

Interactions de marée planète–disque

Frédéric Masset

25 mai 2007

Table des matières

1	Introduction	4
2	Pré-requis	7
2.1	Notions générales sur les disques protoplanétaires	7
2.2	Notation et unités	8
2.3	Couple du disque à une résonance isolée	9
2.3.1	Couple à une résonance de Lindblad	10
2.3.2	Position des résonances de Lindblad	11
2.3.3	Le cas particulier d'un disque gazeux mince et non auto-gravitant	11
2.3.4	Couple à une résonance de corotation	13
3	Migration planétaire	18
3.1	Migration de type I	18
3.1.1	Couple différentiel de Lindblad	19
3.1.2	Le rôle du gradient de pression	21
3.1.3	Propriétés du sillage	22
3.1.4	Couple de corotation co-orbital	24
3.1.5	Migration de type I et apparition des effets non-linéaires	30
3.2	Migration de type II	32
3.2.1	Apparition des chocs et asymétrie de la région fer-à-cheval	34
3.2.2	Flot en régime stationnaire et critères d'ouverture de sillon	36
3.2.3	Migration des planètes qui ouvrent un sillon	39
3.3	Migration de type III	43
3.4	Migration stochastique	57
4	Évolution de l'excentricité des protoplanètes	60
4.1	Résonances du premier ordre	62
4.2	Amortissement de l'excentricité des objets de faible masse	64
4.3	Évolution de l'excentricité des planètes géantes	65
4.4	Migration d'une planète excentrique de petite masse	67

5	Simulations numériques	72
5.1	Résultats récents des simulations numériques	72
5.1.1	Simulations en disques auto-gravitants	72
5.1.2	Simulations tridimensionnelles	73
5.1.3	Simulations impliquant deux planètes géantes	74
5.1.4	Simulations avec une thermodynamique réaliste	78
5.1.5	Simulations MHD tridimensionnelles	80
5.1.6	Évolution globale du disque	80
5.2	Problèmes potentiels des schémas numériques	81
5.2.1	Schéma de type Godunov	81
5.2.2	Schémas à grille alternée	83
5.2.3	Méthodes SPH	83
5.2.4	Artefacts dans les disques non auto-gravitants	84
6	Prospective	93
6.1	Modélisation de la migration et lien avec les propriétés statistiques 94	
6.1.1	Amélioration des prescriptions analytiques	94
6.1.2	Application aux interactions planète-planète	95
6.2	Exploitation immédiate du code JUPITER	95
6.2.1	Migration de type III en disque 3D	95
6.2.2	Amortissement des inclinaisons	96
6.3	Propriétés du flot et rôle de la vortacité	96
6.3.1	Dynamique dans la sphère de Bondi	96
6.3.2	Couple du lobe de Roche interne	97
6.3.3	Problème de l'exclusion du lobe de Roche et de l'auto-gravité	97
6.3.4	Problèmes liés à la vortacité	98
6.4	Vers une modélisation réaliste des disques protoplanétaires	98
6.4.1	Transfert radiatif	98
6.4.2	MHD	103
6.4.3	Poussières	105
7	Liste des publications	107
7.1	Publication dans des revues arbitrées	107
7.2	Liste des publications non arbitrées	108
8	Curriculum Vitae	111
9	Bibliographie	114
10	Sélection d'articles	118

Plan de ce mémoire d'habilitation

Ce mémoire comprend deux parties : un ensemble de notes de cours sur le thème des interactions planète–disque, et une sélection de cinq articles sur ce thème et sur celui des simulations numériques de disques astrophysiques. Les notes correspondent à un cours post-master que je donne tous les ans depuis quatre ans à l'École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île de France, et que j'ai également donné à Aussois (Chronologie de la formation du Système Solaire, février 2004), et à Oléron (Ecole Thématique de Physique Stellaire, Tidal Interactions in Composite Systems, septembre 2005). Bien entendu, ces notes de cours présentent un panorama beaucoup plus vaste que ma propre contribution au sujet. Lorsque je fais référence pour la première fois, dans ces notes, à l'un des travaux ajoutés en deuxième partie, je le signale par une note de pied de page.

Chapitre 1

Introduction

L'importance des interactions de marée entre un disque protoplanétaire et une planète en formation a été reconnue bien avant la découverte de la première planète extra-solaire en 1995. Goldreich et Tremaine (1980) discutent le cas d'un Jupiter plongé dans une nébuleuse protosolaire de masse minimale, et trouvent que son demi grand-axe devrait varier par suite des effets de marée avec le disque (même s'ils ne peuvent déterminer le sens de cette variation, vers le Soleil ou vers l'extérieur du système). Cette variation devrait avoir lieu sur une échelle de temps de $O(10^4)$ ans seulement, ce qui est extrêmement court au regard du temps de vie de la nébuleuse.

Jusque vers la fin des années 90, le problème des interactions de marée entre une protoplanète de faible masse et un disque protoplanétaire a été abordé par des estimations analytiques de couples. La première étape de ces travaux a consisté en la détermination du couple entre un disque en rotation différentielle et un potentiel perturbateur externe, soit à une résonance de Lindblad, soit à une résonance de corotation (Goldreich et Tremaine, 1979). Les expressions de ces couples constituent les briques élémentaires des travaux ultérieurs qui déterminent avec une précision toujours croissante le couple de marée agissant sur une protoplanète. En particulier, Ward (1986) a montré que les protoplanètes subissent un couple négatif de la part de leur disque, conduisant de ce fait à une migration vers l'objet central, sur des échelles de temps courtes comparées à la durée de vie du disque. Depuis lors, l'expression initiale du couple de marée a été considérablement raffinée. L'estimation (semi-)analytique la plus récente est celle de Tanaka et al. (2002) ; il s'agit d'une expression, valide dans le régime linéaire (c.-à-d. pour des planètes de faible masse), qui prend en compte à la fois les couples de Lindblad et de corotation dans un disque tridimensionnel, localement isotherme.

