2) > 0$ c'est-à-dire que l'onde " + ", si elle est propagative, se propage bien dans la même direction que le flot.

La dégénérescence sur la valeur de μ est donc levée par ces deux considérations.

Sans ambiguïté sur la valeur de μ , les perturbations acoustiques f^\pm du nombre de Bernouilli peuvent donc s'écrire, à la manière des perturbations des grandeurs physiques du flot (Eq 1.30-1.33), en fonction des 4 perturbations principales qui sont utilisées dans

le système différentiel :

$$f^- = \frac{\mathcal{M}c^2}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\mathcal{M}c^2} f - g - \left(\frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 + \mu\mathcal{M}} \right) \left(\frac{\delta S}{\gamma} \frac{\mu}{\mathcal{M}} - \frac{\delta K}{\omega^2 r^2} \right) \right] \quad (1.54)$$

$$f^+ = \frac{\mathcal{M}c^2}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\mathcal{M}c^2} f + g - \left(\frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu\mathcal{M}} \right) \left(\frac{\delta S}{\gamma} \frac{\mu}{\mathcal{M}} + \frac{\delta K}{\omega^2 r^2} \right) \right] \quad (1.55)$$

1.6 Conditions limites

Si l'on connaît les valeurs des perturbations en un point du flot, disons au choc, on est capable grâce au système différentiel linéaire, de les calculer tout le long du flot, notamment à la surface de l'étoile à neutrons. Ainsi, on peut déterminer les valeurs (fréquences et taux de croissance) des modes pouvant se développer dans la cavité constituée par le choc et la surface de l'étoile en déterminant la valeur de la pulsation complexe ω qui permet de vérifier une condition limite inférieure (sur la surface de l'étoile) que l'on aura préalablement choisie.

1.6.1 Conditions limites au choc

Les conditions limites au choc s'obtiennent par la perturbation des conditions de saut au choc en tenant compte du déplacement de la position du choc de sa valeur stationnaire. Ce déplacement est important notamment dans un flot où les gradients des grandeurs stationnaires ne sont pas nuls comme c'est le cas ici.

Sous l'effet d'une perturbation des grandeurs hydrodynamiques du flot, le choc se déplace à une vitesse Δv d'une distance $\Delta\xi$. Ces deux grandeurs sont du premier ordre et liées par la relation :

$$\Delta v = -i\omega\Delta\xi \quad (1.56)$$

Les équations de conservation de la quantité de masse, de l'impulsion et de l'énergie lors de la traversée du choc adiabatique s'écrivent en $r = r_{\text{sh}} + \Delta\xi$:

$$\rho_1(v_1 - \Delta v) = \rho_2(v_2 - \Delta v + \delta v) \quad (1.57)$$

$$P_1 + \rho_1(v_1 - \Delta v)^2 = P_2 + \delta P + (\rho_2 + \delta\rho)(v_2 - \Delta v + \delta v)^2 \quad (1.58)$$

$$\frac{(v_1 - \Delta v)^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = \frac{(v_2 - \Delta v + \delta v)^2}{2} + \frac{(c_2 + \delta c)^2}{\gamma - 1} \quad (1.59)$$

Afin de décrire au choc la quatrième perturbation, δK , s'ajoutent à ces 3 équations de conservation, celles de création de vitesses tangentielles au choc :

$$\delta v_\theta = \frac{v_1 - v_2}{r_{\text{sh}}} \frac{\partial \Delta \xi}{\partial \theta} \quad (1.60)$$

$$\delta v_\phi = \frac{v_1 - v_2}{r_{\text{sh}} \sin \theta} \frac{\partial \Delta \xi}{\partial \phi} \quad (1.61)$$

Ces cinq égalités sont appliquées en $r_{\text{sh}} + \Delta \xi$ alors que celles du flot stationnaire l'étaient en r_{sh} . Des gradients traduisant le déplacement du choc vont donc apparaître. Les cinq équations s'écrivent respectivement (les deux équations sur les vitesses latérales sont couplées en une seule) :

$$\rho_2 v_2 (g_{\text{sh}} + \delta S_{\text{sh}}) = \Delta v (\rho_2 - \rho_1) + \Delta \xi \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \rho v \right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial r} \rho v \right)_2 \right]_{r=r_{\text{sh}}} \quad (1.62)$$

$$f_{\text{sh}} + v^2 g_{\text{sh}} - \frac{c^2}{\gamma} (1 + \gamma \mathcal{M}^2) \delta S_{\text{sh}} = \Delta \xi \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} P + \rho v^2 \right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial r} P + \rho v^2 \right)_2 \right]_{r=r_{\text{sh}}} \quad (1.63)$$

$$f_{\text{sh}} = \Delta v (v_2 - v_1) + \Delta \xi \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} B \right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial r} B \right)_2 \right]_{r=r_{\text{sh}}} \quad (1.64)$$

$$\frac{\delta K_{\text{sh}}}{L^2} = f_{\text{sh}} - (v_2 - v_1) \Delta v \quad (1.65)$$

B étant le nombre de Bernouilli : $\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - \frac{1}{r}$.

Les gradients intervenant dans les équations précédentes ne font intervenir que des grandeurs du flot stationnaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \rho v &= \frac{-8\pi \dot{M}}{r^3} \\ \frac{\partial}{\partial r} (P + \rho v^2) &= -\rho \left(\frac{1}{r^2} + 2 \frac{v^2}{r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} B &= \frac{c^2}{\gamma} \nabla S \end{aligned}$$

Le taux d'accrétion \dot{M} est constant lors de la traversée du choc. Les valeurs des perturbations au choc en fonction, par exemple, de la perturbation de vitesse du choc, valent donc :

$$g_{\text{sh}} = \Delta v \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) + \delta S_{\text{sh}} \quad (1.66)$$

$$f_{\text{sh}} = \Delta v (v_2 - v_1) + \frac{\delta K_{\text{sh}}}{L^2} \quad (1.67)$$

$$\frac{\delta K_{\text{sh}}}{L^2} = i \frac{\Delta v}{\omega} \frac{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1}{\rho v} = -i \frac{\Delta v}{\omega} \frac{c^2}{\gamma} \nabla S \left(1 - \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2} \right) \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{sh}} = & -\frac{\Delta v}{v_1} \left[\frac{\gamma}{c^2} (v_1 - v_2)^2 \right. \\ & \left. + i \frac{v_1}{\omega} \left\{ \nabla S \left(1 - \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2} \right) + \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right) \frac{\gamma}{c^2} \left(\frac{1}{r_{\text{sh}}^2} - 2 \frac{v_1 v_2}{r_{\text{sh}}} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.69)$$

où \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 représentent les valeurs du refroidissement avant et après le choc. Ces quatre équations montrent l'influence du refroidissement sur les conditions de saut au niveau d'un choc sphérique pour des perturbations radiales et transverses.

Les efficacités de conversion au choc des perturbations qui ont été évoquées dans la description simple du cycle advectif-acoustique (Eq 1.2), peuvent être calculées grâce à ces équations de saut. L'approximation WKB permet d'écrire :

$$Q_{-, \text{sh}}^S \equiv (f^S / f^-)_{\text{sh}} = \left(\frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{c^2}{\gamma} \frac{\delta S}{f^-} \right)_{\text{sh}} \quad (1.70)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^K \equiv (f^K / f^-)_{\text{sh}} = \left(\frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\delta K}{f^-} \right)_{\text{sh}} \quad (1.71)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^+ \equiv (f^+ / f^-)_{\text{sh}} \quad (1.72)$$

Si le refroidissement n'est pas trop intense, le flot post-choc est adiabatique proche du choc, donc $\nabla S \sim 0$. Les efficacités de conversion valent alors :

$$Q_{-, \text{sh}}^S = \frac{4\mu_{\text{sh}}}{\mathcal{M}_2(1 - \mu_{\text{sh}}\mathcal{M}_2)} \frac{(1 - \mathcal{M}_2^2)^2}{A_{\text{sh}}} \quad (1.73)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^+ = \frac{(1 + \mu_{\text{sh}}\mathcal{M}_2)}{(1 - \mu_{\text{sh}}\mathcal{M}_2)} \frac{(\gamma - 1 - 2\gamma\mathcal{M}_2^2 + \mu_{\text{sh}}(2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_2^2)(2\mathcal{M}_2 - \mu_{\text{sh}}))}{A_{\text{sh}}} \quad (1.74)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^K = 0 \quad (1.75)$$

où on a noté $A_{\text{sh}} \equiv (1 - \gamma + 2\gamma\mathcal{M}_2^2 + \mu_{\text{sh}}(2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_2^2)(2\mathcal{M}_2 + \mu_{\text{sh}}))$.

Il n'y a donc pas de perturbation δK créée au choc dans l'approximation adiabatique.

1.6.2 Condition limite à la surface de l'étoile

Mathématiquement, il ne reste plus qu'une seule condition à imposer sur les perturbations pour clore le problème et pouvoir calculer les pulsations complexes ω des perturbations entre le choc et la surface de l'étoile. Physiquement, nous choisissons d'imposer à nos perturbations une condition limite inférieure au niveau de la surface de l'étoile. Le choix de cette condition limite n'est pas évident. Une étude de la stabilité du choc d'accrétion au-dessus d'une naine blanche, a comparé l'influence de différentes conditions limites [92] : dans les cas où la vitesse stationnaire est nulle à la condition limite inférieure, le choix de la condition sur les perturbations ne modifie pas propriétés de stabilité.

La condition limite que nous employons dans nos calculs sphériques est tout simplement l'extension de la condition limite du flot stationnaire au flot perturbé : le flot stationnaire atteint la surface de l'étoile avec une vitesse radiale nulle, notre condition limite impose simplement que le flot perturbé arrive avec une vitesse radiale nulle sur cette surface. L'étoile est donc en quelque sorte un "mur" pour le flot. Cette condition de "mur" s'écrit :

$$\left(\frac{\delta v}{v} \right)_{r_*} = 0 \quad (1.76)$$

Une fois cette condition limite définie, nous pouvons calculer les modes propres d'oscillations de notre flot par la méthode décrite en Annexe B et dont les résultats seront présentés au chapitre 4.

1.7 Etude simplifiée du cycle : Cas adiabatique

1.7.1 Description

Le problème que nous considérons est cette fois purement adiabatique. Un flot radial, choqué et adiabatique aussi bien avant qu'après le choc est accrété par un objet

central. Le fluide est donc décrit par les équations différentielles précédentes (Eq 1.13-1.17) où l'adiabaticité se traduit par : $\mathcal{L} = 0$.

Le flot continue adiabaticquement jusqu'à une couche de refroidissement localisée à un rayon r_{in} donné proche de la surface de l'étoile. Ce rayon constitue donc la borne inférieure de cette étude.

Dans ses parties très subsoniques (ie : $\mathcal{M} \ll 1$ et $r \rightarrow 0$), le flot est bien approximé par des lois de puissance [13] (figure 1.7) :

$$c^2 \sim \frac{\gamma - 1}{r} \quad (1.77)$$

$$v \sim -\frac{\Phi_{\text{in}}}{(\gamma - 1)^{\frac{1}{\gamma-1}}} r^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.78)$$

$$\mathcal{M}^2 \sim \frac{\Phi_{\text{in}}^2}{(\gamma - 1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} r^{\frac{5-3\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.79)$$

où on définit les constantes, relative au taux d'accrétion :

$$\Phi_{\text{out}} \equiv \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{\frac{3-2\gamma}{2(\gamma-1)}} \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &\equiv \Phi_{\text{out}} \mathcal{M}_1^{\frac{2}{\gamma-1}} \left[\frac{2\gamma(\gamma-1)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &\left[1 + \frac{2}{(\gamma-1)\mathcal{M}_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma\mathcal{M}_1^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (1.81)$$

Si le nombre de Mach \mathcal{M} du flot tend toujours vers zéro quand on tend vers les régions internes, et ce quel que soit $\gamma < 5/3$, la vitesse du gaz, elle, peut diverger si $\gamma > 3/2$. Le flot adiabatique stationnaire est donc décrit par les données de l'index polytropique $\gamma < 3/2$, du nombre de Mach incident \mathcal{M}_1 , et de la taille de la cavité $r_{\text{sh}}/r_{\text{in}}$.

1.7.2 Un oscillateur excité

Le cas adiabatique présente de nombreuses simplifications vis-à-vis du cas non-adiabatique. Tout d'abord, les perturbations d'entropie δS et les perturbations δK y sont simplement advectées avec le flot (Eq 1.36, 1.37). On peut les écrire simplement en fonction de leur valeur au choc :

$$\delta S = \delta S_{\text{sh}} e^{i\omega \int_{r_{\text{sh}}}^r \frac{dr}{v}} \quad (1.82)$$

$$\delta K = \delta K_{\text{sh}} e^{i\omega \int_{r_{\text{sh}}}^r \frac{dr}{v}} \quad (1.83)$$

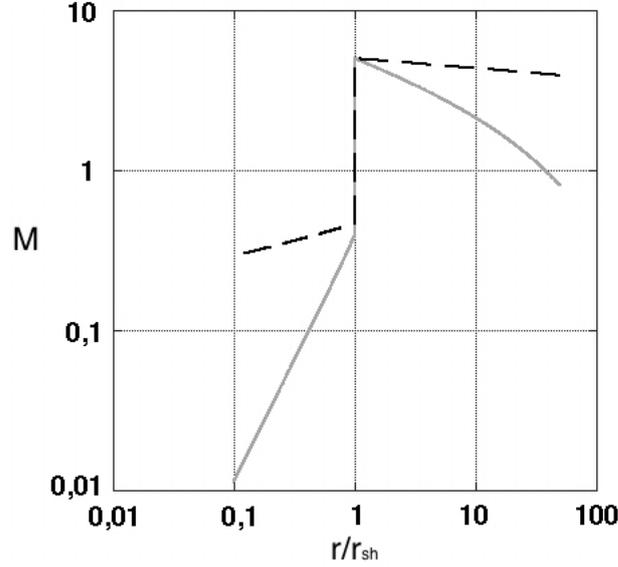


FIG. 1.7: Profil radial du nombre de Mach d'un flot stationnaire adiabatique pour $\mathcal{M}_1 = 5$, $r_{\text{sh}}/r_{\text{in}} = 10$ et $\gamma = 4/3$ (trait plein gris) ou $\gamma = 1,6$ (pointillés noirs). Les rayons sont normalisés à la position du choc.

Ainsi, on passe d'un système différentiel d'ordre 4 à un système d'ordre 2. Le cas adiabatique a ceci d'agréable que les perturbations δS et δK sont découplées des ondes sonores.

Une écriture élégante de l'équation différentielle d'ordre 2 qui décrit le flot s'obtient en travaillant sur les perturbations de pression $\delta P/P$. Ces dernières s'expriment, dans le cas adiabatique, en fonction de la perturbation f et de sa dérivée :

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\gamma}{c^2} \left(f - \frac{v}{i\omega} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (1.84)$$

En combinant les équations différentielles du flot stationnaire (Eq 1.13-1.17) et des perturbations (Eq 1.34, 1.37), on obtient [35] :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + a_1 \frac{\partial}{\partial r} + a_0 \right] \frac{\delta P}{P} = \frac{-\Delta}{v^2(1 - \mathcal{M}^2)} \left(\frac{\delta P_S}{P} + \frac{\delta P_K}{P} \right) \quad (1.85)$$

avec les coefficients :

$$a_1 \equiv \frac{\partial}{\partial r} \log \left(\frac{(c^2 - v^2)^2}{v\Delta} \right) + \frac{2i\omega v}{c^2 - v^2}$$

$$a_0 \equiv \frac{1}{c^2 - v^2} \left[\omega^2 - L^2 \frac{c^2}{r^2} - \frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta v c^2}{r} \right) + 2i\omega \frac{\partial v}{\partial r} \right. \\ \left. + \frac{c^2}{r} \frac{\partial \log \Delta}{\partial r} \left(2\eta - (1 + \mathcal{M}^2) \frac{i\omega r}{v} \right) \right]$$

où on a noté :

$$\eta \equiv \frac{\partial \log \mathcal{M}}{\partial \log r}$$

$$\Delta \equiv \omega^2 + \frac{L^2 v^2}{r^2} + 2i\omega \frac{\partial v}{\partial r}$$

Deux termes sources apparaissent donc dans l'évolution des perturbations de pression. Chacun de ces termes dépend d'une des deux perturbations advectées :

$$\frac{\delta P_S}{P} \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{v}{i\omega} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2\eta v}{i\omega r} \right) \frac{\omega^2 c^2}{\Delta} \right] \delta S \quad (1.86)$$

$$\frac{\delta P_K}{P} \equiv -\frac{\gamma}{c^2} \frac{v}{i\omega} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{v^2}{r^2 \Delta} \right] \delta K \quad (1.87)$$

L'équation différentielle sur les perturbations de pression rappelle celle d'un "oscillateur" (membre de gauche de l'équation différentielle) subissant l'influence d'un "excitateur" (membre de droite). Des ondes sonores sont donc excitées dans la cavité par les ondes d'entropie et de vorticité.

Les conditions qui s'appliquent au choc sur les perturbations imposent à la perturbation δK d'y être nulle (Eq 1.75). Puisqu'elle est simplement advectée avec le flot, cette perturbation est donc uniformément nulle dans le cas adiabatique. Ainsi, une relation simple lie perturbations d'entropie et de vorticité [35] :

$$\delta w_r = 0 \quad (1.88)$$

$$\delta w_\theta = -\frac{c^2}{\gamma r v \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \delta S \quad (1.89)$$

$$\delta w_\phi = \frac{c^2}{\gamma r v} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta S \quad (1.90)$$

Puisque δK est nul, il ne reste donc plus qu'un seul terme source pour exciter notre oscillateur, le terme dépendant des ondes d'entropie. En fonction de la pulsation ω et de la géométrie des perturbations, ce terme source s'exprime simplement :

$$\frac{\Delta}{v^2(1-\mathcal{M}^2)} \frac{\delta P_S}{P} \sim \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{i\omega r}{v} \left(\frac{\partial \log c^2}{\partial \log r} \right) \delta S \propto r^{-2+\frac{3\gamma-4}{\gamma-1}} & \text{pour } \frac{\omega r}{v} \gg 1 \\ -\frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \log c^2}{\partial \log r} \right) \left(\frac{\partial \log \mathcal{M}}{\partial \log r} \right) \delta S \propto r^{-2} & \text{pour } \frac{\omega r}{v} \ll 1, l = 0 \text{ (1.91)} \\ -\frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \log \mathcal{M}}{\partial \log r} \right) \left[\frac{\partial \log}{\partial \log r} \left(\frac{c^2 r}{v} \right) \right] \delta S \propto r^{-2} & \text{pour } \frac{\omega r}{v} \ll 1, l > 0 \end{cases}$$

En utilisant les formules de Bondi pour le flot stationnaire, on a aussi pu évaluer la dépendance en rayon de ce terme source.

Cette écriture du terme source met en avant deux processus physiques permettent le couplage entre ondes advectées et ondes acoustiques et donc deux processus importants pour le cycle advectif-acoustique :

(i) Le gradient de température (ie : $T \propto c^2$) pour le mode sphérique $l = 0$ et les hautes fréquences joue le rôle principale dans l'excitation des ondes de pression. A hautes fréquences, l'étude du cycle entropique-acoustique a déjà montré l'importance de ce gradient de température [33]. Pour le mode sphérique, une première étude [40] avait également mis l'accent sur le rôle de ce gradient.

(ii) A basse fréquence, des perturbations non-radiales peuvent exciter des ondes acoustiques par un cycle tourbillonnaire-acoustique. L'étude d'un flot isotherme [34] avait pointé le rôle joué par les perturbations de vorticité dans l'excitation des ondes de pression.

1.7.3 Importance de la condition limite inférieure

Nous n'avons pour le moment pas évoqué le choix de la condition limite inférieure à imposer aux perturbations dans le but de clore notre système différentiel pour pouvoir calculer les modes propres d'oscillation.

L'estimation du terme source montre que l'excitation des ondes acoustiques par les ondes advectées est d'intensité comparable pour les perturbations radiales et non-radiales quel que soit le régime de fréquences. Dans tous les cas, radial ou non-radial,

à basse ou haute fréquence, on constate également que l'excitation des ondes sonores est maximale proche du rayon limite inférieur r_{in} (Eq 1.91).

Cependant, un couplage efficace entre un exciteur et un oscillateur requiert en plus d'une grande amplitude de l'exciteur, un bon ajustement de leurs longueurs d'onde respectives. La longueur d'onde de l'exciteur, c'est à dire d'une onde advectée, est grossièrement $2\pi v/\omega$. Celle des ondes acoustiques est plus petite d'un facteur $\sim \mathcal{M}$ puisqu'elle vaut $2\pi(c \pm v)/\omega$ et que le flot est subsonique. Une bonne coïncidence des longueurs d'onde implique donc d'avoir un nombre de Mach le plus élevé possible c'est-à-dire de s'éloigner du rayon limite inférieure. On est ici dans le cas contraire à l'accrétion sur un trou noir où le nombre de Mach augmente vers le rayon limite inférieure. Les nombreuses oscillations de l'exciteur par longueur d'onde de l'oscillateur vont donc conduire à une diminution de l'efficacité du cycle dans les régions internes du flot où le nombre de Mach est faible.

On constate donc que la zone limite inférieure de notre flot adiabatique est certainement un lieu critique pour le cycle advectif-acoustique. La grande amplitude de l'exciteur en ce rayon et le grand déphasage entre les longueurs d'onde de l'exciteur et de l'oscillateur y jouent deux rôles antagonistes. Le choix de la condition limite inférieure apparaît donc crucial si on désire décrire correctement le cycle advectif-acoustique. Une couche de refroidissement à la surface de l'objet est toujours présente. L'étude du cas adiabatique souligne donc l'importance de la description des phénomènes non-adiabatiques et de leur influence sur le cycle advectif-acoustique.

Stabilité des Chocs d'Accrétion

Depuis la découverte des sources compactes X de notre galaxie dans les années 70, la physique de l'accrétion sur un objet compact est l'objet de nombreuses recherches. Ces sources sont supposées accréter de la matière d'une étoile compagne, par un vent relativement massif ou par un débordement du lobe de Roche du compagne. La désignation "choc d'accrétion" provient de la présence d'un choc qui chauffe le gaz accrété et le décélère jusqu'à des vitesses subsoniques. Le gaz ainsi chauffé irradie, principalement via émission Bremsstrahlung. Cette irradiation est responsable de l'émission X observée.

Dans cette partie, nous présentons des exemples de chocs d'accrétion. L'accrétion sur un trou noir fut à l'origine de l'introduction et des premières études du cycle advectif-acoustique en astrophysique. On s'intéressera ensuite à l'accrétion sur une surface solide (une naine blanche ou une étoile à neutrons) qui nous permettra de mettre en avant l'intérêt de l'étude du cycle advectif-acoustique dans ce type de flot.

2.1 Cas des trous noirs

2.1.1 Accrétion par vent

L'idée de l'application du cycle advectif-acoustique à l'astrophysique provient initialement du problème posé par l'instabilité du flot dit de Bondi-Hoyle-Lyttleton.

L'accrétion par vent sur un trou noir est l'objet d'une bibliographie importante. On

la représente généralement par le mouvement, avec une vitesse supersonique, d'un trou noir dans un milieu homogène au repos. Ce mouvement supersonique d'un objet compact dans un gaz uniforme a d'abord été décrit par Hoyle et Lyttleton [52] puis Bondi et Hoyle [14] qui lui ont valu son nom générique d'accrétion de Bondi-Hoyle-Lyttleton. Lors de ce mouvement, un point de stagnation apparaît nécessairement derrière l'accréteur et implique donc la décélération d'une partie du flot supersonique en un flot subsonique. Un choc est donc inévitable. Ce choc, initialement derrière l'accréteur, se déploie pour donner naissance à un cône de choc en avant de l'accréteur ou pouvant aussi être attaché à l'accréteur [37, 38]. Des simulations bi-dimensionnelles [74] puis tri-dimensionnelles [75, 90, 91] ont révélé que ce choc était violemment instable. Les mouvements transverses du choc dans les simulations bidimensionnelles ont valu le sobriquet de "flip-flop" à l'instabilité du flot. D'autres simulations ont cependant mis cette instabilité en doute [87]. Il est vrai que la difficulté à simuler correctement ce type de flot est problématique. Le rapport de la taille de l'accréteur $r_{\text{sch}} = 2GM/c_{\text{light}}^2$ sur le rayon d'accrétion $R_A = 2GM/v_\infty^2$ est de l'ordre de 10^{-2} dans les simulations actuelles alors qu'un rapport 10^{-5} serait plus approprié. Il est difficile de distinguer cette instabilité d'une instabilité purement numérique.

Un mécanisme physique expliquant cette instabilité et ses caractéristiques permettrait de trancher quant à la réelle existence de cette instabilité dans la nature. De nombreux mécanismes ont été proposés. Parmi les plus physiques, dès 1977, Cowie [30] propose un mécanisme de ligne d'accrétion instable longitudinalement. En 1990, Soker [98] étudie l'instabilité transverse de cette ligne. Ces mécanismes de la ligne d'accrétion restent cependant des mécanismes essentiellement bi-dimensionnels. Des instabilités locales de type Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz ont été étudiées par Foglizzo et Ruffert [38] mais leur croissance n'est pas suffisante pour expliquer une instabilité si violente. L'idée d'un mécanisme de feedback permettant d'alimenter continûment et de manière croissante des instabilités locales de ce genre, pour former un cycle, a alors été envisagée (figure 2.1).

Foglizzo, Galletti et Ruffert [36] ont extrapolé les résultats sur le cycle advectif-acoustique dans le cas d'un choc radial à un choc non-radial. Un choc détaché de l'accréteur est plus favorable à cette extrapolation. De par la géométrie ouverte du choc dans l'accrétion de BHL, une partie du feedback acoustique des ondes advectées va être perdue pour le cycle (figure 2.1). L'efficacité du cycle en est donc réduite. Cependant, la topologie du flot, non-radial, implique la possibilité d'amplification des perturbations d'entropie et de vorticités créées au choc par des instabilités locales de type Rayleigh-

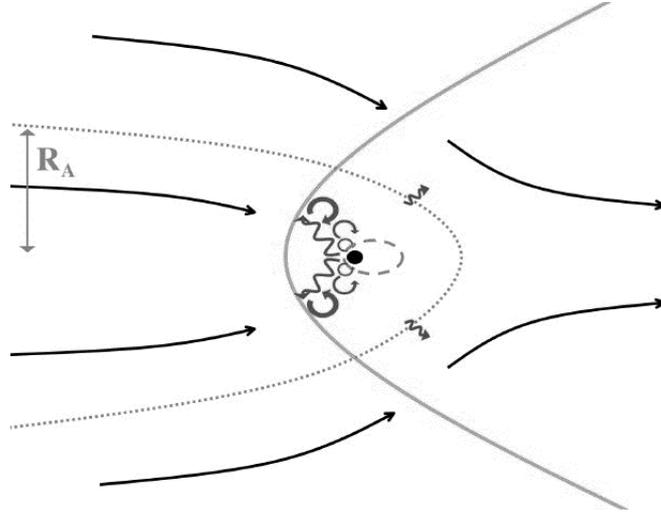


FIG. 2.1: Vue schématique du flot d'accrétion de Bondi-Hoyle-Lyttleton sur un trou noir dans le cas d'un choc détaché. Les perturbations d'entropie et de vorticité (flèches circulaires) créées au choc sont advectées vers l'accréteur alors que le feedback acoustique (flèches ondulées) se propage vers le choc. Le choc est symbolisé par le trait gris épais, les lignes de flots par les flèches noires. La matière capturée par la gravité du trou noir est délimitée par les pointillés gris.

Taylor et Kelvin-Helmholtz. Dans ce cas, on assiste à une augmentation de l'efficacité du cycle advectif-acoustique par rapport au cas radial. Les formules radiales du cycle advectif-acoustique peuvent être prises comme approximation du cas non-radial. Ainsi, Foglizzo et al. prévoient une stabilité du cycle dans la limite d'un choc faible et une instabilité pour un choc fort, avec $\gamma \sim 5/3$ et un accréteur suffisamment petit. Aucune contradiction évidente n'apparaît entre les résultats de nombreuses simulations déjà publiées entre 1987 et 2000, et les critères de stabilité du cycle advectif-acoustique. Ce cycle reste donc le meilleur candidat à l'explication de l'instabilité du flot de Bondi-Hoyle-Lyttleton.

2.1.2 Accrétion radiale

Le cas des trous noirs est un cas un peu particulier en ce qui concerne les chocs d'accrétion. Le flot supersonique radial pré-choc qui arrive sur un trou noir pourrait très bien se poursuivre de manière supersonique jusqu'à l'accréteur, sans donc subir de choc. Des travaux [44, 21] se sont intéressés à l'existence et le lieu d'un choc dans ce type d'accrétion, lorsque le moment cinétique est faible. Notre but ici n'est pas de justifier l'existence ou l'absence d'un choc mais d'en discuter la stabilité s'il existe.

Au delà de l'existence du choc, l'accrétion sur un trou noir a ceci de particulier que le flot post-choc, subsonique, est accéléré après le choc et non décéléré. Il passera donc à nouveau par un point sonique (où la vitesse du fluide égale la vitesse du son). Le point sonique est la limite inférieure en rayon pour ce type de modélisation (figure 2.2).

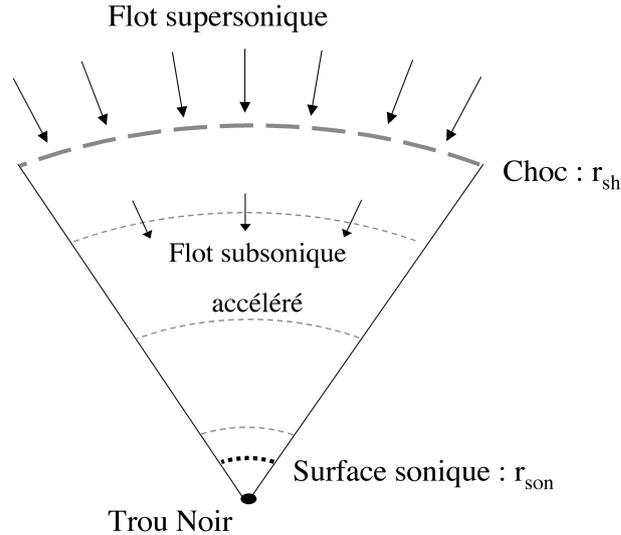


FIG. 2.2: Vue schématique du flot d'accrétion choqué sur un trou noir. En tirets gris, le choc, en pointillés noirs, la surface sonique, condition limite inférieure des calculs. Les flèches indiquent les lignes de flot.

En 2002, Foglizzo [34] a étendu les résultats isothermes de Nakayama [82, 83] à des perturbations non-radiales (figure 2.3). Il confirme le mode radial à fréquence nulle obtenu par Nakayama, avec un taux de croissance de l'ordre du temps d'advection. Il découvre également un mode non-radial ($l = 1$) très instable à fréquence nulle. Son temps de croissance est plus court, compris entre le temps d'advection et le temps acoustique. Enfin, il montre l'existence de nombreux autres modes instables à fréquences non nulles. Il constate également qu'il y a une variation périodique des taux de croissance en fonction de la fréquence. En se basant sur ses articles précédents [40, 33], Foglizzo propose un mécanisme physique pour expliquer ces nombreux modes. Ce cycle met en jeu l'advection de perturbations de vorticité créées au niveau du choc, et un feedback acoustique, c'est-à-dire le cycle advectif-acoustique dans sa forme isotherme, sans perturbation d'entropie. Il compare avec succès les taux de croissance du cycle, calculés analytiquement, à ceux des modes obtenus numériquement. L'interprétation des résultats par le cycle advectif-acoustique permet aussi d'expliquer les variations du taux

de croissance des modes : un cycle purement acoustique entre ondes acoustiques descendantes et ondes acoustiques remontantes est également possible. Suivant la manière dont il se couple au cycle advectif-acoustique dominant, le cycle purement acoustique est responsable de fluctuations du taux de croissance.

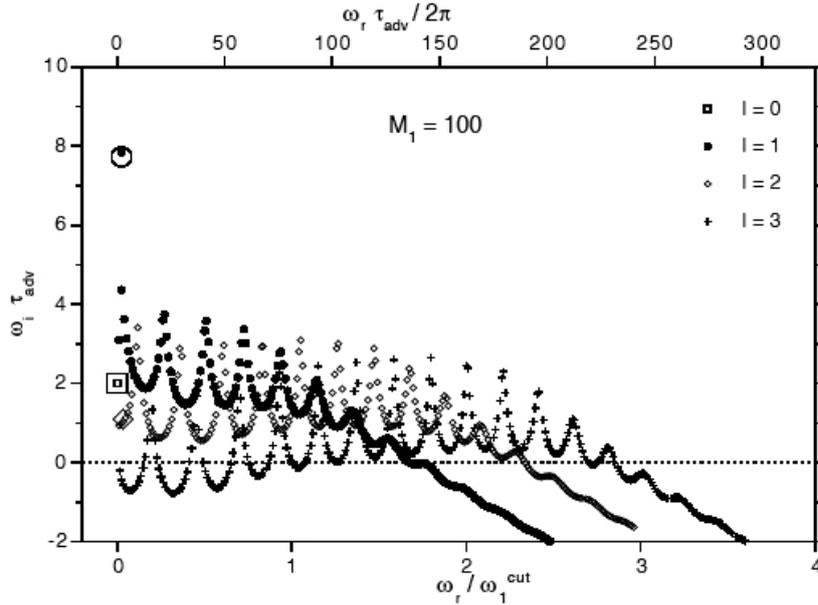


FIG. 2.3: Taux de croissance ω_i en unité du temps d'advection et fréquence ω_r en unité de la fréquence de coupure ou de la fréquence d'advection, des modes $l = 0, 1, 2$ et 3 , d'un flot isotherme fortement choqué (nombre de Mach pré-choc = 100). Le carré indique le mode radial de Nakayama, le rond, le mode non-radial de type Nakayama. Reproduction de la figure 4 de Foglizzo (2002) [34].

2.2 Accrétion sur une surface solide

2.2.1 Les naines blanches

Les systèmes semblables à AM Herculis [25] sont généralement à l'origine des travaux portant sur la stabilité du choc d'accrétion au-dessus des naines blanches. Dans ces systèmes, le fort champ magnétique de la naine blanche ($10^6 \leq B \leq 10^8$ Gauss) permet l'accrétion de la matière d'une étoile compagne évoluée, sans passer par la formation d'un disque. La matière accrétée passe par un choc proche de la surface de

la naine, puis continue sa chute en irradiant et en décélérant jusqu'à reposer sur la surface (figure 2.4).

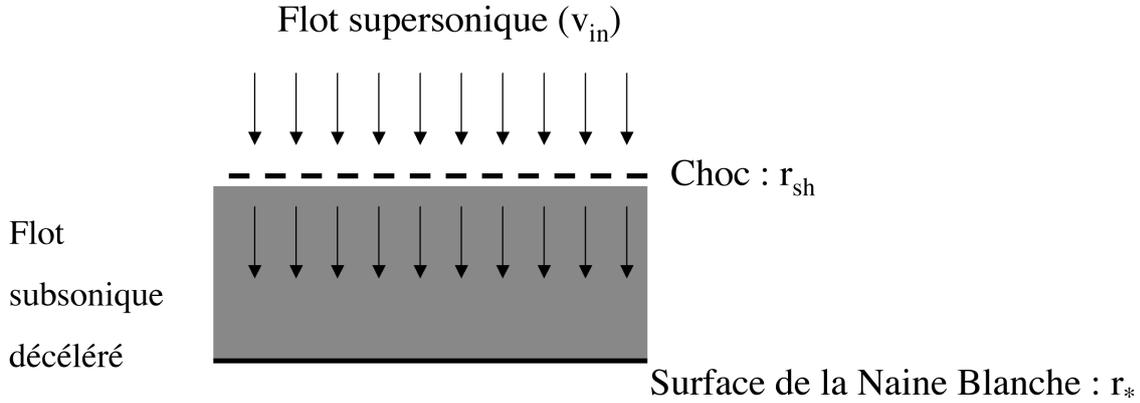


FIG. 2.4: Vue schématique du flot d'accrétion plan-parallèle sur une naine blanche. Les tirets indiquent la position du choc, les flèches suivent les lignes de flots. La zone grisée correspond à la zone refroidie.

Dans une courte lettre de 1981, Langer, Chanmugan et Shaviv font état de la découverte d'un nouveau type d'instabilité thermique dans les flots d'accrétion sur les atmosphères stellaires [65]. Les instabilités dites thermiques ont déjà été étudiées de manière générale [32] puis en relation avec les chocs dans le milieu interstellaire [77] mais la nouvelle instabilité de Langer et al. est un phénomène plus global de choc non-stationnaire. Ils considèrent pour cela un flot d'accrétion choqué qui perd de l'énergie par émission Bremsstrahlung thermique ($\mathcal{L} \propto \rho^2 T^{1/2}$) et tombe sur une naine blanche. A cause du fort champ magnétique de la naine, le flot est quasi-radial quand il est proche de la surface. Leur simulation unidimensionnelle montre que dans un premier temps, le choc s'éloigne de l'étoile car du gaz chaud s'est accumulé plus vite qu'il n'a été refroidi derrière le choc. Cependant, si une quantité suffisante de gaz s'est accumulée, les pertes radiatives reprennent le dessus : le flot refroidit et le choc retombe jusqu'à ce que la température derrière le choc soit suffisamment faible pour que l'émission cesse. Une instabilité oscillatoire se met alors en place au niveau du mouvement du choc. La période de ce mouvement est proche du temps de refroidissement du gaz (figure 2.5). L'instabilité résulte d'une combinaison entre le refroidissement essayant de faire s'effondrer la région post-choc et la résistance du gaz à être comprimé.

Cette lettre de Langer et al. a été suivie en 1982 par un premier travail d'analyse linéaire de Chevalier et Imamura [24]. Comme le choc est proche de la surface de la

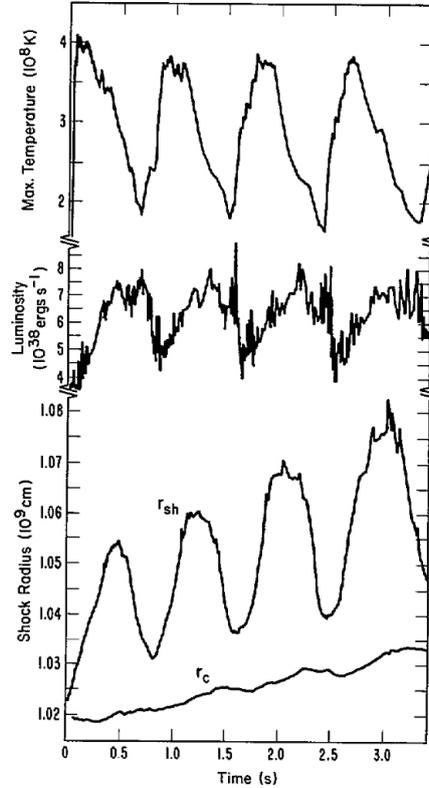


FIG. 2.5: Température maximale du gaz post-choc (haut), Luminosité Bremsstrahlung (milieu), Position du choc et du bas de la zone de refroidissement (bas), en fonction du temps. Reproduction de la figure 2 de l'article de Langer et al. [65].

naine, une approximation plan-parallèle est utilisée. Chevalier et Imamura calculent un flot stationnaire pour un index $\gamma = 5/3$, refroidi par une fonction de type $\mathcal{L} \propto \rho^2 T^\alpha$. Le flot est délimité d'une part par un choc et de l'autre par une surface rigide (figure 2.4). Ils introduisent ensuite de petites perturbations radiales de la vitesse du choc et déterminent fréquences et taux de croissance des perturbations. Leurs calculs se limitent aux 3 premières fréquences d'oscillation trouvées (le mode fondamentale et les deux premiers harmoniques). Ils obtiennent une instabilité pour $\alpha < 0,4$ pour le fondamental et $\alpha < 0,8$ pour les deux autres, avec des fréquences de l'ordre du dixième du temps hydrodynamique ($\sim x/v_{\text{in}}$ où x désigne la taille de la cavité entre le choc et le mur, et v_{in} la vitesse pré-choc incidente).

Imamura s'est ensuite attaché à étudier la stabilité d'un flot similaire pour une fonction de refroidissement présentant une dépendance plus faible par rapport à la

densité : $\mathcal{L} \propto \rho T^\alpha$ [54] . Il détermine le régime de stabilité du flot en fonction de la masse de la naine et du taux d'accrétion pour les premiers harmoniques. Bertschinger [7], dans une configuration un peu plus complexe de flot, a introduit les effets de perturbations non-radiales et a montré que des modes stables vis-à-vis des perturbations radiales pouvaient être instables vis-à-vis des perturbations non-radiales pour de petits nombres d'onde transverses.

A partir de 1998, Saxton et Wu présentent une série d'article [95, 93, 92] de calculs linéaires de modes où ils utilisent divers processus de refroidissement. Ils déterminent le comportement des huit premiers harmoniques et complètent ainsi les résultats précédents. Le flot montre un comportement instable suivant la fonction de refroidissement avec une stabilisation des modes lorsqu'on augmente l'intensité du refroidissement. Les harmoniques les plus instables sont souvent les plus élevés. Un comportement oscillatoire des taux de croissance en fonction du numéro de l'harmonique est mis en évidence (figure 2.6).

Les travaux suivants de Saxton et Wu feront intervenir une distinction entre température des ions et des électrons [93, 94] à la manière d'Imamura [55]. Les effets peuvent être importants lorsque le refroidissement est plus rapide que les échanges d'énergie ion-électron. Cette étude sort du cadre de notre travail. Nous tenons cependant à faire état de l'un de leurs résultats : pour un flot stationnaire dont la condition limite inférieure est un mur (ie : $v = 0$), les propriétés de stabilité sont indépendantes de la nature de la condition limite inférieure appliquée aux perturbations.

Des travaux de simulations numériques de ce type de choc d'accrétion ont été entrepris [56]. Le plus récent [80] propose une comparaison intéressante entre résultats linéaires et non-linéaires de simulations, et calculs analytiques de stabilité de type Chevalier Imamura . Il conclut sur la validation par les simulations des résultats analytiques dans le cas d'un traitement correct de la condition limite inférieure par les simulations.

2.2.2 Accrétion sur une étoile à neutrons

Le problème du choc d'accrétion sur une étoile à neutrons ressemble à celui de l'accrétion sur une naine blanche. Avec un rayon de l'étoile plus petit et un choc plus éloigné, le passage de la naine blanche à l'étoile à neutrons consiste à prendre en compte le caractère sphérique de l'accrétion (figure 2.7).

Dans un article de 1992, Houck et Chevalier [49, 50] étudient la stabilité linéaire d'un

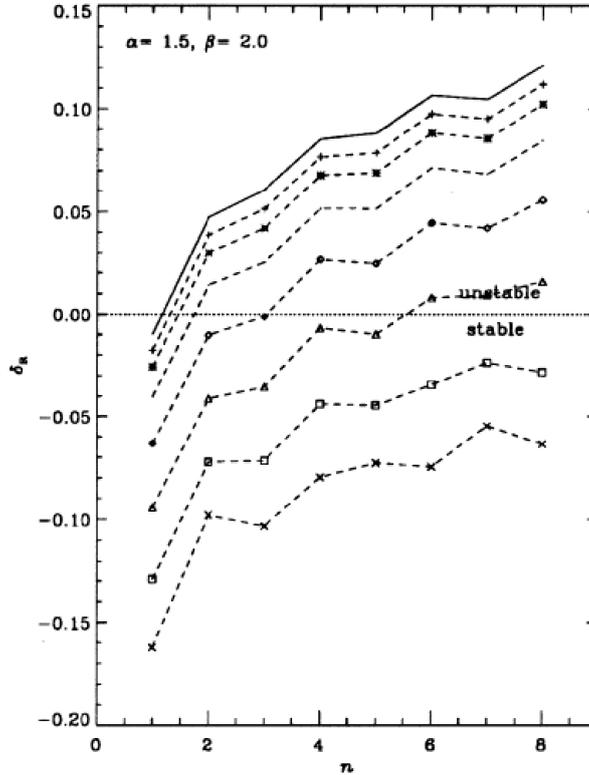


FIG. 2.6: Taux de croissance en fonction du numéro de l'harmonique pour un refroidissement en $\beta = 2$, $\alpha = 3/2$ avec une intensité de refroidissement croissante pour les courbes du haut vers le bas. Reproduction de la figure 2 de Saxton et al. [95]

choc au-dessus d'une étoile à neutrons pour diverses tailles de cavité ($x_{s0} = r_{sh} - r_*$), divers flots incidents mais également divers processus de refroidissement ($\mathcal{L} \propto \rho^\alpha T^\beta$). Leur étude se limite au mode fondamental et au premier harmonique. Houck et Chevalier mettent en évidence une déstabilisation des modes radiaux lorsque la cavité est suffisamment étendue. Il en va de même pour le mode non-radial $l = 1$ même si ce dernier est toujours, d'après eux, moins instable que le mode radial. Les modes avec $l \geq 2$ sont par contre stables voire fortement stabilisés lorsque la cavité grandit (figure 2.8).

Un flot d'accrétion choqué, essentiellement adiabatique ($\gamma = 4/3$) au cours de sa chute vers l'étoile, puis refroidi sur une couche mince à la surface de l'étoile ($\alpha = \beta = 5/2$), a été simulé en deux dimensions par Blondin en 2003 [11]. Dans les phases linéaires de sa simulation (c'est à dire dans les tout premiers instants), Blondin observe la sta-

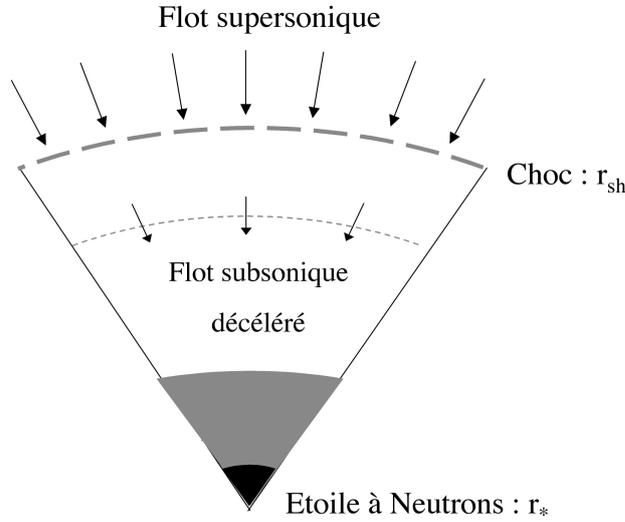


FIG. 2.7: Vue schématique du flot d'accrétion radiale sur une étoile à neutrons. La zone grisée correspond à la zone refroidie et la zone noire à l'étoile à neutrons. Le choc correspond à la ligne en tirets gris, les flèches indiquent les lignes de flot.

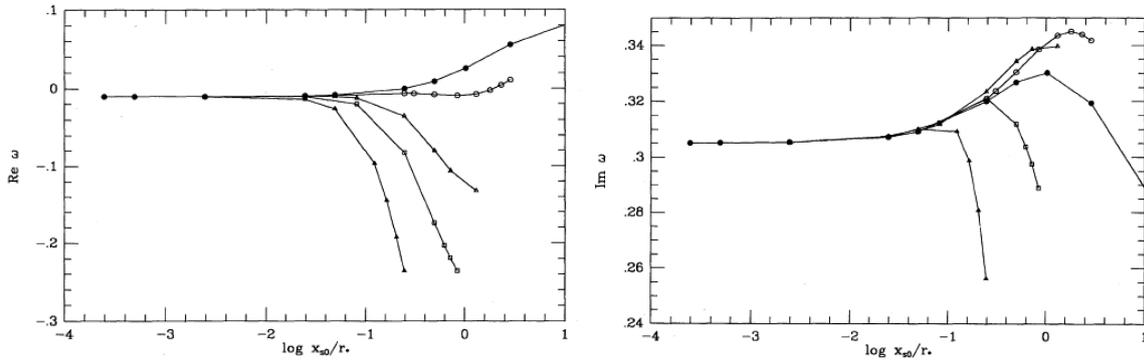


FIG. 2.8: Taux de croissance $\text{Re}(\omega)$ (qui correspond à notre ω_i) et fréquence $\text{Im}(\omega)$ (qui correspond à notre ω_r) en unité en unité de v_{sh}/x_{s0} des modes fondamentaux, en fonction de la taille de la cavité, pour $\gamma = 5/3$, $\beta = 2$ et $\alpha = 1/2$. Les cercles pleins correspondent à $l = 0$, les cercles creux à $l = 1$, les triangles à $l = 3$, les carrés à $l = 5$ et les triangles pleins à $l = 10$. Reproduction de la figure 7 de Houck et Chevalier 1992 [50].

bilité du mode radial d'oscillation en accord avec les résultats de Houck et Chevalier : ce mode n'est instable que pour un choc plus éloigné de l'étoile. Il observe cependant que le mode $l = 1$ est très instable. Pour la première fois, Blondin met également en évidence dans sa simulation la présence possible d'un cycle advectif-acoustique en

suivant l'évolution des perturbations de vitesses transverses créées au choc et celles de pression remontant le flot (figure 2.9). Les perturbations de vitesse sont bien advectées avec le flot vers la surface de l'étoile et semblent donner naissance à des perturbations de pression qui remontent plus rapidement (pente plus forte dans la figure 2.9) vers le choc. Son instabilité du mode $l = 1$ semble liée à la présence du cycle.

C'est la première fois que le cycle advectif-acoustique a été mis en évidence dans des simulations numériques de fluide astrophysique.

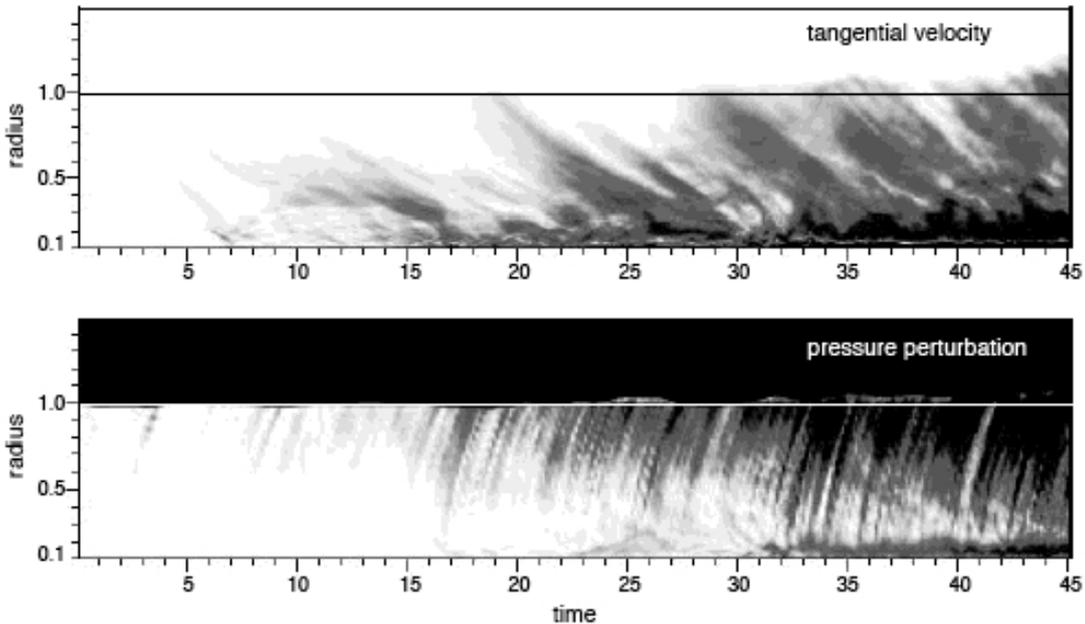


FIG. 2.9: Evolution temporelle de la moyenne angulaire de la valeur absolue de la vitesse tangentielle (haut) et de la valeur absolue de la variation de pression par rapport à la valeur stationnaire (bas). Reproduction de la figure 7 de Blondin et al. 2003 [11].

2.3 Conclusion

Les comportements décrits par Saxton, notamment les variations du taux de croissance en fonction de la fréquence, apparaissent proche de ceux expliqués par Foglizzo [34] à l'aide du cycle advectif-acoustique dans son étude de l'accrétion sur un trou noir. Les simulations de Blondin et al. [11] sont un autre indice fort de l'intérêt de l'étude du cycle dans l'accrétion sur un objet compact. Les résultats de Houck et Chevalier ([50],

ainsi que l'étude du cas adiabatique dans le premier chapitre de cette thèse, mettent en évidence la nécessité de prendre en compte les processus non-adiabatiques, notamment le refroidissement.

L'obtention des modes d'oscillation dans la configuration d'un choc d'accrétion au-dessus d'une surface solide reste un calcul purement numérique qui peut présenter des difficultés techniques (voir Annexe B). Ces résultats seront présentés dans le chapitre 4 de cette thèse. L'interprétation par le cycle advectif-acoustique nécessite en revanche des approximations qui vont être présentées dans le chapitre suivant, à l'aide d'un modèle simplifié, un "toy-model".

Toy-model

Le calcul de l'évolution des perturbations dans un flot stationnaire non-adiabatique est complexe. Le système différentiel qui le régit est un système d'ordre 4 généralement difficile à résoudre. De plus, les coefficients de ces équations dépendent des grandeurs physiques du flot stationnaire (densité, vitesse...) qui ne sont elles-mêmes pas obtenues de manière simple sauf cas particulier. Etudier l'influence du refroidissement sur le cycle advectif-acoustique semble donc un problème épineux.