Lorsque la première planète extra-solaire fut découverte en orbite autour de 51 Peg avec une période orbitale de 4.23 jours (Mayor et al., 1995), à une distance de seulement 0.052 U.A. de l'objet central, les théories de migration planétaire se retrouvèrent sur le devant de la scène. Aucun scénario de formation planétaire raisonnable ne pouvait rendre compte de la formation de cœurs planétaires à

d’aussi faibles distances de l’objet central. Il apparut alors vraisemblable que cette planète s’était formée beaucoup plus loin dans le disque et avait migré vers l’étoile, en accord avec les prédictions théoriques des années 80 (Lin et al., 1996).

Fût-il encore besoin de prouver qu’une migration significative peut avoir lieu dans les systèmes planétaires en formation, des preuves supplémentaires furent fournies par la découverte de systèmes planétaires exhibant des résonances de moyen mouvement. L’exemple le plus connu est celui de GJ 876, où les deux planètes ont des périodes orbitales respectivement d’environ 30 et 60 jours. La résonance de moyen mouvement 2 : 1 a été trouvée dans d’autres systèmes multiples¹. Sous les effets d’une migration différentielle (la planète externe migrant plus vite que l’interne), les orbites des deux planètes peuvent converger et conduire à la capture dans une résonance de moyen mouvement.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

- Au chapitre 2.3, nous présentons les expressions des couples de marée aux résonances de Lindblad et de corotation. Puisque plusieurs démonstrations des valeurs de ces couple existent dans la littérature, nous ne les répétons pas ici. Nous préférons illustrer et justifier leurs propriétés, afin que le lecteur puissent les appréhender avec un certain sens physique.
- Au chapitre 3, nous dressons la liste des différents types de migration contemplés jusqu’à présent. Dans la section 3.1, nous utilisons les expressions des couples de la section 2.3 pour caractériser la migration des planètes de faible masse dans un disque non turbulent (également appelée migration de type I). Dans cette section nous justifions également pourquoi une migration vers l’intérieur est inévitable. Ce résultat n’est pas évident *a priori*, puisque le léger déséquilibre des couples de marée peut sembler bien fragile, et l’on pourrait s’attendre à pouvoir l’inverser facilement en “jouant” sur le profil de densité de surface d’un disque. Nous verrons qu’il n’en est rien. Nous nous intéresserons également à la détermination de la masse de planète pour laquelle les effets non-linéaires sur le flot du disque commencent à se manifester. Dans la section 3.2, nous nous intéressons à la réponse du disque dans un régime fortement non-linéaire, à grande masse de planète. Nous y verrons qu’une protoplanète géante ouvre un sillon circulaire dans le disque, autour de son orbite. La migration qui s’ensuit dans le disque ainsi partitionné diffère fortement de la migration de type I. Nous décrivons les propriétés de ce type de migration, appelée migration de type II, et nous évoquons quelques questions ouvertes pertinentes. À la section 3.3 nous présentons un mode de migration récemment découvert, qui concerne les planètes sous-géantes dans des disques massifs, et qui est fondé sur une action “dynamique” (avec un sens que nous préciserons) du couple de corotation. Sous certaines conditions que nous verrons en détail, la migration de tels objets peut s’emballer, indifféremment vers l’intérieur ou l’extérieur. Ce type de migration est

¹Voir l’Encyclopédie des Planètes Extra-solaire à l’adresse <http://exoplanet.eu> pour un catalogue à jour des candidats exoplanètes.

simplement appelé migration emballée ou parfois migration de type III. Finalement, dans la section 3.4 nous présentons un mode de migration appelé migration stochastique ou diffusive, qui a récemment été identifiée dans des simulations numériques lourdes. Ce type de migration concerne les planètes de masse petite ou intermédiaire ($M_p < \sim 30 M_\oplus$), immergées dans les régions d'un disque protoplanétaire envahies par la turbulence MHD provenant de l'instabilité magnéto-rotationnelle. Cette turbulence induit d'importantes fluctuations du couple exercé sur la planète, en vertu de quoi le demi grand-axe de cette dernière évolue selon une marche au hasard plutôt que de manière monotone.

- Dans le chapitre 4 nous dressons un bilan des échanges d'énergie et de moment angulaire entre un disque et une protoplanète excentrique. À la section 4.1 nous verrons qu'en plus des résonances principales de Lindblad et de corotation déjà étudiées dans le cas circulaire, il existe un autre ensemble de résonances où le couple de marée est proportionnel à l'excentricité. Ce sont les résonances de Lindblad et de corotation du premier ordre, qui ont un impact important sur l'évolution de l'excentricité d'une planète. À la section 4.2 nous utilisons ces résultats pour estimer l'échelle de temps des variations d'excentricité d'une planète de faible masse. À la section 4.3 nous considérons le cas d'une planète qui ouvre un sillon profond. Dans ce cas certaines des résonances sont inactives et le bilan d'excentricité est affecté. Ceci nous conduit à une question d'actualité, non encore tranchée : les interactions de marée planète–disque peuvent-elles rendre compte de l'étonnante dispersion des excentricités de planètes extra-solaires découvertes jusqu'à présent ? Pour conclure ce chapitre, à la section 4.4, nous discuterons comment la migration de type I d'une protoplanète de faible masse est altérée si cette dernière possède une excentricité finie.
- Au chapitre 5, nous présentons les différentes familles de codes numériques qui ont été utilisés jusqu'à présent pour simuler les interactions entre un disque protoplanétaire et une protoplanète. Nous discutons brièvement les qualités et défauts de chaque famille. À la section 5.1 nous donnons une liste de résultats, attendus ou surprenants, que les simulations numériques ont récemment apportés à notre appréhension des interactions planète–disque. Pour conclure ce chapitre, nous discutons à la section 5.2 quelques problèmes liés directement aux simulations numériques. Ces problèmes peuvent être inhérents à un schéma numérique particulier, ou être de nature conceptuelle. Dans ce dernier cas, nous étudierons en détail les problèmes liés au fait que l'on néglige pratiquement toujours l'auto-gravité du disque.

Chapitre 2

Pré-requis

2.1 Notions générales sur les disques protoplanétaires

Dans ce bref chapitre nous présentons les notions relatives aux disques protoplanétaires qui nous seront utiles dans toute la suite de ce mémoire. Les disques protoplanétaires qui nous intéressent sont ceux qui correspondent aux stages précoces de la formation des systèmes planétaires, ceux pour lesquels l'objet central est dans sa phase T Tauri. Ce sont des disques massifs (dont la masse varie entre 10^{-3} et 10^{-1} fois celle de l'objet central) et essentiellement gazeux. Leur contenu solide, exclusivement poussiéreux dans un premier temps, représente environ 1 % de leur masse. Leur durée de vie se situe typiquement entre 1 et 10 millions d'années (Haisch et al., 2001), ce qui nous donne une limite supérieure de la durée de toute interaction planète–disque susceptible d'avoir lieu au cours de la formation planétaire. Ces disques sont également des disques minces ; l'échelle de hauteur H de la pression ne représente, en tout point du disque, que quelques pour-cents de la distance r à l'objet central : $H/r \sim 0.03 - 0.1$. Ce rapport est souvent appelé le rapport d'aspect du disque, ou *aspect ratio* dans la littérature anglo-saxonne. Nous le noterons désormais h dans toute la suite de ce mémoire. Parce qu'ils sont minces, les disques protoplanétaires sont également quasi-képlériens. Le gradient radial de pression est petit comparé à la force centrifuge, de telle manière que l'équilibre centrifuge est atteint pour une vitesse angulaire quasiment égale à la vitesse képlérienne. L'épaisseur du disque est reliée à la vitesse du son c_s et à la fréquence orbitale Ω par l'égalité $H = c_s/\Omega$.

Nous mentionnons ci-après des fréquences importantes associées aux disques en rotation différentielle.

- La première constante de Oort est :

$$A = (1/2)r d\Omega/dr. \quad (2.1)$$

Elle est proportionnelle au cisaillement du flot (et donc nulle si et seulement si la rotation est solide). Dans un disque képlérien, elle vaut $A =$

$-(3/4)/\Omega$.

– La deuxième constante de Oort est :

$$B = (1/2r)d(r^2\Omega)/dr. \quad (2.2)$$

Cela représente la moitié de la composante verticale de la vorticité de flot. Il se trouve également que B est $(2r)^{-1}$ fois la dérivée radiale du moment angulaire spécifique du flot. Dans un disque képlérien, sa valeur est $\Omega/4$.

– Une autre fréquence locale importante est la fréquence épicyclique κ , définie par $\kappa^2 = 4\Omega B$. C'est la fréquence à laquelle une particule test décrit une épicycle autour de son centre guide, lequel a un mouvement circulaire uniforme. Dans un disque képlérien, nous avons la dégénérescence $\kappa = \Omega$, qui assure que les orbites du problème à deux corps sont fermées, puisqu'une particule test boucle son épicycle dans le temps ou son centre-guide décrit un tour exactement autour de l'objet central.

– Une autre grandeur que nous utiliserons est la vorticité potentielle du flot, également parfois appelée vortensité. Elle est égale à la valeur de la composante verticale de la vorticité du flot divisée par la densité de surface. Il est à noter que puisque la vorticité n'est pas une grandeur extensive, l'appellation vorticité spécifique est à éviter pour désigner la vortensité.

Une approximation fréquente consiste à utiliser une équation d'état localement isotherme pour le gaz. En conséquence, les chocs excités par la planète en orbite dans le gaz sont également considérés comme des chocs isothermes. Une autre approximation fréquente consiste à négliger l'auto-gravité du gaz. Le paramètre Q du Toomre (Toomre, 1969) est grand dans les disques protoplanétaire ($Q \gg 1$), ce qui suggère que leur gravité propre est négligeable. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces questions plus en détail.

Les disques protoplanétaires sont des disques d'accrétion, dans lesquels le transfert radial de moment angulaire est assuré par de la turbulence (ce que nous reverrons plus en détail à la section 3.4). Les effets de la turbulence sont souvent modélisés par l'équation de Navier-Stokes dans laquelle on introduit un viscosité cinématique de cisaillement ν finie. Il est raisonnable de supposer que ce paramètre dépend de l'épaisseur du disque et de la fréquence orbitale; l'approche standard consiste à introduire ce que l'on appelle la paramétrisation *alpha* (Shakura et Sunyaev, 1973) : $\nu = \alpha H^2 \Omega$, où α est un paramètre sans dimension dont on pense qu'il vaut entre 10^{-4} et 10^{-2} dans les disques protoplanétaires.