Une série d'approximation apparaît nécessaire pour la compréhension et la prévision des comportements du cycle advectif-acoustique. Le modèle simplifié que nous étudions est le suivant (figure 3.1) : un flot uniforme adiabatique choqué subit l'influence d'un refroidissement localisé sur une couche mince puis continue son chemin de manière uniforme et adiabatique (haut de la figure 3.1). Entre le choc et une condition limite inférieure placée à la suite de la zone de refroidissement, on introduit des perturbations (bas de la figure 3.1). Le but de ce chapitre est d'étudier l'influence du refroidissement sur ces perturbations.

Ce chapitre s'organise donc de la manière suivante : dans un premier temps on décrit le flot stationnaire que l'on considère. On perturbe ensuite ce flot. Une troisième section va s'intéresser à la description des perturbations au niveau des conditions limites, c'est-à-dire le choc et la condition en sortie de zone de refroidissement. La dernière partie s'intéresse au calcul de l'efficacité totale du cycle advectif-acoustique dans un tel modèle.

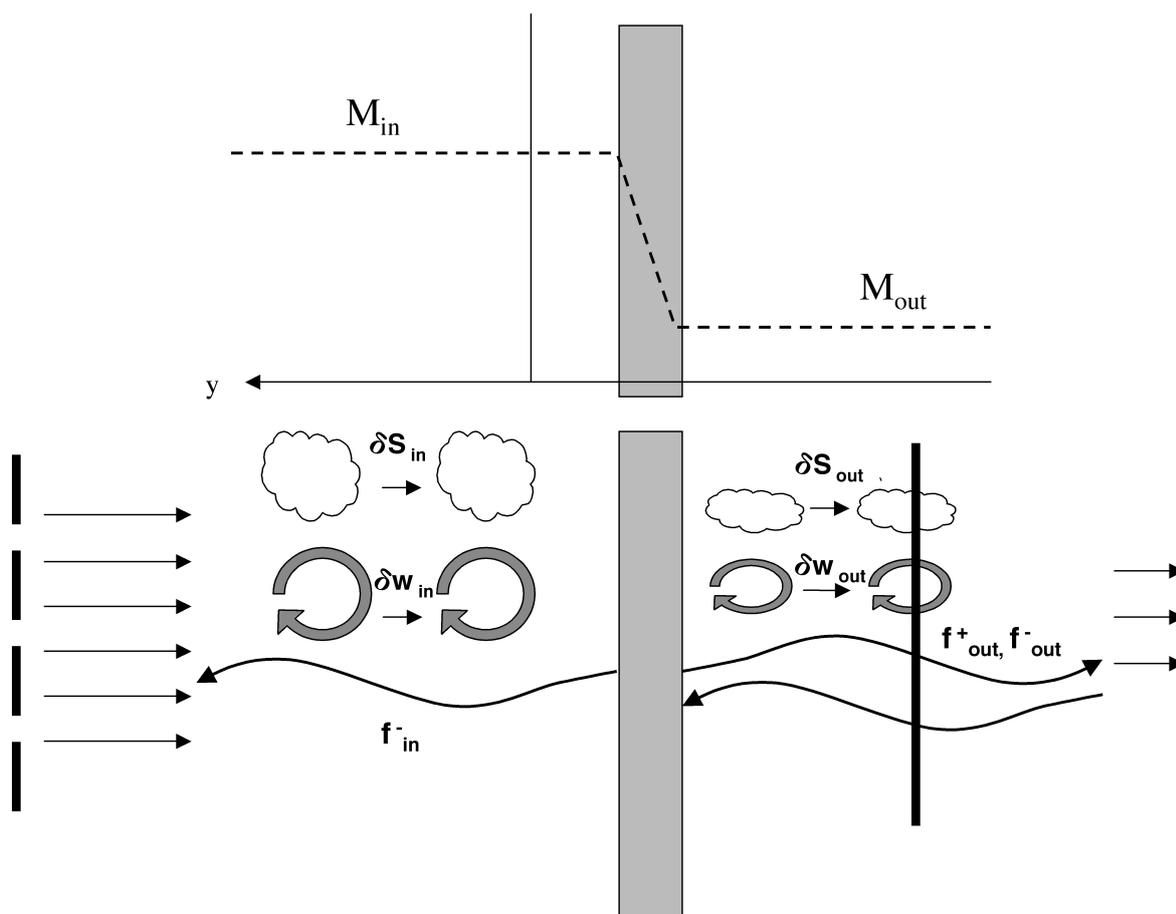


FIG. 3.1: Vue schématique du toy-model du cycle advectif-acoustique. La zone grisée correspond à la zone de refroidissement. Les indices "in" correspondent au flot incident sur la zone de refroidissement, les indices "out" au flot en sortie de refroidissement. En haut le profil du nombre de Mach du flot stationnaire. En bas, l'ensemble des perturbations : advection des perturbations d'entropie et de vorticité, visualisation du feedback acoustique. Les pointillés indiquent la position du choc, le trait vertical, la position de la condition limite inférieure.

3.1 Description du flot stationnaire

3.1.1 Une couche mince de refroidissement

La première simplification de notre modèle consiste à raisonner sur un flot stationnaire plan-parallèle, c'est à dire un flot à une dimension (flot suivant l'axe y), infini dans les autres directions. On supprime, par cette hypothèse, tous les gradients du flot qui étaient dus à des termes de dilution géométrique dans le cas sphérique. Le but de cette partie étant de déterminer l'influence de la non-adiabaticité, la seconde hypothèse concerne donc le refroidissement que va subir le flot. Un flot uni-dimensionnel arrive adiabatiquement avec un nombre de Mach \mathcal{M}_{in} , une entropie S_{in} et une vitesse du son c_{in} , sur une couche de refroidissement, puis en ressort et poursuit son chemin, cette fois encore adiabatiquement, avec un nombre de Mach \mathcal{M}_{out} . A refroidissement \mathcal{L} et index adiabatique γ fixés, la donnée des nombres de Mach \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} suffit à calculer le flot stationnaire (figure 3.2).

Le refroidissement est supposé être le processus principal qui régit l'évolution du flot. Dans la zone de refroidissement, il est supposé très intense : la couche de refroidissement est donc très mince et ressemble pratiquement à une marche d'escalier. Tous les autres termes du flot stationnaire (Eq 1.13-1.17) mais également du flot perturbé (Eq 1.34-1.37) sont supposés négligeables devant le refroidissement. L'influence de la gravité est donc supposée négligeable, aussi bien dans la zone refroidie qu'en dehors. Ainsi les relations concernant le flot stationnaire deviennent :

$$\frac{\nabla v}{v} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{\nabla S}{1 - \mathcal{M}^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\nabla \rho}{\rho} = - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{\nabla S}{1 - \mathcal{M}^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\nabla c}{c} = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) \left(\frac{1 - \gamma \mathcal{M}^2}{1 - \mathcal{M}^2} \right) \nabla S \quad (3.3)$$

$$\frac{\nabla \mathcal{M}}{\mathcal{M}} = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) \left(\frac{1 + \gamma \mathcal{M}^2}{1 - \mathcal{M}^2} \right) \nabla S \quad (3.4)$$

$$\nabla S = K K_{\text{crit}} e^{-\beta S} c^{2(\alpha - 1 + \frac{\beta}{\gamma - 1})} \quad (3.5)$$

($\nabla \equiv d/dy$)

De la même manière que précédemment, le refroidissement est normalisé à une valeur critique (voir Annexe A) :

$$K_{\text{crit}} = (-v_{\text{in}})^\beta (c_{\text{in}})^{-2(\alpha - 1)} \quad (3.6)$$

On précise que le flot arrive sur la couche de refroidissement du côté $y > 0$, avec un vitesse constante mais négative de sorte que, comme précédemment dans le cas sphérique, le nombre de Mach soit défini par la relation : $\mathcal{M} \equiv -\frac{v}{c}$.

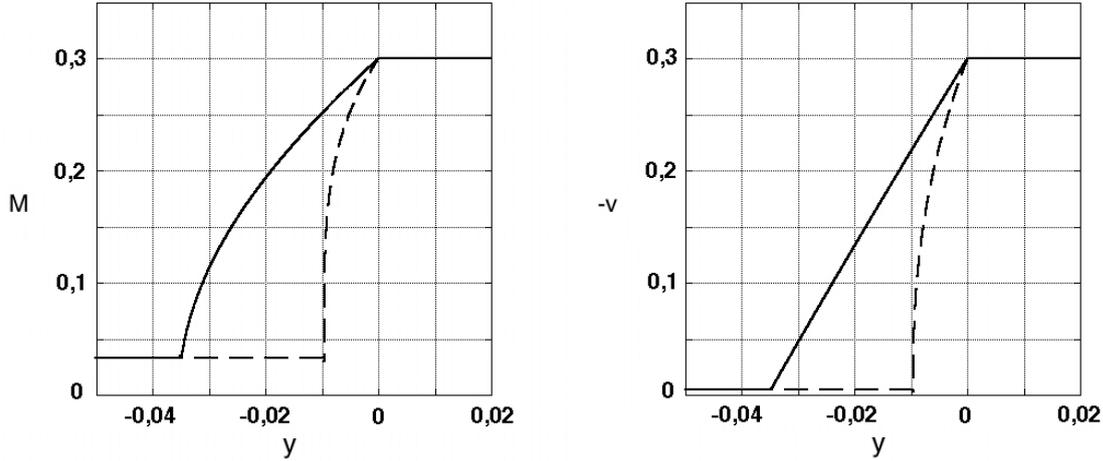


FIG. 3.2: Nombre de Mach et vitesse de deux flots stationnaires arrivant avec $\mathcal{M}_{\text{in}} = 0,3$, $S_{\text{in}} = 0$ et $c_{\text{in}} = 1$. Pour $\mathcal{M}_{\text{out}} = 0,04$, en trait plein : $\gamma = 4/3$, $\beta = 2$, $\alpha = 1/2$ et $K = 100$, en tirets : $\gamma = 5/3$, $\beta = \alpha = 5/2$ et $K = 100$.

Le refroidissement est donc très élevé et le nombre de Mach incident est subsonique. Les nombres de Mach dans la zone non-adiabatique vont donc être très petits. On peut donc négliger les termes en nombre de Mach dans les équations du flot stationnaire non-adiabatique.

Avant (indice "in") et après (indice "out") la zone de refroidissement, le flot est adiabatique. Toutes les grandeurs stationnaires y sont donc constantes. Le flot stationnaire dans la zone de refroidissement est approximé par les équations suivantes (figure 3.3) :

$$\frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}_{\text{in}}^2} \sim e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(S-S_{\text{in}})} \quad (3.7)$$

$$\frac{c}{c_{\text{in}}} \sim e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}(S-S_{\text{in}})} \quad (3.8)$$

$$\frac{v}{v_{\text{in}}} \sim e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(S-S_{\text{in}})} \quad (3.9)$$

On peut donc calculer les rapports des grandeurs en entrée et sortie en fonction de la différence d'entropie $\Delta S = S_{\text{out}} - S_{\text{in}}$. L'hypothèse d'un refroidissement intense, d'une

couche mince, se traduit par $\Delta S \sim -\infty$.

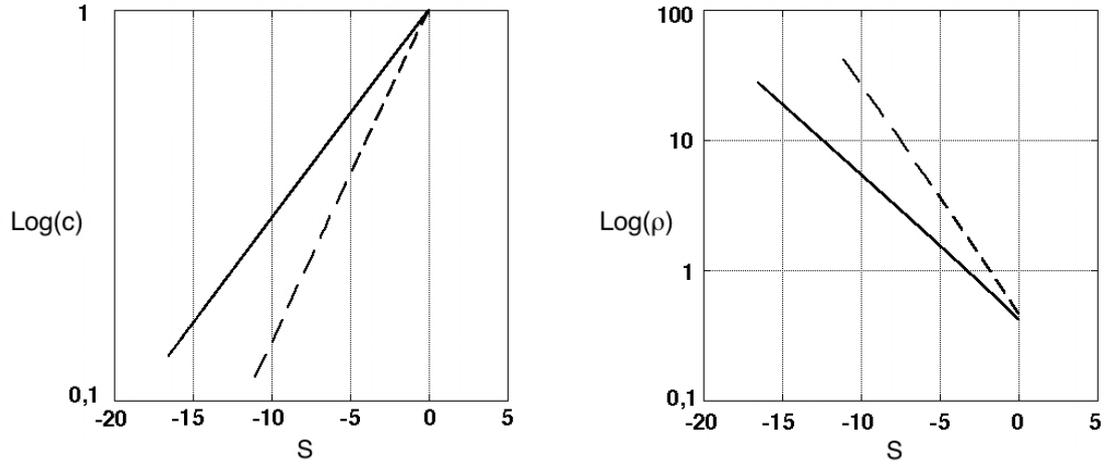


FIG. 3.3: Vitesses du son et densités de deux flots stationnaires, dans la zone de refroidissement, en fonction de l'entropie. En trait plein, $\gamma = 4/3$, $\beta = 2$, $\alpha = 1/2$ et $K = 100$, en tirets, $\gamma = 5/3$, $\beta = \alpha = 5/2$ et $K = 100$. Les deux pentes correspondent bien aux formules approchées.

On peut comme dans le premier chapitre (Eq 1.23-1.25) discuter la finitude du temps d'advection à travers notre couche de refroidissement. La recherche de comportements simples tels que des lois de puissance en fonction de la position y dans la zone de refroidissement permet de distinguer deux cas de figure en fonction de la nature du refroidissement. On suppose que les grandeurs du flot sont proportionnelles à une puissance de $(y - y_{\text{cool}})^a$ avec y_{cool} désignant la taille de la zone. On trouve :

$$v \propto c^2 \propto (y - y_{\text{cool}})^{\frac{1}{\beta+1-\alpha}} \propto e^{\frac{\gamma-1}{\gamma} S} \quad (3.10)$$

Le signe de $\beta - \alpha$ apparaît comme le paramètre clef dans le calcul du temps d'advection :

1 - Pour $\beta - \alpha > 0$: Le refroidissement s'emballe. Vitesse et température sont bien nulles à la sortie de la zone refroidie. La pression tend vers une constante. La puissance de la vitesse étant plus petite que un, le temps d'accrétion est fini. On est dans un contexte d'instabilité de refroidissement.

2 - Pour $0 > \beta - \alpha > -1$: Le refroidissement s'emballe. Vitesse et température sont bien nulles à la sortie de la zone refroidie mais la pression tend vers l'infini. L'intégrale

permettant de calculer le temps d'accrétion ne converge pas en r_* . Le temps d'advection tend donc vers l'infini.

3 - Pour $-1 > \beta - \alpha$: Le refroidissement s'autosature. Vitesse et température nulles sont atteintes en une distance infinie. Le temps d'advection tend vers l'infini.

3.1.2 Une marche adiabatique

Dans la suite de l'étude de ce modèle, une comparaison des résultats avec ceux qu'auraient donnés un flot purement adiabatique (indice "adia") sera intéressante. On suppose qu'un flot adiabatique, stationnaire et uniforme, subit un saut au niveau du nombre de Mach par exemple produit par un potentiel gravitationnel "en marche d'escalier". La zone de saut est supposée infiniment fine.

Les rapport des grandeurs stationnaires en entrée et sortie de la marche, s'expriment aisément en fonction des nombres de Mach :

$$\frac{c_{\text{out}}}{c_{\text{in}}} = \left(\frac{\mathcal{M}_{\text{in}}}{\mathcal{M}_{\text{out}}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad (3.11)$$

On peut noter que dans ce cas, contrairement au flot refroidi, une diminution du nombre de Mach entraîne une augmentation de la température. Dans l'approximation des petits nombres de Mach, cela implique que la vitesse du son en sortie de la marche diverge. La vitesse du fluide v_{out} , elle, tend bien vers zéro en sortie de couche, quel que soit l'index γ . Il faut se rappeler que dans le cas sphérique, la vitesse du flot adiabatique diverge pour $\gamma > 3/2$ et ne correspond pas à notre toy-model.

3.2 Les perturbations

Sortons maintenant notre artillerie "analyse linéaire + approximation WKB" pour traiter les perturbations du flot stationnaire. Les perturbations f, g, h, Ψ et δS ont les mêmes définitions que précédemment (Eq 1.26, 1.27, 1.28) sachant que l'ordonnée "y" joue ici le rôle de la coordonnée radiale dans le cas sphérique.

En ce qui concerne les fréquences des ondes étudiées, on suppose ici que le temps de passage à travers la couche de refroidissement est très court par rapport à la période

$2\pi/\omega$ des ondes c'est-à-dire :

$$\omega_r \int_{cool} \frac{dy}{|v|} \ll 1 \quad (3.12)$$

où v est la vitesse du fluide dans la zone de refroidissement.

Comme dans l'étude du flot radial, nous désirons ici que nos perturbations puissent être obliques par rapport au flot. La symétrie du problème permet de n'introduire qu'une seule direction transverse notée x au lieu de deux, ce qui simplifie l'étude. On définit donc un nombre d'onde transverse k_x . Les perturbations sont de la forme :

$$S + \delta S(y) e^{i(k_x x - \omega t)}$$

En ce qui concerne les perturbations de vorticité, une nouvelle définition de δK est plus adaptée à la configuration uni-dimensionnelle du flot :

$$\delta K \equiv \omega k_x \left(\frac{k_x}{\omega} f - \delta v_x \right) \quad (3.13)$$

où δv_x représente la perturbation de vitesse transverse au flot.

Dans la zone adiabatique, les perturbations δS et δK sont simplement advectées vers la zone de refroidissement. Dans la région de refroidissement, le système différentiel qui régit les perturbations est le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{f}{c^2(1 - \mathcal{M}^2)} \left[\frac{i\omega}{v} - \frac{ik_x^2 c^2}{\omega v} (1 - \mathcal{M}^2) + \nabla S \{ \beta + (\gamma - 1)(\alpha - 1) \} \right] \\ &\quad - \frac{g}{(1 - \mathcal{M}^2)} \left[\frac{i\omega}{v} \mathcal{M}^2 + \nabla S \{ 1 + \mathcal{M}^2(\beta - \alpha + \gamma(\alpha - 1)) \} \right] \\ &\quad + \delta S (1 - \beta) \nabla S + i \frac{\delta K}{\omega v} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f}{c^2(1 - \mathcal{M}^2)} \left[-i\omega v + \frac{c^2}{\gamma} \nabla S \{ \beta + \alpha(\gamma - 1) \} \right] \\ &\quad + \frac{g}{(1 - \mathcal{M}^2)} \left[i\omega v - \frac{c^2}{\gamma} \nabla S \{ 1 + \mathcal{M}^2(\beta - 1 + \alpha(\gamma - 1)) \} \right] \\ &\quad + \delta S \frac{c^2}{\gamma} \left[\frac{i\omega}{v} + \nabla S (1 - \beta) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta S}{\partial y} &= \frac{f}{c^2(1-\mathcal{M}^2)} \nabla S \{\beta + (\gamma - 1)(\alpha - 1)\} \\ &\quad - \frac{g}{(1-\mathcal{M}^2)} \nabla S \{1 + \mathcal{M}^2(\beta - \alpha + \gamma(\alpha - 1))\} \\ &\quad + \delta S \left[\frac{i\omega}{v} + (1 - \beta) \nabla S \right]\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta K}{\partial y} &= \frac{f}{\gamma(1-\mathcal{M}^2)} k_x^2 \nabla S \{\nabla S(\beta + \alpha(\gamma - 1))\} \\ &\quad - \frac{g}{(1-\mathcal{M}^2)} k_x^2 c^2 \frac{\nabla S}{\gamma} \{1 + \mathcal{M}^2(\beta - 1 + \alpha(\gamma - 1))\} \\ &\quad + \delta S \frac{c^2}{\gamma} k_x^2 \nabla S(1 - \beta) + \frac{i\omega}{v} \delta K\end{aligned}\tag{3.17}$$

Ainsi écrit, le système est assez peu parlant physiquement. En le réécrivant, on peut obtenir des équations plus simples :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f}{c^2(1-\mathcal{M}^2)} \left[-i\omega v + \frac{c^2}{\gamma} \nabla S \{\beta + \alpha(\gamma - 1)\} \right] \\ &\quad + \frac{g}{(1-\mathcal{M}^2)} \left[i\omega v - \frac{c^2}{\gamma} \nabla S \{1 + \mathcal{M}^2(\beta - 1 + \alpha(\gamma - 1))\} \right] \\ &\quad + \delta S \frac{c^2}{\gamma} \left[\frac{i\omega}{v} + \nabla S(1 - \beta) \right]\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{i\omega}{c^2 v} \frac{f - v^2 g}{1 - \mathcal{M}^2} - \frac{ik_x}{v} \delta v_x - \frac{i\omega}{v} \delta S\tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \delta v_x}{\partial y} = -\frac{ik_x}{v} \frac{f - v^2 g}{1 - \mathcal{M}^2} + \frac{i\omega}{v} \delta v_x + \frac{ik_x}{v} \frac{c^2}{\gamma} \delta S\tag{3.20}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = i\omega h - ik_x \delta v_x\tag{3.21}$$

Appliquons maintenant l'hypothèse d'un refroidissement intense dans une couche très mince. On se fixe une valeur de la fréquence ω_r qui correspond à notre approximation $\omega \int dr/v \ll 1$. On fixe un nombre d'onde k_x . Le refroidissement domine dans la région de refroidissement sur tous les autres termes : les termes dans le système différentiel qui ne sont pas proportionnels à ∇S sont finis alors que ∇S est un terme infiniment grand. Le nouveau système différentiel est alors :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{c^2}{\gamma} \nabla S \left[\frac{f}{c^2(1 - \mathcal{M}^2)} \{\beta + \alpha(\gamma - 1)\} - \frac{g}{(1 - \mathcal{M}^2)} + \delta S(1 - \beta) \right] \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \delta v_x}{\partial y} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

J'aimerais attirer l'attention du lecteur sur le fait que, dans ce toy-model, la pulsation ω de l'onde considérée disparaît des équations sur les perturbations. Ce toy-model nous permet de nous affranchir du calcul des modes d'oscillations. Il va nous permettre de prévoir le taux de croissance des perturbations à très basses fréquences.

L'hypothèse du refroidissement intense permet ainsi de passer d'un système d'ordre 4 à un système d'ordre 1. Trois constantes lors du passage dans la zone refroidie sont mises en évidence. Elles se résument en fait à la conservation de la quantité de matière h , de la vitesse transverse δv_x et de la pression dynamique Ψ :

$$h = h_{\text{in}} \quad (3.26)$$

$$\delta v_x = \delta v_{x,\text{in}} \quad (3.27)$$

$$\Psi = \Psi_{\text{in}} \quad (3.28)$$

L'approximation WKB nous permet d'écrire qu'une perturbation, par exemple f , se décompose de la même manière que dans le chapitre précédent : $f = f^+ + f^- + f^S + f^K$. Si on adapte les définitions de μ et de δK au cas plan-parallèle, les relations entre les perturbations décomposées et leurs "sources" sont les mêmes qu'auparavant (Eq 1.45-

1.52) :

$$\mu^2 = 1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} (1 - \mathcal{M}^2) \quad (3.29)$$

$$f^S = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{c^2}{\gamma} \delta S^S \quad (3.30)$$

$$g^S = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{\mu^2}{\gamma} \delta S^S \quad (3.31)$$

$$g^\pm = \pm \frac{\mu}{\mathcal{M} c^2} f^\pm \quad (3.32)$$

$$f^K = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{v^2}{\omega^2} \delta K^K \quad (3.33)$$

$$g^K = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{1}{\omega^2} \delta K^K \quad (3.34)$$

Quand la fréquence ω est réelle (ce qui est le cas ici), μ est directement relié à l'angle θ entre la direction de propagation de l'onde et la direction du flot :

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \mu^2}{\mu^2 (1 - \mathcal{M}^2)} \quad (3.35)$$

Ainsi, en faisant varier μ_{in} de 0 à 1, l'angle θ_{in} variera de 0 ($\leftrightarrow \mu_{\text{in}} = 1$) à $\pi/2$ ($\leftrightarrow \mu_{\text{in}} = 0$).

Puisque notre système est maintenant d'ordre 1 et que le flot stationnaire est facilement descriptible dans l'approximation nombre de Mach petit, on résout l'équation sur la perturbation f à l'aide des diverses constantes du problème. Une équation différentielle simple avec deux termes sources contrôle l'évolution de la perturbation f (l'entropie apparaît comme une variable plus judicieuse que l'ordonnée "y") :

$$\frac{df}{dS} + \frac{(\beta - \alpha)(\gamma - 1)}{\gamma} f = -\frac{c^2}{\gamma} h_{\text{in}} + \beta v \Psi_{\text{in}} \quad (3.36)$$

Les comportements en exponentielle des grandeurs du flot stationnaire (Eq 3.7-3.9) permettent de résoudre facilement cette équation. La solution est de la forme :

$$\begin{aligned} f &= A f^0 + f_p \\ f^0 &= e^{(\alpha - \beta) \frac{\gamma - 1}{\gamma} S} \\ f_p &= \frac{c_{\text{in}}^2 h_{\text{in}} - \beta v_{\text{in}} \Psi_{\text{in}}}{(\gamma - 1)(\alpha - \beta - 1)} e^{\frac{\gamma - 1}{\gamma} S} \end{aligned}$$

f^0 étant la solution de l'équation sans second membre et f_p une solution particulière.

Le coefficient A sera calculé en fonction des valeurs incidentes des perturbations. Notre analyse étant linéaire, la réponse de la zone de refroidissement à une onde incidente quelconque est la combinaison linéaire des réponses à chacune des ondes de base (ie : entropique, tourbillonnaire, acoustique dans le sens du flot, acoustique dans le sens inverse).

Une fois f calculée, les autres perturbations s'obtiennent à partir des constantes du problème :

$$\delta S = \frac{\gamma}{c^2}(f - v(\Psi_{\text{in}} - vh_{\text{in}})) \quad (3.37)$$

$$g = \delta S + h_{\text{in}} \quad (3.38)$$

$$\delta K = k_x^2(f - f_{\text{in}}) + \delta K_{\text{in}} \quad (3.39)$$

Les perturbation acoustiques f^- et f^+ s'obtiennent par les équations Eq (1.54)-(1.55).

On remarque sur Eq (3.36) que le signe de la différence $\alpha - \beta - 1$ est essentiel à l'amplification ou non des perturbations lors de leur traversée de la zone de refroidissement.

Le rôle du signe de $\alpha - \beta - 1$ pouvait être prévu en raisonnant de manière simple sur les équations de propagation des perturbations. Supposons que l'on soit en présence d'une onde d'entropie. Dans le cas adiabatique, cette onde ne crée pas de perturbation de vitesse δv [64] mais dans un cas non-adiabatique comme celui que nous étudions, elle crée lors de son passage dans la zone refroidie, des perturbations de vitesse, pression et densité. Au passage de la zone refroidie, la perturbation du taux d'accrétion $h = g - \delta S = \delta v/v + \delta \rho/\rho$ est constante, donc perturbations de densité et de vitesse sont liées simplement. A l'équilibre de pression ($\delta P/P = 0$), l'équation de la perturbation d'entropie (Eq 3.16) dans la zone refroidie peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \delta S &\sim \nabla S (\beta - \alpha + 1) \frac{\delta \rho}{\rho} \\ \frac{\delta \rho}{\rho} &\propto -\delta S \end{aligned}$$

Ainsi, la perturbation d'entropie diverge si $\beta - \alpha + 1 > 0$.

Un raisonnement simple sur l'équation stationnaire de l'entropie amène à la même conclusion. A pression constante, le gradient de l'entropie est proportionnel à la densité

à la puissance $\beta - \alpha + 1$, sachant par l'équation de continuité que $\rho v = cste$. Soit S_{in} , la valeur de l'entropie en entrée de la région de refroidissement et S_{out} , sa valeur en sortie. Supposons que l'entropie augmente légèrement, d'une valeur δS , en entrée. La densité, elle, diminue légèrement, d'après la définition de l'entropie. Si $\beta - \alpha + 1$ est positif (négatif), ∇S diminue (augmente), donc la variation de l'entropie augmente (diminue). De même si l'entropie diminue, la densité augmente (diminue) donc le gradient d'entropie augmente (diminue) pour $\beta - \alpha + 1 > 0$ (< 0) et donc la variation d'entropie augmente (diminue). Ainsi, le signe de $\beta - \alpha + 1$ indique le sens de variation de la pente de l'entropie dans la zone de refroidissement (figure 3.4). On est dans un cas semblable à une instabilité de refroidissement.

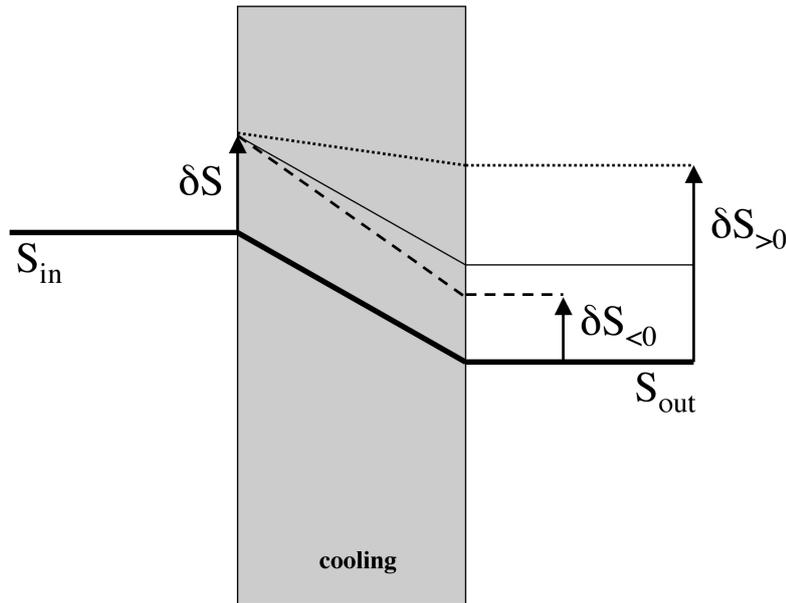


FIG. 3.4: Vue schématique de l'influence du signe de $\beta - \alpha + 1$ sur les perturbation d'entropie. La zone grisée correspond à une zone de refroidissement. En tiret, le cas $\beta - \alpha + 1 < 0$, en pointillés, le cas inverse $\beta - \alpha + 1 > 0$. On a représenté en trait plein fin le cas où la variation d'entropie ne changerait pas.

La comparaison avec un cas adiabatique où le flot subirait un saut de nombre de Mach nécessite le calcul des perturbations dans le cas de cette marche adiabatique. En reprenant le système d'équation des perturbations, on constate que ce cas revient à conserver f , g , δS et δK lors du franchissement du saut. Il suffit donc de résoudre, en fonction des ondes incidentes, les égalités suivantes pour déterminer les valeurs des

perturbations à la sortie de la marche :

$$f_{\text{in}}^+ + f_{\text{in}}^- + f_{\text{in}}^S + f_{\text{in}}^K = f_{\text{out}}^+ + f_{\text{out}}^- + f_{\text{out}}^S + f_{\text{out}}^K \quad (3.40)$$

$$g_{\text{in}}^+ + g_{\text{in}}^- + g_{\text{in}}^S + g_{\text{in}}^K = g_{\text{out}}^+ + g_{\text{out}}^- + g_{\text{out}}^S + g_{\text{out}}^K \quad (3.41)$$

$$\delta S_{\text{in}} = \delta S_{\text{out}} \quad (3.42)$$

$$\delta K_{\text{in}} = \delta K_{\text{out}} \quad (3.43)$$

Par exemple, une onde acoustique se propageant contre le flot donne :

$$\begin{aligned} f_{\text{in}}^- &= f_{\text{out}}^+ + f_{\text{out}}^- \\ \frac{\mu_{\text{in}}}{\mathcal{M}_{\text{in}} c_{\text{in}}^2} f_{\text{in}}^- &= \frac{\mu_{\text{out}}}{\mathcal{M}_{\text{out}} c_{\text{out}}^2} (f_{\text{out}}^+ - f_{\text{out}}^-) \\ \delta S_{\text{in}} &= \delta S_{\text{out}} = 0 \\ \delta K_{\text{in}} &= \delta K_{\text{out}} = 0 \end{aligned}$$

3.3 Conditions limites

3.3.1 Un choc

On suppose que notre flot stationnaire incident a été en amont, du côté $y > 0$, choqué pour devenir subsonique. La force du choc (ie : le nombre de Mach supersonique avant le choc) est un paramètre de notre modèle. La traversée du choc s'effectue à travers les relations de Rankine-Hugoniot. Le nombre de Mach post-choc vaut donc :

$$\mathcal{M}_2 = \left[\frac{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2}{2\gamma\mathcal{M}_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{1/2} \quad (3.44)$$

Les perturbations incidentes de la partie précédente auront cette fois une origine particulière : elles seront dues à une perturbation du choc, de la même manière que dans notre description du mécanisme général du cycle advectif-acoustique. Le choc est supposé être loin de la zone de refroidissement, dans une partie totalement adiabatique. Les relations de conversion des perturbations au niveau du choc s'obtiennent comme auparavant (Eq 1.66-1.69), par perturbation des lois de conservation à travers le choc :

$$f_{\text{sh}} = (v_2 - v_1)\Delta v \quad (3.45)$$

$$g_{\text{sh}} = \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \Delta v + \delta S_{\text{sh}} \quad (3.46)$$

$$\delta K_{\text{sh}} = 0 \quad (3.47)$$

$$\delta S_{\text{sh}} = -\frac{\gamma(v_1 - v_2)^2}{c_1^2 v_1} \Delta v \quad (3.48)$$

La notion d'efficacité de conversion au choc traduit la conversion d'une onde acoustique atteignant le choc en onde entropique ($Q_{-, \text{sh}}^S$) et en onde de type δK ($Q_{-, \text{sh}}^K$). Une réflexion des ondes sonores est également possible au choc ($Q_{-, \text{sh}}^+$). Ces efficacités peuvent s'exprimer de différentes manières selon le type de perturbation considérée. En raisonnant toujours sur les perturbations de type f du nombre de Bernoulli, elles s'écrivent :

$$Q_{-, \text{sh}}^S \equiv (f^S/f^-)_{\text{sh}} = \left(\frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{c^2 \delta S}{\gamma f^-} \right)_{\text{sh}} \quad (3.49)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^+ \equiv (f^+/f^-)_{\text{sh}} \quad (3.50)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^K \equiv (f^K/f^-)_{\text{sh}} = \left(\frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} \frac{v^2 \delta K}{\omega^2 f^-} \right)_{\text{sh}} \quad (3.51)$$

Ces efficacités se calculent en fonction des grandeurs caractéristiques du flot post-choc [36] :

$$Q_{-, \text{sh}}^S = \frac{4\mu_{\text{in}}}{\mathcal{M}_{\text{in}}(1 - \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}})} \frac{(1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^2)^2}{A_{\text{in}}} \quad (3.52)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^+ = \frac{(1 + \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}})}{(1 - \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}})} \frac{\gamma - 1 - 2\gamma\mathcal{M}_{\text{in}}^2 + \mu_{\text{in}}(2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_{\text{in}}^2)(2\mathcal{M}_{\text{in}} - \mu_{\text{in}})}{A_{\text{in}}} \quad (3.53)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^K = 0 \quad (3.54)$$

où on a noté :

$$A_{\text{in}} \equiv 1 - \gamma + 2\gamma\mathcal{M}_{\text{in}}^2 + \mu_{\text{in}}(2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_{\text{in}}^2)(2\mathcal{M}_{\text{in}} + \mu_{\text{in}}) \quad (3.55)$$

$$= (\gamma + 1)^2 (1 + \mathcal{M}_{\text{in}}^2 \mu_{\text{in}}(2\mathcal{M}_{\text{in}} + \mu_{\text{in}})) / (2\gamma\mathcal{M}_{\text{in}}^2 - \gamma + 1) \quad (3.56)$$

Précisons ici que les dénominateurs de ces formules ne s'annulent pas (voir aussi en Annexe E, les équations F10 et F11).

Un choc adiabatique ne produit donc pas de perturbation type δK (Eq 1.75, 3.54). Ainsi, il n'y aura pas de perturbation δK_{in} incidente qui arrivera adiabatiquement depuis le choc, sur la zone de refroidissement. Par contre, il est tout à fait possible et probable que δK ne soit plus nul après la zone de refroidissement. Le δK_{out} ainsi créé sera advecté avec le flot de la même manière que les perturbations d'entropie δS_{out} .

Dans leur article de 1992, Houck et Chevalier ont imposé à leur choc que la perturbation de vitesse transverse soit nulle (Eq 4.10). Bien que leurs autres conditions au choc soient dans un cas adiabatique identiques aux nôtres, cette condition sur la vitesse transverse est différente de la nôtre si les perturbations sont obliques (ie : $k_x \neq 0$) :

$$\delta K_{\text{sh,HC92}} = k_x^2 f_{\text{sh}} \quad (3.57)$$

Cette condition se traduit donc par une modification des efficacités de conversion au choc :

$$Q_{-, \text{sh}}^{S, \text{HC}} = \frac{4\mu_{\text{in}}}{\mathcal{M}_{\text{in}}(1 - \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}})} \frac{(1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^2)^2}{B_{\text{in}}} \quad (3.58)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^{+, \text{HC}} = \frac{(1 + \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}}) \gamma - 3 - (3\gamma - 1)\mathcal{M}_{\text{in}}^2 + 2\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}}(2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_{\text{in}}^2)}{(1 - \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}}) B_{\text{in}}} \quad (3.59)$$

$$Q_{-, \text{sh}}^{K, \text{HC}} = \frac{2\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}}(1 - \mu_{\text{in}}^2)(2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_{\text{in}}^2)}{(1 - \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}}) B_{\text{in}}} \quad (3.60)$$

avec :

$$B_{\text{in}} \equiv 3 - \gamma + (3\gamma - 1)\mathcal{M}_{\text{in}}^2 + 2\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}}(2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_{\text{in}}^2)$$

La condition utilisée par Houck et Chevalier est fautive : ils n'ont pas pris en compte le caractère oblique des perturbations au niveau du choc. Il sera donc intéressant de voir la manière dont leur mauvaise condition au choc, dans le cadre de ce toy-model, peut influencer la stabilité du flot et le taux de croissance du cycle advectif-acoustique avant de comparer nos résultats de calculs de mode propres dans le chapitre suivant.

3.3.2 Condition limite inférieure

On définit l'efficacité Q_{CL} de conversion des ondes en sortie de zone refroidie par une condition limite, comme le rapport du feedback acoustique f_{in}^- sur l'onde entropique incidente f_{in}^S :

$$Q_{\text{CL}} \equiv \frac{f_{\text{in}}^-}{f_{\text{in}}^S} \quad (3.61)$$

Deux conditions limites sont étudiées afin d'évaluer l'influence du choix de cette condition sur l'efficacité du cycle.

La première est une condition limite de type "mur" : la perturbation de vitesse parallèle au flot doit être nulle après la région non-adiabatique. Cette condition est donc semblable au "mur" du cas radial, la vitesse du flot en sortie de zone de refroidissement étant elle aussi très faible. Cette condition peut aussi être utilisée dans le cas d'une marche adiabatique pour $\gamma > 3/2$.

La deuxième condition limite est une condition de type "aspirateur" : les ondes acoustiques se propageant avec le flot sortant ne seront jamais réfléchies et ne produisent donc pas de feedback acoustique, les ondes advectées sortent de la zone refroidie et continuent sans produite de feedback . Il n'y a donc pas d'ondes acoustiques qui se propagent contre le flot après la région de couplage.

$$\text{"mur"} : \quad \left(\frac{\delta v}{v} \right)_{\text{out}} \propto \frac{f_{\text{out}}}{c_{\text{out}}^2} - g_{\text{out}} = 0 \quad (3.62)$$

$$\text{"aspirateur"} : \quad f_{\text{out}}^- = 0 \quad (3.63)$$

Ces deux conditions limites nécessitent, pour être satisfaites, de combiner deux types d'ondes incidentes sur la zone de refroidissement (figure 3.5). On a vu qu'un choc ne créait pas d'onde δK . La perturbation δK étant juste advecté jusqu'à la zone refroidie, elle est nulle entre cette zone et le choc. On néglige le cycle purement acoustique devant le cycle advectif-acoustique, c'est à dire que la perturbation f_{in}^+ n'est pas prise en compte. La configuration pour les perturbation consiste donc à ne considérer qu'une onde d'entropie f_{in}^S et une onde acoustique f_{in}^- dans la zone précédant la région de refroidissement.

De manière générale, on note :

$$Q_{i,\text{cool}}^j \equiv f_{\text{out}}^j / f_{\text{in}}^i$$

Ainsi, $Q_{S,\text{cool}}^+$ traduit la production d'onde sonore se propageant dans le sens du flot par une onde entropique incidente (voir un exemple de calcul en Annexe C).

Ainsi dans le cas d'une onde d'entropie incidente et de son feedback acoustique f_{in}^- (figure 3.1), la perturbation f_{out}^- s'exprime simplement en fonction des deux ondes incidentes et des efficacités $Q_{i,\text{cool}}^j$:

$$f_{\text{out}}^- = f_{\text{in}}^- Q_{-, \text{cool}}^- + f_{\text{in}}^S Q_{S, \text{cool}}^-$$

Un "aspirateur" engendre donc un feedback f_{in}^- tel que la formule précédente donne zéro. L'efficacité de l'"aspirateur" (Eq 3.61) s'écrit :

$$Q_{aspi} = -\frac{Q_{S,cool}^-}{Q_{-,cool}^-} \quad (3.64)$$

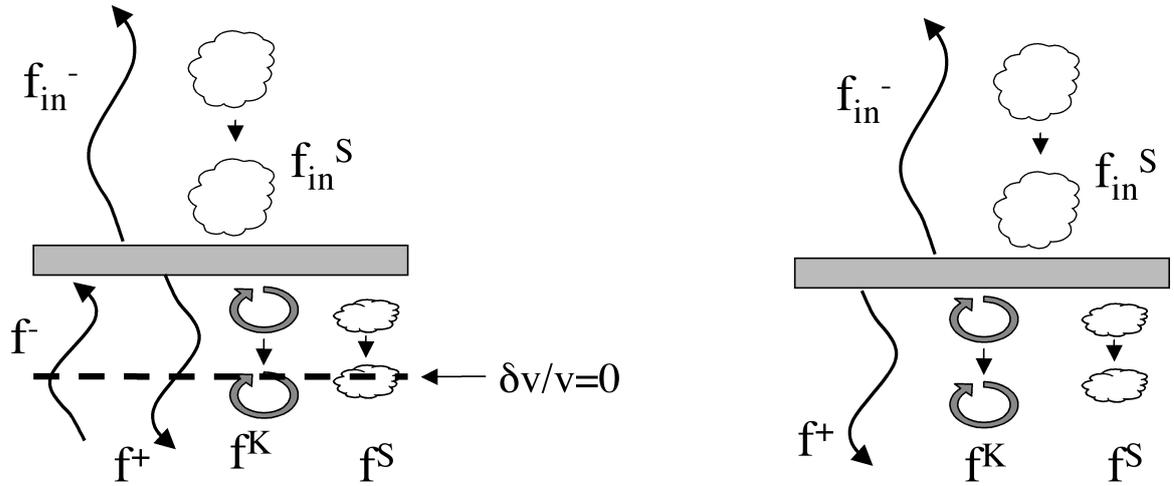


FIG. 3.5: Construction du "mur" et de "l'aspirateur" à partir d'une onde incidente d'entropie et d'une onde acoustique. La zone grisée correspond à une zone de refroidissement.

Pour le "mur", il suffit d'évaluer la perturbation de vitesse en sortie de la couche en fonction des perturbations incidentes puis de l'annuler. Le calcul donne l'efficacité (Eq 3.61) suivante :

$$Q_{mur} \equiv -\frac{Q_{S,cool}^K - \mathcal{M}_{out}\mu_{out}(Q_{S,cool}^- - Q_{S,cool}^+) - \mathcal{M}_{out}^2 Q_S}{Q_{-,cool}^K - \mathcal{M}_{out}\mu_{out}(Q_{-,cool}^- - Q_{-,cool}^+) - \mathcal{M}_{out}^2 Q_-} \quad (3.65)$$

avec :

$$\begin{aligned} Q_S &\equiv Q_{S,cool}^K + Q_{S,cool}^- + Q_{S,cool}^+ + Q_{S,cool}^S(1 - \mu_{out}^2) \\ Q_- &\equiv Q_{-,cool}^K + Q_{-,cool}^- + Q_{-,cool}^+ + Q_{-,cool}^S(1 - \mu_{out}^2) \end{aligned}$$

Il est intéressant de remarquer (figure 3.6) que la condition "mur" peut simplement s'interpréter comme une condition "aspirateur" (cadre en pointillés) à laquelle on ajoute une condition de réflexion (schéma du bas) dans la zone adiabatique après le refroidissement. Cette réflexion est choisie de manière à annuler la perturbation de vitesse

parallèle au flot (schéma du bas) et elle implique l'existence d'une onde acoustique réfléchie f^- (désignée par un cercle). Afin de prendre en compte cette onde réfléchie arrivant sur la zone de refroidissement, une perturbation acoustique incidente supplémentaire doit être ajoutée (schéma de gauche).

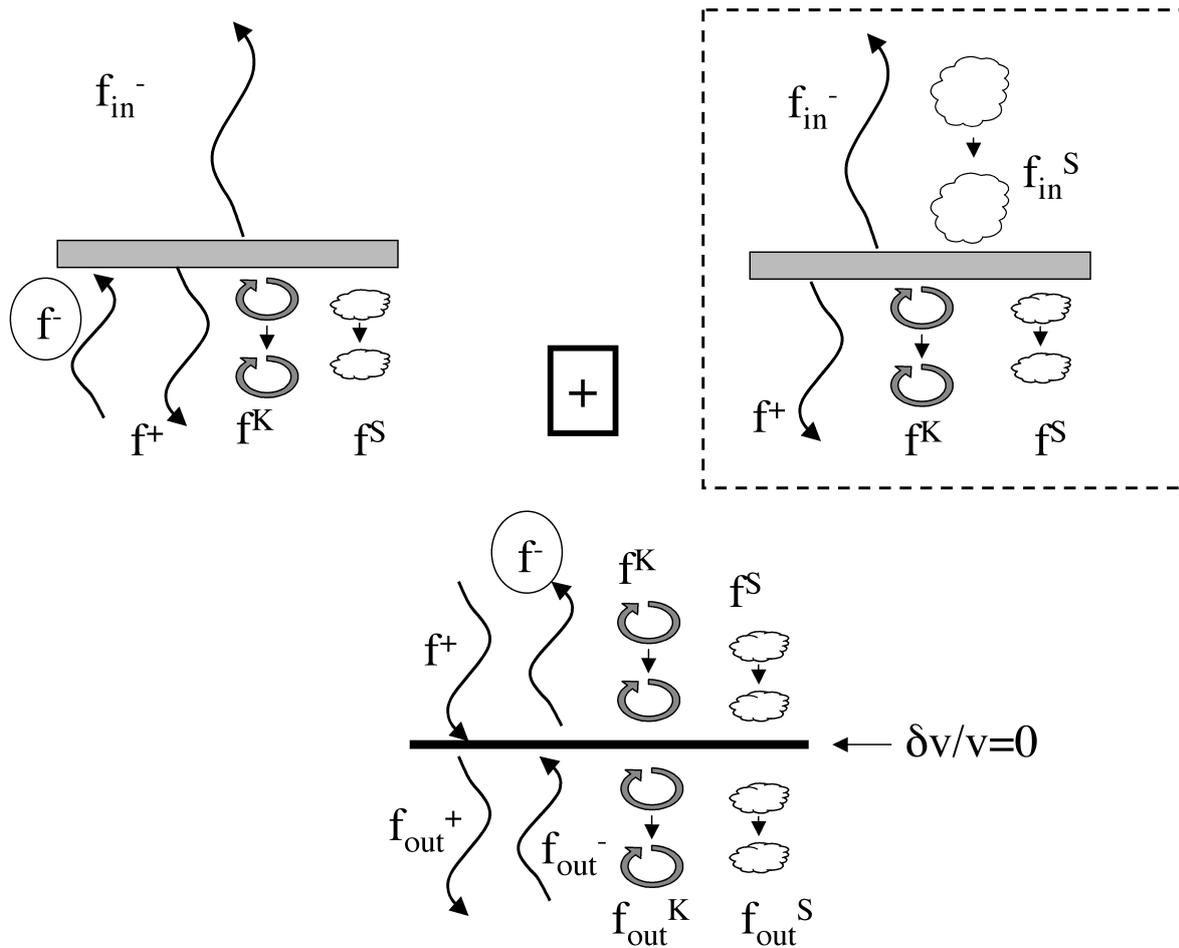


FIG. 3.6: Construction du "mur" à partir de l'"aspirateur" identifié par le cadre en pointillés, d'une réflexion et d'une onde acoustique incidente.

Ainsi présentées, on peut trouver une relation entre l'efficacité du "mur" et de l'"aspirateur" et définir un terme correctif pour passer de l'une à l'autre (voir Annexe C pour plus de détails) :

$$Q_{corr} = Q_{mur} - Q_{aspi} \quad (3.66)$$

L'importance de cette correction dépend essentiellement du rapport entre l'onde acoustique incidente f_{in}^- et l'onde acoustique réfléchie f^- . Dans le cas $\alpha - \beta < 1/2$, l'onde réfléchie est de faible intensité mais elle est importante dans le cas $\alpha - \beta > 1/2$. Le choix de la condition limite inférieure est donc très important lorsque la fonction de refroidissement est caractérisée par $\alpha - \beta > 1/2$ et n'a que peu d'incidence sur le calcul des efficacité dans le cas contraire.

L'étude du cas adiabatique montre que Q_{aspi} et le terme correctif Q_{corr} sont toujours du même ordre de grandeurs mais de signes différents. On constate que le terme correctif est toujours de signe négatif à cause d'un changement de signe lors de la réflexion : f^+ et f^- sont toujours de signes opposés. Au contraire, Q_{aspi} est toujours de signe positif. La correction à apporter à l'"aspirateur" est donc toujours une diminution en termes d'efficacité. Dans le cas adiabatique, Le cycle advectif-acoustique est toujours plus instable dans le cas de "l'aspirateur" que dans le cas du "mur".

3.4 Calcul de l'efficacité totale du cycle

L'efficacité de conversion au choc d'une onde sonore en onde d'entropie et l'efficacité de production d'onde sonore par une onde entropique ont été évaluées dans les sections précédentes. Le toy-model nous a permis de bien séparer notre cycle advectif-acoustique en quatre parties :

- 1- la création des perturbations au choc,
- 2- leur advection vers la zone de refroidissement,
- 3- le couplage avec les ondes acoustiques dans la zone refroidie,
- 4- la propagation des ondes acoustiques vers le choc.

En évaluant chacune de ces quatre parties, le toy-model nous permet donc de calculer simplement le cycle advectif-acoustique. L'efficacité totale du cycle est, dans tous les cas de figure, égale au produit d'une efficacité au choc par une efficacité de la zone refroidie (figure 3.7) :

$$Q^{\text{tot}} \equiv (f^S/f^-)_{\text{sh}}(f^-/f^S)_{\text{CL}} = Q_{-, \text{sh}}^S Q_{\text{CL}} \quad (3.67)$$

Si sa norme est inférieure à 1, le cycle est stable, si elle est supérieure, le cycle est instable.

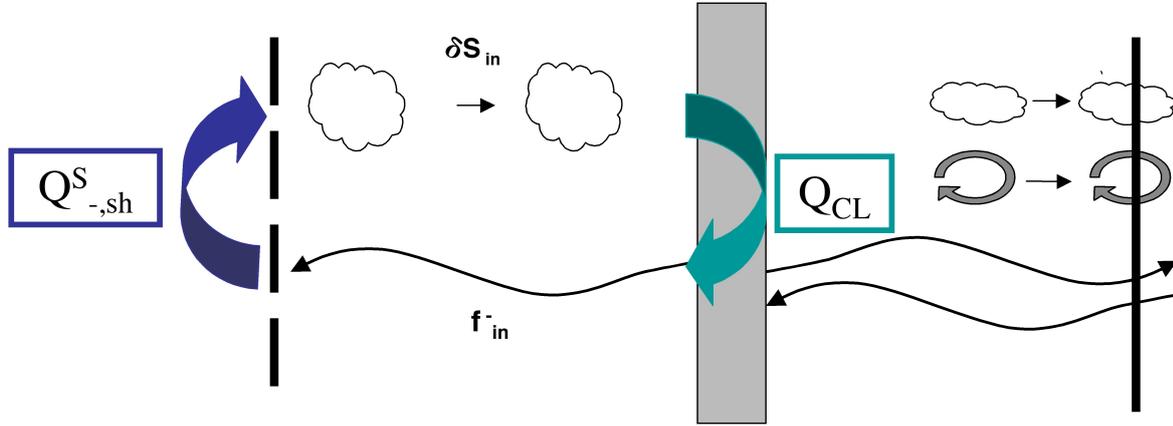


FIG. 3.7: Calcul de l'efficacité totale du cycle advectif-acoustique dans le cadre du toy-model.