2.2 Notation et unités

En plus des notations introduites à la section précédente, nous noterons dans tout ce mémoire Σ la densité de surface du disque, a le demi grand-axe de la planète, e son excentricité, M_p sa masse, Ω_p sa fréquence orbitale, $T_0 = 2\pi/\Omega_p$ sa période orbitale, et M_* la masse de l'objet central. Nous noterons q le rapport de masse M_p/M_* . La position d'un élément de fluide du disque est définie par sa distance r   l'objet central, son azimut ϕ et sa colatitude θ (ϕ et θ sont définies

dans le repère de coordonnées sphériques dont l’axe des pôles est orthogonal au plan équatorial du disque). Nous ferons fréquemment l’hypothèse que le profil de densité de surface est une loi de puissance du rayon : $\Sigma(r) \propto r^{-\zeta}$. Nous notons $m_D = \pi \Sigma(r) r^2$ la masse “locale” du disque, dans la mesure où cette quantité dépend de la position dans le disque. Nous notons μ_D le rapport de cette masse à celle de l’objet central : $\mu_D = m_D/M_*$. Chaque fois que nous indiquerons la valeur d’une masse planétaire en masses terrestres ou en masses joviennes, cela se fera sous l’hypothèse que l’objet central a une masse solaire.

Fréquemment les simulations numériques d’interactions planète–disque se font dans un système d’unité où le rayon orbital initial de la planète est l’unité de longueur, la masse de l’objet central est l’unité de masse, et l’unité de temps est choisie de telle manière que G , la constante de la gravitation, soit aussi égale à l’unité. Ceci implique que la fréquence orbitale initiale de la planète est également unitaire, et donc que sa période orbitale initiale vaut 2π . Il est fréquent d’exprimer la date en périodes orbitales de la planète. Bien que cela ne soit pas alors explicité, on se réfère toujours à la période orbitale initiale de la planète. Le nombre réel d’orbites effectuées par la planète est différent, si la planète a migré. Nous utiliserons toujours cette convention par la suite.

2.3 Couple du disque à une résonance isolée

Le potentiel gravitationnel de tout perturbateur peut se décomposer en série de Fourier en azimut, c.-à-d. s’exprimer comme une série sur m (entier) de potentiels qui ont une dépendance sinusoïdale en l’azimut, et qui présentent m maxima et m minima. Dans ce qui suit, nous appellerons composantes de nombre d’onde m les différents termes de cette série. Le potentiel total et chacune de ses composantes tourne à la vitesse angulaire Ω , de telle sorte que chaque composante peut s’écrire sous la forme :

$$\Phi(r, \phi, \theta) = \Phi_m(r, \theta) \cos[m(\phi - \Omega t) + \varphi_m(r, \theta)]. \quad (2.3)$$

$\Phi_m(r, \theta)$ et $\varphi_m(r, \theta)$ sont des fonctions réelles du rayon et de la colatitude qui représentent respectivement l’amplitude et la phase de la composante du potentiel. Si l’on fait l’hypothèse que le disque est infiniment mince (approximation 2D), nous pouvons ignorer la dépendance en colatitude et écrire chaque composante sous la forme :

$$\Phi(r, \phi, t) = \Phi_m(r) \cos[m(\phi - \Omega t) + \varphi_m(r)]. \quad (2.4)$$

Dans le cas particulier d’une planète en orbite circulaire fixe, nous avons $\varphi_m(r) \equiv 0$ et toutes les composantes du potentiel tournent à la même vitesse que la planète : $\Omega \equiv \Omega_p$. Le problème de la détermination du couple entre le perturbateur et le disque se ramène alors à déterminer le couple entre une composante du potentiel en rotation uniforme et le disque. Goldreich et Tremaine (1979) ont montré que l’échange de moment angulaire a lieu exclusivement aux résonances de Lindblad et de corotation. Les résonances de Lindblad correspondent aux

positions dans le disque où la fréquence du perturbateur dans le référentiel de la matière ($\tilde{\omega}(r) = m[\Omega_p - \Omega(r)]$) est égale à $\pm\kappa(r)$ (la fréquence épicyclique). La résonance de corotation a lieu là où la fréquence du perturbateur, dans le référentiel lié à la matière, est nulle, autrement dit là où matière et onde tournent à la même vitesse. Nous donnons ci-après l'expression du couple aux deux types de résonances.

2.3.1 Couple à une résonance de Lindblad

Nous ne redémontrons pas ici l'expression du couple de Lindblad à une résonance, que l'on peut trouver dans la littérature (Goldreich et Tremaine, 1979; Meyer-Vernet et Sicardy, 1987; Artymowicz, 1993b). Elle s'écrit :

$$\Gamma_m = -\frac{m\pi^2\Sigma}{rdD/dr} \left(r \frac{d\Phi_m}{dr} + \frac{2\Omega}{\Omega - \Omega_p} \Phi_m \right)^2, \quad (2.5)$$

où Γ_m est le couple exercé sur le disque par le perturbateur et $D = \kappa(r)^2 - m^2[\Omega(r) - \Omega_p]^2$ est une distance à la résonance. Dans l'équation (2.5), le terme entre parenthèses et rdD/dr doivent être évalués à la position de la résonance. Dans un disque képlérien, rdD/dr est positif à la résonance interne de Lindblad (ILR), c.-à-d. là où $\tilde{\omega} = -\kappa$, et il est négatif à la résonance externe de Lindblad (OLR), où $\tilde{\omega} = +\kappa$. Le potentiel perturbateur exerce par conséquent un couple négatif sur le disque à la résonance interne de Lindblad, et un couple positif à la résonance externe de Lindblad. La réciprocity des forces entraîne que le disque exerce un couple négatif sur le perturbateur à l'OLR, et positif à l'ILR.

L'équation (2.5) entraîne les remarques suivantes :

- Le couple est proportionnel à la densité de surface du disque et au carré du potentiel perturbateur. Cette dernière dépendance vient du fait que $\Gamma_m = \int_{\text{disk}} \Sigma \frac{\partial \Phi_m}{\partial \varphi}$. Puisque seule la composante de la densité de surface de nombre d'onde azimutal m contribue à l'intégrale ci-dessus, l'intégrande est le produit de deux facteurs tous deux proportionnels au potentiel perturbateur.
- A la position exacte de la résonance (c.-à-d. $D = 0$), $(rdD/dr)^{-1}$ est proportionnelle à la largeur de la résonance. Le couple est donc proportionnel à la largeur de cette dernière.
- Mise à part la densité de surface et la vitesse de rotation, aucune quantité physique du disque n'apparaît dans l'expression du couple (comme la vitesse du son, par exemple). En fait, l'expression du couple est indépendante des processus physiques sous-jacents dans le disque, et qui se chargent d'emporter le moment angulaire déposé à la résonance (Meyer-Vernet et Sicardy, 1987). Dans le cas le plus simple, celui d'un disque sans pression, inviscide et non auto-gravitant (c.-à-d. composé de particules test), l'échange de moment angulaire a lieu exclusivement à la position des résonances et le moment angulaire s'y accumule. Pour obtenir un régime stationnaire, un processus physique additionnel doit être à l'œuvre pour évacuer de la résonance le moment angulaire que le perturbateur

y dépose. Meyer-Vernet et Sicardy (1987) ont montré que la dissipation (sous la forme d'une forme de traînée simple en $-Q\vec{v}$, ou bien due à une viscosité de cisaillement ou de bulk), les effets de pression ou l'auto-gravité peuvent aider à évacuer le moment angulaire de la résonance, ce qui permet d'atteindre un régime stationnaire et par conséquent une valeur de couple constante. Le résultat remarquable est que le processus physique impliqué affecte la forme et la largeur de la résonance, mais laisse inchangée la valeur du couple.

2.3.2 Position des résonances de Lindblad

Nous souhaitons à présent établir la position des résonances de Lindblad dans un disque képlérien. Comme indiqué précédemment, les résonances de Lindblad ont lieu là où $\tilde{\omega} = \pm\kappa$ (le signe du haut se réfère à une OLR, tandis que le signe du bas se réfère à une ILR). En utilisant le fait que $\kappa = \Omega$ dans un disque képlérien, nous obtenons :

$$\Omega(r_{\text{LR}}) = \frac{m}{m \pm 1} \Omega_p. \quad (2.6)$$

Nous pouvons ainsi faire les observations suivantes :

- À une résonance de Lindblad, les éléments de fluide sont en résonance de moyen mouvement avec la planète; ils décrivent $m \pm 1$ orbites autour de l'objet central lorsque la planète en décrit m .
- Dans un disque képlérien, la composante $m = 1$ du potentiel n'a pas d'ILR, puisque le dénominateur de l'équation (2.6) s'annule (signe du bas).
- À une résonance externe de Lindblad (resp. interne), le disque tourne plus lentement (resp. vite) que le potentiel perturbateur. Puisque $\Omega(r)$ est une fonction décroissante de r dans un disque Képlérien, ceci indique que l'OLR se trouve à l'extérieur du rayon de corotation r_c du perturbateur (défini par $\Omega(r_c) = \Omega_p$), alors que l'ILR se trouve à l'intérieur de ce rayon. Ceci justifie les appellations de ces résonances.

2.3.3 Le cas particulier d'un disque gazeux mince et non auto-gravitant

Bien que l'expression du couple donnée par l'équation (2.5) soit indépendante du processus physique responsable de l'évacuation du moment angulaire, il est intéressant de regarder le cas particulier dans lequel ce sont les ondes acoustiques qui jouent ce rôle, puisque c'est effectivement le cas dans les disques protoplanétaires. La relation de dispersion des perturbations dans de tels disques s'écrit :

$$\tilde{\omega}^2 = \kappa^2 + c_s^2 k^2, \quad (2.7)$$

où k est le vecteur d'onde des perturbations. L'équation (2.7) est représentée graphiquement à la figure 2.1. On peut y voir que les ondes ne se propagent pas dans une bande centrée sur la corotation incluant les résonances de Lindblad. Un