On peut grâce à notre modèle évaluer l'efficacité totale d'un cycle purement acoustique et montrer que son rôle dans la stabilité du flot n'est que marginal (Annexe C). L'application du toy-model aux résultats de Houck et Chevalier nécessite de modifier cette efficacité car les conditions de Houck et Chevalier créent un δK non nul au choc. L'efficacité du cycle advectif-acoustique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Q_{\text{HC}}^{\text{tot}} &\equiv (f^S/f^-)_{\text{sh}} [(f^-/f^S)_{\text{CL}} + (f^-/f^K)_{\text{CL}}(f^K/f^-)_{\text{sh}}] \\ &\equiv Q_{-,sh}^S (Q_{S,\text{CL}} + Q_{-,sh}^K Q_{K,\text{CL}}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Les formules des $Q_{i,\text{cool}}^j$ ne sont pas toujours agréables. Une écriture simple peut être obtenue si on suppose que tous les nombres de Mach, \mathcal{M}_{in} compris, sont très petits. \mathcal{M}_{in} , nombre de Mach subsonique, est calculé à partir du nombre de Mach supersonique avant le choc, \mathcal{M}_1 . \mathcal{M}_{in} est donc borné :

$$\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{1/2} < \mathcal{M}_{\text{in}} < 1$$

L'approximation n'est donc justifiée que dans le cas où \mathcal{M}_{in} est également petit, c'est à dire si γ est proche de 1 (cas isotherme), ou si par exemple on invoque une perte d'énergie au niveau du choc, comme de la dissociation (voir chapitre 5).

Malgré ces restrictions, nos formules sous une forme complexe ou plus simple, permettent de "sentir" l'influence du refroidissement. Muni des plus grandes précautions,

nous les appliquerons à des cas où leur validité n'est qu'approchée (ie : pour des \mathcal{M}_{in} relativement grands et pour μ_{in} variant de zéro à un). On obtient donc différentes formules suivant les cas considérés :

Configuration du flot : choc- $(f_{\text{in}}^-, f_{\text{in}}^S)$ -refroidissement-aspirateur $(f_{\text{out}}^+, f_{\text{out}}^{S,K})$

$$Q_{\text{aspi}}^{\text{tot}} = \frac{A_1 + B_1 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}}{C_1 + D_1 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}} \quad (3.69)$$

$$\sim \begin{cases} 4 \frac{1+(\alpha-\beta)(\gamma-1)-\mu_{\text{in}}^2}{\gamma-1-2\mu_{\text{in}}^2} & \text{pour } \alpha - \beta < 1/2 \\ -4\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}} \left(1 + \frac{2}{\gamma-1-2\mu_{\text{in}}^2}\right) & \text{pour } \alpha - \beta > 1/2 \end{cases}$$

Configuration du flot : choc- $(f_{\text{in}}^-, f_{\text{in}}^S)$ -refroidissement-mur $(f_{\text{out}}^\pm, f_{\text{out}}^{S,K})$

$$Q_{\text{mur}}^{\text{tot}} = \frac{A_2 + B_2 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1)\Delta S}}{C_2 + D_2 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1)\Delta S}} \quad (3.70)$$

$$\sim \begin{cases} 4 \frac{1+(\alpha-\beta)(\gamma-1)-\mu_{\text{in}}^2}{\gamma-1-2\mu_{\text{in}}^2} & \text{pour } \alpha - \beta < 1 \\ 4 \frac{\gamma-\mu_{\text{in}}^2}{\gamma-1-2\mu_{\text{in}}^2} & \text{pour } \alpha - \beta > 1 \end{cases}$$

Configuration du flot : choc HC- $(f_{\text{in}}^-, f_{\text{in}}^{S,K})$ -refroidissement-aspirateur $(f_{\text{out}}^+, f_{\text{out}}^{S,K})$

$$Q_{\text{HC,aspi}}^{\text{tot}} = \frac{A_3 + B_3 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}}{C_3 + D_3 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}} \quad (3.71)$$

$$\sim \begin{cases} 4 \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-1)}{\gamma-3} & \text{pour } \alpha - \beta < 1/2 \\ 4\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}} \frac{(\beta-1)(\gamma-1)(\alpha-\beta-(\alpha+\beta)\gamma)}{\beta^2\gamma(\gamma-3)} & \text{pour } \alpha - \beta > 1/2 \end{cases}$$

Configuration du flot : choc HC- $(f_{\text{in}}^-, f_{\text{in}}^{S,K})$ -refroidissement-mur $(f_{\text{out}}^\pm, f_{\text{out}}^{S,K})$

$$Q_{\text{HC,mur}}^{\text{tot}} = \frac{A_4 + B_4 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1)\Delta S}}{C_4 + D_4 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1)\Delta S}} \quad (3.72)$$

$$\sim \begin{cases} 4 \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-1)}{\gamma-3} & \text{pour } \alpha - \beta < 1 \\ 4 \frac{\gamma-1}{\gamma-3} & \text{pour } \alpha - \beta > 1 \end{cases}$$

Les coefficients A_i , B_i , C_i et D_i ne dépendent que des caractéristiques du flot stationnaire : α , β , γ et \mathcal{M}_{in} , et du nombre d'onde transverse k_x par l'intermédiaire de μ_{in} . L'hypothèse \mathcal{M}_{in} permet de les simplifier et d'obtenir les formules en accolades, à

manipuler avec précaution. Les figures sont réalisées à partir des formules non simplifiées, où l'hypothèse \mathcal{M}_{in} petit n'est pas utilisée.

A titre de comparaison, on évalue l'efficacité totale du cycle dans le cas d'une marche adiabatique. Là encore, on distingue les deux conditions limites :

Configuration du flot : choc- $(f_{\text{in}}^-, f_{\text{in}}^S)$ -marche adiabatique-aspirateur $(f_{\text{out}}^+, f_{\text{out}}^{S,K})$

$$Q_{\text{aspi}}^{\text{tot}} \sim 4 \frac{c_{\text{out}}^2 (1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^2) \mu_{\text{in}} (1 + \mathcal{M}_{\text{in}} \mu_{\text{in}})}{c_{\text{in}}^2 \mathcal{M}_{\text{in}}^2 A_{\text{in}}} \quad (3.73)$$

Configuration du flot : choc- $(f_{\text{in}}^-, f_{\text{in}}^S)$ -marche adiabatique-mur $(f_{\text{out}}^\pm, f_{\text{out}}^{S,K})$

$$Q_{\text{mur}}^{\text{tot}} \sim 4 \frac{(1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^2)^2 \mu_{\text{in}}^2}{(1 - \mathcal{M}_{\text{in}} \mu_{\text{in}}) A_{\text{in}}} \quad (3.74)$$

où on a noté : $A_{\text{in}} \equiv (\gamma + 1)^2 (1 + \mathcal{M}_{\text{in}}^2 \mu_{\text{in}} (2\mathcal{M}_{\text{in}} + \mu_{\text{in}})) / (2\gamma \mathcal{M}_{\text{in}}^2 - \gamma + 1)$ (Eq 3.56). A_{in} ne s'annule pas pour $0 \leq \mu_{\text{in}} \leq 1$.

Les formules simplifiées confirment le rôle joué par le choix de la condition limite inférieure dans le cas d'un calcul totale d'efficacité du cycle advectif-acoustique. Dans le cas de la marche adiabatique, "l'aspirateur", dont l'efficacité du cycle (Eq 3.73) est proportionnelle à c_{out}^2 qui diverge, est plus instable que le "mur" (Eq 3.74). Toutes les valeurs de μ_{in} , excepté 0, peuvent donner lieu à une instabilité dans le cas de "l'aspirateur". Il suffit pour cela de choisir un nombre de Mach \mathcal{M}_{out} suffisamment petit. Pour le flot refroidi, le "mur" et "l'aspirateur" (Eq 3.69-3.70) conduisent à la même efficacité du cycle dans le cas $\alpha - \beta < 1/2$. Dans le cas $\alpha - \beta > 1/2$ par contre, la différence entre les deux conditions apparaît nettement : un flot perturbé avec une condition du type "aspirateur" sera plus stable qu'un flot avec une condition de type "mur". On est donc dans le cas inverse du cas adiabatique. On constate également que l'efficacité du cycle ne dépend plus dans ce cas des paramètres de la fonction de refroidissement. Les cas HC92 (Eq 3.71-3.72) montrent que les conditions au choc utilisées par Houck et Chevalier amoindrissent la dépendance en μ_{in} de l'efficacité totale du cycle et favorisent dans le cas "mur" une domination de $\mu_{\text{in}} = 1$.

On remarque qu'une divergence des efficacités est apparue dans le cas où μ_{in} vaut $\mu_{\text{div}} \equiv \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$. Cette divergence est due à l'utilisation de l'hypothèse $\mathcal{M}_{\text{in}} \ll 1$ qui nous permet d'obtenir des équations simples donc plus parlantes. Cette hypothèse n'est cependant correcte que dans deux cas : soit on est proche du cas isotherme $\gamma = 1$ et dans

ce cas la divergence disparaît car μ_{div} tend vers zéro, soit on introduit de la dissociation au choc qui modifie également les efficacité de conversion au choc (voir chapitre 5) si bien que la divergence disparaît également.

Afin de vérifier la validité de nos calculs, nous comparons les résultats de calculs numériques à nos calculs analytiques dans deux cas d' "aspirateur" (figure 3.8). Les calculs numériques consistent à résoudre le système différentiel Eq (3.14)-(3.17) après s'être donné une pulsation ω_r vérifiant l'hypothèse Eq (3.12).

L'accord entre les deux calculs d'efficacité est plutôt bon. Dans les deux cas de figure du refroidissement ($\alpha - \beta < 1/2$), le cycle advectif-acoustique favorise une instabilité non-radiale puisque son efficacité est maximale pour $\mu_{\text{in}} < 1$.

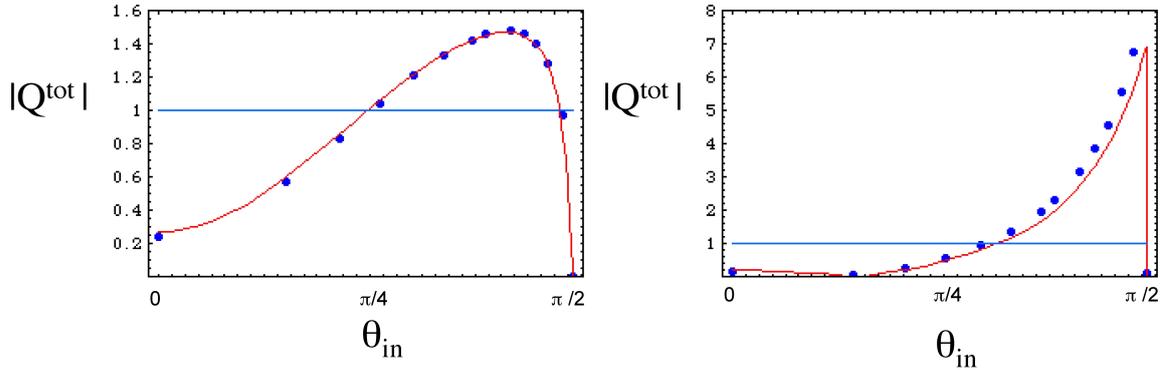


FIG. 3.8: Comparaison calculs analytiques (trait plein) et numériques (points) pour deux "aspirateurs". Norme de l'efficacité Q^{tot} du cycle en fonction de l'angle θ_{in} avec : $M_1 = 5$, $M_{\text{out}} = 10^{-2}$, $\gamma = 4/3$, $\alpha = 6$ et $\beta = 1$ à gauche, $M_1 = 500$, $M_{\text{out}} = 10^{-4}$, $\gamma = 1.1$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 2$ à droite. Si $Q^{\text{tot}} > 1$, le flot est instable.

3.5 Conclusion

Le toy-model s'avère un outil utile à la compréhension des mécanismes physiques. Il permet de prévoir certains comportements du cycle advectif-acoustique :

1- L'efficacité dans le cas adiabatique est toujours relativement élevée et plus grande que celle obtenue dans le cas refroidi pour le même saut de nombre de Mach (figure 3.9) : le refroidissement a donc tendance à diminuer l'efficacité du cycle.

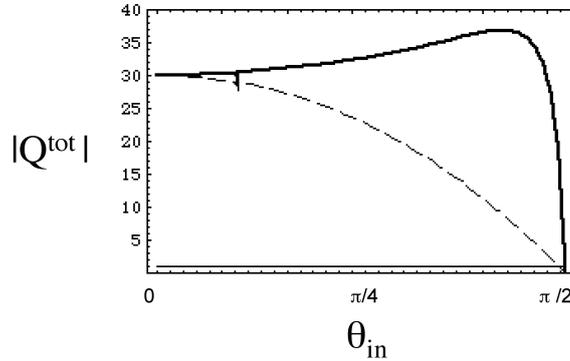


FIG. 3.9: Efficacité totale du cycle advectif-acoustique, $|Q^{tot}|$ en fonction de l'angle θ_{in} , calculée dans le cas d'un "aspirateur" purement adiabatique avec nos conditions limites au choc (trait plein) et celles de Houck et Chevalier (tirets), pour $\mathcal{M}_1 = 5$, $\mathcal{M}_{out} = 10^{-4}$, $\gamma = 4/3$.

2- Le choix de la condition limite inférieure joue un rôle important dans le cas adiabatique et dans les cas de refroidissement où $\alpha - \beta > 1/2$. Pour $\alpha - \beta < 1/2$, nos deux conditions limites conduisent aux mêmes efficacités du cycle advectif-acoustique, ce qui est à rapprocher de la conclusion des travaux de Saxton et al. [92].

3- Le choix des conditions limites au choc fait par Houck et Chevalier entraîne une domination du mode radial sur les modes non-radiaux aussi bien dans le cas avec refroidissement que dans le cas purement adiabatique (figure 3.9).

4- Au contraire, aussi bien dans le cas refroidi que dans le cas adiabatique, un mode non-radial dominera l'instabilité, le mode radial pouvant même être stable.

Les résultats de ce toy-model doivent être extrapolés avec précaution au cas général d'un choc d'accrétion que nous allons étudier dans le chapitre suivant. De nombreux phénomènes ont été négligés : la géométrie radiale de l'accrétion sur un objet compact modifie les gradients du flot stationnaire et entraîne aussi une dilution du feedback acoustique émis par la couche de refroidissement. La gravité peut aussi jouer un rôle dans la détermination du taux de croissance du cycle puisqu'elle modifie également les gradients du flot stationnaire.

Accrétion sur une Surface Solide

Notre étude porte sur le rôle joué par le cycle advectif-acoustique dans l’instabilité des chocs d’accrétion. Elargissant les résultats de Foglizzo obtenus pour un trou noir [34], nous nous intéressons dans ce chapitre à l’accrétion sur une surface solide, c’est-à-dire une naine blanche ou une étoile à neutrons. Dans un premier temps, nous allons mettre en avant les différences entre nos calculs et ceux de Houck et Chevalier ([50] noté HC92 dans ce qui suit) au niveau de la description des perturbations. Nous exposerons ensuite les modes propres d’oscillation que nous obtenons et que nous interprétons grâce au toy-model du chapitre précédent. Enfin, nous élargirons notre étude à des modes à fréquences plus élevées. Ce chapitre permet, au delà de simplement corriger les résultats de HC92, de proposer un mécanisme physique expliquant les modes instables obtenus.

4.1 Description du problème

Le flot stationnaire étudié par HC92 diffère peu de celui que nous utilisons pour étudier le cycle advectif-acoustique, présenté dans le premier chapitre de cette thèse. La loi de refroidissement utilisée est en tout point identique à la nôtre (Eq 1.6). La condition limite au niveau de la surface de l’objet est également semblable à la nôtre : le flot stationnaire considéré doit vérifier que la vitesse radiale soit nulle sur la surface, quant aux perturbations, elles doivent vérifier une condition limite de type ”mur” au niveau de cette surface. Plus précisément, la condition limite inférieure pour les perturbations est l’annulation de la quantité $\left(\frac{r-r_*}{r_{\text{sh}}-r_*}\right)^2 + (\delta v)^2$. La normalisation par contre est différente de la nôtre : elle suppose que le flot incident, pré-choc, est froid et pratiquement en chute libre. Le nombre de Mach pré-choc, \mathcal{M}_1 , est infini. Une simple

re-normalisation de leurs résultats devrait nous permettre de pouvoir les comparer aux modes propres que nous obtenons (Annexe B).

Lors de notre étude du choc d'accrétion sur une surface solide, nous avons trouvé une erreur dans le calcul des conditions limites des perturbations au niveau du choc de HC92.

En calculant nos conditions limites (Eq 1.66-1.69), nous avons tenu compte des gradients du flot au niveau du choc et du fait qu'un déplacement du choc implique que les grandeurs stationnaires ne sont plus les mêmes au niveau du choc. Pour un choc fort ($M_1 \sim +\infty$) et un refroidissement faible au choc, on obtient alors les relations suivantes :

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\Delta v}{v} \left(\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{iv}{\omega r_{\text{sh}}} \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{1 - \gamma + 2(\gamma + 1)r_{\text{sh}}v_{\text{sh}}^2}{r_{\text{sh}}v_{\text{sh}}^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\delta v_{\Omega}}{v} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{iv}{\omega r_{\text{sh}}} \frac{\partial \Delta v}{\partial \Omega} \quad (4.2)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{-i\Delta v}{\omega r_{\text{sh}}} \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{1 - \gamma + 2(\gamma + 1)r_{\text{sh}}v_{\text{sh}}^2}{r_{\text{sh}}v_{\text{sh}}^2} \quad (4.3)$$

$$\frac{\delta P}{\rho v^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\Delta v}{v} \left(-2 - i \frac{(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)} \frac{1 - \gamma + 2(\gamma + 1)r_{\text{sh}}v_{\text{sh}}^2}{r_{\text{sh}}^2 v_{\text{sh}} \omega} \right) \quad (4.4)$$

Dans le cas plan-parallèle, ces conditions s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\Delta v}{v} \frac{2}{\gamma + 1} \quad (4.5)$$

$$\frac{\delta v_{\Omega}}{v} = -\frac{2}{\gamma - 1} \frac{k_x}{\omega} \Delta v \quad (4.6)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\delta P}{\rho v^2} = -\frac{4}{\gamma + 1} \frac{\Delta v}{v} \quad (4.8)$$

Les conditions utilisées par HC92 au niveau du choc, une fois adaptées à nos notations et nos normalisations, sont :

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\Delta v}{v} \left(\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{i \gamma - 1}{2 \gamma + 1} \frac{v}{\omega r_{\text{sh}}} \right) \quad (4.9)$$

$$\frac{\delta v_{\Omega}}{v} = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{3i \gamma + 1}{2 \gamma - 1} \frac{\Delta v}{\omega r_{\text{sh}}} \quad (4.11)$$

$$\frac{\delta P}{\rho v^2} = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{\Delta v}{v} \left(2 - \frac{5i}{2} \frac{v}{\omega r_{\text{sh}}} \right) \quad (4.12)$$

Dans le cas d'une approximation plan-parallèle, utilisée notamment dans le cas des naines blanches [24, 95], ces conditions deviennent :

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\Delta v}{v} \frac{2}{\gamma + 1} \quad (4.13)$$

$$\frac{\delta v_{\Omega}}{v} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\delta P}{\rho v^2} = -\frac{4}{\gamma + 1} \frac{\Delta v}{v} \quad (4.16)$$

Dans le cas de l'approximation plan parallèle, notre jeu de conditions (Eq 4.5-4.8) est donc en accord avec ceux de HC92 (Eq 4.13-4.16), sauf pour les perturbations de vitesses transverses. Dans un cas plus général, des différences apparaissent pour tous les termes mais la grande différence reste l'annulation dans l'article de Houck et Chevalier de la perturbation de vitesse transverse (Eq 4.1-4.4, 4.9-4.12). Or, cette vitesse joue un rôle décisif dans le cycle tourbillonnaire-acoustique. On s'attend donc à une correction importante des résultats de HC92 notamment dans le cas où $l \neq 0$, correction que notre toy-model (chapitre 3) a déjà mise en avant.

L'approximation d'un choc adiabatique peut aussi être critiquée lorsque le refroidissement est très étendu. Pour nos conditions, cela revient à rajouter des termes proportionnels à ∇S et dépendant des caractéristiques de la fonction de refroidissement employée. Ces termes sont pris en compte dans les calculs numériques des modes propres.

4.2 Résultats

HC92 se sont surtout attachés à l'étude du mode fondamental (ie : du mode à la fréquence la plus basse) et du premier harmonique. Ils montrent que dans le cas radial, ces deux modes peuvent être instables quand la cavité est suffisamment grande (ie : $x_{s0} = r_{sh} - r_* > r_*$). Par contre, pour $\gamma = 5/3$, $\beta = 2$, $\alpha = 1/2$ (Bremsstrahlung non-relativiste), leurs modes non-radiaux $l > 1$, stables, sont fortement stabilisés quand la cavité grandit. Le mode $l = 1$ est instable lorsque $x_{s0} \geq 2r_*$ mais son taux de croissance est toujours inférieur à celui du mode radial $l = 0$.

Afin de comparer nos résultats et ceux des autres auteurs, il est nécessaire que tous aient la même normalisation. Pour re-normaliser les résultats de HC92, on décide de faire coïncider un de leur point avec un des notres. Le choix du point de raccord est fait de manière ad hoc mais pas totalement dénué de sens physique. Le raccord se fait dans une zone où nos conditions limites au choc devraient peu différer de celles de HC92. On se place donc dans la gamme de rayons telle que $(r_{sh} - r_*)/r_* \simeq 1$.

Des simulations d'une accrétion adiabatique sur une surface rigide ont été réalisées par Blondin et al. [11] (noté BMD03). Leur condition limite inférieure consiste en un raccordement avec une fine couche de refroidissement. Cette condition reste assez énigmatique et peut avoir une influence sur la stabilité du flot : le choix d'une mauvaise condition limite peut induire un feedback acoustique artificiel (voir Eq 37 de Foglizzo et al. [36] en Annexe D). Dans ses simulations, BMD03 évaluent des modes d'oscillation de la position du choc lors des phases linéaires. Une comparaison avec ces résultats est également faite. Une re-normalisation de ces résultats est réalisée. BMD03 ayant déjà comparé leurs résultats de simulations numériques aux modes propres calculés par HC92, la même re-normalisation est donc appliquée. Les courbes présentées ici sont toujours normalisées par : $\omega_{sh} \equiv -v_{sh}/(r_{sh} - r_*)$.

L'ensemble des refroidissements considérés dans ce chapitre correspondent au cas où le temps d'advection converge (Eq 1.23-1.25). Une approximation grossière du temps d'advection est donnée par le temps $1/\omega_{sh}$.

Intéressons nous tout d'abord au mode fondamental. On constate que nos résultats dans le cas radial $l = 0$ sont cohérents avec ceux obtenus par Houck et Chevalier (figures 4.1, 4.2) ainsi que ceux de BMD03 (figure 4.5). Ce mode radial est généralement stable lorsque le refroidissement est fort et que la cavité est donc petite. Il devient instable lorsque la cavité grandit ceci quelle que soit la fonction de refroidissement et

l'index polytropique utilisés. Le premier harmonique du mode radial présente grossièrement les mêmes caractéristiques que le mode fondamental mais il est en général plus instable (figure 4.3). Nos résultats sur le premier harmonique radial montrent qu'il est généralement moins stable que le mode fondamental et est également instable pour de grandes cavités.

Il en est autrement pour les perturbations non-radiales. Pour les valeurs non nulles de l , nos résultats diffèrent de ceux de HC92 aussi bien en fréquences qu'au niveau des taux de croissance. Pour $l = 1$ (figures 4.4, 4.5), nos résultats sont plus proches de ceux de BMD03 et contredisent la conclusion de HC92 quant à la plus grande instabilité du mode $l = 0$. Les différences entre nos résultats et ceux de BMD03 proviennent peut-être de la difficulté d'estimer des taux de croissance linéaires dans des simulations rapidement non-linéaires telles que celles de BMD03. Il se peut aussi que la condition limite utilisée par BMD03 proche de la surface de l'étoile (BMD03 semble faire une sorte de raccord entre une solution purement adiabatique et une couche de refroidissement) soit une source de différence entre nos deux résultats. En tout cas, la tendance prévue par nos deux études est la même : le mode $l = 1$ est le plus instable. Nos résultats montrent que le mode $l = 1$ est plus instable que le mode radial mais également que les autres modes non-radiaux. Nous avons calculé les taux de croissance des modes fondamentaux de diverses valeurs de l (figure 4.6, 4.7) et dans tous les cas, l'instabilité est dominée par le mode $l = 1$. Cette domination n'apparaît bien sûr que pour des cavités suffisamment grandes, car si la longueur d'onde non-radiale des perturbations ($\simeq \pi r/l$) est beaucoup plus grande que la largeur de la cavité x_{s0} , perturbations radiales et non-radiales ont le même effet sur le flot, donc les fréquences et taux de croissance des modes sont identiques (figures 4.5, 4.6, 4.7). Cet argument permet aussi comprendre pourquoi les pulsations ω_r des modes fondamentaux augmentent avec la valeur de l (figures 4.6, 4.7). En faisant une analogie simple avec des ondes acoustiques, on a $\omega_r^2 \sim (k_r^2 + k_\theta^2)c^2$ et ici $k_\theta \propto l/r$. La différence de comportement au niveau des taux de croissance lorsque la cavité grandit entre mode radial et modes non-radiaux se comprend grâce au cycle advectif-acoustique : dans le cas purement radial $l = 0$, si le refroidissement n'est pas trop intense, seul le cycle entropique-acoustique joue un rôle (voir chapitre 1) alors que les deux cycles tourbillonnaire-acoustique et entropique-acoustique sont présents et liés dans les cas non-radiaux.

On peut maintenant caractériser un peu mieux l'instabilité du mode fondamental dans les cas étudiés précédemment. La fréquence du mode instable est généralement de l'ordre de une ou deux fois ω_{sh} , qui est proche de l'inverse du temps d'advection. Le

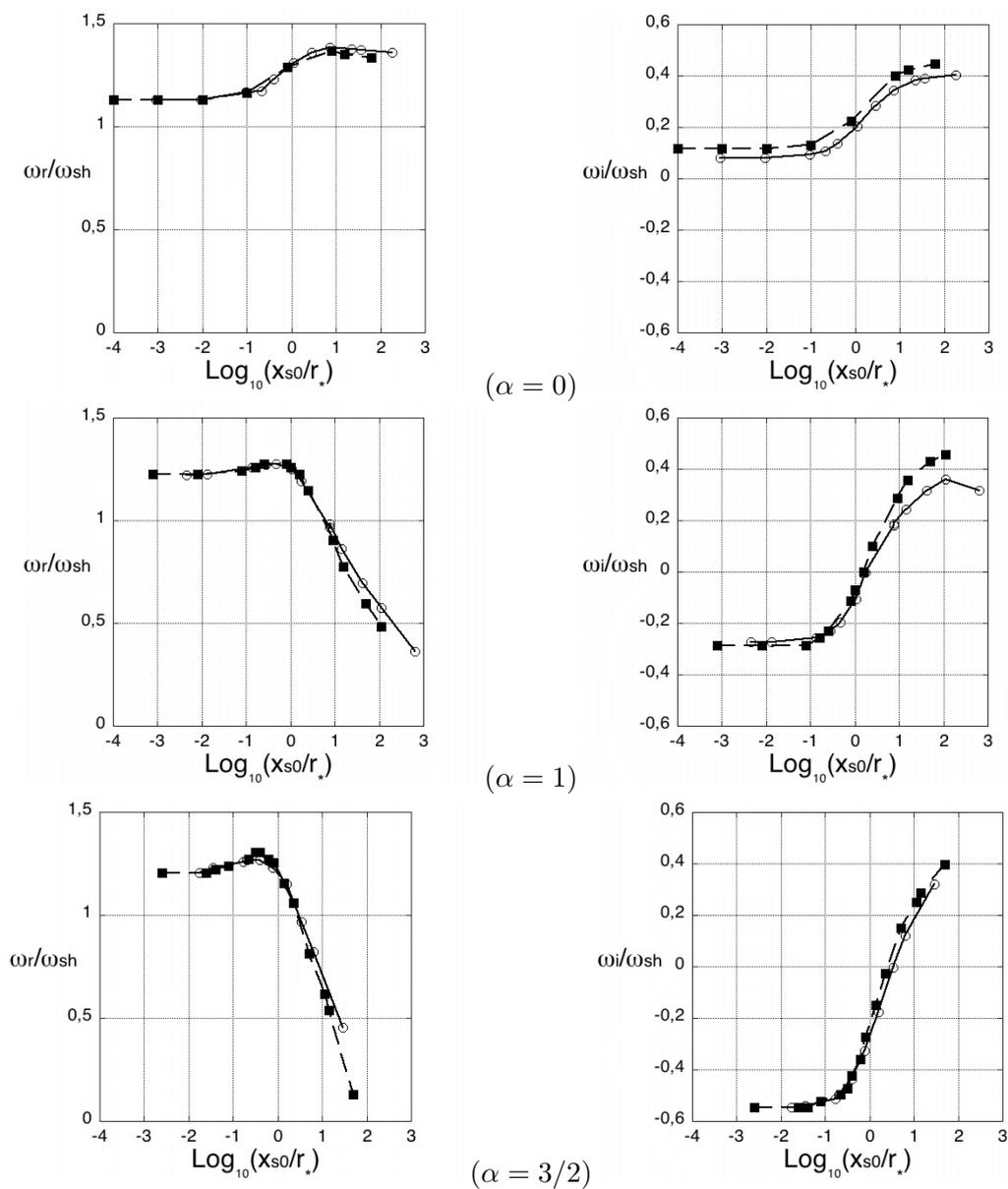


FIG. 4.1: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i en unité de $\omega_{sh} = \frac{-v_{sh}}{r_{sh}-r_*}$ du mode fondamental radial $l = 0$ pour $\gamma = 5/3$ et divers refroidissements ($\beta = 2$ et de haut en bas : $\alpha = 0, 1, 3/2$) en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{sh} - r_*)/r_*$. En trait plein et cercles creux, nos résultats. En tirets, carrés pleins, les résultats de HC92 [50] re-normalisés.

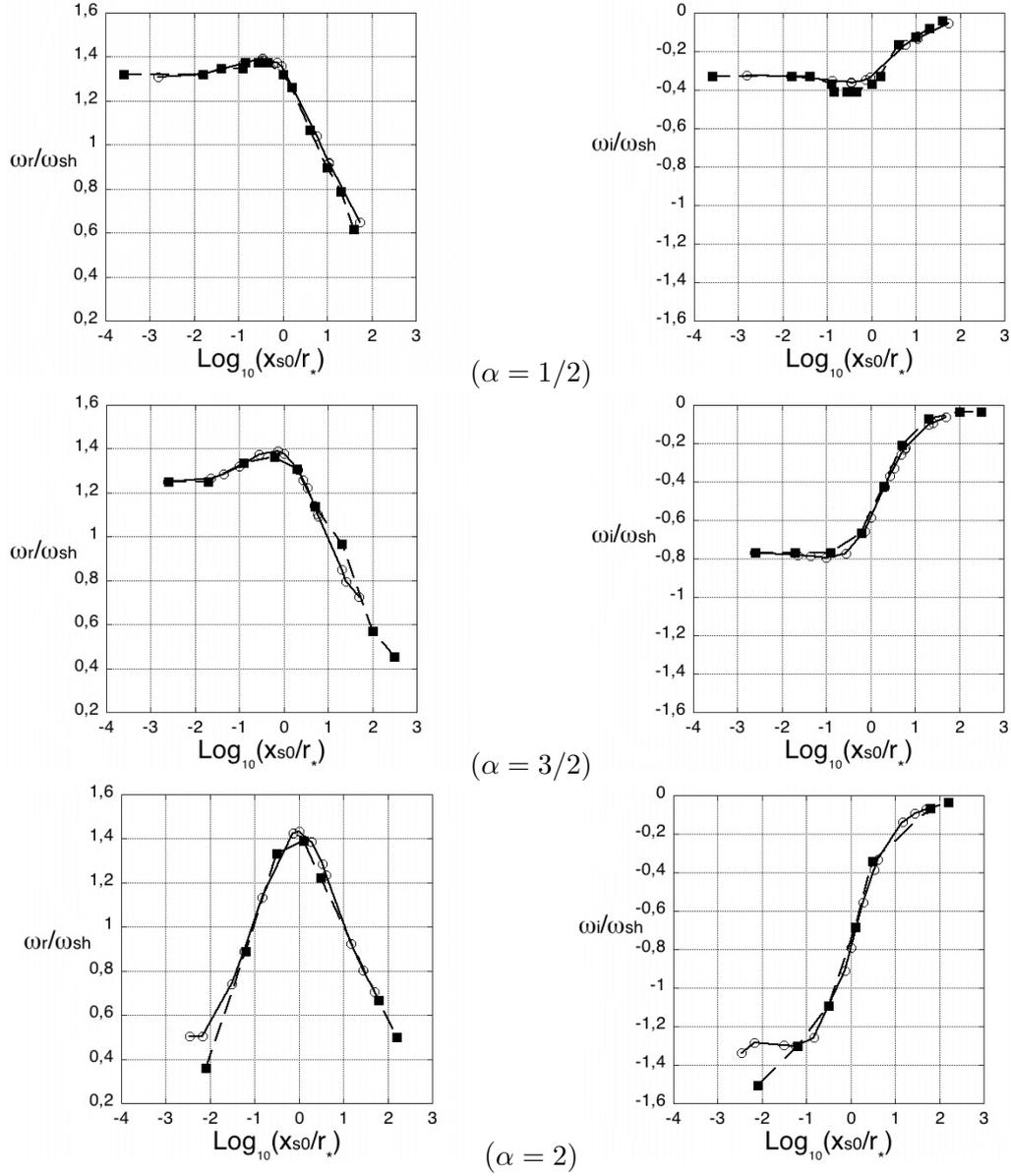


FIG. 4.2: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i en unité de $\omega_{sh} = \frac{-v_{sh}}{r_{sh}-r_*}$ du mode fondamental radial $l = 0$ pour $\gamma = 4/3$ et divers refroidissements ($\beta = 2$ et de haut en bas : $\alpha = 1/2, 3/2, 2$) en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{sh} - r_*)/r_*$. En trait plein et cercles creux, nos résultats. En tirets, carrés pleins, les résultats de HC92 [50] re-normalisés.

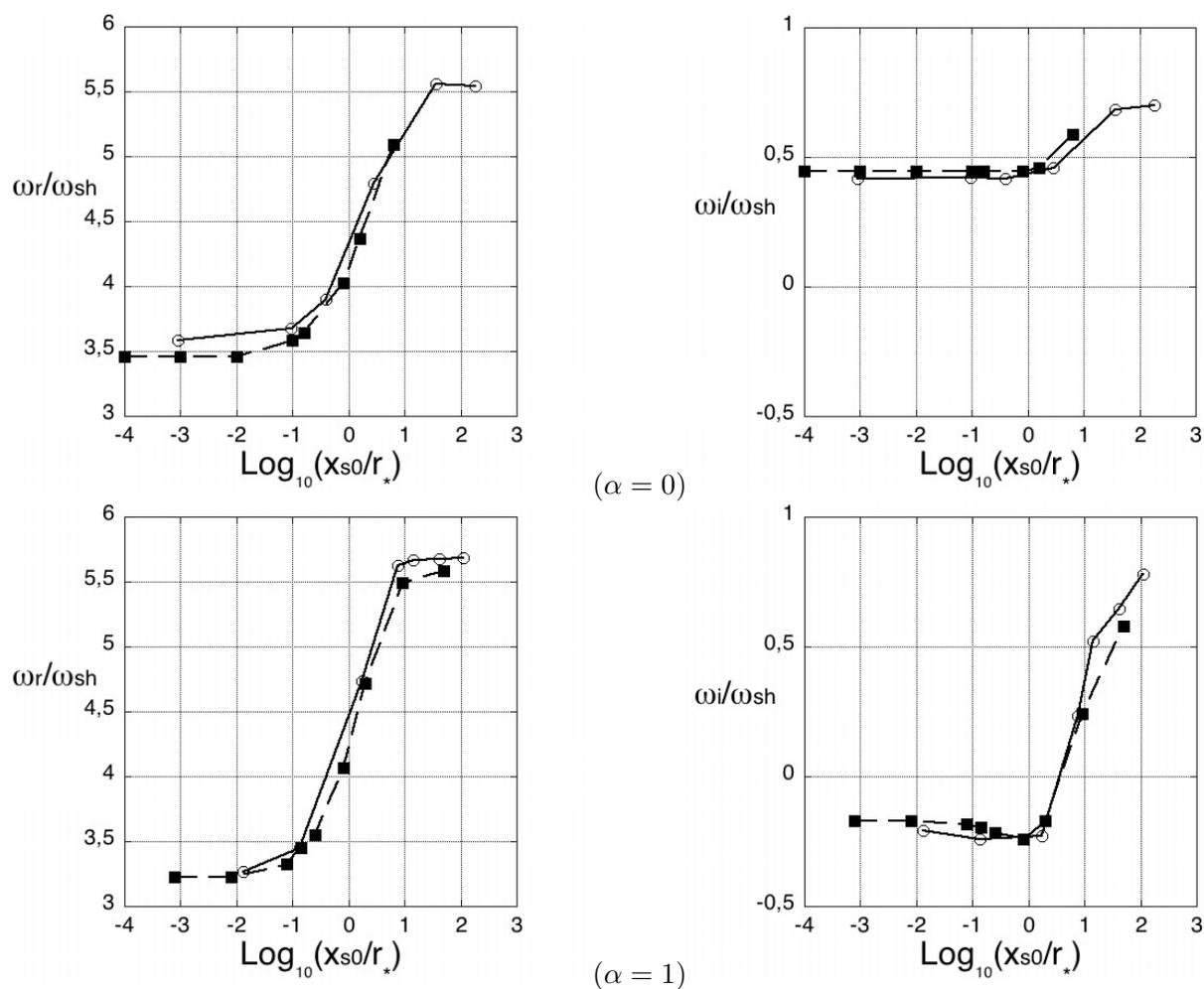


FIG. 4.3: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i en unité de $\omega_{sh} = \frac{-v_{sh}}{r_{sh}-r_*}$ du premier harmonique radial $l = 0$ pour $\gamma = 5/3$ et divers refroidissements ($\beta = 2$ et de haut en bas : $\alpha = 0, 1$) en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{sh} - r_*)/r_*$. En trait plein et cercles creux, nos résultats. En tirets, carrés pleins, les résultats de HC92 [50] re-normalisés.

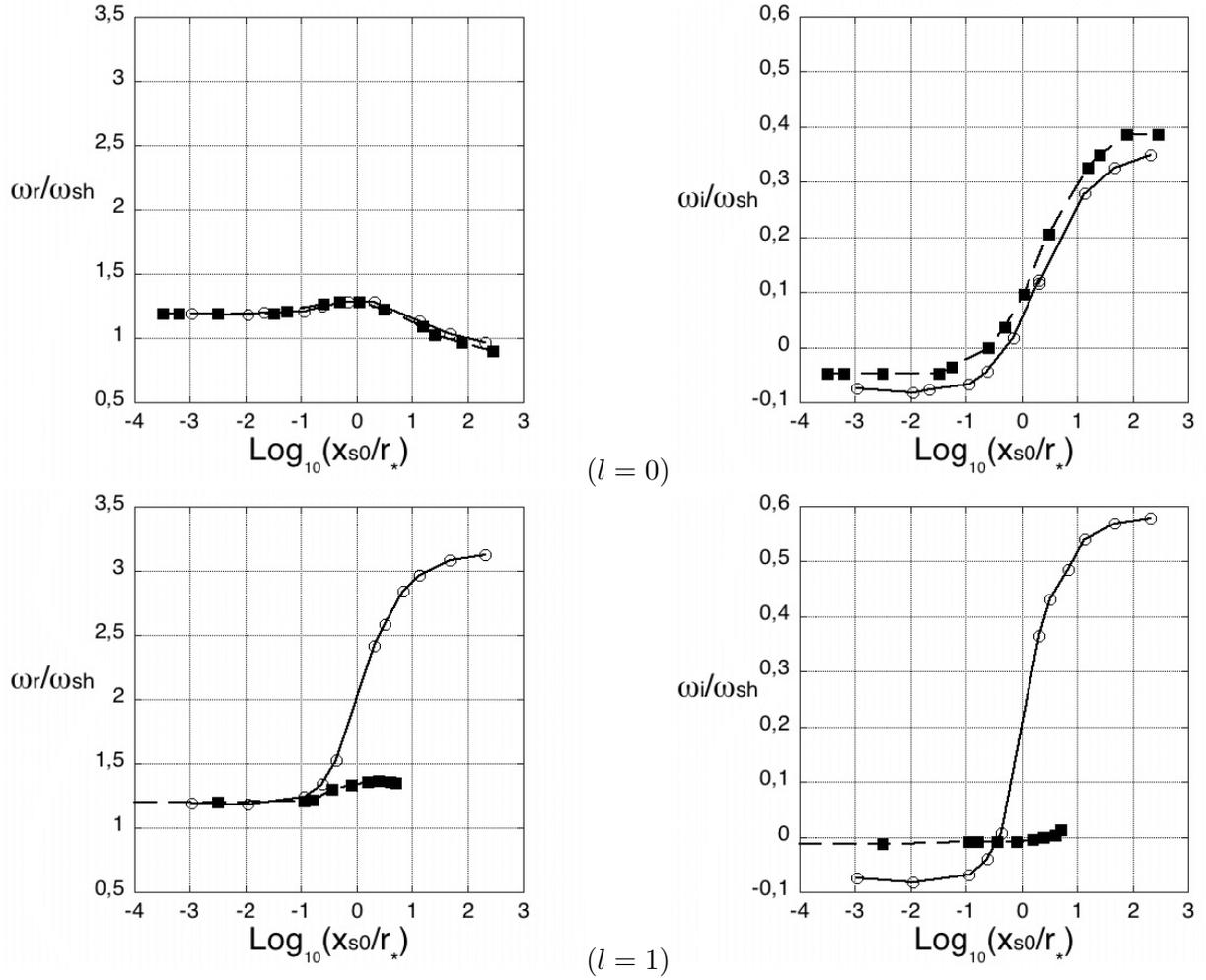


FIG. 4.4: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i en unité de $\omega_{\text{sh}} = \frac{-v_{\text{sh}}}{r_{\text{sh}} - r_*}$ des modes fondamentaux radiaux $l = 0$ et non-radiaux $l = 1$ pour $\gamma = 5/3$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 2$, en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{\text{sh}} - r_*)/r_*$. En trait plein et cercles creux, nos résultats. En tirets, carrés pleins, les résultats de HC92 [50] re-normalisés.

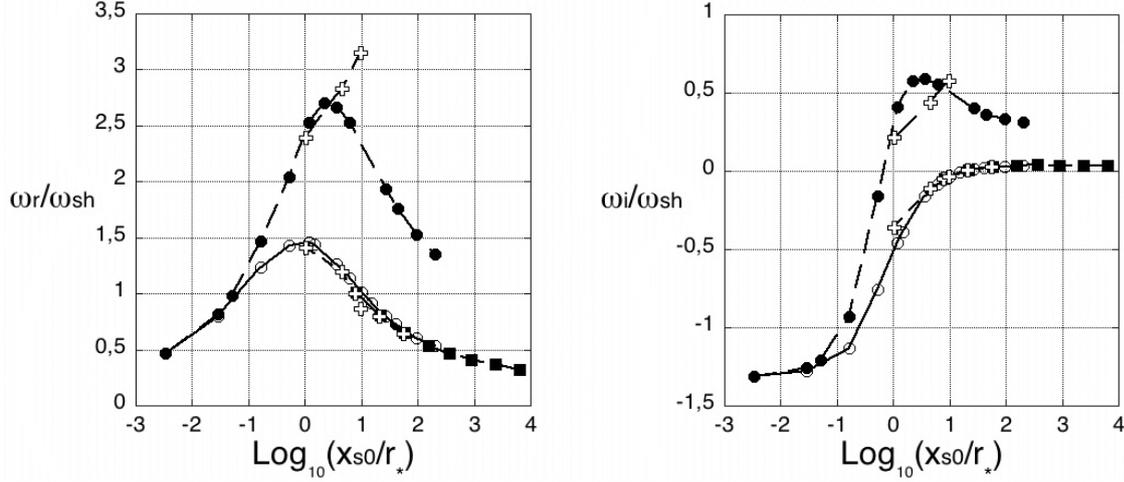


FIG. 4.5: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i en unité de $\omega_{sh} = \frac{-v_{sh}}{r_{sh}-r_*}$ du mode fondamental radial $l = 0$ et non-radial $l = 1$ pour $\gamma = 4/3$, $\alpha = \beta = 5/2$, en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{sh} - r_*)/r_*$. En trait plein et cercles creux, nos résultats pour $l = 0$, en pointillés, cercles pleins, nos résultats pour $l = 1$. En tirets, carrés pleins, les résultats de HC92 [50] re-normalisés. Les croix correspondent à des mesures des simulations de BMD03 [11] pour $l = 0$ et pour $l = 1$.

temps d'advection du flot est bien défini dans les cas présents de refroidissement. Le temps τ du cycle advectif-acoustique (Eq 1.1) a déjà été défini comme la somme d'un temps advectif et d'un temps acoustique. Si nous étudions un peu mieux la pulsation du mode fondamental, on constate qu'elle est toujours comprise entre 1/2 et 1 à 2 fois $2\pi/\tau$ (figures 4.8, 4.9). Ces valeurs de la fréquence du mode fondamental s'accordent avec la présence du cycle advectif-acoustique. L'équation de dispersion vérifiée par la pulsation, obtenue en négligeant le cycle purement acoustique (Eq 1.3) montre que suivant le signe de l'efficacité Q du cycle, la pulsation réelle devrait être égale à $2\pi/\tau$ ou π/τ :

$$1 = Qe^{i\omega\tau}$$

La domination du mode $l = 0$ chez HC92 opposée à notre prépondérance du mode $l = 1$ se comprend par l'utilisation de notre toy-model. Les deux conditions limites au choc, les notres et celles erronées de HC92, ont été utilisées pour calculer les efficacités de l'instabilité advective-acoustique (voir chapitre 3). On constate que le toy-model (figure 4.10) prévoit que l'instabilité calculée par HC92 est toujours dominée par le

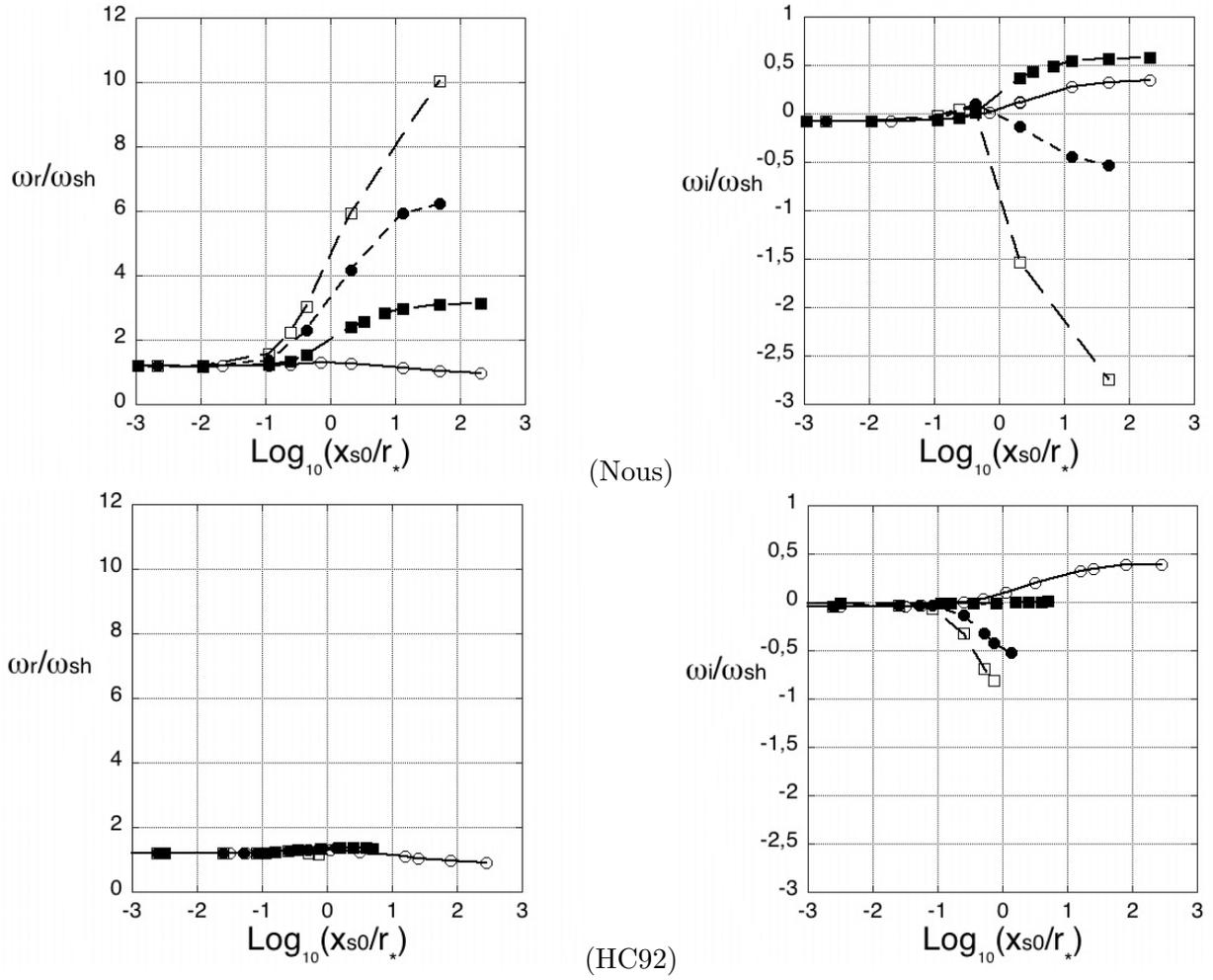


FIG. 4.6: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i en unité de $\omega_{\text{sh}} = \frac{-v_{\text{sh}}}{r_{\text{sh}} - r_*}$ du mode fondamental pour le mode radial $l = 0$ (trait plein, ronds creux) et les modes non-radiaux $l = 1$ (tirets, carrés pleins), $l = 3$ (tirets, ronds pleins) et $l = 5$ (pointillés, carrés creux) pour $\gamma = 5/3$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 2$ en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{\text{sh}} - r_*)/r_*$. En haut, nos résultats, en bas les résultats de HC92 [50] re-normalisés.

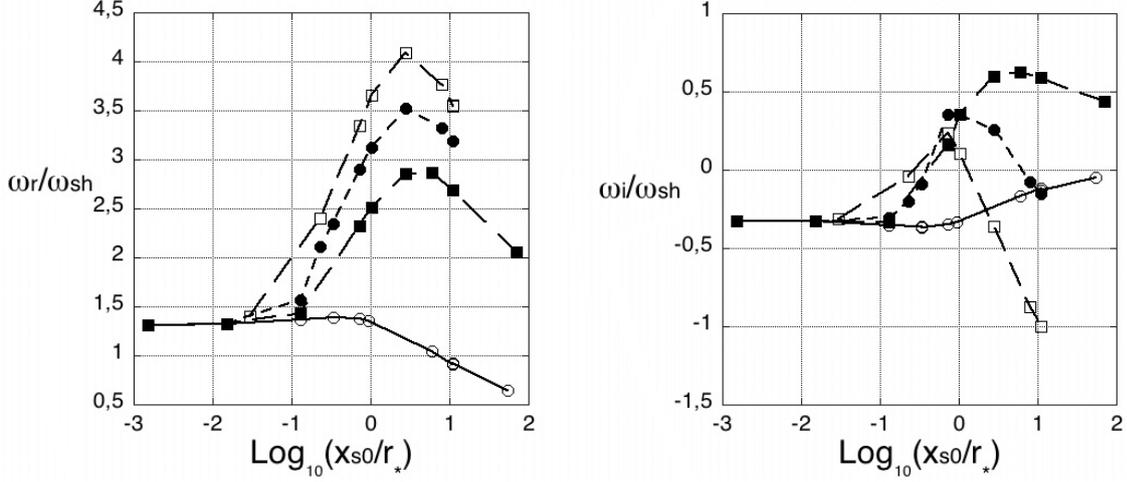


FIG. 4.7: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i en unité de $\omega_{\text{sh}} = \frac{-v_{\text{sh}}}{r_{\text{sh}} - r_*}$ du mode fondamental pour le mode radial $l = 0$ (trait plein, ronds creux) et les modes non-radiaux $l = 1$ (tirets, carrés pleins), $l = 2$ (tirets, ronds pleins) et $l = 3$ (pointillés, croix) pour $\gamma = 4/3$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 2$ en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{\text{sh}} - r_*)/r_*$.

mode longitudinal $\mu_{\text{in}} = 1$, c'est-à-dire si on extrapole au cas sphérique, le mode radial. D'autres modes peuvent également être instables mais sont toujours dominés par ce mode $l = 0$ (en sphérique $l = 0 \leftrightarrow \mu = 1$).