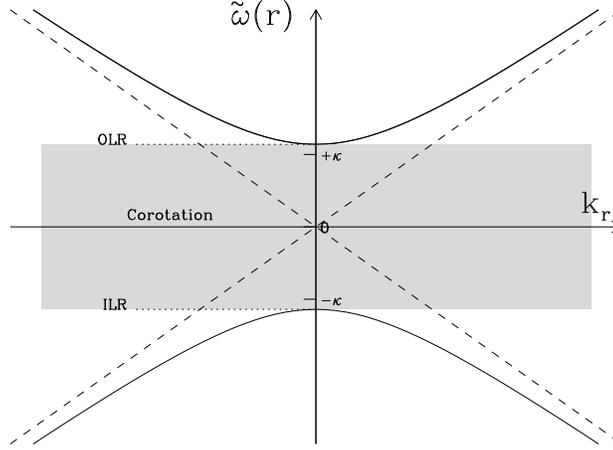


FIG. 2.1 – Représentation graphique de la relation de dispersion donnée à l’équation (2.7). L’axe des abscisses représente la norme du vecteur d’onde radial, tandis que l’axe des ordonnées représente la fréquence de l’onde dans le référentiel de la matière. Cette dernière est une fonction croissante de r , qui s’annule par définition à la corotation. La branche supérieure atteint un minimum à $\kappa(1 + m^2 c_s^2 / \kappa^2 r^2)^{1/2} = \kappa(1 + m^2 h^2)^{1/2}$, tandis que la branche inférieure atteint un maximum à $-\kappa(1 + m^2 h^2)^{1/2}$. La ligne pointillée montre la relation de dispersion asymptotique à grand k_r . C’est la relation de dispersion d’ondes acoustiques, qui se propagent vers l’intérieur ou l’extérieur. La zone grisée montre la bande interdite autour de la corotation.

autre effet notable est que les ondes ne peuvent même pas atteindre la position exacte (“nominale”) de leurs résonances de Lindblad. Les points tournant sont situés légèrement plus loin de la corotation, puisqu’aux résonances de Lindblad $k = 1/m$. Ceci est un effet de pression, puisque cet écart est lié à la finitude de la vitesse du son.

L’équation (2.7) implique qu’à l’intérieur de la bande interdite, le vecteur d’onde radial est un imaginaire pur. Ceci indique qu’une perturbation dans cette bande ne présente aucun enroulement, et qu’elle décroît exponentiellement sur une échelle de longueur qui dépend de sa distance à la corotation. À la corotation, cette distance est égale à l’épaisseur du disque $H = c_s / \kappa$.

À la figure 2.2, nous montrons la réponse du disque à un potentiel $m = 3$ en rotation uniforme. Cette figure a été obtenue à partir de simulations hydrodynamiques d’un disque képlérien, pour lequel $h = 0.05$. Ces calculs ont été effectués sur une grille polaire (ce qui explique le trou central¹). Sur la figure 2.3, nous montrons l’amplitude et la phase de la réponse $m = 3$ du disque en fonction du

¹Le rayon interne de la grille est dans ce cas $0.4a$.

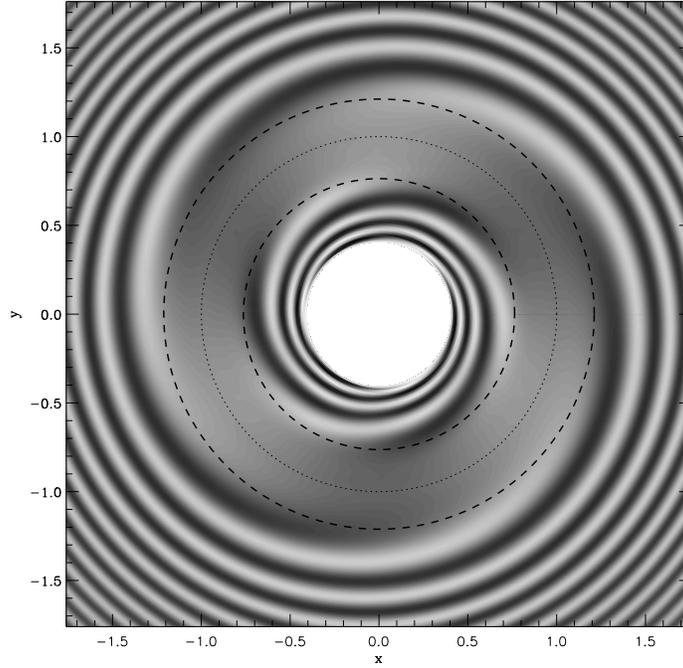


FIG. 2.2 – Champ de vitesse radiale dans un disque képlérien sujet à l’action d’un potentiel $m = 3$ en rotation uniforme. La ligne pointillée montre la corotation avec le perturbateur, et les lignes en tirets gras montrent son ILR et son OLR.

rayon. Ces figures illustrent la plupart des propriétés mentionnées ci-dessus, à savoir :

- Les ondes constituant la réponse du disque sont lancées au résonances de Lindblad.
- Les ondes sont évanescentes dans la bande comprise entre les résonances de Lindblad, centrée sur la corotation.
- Dans la bande interdite les perturbations ne présentent pas d’enroulement.

2.3.4 Couple à une résonance de corotation

Les échanges de moment angulaire à une résonance de corotation et à une résonance de Lindblad sont dûs à des processus physiques distincts. Dans le premier cas le potentiel perturbateur tend à exciter du mouvement épicyclique, et (comme nous l’avons vu à la section 2.3.3) le moment angulaire est évacué par des ondes de pression (ondes acoustiques). D’un autre côté, nous avons vu que ces ondes sont évanescents dans la région de corotation et sont par conséquent incapables de retirer le moment angulaire déposé par le perturbateur.

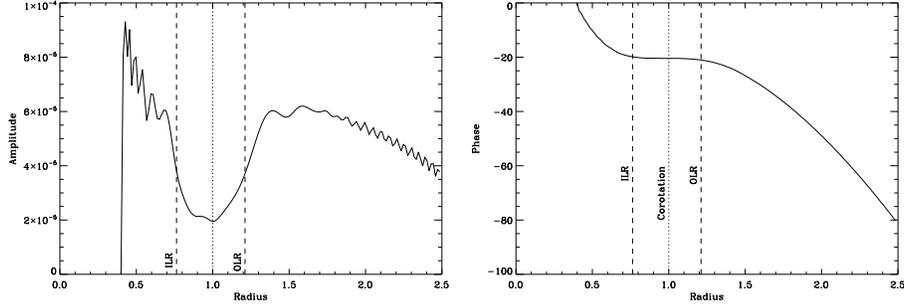


FIG. 2.3 – Amplitude (à gauche) et phase (à droite) de la composante $m = 3$ de la réponse en vitesse radiale de la figure 2.2, en fonction de la distance à l’objet central.

La représentation du flot à une résonance de corotation de nombre d’onde azimutal correspond à un ensemble de m îlots de libration (en forme d’œil) dans lesquels les éléments de fluide suivent des lignes de courant fermées. Ces îlots sont représentés sur la figure 2.4. Les lignes de courant de cette figure ont été obtenues à partir d’une simulation hydrodynamique d’un disque pour lequel $h = 0.01$. Elles diffèrent très peu des lignes de courant que l’on pourrait obtenir en utilisant l’approximation exposée ci-dessous.

On peut considérer les équations du flot linéarisées dans la région de corotation, et éliminer tous les termes proportionnels à x (la distance au rayon de corotation), et l’on peut supposer que le potentiel perturbateur ne dépend que de ϕ (c.-à-d. que $\Phi(r, \phi, t) = \Phi_0 \cos\{m[\phi - \Omega(r_c)t]\}$, où r_c est le rayon de corotation). Ceci nous conduit à l’expression suivante pour la vitesse radiale perturbée :

$$v_r = \frac{m\Phi_0}{2Br_c} \sin(m\phi'), \quad (2.8)$$

où nous introduisons le terme $\phi' \equiv \phi - \Omega(r_c)t$. La vitesse azimutale n’est pas perturbée : $v_\phi = 2Ax$. Les lignes de courant vérifient donc l’équation suivante :

$$\frac{\Phi_0}{AB} \sin^2\left(\frac{m\phi}{2}\right) = x^2 - x_m^2, \quad (2.9)$$

où $x_m > 0$ est une constante d’intégration, et où nous n’écrivons plus le prime pour des raisons de simplicité. Sans altérer la généralité de l’analyse, on peut se restreindre au cas $\Phi_0 > 0$. Dans ce cas x_m représente le maximum de la distance au rayon de corotation, qui est atteinte pour $m\phi = 0 \text{ mod. } \pi$ puisque $AB < 0$. Une ligne de courant intersecte la corotation si et seulement si $x_m^2 < x_c^2 = -\frac{\Phi_0}{AB}$, ce qui implique que la largeur des îlots de libration représentés à la figure 2.4 est $w = 2x_c = (32)^{1/2}\delta_\psi$. Le dernier facteur de cette expression est défini de la manière suivante :

$$\delta_\psi = [\Phi_0/(-\kappa^2 d \log \Omega / d \log r)]^{1/2} = [\Phi_0/(-8AB)]^{1/2}. \quad (2.10)$$

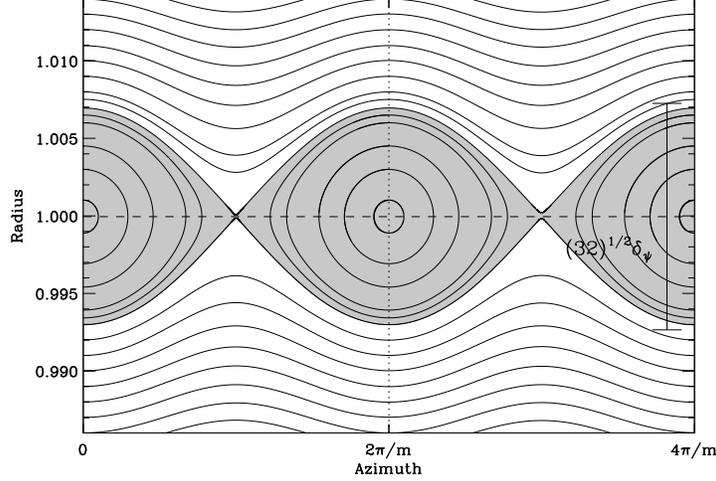


FIG. 2.4 – Lignes de courant dans le plan (φ, r) pour une résonance $m = 2$. Les régions grisées sont les régions de libration. On note que les lignes de courant des régions interne et externe (en blanc) sont circulantes, et qu’elles exhibent des oscillations radiales. L’amplitude de ces oscillations radiales décroît avec la distance au rayon de corotation ($r = 1$). En outre, elles ne présentent aucun enroulement, c.-à-d. qu’elles atteignent toutes leur distance maximale (resp. minimale) à la corotation pour le même azimuth : $\varphi = 0; 2\pi/m, \dots$. Ceci est le comportement que l’on attend d’ondes de pression évanescentes, qui ont un vecteur d’onde radial imaginaire pur (donc sans enroulement, et avec une décroissance exponentielle sur l’échelle de pression du disque).