L'instabilité que nous calculons à l'aide du toy-model est toujours dominée par des μ_{in} plutôt faibles, c'est-à-dire des modes non-radiaux. Il est facile d'extrapoler les résultats $\mu_{\text{in}} = 1$ au mode sphérique radial $l = 0$. Pour les autres valeurs de l , on utilise la définition de μ (Eq 1.39) en géométrie sphérique. La valeur de la pulsation du mode instable est à peu près $2\pi v_{\text{sh}}(1 - \mathcal{M}_{\text{sh}})/r_{\text{sh}}$ c'est-à-dire l'inverse du temps du cycle advectif-acoustique. La valeur de l correspondant à une valeur de μ_{in} est :

$$l = 4\pi^2 \frac{(1 - \mu_{\text{in}}^2)(1 - \mathcal{M}_{\text{sh}})}{1 + \mathcal{M}_{\text{sh}}} \mathcal{M}_{\text{sh}}^2 \quad (4.17)$$

Dans tous les cas le toy-model prévoit une forte instabilité du cycle advectif-acoustique pour un angle $\theta_{\text{in}} \sim 0,3$ c'est-à-dire $\mu_{\text{in}} \sim 0,3$ pour les paramètres utilisés. Cela conduit donc à une valeur de l d'environ 2,5 pour le mode le plus instable du cycle. L'extrapolation des résultats du toy-model à un cas plus complexe tel le cas sphérique semble donc délicate. On constate également que le critère de stabilité $Q^{\text{tot}} > 1$ n'est pas toujours vérifié par le toy-model (figure 4.10). Les caractéristiques du flot incident jouent un rôle primordial dans le calcul de Q^{tot} par le toy-model. En jouant sur leurs

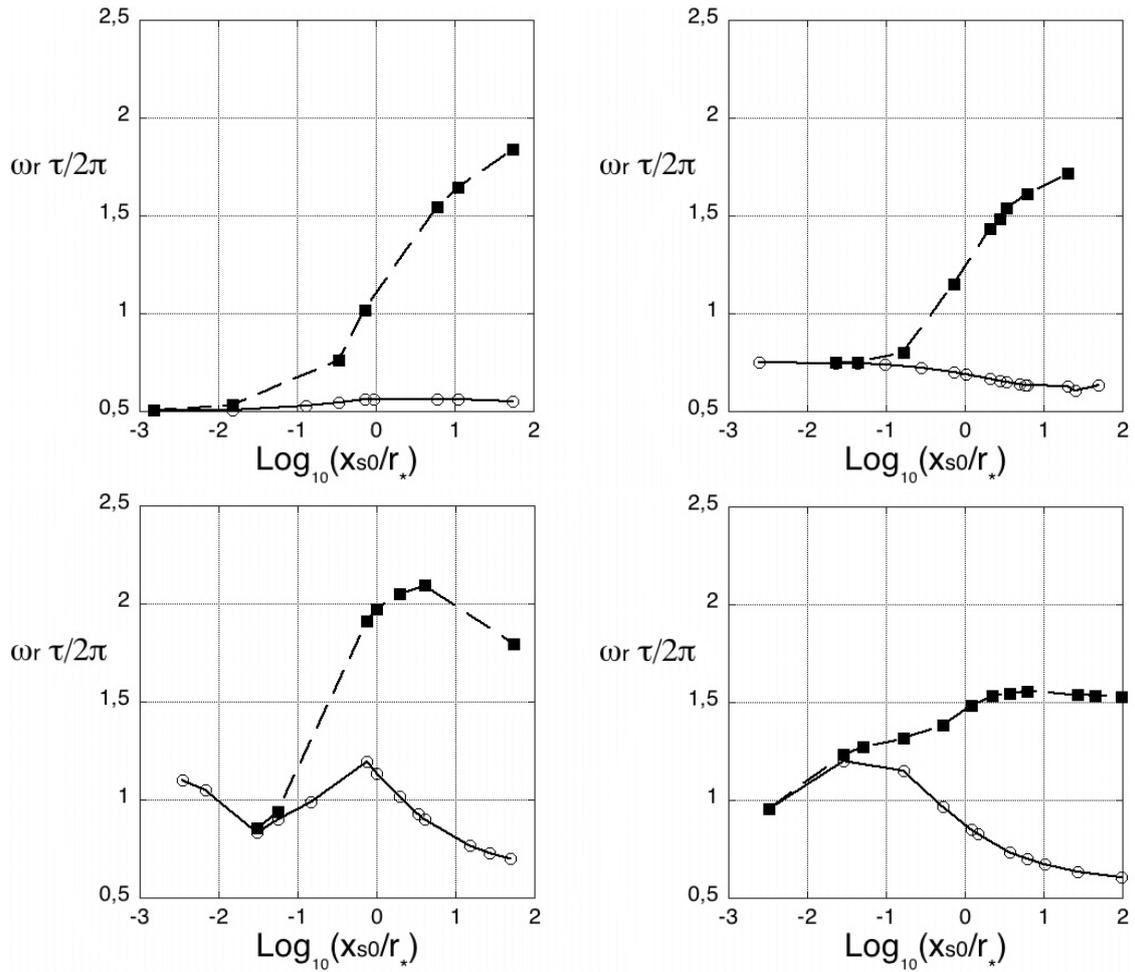


FIG. 4.8: Fréquences ω_r en unité du temps du cycle $\tau/2\pi$ du mode fondamental pour le mode radial $l = 0$ (ronds, trait plein) et le mode non-radial $l = 1$ (carrés, pointillés) en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{\text{sh}} - r_*)/r_*$, pour $\gamma = 4/3$ et divers refroidissements : $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$ (haut gauche), $\alpha = 3/2$, $\beta = 2$ (haut droite), $\alpha = 2$, $\beta = 2$ (bas gauche) et $\alpha = \beta = 5/2$ (bas droite).

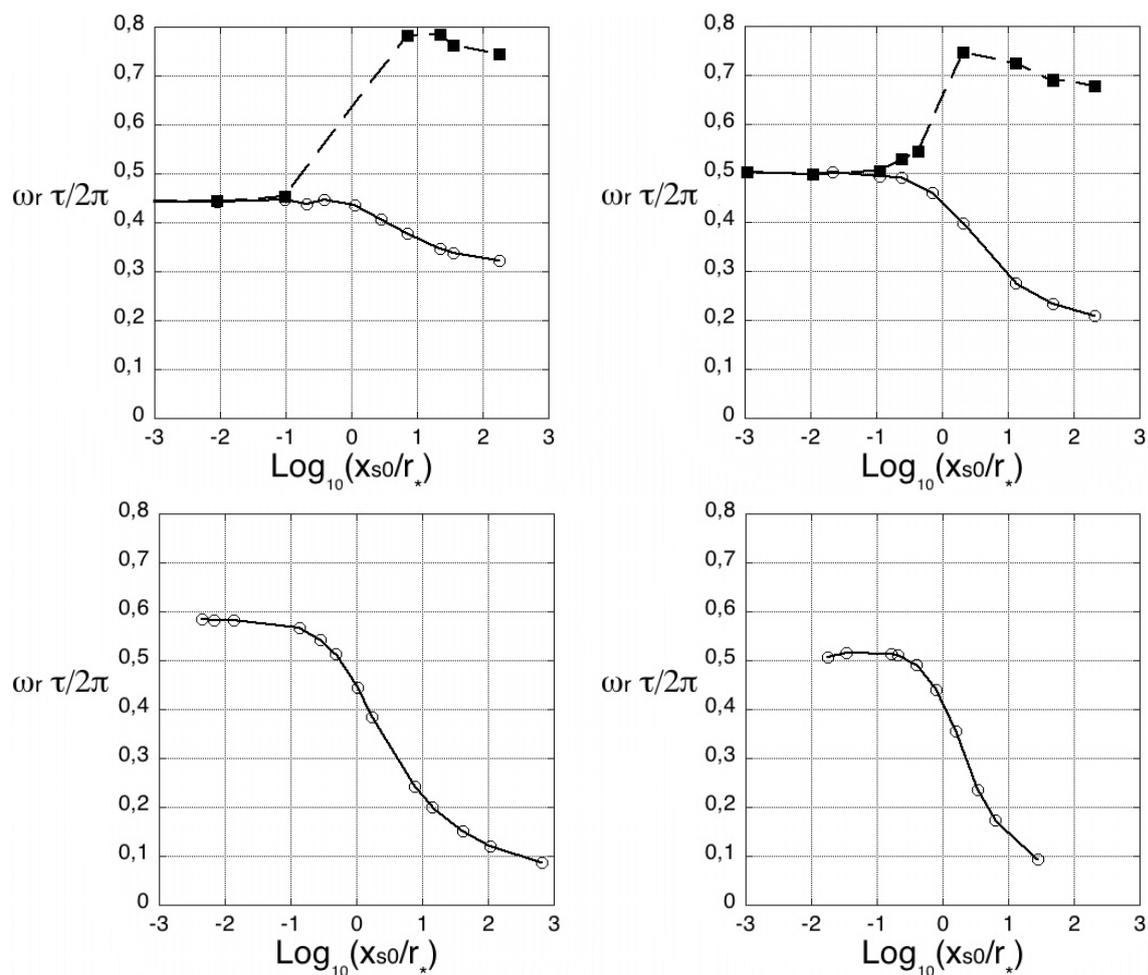


FIG. 4.9: Fréquences ω_r en unité du temps du cycle $\tau/2\pi$ du mode fondamental pour le mode radial $l = 0$ (ronds, trait plein) et le mode non-radial $l = 1$ (carrés, pointillés) en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{sh} - r_*)/r_*$, pour $\gamma = 5/3$ et divers refroidissements : $\alpha = 0$, $\beta = 2$ (haut gauche), $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$ (haut droite), $\alpha = 1$, $\beta = 2$ (bas gauche) et $\alpha = 3/2$, $\beta = 5/2$ (bas droite).

valeurs, notamment sur la valeur de \mathcal{M}_{in} , on peut obtenir de fortes instabilités (figure 4.11). Le flot radial qui chute sur l'objet compact central peut être approximé par un flot adiabatique de Bondi sur un intervalle plus ou moins grand de rayon, en fonction de l'intensité du refroidissement. Cette zone adiabatique crée un feedback acoustique relativement important (chapitre 1 et chapitre 3) pour tous les perturbations d'après le toy-model. Lorsque la taille de la cavité est relativement grande, ce feedback joue un rôle : le taux de croissance du cycle devrait être plus élevé. Numériquement, on observe que lorsque le refroidissement domine, la cavité est petite, le flot est stable ou du moins plus stable que pour les grandes cavités. Notre toy-model avec refroidissement ne prend pas en compte ce feedback adiabatique, d'où ses limites.

Néanmoins, le toy-model prédit une instabilité dominée par des modes non-radiaux de bas degré (ie : l petit) ce qui est en accord avec nos calculs de mode.

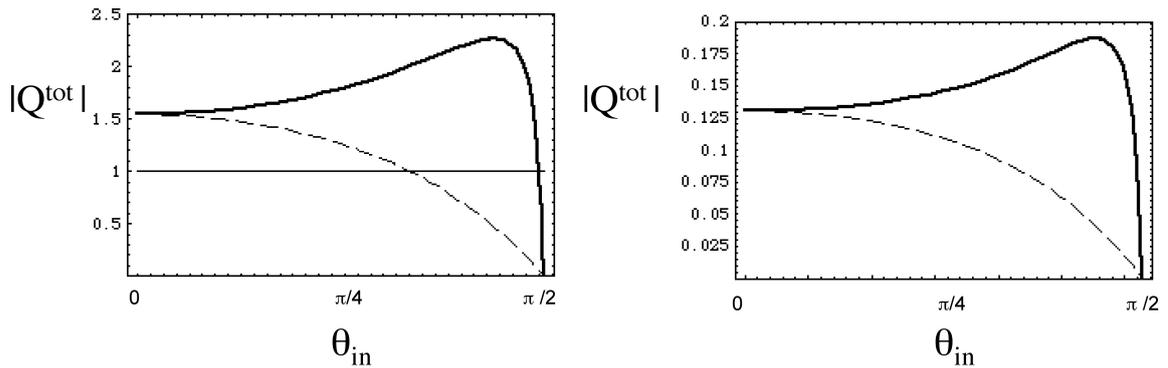


FIG. 4.10: Efficacité totale du cycle advectif-acoustique, $|Q^{\text{tot}}|$ en fonction de l'angle θ_{in} , calculée dans le cas d'un "mur", avec nos conditions limites au choc (trait plein épais) et celles de HC92 [50] (tiret). A gauche, $\mathcal{M}_1 = 5$, $\mathcal{M}_{\text{out}} = 10^{-4}$, $\gamma = 5/3$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 2$. A droite, $\mathcal{M}_1 = 5$, $\mathcal{M}_{\text{out}} = 10^{-4}$, $\gamma = 4/3$ et $\alpha = \beta = 5/2$.

Dans le cas adiabatique, comme dans le cas refroidi, le toy-model prédit que les conditions de HC92 amènent la prépondérance du mode $l = 0$. Vérifiée par le calcul numérique des modes propres d'oscillation et leur comparaison avec ceux de HC92, cette domination est donc liée à la modification de l'efficacité du cycle advectif-acoustique par les mauvaises conditions au choc.

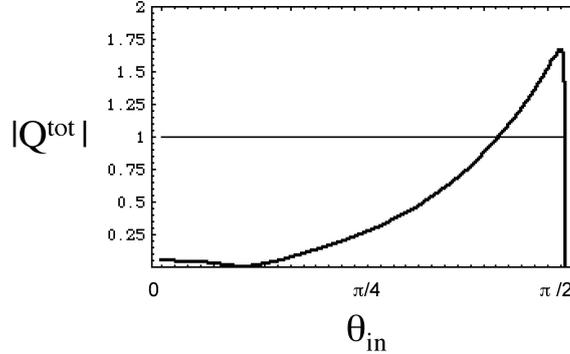


FIG. 4.11: Efficacité totale du cycle advectif-acoustique, $|Q^{tot}|$ en fonction de l'angle θ_{in} , calculée dans le cas d'un "mur" et avec nos conditions limites au choc, pour $\mathcal{M}_1 = 50$, $\mathcal{M}_{out} = 10^{-4}$, $\gamma = 1.2$ et $\alpha = \beta = 5/2$.

4.3 Spectre de l'instabilité

La forte instabilité du premier harmonique par rapport au mode fondamental dans le cas radial nous incite à poursuivre nos calculs au-delà de ces premiers modes. Nous nous sommes donc intéressés à l'obtention d'un spectre des modes oscillants. Les taux de croissance des modes varient périodiquement pratiquement comme des oscillations, en fonction de la fréquence des modes (figure 4.12) pour tous les harmoniques sphériques et quel que soit le refroidissement considéré. Ainsi, une augmentation de la fréquence (ie : une montée dans les numéros des harmoniques [95]) n'implique pas forcément une déstabilisation ou une augmentation de l'instabilité si elle est déjà présente.

Afin de mieux caractériser les spectres, nous définissons le temps acoustique t_{ac} et la pulsation acoustique ω_{son} :

$$t_{ac} \equiv \int_{r_*}^{r_{sh}} \frac{2}{1 - \mathcal{M}^2} \frac{dr}{c} \quad (4.18)$$

$$\omega_{son} \equiv 2\pi/t_{ac} \quad (4.19)$$

Ce temps acoustique correspond au temps mis par une onde acoustique descendante pour parcourir la distance $r_{sh} - r_*$ ajouté à celui mis par une onde se propageant vers le choc, en remontant le flot, pour faire le parcours inverse.

Des modes acoustiques (ie : dont la pulsation est supérieure à ω_{son}) ont été trouvés mais leur taux de croissance est plus faible que les modes "pseudo-son" (ie : à fréquence

plus basse que ω_{son}). Ce comportement rappelle le comportement étudié par Foglizzo dans l'accrétion radiale sur un trou noir [34]. Les variations du taux de croissance des modes témoignent du rôle joué par le cycle purement acoustique (voir Appendices G de Foglizzo 2002). Ce cycle, comme le cycle advectif-acoustique, est toujours présent dans la cavité. Suivant qu'il soit en phase ou non avec le cycle advectif-acoustique, il va jouer en faveur ou en défaveur de l'instabilité (voir l'équation de dispersion Eq 1.3 caractérisant les deux cycles). Il module en quelque sorte le cycle advectif-acoustique. Le temps caractéristique des variations observées numériquement est de l'ordre de $2r_{sh}/c_{sh}$. En normalisant la fréquence réelle des modes par la fréquence acoustique (figures 4.12, 4.13), on constate que les variations ont un temps caractéristique proche du temps t_{ac} caractéristique du cycle purement acoustique.

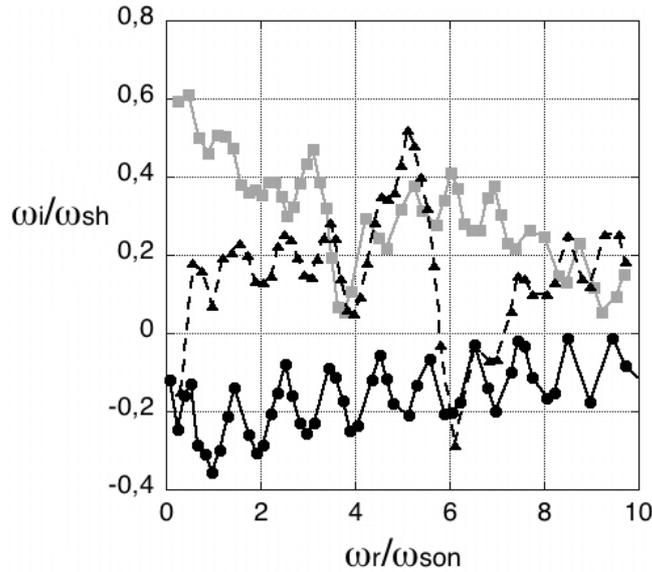


FIG. 4.12: Spectre des modes d'oscillation : Taux de croissance des perturbations ω_i en unité de ω_{sh} , en fonction de la fréquence ω_r en unité de ω_{son} pour $\gamma = 4/3$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$ et $r_{sh}/r_* \sim 11,9$ ($K = 0,005$). Le mode sphérique $l = 0$ (cercles pleins noirs) et les modes non-radiaux $l = 1$ (carrés pleins gris) et $l = 2$ (triangles pleins noirs).

Ce rôle du cycle acoustique comme modulateur de l'instabilité confirme l'interprétation des résultats en termes de cycle. A fréquences suffisamment hautes pour que les oscillations apparaissent clairement, on constate que le nombre de modes par période de variation est à peu près constant, entre 5 et 7. Cela indique donc que la différence entre les fréquences de deux harmoniques successifs vaut $1/5$ de la fréquence acoustique. Le

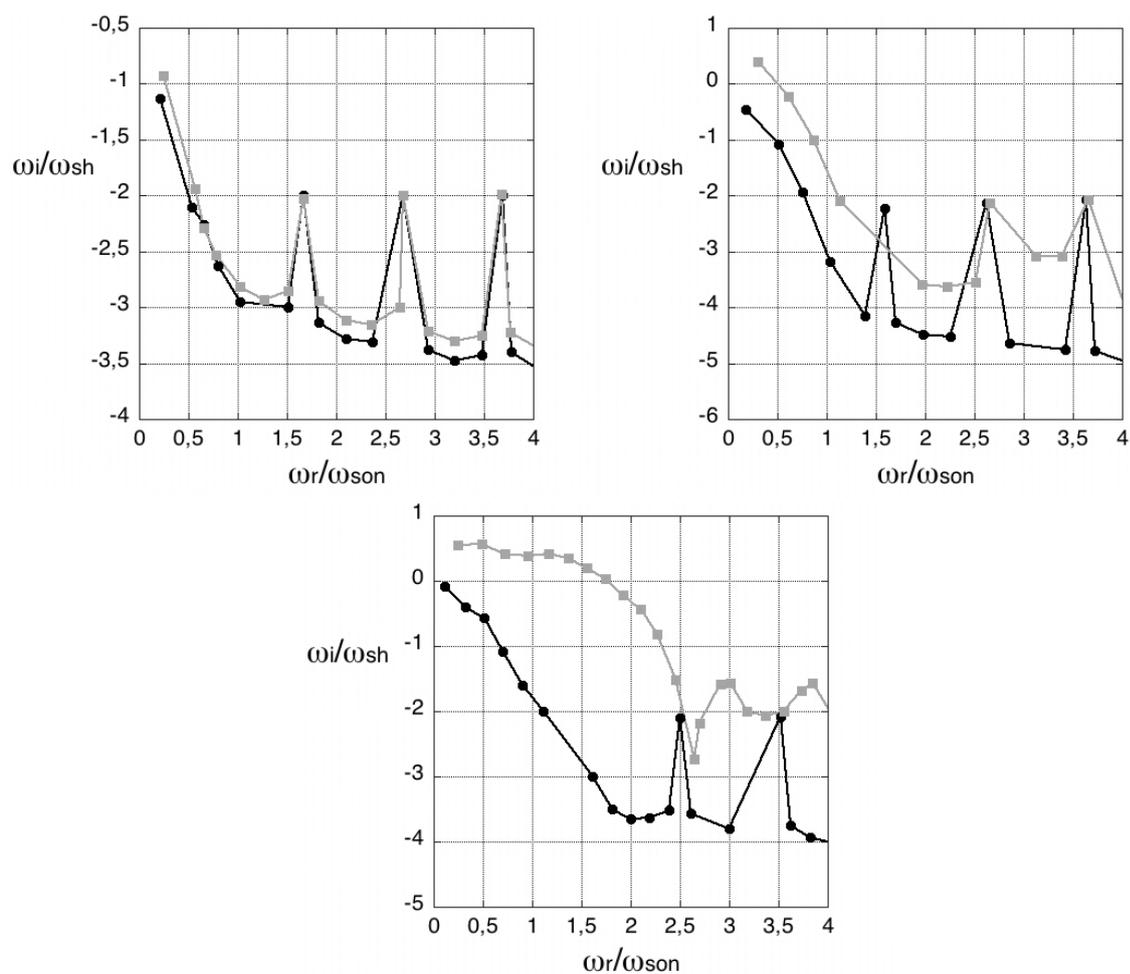


FIG. 4.13: Spectre des modes d'oscillation : Taux de croissance des perturbations ω_i en unité de ω_{sh} , en fonction de la fréquence ω_r en unité de ω_{son} . Le mode sphérique $l = 0$ (cercles pleins noirs) et non-radial $l = 1$ (carrés pleins gris) pour $\gamma = 4/3$, $\mathcal{M}_1 = 5$, $\alpha = \beta = 5/2$ et $r_{sh}/r_* \sim 1,165$ ($K = 10$) (gauche), $r_{sh}/r_* \sim 2,19$ ($K = 0,1$) (droite) et $r_{sh}/r_* \sim 7,12$ ($K = 8 \cdot 10^{-5}$) (bas).

rapport τ/t_{ac} a été évalué et vaut entre 4,5 et 6,5 dans les quatre figures présentées. La fréquence $2\pi/\tau$ est donc bien caractéristique des modes obtenus et donc en accord avec une interprétation par le cycle advectif-acoustique.

4.4 Conclusion

La prise en compte des bonnes conditions au choc et l'effort de compréhension des résultats amènent aux conclusions suivantes :

1- le choc d'accrétion au-dessus d'une étoile à neutrons est instable pour de grandes cavités. L'instabilité est dominée par le mode asymétrique $l = 1$ même si le mode radial $l = 0$ peut également être instable. C'est une conclusion opposée à celle de HC92.

2- une modélisation simple prédit que le cycle advectif-acoustique explique une instabilité dominée par des modes non-radiaux de bas degré.

3- Les autres modes non-radiaux $l > 2$ sont généralement stables voire fortement stabilisés lorsque la taille de la cavité augmente.

4- La fréquence du fondamental de l'instabilité est de l'ordre de $2\pi/\tau$, la fréquence du cycle advectif-acoustique.

5- Les harmoniques d'ordre supérieurs montrent une variation du taux de croissance caractérisée par le temps acoustique. Des modes acoustiques instables ont été trouvés pour de grandes cavités, mais l'instabilité est toujours dominée par le "pseudo-son".

Lorsque l'on est dominé par le refroidissement (ie : pour des petites cavités), on s'attend à retrouver les résultats de la stabilité des chocs d'accrétion sur une naine blanche. Pour $\beta = 2$, un critère de stabilité par rapport à la valeur de α et de l'harmonique considéré peut être dégagé (figures 4.14). Le flot sera instable pour α compris entre 0 et 1/4 pour le mode fondamental. L'instabilité du premier harmonique nécessite, elle, une valeur de α comprise entre 0 et 0,7. Ces résultats sont donc à rapprocher des valeurs de α (0,4 et 0,8 respectivement obtenues dans le cas plan-parallèle), pour le mode fondamental et le premier harmonique [80] pour un flot avec index $\gamma = 5/3$ et le même refroidissement $\beta = 2$.

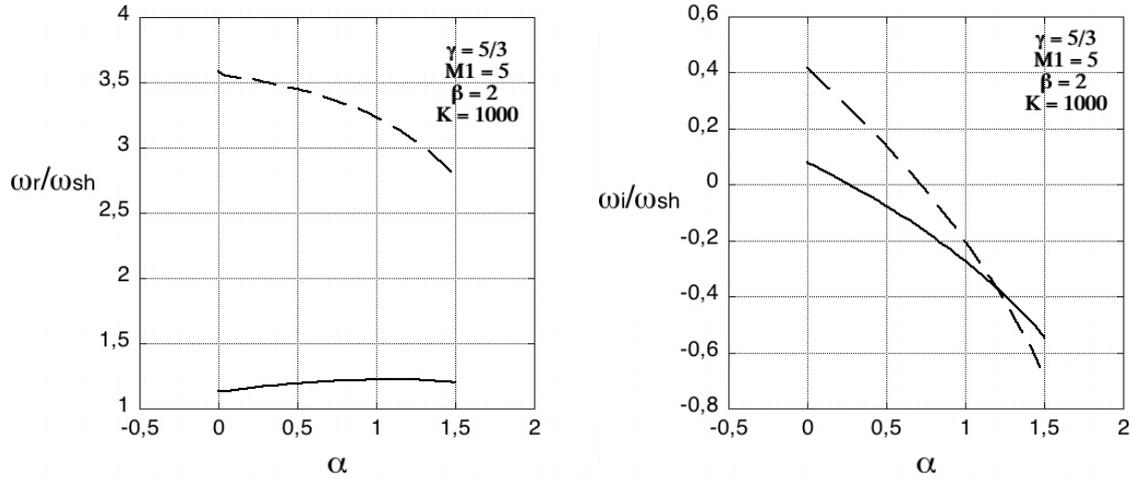


FIG. 4.14: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i du mode fondamental radial $l = 0$ (trait plein) et du premier harmonique radial (tirets) pour $\gamma = 5/3$, $K = 1000$, $\beta = 2$ en fonction du paramètre α .

Les prédictions de notre toy-model ainsi que les caractéristiques des modes propres montrent que le cycle advectif-acoustique est un excellent candidat pour expliquer les résultats obtenus. Ces résultats et le mécanisme du cycle permettent également d'expliquer les résultats des simulations numériques publiées par BMD03. Il est ici nécessaire de remarquer que le cycle advectif-acoustique est toujours présent dans ce type de simulations hydrodynamiques mais son caractère instable, que l'on vient de mettre en avant, peut être fortement modifié par la description numérique utilisée, voire atténué (voir article en Annexe D) :

- i- Une grille numérique trop grosse ou une viscosité trop importante amortissent les ondes sonores,
- ii- une condition limite inférieure maladroite peut engendrer un feedback acoustique artificiel ,
- iii- une mauvaise description du choc peut engendrer une vorticité artificielle.

Pour ces raisons, la comparaison avec les simulations numériques doit être faite avec précaution. Les simulations de BMD03 se placent dans le contexte de l'étude des Supernovae gravitationnelles. L'application de nos méthodes de calcul linéaire et le diagnostic de la présence du cycle advectif-acoustique dans ces explosions constituent donc la suite logique de notre travail.

Supernovae Gravitationnelles

Les Supernovae sont parmi les événements les plus violents de l'Univers. Initialement confondues avec l'apparition d'une nouvelle étoile dans le ciel, elles sont plutôt signes de la fin de l'existence des étoiles "classiques". Les Supernovae sont des explosions puissantes et fondamentales à de nombreux égards. En effet, elles permettent de chauffer intensément le milieu interstellaire par une onde de choc. Ce choc est également supposé être le lieu d'accélération des rayons cosmiques, leur permettant d'atteindre de très hautes énergies. La formidable énergie dégagée par une Supernova permet également la synthèse d'éléments parfois même plus lourds que le fer. Une fois injectés dans le milieu interstellaire, ces éléments lourds sont un facteur important dans la formation des nuages moléculaires, sites privilégiés de la naissance des étoiles. Enfin, ces matériaux lourds se retrouvent également dans des entités beaucoup plus petites que les étoiles : les planètes et ceux qui peut être les habitent. C'est ainsi grâce aux Supernovae que l'expression "nous sommes tous des poussières d'étoile" prend son sens.

Dans ce chapitre, après une brève introduction aux Supernovae de type II et à leur asymétrie, nous présenterons la manière dont nous étudions le rôle du cycle advectif-acoustique dans ce type de flot puis les résultats que nous avons obtenus.

5.1 Présentation

L'observation des Supernovae remonte à des périodes assez lointaines. Les premières observations systématiques recherchant des Supernovae ont été réalisées par Zwicky et Baade en 1934 [6]. Ils suggérèrent que les Supernovae pouvaient tirer leur grande éner-

gie ($\sim 10^{51}$ ergs) de l'effondrement gravitationnel d'une étoile, en particulier celui des parties internes conduisant à la formation d'une étoile à neutrons dont le concept venait d'être proposé par Landau en 1932 [63]. De ces observations, il devint clair qu'il existait au moins deux classes distinctes de Supernovae, amenant Minkowski en 1941 [81] aux deux appellations type II et type I : les Supernovae dont le spectre présente des raies de Balmer de l'hydrogène près du maximum de lumière sont dénommées type II, celles ne présentant pas ces raies, type I. Les Supernovae de type I ont ensuite été classées par des détails dans leur spectre (figure 5.1). Les Supernovae de type II sont elles aussi classées en 3 sous-catégories. Deux d'entre elles (IIP et IIL) sont dues à la forme de la courbe de lumière et constituent l'essentiel des Supernovae de type II.

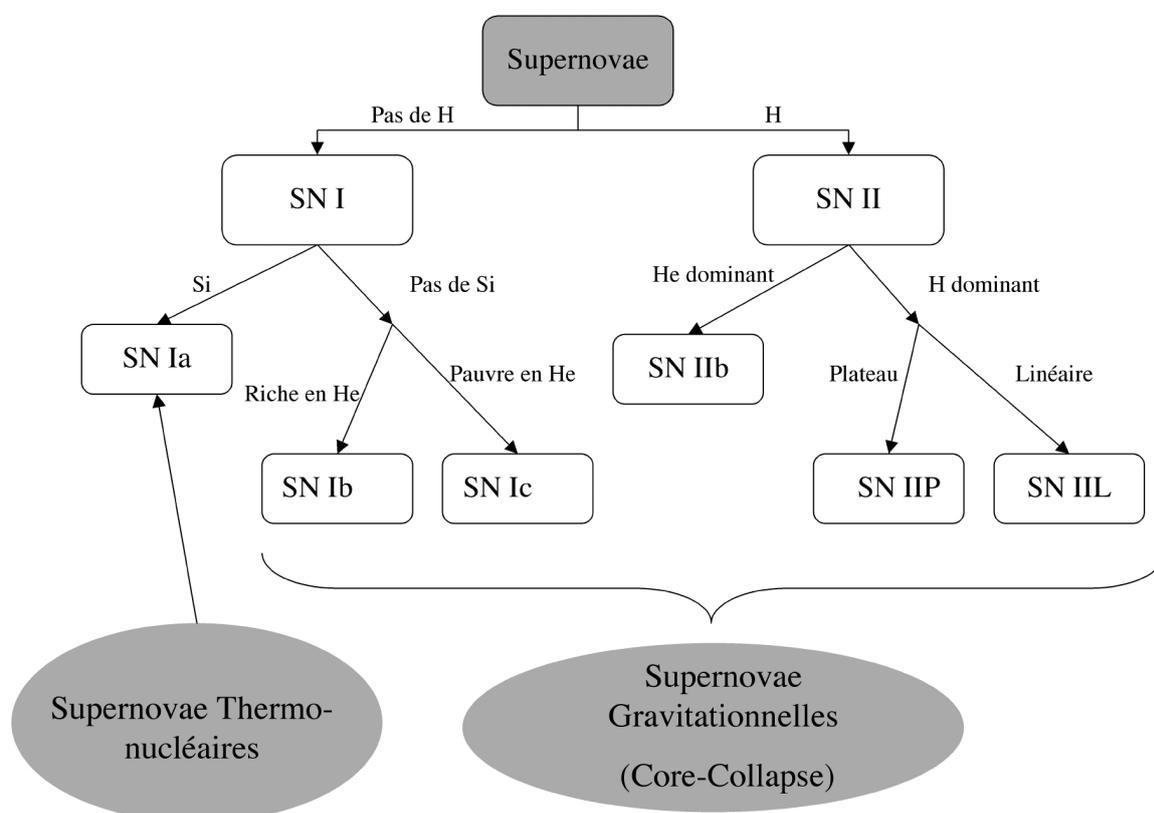


FIG. 5.1: Classification des Supernovae et origine physique.

Au milieu du 19^{ème} siècle, les relations entre le mécanisme de l'explosion et les propriétés spectrales des deux types de Supernovae étaient inconnues. Durant de nombreuses années, la seule explication aux deux types d'explosions restait celle du scénario de Zwicky [103] selon qui une Supernova se produisait lors de la transition entre une

étoile ordinaire et une étoile à neutrons. Hoyle et Fowler [51] ont été les premiers à découvrir que la combustion thermonucléaire dans un coeur stellaire électroniquement dégénéré (supporté donc par la pression des électrons, c'est à dire donc une étoile dans sa phase naine blanche) pouvait conduire à une explosion puissante et à la dislocation de l'étoile entière. Ce scénario est, de nos jours, celui généralement accepté pour expliquer la sous-classe Ia qui correspond à environ 80% des Supernovae de type I. Une naine blanche, constituée principalement de Carbone et d'Oxygène (d'où l'absence de raies de l'hydrogène), accrète de la matière d'une étoile compagnon. Accumulant de la matière, elle s'approche de sa masse limite de Chandrasekhar ($\sim 1,44M_{\odot}$) à partir de laquelle la pression de dégénérescence ne contrebalance plus l'action de la gravité. La densité et la température augmentent dans le coeur et le Carbone et l'Oxygène sont consommés dans des conditions très dégénérées et une masse substantielle de la naine est brûlée en nickel. L'emballement des réactions nucléaires au centre de l'étoile (au contraire d'une nova qui est un phénomène en surface de la naine) donne naissance à l'explosion Supernova. Comme les conditions sont toujours à peu près fixées (masse du coeur, quantité de matières éjectées, luminosité...), l'explosion de type Ia sert d'objet de référence notamment pour la détermination des distances cosmologiques [86].

Les Supernovae de type II nous intéressent plus particulièrement. Les Supernovae gravitationnelles (par effondrement du coeur) sont le stade final de l'évolution des étoiles de masses supérieures à environ 8 masses solaires. En 1960, le scénario du coeur d'une étoile massive s'effondrant gravitationnellement à la fin de sa vie pour donner naissance à une étoile à neutrons est acceptée pour expliquer les Supernovae de type II (et des sous-classes Ib et Ic qui ne diffèrent des types II que par leurs étoiles progénitrices qui ont déjà perdu leur enveloppe d'hydrogène). Au contraire des Supernovae de type Ia, les Supernovae de type II laissent derrière elles un "cadavre d'étoile", une étoile à neutrons de quelques dizaines de kilomètres et de masse $\sim 1,2 - 2M_{\odot}$, en rotation avec une période pouvant aller de quelques millisecondes à quelques secondes et un champ magnétique fort de l'ordre de 10^{12} Gauss.

Au cours de son évolution, une étoile massive, rouge supergéante par exemple, adopte une structure en "pelure d'oignons" : des couches d'éléments de plus en plus lourds se superposent au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans l'étoile. Au centre se construit un coeur de Fer, élément terminal dans la fusion stellaire. Au delà du Fer, la fusion des éléments coûtent de l'énergie au lieu d'en produire. Cette structure de l'étoile n'est évidemment pas figée : il existe de nombreux échanges entre les couches. Quand dans le coeur de l'étoile, la fusion des éléments lourds s'arrête, le coeur refroidit à cause de l'émission continue de neutrinos qui dominent les pertes d'énergie de l'étoile depuis la

fin de la combustion de l'hélium au coeur. Ce refroidissement produit une contraction du coeur qui correspond à une augmentation de densité. Colgate et Johnson postulent en 1960 [27] que le coeur de Fer de l'étoile voit sa masse excéder la masse limite de Chandrasekhar. Il s'ensuit alors un effondrement dramatique : en une seconde, le coeur de l'étoile réduit de la taille d'une planète à celle d'une ville. A ce moment en effet, deux effets deviennent importants : Primo, les photons émis ont une énergie suffisante pour permettre la photo-dissociation des noyaux de Fer du coeur. Ainsi, l'énergie thermique du coeur est diminuée. Secundo, les électrons devenus relativistes voient leur dégénérescence augmentée de sorte que protons et noyaux commencent à les capturer, produisant neutrons et neutrinos électroniques. La photo-dissociation nucléaire et l'émission des neutrinos par le coeur entraînent des pertes d'énergie. Etant donnée la fonction d'état de la matière, l'augmentation de pression par augmentation de la densité est réduite. Le coeur est déstabilisé, la matière chute plus rapidement et augmente la densité au centre ce qui a pour effet d'augmenter la capture électronique. Quand la densité atteint environ un centième de la densité nucléaire de la matière, la diffusion des neutrinos sur les noyaux est si fréquente que les neutrinos deviennent piégés. Inexorablement, l'effondrement continue jusqu'à ce que la densité nucléaire soit effectivement atteinte dans le coeur. De part la nature extrêmement répulsive des forces nucléaires à courte portée, l'effondrement s'arrête alors brusquement. La partie centrale, dense du coeur qui était en chute subsonique, rebondit. Une onde de choc est alors lancée. Elle se propage dans le manteau de l'étoile vers l'extérieur. Cette onde propulse la majeure partie de la masse de l'étoile laissant derrière elle une étoile à neutrons, supportée par la pression de dégénérescence des neutrons, ou un trou noir si la masse restante est trop élevée. L'idée de ce modèle de rebond-choc est encore discuté actuellement. En effet, ce modèle ne produit pas d'explosions quand les calculs sont faits avec un traitement détaillé de la microphysique requise dans un environnement tel que le coeur dense de l'étoile. Ainsi, lors de sa propagation, le choc au départ très énergétique perd une grande quantité d'énergie car il dissocie les éléments qu'il rencontre, en neutrons et protons [76], ces derniers se recombineront par la suite. Les éléments en question sont principalement, dans cette couche de l'étoile, du Fer et de l'Oxygène. Des nucléons libres sont alors produits permettant une nouvelle capture électronique des électrons par les protons pour émettre de nouveaux neutrinos et former des neutrons. Le choc s'épuise donc au fur et à mesure de sa progression et une fois qu'il a trop perdu d'énergie, il s'arrête, tombe en panne à environ quelques centaines de km du centre, quelques dizaines de millisecondes après le rebond. Il échoue donc dans sa mission de déclencher l'explosion. A cause de ces difficultés, Colgate et White [28] puis Arnett [4] ont proposé un modèle d'explosion dû aux neutrinos, produits en grande quantité (les observations font état

d'une énergie émise sous la forme de neutrinos de l'ordre de 10^{53} ergs). Les neutrinos permettent en effet d'amener une partie de l'énergie de liaison gravitationnelle du coeur s'effondrant et de la déposer à des distances plus grandes, dans les couches extérieures de l'étoile ce qui permettrait à la matière de s'extirper du potentiel gravitationnel qui la confine. Cependant, la découverte des courants "faibles neutres" et l'importance de la diffusion des neutrinos sur les nucléons et les noyaux ont montré que l'étoile à neutrons naissante est très opaque aux neutrinos. De plus, la luminosité des neutrinos est plus basse que prévue et le transfert d'énergie par les neutrinos insuffisant pour inverser la chute du gaz autour de la proto-étoile à neutrons.

Alors qu'immédiatement après le rebond, l'émission de neutrinos décélère le choc, les neutrinos jouent un rôle crucial dans la résurrection du choc sur des échelles de temps plus longues. En 1982, Bowers et Wilson [16, 15] découvrent que les neutrinos peuvent effectivement causer une explosion mais en un temps beaucoup plus long que précédemment. Derrière le choc, la température et la densité décroissent lorsque des rayons plus grands sont atteints par ce choc et que le taux d'accrétion décroît avec le temps. Plus de 100 millisecondes après le rebond du coeur, les conditions pour le dépôt d'énergie des neutrinos se sont considérablement améliorées [10] et les neutrinos transfèrent effectivement leur énergie aux couches extérieures de l'étoile. De plus, la matière qui tombe s'accumule au niveau du coeur compact, entraînant une augmentation de la production de neutrinos. Ces deux points (augmentation de la production de neutrino, conditions d'absorption plus favorables au choc dans la "zone de gain") permettent le dépôt d'une quantité importante d'énergie derrière le choc et peuvent entraîner le redémarrage du choc, pour donner une explosion "retardée". Le problème de ce mécanisme d'explosion retardée via chauffage par les neutrinos est qu'il ne produit que des explosions à basse énergie ($< 1 \text{ foe} \sim 10^{51}$ ergs) et n'a pu être confirmé par des travaux indépendants avec des modèles plus récents.

Depuis le développement du mécanisme d'explosion retardée de Wilson, différents groupes ont travaillé sur le mécanisme conduisant à l'explosion de la Supernova, avec souvent des descriptions extrêmement fines de la physique. De nos jours, des simulations multidimensionnelles commencent à fleurir. Il est en effet apparu que de nombreux phénomènes simples mais multidimensionnels devaient être mieux traités : lors de sa propagation ralentie, le choc dont la force décroît, laisse derrière lui un gradient d'entropie qui est sujet à l'instabilité de Rayleigh-Taylor [9, 8]. Cette instabilité est transitoire. Il existe aussi une instabilité, d'après le critère de Ledoux au niveau de la fraction électronique, qui naît dans les zones centrales du coeur de l'étoile [47]. Enfin, il est apparu que la convection, phénomène multidimensionnel, se développait lorsque la

matière, derrière le choc à l'arrêt, est chauffée par les neutrinos [58]. Cette convection joue certainement un rôle important dans l'efficacité du transfert d'énergie dans la zone de chauffage. Malgré tous les progrès dans la modélisation numérique du transport des neutrinos et de l'hydrodynamique, les résultats ne sont pas probants [79, 17]. Alors que des simulations avec un traitement approximatif du transport des neutrinos conduisent à des explosions [10], les modèles avec le meilleur traitement n'ont toujours pas produit d'explosion aussi bien dans un cas sphérique (1D) que dans des cas multidimensionnels [68]. Des ingrédients multidimensionnels, dont le rôle dans l'explosion est souvent peu clair, telle la rotation [17, 43] ou le champs magnétique [2] sont encore peu pris en compte. Les simulations numériques de Supernovae incluant tous les effets microphysiques nécessitent des codes complexes et sont donc par conséquent très coûteuses en temps de calcul, surtout si elles sont multidimensionnelles. Il n'est donc pas possible d'étudier un échantillon large de cas pour permettre une étude paramétrique et trouver les conditions favorables à l'explosion. D'un autre côté, tous les paramètres du problème ne sont pas indépendants. Des études simplifiées [18, 57] apparaissent donc nécessaires pour progresser vers une meilleure compréhension physique du mécanisme de l'explosion.

5.2 Des Explosions Asymétriques

La physique des explosions Supernovae est très complexe. Physique nucléaire, transfert radiatif, hydrodynamique doivent être traités avec la même rigueur. De par cette complexité, les premières études des explosions Supernovae se sont souvent limitées à des modélisations monodimensionnelles et ce n'est que lentement que les modèles et les simulations numériques prennent en compte les effets tri-dimensionnels du problème. De nombreuses observations indiquent que les explosions de Supernovae, notamment celles de type gravitationnel (type II), sont fortement asymétriques. Précisons que l'on parle de la phase explosive de la Supernova et non de son évolution vers ce qu'on appelle les restes de Supernova, dont la morphologie, résultant de centaines d'années d'évolution dans le milieu interstellaire, est souvent fortement non symétrique. Au niveau de l'explosion même, on peut citer quatre grands indices d'asymétrie : le mélange des matériaux éjectés, la polarisation de l'émission, la connexion Supernova-sursaut gamma et enfin l'existence des pulsars kicks.

5.2.1 Mélange du matériel éjecté

La Supernova 1987A (figure 5.2) a été l'un des événements les plus importants dans l'étude et la compréhension des mécanismes sous-jacents au phénomène de Supernova gravitationnelle. Située dans la galaxie du Grand Nuage de Magellan, SN1987A est une des Supernovae les plus lumineuse de l'histoire récente. L'observation de cette Supernovae a permis la détection sur Terre d'environ une dizaine de neutrinos, prévus par les modèles de Supernovae gravitationnelles.

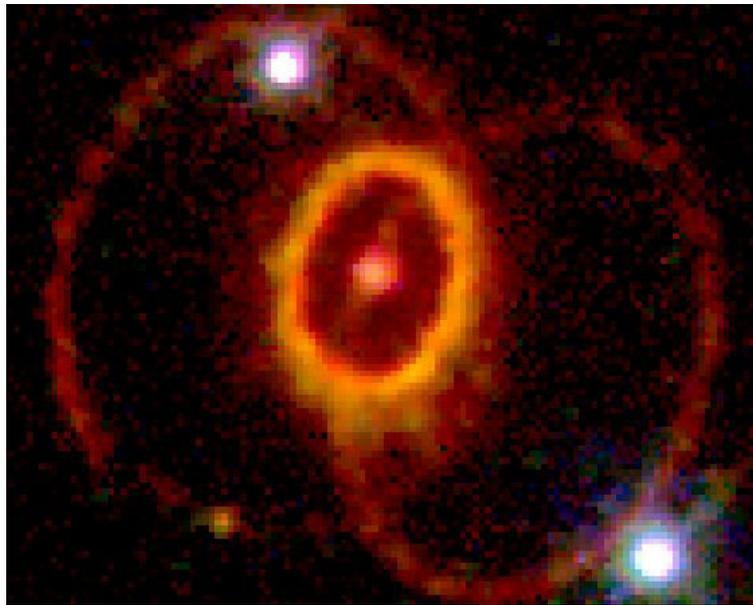


FIG. 5.2: La Supernovae SN1987A au centre de l'image, et ces anneaux vus par le HST.

L'étude de cette Supernova a également mis en avant la nécessité de mécanismes provoquant un mélange à grande échelle. Ainsi, les Supernovae gravitationnelles produisent dans les couches internes, près de la proto-étoile à neutrons, une grande quantité de matériel radioactif : principalement du ^{56}Ni ($\sim 0,075M_{\odot}$ pour SN1987A) qui décroît radioactivement en ^{56}Co puis en ^{56}Fe en émettant des rayons gammas. La détection se fait principalement par le ^{56}Co car l'émission du ^{56}Ni se fait trop tôt, lorsque l'atténuation de l'émission par la matière est encore grande. L'observation a montré que les rayons gammas correspondant au ^{56}Co étaient vus précocement, plus tôt que ce qui était alors prévu par les modèles d'explosion. De plus, le décalage vers le bleu et l'élargissement des raies à 1238 KeV du ^{56}Co étaient compatibles avec des modèles incluant un fort mélange [71]. Des mouvements non-radiaux [3], du mélange [61] doivent donc

être pris en compte dans la modélisation de l'explosion afin d'être en accord avec les observations des rayons gammas et X.

5.2.2 Spectro-polarimétrie des Supernovae

L'étude de la spectro-polarimétrie de l'émission des Supernovae est un domaine en plein essor. Lors des premières phases de son évolution, les Supernovae sont rarement résolues spatialement et l'étude de leur géométrie est donc difficile. Depuis 1982, il est reconnu que la détection d'une polarisation est synonyme d'une asymétrie de l'explosion Supernova [97]. L'idée de base est la suivante (figure 5.3) : l'atmosphère d'une Supernova est dominée par la diffusion des électrons qui est un processus très polarisant. Pour une source à symétrie sphérique et non résolue, où l'on mesure une émission moyennée sur la source, la polarisation linéaire nette serait donc nulle. Si la source n'est pas sphérique, on peut avoir une non-annulation partielle et donc une polarisation nette. Il est même possible de relier cette polarisation à un degré d'asphéricité : 1% de polarisation linéaire correspond à une asphéricité modérée de 20% .

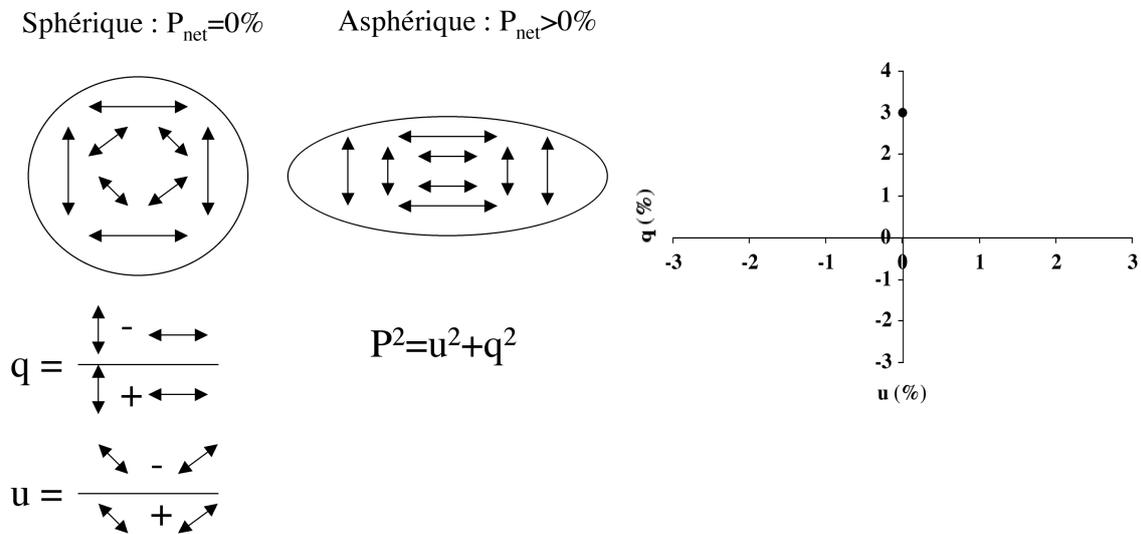


FIG. 5.3: Polarisation nette P pour une source sphérique et une source asphérique. Les flèches représentent les directions du vecteur électrique dans le plan du ciel. On appelle paramètres de Stokes les grandeurs q et u qui permettent de calculer la polarisation totale. Dans cet exemple, un rapport de deux, des axes de l'ellipse conduit à une polarisation d'environ 3% d'après le modèle développé par Hoefflich [46].

Une analyse de la spectro-polarimétrie a déjà été réalisée pour environ une douzaine

de Supernovae. Des caractéristiques générales ont été établies en fonction du type de la Supernova. On constate ainsi que la polarisation des type IIP telles SN1999em [66] ou SN1987A [60], qui est relativement faible au début ($P \sim 0,1\%$), augmente avec le temps c'est à dire avec l'émergence des couches internes. L'asphéricité serait donc plus grande proche du coeur de l'étoile. Il en est de même pour les Supernovae Ib/c telle SN2002ap [101] (Ic, $P \sim 1,5\%$) ou SN1993J [100] (IIb, $P \sim 1\%$) mais avec une polarisation de départ plus grande. Cette augmentation est probablement due à la morphologie de l'étoile progénitrice de ces classes de Supernova : les couches externes ont déjà été perdues par l'étoile avant l'explosion, on atteint donc plus rapidement les couches proches du coeur lorsqu'on mesure la polarimétrie en fonction du temps. Ainsi la spectro-polarimétrie appuie l'idée d'une explosion fortement asymétrique.

5.2.3 Connexion Supernovae-Sursauts Gammas

Depuis leur découverte il y a près de quarante ans au début des années soixante, le mécanisme à l'origine des sursauts de rayons gammas est le sujet de nombreuses spéculations. Les sursauts de rayons gammas se séparent généralement en deux catégories : les sursauts longs ($> 10s$) et les sursauts courts ($\leq 1s$) dont les photons sont plus durs. Si les courts restent encore à l'heure actuelle un mystère pour les théoriciens, des observations de plus en plus nombreuses indiquent l'existence d'un lien entre les sursauts longs et certaines Supernovae et l'on parle alors d'hypernovae [85]. Des modèles d'un tel lien ont été proposés dès 1968 [26] et un premier vrai indice a consisté en la découverte de la Supernova 1998bw dans la boîte d'erreur du sursaut GRB980425 [45]. La contrepartie optique d'un sursaut gamma dure bien plus longtemps que le sursaut. Son étude dans le cas de GRB030329 a montré des similarités spectaculaires avec une Supernova de type Ic [99, 73]. Depuis d'autres études tendent vers le même résultat selon lequel une certaine catégorie de Supernovae de type Ic serait responsable des sursauts longs.

De nombreux mécanismes cherchent à concilier ces deux phénomènes très énergétiques. Le modèle qui semble à l'heure actuelle rendre compte de la plus grande variété de phénomènes est celui du collapsar (figure 5.4) d'une étoile massive [70]. Une étoile très massive ($\geq 20M_{\odot}$) va mourir en une explosion Supernova de type gravitationnelle b/c. De par sa masse, elle forme non pas une étoile à neutrons mais un trou noir. On invoque aussi parfois, pour la formation de ce trou noir, des Supernovae avortées : la matière d'abord éjectée retombe sur l'étoile à neutrons ("fallback") et forme alors un trou noir. En prenant en compte la rotation, la matière stellaire autour du trou noir

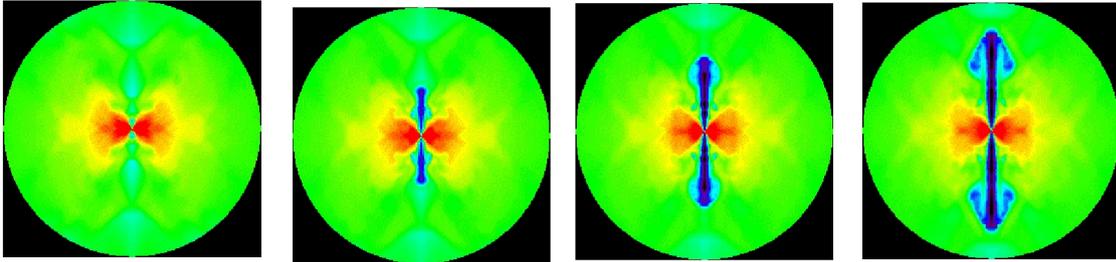


FIG. 5.4: Résultats d'une simulation de MacFadyen (<http://www.ucolick.org/~andrew/movies/j942.rho.gif>) d'un modèle de collapsar.

va former l'équivalent d'un disque d'accrétion et un jet peut alors prendre forme. Ce jet relativiste est alors responsable de l'émission gamma et par sa nature fortement asymétrique, bipolaire.

5.2.4 Pulsar Kicks

Une importante propriété observationnelle des étoiles à neutrons est leur distribution de vitesses. Cette vitesse est en générale supérieure à celle du progéniteur de l'étoile à neutrons. On évoque alors le terme de "coup de pied" donné à ces étoiles compactes et qui se traduit par des vitesses moyennes de 200 à 500 km s⁻¹ [69]. En ce qui concerne les extrêmes, l'observation de la nébuleuse de la guitare (figure 5.5) montre un pulsar dont la vitesse est supérieure à 1000 km s⁻¹ [29]. L'étude du mouvement propre de nombreux pulsars (étoiles à neutrons en rotation) a montré que leurs vitesses initiales se répartissaient suivant une distribution bimodale (figure 5.6) de deux gaussiennes : la première à vitesse moyenne assez faible de l'ordre de la centaine de km s⁻¹ et regroupe 40% des objets, la seconde à vitesse moyenne élevée de l'ordre de 700 km s⁻¹ [41, 5]. Cette distribution à deux pics est encore très discutée [48]. Dans le cas du pulsar du Crabe (figure 5.7), des observations ont également montré que le spin du pulsar et la direction du "kick" étaient alignées [62], mais le résultat n'a pas été généralisé à l'ensemble des pulsar kicks.

Le lien entre l'explosion Supernova qui a donné naissance au pulsar et le kick du pulsar est assez évident mais sa nature est encore sujette à discussion. Un lien indirect avec l'explosion a été étudié. Souvent formé à partir d'un système binaire, le pulsar pourrait obtenir sa vitesse lors de la destruction du système par une explosion symétrique [53]. Si ce mécanisme peut rendre compte de vitesse de l'ordre de 150 km s⁻¹, il

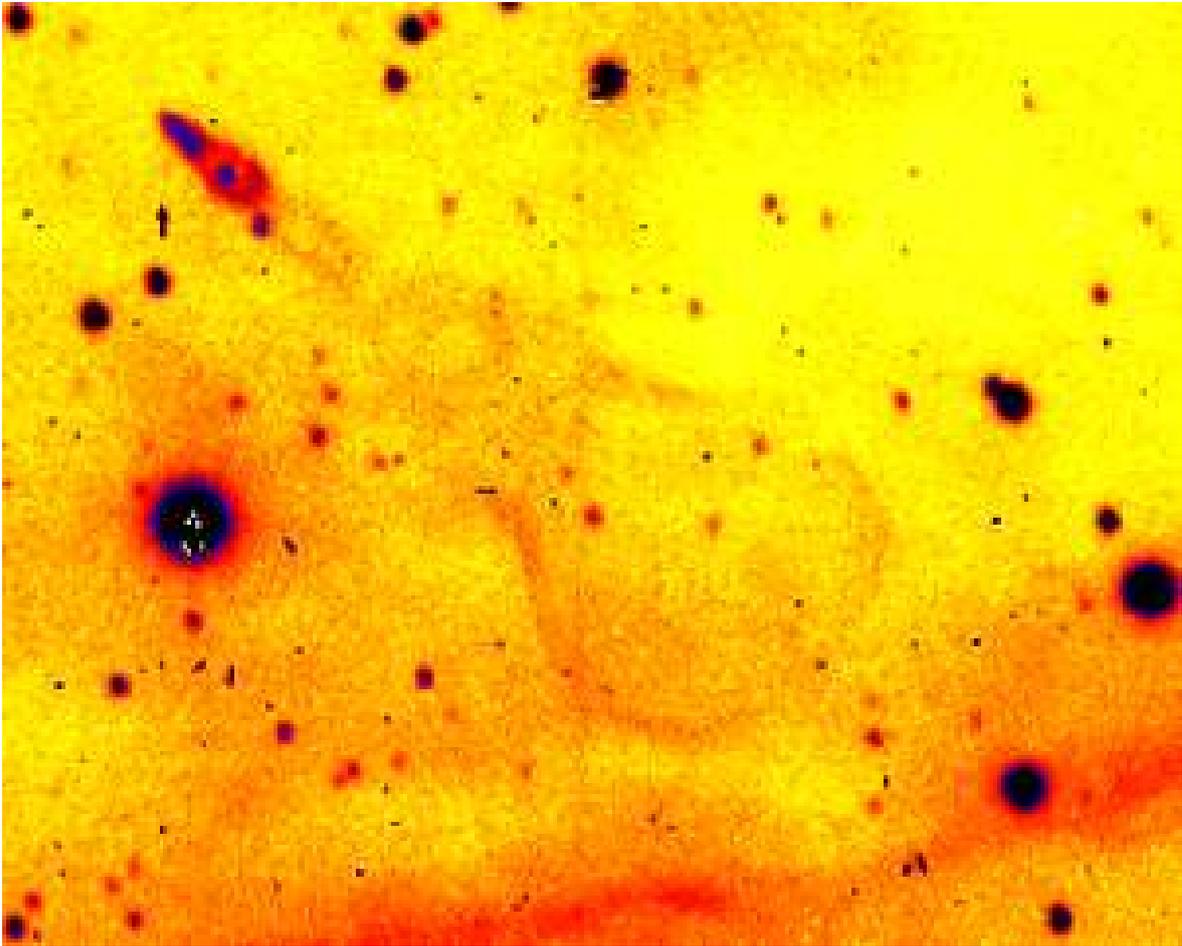


FIG. 5.5: La nébuleuse de la guitare [29]. Image H_α du choc arqué produit par l'interaction d'une étoile à neutrons, le pulsar B2224+65, se déplaçant à une vitesse de $\sim 800-1000\text{kms}^{-1}$, et de son environnement.

impose par contre au spin et au kick des directions plutôt orthogonales que parallèles et ne peut rendre compte de l'observation de très grandes excentricités dans certaines binaires.

Les meilleurs espoirs pour expliquer les pulsar kicks se sont alors tournés vers le mécanisme de l'explosion elle-même et d'un kick donné au pulsar dès sa naissance dans la Supernova. En dehors de modèles exotiques, trois grands mécanismes sont généralement étudiés pour obtenir les kicks appropriés. Le premier mécanisme évoque la production de neutrinos. Permettant d'évacuer l'importante énergie de liaison gravitationnelle de l'étoile à neutrons ($\propto 10^{53}$ ergs), les neutrinos apparaissent donc comme

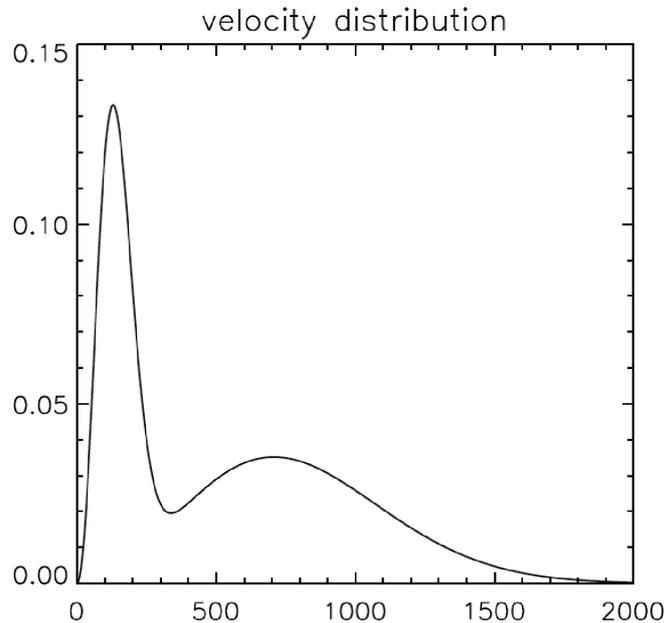


FIG. 5.6: Distribution de la vitesse initiale des étoiles à neutrons suivant deux gaussiennes. Les basses vitesses incluent 40% des objets avec un maximum à 127 km s^{-1} , les grandes vitesses ont un maximum à 707 km s^{-1} . Reproduction de la figure 1 de Bombaci et al. [12].

un moyen efficace de donner un coup de pied. Ce mécanisme repose sur une asymétrie dans l'émission des neutrinos, induite par un fort champ magnétique [62] sous la forme de divers effets (effet dynamique, violation de parité, effet sur les sections efficaces). Si les propriétés des kicks obtenus par ce mécanisme sont satisfaisantes (une anisotropie de 3% suffit à expliquer des vitesses de l'ordre de 1000 km s^{-1}), il reste le problème de l'origine du très fort champ magnétique requis ($\geq 10^{15} \text{ G}$). A l'heure actuelle, seule une catégorie observationnelle d'étoiles à neutrons (les Magnetars [31]) semble posséder un champ magnétique aussi fort, mais la généralisation à l'ensemble des pulsars semble difficile.

Le deuxième mécanisme repose sur des anisotropies dans la structure même de l'étoile progénitrice. Cependant, les effets de telles asymétries initiales sont encore controversés [19, 42] dans la communauté des simulateurs.

Le dernier mécanisme est directement relié à notre travail. Il invoque la présence d'instabilités hydrodynamiques conduisant à une asymétrie globale de l'explosion sans évoquer de conditions physiques extrêmes (rotation excessive, champ magnétique important). Chandrasekhar a montré en 1961 qu'une sphère convectivement instable ex-



FIG. 5.7: Le pulsar du Crab. Images combinées (rouge : optique du HST, bleu : rayons x de Chandra).

cite efficacement les modes non-radiaux $l = 1$ [23]. Pour une taille suffisamment grande de la zone de chauffage par les neutrinos, la configuration de cette zone, instable du fait du chauffage à la convection, est similaire à celle étudiée par Chandrasekhar. Les premières simulations numériques complexes n'ont pas permis d'obtenir par ce genre de mécanisme des vitesses du pulsar suffisamment élevées [58]. Cependant, elles ne laissaient que rarement le temps aux modes instables globaux de se développer (notamment le temps pour que les cellules convectives fusionnent). BMD03 ont montré dans leur simulation simplifiée [11], adiabatique, que le choc avait un caractère instable dominé par un mode $l = 1$. Plus récemment, une étude menée par un groupe de Garching, sur des simulations de Supernovae [96], bidimensionnelles, simplifiées notamment au niveau du transport des neutrinos, a montré qu'en lui laissant le temps, la convection induite par le chauffage des neutrinos derrière le choc alors en panne, pouvait conduire à une instabilité globale dominée par les modes $l = 1$ et $l = 2$ (figure 5.8). En évaluant la vitesse acquise par l'étoile à neutrons à la fin de leurs simulations, ils ont également pu rendre compte d'une distribution bimodale des vitesses (figure 5.9). Des premières tentatives de simulations tri-dimensionnelles ont montré le développement d'un mode $l = 1$ instable.

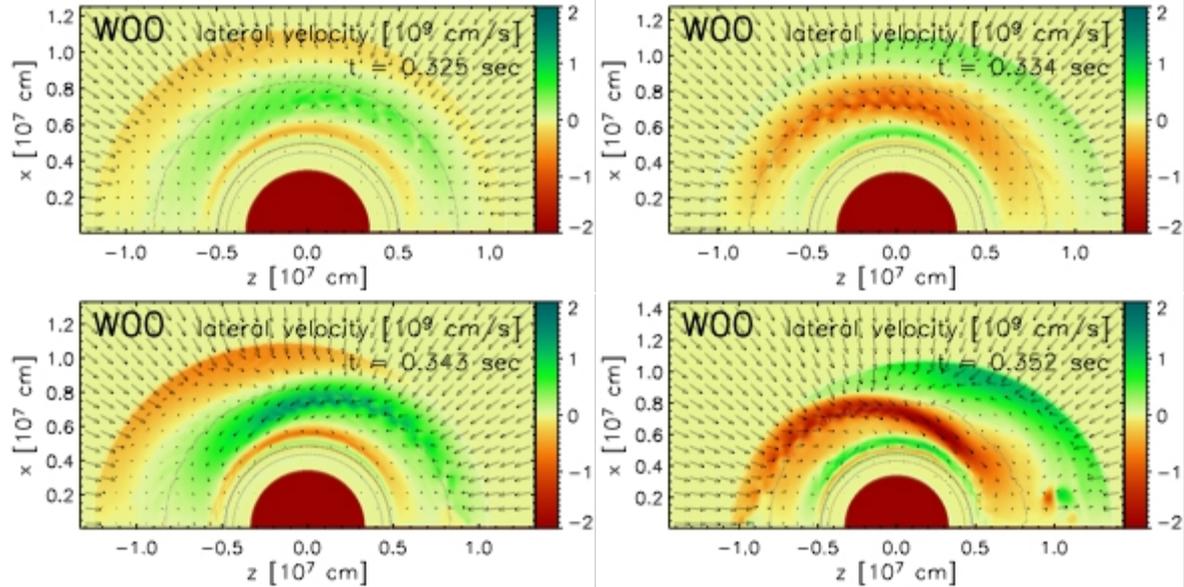


FIG. 5.8: Vitesse latérale vue en coupe à trois instants dans les simulations. Mise en évidence des modes instables $l = 1$ et $l = 2$. Simulations de Scheck (communication privée).

Les travaux réalisés par ce groupe de Garching ont permis de mettre en évidence la présence du cycle advectif-acoustique et donc sa persistance malgré la forte non-adiabaticité de la situation étudiée. Pour des simulations où le développement de la convection est retardée, ils ont observé l'advection de vorticité de choc vers la surface de l'étoile à neutrons et de la propagation d'ondes acoustiques en sens inverse (figure 5.10). Le modèle présenté ici est le suivant (voir Annexe D pour plus de détails) : la proto-étoile à neutrons est en contraction sur une échelle de temps de 1s. La luminosité neutrino est nulle à la base de la surface de l'étoile, ainsi, les seuls neutrinos émis sont ceux dus au refroidissement du gaz accrété. Ces deux éléments permettent de retarder le développement de la convection. En intégrant plus d'ingrédients propres à la physique des Supernovae que les travaux adiabatiques de BMD03, ces simulations laissent entrevoir un possible rôle du cycle advectif-acoustique, l'évolution temporelle montrant des oscillations de la position du choc dominées par les modes $l = 1$ et $l = 2$ (figure 5.8).

5.3 Modélisation des Supernovae de type II

Motivée par la convergence de nombreux indices, notre étude du cycle advectif-acoustique dans le cadre des Supernovae se restreint à une configuration bien précise,

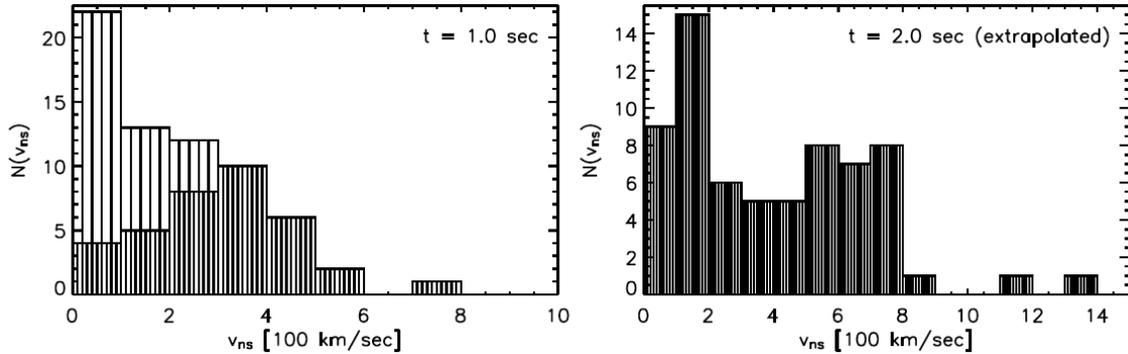


FIG. 5.9: Statistiques du nombre de cas en fonction de la vitesse finale de l'étoile à neutrons, de 66 simulations calculées pendant 1s après le rebond. A gauche, la zone foncée indique les cas où l'accélération de l'étoile à la fin de la simulation dépasse 150 km s^{-2} amenant à l'extrapolation de la figure de droite. Reproduction de la figure 5 de Janka et al. [59].

un moment précis dans la phase de l'explosion qui nous permet de nombreuses simplifications. Nous nous intéressons uniquement à la phase au cours de laquelle le choc est tombé en panne et est pratiquement à l'arrêt. Il se situe alors à 100-200 km du centre. On se retrouve alors dans la configuration d'école d'un choc d'accrétion pratiquement stationnaire, au dessus d'un objet compact (la proto-étoile à neutrons).

5.3.1 Rayons caractéristiques

Nous allons maintenant un peu plus détailler le flot que nous considérons et en donner les grandeurs physiques caractéristiques (figure 5.11).

Le choc sépare la matière pré-choc, non encore choquée, de la matière post-choc, déjà choquée. Dans la zone pré-choc, la matière est pratiquement en chute libre et froide [8]. Elle est supersonique ($\mathcal{M}_1 \sim 5$) et n'est donc pas influencée par ce qui se passe en dessous du choc. Composée essentiellement de noyaux, la matière pré-choc interagit peu avec les neutrinos et est donc grossièrement adiabatique. Avant d'entrer dans la zone post-choc, la matière est fortement décélérée par un choc en r_{sh} ($\sim 200 - 300 \text{ km}$). Elle y est également dissociée en nucléons libres. Le taux d'accrétion est supposé fixe et constant le long de la chute de la matière. Lors de sa chute dans la zone post-choc, la matière est chauffée par les neutrinos émis par le cœur en contraction. Les zones centrales de l'étoile sont opaques aux neutrinos jusqu'à ce qu'on appelle la "neutrino-sphère". A partir de cette sphère de rayon r_ν ($\sim 50 - 70 \text{ km}$), les neutrinos émis sont

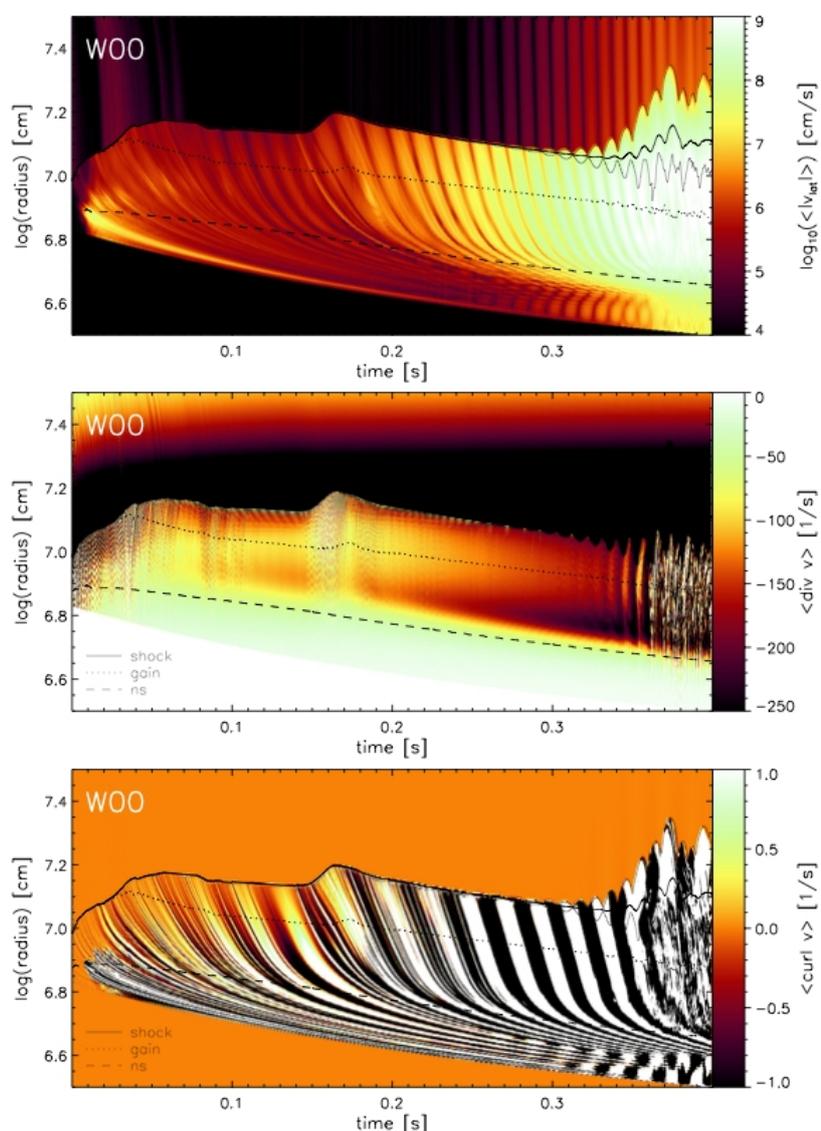


FIG. 5.10: Evolutions "temps-rayon" de la moyenne angulaire de la vitesse latérale (haut), de la divergence de la vitesse (milieu) et de la vorticité (bas) dans une simulation sans luminosité neutrino et pour un coeur en contraction. La ligne en gras représente la position moyenne du choc, les tirets la surface de l'étoile à neutrons et les pointillés le rayon de gain. Le temps $t = 0$ correspond à 16ms après le rebond. Simulations 2D de Scheck (communication privée).

supposés ne plus diffuser car la matière leur est devenue transparente. Le rayon de la neutrinosphère est calculé de sorte que l'épaisseur optique vaille $2/3$. L'émission des neutrinos a donc lieu à partir de ce rayon avec une certaine luminosité de l'ordre de $10^{52} \text{ergs s}^{-1}$. Les neutrinos sont créés en grande partie dans la zone compacte proche de la surface de l'étoile à neutrons située au rayon r_* ($\sim 80 - 100 \text{ km}$). Ce rayon de l'étoile à neutrons est défini par une décroissance brutale de la densité de plusieurs ordres de grandeur après la neutrinosphère. Des neutrinos sont également émis par la matière lors de sa chute. Cette émission refroidit la matière. Elle est faible au niveau du choc car la température n'y est pas assez élevée. Cependant, le chauffage des neutrinos et la compression géométrique du gaz augmentent la température du gaz au cours de sa chute. De part sa forte dépendance en température, le refroidissement devient dominant lorsque la température du flot est suffisamment élevée, à un rayon appelé rayon de gain r_{gain} ($\sim 100 - 150 \text{ km}$). Ce refroidissement, essentiellement dû aux réactions de captures électroniques, est en compétition avec le chauffage dû à l'absorption des neutrinos par les réactions inverses. Dans les simulations numériques, le rayon de gain n'apparaît que quelque temps après le rebond, le temps que les processus de refroidissement et de chauffage s'installent. Entre la neutrinosphère et le rayon de gain, le refroidissement par émission des neutrinos domine alors que dans la zone de gain entre le choc et le rayon de gain, c'est le chauffage par absorption des neutrinos qui domine.

Par souci de simplicité, nous ne traitons pas dans ce travail les changements possible de l'équation d'état décrivant le fluide. Ce choix, aussi bien pour la matière accrétante que pour le coeur compact, semble être très important et est un sujet très étudié. Nous limitons cependant notre modèle à une matière polytrophe avec un index γ de $4/3$ qui correspond à un gaz dominé par la pression de radiation ce qui est vraisemblablement le cas du gaz accrété dans cette configuration des Supernovae type II, du moins proche de la zone de gain.

5.3.2 Chauffage et refroidissement

Les processus de chauffage et refroidissement qui sont pris en compte dans la modélisation d'une Supernova sont ceux qui couplent la matière aux neutrinos. Nos calculs se limiteront généralement à l'implémentation du principal mécanisme de refroidissement correspondant à la capture électronique, mais nous allons ici faire une petite revue des mécanismes les plus souvent utilisés dans les simulations numériques.

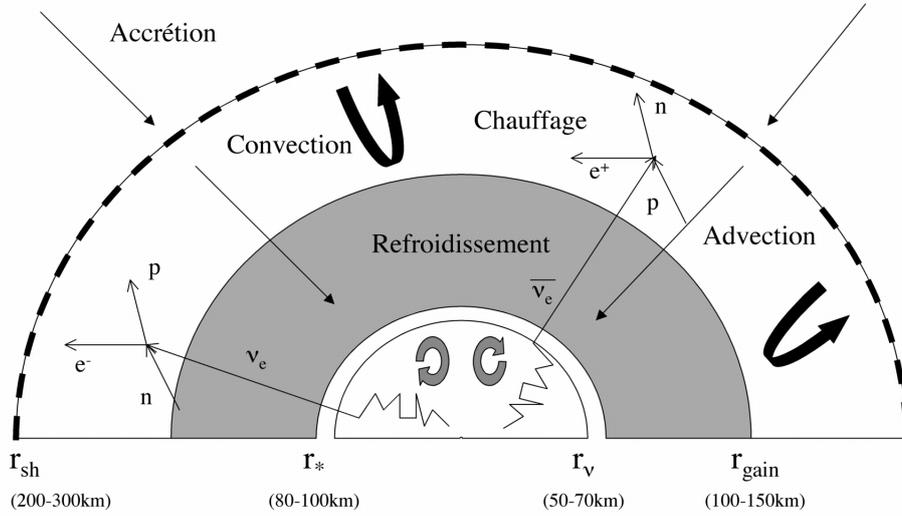
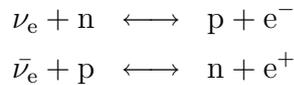


FIG. 5.11: Représentation schématique d'une Supernova de type II dans la phase où le choc est "en panne". En grisé, la zone de refroidissement par émission de neutrinos. Les tirets indiquent la dissociation des éléments au choc. Les deux types de convection sont représentés par les deux flèches de retournement.

Bien que nécessaire au développement de la convection derrière le choc, le chauffage ne sera, par la suite, pas pris en compte dans notre étude sauf lorsque cela est précisé. En effet, notre toy-model et nos calculs de modes d'oscillation n'intègrent pour le moment que la présence d'un refroidissement.

5.3.2.1 Capture électronique : absorption et émission

Principales réactions, ces deux processus correspondent à l'interaction entre nucléons et neutrinos :



En règle générale, les luminosités des neutrinos électroniques et des anti-neutrinos électroniques sont prises égales ainsi que leurs énergies moyennes et leurs potentiels chimiques. Ces simplifications permettent d'obtenir le taux de chauffage par absorption, c'est à dire par capture des neutrinos émis à la neutrinosphère :

$$Q_\nu^+ = 1,3 \cdot 10^5 \frac{\rho_9}{m_u} \frac{L_{\nu_e,52}}{r_7^2 \langle \mu_\nu \rangle} \left(\frac{kT_{\nu_e}}{4\text{MeV}} \right)^2 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{s}} \right] \quad (5.1)$$

où r_7 désigne la position radiale en 10^7 cm, ρ_9 désigne la densité du flot en 10^9 g/cm³, $L_{\nu_e,52}$ la luminosité à la neutrinosphère en 10^{52} erg/s et T_{ν_e} la température des neutrinos.

Le taux de refroidissement par émission d'un neutrino (ou anti-neutrino) lors de la capture d'un électron (positron) sur un proton (neutron) se calcule lui pour des électrons non dégénérés et vaut alors :

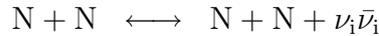
$$Q_{\nu}^{-} = 2,32 \cdot 10^5 \frac{\rho_9}{m_u} \left(\frac{kT}{2\text{MeV}} \right)^6 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\text{s}} \right] \quad (5.2)$$

où T désigne la température du flot.

Dans notre modélisation simple d'une Supernova gravitationnelle, seul ce processus de refroidissement est pris en compte. Il revient à choisir $\alpha = 6$ et $\beta = 1$ pour la fonction de refroidissement.

5.3.2.2 Bremsstrahlung, destruction de paires, diffusion

Le processus de Bremsstrahlung de deux nucléons conduit à deux nucléons plus la formation d'une paire neutrino/anti-neutrino :

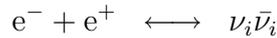


l'indice "i" pouvant désigner des neutrinos électroniques, muoniques ou tauiques.

Dans tous les cas, le taux de refroidissement de la matière par ce processus vaut pour chaque espèce :

$$Q_{\text{Brem}}^{-} \propto 10^{20} \rho_9^2 \left(\frac{kT}{1\text{MeV}} \right)^{5,5} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\text{s}} \right]$$

Le refroidissement par paire peut dans certains cas être très important car la probabilité de la réaction inverse chute rapidement avec l'inverse de la distance depuis la neutrinosphère. Cependant, il reste en général inférieur au refroidissement par capture.



Pour chaque espèce, on a :

$$Q_{\text{pair}}^{-} \propto 10^{24} \left(\frac{kT}{1\text{MeV}} \right)^9 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\text{s}} \right]$$

Enfin, la diffusion des neutrinos sur les électrons et positrons conduit aussi à un phénomène de chauffage du gaz.

5.4 Calcul des modes propres dans le cas Supernovae de type II

5.4.1 Premiers résultats

En modélisant simplement le flot lors de la phase d'arrêt du choc d'une Supernova, il est possible d'effectuer un calcul de stabilité linéaire, de la même manière que les calculs des parties précédentes. La vision précédente de la configuration du flot lors de la phase d'arrêt du choc dans une Supernovae est encore très complexe : la compétition chauffage-refroidissement et la diffusion des neutrinos y sont pris en compte. Notre étude, aussi bien numérique par la méthode de calcul des modes d'oscillation qu'analytique notamment par notre toy-model, se limite à l'évaluation de l'influence du refroidissement sur le cycle advectif-acoustique. On décide donc de négliger la zone de chauffage et la présence de la neutrinosphère dans le modèle de Supernova. Le rayon inférieur r_* peut alors s'apparenter à un des deux rayons caractéristiques de la Supernova, la surface de l'étoile à neutron ou la neutrinosphère, même si la physique décrite par notre modèle avec refroidissement uniquement est loin de celle qui a lieu a priori à l'intérieur de la neutrinosphère.

Nous allons réaliser des calculs de modes propres en utilisant le refroidissement par émission de neutrinos qui se caractérise par $\alpha = 6$ et $\beta = 1$, pour un index polytropique de $\gamma = 4/3$, soit un gaz dominé par la pression de dégénérescence des électrons ultra-relativistes. On se situe donc dans le cas $\beta - \alpha < 0$ (Eq 1.23-1.25) où le temps d'advection ne converge pas. On est donc dans un registre de refroidissement différent de celui du chapitre 4. On ne peut donc plus identifier grossièrement la valeur du temps d'advection et donc la durée du cycle advectif-acoustique τ à celle de $1/\omega_{sh} = (r_{sh} - r_*)/|v_{sh}|$.

On néglige la dissociation au choc. Le flot stationnaire considéré (figure 5.12), avec un nombre de Mach \mathcal{M}_1 pré-choc d'environ 5 (soit un nombre de Mach juste après le choc d'environ 0,4) décélère jusqu'à un nombre de Mach au niveau de r_* de l'ordre de 10^{-4} .

Notre toy-model (figure 5.13) nous indique que le choix des conditions limites pour les perturbations est important. Cependant, il nous montre que dans les deux cas étudiés, le mode radial devrait être stabilisé par la couche de refroidissement. Le cycle advectif-acoustique n'en est pas pour autant stable. Les modes non-radiaux sont in-

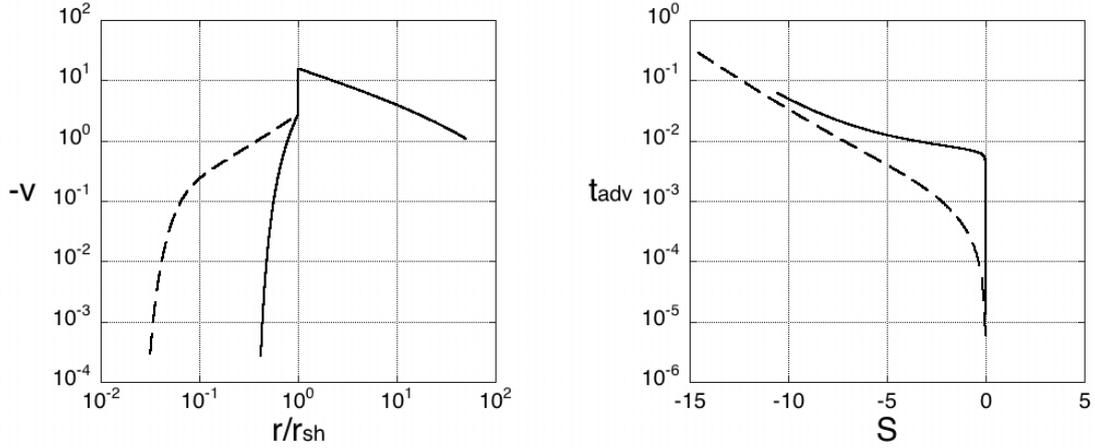


FIG. 5.12: Flots stationnaires de notre modèle de Supernova gravitationnelle, pour deux tailles de cavités : $r_{\text{sh}}/r_* \sim 2,375$ (trait plein) et $r_{\text{sh}}/r_* \sim 31,3$ (tirets). A gauche, la vitesse en fonction de la position, normalisée à la position du choc r_{sh} . A droite, le temps d'advection dans la zone post-choc en fonction de l'entropie. La dissociation au choc est nulle dans les deux cas.

stables. Si on extrapole grossièrement les résultats du toy-model au cas sphérique (Eq 4.17), l'instabilité sera dominée par deux l différents suivant la condition limite inférieure car deux valeurs différentes de μ_{in} conduisent à l'efficacité maximale. Ces deux valeurs restent cependant dans l'intervalle $2 < l < 3$. On prédit donc une instabilité toujours dominée par les modes de bas degré.

Afin de vérifier les prédictions du toy-model, nous avons calculé numériquement les modes propres d'oscillation du choc (voir Annexe B). Nous ne nous sommes pas limités au calcul des premiers harmoniques. Les fréquences réelles des modes ne sont pas normalisées par le temps d'advection car ce dernier ne converge pas. La normalisation se fera donc par rapport à ω_{sh} même si l'on sait que cette pulsation ne décrit pas le cycle advectif-acoustique.

Nous observons que le mode radial $l = 0$ est stable quelque soit l'intensité du refroidissement et ce, même à fréquences assez élevées (figure 5.14). Les variations du taux de croissance peuvent augmenter la valeur de ω_i mais le critère de stabilité $\omega_i > 0$ n'est jamais franchi. Aucun mode instable n'a été trouvé pour le mode radial $l = 0$. Par contre, un mode "moins stable" apparaît pour des cavités assez grandes. Ce mode correspond au mode fondamental pour les très grandes cavités et à des harmoniques plus élevés lorsque la cavité diminue.

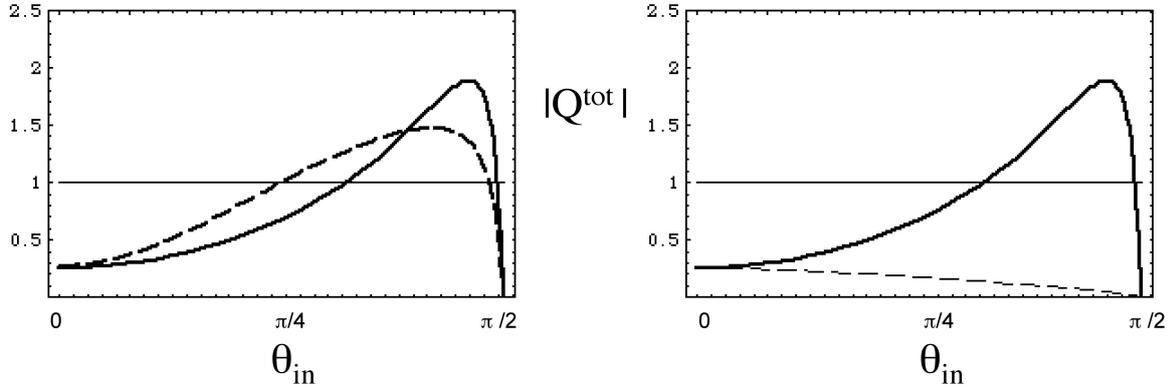


FIG. 5.13: Efficacité $|Q^{\text{tot}}|$ du cycle advectif-acoustique calculée dans le cadre du toy-model, en fonction de l'angle θ_{in} entre les perturbations et la direction du fluide, pour $\mathcal{M}_1 = 5$, $\mathcal{M}_{\text{out}} = 10^{-4}$, $\gamma = 4/3$, $\alpha = 6$, et $\beta = 1$. A gauche, pour un "mur" (trait plein) et un "aspirateur" (tirets). A droite, deux murs avec nos conditions limites au choc (trait plein) et celles de HC92 (tirets).

De la même manière que dans le chapitre précédent, les différences entre $l = 0$ et $l = 1$ n'apparaissent que pour de grandes cavités, c'est-à-dire des refroidissement faibles. En ce qui concerne les fréquences, on a vu que cela s'explique simplement en terme de longueur d'onde transverse. Pour les taux de croissance, on sait que pour de petites cavités les deux cycles entropique et tourbillonnaire-acoustique existent et sont liés aussi bien pour $l = 0$ que pour $l = 1$ alors que seul le cycle entropique-acoustique domine dans le cas du mode radial pour les grandes cavités.

Le fondamental du mode non-radial $l = 1$ est stable sur une gamme de taille de cavité assez grande. Cependant, on observe que, pour de très grandes cavités (soit un refroidissement d'intensité très faible), il devient instable (figure 5.14) de la même manière que le mode radial devenait moins stable. En suivant cette instabilité, on remarque que pour des cavités de taille plus faible, elle correspond à un harmonique de degré plus ou moins élevé, à une fréquence supérieure à celle du fondamental mais qui diminue avec l'augmentation de la taille de la cavité. Le mode instable $l = 1$ disparaît pour une cavité de l'ordre de $r_{\text{sh}}/r_* \sim 3, 5$.

5.4.2 Variations du taux de croissance

Un spectre des modes propres a également été calculé. Des variations du taux de croissance sont nettement visibles à hautes fréquences (figure 5.15). Du fait de l'échan-

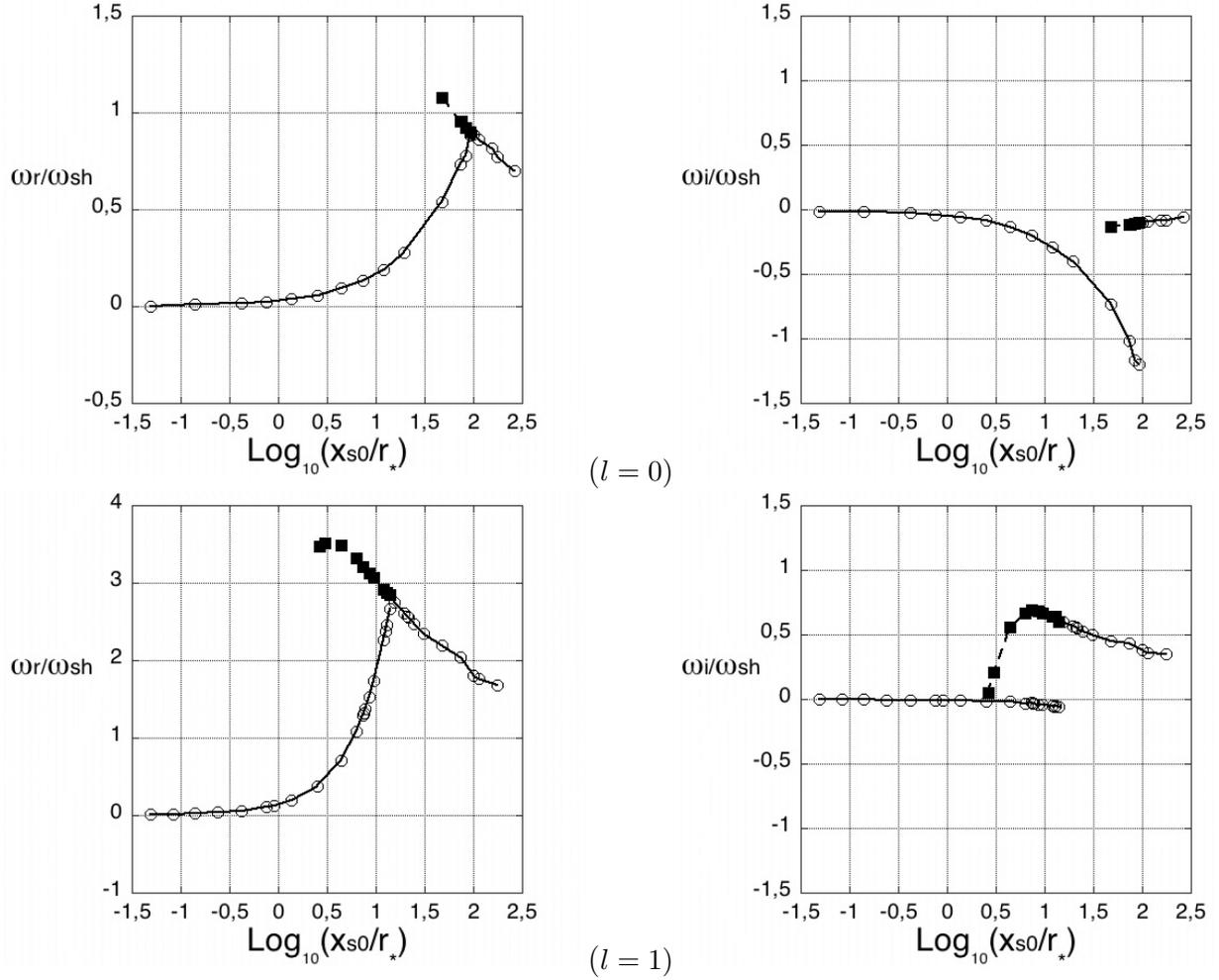


FIG. 5.14: Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i en unité de $\omega_{\text{sh}} = \frac{-v_{\text{sh}}}{r_{\text{sh}} - r_*}$ du mode fondamental radial $l = 0$ et du mode fondamental non-radial $l = 1$ pour $\mathcal{M}_1 = 5$, $\gamma = 4/3$, $\alpha = 6$ et $\beta = 1$ en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{\text{sh}} - r_*)/r_*$. On a suivi le mode $l = 1$ instable et le mode $l = 0$ le moins stable : Les carrés noirs correspondent à des harmoniques plus élevés.

tillonage numérique utilisé et du caractère spécifique du flot stationnaire pour les Supernovae, il est fort probable que les courbes précédentes soient incomplètes.

Pour le mode $l = 1$, des modes instables sont toujours présents à fréquences acoustiques ($\omega_r > \omega_{\text{son}}$) avec un taux de croissance comparable au fondamental.

Les spectres indiquent que les premiers modes sont les plus instables pour de grandes cavités. La simulation du groupe de Garching (figure 5.10) montre que les oscillations semblent provoquées par un harmonique assez bas puisqu'une perturbation de la vorticité au choc correspond pratiquement à l'arrivée de la perturbation de vorticité précédente au niveau de la surface de l'étoile. La vitesse du son étant très importante dans ces simulations, on s'attend à une propagation rapide du son de la surface au choc et donc une création de nouvelles perturbations de vorticité très rapidement après leur "conversion" en ondes sonores. La taille de la cavité dans ces simulations équivaut à un rapport r_{sh}/r_* de l'ordre de 2,3. Nos calculs prévoient alors que nous sommes proche du seuil de stabilité si on assimile notre rayon r_*    celui des simulations.

L'interprétation en terme de cycle des variations du taux de croissance (voir chapitre 4) est ici délicate : on semble en présence de deux courbes distinctes, une pour les valeurs maximale du taux de croissance, une pour les valeurs minimales. En effet, on ne trouve pas de points intermédiaires entre ces deux courbes au contraire du chapitre précédent où des oscillations étaient bien visibles. De plus, le rapport τ/t_{ac} est de l'ordre de plusieurs dizaines et ne correspond donc pas au nombre de modes entre deux pics, qui vaut entre 5 et 7, comme le veut cette interprétation.

On constate dans les simulations numériques (figure 5.10) que le feedback acoustique semble être créée avant la région où la vitesse s'annule. Nos calculs de fréquences caractéristiques ont pris en compte un rayon inférieur trop petit : le feedback acoustique doit être créée avant l'arrivée sur la surface de l'étoile. D'ailleurs, le temps d'advection étant infini, les perturbations advectées n'atteignent jamais vraiment cette surface. Ceci permet de comprendre la difficulté à interpréter les variations du taux de croissance en terme de cycle.

On évalue donc deux nouveaux rayons caractéristiques. Tout d'abord, un rayon en relation avec le refroidissement : on appelle r_c le rayon qui correspond au maximum de température. Ce rayon est bien défini si l'intensité du refroidissement n'est pas trop importante. On peut légitimement dire que le refroidissement domine totalement le flot dans la zone entre ce rayon et la surface de l'étoile. On définit également le rayon r_{cyc} tel que la fréquence $2\pi/\tau$ du cycle calculée jusqu'à ce rayon corresponde à la fréquence

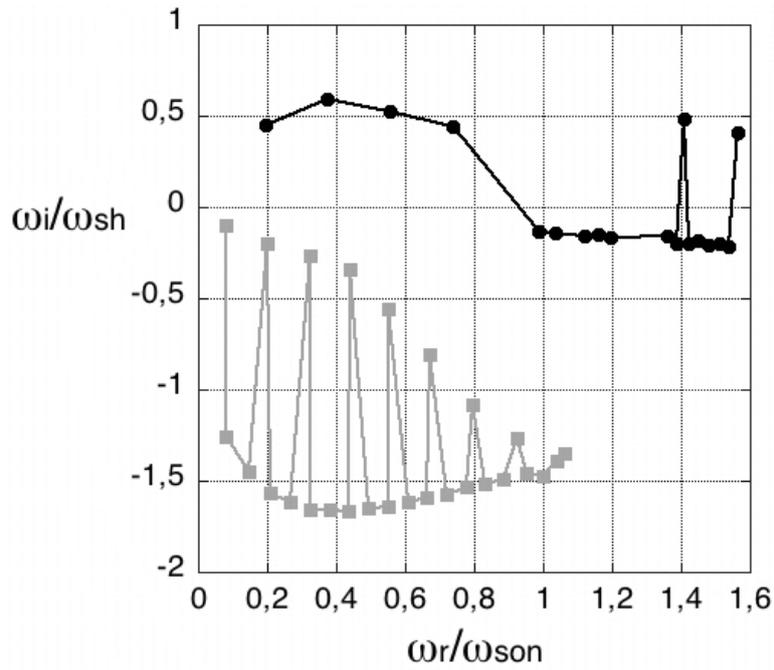


FIG. 5.15: Spectre des modes d'oscillation : Taux de croissance des perturbations ω_i en unité de ω_{sh} , en fonction de la fréquence ω_r en unité de $2\pi\omega_{son}$. Le mode sphérique $l = 0$ pour $r_{sh}/r_* \sim 101,1$ (gris) et non-radial $l = 1$ pour $r_{sh}/r_* \sim 48,66$ (noir) pour $\gamma = 4/3$, $\mathcal{M}_1 = 5$, $\alpha = 6$, $\beta = 1$.

ω_r du mode fondamental :

$$\frac{\omega_r}{2\pi} \int_{r_{\text{cyc}}}^{r_{\text{sh}}} \frac{dr}{|v|(1-\mathcal{M})} = 1 \quad (5.3)$$

Numériquement, la valeur de ce rayon est évidemment toujours comprise entre r_{sh} et r_* .

On constate que ce rayon r_{cyc} est toujours légèrement supérieur au rayon r_c (figure 5.16), il se situe dans une zone où le refroidissement ne domine pas mais commence à modifier notablement le flot du cas adiabatique. Au contraire, il est à noter que dans le cas des fréquences stables du mode fondamental $l = 1$, $r_{\text{cyc}} < r_c$, le couplage a donc lieu dans une zone très refroidie.

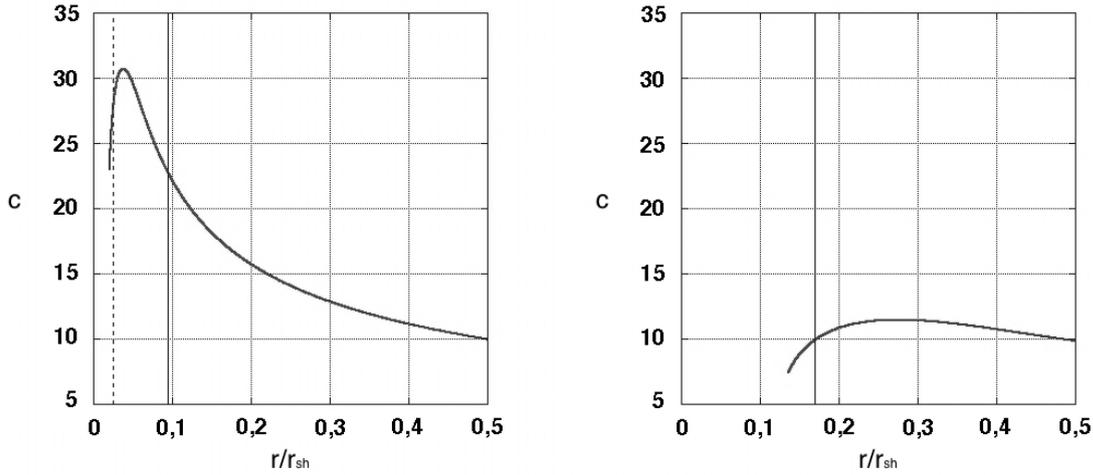


FIG. 5.16: Vitesse du son du flot stationnaire en fonction de la position pour $r_{\text{sh}}/r_* \sim 48,67$ (gauche) et $r_{\text{sh}}/r_* \sim 7,37$ (droite). Le trait vertical indique la valeur de r_{cyc} : trait plein pour le mode fondamental $l = 1$ et pointillés pour $l = 0$.

Si on revient aux variations du taux de croissance (figure 5.15, on constate que les modes dont le taux de croissance est maximum sont toujours à peu près à des fréquences multiples de la fréquence du mode fondamental, c'est à dire que la fréquences entre ces pics est de l'ordre de $2\pi/\tau^{r_{\text{cyc}}}$ où $\tau^{r_{\text{cyc}}}$ désigne le temps du cycle advectif-acoustique jusqu'au rayon r_{cyc} . La fréquences des modes dont le taux de croissance est plus faible est environ dix fois plus petite que cette fréquence. Elle correspond donc à $2\pi/\tau^{r_*}$.

Les variations du taux de croissance peuvent donc se voir comme deux phénomènes découplés :

(i)- les modes de taux de croissance élevé (stables et instables) sont caractérisés par le rayon r_{cyc} et on s'attend à voir une variation de leur taux sur une fréquence $\omega_{\text{son}}^{r_{\text{cyc}}} \sim 5 \times 2\pi / \tau^{r_{\text{cyc}}}$. La transition adiabatique-refroidissement est à l'origine des modes.

(ii)- les modes de taux de croissance faible (stables et instables) sont caractérisés par le rayon r_* et on s'attend à voir une variation de leur taux sur une fréquence $\omega_{\text{son}}^{r_*} \sim 35 \times 2\pi / \tau^{r_*}$. Dans ce cas, la condition limite inférieure est à l'origine des modes.

5.5 Conclusion

La modélisation des Supernovae de type II que nous avons présentée dans ce chapitre fait apparaître les particularités d'un tel flot. La fonction de refroidissement utilisée (ie : $\alpha = 6$, $\beta = 1$) ne facilite pas les calculs aussi bien du flot stationnaire que du flot perturbé : le temps d'advection jusqu'à la surface de l'étoile ne convergeant pas, le rayon r_* ne peut caractériser le cycle advectif-acoustique.

Notre toy-model prévoit une instabilité du cycle advectif-acoustique dominée par des modes non-radiaux de bas degré.

Nous avons évalué des modes propres d'oscillation et avons trouvé que :

1- le mode fondamental non-radial $l = 1$ dans le domaine du pseudo-son, est instable pour de grandes tailles de cavité ($r_{\text{sh}}/r_* > 3, 5$) alors que le mode radial $l = 0$ est stable.

2- les modes de fréquences supérieures présentent une variation du taux de croissance en fonction de la fréquence. Des modes acoustiques peuvent être instables avec un taux de croissance comparable au fondamental.

3- Une distinction entre modes à fort taux de croissance en relation avec le rayon r_{cyc} et modes à bas taux de croissance due à la condition limite inférieure en r_* , a été faite.

La comparaison avec les simulations numériques et la confiance que l'on a acquise dans les résultats obtenus pour des lois de refroidissement moins capricieuses au cha-

pitre 4, font que les résultats préliminaires de notre modèle de Supernova gravitationnelle sont plus qu'encourageant quant au rôle du cycle advectif-acoustique dans l'instabilité du mode $l = 1$.

Conclusion

Rappel des principaux résultats

La structure et la stabilité des chocs d'accrétion sur une surface solide (naine blanche, étoile à neutrons) a été étudiée par l'obtention de mode propres d'oscillations. Le cycle advectif-acoustique propose un mécanisme physique simple pour expliquer les instabilités calculés. Afin de mettre en avant le rôle du cycle, un modèle simplifié a été présenté. Ce modèle a permis de découper le cycle en quatre étapes et d'évaluer l'influence de chacune. Il permet également de prévoir les modifications apportées par divers ingrédients physiques : loi de refroidissement, conditions limites...

La structure du flot pour l'accrétion sur une surface solide est fortement influencée par le choix de la fonction de refroidissement ($\mathcal{L} \propto \rho^{\beta-\alpha} P^\alpha$) et notamment par la différence $\alpha - \beta$, ceci aussi bien au niveau de la structure stationnaire du flot que de l'étude des perturbations.

$\alpha - \beta < 0$:

Les modes fondamentaux d'oscillation obtenus montrent une tendance différente de la domination du mode radial [50].

- Quel que soit le refroidissement, le choc d'accrétion est instable à un mode $l = 1$ lorsque la taille de la cavité entre le choc et la surface de l'étoile est suffisamment grande, soit environ $r_{\text{sh}} > 2r_*$.
- Le mode $l = 1$ est toujours le plus instable des harmoniques sphériques. Le mode radial $l = 0$ peut être instable pour de grandes tailles de cavité, suivant les caractéristiques du flot. Les autres harmoniques sphériques sont en général stables ou beaucoup moins instables que les deux premiers.
- Les fréquences des modes fondamentaux se classent par ordre croissant de l'har-

nique sphérique considéré : $\omega_r^{l=0} < \omega_r^{l=1} < \omega_r^{l=2} \dots$. Le temps caractéristique de ces modes fondamentaux est proche du temps du cycle advectif-acoustique τ (Eq 1.1). Appuyées par l'étude simplifiée du toy-model, la domination du mode $l = 1$ par rapport au mode $l = 0$ se comprend par le cycle advectif-acoustique.

L'étude des modes d'oscillation à fréquences plus élevées a fait apparaître une variation périodique du taux de croissance de ces modes propres en fonction de leur fréquence d'oscillation. La caractérisation de cette oscillation fait apparaître le temps acoustique (Eq 4.18) comme temps caractéristique. Cette variation s'interprète en terme de modulation du cycle advectif-acoustique par le cycle purement acoustique. Des modes instables sont aussi bien trouvés dans le domaine du pseudo-son ($\omega_r < \omega_{\text{son}}$) que dans le domaine acoustique ($\omega_r > \omega_{\text{son}}$) mais les premiers sont les plus instables.

Le rôle principal donné au cycle advectif-acoustique dans l'interprétation de l'ensemble de ces résultats indique qu'il est le mécanisme physique responsable de l'instabilité.

$$\underline{\alpha = 6, \beta = 1} :$$

Confortés par ces résultats pour des refroidissements "classiques", nous avons réalisé des calculs dans le cas d'un modèle de Supernova gravitationnelle, lors de la phase où le choc est pratiquement stationnaire.

- Un mode fondamental $l = 1$ instable apparaît pour des cavités grandes $r_{\text{sh}} > 10r_*$ et a été suivi à fréquences plus élevées que la fréquence fondamentale jusqu'à sa disparition pour des cavités plus petites $r_{\text{sh}} > 3, 5r_*$.
- Le mode radial $l = 0$ est toujours stable.
- Des modes instables $l = 1$ ont également été trouvés dans le domaine acoustique. Leur taux de croissance est proche du premier mode instable trouvé.

Les variations du taux de croissance en fonction de la fréquence distinguent deux types de cycles advectif-acoustiques superposés qui se distinguent par la profondeur de leur région de couplage :

- Le premier est dominé par la transition adiabatique-refroidissement du flot qui n'existe que lorsque la cavité est suffisamment grande. Il correspond aux modes les moins stables (voire instables).
- Le second type est dominé par la condition limite inférieure au niveau de la surface de l'étoile. Son rayon caractéristique est r_* . Il correspond aux modes les plus stables.

L'interprétation en terme de cycle advectif-acoustique s'applique bien à ces deux régimes lorsque on les considère séparément avec leurs deux rayons caractéristiques respectifs.

Le cycle advectif-acoustique joue donc un rôle majeur dans la stabilité des chocs d'accrétion sur une surface solide. Dans tous les cas de figure, notre toy-model prévoit une instabilité de ce cycle qui sera dominée par des modes non-sphérique, de bas degré. Étudié dans la phase où le choc stagne lors des explosions de Supernovae de type II, il apparaît comme une explication simple et naturelle à une instabilité dominée par un mode non-sphérique $l = 1$. Les simulations numériques [96] semblent indiquer que ce mode $l = 1$ est probablement à l'origine des pulsar kicks.

Perspectives

La prise en compte de la gravité dans le toy-model semble un ajout nécessaire : les chapitres 3 et 4 ont montré que l'extrapolation des résultats du modèle à un cas sphérique où la gravité peut jouer un rôle important, devait se faire avec précaution.

Le rôle du cycle advectif-acoustique dans les Supernovae gravitationnelles semble prometteur notamment dans l'objectif de prédire et expliquer une instabilité du mode non-sphérique $l = 1$. Une collaboration mise en place avec le Max Planck Institut für Astrophysik de Garching devrait permettre de mettre en avant les signatures du cycle dans des simulations numériques complexes. Les premiers résultats de cette collaboration apparaissent d'ailleurs dans ce travail de thèse (chapitre 5 et Annexe D).

La dissociation au choc est un ajout qui amènera un degré de liberté supplémentaire dans notre étude. Son rôle dans les Supernovae gravitationnelles est essentielle. L'ajout de la dissociation dans notre toy-model et une étude des modes propres en présence de cette dissociation permettra d'affiner nos calculs en vue de comparaisons avec les simulations numériques.

D'autres ingrédients importants ont été négligés dans notre modélisation des Supernovae de type II. Ainsi, le chauffage par les neutrinos au niveau du choc est un élément crucial pour l'étude des Supernovae de type II (voir chapitre 5). Ce chauffage est à l'heure actuelle le candidat le plus prometteur pour raviver le choc lorsqu'il est dans sa phase "stationnaire" et permettre l'explosion [27, 16, 15]. Du point de vue hydro-

dynamique, ce chauffage implique l'apparition de phénomènes convectifs dans la zone de gain : un gradient d'entropie négatif se met naturellement en place derrière le choc. La convection va donc se développer derrière le choc. Par l'échange d'énergie qu'elle implique, la convection est considérée actuellement comme un ingrédient primordial pour la réalisation d'une explosion [58] et sa prise en compte s'avère donc nécessaire pour les travaux de simulations numériques. La convection a également été invoquée pour expliquer une instabilité du choc dominée par un mode non-sphérique $l = 1$ [23]. L'étude classique de la convection se fait cependant dans un milieu au repos. Or, dans le cas présent, l'advection de la matière est une composante importante du flot. Il n'est ainsi pas évident que le rôle de la convection dans l'instabilité soit si important car les perturbations sujettes à la convection seront advectées avec le flot et ne subiront donc l'influence de la convection que durant un temps fini. On assistera à une croissance transitoire des perturbations. Un travail sur l'influence de l'advection sur la convection est en cours [39].

Du point de vue de nos calculs, l'introduction d'une fonction de chauffage va modifier de nombreux points. Tant que l'advection n'est pas trop importante, on s'attendra à ce que la convection fasse apparaître, dans nos calculs de mode propres, des modes à fréquence nulle. L'instabilité de ces modes dépendra de l'intensité relative entre le chauffage et l'advection. On s'attend à une stabilisation de ces modes dans le cas d'une advection rapide. Le cycle advectif-acoustique devrait continuer à jouer un rôle important dans l'instabilité du flot mais une étude plus approfondie de la manière dont vont se coupler convection et cycle doit être faite. Il sera donc intéressant de rajouter une composante de chauffage dans le toy-model afin d'étudier son influence sur le cycle advectif-acoustique. Les simulations du groupe de Garching semblent confirmer la présence du cycle pendant le développement de la convection, puis une domination des mouvements non-linéaires de la convection.

Annexes

Normalisation de la fonction de refroidissement

A.1 Cas sphérique

Pour mieux caractériser la morphologie de notre flot stationnaire, une normalisation de l'intensité de la fonction de refroidissement est nécessaire. En effet, selon cette intensité, le flot peut être en grande partie adiabatique puis fortement refroidi dans une couche mince au-dessus de la surface de l'étoile. Il peut aussi être fortement refroidi dès le choc, sur une zone donc très étendue. Pour pouvoir distinguer ces diverses possibilités, on s'intéresse au rapport du temps de refroidissement $t_{\text{cool}} = \frac{P}{\mathcal{L}}$ et d'un temps caractéristique du flot $t_{\text{flow}} = \frac{r}{|v|}$ [50] :

$$\Phi(r) \equiv \frac{t_{\text{flow}}}{t_{\text{cool}}} = r \frac{dS}{dr} = \frac{A}{\gamma^{\alpha-1}} \left(\frac{\dot{M}}{4\pi} \right)^{\beta-1} \frac{c^{2(\alpha-1)}}{v^\beta} r^{3-2\beta}$$

Notre critère va s'appliquer au choc où l'on peut supposer que le flot est encore peu influencé par le refroidissement. On utilise donc les lois de puissance (Eq 1.79) de Bondi [13] pour décrire le flot. On obtient après avoir normalisé nos grandeurs :

$$\Phi(r) = K \frac{(\gamma - 1)^{\alpha-1 + \frac{\beta}{\gamma-1}}}{\phi_{\text{in}}^\beta} r^{4-\alpha - \frac{\beta}{\gamma-1}}$$

où K est relié à l'intensité du refroidissement A .

La frontière entre couche de refroidissement et refroidissement étendu se ramènera donc à une discussion sur la valeur de K . On définit K_{crit} tel que $\Phi(r_{\text{sh}}) = 1$, c'est-à-dire tel que le temps du refroidissement soit comparable au temps du flot dès le choc :

$$K_{\text{crit}} \equiv \frac{\phi_{\text{in}}^\beta}{(\gamma - 1)^{\alpha - 1 + \frac{\beta}{\gamma - 1}}} r_{\text{sh}}^{\alpha + \frac{\beta}{\gamma - 1} - 1} \quad (\text{A.1})$$

Ainsi, si K est inférieur ou supérieur à K_{crit} , le refroidissement se limitera à une couche au-dessus de la surface de l'étoile ou à une zone étendue.

A.2 Cas du toy-model

De la même manière, on normalise l'intensité du refroidissement dans le cas plan parallèle. Les lois de puissance de Bondi ne s'appliquent plus ici. La définition d'une fonction $\Phi(y)$, comparant les temps de refroidissement et d'advection, ne semble pas très appropriée à notre toy-model. On décide donc de raisonner directement sur le gradient de l'entropie qui est caractéristique des processus non-adiabatiques :

$$\nabla S = -\frac{\mathcal{L}}{Pv} = -Kv^{-\beta}c^{2(\alpha-1)}$$

On normalise donc K par la valeur K_{crit} tel que le gradient d'entropie ∇S vaut 1 en entrée de la zone de refroidissement :

$$K_{\text{crit}} = (-v_{\text{in}})^\beta (c_{\text{in}})^{-2(\alpha-1)}$$

Calculs numériques des modes propres d'oscillation

Une partie important de notre travail a consisté à calculer les modes propres d'oscillation de la position du choc d'accrétion au-dessus d'une surface solide, une étoile à neutrons, en prenant en compte le refroidissement du gaz par émission. La méthode de calcul a déjà brièvement été décrite et nous allons donc dans cette annexe la détailler un peu plus.

Afin de calculer les modes propres, il est dans un premier temps nécessaire de calculer le flot stationnaire. La donnée du nombre de Mach supersonique incident et de l'index adiabatique γ permet de calculer la position du choc, le taux d'accrétion étant fixé. Pour cela, on résout par dichotomie la conservation du nombre de Bernoulli dans la zone pré-choc adiabatique que l'on peut écrire après normalisation :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

Une fois la position du choc obtenue, on intègre les grandeurs du flot stationnaire à partir du choc après avoir défini la fonction de refroidissement. On définit la position de la surface de l'étoile par le rayon à partir duquel la vitesse est inférieure à une certaine fraction de sa valeur au choc. La surface de l'étoile est, comme il a déjà été dit, un point singulier : densité et entropie y divergent. De plus suivant l'intensité du refroidissement, la taille de la cavité entre le choc et la surface peut être grande et le refroidissement limité à une zone très fine au-dessus de cette surface. La résolution est donc apparue comme une donnée très importante pour le bon traitement du flot

stationnaire et son utilisation pour le calcul des perturbations. Afin de bien résoudre la zone de refroidissement, la variable d'intégration de nos équations n'est pas le rayon mais le logarithme du nombre de Mach (figure B.1).

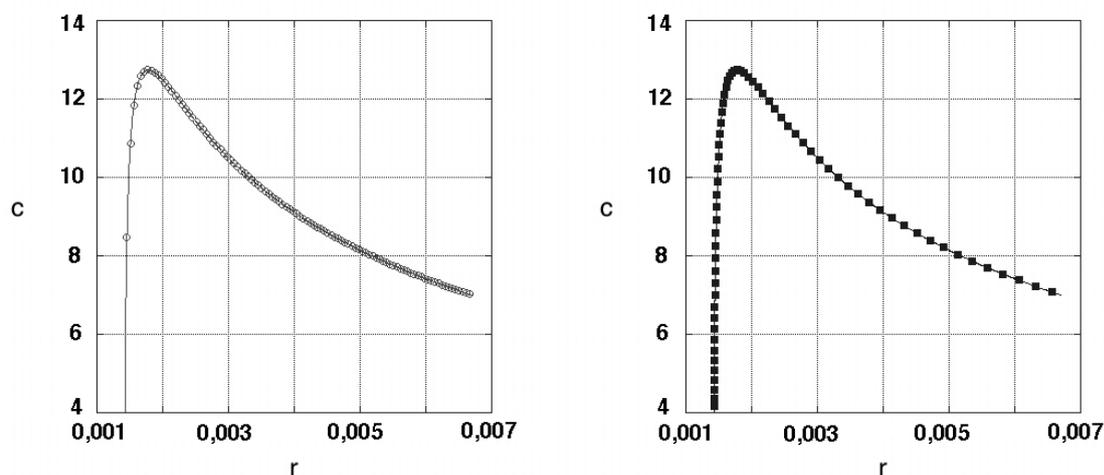


FIG. B.1: Vitesses du son en fonction du rayon pour $\gamma = 4/3$, $M_1 = 5$, $\alpha = \beta = 5/2$ et $K = 10^{-3}$. A droite, la courbe obtenu par intégration sur le rayon, à gauche celle par intégration sur le logarithme du nombre de Mach. Dans les deux cas la résolution est de 2000 points dont on a représenté 100 points. On remarque que l'utilisation du nombre de Mach comme variable permet une meilleure résolution dans la zone de refroidissement.

Une fois le flot stationnaire calculé, on peut évaluer les valeurs des perturbations à la surface de l'étoile : connaissant leurs valeurs au choc, à pulsation ω fixée, on intègre les équations jusqu'à la surface de l'étoile grâce au système linéaire suivant, obtenu à partir des équations 1.34-1.37 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} = & \frac{f}{c^2(1-\mathcal{M}^2)} \left[\frac{i\omega}{v} - \frac{iL^2c^2}{\omega vr^2} (1-\mathcal{M}^2) + \dot{S}\{\beta + (\gamma-1)(\alpha-1)\} \right] \\ & - \frac{g}{(1-\mathcal{M}^2)} \left[\frac{i\omega}{v} \mathcal{M}^2 + \dot{S}\{1 + \mathcal{M}^2(\beta - \alpha + \gamma(\alpha-1))\} \right] \\ & + \delta S(1-\beta)\nabla S + i\frac{\delta K}{\omega vr^2} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} = & \frac{f}{c^2(1-\mathcal{M}^2)} \left[-i\omega v + \frac{c^2}{\gamma} \dot{S}\{\beta + \alpha(\gamma-1)\} \right] \\ & + \frac{g}{(1-\mathcal{M}^2)} \left[i\omega v - \frac{c^2}{\gamma} \dot{S}\{1 + \mathcal{M}^2(\beta - 1 + \alpha(\gamma-1))\} \right] \\ & + \delta S \frac{c^2}{\gamma} \left[\frac{i\omega}{v} + \nabla S(1-\beta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta S}{\partial r} = & \frac{f}{c^2(1-\mathcal{M}^2)} \nabla S \{\beta + (\gamma-1)(\alpha-1)\} \\ & - \frac{g}{(1-\mathcal{M}^2)} \nabla S \{1 + \mathcal{M}^2(\beta - \alpha + \gamma(\alpha-1))\} \\ & + \delta S \left(\frac{i\omega}{v} + (1-\beta)\nabla S \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta K}{\partial r} = & \frac{f}{\gamma(1-\mathcal{M}^2)} L^2 \nabla S \{\beta + \alpha(\gamma-1)\} \\ & - \frac{g}{(1-\mathcal{M}^2)} L^2 c^2 \frac{\nabla S}{\gamma} \{1 + \mathcal{M}^2(\beta - 1 + \alpha(\gamma-1))\} \\ & + \delta S \frac{c^2}{\gamma} L^2 \nabla S(1-\beta) + \frac{i\omega}{v} \delta K \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Il est nécessaire de s'assurer que les ondes advectées sont bien résolues numériquement de par leur importance dans le cycle advectif-acoustique. A cette fin, le pas d'intégration des perturbations peut varier et s'adapte notamment à la forte diminution de vitesse dans la zone de refroidissement.

Les modes propres se déterminent par l'annulation à la surface de l'étoile de la perturbation de vitesse $\delta v/v$. Le problème aux valeurs propres se résume donc à trouver les solutions complexes d'une équation de la forme $f(\omega) = 0$. Pour cela, plusieurs méthodes ont été testées. L'une d'entre elles consistait à calculer les racines de notre fonction f par une méthode de Newton. La convergence de cette méthode itérative

n'est cependant pas assurée près d'asymptotes horizontales ou d'extremums locaux. Elle s'est avérée inefficace pour nos calculs. La présence d'extremums locaux n'a pas non plus facilité l'usage d'une méthode proche de celle utilisée par Saxton [95] où l'on recherche les maximums de l'inverse de la perturbation de vitesse dans le plan complexe (figure B.2), méthode qui de plus nécessite une bonne discrétisation du plan complexe. Finalement, notre méthode est la suivante : on calcule, dans le plan complexe, les courbes correspondant respectivement à l'annulation de la partie réelle et de la partie imaginaire de la perturbation de vitesse puis on cherche les intersections de ces deux courbes (figure B.3).

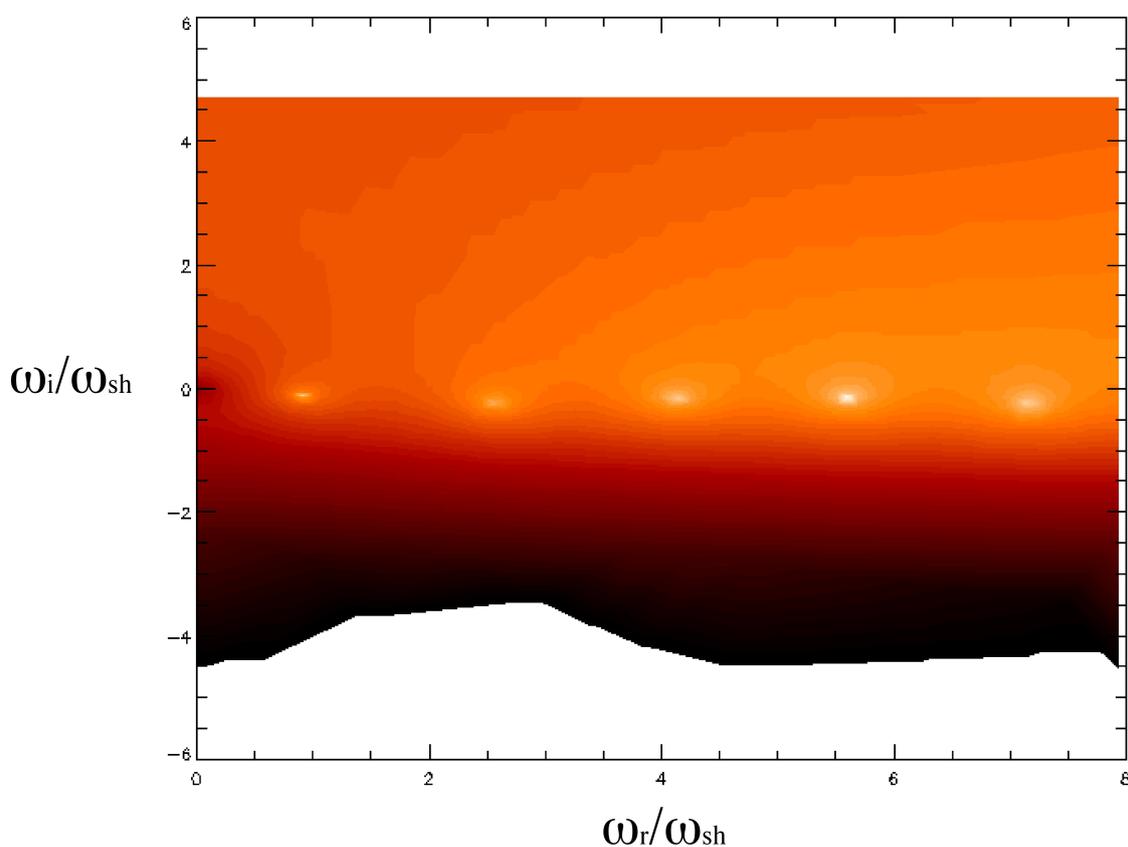


FIG. B.2: Inverse de la perturbation de vitesse à la surface de l'étoile en fonction de la pulsation complexe (abscisse : ω_r , ordonnée : ω_i). Les pics blancs correspondent à des maximums.

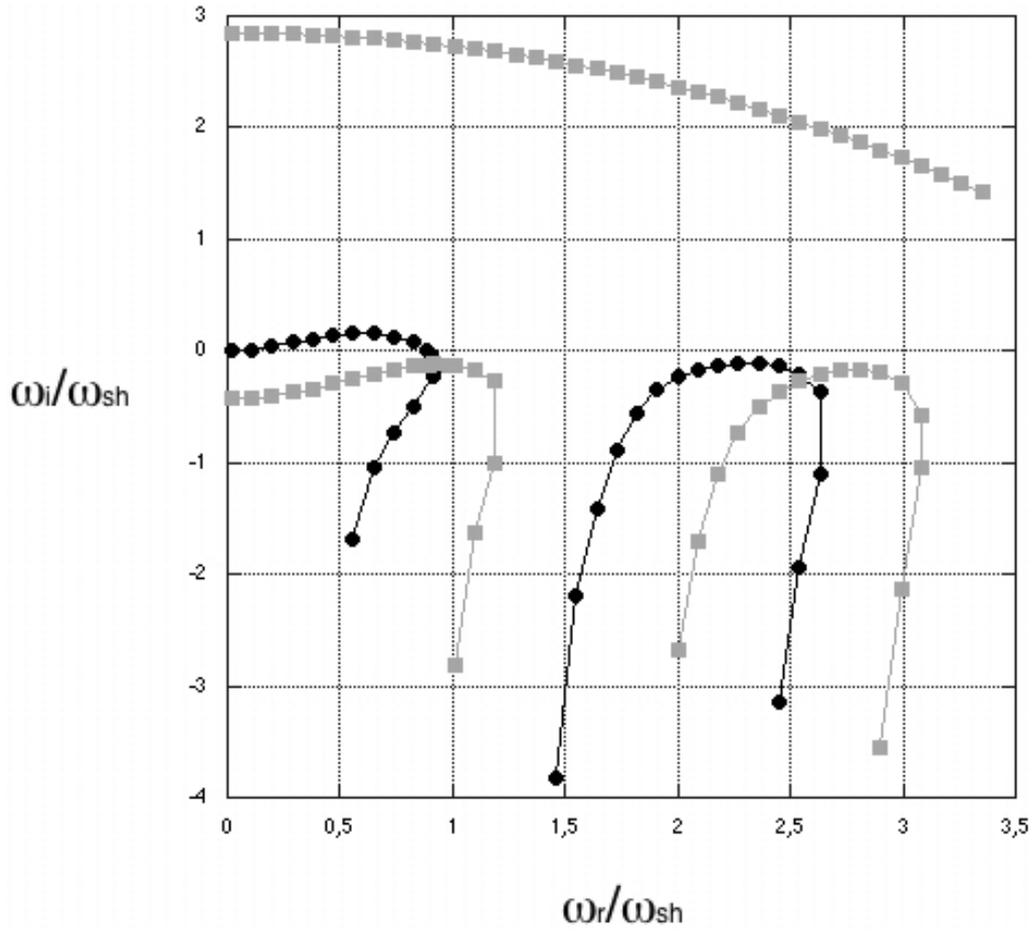


FIG. B.3: Courbes $\text{Re}(\delta v/v) = 0$ (ronds noirs) et $\text{Im}(\delta v/v) = 0$ (carrés gris) pour l'harmonique sphérique radial $l = 0$ pour un flot caractérisé par $\gamma = 4/3$, $M_1 = 5$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$ et $K = 0,005$. Les pulsations sont normalisées à ω_{sh} . Les deux intersections des deux courbes correspondent au mode fondamental et au premier harmonique.

Toy-model

C.1 Exemple de calcul

Nous présentons ici un exemple de calcul des coefficients $Q_{i,\text{cool}}^j$. Nous allons évaluer le coefficient $Q_{S,\text{cool}}^S = f_{\text{out}}^S / f_{\text{in}}^S$, c'est-à-dire la perturbation d'entropie en sortie de zone refroidie créée par une onde d'entropie incidente (figure C.1).

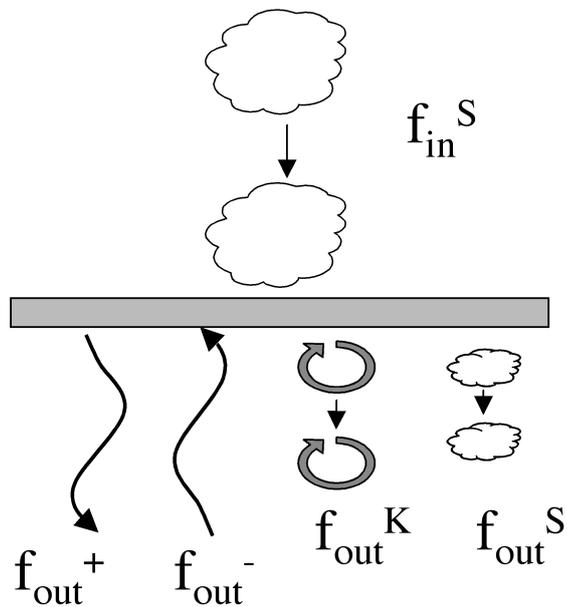


FIG. C.1: Schéma d'une onde d'entropie f_{in}^S passant par la zone refroidie.

Avant la zone de refroidie, on ne considère qu'une perturbation d'entropie donc $f_{\text{in}}^- = f_{\text{in}}^+ = f_{\text{in}}^K = 0$. On peut ainsi calculer les constantes de notre problème (Eq 3.26-3.28). En utilisant les solutions de l'équation différentielle sur f (Eq 3.36) et les valeurs de ces constantes, on détermine f_{out}^S grâce l'équation permettant de calculer la perturbation d'entropie (Eq 3.37).

On obtient alors en n'en conservant que les termes d'ordre le plus élevé en \mathcal{M}_{out} et \mathcal{M}_{in} :

$$Q_{S,\text{cool}}^S \sim \frac{\left(\frac{\mathcal{M}_{\text{out}}}{\mathcal{M}_{\text{in}}}\right)^{2(\alpha-\beta)} [1 - \mu_{\text{in}}^2 + (\alpha - \beta)(\gamma - 1)] - \left(\frac{\mathcal{M}_{\text{out}}}{\mathcal{M}_{\text{in}}}\right)^2 (\gamma - \mu_{\text{in}}^2)}{(\gamma - 1)(\alpha - \beta - 1)} \quad (\text{C.1})$$

On retrouve bien la discussion sur la valeur de $\alpha - \beta - 1$ présentée dans le chapitre 3.

C.2 De l'aspirateur au mur

La condition limite de "mur" peut s'interpréter comme une condition "aspirateur" à laquelle on ajoute une condition de réflexion dans la zone adiabatique après le refroidissement (figure C.2). Cette réflexion est choisie de manière à annuler la perturbation de vitesse parallèle au flot et implique l'existence d'une onde acoustique réfléchie f^- . Afin de prendre en compte cette onde réfléchie arrivant sur la zone de refroidissement, une perturbation acoustique incidente supplémentaire doit être ajoutée.

En terme d'efficacité de conversion, ce passage du "mur" à l'"aspirateur" s'écrit par la prise en compte d'un terme correctif :

$$\begin{aligned} Q_{\text{mur}} &= Q_{\text{aspi}} + Q_{\text{corr}} \\ Q_{\text{corr}} &= T_1 \frac{Q_K X_K + Q_S X_S + RT_0}{1 - RR_1 - Q_K Y_K - Q_S Y_S} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

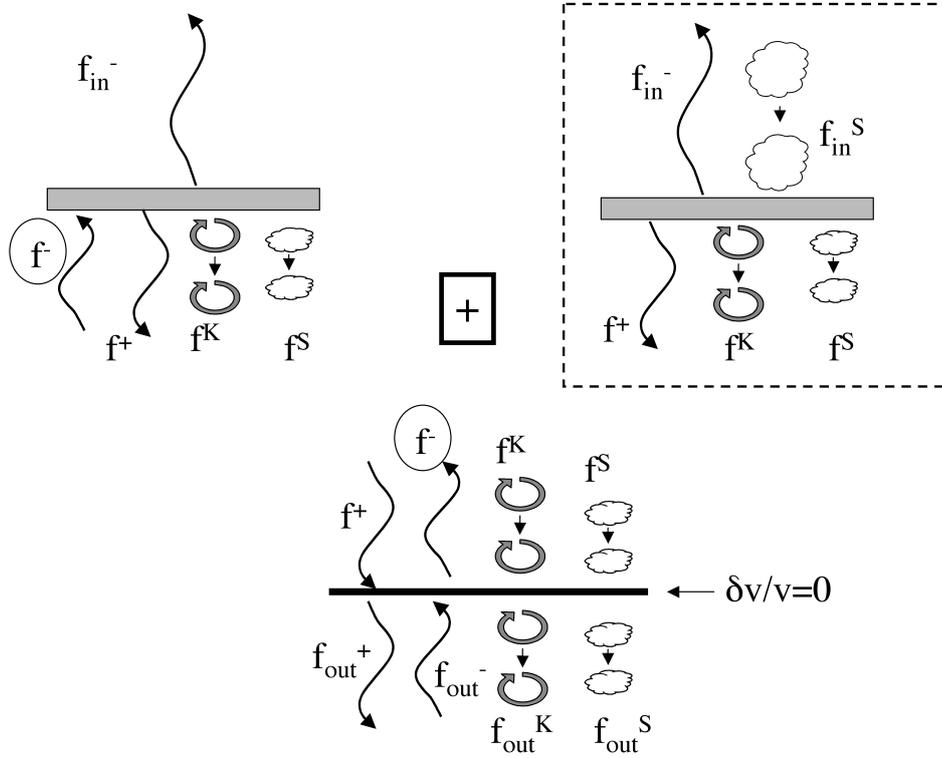


FIG. C.2: Construction du "mur" à partir de l'"aspirateur" identifié par le cadre en pointillés, d'une réflexion et d'une onde acoustique incidente.

Les divers coefficients sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 f^- &= Rf^+ + Q_K f^K + Q_S f^S \\
 f_{in}^- &= \frac{1}{Q_{-,cool}^-} f^- + Q_{aspi} f_{in}^S \\
 f^+ &= \frac{Q_{-,cool}^+}{Q_{-,cool}^-} f^- + T_0 f_{in}^S \\
 f^K &= \frac{Q_{-,cool}^K}{Q_{-,cool}^-} f^- + X_K f_{in}^S \\
 f^S &= \frac{Q_{-,cool}^S}{Q_{-,cool}^-} f^- + X_S f_{in}^S
 \end{aligned}$$

La première égalité traduit la production d'onde acoustique f^- par la réflexion de l'onde acoustique f^+ et par l'advection d'onde d'entropie et de vorticité en vue d'annuler la perturbation de vitesse pour obtenir le "mur". T_0 , X_S et X_K correspondent respectivement à l'onde acoustique f^+ , l'onde d'entropie f^S et la perturbation f^K crées par

l'aspirateur.

On peut donc comparer les feedbacks engendrés par les deux conditions limites. Il suffit pour cela, de comparer le terme Q_{aspi} au terme correctif Q_{corr} permettant d'obtenir Q_{mur} . En exprimant les divers coefficients, ce sont les termes dominants de ces efficacités que l'on compare. Le terme correctif permettant d'obtenir le "mur", Q_{corr} , dépend essentiellement du terme T_1 :

$$Q_{\text{aspi}} \approx \frac{A + Be^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}}{C + De^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}} \propto 1 \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{Q_K X_K + Q_S X_S + RT_0}{1 - RR_1 - Q_K Y_K - Q_S Y_S} \approx e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\Delta S} \frac{E + Fe^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1)\Delta S}}{G + He^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1)\Delta S}} \propto e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\Delta S} \quad (\text{C.4})$$

$$T_1 \approx \frac{1}{e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\Delta S}} \frac{I}{J + Ke^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}} \quad (\text{C.5})$$

où A, B, \dots, K dépendent uniquement du flot incident et de la fonction de refroidissement. Ils ne dépendent pas du nombre de Mach en sortie, et sont donc, par conséquent, finis.

Q_{aspi} est donc un nombre de l'ordre de l'unité (Eq C.3), quel que soit le refroidissement utilisé. Le terme correctif dépend par contre de la fonction de refroidissement utilisé. Si $\alpha - \beta < 1/2$, Q_{corr} est donc d'un ordre inférieur à Q_{aspi} (Eq C.4, C.5), donc négligeable. Dans le cas où $\alpha - \beta > 1/2$, T_1 diverge (Eq C.5). Le terme correctif Q_{corr} est alors du même ordre unitaire que Q_{aspi} donc important.

La correction pour passer du "mur" à "l'aspirateur" est donc négligeable dans le cas $\alpha - \beta < 1/2$ mais elle sera importante dans le cas $\alpha - \beta > 1/2$.

La formule liant le "mur" à "l'aspirateur" est toujours valable dans le cas de la marche adiabatique. Cependant, dans le cas adiabatique, δK est conservé. Or il n'y a pas de δK incident car il est nul au choc. Donc f^K est nulle partout. Les termes Q_K , X_K et Y_K sont nuls.

Puisqu'il y a également conservation de δS lors de la traversée de la marche, Le terme Y_S est nul. La formule est donc plus simple :

$$Q_{\text{mur}} = Q_{\text{aspi}} + T_1 \frac{Q_S X_S + RT_0}{1 - RR_1} \quad (\text{C.6})$$

L'étude du cas adiabatique montre que Q_{aspi} se comporte comme c_{out}^2 et qu'il en est de même pour l'ensemble du terme correctif. On constate que le terme correctif est

toujours de signe négatif et ce à cause du signe négatif de T_0 . Au contraire, Q_{aspi} est toujours de signe positif. La correction à apporter à l'”aspirateur” est donc toujours une diminution en termes d'efficacité.

C.3 Le cycle purement acoustique

On évalue l'efficacité du cycle purement acoustique de la même manière que l'on évalue celle du cycle advectif-acoustique en modifiant les perturbations prises en compte entre le choc et la zone refroidie : dans le cas du cycle acoustique, on se limite aux seules ondes sonores (figure C.3).

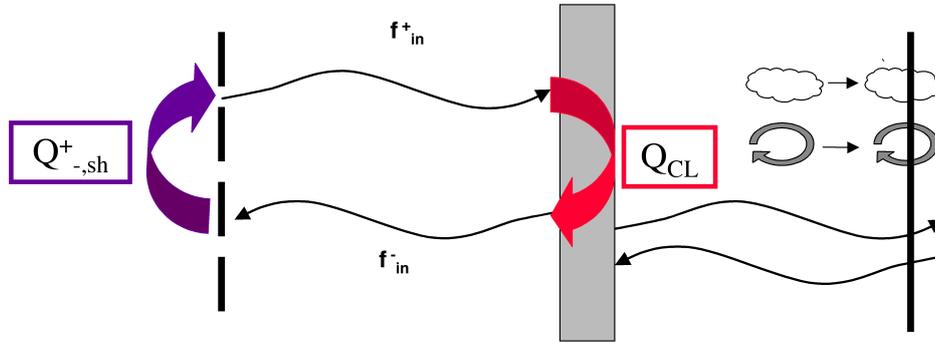


FIG. C.3: Le cycle purement acoustique.

L'efficacité du cycle acoustique s'écrit comme le produit :

$$Q_{\text{CL}}^{ac} \equiv (f^+/f^-)_{\text{sh}}(f^-/f^+)_{\text{CL}} \quad (\text{C.7})$$

On calcule cette efficacité à l'aide des coefficients $Q_{i,\text{cool}}^j$ et du coefficient de conversion au choc $Q_{-,sh}^+$ qui correspond à la réflexion des ondes sonores. De la même manière que pour le cycle advectif-acoustique, on obtient les formules :

Configuration du flot : choc- $(f_{\text{in}}^-, f_{\text{in}}^+)$ -refroidissement-aspirateur $(f_{\text{out}}^+, f_{\text{out}}^{S,K})$

$$Q_{\text{aspi}}^{ac} = \frac{A_5 + B_5 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}}{C_5 + D_5 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1/2)\Delta S}} \quad (\text{C.8})$$

$$\sim \begin{cases} -1 + \frac{2[\beta+(\alpha-1)(\gamma-1)]\mathcal{M}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} - 2\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}} \left(1 - \frac{4}{1-\gamma+2\mu_{\text{in}}^2}\right) & \text{pour } \alpha - \beta < 1/2 \\ 1 + 4\mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}} \left(1 - \frac{2}{1-\gamma+2\mu_{\text{in}}^2}\right) & \text{pour } \alpha - \beta > 1/2 \end{cases}$$

Configuration du flot : choc- $(f_{\text{in}}^-, f_{\text{in}}^+)$ -refroidissement-mur $(f_{\text{out}}^\pm, f_{\text{out}}^{S,K})$

$$Q_{\text{mur}}^{ac} = \frac{A_6 + B_6 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1)\Delta S}}{C_6 + D_6 e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}(\alpha-\beta-1)\Delta S}} \quad (\text{C.9})$$

$$\sim \begin{cases} -1 + \frac{2[\beta+(\alpha-1)(\gamma-1)]\mathcal{M}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} - 2\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}} \left(1 - \frac{4}{1-\gamma+2\mu_{\text{in}}^2}\right) & \text{pour } \alpha - \beta < 1 \\ -1 + \frac{2(\alpha-1)\gamma\mathcal{M}_{\text{in}}}{(\alpha-\beta)\mu_{\text{in}}} - 2\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}} \left(1 - \frac{4}{1-\gamma+2\mu_{\text{in}}^2}\right) & \text{pour } \alpha - \beta > 1 \end{cases}$$

Les coefficients A_i , B_i , C_i et D_i ne dépendent que des caractéristiques du flot stationnaire : α , β , γ et \mathcal{M}_{in} , et du nombre d'onde transverse k_x par l'intermédiaire de μ_{in} . L'hypothèse \mathcal{M}_{in} permet de les simplifier et d'obtenir les formules en accolades, à manipuler avec précaution. Les figures sont réalisées à partir des formules non simplifiées, où l'hypothèse \mathcal{M}_{in} petit n'est pas utilisée.

Le calcul montre que l'efficacité du cycle acoustique est moins importante que celle du cycle advectif-acoustique (figure C.4) pour des fonctions de refroidissement différentes et dans les deux cas de conditions limites pour les perturbations. Le cycle acoustique apparaît de plus toujours stable au contraire du cycle advectif-acoustique.

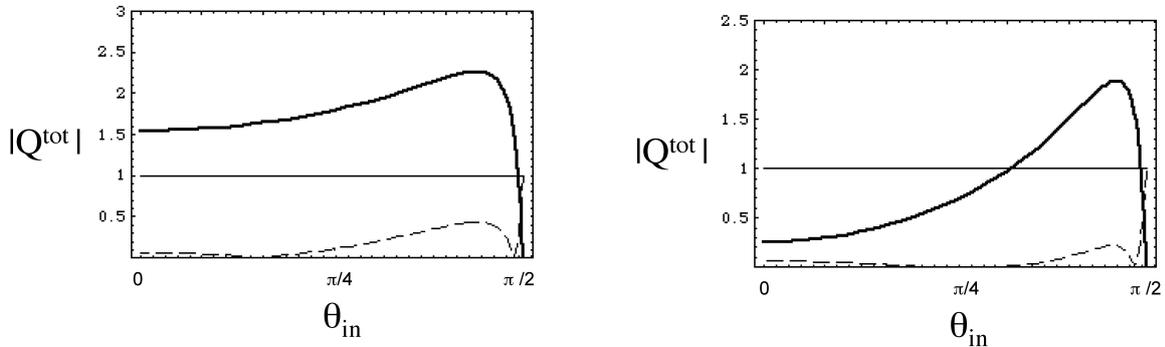


FIG. C.4: Efficacité totale $|Q^{\text{tot}}|$ en fonction de l'angle θ_{in} , du cycle advectif-acoustique (trait plein) et du cycle purement acoustique (tirets), calculées pour $\mathcal{M}_1 = 5$, $\mathcal{M}_{\text{out}} = 10^{-4}$. Calcul dans le cas d'un "aspirateur" avec $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$ et $\gamma = 5/3$ à gauche. Calcul pour un "mur" avec $\alpha = 6$, $\beta = 1$ et $\gamma = 4/3$ à droite.

Simulations numériques simplifiées de Supernovae gravitationnelles

Des simulations bidimensionnelles mettant en avant le rôle des instabilités hydrodynamiques, notamment la convection, lors de l’explosion d’une Supernova gravitationnelle, ont été réalisées par un groupe de Garching sous la direction de Thomas Janka. Les résultats de ces simulations [17, 96, 59] ont mis en avant le rôle joué par la convection dans la résurrection du choc. Elles ont également montré que les asymétries résultantes du développement de ces instabilités expliquent naturellement, sans faire appel à une physique exotique, l’impulsion donnée aux pulsars, impulsion nécessaire pour expliquer les pulsar kicks. Une collaboration financée par EGIDE a été mise en place avec ce groupe afin d’étudier plus précisément le rôle joué par le cycle advectif-acoustique dans ces simulations. Dans cette annexe, nous présentons donc un modèle utilisé pour réaliser ses simulations [96] qui donne les résultats présentés dans ce manuscrit.

Les simulations sont bidimensionnelles. Afin de permettre le développement de modes instables à petits nombres l , l’intervalle angulaire couvert est de 180° (800 zones radiales, 360 zones angulaires) et non de 90° comme dans de nombreuses simulations. Les calculs sont démarrés $\sim 15 - 20$ ms après le rebond. A cette fin, le modèle initial est obtenu à partir l’évolution de modèles post-effondrement calculés préalablement. Le modèle W00 est un modèle monodimensionnel résultant du progéniteur s15s7b2 de Woosley et Weaver [102]. Il est évolué jusqu’à environ 16ms par un code numérique complexe [17] faisant notamment appel à un traitement détaillé du transport des neu-

trinos. Les simulations sont, elles, réalisées avec un traitement approximé du transport des neutrinos qui reproduit cependant les propriétés basiques des calculs plus élaborés. Ce transport simplifié permet un gain de temps de calcul conséquent.

La description de l'intérieur de la proto-étoile à neutrons est encore très incertaine du fait de notre pauvre connaissance de la physique dans un milieu si dense. Le coeur de la proto-étoile à neutrons est donc remplacé dans ces simulations par une sphère gravitante équivalente à une masse de $1,1 M_{\odot}$ qui constitue la frontière interne de la grille de simulation, située en dessous de la neutrinosphère. Afin de rendre compte de la contraction du coeur, une contraction est imposée à la sphère avec un temps caractéristique t_{ib} . Le rayon R_{ib} du coeur varie donc en fonction du temps :

$$R_{ib} = \frac{R_{ib}^i}{1 + (1 - e^{-t/t_{ib}})(R_{ib}^i/R_{ib}^f - 1)}$$

Le modèle W00 correspond à $R_{ib}^f=15\text{km}$ et $t_{ib}=1\text{s}$, R_{ib}^i est de l'ordre de 65km .

Afin de retarder le développement de la convection, aucune luminosité neutronique n'est imposée à la condition limite interne de la simulation. Ainsi, les seuls neutrinos émis sont ceux qui résultent du refroidissement de la matière accrétée. Le chauffage par les neutrinos est donc considérablement réduit, du moins dans les premiers instants de la simulation, ce qui retarde la mise en place d'une forte convection et de fortes non-linéarités dans le mouvement du gaz. Le cycle advectif-acoustique devrait lui être peu perturbé par cette faible luminosité, du moins de manière moins importante que la convection.

CHAPITRE E

Publication référée

Une publication en deuxième auteur a été acceptée et publiée dans le journal *Astronomy and Astrophysics*, volume 435, Mai 2005, pages 397-411. Cet article est le fruit d'une collaboration financée par une bourse EGIDE entre Thierry Foglizzo et moi-même en ce qui concerne le Service d'Astrophysique du CEA, et Maximilian Ruffert de l'université d'Edimbourg.

Cette publication concerne l'instabilité du flot de Bondi-Hoyle-Lyttleton. Elle propose une revue des simulations numériques de ce flot d'accrétion ainsi que des mécanismes proposés jusqu'alors pour expliquer son instabilité. Devant l'échec de ces mécanismes, elle met en avant le rôle du cycle advectif-acoustique.

A&A 435, 397–411 (2005)
 DOI: 10.1051/0004-6361:20042201
 © ESO 2005

**Astronomy
&
Astrophysics**

A fresh look at the unstable simulations of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion

T. Foglizzo¹, P. Galletti¹, and M. Ruffert²

¹ Service d'Astrophysique, CEA/DSM/DAPNIA, CEA-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France
 e-mail: foglizzo@cea.fr

² School of Mathematics, University of Edinburgh, Edinburgh EH9 3JZ, Scotland

Received 18 October 2004 / Accepted 2 February 2005

Abstract. The instability of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion, observed in numerical simulations, is analyzed through known physical mechanisms and possible numerical artefacts. The mechanisms of the longitudinal and transverse instabilities, established within the accretion line model, are clarified. They cannot account for the instability of BHL accretion at moderate Mach number when the pressure forces within the shock cone are taken into account. The advective-acoustic instability is considered in the context of BHL accretion when the shock is detached from the accretor. This mechanism naturally explains the stability of the flow when the shock is weak, and the instability when the accretor is small. In particular, it is a robust proof of the instability of 3D accretion when $\gamma = 5/3$ if the accretor is small enough, even for moderate shock strength ($M \sim 3$). The numerical artefacts that may be present in existing numerical simulations are reviewed, with particular attention paid to the advection of entropy/vorticity perturbations and the artificial acoustic feedback from the accretor boundary condition. Several numerical tests are proposed to test these mechanisms.

Key words. accretion, accretion disks – hydrodynamics – instabilities – shock waves – black hole physics

1. Introduction

The phenomena described by numerical simulations are usually highly simplified compared to the physical reality. However simplified, these phenomena are sometimes complicated enough to challenge our ability to understand them. The flow of gas onto a gravitating accretor moving supersonically is a classic astrophysical problem (Hoyle & Lyttleton 1939; Bondi & Hoyle 1944) which is relevant in many astrophysical contexts such as wind fed X-ray binaries, supermassive black holes, star formation, and also galaxies in a cluster (see the recent review by Edgar 2004). Early numerical simulations in 2D (Matsuda et al. 1987; Fryxell & Taam 1988) revealed that this flow is unstable. 3D simulations (Matsuda et al. 1991; Ruffert & Arnett 1994) confirmed the unstable character of the flow, displaying however a weaker variability than in 2D. The instability is not understood even in the simple case of an ideal uniform gas. Is this instability physical, or numerical? Is it the same instability mechanism in 2D and 3D? How can this unstable behaviour be extrapolated to small accretor sizes, which are relevant for wind fed X-ray binaries but out of reach of numerical simulations? Some authors recently doubted that this instability is physical (Pogorelov et al. 2000). The most recent relativistic simulations by Font & Ibanez (1998a,b) and Font et al. (1999) also showed stable flows. What about the published instability mechanisms which have been proposed over the years? What is left of the longitudinal and transverse instabilities of the accretion line (Cowie 1977; Soker 1990, 1991),

the “relatively simple” mechanism based on the shock opening angle by Livio et al. (1991), the “vortex shedding in the Von Karman manner” (Koide et al. 1991; Matsuda et al. 1991, 1992)? The present uncertain situation reveals how unconvincing the proposed mechanisms were. Some were inconclusive, lacked quantitative criteria, and others might also have been incompletely understood. The present work aims at clarifying the different instability mechanisms and confront them with existing numerical simulations, paying particular attention to possible numerical artefacts.

The general trends based on the existing simulations, and the proposed mechanisms are recalled in Sect. 2. The longitudinal and transverse instabilities of the accretion line are revisited in Sects. 3 and 4. The advective-acoustic instability is adapted to the BHL flow in Sect. 5. This enables a new look at the simulations in Sect. 6, in an attempt to reconcile them. The basis of new simulations, free of numerical artefacts, testing these ideas, is described in Sect. 7. For the sake of the clarity of the paper, the main text contains only the most important equations, which summarize the analytical arguments proven in Appendices A to H.

2. An overview of existing simulations of BHL accretion and proposed instability mechanisms

2.1. Numerical simulations are numerous

Numerical simulations of the BHL problem started with the work of Hunt (1971). The instability first appeared in

Table 1. Overview of the published numerical simulations of BHL accretion using a polytropic equation of state and a totally absorbing accretor: plane accretion in 2D, 3D axisymmetric accretion and full 3D accretion. The first column contains an abbreviated reference which can be found in the bibliography.

Ref.	Grid	Mach number	Accretor r_*/r_A	Index γ	Transverse gradients	Stability
3D						
R99	Cart.	1.4–10	0.02–1	1.01, 4/3, 5/3	den	no
R97	Cart.	0.6–10	0.02–1	4/3, 5/3	vel	no
R96	Cart.	0.6–10	0.02–1	1.01	–	no
R95	Cart.	0.6–10	0.02–1	4/3	–	no
RA95	Cart.	3	0.01–10	5/3	vel	no
RA94	Cart.	3	0.01–10	5/3	–	no
R94	Cart.	0.6–10	0.02–10	5/3	–	no
IMS93	cyl.	3	0.125	isothermal	den/vel	no
MIS92	Cart.	3	0.1	1.005–5/3	–	no
MSS91	Cart.	3	0.06–0.25	5/3	–	no
SMA89	curv.	1.4	0.1	5/3	vel	quasi
LSK86	Cart.	3, 16	0.15	7/6–5/3	den	quasi
SLK86	Cart.	2, 4	0.15	1	den	yes
3D axisym.						
POM00	polar	3–10	0.05	1.01, 1.4, 5/3	–	yes
FI98a	polar	0.6–10	0.1–2.4	1.1, 4/3, 5/3	–	yes
KMS91	polar	1.4–10	0.005–0.015	5/3	–	no
MSS89	polar	1.4	0.01–0.05	5/3	–	no
SMA89	curv.	1.4	0.1	5/3	–	yes
PSS89	polar	0.6–5	0.125	1.1, 4/3, 5/3, 2	–	yes
FTM87	polar	1.4–4	0.016–0.13	5/3	–	no
SMT85	polar	0.6–5	0.1	1.1, 4/3, 5/3	–	yes
H79	polar	0.6–3.6	0.01	4/3	–	–
H71	polar	0.6–2.4	0.01	5/3	–	–
2D planar						
POM00	polar	3–10	0.05	1.4, 5/3	–/den/vel	yes
POM00	polar	3–10	0.05	1.01	–	no/yes
POM00	polar	4	0.05	4/3	den	no
FIP99	polar	5	0.25	4/3, 5/3, 2	–	yes
FI98b	polar	3–10	0.25	1.1, 4/3, 5/3	–	yes
SMA98	polar	1–16	0.005–0.05	isothermal	–	no
BLT97	polar	4	0.001, 0.005	4/3	–/den/vel	no
ZWN95	Cart.	3	0.03–0.13	5/3	–	yes
ZWN95	Cart.	4	0.03–0.13	4/3	den	no
BA94	SPH	3	0.04–0.13	1.1, 1.3, 1.5	–	no
IMS93	Cart.	3	0.13	isothermal	den/vel	no
MIS92	Cart.	1.4–10	0.04–0.3	1.005–5/3	–	no
MSS91	Cart.	3–5	0.06–0.25	1.2, 5/3	–	no
SMA89	curv.	3	0.1	1.5, 2	vel	no
TF89	polar	4	0.037	4/3	vel	no
FT88	polar	4	0.037	4/3	den	no
MIS87	curv.	1–5	0.03–0.6	4/3, 5/3	binary	no
ABM87	SPH	3	0.13, 0.15	1.5	vel, den	yes

Matsuda et al. (1987), Fryxell & Taam (1988). The many subsequent simulations are listed in Table 1. Simulations involving more complicated ingredients such as realistic heating and cooling (e.g. Blondin et al. 1990; Taam et al. 1991) are not included for the sake of simplicity. The simulations of Table 1 are divided into three groups corresponding to plane accretion, axisymmetric accretion and full 3D accretion. In each of these groups, the listing in chronological order follows the progress in computing speed and numerical techniques over the last 30 years. This progress enabled the simulation of smaller and smaller accretors, improving the first attempts by a factor 10. Denoting by $r_A \equiv 2GM/v_\infty^2$ the accretion radius of an accretor of mass M and velocity v_∞ , the most recent simulations reach $r_*/r_A = 0.005$ in axisymmetric flows (KMS91), $r_*/r_A = 0.001$ in planar accretion (BLT97), and $r_*/r_A = 0.01$ in 3D accretion (RA94). Global trends can be summarized as follows:

- the shock is always attached to the accretor in simulations of 2D planar flow. By contrast, 3D simulations revealed a detached bow shock, ahead of the accretor, if the accretor is small enough and $\gamma \geq 4/3$. A calculation in Appendix A suggests that the shock should be detached in planar flows with $\gamma \sim 3$;
- although the strength of the instability varies from one code to another, the instability is found in numerical simulations using any of the coordinate systems, Cartesian, polar, cylindrical or special curvilinear, even with SPH. If numerical, the phenomenon is not specific to a particular grid or a specific method;
- simulations of plane accretion exhibit the most unstable behaviour. The shock moves sideways in a flip-flop manner (MIS87). The instability is strongest for small accretors, possibly for intermediate Mach numbers ($M = 3$ according to MIS87 and POM00);
- the presence of velocity or density gradients in the transverse direction of the flow was considered in the earliest unstable simulations (MIS87, FT88, SMA89), but MSS91 realized that this ingredient is not crucial for instability. This conclusion was challenged by ZWN95 who confirmed the flip-flop instability when the accretor is a square single cell (as in MSS91), but found a stable flow when the accretor is spatially resolved and modeled as a polygon. From their point of view, the instability is related to the detachment of the shock;
- stable planar accretion flows were also found by FI98b and FIP99 who considered a rather large ratio $r_*/r_A = 0.25$ and POM00 whose method is further discussed below;
- axisymmetric flows are generally stable, with few exceptions. Among them, SMT85, FTM87 and MSS89 showed vortex shedding when the accretor is a hard, non absorbing sphere: in this case the problem is similar to the classical flow around a sphere, modified by gravity. An important exception to the stability of axisymmetric flow is KMS91, who also found vortex shedding for an absorbing accretor, if $M \geq 2.4$. It can be noted that the accretor size they considered is the smallest ever used in axisymmetric simulations;

- the instability of full 3D accretion is never as strong as the flip-flop observed for planar flows, but seems present in all published simulations, at least for small enough accretors. Even the earliest simulations of LSK86 and SMA89 showed some persistent oscillations. The instability seems to be more violent if the shock is detached ($\gamma = 4/3$ and $5/3$).

2.2. Several mechanisms were proposed

The question of the stability of BHL accretion could in principle be solved by performing a perturbation analysis on a stationary solution such as obtained by POM00. This procedure would be very heavy, and has never been achieved. Using various simplifications, six different physical instability mechanisms have been proposed so far. In chronological order:

- (i) longitudinal instability of the accretion line (Cowie 1977);
- (ii) transverse instability of the accretion line (Soker 1990, 1991);
- (iii) shock opening angle (Livio et al. 1991);
- (iv) vortex shedding in the Von Karman manner (Koide et al. 1991; Matsuda et al. 1991, 1992);
- (v) local Rayleigh-Taylor (RT) and Kelvin-Helmholtz (KH) instabilities (Foglizzo & Ruffert 1999);
- (vi) advective-acoustic cycle (Foglizzo & Tagger 2000; Foglizzo 2001, 2002).

Some of the proposed mechanisms (iii, iv, v) are interesting ideas, which need to be developed, but which are not conclusive at present:

- the calculation of Livio et al. (1991) is not a stability analysis of the shock surface, but rather an attempt to express in equations the idea that the pressure should decrease along the shock surface. Since no growth rate or typical timescale is computed, extrapolating on the possibility that this is responsible for the violent and chaotic behaviour observed in 2D simulations is not convincing;
- Vortex shedding, by the interaction of the incoming gas with the “atmosphere” captured by the accretor, was demonstrated by SMT85 and MSS89 in simulations where the accretor is non-absorbing. The fate of this instability in BHL accretion, where the gas is absorbed at supersonic velocity, is rather speculative;
- the local analysis of FR99 investigates two natural causes of instability (RT and KH), and concluded that these are not quantitatively convincing without a feedback mechanism.

Among the cited mechanisms, the only conclusive stability analysis are those of Cowie (1977) and Soker (1990, 1991) in the approximation of the accretion line model. This simplification is known to be valid only when the shock opening angle is very narrow, i.e. at very high Mach number. Even then, it misses the possible interaction between a bow shock and the accretor (as described by the advective-acoustic cycle). However simplified, these instability mechanisms are physical. They should be understood well enough to predict what is left of them beyond the accretion line model.

Table 2. Accretion line models in 2D and 3D.

	2D	3D
H	$r^{-\frac{1}{2}}$	1
F	$\frac{1-v}{r^{\frac{1}{2}}\rho} - \frac{1}{2r^2}$	$\frac{1-v}{\rho} - \frac{1}{2r^2}$

3. A new look at the longitudinal instability of the accretion line

3.1. Physical cause of the longitudinal instability

The mechanism of the longitudinal instability of the accretion line was briefly explained by Cowie (1977) as being due to the effect of accreted momentum on density perturbations. Soker (1990) challenged this explanation by assessing that this instability mechanism is independent of accretion and is a mere consequence of the acceleration of the flow. A closer look at the equations, in Appendix B, shows the weakness of this argument. Let us consider more generally the following dynamical system:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} = H(r), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = F(r, v, \rho), \quad (2)$$

where H, F are regular functions describing the mass input and the force per unit mass. The particular case of the accretion line model is described in Table 2 and Appendix A, where velocities are in units of v_∞ , distances r are in units of the accretion radius r_A , and the line density ρ is normalized using the mass accretion rate (the normalization of distances and densities used by Cowie (1977) are different by a factor 2). A linearization of Eqs. (1) and (2) gives the differential equation satisfied by a perturbation of the mass flux $h \equiv \rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho$ (Appendix B). In what follows, the subscript for unperturbed quantities v_0, ρ_0 is omitted. The solution is written at high frequency ω using the WKB approximation:

$$h \sim \left(\frac{\rho}{v \frac{\partial F}{\partial v}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\int \left(v \frac{\partial F}{\partial v} - \rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) \frac{dr}{2v^2} \right] \exp \left[i\omega \int \frac{dr}{v} \pm \frac{1-i}{2^{\frac{1}{2}}} \omega^{\frac{1}{2}} \int \left(\frac{\rho}{v^3} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right)^{\frac{1}{2}} dr \right]. \quad (3)$$

The flow is thus unstable at high frequency if the force per unit mass F , acting on the accretion line, depends on density. The instability does not depend on the accretion of mass, as stressed by Soker (1990), in the sense that it does not depend on the function H . Nevertheless it does depend on the accreted momentum through the function F . In this sense, accretion plays a crucial role in this instability, as initially sketched by Cowie (1977). Contrary to the conclusions of Soker (1990), acceleration within the accretion line is not crucial for this instability (see a counter example in Appendix B). In the 3D accretion line model, Eq. (3) becomes:

$$h(r) \propto \frac{r^{\frac{1}{2}}}{\log^{\frac{1}{2}} r} \exp \left[i\omega r \pm \frac{1+i}{3} (2\omega)^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} r \right], \text{ for } r \gg \alpha, \quad (4)$$

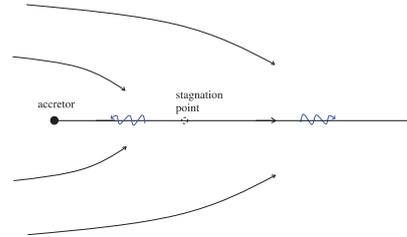


Fig. 1. Schematic view of the accretion line model. Stream lines are drawn as solid lines with arrows. When pressure is taken into account (Sect. 3.2), density perturbations in the accretion line propagate as acoustic waves (wavy lines with arrows).

$$h(r) \propto r^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{2}{3} i\omega r^{\frac{3}{2}} \pm \frac{1-i}{5} \left(\frac{8\omega}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}} \right], \text{ for } \frac{1}{\omega^2} \ll r \ll \alpha, \quad (5)$$

where α is the distance of the stagnation point. The amplitude of high frequency perturbations increases far from the accretor ($r \gg \alpha$). Perturbations in the accreting part of the flow ($r < \alpha$) are also unstable at high frequency ω down to a point $r \propto \omega^{-\frac{2}{3}}$ where the amplification ceases and the WKB approximation breaks down. In a numerical simulation, the treatment of high frequency perturbations is limited by the numerical resolution. According to Eqs. (4) and (5), the better the resolution, the stronger the instability on both sides of the stagnation point. Formulae computed in Appendix B for 2D flows show slight differences which are not significant on the scale of a few accretion radii.

3.2. The longitudinal instability modified by pressure forces: Analogy with radiation driven winds

The region of the stagnation point is necessarily subsonic, and longitudinal pressure forces cannot be neglected there. Pressure forces in the stationary accretion line were considered by Wolfson (1977), Yabushita (1978) and Horedt (2000). The simplest formulation corresponds to the isothermal hypothesis, in which the dynamical Eqs. (1) and (2) are changed into:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} = H(r), \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = F(r, \rho, v) - \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}, \quad (7)$$

where c is the isothermal sound speed. Again, a single differential equation is obtained for the radial structure of the linear perturbation h of the mass flux (Eq. (C.4)), describing the propagation of acoustic waves modified by the external forces F . The solution is approximated at high frequency through a WKB analysis, away from the sonic points ($v = \pm c$):

$$h \sim \rho^{\frac{1}{2}} \exp \int \frac{dr}{v \pm c} \left[i\omega \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \pm \frac{\rho}{c} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) \right], \text{ for } \omega \gg \frac{\rho v}{c^2} \frac{\partial F}{\partial \rho}. \quad (8)$$

This stability analysis resembles that of radiation driven winds, studied by Mestel et al. (1976) and Mathews (1976).

Considering a uniform gravitational acceleration g and a linearized radiative force ($F \equiv A\rho - g, H \equiv 0$), they showed that acoustic waves propagating outwards are amplified by radiation. In addition to the density effect $\partial F/\partial\rho$, the velocity effect $\partial F/\partial v$ is formally well known in line-driven winds (see e.g. Carlberg 1980; and more recent reviews by Owocki 1994; Feldmeier & Owocki 1998). $\partial F/\partial v < 0$ in the accretion line model, implying that this velocity effect is always stabilizing, independently of the direction of propagation. This could have been anticipated directly from the Euler equation, since a positive perturbation of velocity results in a decreased external force. By contrast, the effect of the density dependence (term $\partial F/\partial\rho$) is opposite for outgoing and ingoing waves:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} \pm \frac{\rho}{c} \frac{\partial F}{\partial \rho} &= -\frac{v}{r-\alpha} \left(1 \pm \frac{v_\infty - v}{c}\right) \text{ in 3D,} \\ &= -\frac{v}{r^{\frac{1}{2}}(r^{\frac{1}{2}} - \alpha)} \left(1 \pm \frac{v_\infty - v}{c}\right) \text{ in 2D.} \end{aligned} \quad (9)$$

The density effect $\partial F/\partial\rho < 0$ is thus stabilizing for waves propagating outwards and destabilizing for waves propagating inwards. This can be understood as follows: with $\partial F/\partial\rho < 0$, a positive density perturbation is associated with a decreased external force. According to the Euler equation, this decreased force has a damping effect on the positive velocity perturbation associated with a wave propagating outwards, whereas it amplifies the negative velocity perturbation associated with a wave propagating inwards. In contrast with the instability without pressure found by Cowie (1977), this possible amplification of ingoing acoustic waves is not oscillatory. Altogether, the density and velocity effects damp outgoing acoustic waves. According to Eqs. (8)–(10), acoustic waves propagating inwards may be amplified only if

$$c + v < v_\infty. \quad (11)$$

This condition cannot be fulfilled far from the accretor since $v \sim v_\infty$ for $r \gg \alpha$. From this we conclude that the only possible amplification of high frequency acoustic waves is restricted to ingoing waves in a region of finite size. The size of this region is independent of frequency. The amplification factor \mathcal{A} , deduced from the WKB analysis, is also independent of the perturbation as long as its frequency is high enough to satisfy Eq. (8). It can be estimated as follows in 3D:

$$\mathcal{A} \sim \exp \int \frac{v_\infty - v - c}{2c} \frac{v}{r - \alpha} \frac{dr}{v - c} \text{ for } \omega \gg \frac{v^2}{c^2} \frac{v_\infty - v}{r - \alpha}. \quad (12)$$

$$\leq e^{M_\infty}. \quad (13)$$

This contrasts with the instability found by Cowie (1977) which could be arbitrarily fast at high frequency (Eqs. (4) and (5)).

3.3. The longitudinal instability beyond the accretion line model

The longitudinal instability of the accretion line proves that if the Mach number is high enough, the amplification of ingoing acoustic waves should be visible in numerical simulations. Such a transient amplification, however, cannot be considered

to be a convincing mechanism to explain the instability observed in numerical simulations for moderate Mach numbers $M_\infty \sim 3-5$. A true instability would require a feedback loop, in order to build an acoustic cycle. Ingoing acoustic waves may be partially reflected outwards near the accretor. Outgoing waves, however, are likely to escape to infinity rather than be reflected inwards again. Moreover, their amplitude is damped by the effect of the accreted momentum. In conclusion, the longitudinal instability of the accretion line does not explain the instability of BHL accretion.

4. A new look at the transverse instability of the accretion line

4.1. High frequency approximation of the transverse instability

Soker (1990) extended the stability analysis of Cowie (1977) to the case of transverse perturbations in 2D planar flows. The position of the accretion line is described in polar coordinates $\theta = \Theta(r)$. The angle Ψ between the tangent to the accretion line and the symmetry axis, and the transverse velocity v_θ are related to Θ as follows:

$$\Psi = \Theta + r \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad (14)$$

$$v_\theta = r \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \Theta. \quad (15)$$

As remarked by Soker (1990), the transverse instability is decoupled from the longitudinal one. The angle Θ of the accretion line satisfies a second order differential equation, which is approximated at high frequency in Appendix D using a WKB analysis:

$$\Theta \propto \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \exp \left[i\omega r \pm 2^{\frac{1}{2}}(1+i)\omega^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}} \right] \text{ for } r \gg \alpha, \quad (16)$$

$$\Theta \propto \frac{1}{r^{\frac{1}{8}}} \exp \left[i\omega \int \frac{dr}{v} \pm \frac{2(1-i)}{5\alpha^{\frac{1}{2}}} \omega^{\frac{1}{2}} r^{\frac{5}{2}} \right] \text{ for } r \ll \alpha. \quad (17)$$

According to Eq. (16), the larger the distance from the accretor, the larger the amplification of perturbations. As for the longitudinal instability, the amplification in the region of accretion ceases close to the accretor at $r \propto \omega^{-2/5}$, and thus depends on the numerical resolution. These high frequency estimates could be used to compare the radial profiles of the transverse and longitudinal instabilities of the accretion line in the linear regime in 2D flows: the differences between Eqs. (16), (17) and Eqs. (B.7), (B.8) are not significant on the scale of few accretion radii, and cannot be responsible for the dominant longitudinal instability observed in the non linear simulations of Soker (1991).

4.2. Comparison of the transverse instability with the instability of a flag

More generally, a system satisfying a transverse equation of the form

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) v_\theta = A\Theta + B\Psi + Cv_\theta, \quad (18)$$

with arbitrary coefficients A, B, C , is unstable at high frequency. The differential Eq. (D.3) satisfied by Θ is written in Appendix D. If $v \neq 0$, the WKB approximation at high frequency is as follows:

$$\Theta \propto \left(\frac{v}{r^2 B}\right)^{\frac{1}{2}} \exp \int \left[\frac{i\omega}{v} + \frac{C}{2v} + \frac{B}{2v^2} \pm \left(\frac{i\omega B}{v^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] dr, \quad (19)$$

for $\omega \gg \frac{v}{r}, C, \frac{Av}{rB}, \frac{\partial \log B}{\partial r} \frac{B}{v^2}$.

This formulation outlines the role of the restoring force $B\Psi$ in driving the high frequency instability. $B \equiv -1/(r^2 \rho)$ in the 2D accretion line model. This mechanism is reminiscent of the instability of a flag as described by Argentina et al. (2004), where the hydrodynamical force acting on the flag is also proportional to the inclination Ψ . The equation describing the transverse motion of a flag with infinite flexibility corresponds to the same Eq. (18), with $v \equiv 0, A \equiv 0, B \equiv -\alpha U_0$ and $C \equiv \alpha$, where U_0 is the wind velocity and the coefficient $\alpha > 0$ characterizes the aerodynamic force acting on the flag. The solution of Eq. (18) when $v \equiv 0$ is unstable at high frequency if $B < 0$:

$$\Theta \propto \frac{1}{r} \exp \int \left[i\omega \frac{C}{B} - \frac{\omega^2}{B} - \frac{A}{rB} \right] dr. \quad (20)$$

The presence of finite flexibility ("flexural rigidity") in a realistic flag material would set an upper bound to unstable frequencies. The comparison with the instability of a flag suggests the possible existence of a transverse instability of the subsonic region of the stagnation point ($v \sim 0$).

4.3. The transverse instability beyond the accretion line model

4.3.1. Transient growth of the transverse instability in a shock cone

The accretion line model relies on the assumption that the half angle θ_0 of the shock cone is small compared to other distances. Identifying the shock cone with the Mach cone, $\theta_0 \sim 1/M_\infty$ is indeed small if the incident flow is highly supersonic. With a longitudinal wavelength comparable to $\sim 2\pi v/\omega$, the transverse instability of the accretion line model is valid only for

$$\frac{2\pi v}{\omega} \gg \frac{2r}{M_\infty}. \quad (21)$$

The maximum exponential amplification \mathcal{A} deduced from Eqs. (16) and (17) is thus bounded by:

$$\mathcal{A} \leq \exp(2\pi M_\infty)^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Taking into account the finite width of the shock cone sets an upper bound $\propto M_\infty$ to the frequency of the most unstable perturbations in a plane 2D flow. An additional limitation to the accretion line model comes from the acoustic time across the shock cone, which is a lower bound to the growth time of the instability. This also favours the subsonic region surrounding the stagnation point rather than the supersonic regions away from it. The instability as described by Soker (1990) is a local

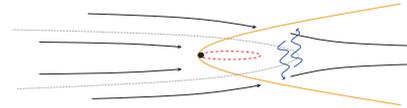


Fig. 2. Transverse instability growing in the vicinity of the stagnation point. The shock (thick line), the sonic surface (dashed line) and the stream lines (thin lines with arrows) are drawn. The thin dotted line delineates the accreted gas. The transverse motion of the shock on one side is transmitted to the other side through acoustic waves (wavy lines with arrows).

mechanism, taking place in the advected flow. A global mode as observed in the 2D plane simulations of the flip-flop instability requires an acoustic feedback inside the subsonic region. This instability could be described as a purely acoustic cycle between the opposite sides of the shock cone as in Fig. 2.

4.3.2. Towards a global transverse instability in BHL accretion ?

The amplification of transverse perturbations should be visible if the Mach number is high enough. Whether this is sufficient to explain the instability observed in 2D flows at low Mach number is not clear since this instability is transient. When pressure is taken into account, the region of the stagnation point seems to be a privileged place for the growth of a global mode involving transverse displacement and acoustic propagation.

The fate of the transverse instability in 3D BHL accretion is rather uncertain, as remarked by Soker (1991). Obviously transverse motions of the accretion line are forbidden in 3D, since incoming symmetrical trajectories which do not intersect the displaced accretion line meet along the symmetry axis and generate a new accretion line. This does not exclude a possible unstable oscillation of the shock cone in a transverse direction, such that the symmetry axis stays inside the accretion shock. According to Eqs. (18) and (19), the existence of a transverse restoring force proportional to the inclination angle is enough to generate a high frequency instability. Beyond geometrical factors, this force is still present in the 3D geometry. This instability mechanism could thus be present for high enough Mach numbers, although it has never been observed clearly in 3D numerical simulations. A correct description of the stability with respect to transverse oscillations would require taking into account pressure effects and the 3D dynamical deformation of the shock cone, which is much more difficult than the accretion line formalism.

5. The advective-acoustic mechanism in BHL accretion

5.1. Schematic formulation of a global cycle

The advective-acoustic instability deals with the cycle of advected perturbations (entropy, vorticity) coupled to acoustic waves, between the shock and the sonic surfaces. The coupling at the shock is a local process associated to the conservation

laws through the shock. By contrast, the coupling due to the inhomogeneity of the subsonic flow occurs all the way from the shock to the sonic surface. F01 showed in a simple radial geometry that this acoustic feedback is described by an integral over the subsonic region, dominated by the region close to the sonic point, where the temperature is highest. This allows us to decompose the advective-acoustic cycle in four steps as follows:

- (1) advection of an entropy/vorticity perturbation from the shock to the sonic point;
- (2) excitation of an acoustic feedback due to the inhomogeneity of the flow;
- (3) propagation of this acoustic feedback towards the shock;
- (4) excitation of a new entropy/vorticity perturbation on the shock surface.

Each of these steps $j = 1$ to 4 is characterized by an efficiency Q_j measuring the amplification of perturbations. This decomposition is motivated by the existence of invariants, allowing a direct calculation of Q_1 based on the conservation of entropy, or Q_3 based on the conservation of acoustic energy. The stability of the global cycle depends on the product Q :

$$Q \equiv Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times Q_4. \quad (23)$$

The linear growth rate of the advective-acoustic cycle, measured by the imaginary part of the eigenfrequency $\omega \equiv (\omega_r, \omega_i)$, can then be approximated by

$$\omega_i \sim \frac{1}{\tau} \log |Q|, \quad (24)$$

where τ is the duration of the advective-acoustic cycle, generally dominated by the advection time. Note that this schematized approach neglects the purely acoustic cycle, which can influence the stability threshold (FT00, F02).

5.2. Efficiencies Q_i based on radial accretion

In a radial flow with $\gamma > 1$, we choose to measure, in the entropic-acoustic cycle, the amplification of the perturbation f of the Bernoulli constant:

$$f \equiv v\delta v + \frac{2}{\gamma-1}c\delta c. \quad (25)$$

Let us denote by f^\pm its values for pressure perturbations δp^\pm corresponding to an energy flux F^\pm propagating with (+) or against (-) the stream, and f^S for entropy perturbations δS . At high frequency, for low degree waves $l = 0, 1, 2$:

$$F^\pm \propto \frac{1}{\mathcal{M}c^2} |f^\pm|^2, \quad (26)$$

$$f^\pm \sim (1 \pm \mathcal{M})c^2 \frac{\delta p^\pm}{\gamma p}, \quad (27)$$

$$f_S \sim \frac{c^2}{\gamma} \delta S. \quad (28)$$

Non radial entropy perturbations δS are associated to vorticity perturbations δw in shocked spherical accretion through Eqs. (E.17) to (E.19), so that the amplification of the entropy

$\delta S \rightarrow \delta p^- \rightarrow \delta S'$ also measures the simultaneous amplification of vorticity $\delta w \rightarrow \delta p^- \rightarrow \delta w'$. In the isothermal limit ($\gamma \rightarrow 1$), vorticity is more appropriate than entropy to describe the advective-acoustic cycle, which becomes a vortical-acoustic cycle (F02).

The steps (1) and (3) of advection and propagation in the spherical accretion flow studied by F01, F02 are deduced from Eqs. (26) and (28) and the conservations of entropy δS and acoustic energy F^- :

$$Q_1 \equiv \frac{f_{\text{son}}^S}{f_{\text{sh}}^S} \sim \frac{c_{\text{son}}^2}{c_{\text{sh}}^2} \text{ for } \omega_r \sim \frac{c_{\text{son}}}{r_{\text{son}}}, \quad (29)$$

$$Q_3 \equiv \frac{f_{\text{sh}}^-}{f_{\text{son}}^-} \sim \mathcal{M}_{\text{sh}}^{\frac{1}{2}} \frac{c_{\text{sh}}}{c_{\text{son}}}, \quad (30)$$

where the subscripts “son” and “sh” refer to the sonic point and the shock respectively. Although the acoustic energy is conserved, the amplitude of outgoing waves f^- decreases ($Q_3 < 1$) due to the geometric dilution in a diverging flow.

The advection of an entropy perturbation in a hot region may greatly increase the thermal energy carried by this perturbation, by a factor comparable to the temperature ratio (Eq. (29)). As sketched by FT00, the difference of energy is carried away by acoustic waves, propagating both upward and downward. Even the waves propagating downward may be refracted upward at low enough frequency (F01). The ratio $f_{\text{son}}^-/f_{\text{son}}^S$ is thus of order unity:

$$Q_2 \equiv \frac{f_{\text{son}}^-}{f_{\text{son}}^S} \sim 1. \quad (31)$$

The advective-acoustic coupling Q_4 at the shock is deduced from a local analysis of a perturbed shock, performed in Appendix F:

$$Q_4 \equiv \frac{f_{\text{sh}}^S}{f_{\text{sh}}^-} \propto \frac{1 - \mathcal{M}_{\text{sh}}}{\mathcal{M}_{\text{sh}}}. \quad (32)$$

This equation is identical to Eqs. (16) and (C.11) in FT00, obtained for radial perturbations. Q_4 may reach large values in nearly isothermal flows with strong shocks ($\mathcal{M}_{\text{sh}} \sim 1/\mathcal{M}_1$), in which case the dominant advected perturbations are non radial (F02): this is the basis of the vortical-acoustic cycle. The factor $(1 - \mathcal{M}_{\text{sh}})$ in Eq. (32) is responsible for the damping of the advective-acoustic coupling for weak shocks.

Altogether,

$$Q \propto \frac{c_{\text{son}}}{c_{\text{sh}}} \frac{1 - \mathcal{M}_{\text{sh}}}{\mathcal{M}_{\text{sh}}^{\frac{1}{2}}}. \quad (33)$$

This approximate formula illustrates the two regimes of efficient advective-acoustic coupling identified by FT00, F01, F02:

- (i) strong temperature gradients are responsible for an efficient triggering of acoustic waves from advected entropy perturbations, which is the basis of the entropic-acoustic cycle (FT00, F01);
- (ii) strong entropy/vorticity perturbations can be produced at the shock if the post shock Mach number \mathcal{M}_{sh} is small.

These two sources of amplification can be used as guidelines for anticipating the properties of advective-acoustic cycles in BHL accretion flows. However, the dependence of Q on the frequency and the degree l of the perturbation requires further calculations. In particular, F01 showed that the acoustic feedback is strongest for non radial modes $l = 1$. Note also that Eq. (33) is singular if $c_{\text{son}} \rightarrow \infty$ as is the case for 3D accretion with $\gamma = 5/3$, which deserves a more careful analysis (Appendix G).

5.3. From radial to BHL accretion

5.3.1. Extrapolation to detached shocks

The locus of the advective-acoustic cycle is different if the shock is attached or detached (Fig. 3). A global mode between a bow shock and the accretor resembles the advective-acoustic cycle in a shocked radial flow. In this case the efficiency of the advective-acoustic cycle can be estimated from the study of radial accretion. By contrast, if the shock is attached to the accretor, most of the flow is accreted from behind in a supersonic manner. The value of Q_2 in this particular geometry cannot be directly extrapolated from its value in a radial flow.

5.3.2. Geometrical factors

In BHL accretion, the shape of the shock surface is not only non-spherical but open to infinity. The value of Q_3 might be reduced by a geometrical factor ~ 2 compared to spherical accretion because a significant fraction of acoustic waves may propagate away from the region of accretion and leave the cycle (Fig. 3).

Conversely, the value of Q_1 should be increased by the amplification of vorticity perturbations through the local KH and RT mechanisms (FR99), due to vorticity and entropy gradients in the post-shock flow.

The efficiencies Q_j estimated in spherical geometry should thus be considered, at best, as very rough approximations of those in the BHL flow.

5.4. Influence of the parameters γ , M_∞ and r_*

According to FT00, F01, the stability of the entropic-acoustic cycle depends essentially on the temperature increase between the shock and the sonic point. The most unstable cycle involves high frequency acoustic waves, those able to explore the hottest parts of the flow but still be refracted out, with a wavelength slightly larger than the smallest size of the sonic surface. Using the Bernoulli equation, the temperature on a point of the sonic surface is directly related to its distance r_{son} to the accretor:

$$c_{\text{son}}^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[\frac{2GM}{r_{\text{son}}} + c_\infty^2 \left(M_\infty^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \right) \right]. \quad (34)$$

The closer the sonic surface to the accretor, the higher the temperature, and the more efficient the entropic-acoustic cycle. The calculation of Appendix A indicates that the sonic surface is always attached to the accretor if $\gamma = \gamma_{\text{max}}$, with

$$\gamma_{\text{max}} \equiv 3 \quad \text{in 2D}, \quad (35)$$

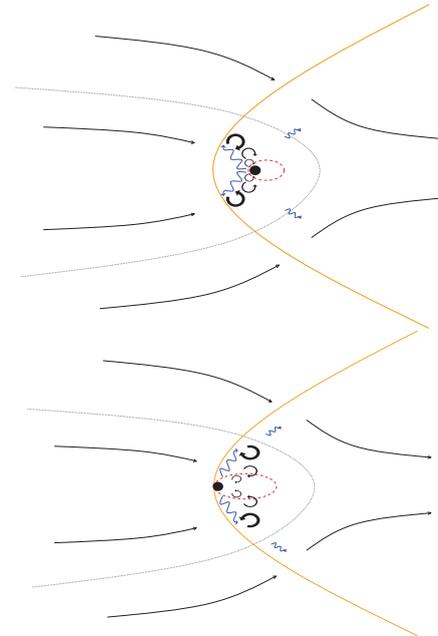


Fig. 3. Schematic view of a global mode if the shock is detached or attached. Drawn lines have the same meaning as in Fig. 2. Perturbations of entropy/vorticity (circular arrows) follow the flow lines from the shock to the accretor, producing an acoustic feedback which propagates to the shock. A fraction of the acoustic energy may leak outside of the accretion cylinder.

$$\gamma_{\text{max}} \equiv \frac{5}{3} \quad \text{in 3D}, \quad (36)$$

even if the shock is detached. Figure 17 of R94 shows the shape of the attached sonic surface for 3D accretion with $\gamma = 5/3$. Together with Eq. (33), the strength Q of the instability should increase when γ approaches γ_{max} and r_* decreases. The strength of the instability should be asymptotically independent of the incident Mach number for strong shocks. Conversely, the instability should be suppressed if the shock is weak ($M_{\text{sh}} \sim 1$).

According to Appendix A, a critical index $\gamma_{\text{crit}} < \gamma_{\text{max}}$ must exist, below which the shock is always attached to the accretor, whatever its size. Numerical simulations with $\gamma = 4/3$ (R95) suggest that $\gamma_{\text{crit}} < 4/3$ in 3D flows. The entropic-acoustic cycle is expected to be an efficient instability mechanism in the range $[\gamma_{\text{crit}}, \gamma_{\text{max}}]$, as long as the distance of the sonic surface is small enough.

Nearly isothermal flows ($\gamma \sim 1$) could be unstable through the vortical-acoustic cycle, fed by $Q_4 \gg 1$ for strong shocks. However, the effect of the acoustic feedback in the particular geometry of an attached shock is uncertain. Neither the

vortical-acoustic mechanism nor the extrapolated transverse instability manage to explain why isothermal BHL accretion seems so much more unstable in planar flows (SMA98) than in 3D simulations (R96).

6. Can the different numerical simulations be reconciled?

6.1. Some simulations are stable

The stability of the 2D planar flow simulated by FI98b, FI99, with a relativistic accretor contrasts with the many unstable simulations performed in Newtonian gravity. This is by no mean a relativistic stabilization of BHL accretion through relativistic effect, as recognized by FI98b. Indeed, they restricted their studies to $v_\infty/c_{\text{light}} = 0.5$, which corresponds to a rather big Schwarzschild radius in units of the accretion radius: $r_{\text{Sch}}/r_A = 0.25$. These flows would have been stable even in the Newtonian limit.

According to ZWN95, the flow simulated by MSS91 becomes stable if the square accretor is replaced by a polygon. Although the shape of the accretor may influence the instability threshold, the existence of strongly unstable simulations in polar coordinates (BLT97 and SMA98) shows that 2D accretion can be unstable even if the accretor is perfectly spherical. The smaller accretor size and higher resolution used by BLT97 and SMA98, compared to ZWN95 (see Table 1), may be a hint in favour of an advective-acoustic mechanism. A direct comparison, however, is hampered by the fact that the adiabatic indices are different in these three simulations. The influence of the shape of the accretor, demonstrated by ZWN95, speaks against the transverse acoustic instability. These rather indirect arguments, if not conclusive, show at least that it is possible to reconcile existing simulations of 2D plane accretion in the framework of the advective-acoustic mechanism.

The stable 3D simulations can also be analyzed in the framework of the entropic-acoustic cycle. This cycle is stabilized by a weak shock, and destabilized by a small accretor size.

- Table 1 indicates that most axisymmetric simulations of an absorbing accretor are stable (SMT85, PSS89, SMA89), with the exception of KMS91 which shows an instability when $r_s/r_A \leq 0.05$ and $M \geq 2.4$. The existence of a threshold for the accretor size and the minimum Mach number fits perfectly with the entropic-acoustic mechanism.
- In the axisymmetric simulations of FI98a with $v_\infty/c_{\text{light}} = 0.5$, the Schwarzschild radius is too big to allow for a detached shock. According to Newtonian 3D simulations, the shock distance scales like a fraction (e.g. typically 0.2–0.4 in R94) of the accretion radius. A slower black hole would have a detached shock, and the entropic-acoustic instability could develop naturally if the temperature gradient is sufficient. The shock gets detached in the simulation of FI98a for $\gamma = 5/3$, $v_\infty/c = 0.15$, but the shock is then too weak ($M_\infty = 1.5$) to be destabilized. Indeed, the Newtonian simulations of Ruffert with $M_\infty = 1.4$ were also stable. A decisive test could be made by simulating an axisymmetric flow with $\gamma = 5/3$, $M_\infty = 3$, and $v_\infty/c \leq 0.1$.

- The apparent stability observed in the simulations of POM00, in particular for $\gamma = 5/3$, cannot be explained by simple considerations about the accretor size and shock strength. This result may be attributed to the particular numerical method of local time step used by the authors. In Sect. 3 of POM00, the authors make the following statement: “it is important to note from the very beginning that we seek steady state solution and generally do not perform time-accurate calculations (local time step inside each cell for the sake of computational efficiency)”. This method might not be adequate to propagate high frequency acoustic waves across the subsonic region.

6.2. Numerical artefacts in the simulations

Numerical issues are numerous. Besides the damping effect of numerical viscosity (SPH and Eulerian codes were compared by BA94) and the possible axis effect in axisymmetric simulations (FTM87), more subtle effects can be understood through the advective-acoustic cycle. This instability mechanism is physical, but may be artificially triggered or damped by numerical effects such as the carbuncle phenomenon at the shock, the boundary condition at the surface of the accretor and the grid size in between. The accuracy of both the advection of entropy/vorticity perturbations and the propagation of acoustic waves, between the shock and the sonic surface, is crucial for advective-acoustic instabilities.

6.2.1. Carbuncle phenomenon at the shock

POM00 drew attention to possible numerical instabilities at the shock in the BHL flow. In the region where the shock is parallel to the grid, the carbuncle instability (e.g. Robinet et al. 2000) may favour the generation of vorticity and entropy perturbations, which in turn can feed an advective-acoustic cycle. Conversely, one should carefully check the effect of any numerical procedure designed to damp the carbuncle instability at the shock, since it may also damp the coupling between advected and acoustic perturbations.

6.2.2. Grid resolution between the shock and the accretor

Vorticity is not usually computed with as much accuracy as momentum or energy in classical numerical schemes such as those used for BHL simulations. The artificial generation of vorticity at the interface of nested grids could feed a vortical-acoustic cycle.

Conversely, insufficient numerical resolution is responsible for an artificial damping of vorticity and entropy waves. As an example, Fig. 4 shows a measure of the damping of the amplitude of entropy and vorticity perturbations advected over one wavelength, in a direction parallel to the grid, as a function of the number of grid cells per wavelength. This test is performed on a Cartesian grid in 2D using the same PPM technique as in Ruffert (1994). The correct advection of entropy and vorticity in this numerical simulation requires as much as 10–15 grid cells per wavelength. Perturbations with a wavelength shorter than 10 grid cells are significantly damped over

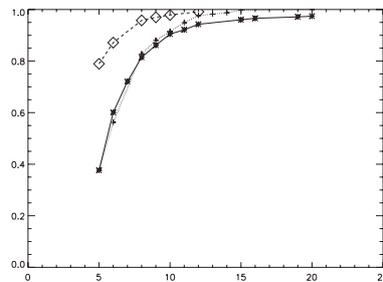


Fig. 4. Numerical damping of a sinusoidal perturbation of entropy (full line) or vorticity (dotted line) advected over one wavelength, in a direction parallel to the grid, as a function of the number of grid points per wavelength. The flow is homogeneous with $\gamma = 5/3$, and moves uniformly at Mach 0.2. The dashed line corresponds to the damping of an acoustic wave propagated over one wavelength. In the three cases, the wavevector of the perturbation is parallel to the flow.

one wavelength. The same test performed on acoustic waves propagating over one wavelength shows a smaller damping: 5–10 grid cells are enough. This is a strong constraint for the correct calculation of an advective-acoustic cycle at high frequency which involves perturbations with a wavelength comparable to the accretor size, when the sonic surface is attached to it. The grid size should thus be at least 15–20 times smaller than the accretor size in order to properly describe the advective-acoustic coupling in the inner regions of the flow. This example illustrates the fact that the advective-acoustic instability can be impeded in a numerical simulation with insufficient resolution. Determining how these numbers depend on the numerical technique is beyond the scope of the present paper.

6.2.3. Boundary condition on the accretor

The size of the accretor is known to play an important role in the strength of the instability. One reason for this is that the sonic surface ahead of the accretor is generally attached to the accretor in numerical simulations. Boundary conditions at the surface of the accretor are therefore even more crucial, since they are in contact with a subsonic flow. The advection of entropy and vorticity perturbations through the boundary condition should be considered carefully in order to avoid an artificial acoustic feedback from the accretor. For example, imposing a transverse velocity equal to zero in the perturbed Bondi flow would generate a spurious feedback f^- from any non spherical entropy/vorticity perturbations f^s , and artificially excite a vortical-acoustic cycle. A calculation in Appendix H of this condition at the boundary of a radial flow shows that

$$\left(\frac{f^-}{f^s}\right)_{\text{boundary}} = -1 \text{ if } l \neq 0. \quad (37)$$

The artificial coupling due to inadequate boundary conditions can be as strong as the physical coupling Q_2 expected from the temperature gradients in the flow.

6.3. Physical or numerical instability?

Many of the numerical artefacts discussed in Sect. 6.2 were not considered by the authors of the existing simulations. Could new simulations of BHL accretion, corrected from numerical artefacts, be stable? The physical arguments of Sect. 5 prove that the flow must be unstable, at least in the case $\gamma \sim 5/3$, $M_\infty \geq 3$, for a small enough accretor: in this case, the efficiency Q of the entropic-acoustic cycle diverges when the accretor size $r_* \rightarrow 0$. Even the leak of acoustic energy cannot diminish the efficiency Q by more than a finite geometrical factor 2–3, at most. The argument is weaker for $\gamma < 5/3$, because Q depends strongly on the unknown shape of the sonic surface.

7. Future numerical tests of the instability mechanism

Future simulations should consider carefully the numerical artefacts listed in Sect. 6.2. The boundary condition at the surface of the accretor should be designed to absorb entropy and vorticity perturbations silently: this can be tested in a uniform flow. An alternative would be to find a set of parameters such that the accretor is fully embedded inside the sonic surface. Since $\gamma = 5/3$ and $\gamma \sim 1$ are ruled out by FR97 in 3D, an intermediate choice could be $\gamma = 4/3$ with $M_\infty = 3$, and a small enough accretor. The numerical issue of the absorbing boundary condition can also be solved naturally with general relativity, for any value of γ , since the flow is bound to be supersonic on the horizon of the black hole (FI98a,b).

The stable simulations analyzed in Sect. 6.1 call for new simulations which would directly test the efficiency of the advective-acoustic mechanism in accretion flows where the shock is detached:

- all the axisymmetric, Newtonian simulations with $\gamma = 5/3$ should be unstable if $M_\infty \geq 3$ and a small enough accretor ($r_*/r_A \sim 0.005$ seems to be enough according to KMS91). In particular, new axisymmetric, relativistic simulations similar to FI98a should become unstable when considering a slower accretor with a moderate shock, such as $v_\infty/c_{\text{light}} = 0.1$, $\gamma = 5/3$, $M_\infty = 3$. The axisymmetric simulations of POM00 should also be unstable if their numerical technique allows for the advective-acoustic cycle;
- 2D planar simulation should be unstable through the entropic-acoustic cycle if the shock is detached: comparing a simulation with $\gamma \sim 3$ (see Appendix A) and the classic flip-flop obtained for $\gamma \leq 5/3$ could help to understand the respective influences of the entropic-acoustic cycle and the purely acoustic transverse instability.

In an unstable simulation, the advective-acoustic mechanism could be tested directly by measuring the incoming entropy/vorticity perturbations and the outgoing acoustic flux in the subsonic region of the flow, as measured by Blondin et al. (2004) in his simulations of spherical accretion. An indirect way of testing the instability mechanism is to measure the effect of the various physical parameters. The linear growth rate

of the entropic-acoustic cycle should increase when the accretor size is decreased, decrease for a weak shock and saturate for strong shocks. The present understanding of the 3D advective-acoustic instability when $\gamma \sim 5/3$ implies that its strength for an accretor size $r_s \sim 10^{-5} r_A$ may be significantly underestimated by the existing simulations ($r_s/r_A > 10^{-2}$). Tracing the power spectrum of the mass accretion rate (e.g. R95), as a function of the numerical resolution in the range accessible to computers, could give a hint on the extrapolation to smaller accretor sizes.

In order to better understand the instability of isothermal flows, it would be interesting to try to discriminate between a transverse instability (purely acoustic) and a vortical-acoustic cycle. The accretor size and boundary condition should play a more important role in a vortical-acoustic cycle than in a transverse instability.

8. Conclusion

The physical mechanisms underlying the longitudinal and transverse instabilities of the accretion line have been clarified. The destabilizing factor for the longitudinal instability is the density dependence of the external force per unit mass. The transverse instability is ruled by the restoring force proportional to the local inclination of the accretion line. The analogy with the instability of a flag has been outlined.

The overstable amplification of longitudinal high frequency perturbations of the accretion line found by Cowie (1977) is greatly affected by pressure forces. Density perturbations are propagated as acoustic waves. Those propagating outwards are damped, whereas those propagating inwards are transiently amplified. The analogy with the instability of radiation driven winds has been drawn.

The transverse instability of the accretion line is limited if the finite width of the shock cone is taken into account. A feedback process is necessary to explain the global flip-flop instability observed in planar 2D simulations. It seems possible that the mechanism of the transverse instability, modified by the propagation of acoustic waves within the subsonic region of the flow, leads to a global unstable mode. However, the influence of the shape of the accretor, demonstrated by ZWN95, may be a hint against this explanation of the instability.

For the first time, the advective-acoustic instability has been analyzed in the context of BHL accretion. This analysis is based on the extrapolation of the properties established in spherically symmetric flows (F01, F02). For this reason, the relevance of the advective-acoustic instabilities in BHL accretion is convincingly demonstrated only when the shock is detached from the accretor. The difference of geometry precludes an accurate prediction of the instability threshold in BHL accretion, especially since it is very sensitive to the size and shape of the sonic surface. Nevertheless, the analysis is predictive enough to assess that the advective-acoustic mechanism

- must be stable in the limit of a weak shock;
- must be unstable for 3D accretion flows with $\gamma \sim 5/3$, a reasonable shock strength $\mathcal{M}_\infty \geq 3$ and a small enough accretor size.

Numerical artefacts have also been discussed, specifically the grid size and the boundary conditions. We comment on how these artefacts must be circumvented to produce reliable numerical simulations of BHL accretion.

Surprisingly, it seems that all the existing numerical simulations can be reconciled in the framework of the advective-acoustic instability, with no striking contradiction, even when the shock is attached to the accretor. Several numerical tests of these ideas have been proposed.

Besides new numerical simulations, future analytic work ought to describe in more detail both the transverse instability modified by pressure forces, and the efficiency of the advective-acoustic cycle when the shock is attached. This could help understand why isothermal accretion is so much more unstable in 2D than in 3D.

Acknowledgements. The authors are grateful to Eglise and the British Council for their exchange programme. The anonymous referee is thanked for his constructive comments.

Appendix A: BHL stationary flow in 2D and 3D

A.1. Adiabatic index and pressure forces

The sonic radius in radial Bondi accretion, deduced from the Bernoulli equation and the conservation of mass flux, is different in 2D and 3D:

$$r_{\text{son}} = \frac{3 - \gamma}{2} \frac{GM}{c_\infty^2} \quad \text{in 2D,} \quad (\text{A.1})$$

$$r_{\text{son}} = \frac{5 - 3\gamma}{4} \frac{GM}{c_\infty^2} \quad \text{in 3D.} \quad (\text{A.2})$$

The existence of a sonic radius in radial accretion on a point like accretor requires $\gamma \leq 5/3$ in 3D, whereas plane supersonic accretion is possible up to $\gamma \leq 3$. This illustrates the fact that the 3D convergence of flow lines produces stronger pressure gradients than in 2D. These pressure gradients act against gravity. Extending to plane flows the argument used in FR97 for 3D flows, the sonic surface of a stationary BHL accretion must intersect the sphere of radius r_0 deduced from Eqs. (A.1) and (A.2), with

$$r_0 \equiv \frac{r_{\text{son}}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}_\infty^2}. \quad (\text{A.3})$$

This suggests that the shock should be detached in planar accretion with γ close to 3. SMA89 considered plane accretion with $\gamma = 2$ but the shock was still not detached. The ratio r_0/r_A is a function of γ , \mathcal{M}_∞ :

$$\frac{r_0}{r_A} = \frac{3 - \gamma}{4} \frac{\mathcal{M}_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}_\infty^2} \quad \text{in 2D,} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{r_0}{r_A} = \frac{5 - 3\gamma}{8} \frac{\mathcal{M}_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}_\infty^2} \quad \text{in 3D.} \quad (\text{A.5})$$

As already noted in FR97, the sonic surface must also be attached to the accretor if $r_0/r_A \geq 1$, because the sonic surface cannot extend beyond the distance $\sim r_A$ of the stagnation point. This concerns in particular isothermal flows with

a strong shock, for which $r_0/r_A \propto \mathcal{M}_{\infty}^2$. A critical index γ_{crit} must therefore exist, below which the shock is always attached to the accretor, whatever its size.

A.2. Accretion line

The mass flux per unit of length, along the accretion line, is constant in 3D whereas it varies like $r^{-\frac{1}{2}}$ for a planar flow (Soker 1990). By integrating Eq. (1) using Table 2,

$$\rho v = 2 \left(r^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{1}{2}} \right) \quad \text{in 2D,} \quad (\text{A.6})$$

$$\rho v = r - \alpha \quad \text{in 3D,} \quad (\text{A.7})$$

where α is the distance of the stagnation point. The asymptotic velocity within the accretion line, deduced from Eq. (2) for $r \gg \alpha$, is different in 2D and 3D:

$$v \sim 1 - \frac{\lambda}{r^{\frac{1}{2}}} \quad \text{in 2D,} \quad (\text{A.8})$$

$$v \sim 1 - \frac{\log r}{r} \quad \text{in 3D,} \quad (\text{A.9})$$

where λ is a constant.

Appendix B: Physical cause of the longitudinal instability of the accretion line

The growth rate computed by Cowie (1977) in 3D is the imaginary part of the complex frequency ω :

$$(\omega - kv)^2 = ik \left[v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{2r^2} \right]. \quad (\text{B.1})$$

The growth rate in 2D is given by strictly the same formula, although the accretion terms involve geometrical factors $1/r^{\frac{1}{2}}$ in Table 2. The absence of such factors in Eq. (B.1) led Soker (1990) to conclude that this instability is independent of accretion. This argument is insufficient, since Eq. (B.1) can be rewritten using the stationary flow equation Eqs. (2.7a) and (2.7b) of Soker (1990), as follows:

$$(\omega - kv)^2 = \frac{ik}{2} \frac{1-v}{\rho r^{\frac{1}{2}}} \quad \text{in 2D,} \quad (\text{B.2})$$

$$= \frac{ik}{2} \frac{1-v}{\rho} \quad \text{in 3D.} \quad (\text{B.3})$$

The geometrical factor $r^{\frac{1}{2}}$ is then clearly apparent. A closer look at the equations shows that the longitudinal instability is due to the density dependence of the force acting on the accretion line. Using the same normalizations of density, velocity and distances as in Soker (1990), the time dependent equations correspond to Eqs. (1) and (2).

A linearization of Eqs. (1) and (2) gives the differential equation satisfied by a perturbation of the mass flux $h \equiv \rho \delta v + v \delta \rho$:

$$v^2 \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} - \frac{\partial h}{\partial r} \left\{ 2i\omega v - \rho \frac{\partial v^2}{\partial r} + v \frac{\partial F}{\partial v} - \rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right\} - i\omega h \left\{ \rho \frac{\partial v}{\partial r} - i\omega - \frac{\partial F}{\partial v} \right\} = 0. \quad (\text{B.4})$$

The solution is written in Eq. (3) at high frequency ω using the WKB approximation. Contrary to the conclusions of Soker (1990), acceleration within the accretion line is not crucial for this instability. The simplest flow in which a similar instability occurs would be a flow with uniform density ρ_0 and velocity v_0 , subject to a force depending linearly on density: $F \equiv a(\rho - \rho_0)$ and without any mass accretion ($H \equiv 0$). The stationary flow being uniform, the uniform velocity could also be taken to be equal to zero owing to a simple change of reference frame. The evolution of perturbations can then be calculated precisely. The frequency ω and the wavevector k are related through the following dispersion relation:

$$(\omega - kv_0)^2 = ik\rho_0 \frac{\partial F}{\partial \rho}. \quad (\text{B.5})$$

The growth rate corresponds to the imaginary part ω_i :

$$\omega_i = \frac{a\rho_0}{2(\omega_r - kv_0)}. \quad (\text{B.6})$$

The amplification of perturbation is thus exponential in the direction of the external force for a positive enhancement of density. In the accretion line model, this amplification is weaker due to the weak density dependence of the external force. Using the asymptotic behaviour $v \propto -1/r^{\frac{1}{2}}$ close to the accretor, and Eq. (A.9) in 3D flows leads to Eqs. (4) and (5). By contrast, the same calculation using Eq. (A.8) in 2D flows leads to:

$$h(r) \propto r^{\frac{3}{2}} \exp \left[i\omega r \pm 2(1+i)\omega^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \right], \quad \text{for } r \gg \alpha, \quad (\text{B.7})$$

$$h(r) \propto r^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{2}{3}i\omega r^{\frac{3}{2}} \pm \frac{1-i}{2\alpha^{\frac{1}{2}}} \omega^{\frac{1}{2}} r \right], \quad \text{for } \frac{1}{\omega^2} \ll r \ll \alpha. \quad (\text{B.8})$$

The difference of asymptotic behaviors between the 2D and 3D cases is not significant.

Appendix C: Effect of pressure forces on the longitudinal instability

The linearization of the perturbed flow leads to define the perturbation f of the Bernoulli constant as follows:

$$f \equiv v\delta v + c^2 \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (\text{C.1})$$

in order to obtain a simple second order differential system satisfied by (f, g) :

$$(c^2 - v^2) \frac{\partial h}{\partial r} = i\omega(\rho f - v h), \quad (\text{C.2})$$

$$(c^2 - v^2) \frac{\partial f}{\partial r} = \left\{ -i\omega v - v \frac{\partial F}{\partial v} + \rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right\} f + \left\{ \left(i\omega + \frac{\partial F}{\partial v} \right) c^2 - v \rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right\} \frac{h}{\rho} \quad (\text{C.3})$$

A single differential equation is obtained:

$$(c^2 - v^2) \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \left\{ 2i\omega v + \rho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c^2 - v^2}{\rho} \right) + v \frac{\partial F}{\partial v} - \rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right\} + i\omega h \left\{ \rho \frac{\partial v}{\partial r} - i\omega - \frac{\partial F}{\partial v} \right\} = 0. \quad (\text{C.4})$$

Before looking for approximate solutions to this equation, the effect of pressure forces can be easily incorporated in the simple toy model used in Appendix B, with uniform density and velocity:

$$\omega = \frac{i}{2} \frac{\partial F}{\partial v} + kv \pm \left[k^2 c^2 + ik\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (C.5)$$

The problem is formally identical to that idealized by Mestel et al. (1976) and Mathews (1976), for radiation driven winds, where $F \equiv A\rho - g$. At high frequency:

$$\omega \sim k(v \pm c) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \pm \frac{\rho}{c} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right). \quad (C.6)$$

The stability of high frequency acoustic waves depends on the sign of the quantity between parenthesis. In a non uniform flow, a similar conclusion can be reached at high frequency through a WKB analysis, leading to Eq. (8).

Appendix D: Transverse instability of the accretion line

The differential equation satisfied by Θ is:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \log r^2 v}{\partial r} - \frac{2i\omega}{v} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}} v \rho} \left(1 + \frac{1}{v} \right) \right\} - \frac{\Theta}{r v^2} \left\{ r \rho \omega^2 + 2i\omega \rho v + i\omega r^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2r^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0. \quad (D.1)$$

The WKB approximation is thus:

$$\Theta \sim \frac{(\rho v)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \exp \int \left(\frac{i\omega}{v} - \frac{1}{2r^{\frac{1}{2}} v \rho} \right) dr \exp \pm \frac{1+i}{2^{\frac{1}{2}}} \omega^{\frac{1}{2}} \int \frac{dr}{r^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}}, \text{ for } \omega \gg \frac{3v}{2r}. \quad (D.2)$$

The second order differential equation in the general case corresponding to Eq. (18) is:

$$v^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} - 2i\omega v - B - C v \right) + \Theta \left(-i\omega \frac{v}{r} - \frac{A+B}{r} + i\omega C - \omega^2 \right) = 0. \quad (D.3)$$

Appendix E: Proof that $\delta K \equiv 0$ in the shocked Bondi flow

Let us recall the differential system satisfied by the perturbations f, g defined in F01 (Eqs. (B18) and (B19)):

$$v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i\omega M^2 f}{1-M^2} = \frac{i\omega v^2 g}{1-M^2} + i\omega c^2 \frac{\delta S}{\gamma}, \quad (E.1)$$

$$v \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{i\omega M^2 g}{1-M^2} = \frac{i\omega f}{c^2(1-M^2)} - \frac{lL^2}{\omega r^2} f + \frac{i\delta K}{r^2 \omega}, \quad (E.2)$$

where the constant δK and the function $\mu(r, \omega, l)$ are defined by:

$$\delta K \equiv r^2 v \cdot (\nabla \times \delta w) + l(l+1)c^2 \frac{\delta S}{\gamma}, \quad (E.3)$$

$$\mu^2 \equiv 1 - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} (c^2 - v^2). \quad (E.4)$$

Consider a spherical adiabatic shock with incident Mach number M_1 in the radial direction. Let this shock be perturbed by a sound wave with frequency ω propagating against the flow in the subsonic region, producing a displacement $\Delta\zeta(\theta, \varphi)$ and a perturbation $\Delta v(\theta, \varphi)$ of the radial velocity of the shock. Using the index “1” before the shock, and “2” after it, the conservation of mass flux and energy across the shock can be written as follows:

$$\rho_1(v_1 - \Delta v) = \rho_2(v_2 + \delta v_2 - \Delta v), \quad (E.5)$$

$$\frac{(v_1 - \Delta v)^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = \frac{(v_2 + \delta v_2 - \Delta v)^2}{2} + \frac{(c_2 + \delta c_2)^2}{\gamma - 1}, \quad (E.6)$$

where quantities are measured at the position $r_{sh} + \Delta\zeta$. Keeping the first order terms, and using the definition of f, g , together with the entropy equation, we obtain:

$$f = (v_2 - v_1)\Delta v, \quad (E.7)$$

$$g = \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \Delta v + \delta S. \quad (E.8)$$

A third equation relating δS to $\Delta v, \Delta\zeta$ could be deduced using the conservation of impulsion, in the spirit of Nakayama (1994). A more direct derivation can be obtained by noting that entropy is conserved before and after the shock, and that the entropy jump across the shock depends only on the local value of the incident Mach number M_1 in the frame of the shock (Eq. (E.9)):

$$M_1(r_{sh} + \Delta\zeta) = M_1(r_{sh}) + \frac{\Delta v}{c_1} + \Delta\zeta \frac{\partial M_1}{\partial r}, \quad (E.9)$$

$$= M_1(r_{sh}) + \left(1 + \frac{i\eta v_2}{\omega r} \right) \frac{\Delta v}{c_1}, \quad (E.10)$$

$$\eta \equiv \frac{\partial \log M}{\partial \log r}. \quad (E.11)$$

Using the Rankine-Hugoniot jump conditions, we obtain

$$\delta S = -\frac{4\gamma(M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \frac{c_1^2}{c_2^2} \left(1 + \frac{i\eta v_2}{\omega r} \right) \frac{\Delta v}{v_1}. \quad (E.12)$$

Equations (E.7) and (E.8) thus become:

$$f = -\frac{2c_1^2}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \frac{\Delta v}{v_1}, \quad (E.13)$$

$$g = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_1^2 M_1^2 - 1}{M_1^2} \left[1 - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \frac{i\eta v_2}{\omega r} \right] \frac{\Delta v}{v_1}. \quad (E.14)$$

The perturbation of non radial velocity $\delta v_\theta, \delta v_\varphi$ immediately after the shock is deduced from the conservation of the tangential component of the velocity across the shock, in the spirit of Landau & Lifschitz (1987).

$$\delta v_\theta = \frac{v_1 - v_2}{r} \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial \theta}, \quad (E.15)$$

$$\delta v_\varphi = \frac{v_1 - v_2}{r \sin \theta} \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial \varphi}. \quad (E.16)$$

The vorticity immediately after the shock is deduced from the non radial component of the linearized Euler Eqs. (B.11)

and (B.12) of F01, together with Eq. (E.7) and Eqs. (E.15) and (E.16):

$$w_r = 0, \quad (\text{E.17})$$

$$w_\theta = -\frac{c^2}{rv \sin \theta} \frac{\partial \delta S}{\partial \varphi} \frac{1}{\gamma}, \quad (\text{E.18})$$

$$w_\varphi = \frac{c^2}{rv} \frac{\partial \delta S}{\partial \theta} \frac{1}{\gamma}. \quad (\text{E.19})$$

Immediately after the shock, the constant δK defined by Eq. (E.3) is computed using Eqs. (E.18) and (E.19):

$$\delta K = 0. \quad (\text{E.20})$$

Since δK is conserved through the Bondi flow, δK is uniformly equal to zero. As a consequence, using the integrated expression of the vorticity (Eqs. (B5) to (B7) in F01), the vorticity perturbation is described by Eqs. (E.17) to (E.19) throughout the flow.

Appendix F: Advective-acoustic coupling at the shock

The perturbations f, g after the shock are decomposed as follows:

$$f = f^- + f^+ + f^S, \quad (\text{F.1})$$

$$g = g^- + g^+ + g^S, \quad (\text{F.2})$$

where f^S, g^S correspond to the entropy/vorticity wave associated to the entropy perturbation δS with $\delta K = 0$, and f^\pm, g^\pm correspond to the purely acoustic waves propagating in the direction of the flow (index +) or against the flow (index -). Neglecting the coupling between the entropic and acoustic waves in the vicinity of the shock, the entropy wave f^S, g^S is advected at the velocity of the fluid:

$$\frac{\partial f^S}{\partial r} \sim \frac{i\omega}{v} f^S, \quad (\text{F.3})$$

$$\frac{\partial g^S}{\partial r} \sim \frac{i\omega}{v} g^S. \quad (\text{F.4})$$

Replacing these derivatives in Eqs. (E.1) and (E.2), we obtain:

$$f^S \sim \frac{1 - \mathcal{M}_2^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}_2^2} c^2 \frac{\delta S}{\gamma}, \quad (\text{F.5})$$

$$g^S \sim \frac{\mu^2}{c^2} f^S. \quad (\text{F.6})$$

Acoustic waves are described by Eqs. (E.1) and (E.2) in the absence of entropy perturbations, i.e. when $\delta S = 0$. Using the WKB approximation of F01, the radial derivative of f^\pm is approximated by:

$$\frac{\partial f^\pm}{\partial r} \sim \frac{i\omega}{c} \frac{\mathcal{M} \mp \mu}{1 - \mathcal{M}^2} f_\pm. \quad (\text{F.7})$$

g^\pm is deduced from Eqs. (E.1) and (F.7):

$$g^\pm \sim \pm \frac{\mu}{\mathcal{M} c^2} f_\pm. \quad (\text{F.8})$$

The linear system (F.1), (F.2) can be transformed using Eqs. (F.5), (F.6) and (F.8), in order to express the acoustic perturbations f^\pm :

$$f^\pm = \frac{1}{2} \left[f \pm \frac{\mathcal{M}}{\mu} c^2 g - (1 \pm \mu \mathcal{M}) f^S \right]. \quad (\text{F.9})$$

Using this equation immediately after the shock, with Eqs. (E.12) to (E.14):

$$f^\pm \sim \mp \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \frac{c^2 \delta S}{1 - \mathcal{M}_1^{-2}} \frac{\mathcal{M}_2}{\mu} \left(\frac{\mu^2 \mp 2\mathcal{M}_2 \mu + \mathcal{M}_1^{-2}}{1 \mp \mu \mathcal{M}_2} \right). \quad (\text{F.10})$$

From Eqs. (F.5) and (F.10),

$$\frac{f^S}{f^-} = \frac{4}{\gamma + 1} \frac{\mu}{\mathcal{M}_2} \frac{(1 - \mathcal{M}_2^2)(1 - \mathcal{M}_1^{-2})}{(1 - \mu \mathcal{M}_2)(\mu^2 + 2\mu \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1^{-2})}. \quad (\text{F.11})$$

At high frequency such that $\mu \sim 1$,

$$\frac{f^S}{f^-} = \frac{4}{\gamma + 1} \frac{1 + \mathcal{M}_2}{1 + 2\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1^{-2}} \frac{1 - \mathcal{M}_1^{-2}}{\mathcal{M}_2}, \quad (\text{F.12})$$

$$\propto \frac{1 - \mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_2}. \quad (\text{F.13})$$

Appendix G: Entropic-acoustic coupling in 3D for $\gamma \sim 5/3$

The value of $|Q|$ deduced from F01 for γ close to 5/3 increases with frequency like $\omega_r^{1/3}$ (Eqs. (28) and (29) of F01), up to a maximum reached near the cut-off frequency. This behaviour can be understood in the framework of FT00, which argued that the efficiency of the entropic-acoustic coupling is related to the increase of enthalpy between the shock and the sonic point. A slight correction, however, should be made. Rather than the naive guess $|Q|^2 \propto c_{\text{son}}^2 / c_{\text{sh}}^2$ of Eq. (23) in FT00, one must take into account the fact that the coupling of entropy perturbations to acoustic waves must occur before the sonic radius in order to allow significant outgoing acoustic flux. The effective radius of coupling r_{eff} was computed analytically in Appendix E of F01 (Eqs. (E6) and (E13)):

$$r_{\text{eff}} \propto \omega_r^{-\frac{2}{3}}, \quad (\text{G.1})$$

$$|Q|^2 \propto \frac{c^2(r_{\text{eff}})}{c^2(r_{\text{sh}})} \propto \omega_r^{\frac{2}{3}}. \quad (\text{G.2})$$

The efficiency Q^2 deduced from the analytical calculations of F01 indeed scales like the ratio of enthalpies between the shock and the effective point of coupling r_{eff} . The radius r_{eff} coincides with the wavelength v/ω_{cut} of an entropy perturbation with a frequency ω_r close to ω_{cut} : the enthalpy effectively "seen" by this perturbation is not the enthalpy at the sonic radius but rather at the effective radius r_{eff} . From this point of view, using the same notations as in F01, $|Q_S|_{l=1} \gg |Q_S|_{l=0}$ is a natural consequence of $\omega_1^{\text{cut}} \gg \omega_0^{\text{cut}}$: non radial perturbations effectively "see" regions of higher enthalpy. The most efficient entropic-acoustic coupling is reached at frequencies close to the refraction cut-off, where $\mu \sim 1$.

Appendix H: Artificial acoustic feedback from the boundary condition on the accretor

The perturbed velocity in the direction perpendicular to the flow is deduced from the linearized Euler equations, using the vorticity given by Eqs. (E.18) and (E.19):

$$\delta v_\theta = \frac{1}{i\omega r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\text{H.1})$$

$$\delta v_\phi = \frac{1}{i\omega r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}. \quad (\text{H.2})$$

A combination of these equations involves the eigenvalues of the Laplacian in spherical coordinates:

$$l(l+1)f = -\frac{i\omega r}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \delta v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} \delta v_\phi \right]. \quad (\text{H.3})$$

Imposing $\delta v_\perp = 0$ on the boundary consequently requires $f = 0$ there, if the perturbation is not spherically symmetric ($l \neq 0$). The acoustic feedback f^- associated to the entropy/vorticity perturbation f^S passing through the boundary condition $\delta v_\perp = 0$, is deduced from the decomposition (F.1), with $f^+ = 0$ and $f = 0$:

$$\left(\frac{f^-}{f^S} \right)_{\text{boundary}} = -1 \quad \text{if } l \neq 0. \quad (\text{H.4})$$

References

- Anzer, U., Börner, G., & Monaghan, J. J. 1987, *A&A*, 176, 235 (ABM87)
- Argentina, M., & Mahadevan, L. 2004 [arXiv: cond-mat/0402667]
- Benensohn, J. S., Lamb, D. Q., & Taam, R. E. 1997, *ApJ*, 478, 723 (BLT97)
- Blondin, J. M., Kallman, T. R., Fryxell, B. A., & Taam, R. E. 1990, *ApJ*, 356, 591
- Blondin, J. M., Mezzacappa, A., & DeMarino, C. 2003, *ApJ*, 584, 971
- Boffin, H. M. J., & Anzer, U. 1994, *A&A*, 284, 1026 (BA94)
- Bondi, H., & Hoyle, F. 1944, *MNRAS*, 104, 273
- Carlberg, R. G. 1980, *ApJ*, 241, 1131
- Cowie, L. L. 1977, *MNRAS*, 180, 491
- Edgar, R. 2004, *New Astron. Rev.*, 48, 843
- Feldmeier, A., & Owocki, S. 1998, *Ap&SS*, 260, 113
- Foglizzo, T. 2001, *A&A*, 368, 311 (F01)
- Foglizzo, T. 2002, *A&A*, 392, 353 (F02)
- Foglizzo, T., & Ruffert, M. 1997, *A&A*, 320, 342 (FR97)
- Foglizzo, T., & Ruffert, M. 1999, *A&A*, 347, 901 (FR99)
- Foglizzo, T., & Tagger, M. 2000, *A&A*, 363, 174 (FT00)
- Font, J. A., & Ibanez, J. M. A. 1998a, *ApJ*, 494, 297 (FI98a)
- Font, J. A., & Ibanez, J. M. A. 1998b, *MNRAS*, 298, 835 (FI98b)
- Font, J. A., Ibanez, J. M. A., & Papadopoulos, P. 1999, *MNRAS*, 305, 920 (FIP99)
- Fryxell, B. A., & Taam, R. E. 1988, *ApJ*, 335, 862 (FT88)
- Fryxell, B. A., Taam, R. E., & McMillan, S. L. W. 1987, *ApJ*, 315, 536 (FTM87)
- Horedt, G. P. 2000, *ApJ*, 541, 821
- Hoyle, F., & Lyttleton, R. A. 1939, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 35, 405
- Hunt, R. 1971, *MNRAS*, 154, 141 (H71)
- Hunt, R. 1979, *MNRAS*, 188, 83 (H79)
- Ishii, T., Matsuda, T., Shima, E., et al. 1993, *ApJ*, 404, 706 (IMS93)
- Koide, H., Matsuda, T., & Shima, E. 1991, *MNRAS*, 252, 473 (KMS91)
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. 1987, *Fluid Mechanics*, 6 (Pergamon Press)
- Livio, M., Soker, N., de Kool, M., & Savonije, G. J. 1986, *MNRAS*, 222, 235 (LSK86)
- Livio, M., Soker, N., Matsuda, T., & Anzer, U. 1991, *MNRAS*, 253, 633
- Mathews, W. G. 1976, *ApJ*, 207, 351
- Matsuda, T., Inoue, M., & Sawada, K. 1987, *MNRAS*, 226, 785 (MIS87)
- Matsuda, T., Ishii, T., Sekino, N., et al. 1992, *MNRAS*, 255, 183 (MIS92)
- Matsuda, T., Sekino, N., Sawada, K., et al. 1991, *A&A*, 248, 301 (MSS91)
- Matsuda, T., Sekino, N., Shima, E., & Sawada, K. 1989, *MNRAS*, 236, 817 (MSS89)
- Mestel, L., Moore, D. W., & Perry, J. J. 1976, *A&A*, 52, 203
- Nakayama, K. 1994, *MNRAS*, 270, 871
- Owocki, S. P. 1994, *Ap&SS*, 221, 3
- Petrich, L. I., Shapiro, S. L., Stark, R. F., & Teukolsky, S. A. 1989, *ApJ*, 336, 313 (PSS89)
- Pogorelov, N. V., Ohsugi, Y., & Matsuda, T. 2000, *MNRAS*, 313, 198 (POM00)
- Robinet, J. C., Gressier, J., Casalis, G., & Moschetta, J. M. 2000, *J. Fluid Mech.*, 417, 237
- Ruffert, M. 1994, *A&AS*, 106, 505 (R94)
- Ruffert, M. 1995, *A&AS*, 113, 133 (R95)
- Ruffert, M. 1996, *A&A*, 311, 817 (R96)
- Ruffert, M. 1997, *A&A*, 317, 793 (R97)
- Ruffert, M. 1999, *A&A*, 346, 861 (R99)
- Ruffert, M., & Anzer, U. 1995, *A&A*, 295, 108
- Ruffert, M., & Arnett, D. 1994, *ApJ*, 427, 351 (RA94)
- Sawada, K., Matsuda, T., Anzer, U., Börner, G., & Livio, M. 1989, *A&A*, 221, 263 (SMA89)
- Shima, E., Matsuda, T., Anzer, U., Börner, G., & Boffin, H. M. J. 1998, *A&A*, 337, 311 (SMA98)
- Shima, E., Matsuda, T., Takeda, H., & Sawada, K. 1985, *MNRAS*, 217, 367 (SMT85)
- Soker, N. 1990, *ApJ*, 358, 545
- Soker, N. 1991, *ApJ*, 376, 750
- Soker, N., Livio, M., de Kool, M., & Savonije, G. J. 1986, *MNRAS*, 221, 445 (SLK86)
- Taam, R. E., & Fryxell, B. A. 1989, *ApJ*, 339, 297 (TF89)
- Taam, R. E., Fu, A., & Fryxell, B. A. 1991, *ApJ*, 371, 696
- Wolfson, R. 1977, *ApJ*, 213, 200
- Yabushita, S. 1978, *MNRAS*, 182, 371
- Zarinelli, A., Walder, R., & Nussbaumer, H. 1995, *A&A*, 301, 922 (ZWN95)

Table des figures

1	Des simulations numériques de Supernova gravitationnelle au toy-model en passant par les résultats de calculs de modes linéaires	11
1.1	Schéma du mécanisme du cycle advectif-acoustique dans l'accrétion sur une étoile à neutrons	16
1.2	Schéma du cycle entropique-acoustique dans la chambre de combustion d'un réacteur	19
1.3	Schéma du cycle vortical-acoustique dans le bec d'une bouilloire	20
1.4	Divers flots stationnaires : vitesse du son et vitesse du fluide pour $\gamma = 4/3$, $\beta = 2$, $\alpha = 1/2$ et pour une taille de cavité de $r_{sh}/r_* \sim 3,75$, $r_{sh}/r_* \sim 1,74$, $r_{sh}/r_* \sim 1,13$ et pour $\gamma = 5/3$, $\beta = 2$, $\alpha = 1/2$, pour une taille $r_{sh}/r_* \sim 3,07$, $r_{sh}/r_* \sim 1,24$	25
1.5	Divergence ou convergence du temps d'advection : en fonction de l'entropie, le rapport vitesse du son du fluide par rapport à la loi de puissance et le temps d'advection pour deux flots avec $\gamma = 4/3$ et : $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$, $r_{sh}/r_* \sim 1,74$ et $\alpha = 6$, $\beta = 1$, $r_{sh}/r_* \sim 3,51$	27
1.6	Représentations des harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \phi)$ pour $m = 0$ et $l = 0, 1, 2, 3$	28
1.7	Profil radial du nombre de Mach de flots stationnaires adiabatiques pour $\mathcal{M}_1 = 5$, $r_{sh}/r_{in} = 10$ et $\gamma = 4/3$ ou $\gamma = 1,6$	38
2.1	Vue schématique du flot d'accrétion de Bondi-Hoyle-Lyttleton sur un trou noir dans le cas d'un choc détaché. Comportement des diverses perturbations du flot	45
2.2	Vue schématique du flot d'accrétion choqué sur un trou noir	46
2.3	Taux de croissance ω_i et fréquence ω_r des modes $l = 0, 1, 2$ et 3 , d'un flot isotherme fortement choqué. Reproduction de la figure 4 de Foglizzo (2002) [34].	47

2.4	Vue schématique du flot d'accrétion plan-parallèle sur une naine blanche	48
2.5	Température maximale du gaz post-choc, Luminosité Bremsstrahlung, Position du choc et du bas de la zone de refroidissement, en fonction du temps. Reproduction de la figure 2 de l'article de Langer et al. [65]. . .	49
2.6	Taux de croissance en fonction du numéro de l'harmonique pour un refroidissement en $\beta = 2$, $\alpha = 3/2$. Reproduction de la figure 2 de Saxton et al. [95]	51
2.7	Vue schématique du flot d'accrétion radiale sur une étoile à neutrons . .	52
2.8	Taux de croissance $\text{Re}(\omega)$ et fréquence $\text{Im}(\omega)$ des modes fondamentaux pour $l = 0, 1, 3, 5$ et 10 , en fonction de la taille de la cavité, pour $\gamma = 5/3$, $\beta = 2$ et $\alpha = 1/2$. Reproduction de la figure 7 de Houck et Chevalier 1992 [50].	52
2.9	Evolution temporelle de la moyenne angulaire de la valeur absolue de la vitesse tangentielle et de la valeur absolue de la variation de pression par rapport à la valeur stationnaire. Reproduction de la figure 7 de Blondin et al. 2003 [11].	53
3.1	Vue schématique du toy-model du cycle advectif-acoustique	58
3.2	Nombre de Mach et vitesse de deux flots stationnaires dans le cadre du toy-model	60
3.3	Vitesses du son et densités de deux flots stationnaires, dans la zone de refroidissement, en fonction de l'entropie.	61
3.4	Vue schématique de l'influence du signe de $\beta - \alpha + 1$ sur les perturbation d'entropie	68
3.5	Construction du "mur" et de "l'aspirateur" à partir d'une onde incidente d'entropie et d'une onde acoustique	73
3.6	Construction du "mur" à partir de l'"aspirateur"	74
3.7	Calcul de l'efficacité totale du cycle advectif-acoustique	76
3.8	Comparaison calculs analytiques et numériques pour deux "aspirateurs"	79
3.9	Efficacité totale du cycle advectif-acoustique, $ Q^{\text{tot}} $ dans le cas d'un "aspirateur" purement adiabatique avec nos conditions limites au choc et celles de Houck et Chevalier	80
4.1	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i du mode fondamental radial $l = 0$ pour $\gamma = 5/3$ et divers refroidissements ($\beta = 2$, $\alpha = 0, 1, 3/2$) en fonction de la taille de la cavité	88

4.2	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i du mode fondamental radial $l = 0$ pour $\gamma = 4/3$ et divers refroidissements ($\beta = 2, \alpha = 1/2, 3/2, 2$) en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{sh} - r_*)/r_*$	89
4.3	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i du premier harmonique radial $l = 0$ pour $\gamma = 5/3$ et divers refroidissements ($\beta = 2, \alpha = 0, 1$) en fonction de la taille de la cavité	90
4.4	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i des modes fondamentaux radiaux $l = 0$ (haut) et non-radiaux $l = 1$ (bas) pour $\gamma = 5/3, \alpha = 1/2$ et $\beta = 2$, en fonction de la taille de la cavité	91
4.5	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i des modes fondamentaux radiaux $l = 0$ et non-radiaux $l = 1$ pour $\gamma = 4/3, \alpha = \beta = 5/2$, en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{sh} - r_*)/r_*$. Comparaison avec Houck et Chevalier [50], et Blondin [11]	92
4.6	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i du mode fondamental radial $l = 0$ et des modes non-radiaux $l = 1, l = 3$ et $l = 5$ pour $\gamma = 5/3, \alpha = 1/2$ et $\beta = 2$ en fonction de la taille de la cavité	93
4.7	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i du mode fondamental radial $l = 0$ et des modes non-radiaux $l = 1, l = 2$ et $l = 3$ pour $\gamma = 4/3, \alpha = 1/2$ et $\beta = 2$ en fonction de la taille de la cavité	94
4.8	Fréquences ω_r du mode fondamental radial $l = 0$ et du mode non-radial $l = 1$ en unité du temps du cycle advectif-acoustique en fonction de la taille de la cavité	95
4.9	Fréquences ω_r du mode fondamental radial $l = 0$ et du mode non-radial $l = 1$ en unité du temps du cycle advectif-acoustique en fonction de la taille de la cavité	96
4.10	Efficacité totale du cycle advectif-acoustique, $ Q^{tot} $ dans le cas d'un "mur", avec nos conditions limites au choc et celles de Houck et Chevalier [50]	97
4.11	Efficacité totale du cycle advectif-acoustique, $ Q^{tot} $ en fonction de l'angle θ_{in} , dans le cas d'un "mur" et avec nos conditions limites au choc	98
4.12	Spectre des modes d'oscillation : Taux de croissance des perturbations ω_i , en fonction de la fréquence ω_r pour $\gamma = 4/3, \alpha = 1/2, \beta = 2$ et $r_{sh}/r_* \sim 11,9$	99
4.13	Spectre des modes d'oscillation : Taux de croissance des perturbations ω_i en fonction de la fréquence ω_r pour le mode sphérique $l = 0$ et non-radial $l = 1$ pour $\gamma = 4/3, \mathcal{M}_1 = 5, \alpha = \beta = 5/2$ et $r_{sh}/r_* \sim 1, 165, r_{sh}/r_* \sim 2, 19$ et $r_{sh}/r_* \sim 7, 12$	100

4.14	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i du mode fondamental radial $l = 0$ et du premier harmonique radial pour $\gamma = 5/3$, $K = 1000$, $\beta = 2$ en fonction du paramètre α	102
5.1	Classification des Supernovae et origine physique	106
5.2	La Supernovae SN1987A au centre de l'image, et ces anneaux vus par le HST	111
5.3	Polarisation nette P pour une source sphérique et une source asphérique	112
5.4	Résultats d'une simulation de MacFadyen d'un modèle de collapsar . .	114
5.5	La nébuleuse de la guitare [29]. Image H_α du cône de choc produit par l'interaction d'une étoile à neutrons, le pulsar B2224+65, et de son environnement	115
5.6	Distribution de la vitesse initiale des étoiles à neutrons suivant deux gaussiennes. Reproduction de la figure 1 de Bombaci et al. [12]	116
5.7	Le pulsar du Crabe. Images combinées (rouge : optique du HST, bleu : rayons x de Chandra)	117
5.8	Vitesse latérale vue en coupe à trois instants dans les simulations de Scheck (communication privée). Mise en évidence des modes instables $l = 1$ et $l = 2$	118
5.9	Statistiques du nombre de cas en fonction de la vitesse finale de l'étoile à neutrons, de 66 simulations calculées pendant 1s après le rebond. Reproduction de la figure 5 de Janka et al. [59]	119
5.10	Evolutions "temps-rayon" de la moyenne angulaire de la vitesse latérale, de la divergence de la vitesse et de la vorticité dans une simulation de Scheck (communication privée)	120
5.11	Représentation schématique d'une Supernova de type II dans la phase où le choc est "en panne"	122
5.12	Flots stationnaires du modèle de Supernova gravitationnelle, pour deux tailles de cavités : $r_{sh}/r_* \sim 2,375$ et $r_{sh}/r_* \sim 31,3$	125
5.13	Efficacité $ Q^{tot} $ du cycle advectif-acoustique calculée dans le cadre du toy-model pour $\mathcal{M}_1 = 5$, $\mathcal{M}_{out} = 10^{-4}$, $\gamma = 4/3$, $\alpha = 6$, et $\beta = 1$: Comparaison entre les conditions limites inférieures et au choc	126
5.14	Fréquences ω_r et taux de croissance ω_i du mode fondamental radial $l = 0$ et du mode fondamental non-radial $l = 1$ pour $\mathcal{M}_1 = 5$, $\gamma = 4/3$, $\alpha = 6$ et $\beta = 1$ en fonction de la taille de la cavité $x_{s0}/r_* = (r_{sh} - r_*)/r_*$. . .	127

5.15	Spectre des modes d'oscillation : Taux de croissance des perturbations ω_i pour le mode sphérique $l = 0$ et non-radial $l = 1$ pour $\gamma = 4/3$, $\mathcal{M}_1 = 5$, $\alpha = 6$, $\beta = 1$ et $r_{\text{sh}}/r_* \sim 48,66$, $r_{\text{sh}}/r_* \sim 101,1$	129
5.16	Vitesse du son du flot stationnaire en fonction de la position : position du rayon r_{cyc}	130
B.1	Vitesses du son d'un flot stationnaire en fonction de la variable d'intégration.	146
B.2	Inverse de la perturbation de vitesse à la surface de l'étoile en fonction de la pulsation complexe.	148
B.3	Courbes $\text{Re}(\delta v/v) = 0$ et $\text{Im}(\delta v/v) = 0$ pour l'harmonique sphérique radial $l = 0$: mode fondamental et premier harmonique.	149
C.1	Schéma d'une onde d'entropie passant par la zone refroidie	151
C.2	Construction du "mur" à partir de l'"aspirateur"	153
C.3	Le cycle purement acoustique	155
C.4	Efficacité totale $ Q^{\text{tot}} $ du cycle advectif-acoustique et du cycle purement acoustique, en fonction de l'angle θ_{in}	156

Bibliographie

- [1] G. E. Abouseif, J. A. Keklak, and T. Y. Toong. Ramjet Rumble : The Low-Frequency Instability Mechanism In Coaxial Dump Combustors. *Combustion Science and Technology*, 36 :83–108, 1984.
- [2] S. Akiyama, J. C. Wheeler, D. L. Meier, and I. Lichtenstadt. The Magnetorotational Instability in Core-Collapse Supernova Explosions. *ApJ*, 584 :954–970, February 2003.
- [3] D. Arnett, B. Fryxell, and E. Mueller. Instabilities and nonradial motion in SN 1987A. *ApJ*, 341 :L63–L66, June 1989.
- [4] W. D. Arnett. Mass Dependence in Gravitational Collapse of Stellar Cores. *Canadian Journal of Physics*, 45 :1621–+, 1967.
- [5] Z. Arzoumanian, D. F. Chernoff, and J. M. Cordes. The Velocity Distribution of Isolated Radio Pulsars. *ApJ*, 568 :289–301, March 2002.
- [6] W. Baade and F. Zwicky. On Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 20 :254–+, 1934.
- [7] E. Bertschinger. On the structure and stability of radiative shock waves. *ApJ*, 304 :154–177, May 1986.
- [8] H. A. Bethe. Supernova mechanisms. *Reviews of Modern Physics*, 62 :801–866, 1990.
- [9] H. A. Bethe, G. E. Brown, and J. Cooperstein. Convection in supernova theory. *ApJ*, 322 :201–205, November 1987.
- [10] H. A. Bethe and J. R. Wilson. Revival of a stalled supernova shock by neutrino heating. *ApJ*, 295 :14–23, August 1985.

- [11] J. M. Blondin, A. Mezzacappa, and C. DeMarino. Stability of Standing Accretion Shocks, with an Eye toward Core-Collapse Supernovae. *ApJ*, 584 :971–980, February 2003.
- [12] I. Bombaci and S. B. Popov. On the nature of the bimodal initial velocity distribution of neutron stars. *A&A*, 424 :627–633, September 2004.
- [13] H. Bondi. On spherically symmetrical accretion. *MNRAS*, 112 :195–+, 1952.
- [14] H. Bondi and F. Hoyle. On the mechanism of accretion by stars. *MNRAS*, 104 :273–+, 1944.
- [15] R. Bowers and J. R. Wilson. Collapse of iron stellar cores. *ApJ*, 263 :366–376, December 1982.
- [16] R. L. Bowers and J. R. Wilson. A numerical model for stellar core collapse calculations. *ApJS*, 50 :115–159, November 1982.
- [17] R. Buras, M. Rampp, H.-T. Janka, and K. Kifonidis. Improved Models of Stellar Core Collapse and Still No Explosions : What Is Missing? *Physical Review Letters*, 90(24) :241101–+, June 2003.
- [18] A. Burrows and J. Goshy. A Theory of Supernova Explosions. *ApJ*, 416 :L75+, October 1993.
- [19] A. Burrows and J. Hayes. Pulsar Recoil and Gravitational Radiation Due to Asymmetrical Stellar Collapse and Explosion. *Physical Review Letters*, 76 :352–355, January 1996.
- [20] S. M. Candel. Acoustic Disturbance From Gas Non-Uniformities Convected Through A Nozzle. *PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena*, 1972.
- [21] S. K. Chakrabarti. Standing shocks in isothermal rotating winds and accretion. *MNRAS*, 240 :7–21, September 1989.
- [22] R. C. Chanaud and A. Powell. Some experiments concerning the Hole and Ring Tone. *Journal of the Acoustical Society of America*, 37 :902, 1965.
- [23] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. International Series of Monographs on Physics, Oxford : Clarendon, 1961, 1961.

- [24] R. A. Chevalier and J. N. Imamura. Linear analysis of an oscillatory instability of radiative shock waves. *ApJ*, 261 :543–549, October 1982.
- [25] L. Chiappetti, E. G. Tanzi, and A. Treves. The system AM HER equals 4U 1814 plus 50. *Space Science Reviews*, 27 :3–33, September 1980.
- [26] S. A. Colgate. Prompt gamma rays and X-rays from supernovae. *Canadian Journal of Physics. Proceedings of the 10th International Conference on Cosmic Rays, Calgary, Alberta, June 19-30, 1967, Vol. 46., p.476*, 46 :476–+, May 1968.
- [27] S. A. Colgate and M. H. Johnson. Hydrodynamic Origin of Cosmic Rays. *Physical Review Letters*, 5 :235–238, September 1960.
- [28] S. A. Colgate and R. H. White. The Hydrodynamic Behavior of Supernovae Explosions. *ApJ*, 143 :626–+, March 1966.
- [29] J. M. Cordes, R. W. Romani, and S. C. Lundgren. The Guitar nebula - A bow shock from a slow-spin, high-velocity neutron star. *Nature*, 362 :133–135, March 1993.
- [30] L. L. Cowie. An investigation of the stability of the Bondi-Hoyle model of accretion flow. *MNRAS*, 180 :491–494, September 1977.
- [31] R. C. Duncan and C. Thompson. Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts. *ApJ*, 392 :L9–L13, June 1992.
- [32] G. B. Field. Thermal Instability. *ApJ*, 142 :531–+, August 1965.
- [33] T. Foglizzo. Entropic-acoustic instability of shocked Bondi accretion I. What does perturbed Bondi accretion sound like? *A&A*, 368 :311–324, March 2001.
- [34] T. Foglizzo. Non-radial instabilities of isothermal Bondi accretion with a shock : Vortical-acoustic cycle vs. post-shock acceleration. *A&A*, 392 :353–368, September 2002.
- [35] T. Foglizzo and P. Galletti. Non-radial instability of stalled accretion shocks : advective-acoustic cycle. In *Cosmic explosions in three dimensions*, pages 238–+, 2004.
- [36] T. Foglizzo, P. Galletti, and M. Ruffert. A fresh look at the unstable simulations of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion. *A&A*, 435 :397–411, May 2005.

- [37] T. Foglizzo and M. Ruffert. An analytic study of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion. I. Stationary flows. *A&A*, 320 :342–361, April 1997.
- [38] T. Foglizzo and M. Ruffert. An analytic study of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion. II. Local stability analysis. *A&A*, 347 :901–914, July 1999.
- [39] T. Foglizzo, L. Scheck, and H.-Th. Janka. Neutrino-driven convection versus advection in core collapse supernovae . *submitted to A&A*, 2005.
- [40] T. Foglizzo and M. Tagger. Entropic-acoustic instability in shocked accretion flows. *A&A*, 363 :174–183, November 2000.
- [41] C. Fryer, A. Burrows, and W. Benz. Population Syntheses for Neutron Star Systems with Intrinsic Kicks. *ApJ*, 496 :333–+, March 1998.
- [42] C. L. Fryer. Neutron Star Kicks from Asymmetric Collapse. *ApJ*, 601 :L175–L178, February 2004.
- [43] C. L. Fryer and M. S. Warren. The Collapse of Rotating Massive Stars in Three Dimensions. *ApJ*, 601 :391–404, January 2004.
- [44] J. Fukue. Transonic disk accretion revisited. *PASJ*, 39 :309–327, 1987.
- [45] T. J. Galama, P. M. Vreeswijk, J. van Paradijs, C. Kouveliotou, T. Augusteijn, H. Bohnhardt, J. P. Brewer, V. Doublier, J.-F. Gonzalez, B. Leibundgut, C. Lidman, O. R. Hainaut, F. Patat, J. Heise, J. in 't Zand, K. Hurley, P. J. Groot, R. G. Strom, P. A. Mazzali, K. Iwamoto, K. Nomoto, H. Umeda, T. Nakamura, T. R. Young, T. Suzuki, T. Shigeyama, T. Koshut, M. Kippen, C. Robinson, P. de Wildt, R. A. M. J. Wijers, N. Tanvir, J. Greiner, E. Pian, E. Palazzi, F. Frontera, N. Masetti, L. Nicastro, M. Feroci, E. Costa, L. Piro, B. A. Peterson, C. Tinney, B. Boyle, R. Cannon, R. Stathakis, E. Sadler, M. C. Begam, and P. Ianna. An unusual supernova in the error box of the gamma-ray burst of 25 April 1998. *Nature*, 395 :670–672, 1998.
- [46] P. Höflich. Asphericity Effects in Scattering Dominated Photospheres. *A&A*, 246 :481–+, June 1991.
- [47] M. Herant, W. Benz, W. R. Hix, C. L. Fryer, and S. A. Colgate. Inside the supernova : A powerful convective engine. *ApJ*, 435 :339–361, November 1994.
- [48] G. Hobbs, D. R. Lorimer, A. G. Lyne, and M. Kramer. A statistical study of 233 pulsar proper motions. *MNRAS*, 360 :974–992, July 2005.

- [49] J. C. Houck and R. A. Chevalier. Steady spherical hypercritical accretion onto neutron stars. *ApJ*, 376 :234–244, July 1991.
- [50] J. C. Houck and R. A. Chevalier. Linear stability analysis of spherical accretion flows onto compact objects. *ApJ*, 395 :592–603, August 1992.
- [51] F. Hoyle and W. A. Fowler. Nucleosynthesis in Supernovae. *ApJ*, 132 :565–+, November 1960.
- [52] F. Hoyle and R. A. Lyttleton. On the accretion theory of stellar evolution. *MNRAS*, 101 :227–+, 1941.
- [53] I. J. Iben and A. V. Tutukov. On the Origin of the High Space Velocities of Radio Pulsars. *ApJ*, 456 :738–+, January 1996.
- [54] J. N. Imamura. On the stability properties of white dwarf radiative shocks. *ApJ*, 296 :128–141, September 1985.
- [55] J. N. Imamura, A. Aboasha, M. T. Wolff, and K. S. Wood. The Stability Properties of Two-Temperature White Dwarf Radiative Shock Waves. *ApJ*, 458 :327–+, February 1996.
- [56] J. N. Imamura, M. T. Wolff, and R. H. Durisen. A numerical study of the stability of radiative shocks. *ApJ*, 276 :667–676, January 1984.
- [57] H.-T. Janka. Conditions for shock revival by neutrino heating in core-collapse supernovae. *A&A*, 368 :527–560, March 2001.
- [58] H.-T. Janka and E. Mueller. Neutrino heating, convection, and the mechanism of Type-II supernova explosions. *A&A*, 306 :167–+, February 1996.
- [59] H.-T. Janka, L. Scheck, K. Kifonidis, E. Müller, and T. Plewa. Supernova Asymmetries and Pulsar Kicks — Views on Controversial Issues. In *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 372–+, April 2005.
- [60] D. J. Jeffrey. Analysis of SN 1987A polarimetry. *ApJ*, 375 :264–287, July 1991.
- [61] K. Kifonidis, T. Plewa, H.-T. Janka, and E. Müller. Non-spherical core collapse supernovae. I. Neutrino-driven convection, Rayleigh-Taylor instabilities, and the formation and propagation of metal clumps. *A&A*, 408 :621–649, September 2003.

- [62] D. Lai, D. F. Chernoff, and J. M. Cordes. Pulsar Jets : Implications for Neutron Star Kicks and Initial Spins. *ApJ*, 549 :1111–1118, March 2001.
- [63] L. D. Landau. . *Phys. Z. Sow*, 1 :285, 1932.
- [64] L. D. Landau and Lifchitz E. M. *Physique Théorique Tome 6 : Mécanique des fluides*. Pergamon Press, 1987.
- [65] S. H. Langer, G. Chanmugam, and G. Shaviv. Thermal instability in accretion flows onto degenerate stars. *ApJ*, 245 :L23–L26, April 1981.
- [66] D. C. Leonard, A. V. Filippenko, D. R. Ardila, and M. S. Brotherton. Is It Round ? Spectropolarimetry of the Type II-p Supernova 1999EM. *ApJ*, 553 :861–885, June 2001.
- [67] M. Liebendörfer. Fifty-Nine Reasons For a Supernova To Not Explode. In *12th Workshop on "Nuclear Astrophysics"*, 2004.
- [68] M. Liebendörfer, M. Rampp, H.-T. Janka, and A. Mezzacappa. Supernova Simulations with Boltzmann Neutrino Transport : A Comparison of Methods. *ApJ*, 620 :840–860, February 2005.
- [69] A. G. Lyne and D. R. Lorimer. High Birth Velocities of Radio Pulsars. *Nature*, 369 :127–+, May 1994.
- [70] A. I. MacFadyen and S. E. Woosley. Collapsars : Gamma-Ray Bursts and Explosions in “Failed Supernovae”. *ApJ*, 524 :262–289, October 1999.
- [71] W. A. Mahoney, L. S. Varnell, A. S. Jacobson, J. C. Ling, R. G. Radocinski, and W. A. Wheaton. Gamma-ray observations of Co-56 in SN 1987A. *ApJ*, 334 :L81–L85, November 1988.
- [72] F. E. Marble and S. M. Candel. Acoustic Disturbance From Gas Non-Uniformities Convected Through A Nozzle. *Journal of Sound and Vibration*, 55 :225–243, 1977.
- [73] T. Matheson, P. M. Garnavich, K. Z. Stanek, D. Bersier, S. T. Holland, K. Krisciunas, N. Caldwell, P. Berlind, J. S. Bloom, M. Bolte, A. Z. Bonanos, M. J. I. Brown, W. R. Brown, M. L. Calkins, P. Challis, R. Chornock, L. Echevarria, D. J. Eisenstein, M. E. Everett, A. V. Filippenko, K. Flint, R. J. Foley, D. L. Freedman, M. Hamuy, P. Harding, N. P. Hathi, M. Hicken, C. Hoopes, C. Impey, B. T. Jannuzi, R. A. Jansen, S. Jha, J. Kaluzny, S. Kannappan, R. P. Kirshner, D. W.

- Latham, J. C. Lee, D. C. Leonard, W. Li, K. L. Luhman, P. Martini, H. Mathis, J. Maza, S. T. Megeath, L. R. Miller, D. Minniti, E. W. Olszewski, M. Papenkova, M. M. Phillips, B. Pindor, D. D. Sasselov, R. Schild, H. Schweiker, T. Spahr, J. Thomas-Osip, I. Thompson, D. Weisz, R. Windhorst, and D. Zaritsky. Photometry and Spectroscopy of GRB 030329 and Its Associated Supernova 2003dh : The First Two Months. *ApJ*, 599 :394–407, December 2003.
- [74] T. Matsuda, M. Inoue, and K. Sawada. Spin-up and spin-down of an accreting compact object. *MNRAS*, 226 :785–811, June 1987.
- [75] T. Matsuda, N. Sekino, K. Sawada, E. Shima, M. Livio, U. Anzer, and G. Boerner. On the stability of wind accretion. *A&A*, 248 :301–314, August 1991.
- [76] T. J. Mazurek. The energetics of adiabatic shocks in stellar collapse. *ApJ*, 259 :L13–L17, August 1982.
- [77] R. McCray, M. Kafatos, and R. F. Stein. Thermal instability in supernova shells. *ApJ*, 196 :565–570, March 1975.
- [78] M. Mettenleiter, E. Haile, and S. M. Candel. Adaptive control of aeroacoustic instabilities. *Journal of Sound and Vibration*, 230 :761–789, 2000.
- [79] A. Mezzacappa, A. C. Calder, S. W. Bruenn, J. M. Blondin, M. W. Guidry, M. R. Strayer, and A. S. Umar. An Investigation of Neutrino-driven Convection and the Core Collapse Supernova Mechanism Using Multigroup Neutrino Transport. *ApJ*, 495 :911–+, March 1998.
- [80] A. Mignone. The Dynamics of Radiative Shock Waves : Linear and Nonlinear Evolution. *ArXiv Astrophysics e-prints*, May 2005.
- [81] R. Minkowski. Spectra of Supernovae. *PASP*, 53 :224–+, August 1941.
- [82] K. Nakayama. Hydrodynamic instability of accretion flows and wind flows with standing shock waves. *MNRAS*, 259 :259–264, November 1992.
- [83] K. Nakayama. Hydrodynamic instability of accretion flows and wind flows with standing shock waves. II - Necessary and sufficient condition for axisymmetric instability. *PASJ*, 45 :167–177, April 1993.
- [84] K. Nakayama. Dynamical Instability of Standing Shock Waves in Adiabatic Accretion Flows and Wind Flows. *MNRAS*, 270 :871–+, October 1994.

- [85] B. Paczynski. Are Gamma-Ray Bursts in Star-Forming Regions? *ApJ*, 494 :L45+, February 1998.
- [86] S. Perlmutter, S. Gabi, G. Goldhaber, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, R. Pain, C. R. Pennypacker, I. A. Small, R. S. Ellis, R. G. McMahon, B. J. Boyle, P. S. Bunclark, D. Carter, M. J. Irwin, K. Glazebrook, H. J. M. Newberg, A. V. Filippenko, T. Matheson, M. Dopita, W. J. Couch, and The Supernova Cosmology Project. Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First Seven Supernovae at $Z \geq 0.35$. *ApJ*, 483 :565–+, July 1997.
- [87] N. V. Pogorelov, Y. Ohsugi, and T. Matsuda. Towards steady-state solutions for supersonic wind accretion on to gravitating objects. *MNRAS*, 313 :198–208, March 2000.
- [88] D. Rockwell. Oscillations of Impinging Shear Layers. *AIAA Journal*, 21 :645–664, 1983.
- [89] D. Rockwell and E. Naudascher. Self-Sustained Oscillations Of Impinging Free Shear Layers. *Ann. Rev. Fluid Mech*, 11 :67–94, 1979.
- [90] M. Ruffert. Non-axisymmetric wind-accretion simulations. I. Velocity gradients of 3% and 20% over one accretion radius. *A&A*, 317 :793–814, February 1997.
- [91] M. Ruffert. Non-axisymmetric wind-accretion simulations. II. Density gradients. *A&A*, 346 :861–877, June 1999.
- [92] C. J. Saxton. Effects of Lower Boundary Conditions on the Stability of Radiative Shocks. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 19 :282–292, 2002.
- [93] C. J. Saxton and K. Wu. Perturbative analysis of two-temperature radiative shocks with multiple cooling processes. *MNRAS*, 310 :677–692, December 1999.
- [94] C. J. Saxton and K. Wu. Stability analyses of two-temperature radiative shocks : formulation, eigenfunctions, luminosity response and boundary conditions. *MNRAS*, 324 :659–684, June 2001.
- [95] C. J. Saxton, K. Wu, H. Pongracic, and G. Shaviv. Oscillatory instability of radiative shocks with multiple cooling processes. *MNRAS*, 299 :862–876, September 1998.

-
- [96] L. Scheck, T. Plewa, H.-T. Janka, K. Kifonidis, and E. Müller. Pulsar Recoil by Large-Scale Anisotropies in Supernova Explosions. *Physical Review Letters*, 92(1) :011103–+, January 2004.
- [97] P. R. Shapiro and P. G. Sutherland. The polarization of supernova light - A measure of deviation from spherical symmetry. *ApJ*, 263 :902–924, December 1982.
- [98] N. Soker. Stability analysis of the accretion line. *ApJ*, 358 :545–550, August 1990.
- [99] K. Z. Stanek, T. Matheson, P. M. Garnavich, P. Martini, P. Berlind, N. Caldwell, P. Challis, W. R. Brown, R. Schild, K. Krisciunas, M. L. Calkins, J. C. Lee, N. Hathi, R. A. Jansen, R. Windhorst, L. Echevarria, D. J. Eisenstein, B. Pindor, E. W. Olszewski, P. Harding, S. T. Holland, and D. Bersier. Spectroscopic Discovery of the Supernova 2003dh Associated with GRB 030329. *ApJ*, 591 :L17–L20, July 2003.
- [100] H. D. Tran, A. V. Filippenko, G. D. Schmidt, K. S. Bjorkman, B. T. Jannuzi, and P. S. Smith. Probing the Geometry and Circumstellar Environment of SN 1993J in M81. *PASP*, 109 :489–503, May 1997.
- [101] L. Wang, D. Baade, P. Höflich, and J. C. Wheeler. Spectropolarimetry of the Type Ic Supernova SN 2002ap in M74 : More Evidence for Asymmetric Core Collapse. *ApJ*, 592 :457–466, July 2003.
- [102] S. E. Woosley and T. A. Weaver. The Evolution and Explosion of Massive Stars. II. Explosive Hydrodynamics and Nucleosynthesis. *ApJS*, 101 :181–+, November 1995.
- [103] F. Zwicky. On Collapsed Neutron Stars. *ApJ*, 88 :522–525, November 1938.

Abstract

Author : Pascal GALLETTI

Title : From the advective-acoustic instability to the asymmetric explosions of Core Collapse Supernovae

Thesis advisors : Thierry FOGLIZZO (SAP, CEA) & Didier BARRET (CESR)

Abstract :

The advective-acoustic cycle is a hydrodynamical mechanism fed by the coupling between advected waves (entropy, vorticity) and an acoustic feedback. Already studied in physics (rumble instability in ramjet, whistling tea kettle), it was introduced in astrophysics in the frame of the instability of the Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion flow. In this thesis, we propose this cycle as an explanation for the asymmetry of the explosion of Core Collapse Supernovae. The evaluation of eigenmodes for the classical accretion above a solid surface (white dwarfs, neutron stars) and the use of a toy-model reveal the importance of the advective-acoustic cycle in such an instable accretion flow. Following these results and the comparison with numerical simulations, a modelisation of the flow when the shock stalls during a Core Collapse Supernova, shows that the advective-acoustic cycle is a natural mechanism to explain the non-spherical instability of the shock. The domination of $l = 1$ modes may be responsible for the observed pulsar kicks.

Keywords : Accretion - Hydrodynamics - Instabilities - Shock Waves - Supernovae

Résumé

Auteur : Pascal GALLETTI

Titre : De l'instabilité advective-acoustique aux explosions asymétriques des Supernovae de type II

Directeur de thèse : Thierry FOGLIZZO (SAP, CEA) & Didier BARRET (CESR)

Lieu et Date de soutenance : CEA-Saclay, 25/10/2005

Résumé :

Le cycle advectif-acoustique est un mécanisme hydrodynamique qui se caractérise par le couplage entre des ondes advectées (entropie, vorticité) et des ondes acoustiques. Déjà étudié en physique (sifflement de la bouilloire, grondement des statoréacteurs), il fut introduit en astrophysique par l'étude de l'instabilité du flot de Bondi-Hoyle-Lyttleton. Nous proposons dans ce travail de thèse d'expliquer l'asymétrie des explosions Supernovae de type II par ce cycle. Une première étude du cycle dans le cadre plus classique de l'accrétion sur une surface solide (naine blanche, étoile à neutrons) permet, par le calcul de modes propres d'oscillation mais également par l'étude d'un modèle simplifié, de mettre en avant le rôle joué par le cycle advectif-acoustique dans l'instabilité de cette accrétion. Fort de ces résultats et de simulations numériques encourageantes, une modélisation du flot dans la phase "stationnaire" des Supernovae gravitationnelles montre que le cycle advectif-acoustique est une explication naturelle à l'instabilité non-sphérique du choc, dominée par un mode $l = 1$ qui devrait être responsable des pulsar kicks observationnels.

Mots-clés : Accrétion - Hydrodynamique - Instabilités - Ondes de choc - Supernovae

Discipline : Astrophysique - Hydrodynamique et modélisation

Laboratoires :

CESR, 9 av du Colonel Roche, 31028 Toulouse Cedex 04
SAP-CEA, Orme des Merisiers, 91191 Gif sur Yvette