Les lignes de courant pour lesquelles $x_m < x_c$ sont fermées et se trouvent à l’intérieur des îlots de libration, tandis que les ligne de courant pour lesquelles $x_m > x_c$ n’atteignent jamais la corotation. Elles sont représentées sur fond blanc à la figure 2.4. Les îlots de libration sont ainsi appelés car le fait qu’un élément de fluide soit en libration signifie que son angle caractéristique (ici, son azimuth) ne balaye pas tout l’intervalle $[0, 2\pi]$, et que par conséquent cet angle n’est pas une fonction monotone du temps. Sa dérivée change périodiquement de signe. En revanche, les éléments de fluide hors des îlots ont les propriétés contraires : l’azimut de ces éléments croissent ou décroissent de manière monotone au cours du temps, et leur azimuth balaye tout l’intervalle $[0, 2\pi]$. Les lignes de courant pour lesquelles $x_m = x_c$ séparent ces deux domaines (le domaine de circulation et le domaine de libration), et sont appelées les *séparatrices*.

Nous listons à présent quelques propriétés du couple de corotation exercé sur le disque par un potentiel externe de nombre d’onde azimuthal m .

Tout d’abord, ce couple est proportionnel au gradient de Σ/B évalué au rayon de corotation. Puisque B est égal à la moitié de la vorticité du flot, le

couple de corotation est proportionnel au gradient de vortensité. Le couple de corotation s'annule donc dans une disque pour lequel $\Sigma \propto r^{-3/2}$, tel que la nébuleuse protosolaire de masse minimale (MMSN).

Le couple de corotation exercé par un potentiel externe de nombre d'onde azimutal m es :

$$\Gamma_C = \frac{\pi^2 m}{2} \left[\frac{\Phi_m^2}{d\Omega/dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{\Sigma}{B} \right) \right]_{r_c}, \quad (2.11)$$

où le facteur entre crochets doit être évalué au rayon de corotation.

L'échelle de temps de la libration est beaucoup plus grande que la période orbitale. En conséquence, à l'échelle de temps orbitale le mouvement d'un élément de fluide en libration peut être considéré comme circulaire dans le référentiel inertiel. Ces éléments fluide ont donc un moment angulaire spécifique qui dépend exclusivement de leur position radiale. Puisqu'ils sont en libration sur un domaine borné en rayon, la valeur moyenne de leur variation de moment angulaire doit tendre vers zéro sur un intervalle temporel grand devant la période de libration.

La période de libration dépend en outre de la ligne de courant. Ceci implique que le mélange de phase fait tendre le couple de corotation vers zéro non seulement en valeur moyenne, mais aussi en valeur instantanée, après quelques temps de libration. Ce phénomène est connu sous le nom de saturation du couple de corotation. Il peut être évité si les éléments de fluide des îlots de libration peuvent échanger du moment angulaire non seulement avec le perturbateur, mais aussi avec le reste du disque. Les forces de frottement visqueux peuvent extraire du moment angulaire des îlots de libration et empêcher la saturation.

La saturation du couple de corotation peut également être décrite comme suit : quand la viscosité du disque est proche de zéro, la vortensité est conservée le long du chemin d'une particule fluide. La libration redistribue donc la vortensité au travers des îlots de libration. Une fois que la vortensité est suffisamment mélangée à l'intérieur de ces îlots, une quantité arbitrairement petite de viscosité suffit à uniformiser sa valeur sur l'îlot de libration. Le couple de corotation tend alors vers zéro (c.-à-d. sature) puisqu'il est proportionnel au gradient de vortensité.

Si l'on veut éviter la saturation, la viscosité doit être assez grande pour empêcher la vortensité de devenir uniforme sur les îlots de libration. Ceci est possible si l'échelle de temps visqueuse au travers de ces îlots est plus petite que l'échelle de temps de la libration, comme l'on montré Ogilvie et Lubow (2003). Dans ce cas, la diffusion visqueuse au travers des îlots de libration tend à imposer en permanence le gradient de vortensité à grande échelle au travers des îlots de libration.

Pour finir, on notera que les propriétés de la saturation ne peuvent être décrites par une analyse linéaire. La saturation requiert un temps de libration fini, et donc une largeur d'îlot finie. Dans la limite linéaire le couple de corotation apparaît comme une discontinuité du flux de moment angulaire, ce qui correspond au cas d'îlots de libration infiniment étroits, complètement insaturés et

dont le temps de libration est infini.

Chapitre 3

Migration planétaire

Les expressions des couples données aux sections 2.3.1 et 2.3.4 sont les briques élémentaires qui permettent d'évaluer le couple de marée entre une planète et un disque protoplanétaire. Dans toute cette section, nous supposons pour des raisons de simplicité que la planète est sur une orbite circulaire fixe. L'étude des planètes en orbite excentrique sera faite au chapitre 4. On notera qu'une planète qui migre a une orbite osculatrice d'excentricité non nulle. Cette dernière est cependant négligeable.

3.1 Migration de type I

Nous considérons tout d'abord le cas d'une planète de faible masse (nous spécifierons plus tard quelle est la limite supérieure), de telle sorte que la réponse globale du disque peut être traitée comme une superposition linéaire des réponses aux composantes individuelles de Fourier du potentiel. Chaque composante exerce un couple sur le disque aux résonances de Lindblad et de corotation. Nous notons Γ_{ILR}^m le couple de la composante de nombre d'onde azimutal m à son ILR, et nous adoptons une notation similaire à l'OLR (Γ_{OLR}^m) et à la corotation (Γ_{CR}^m). Le couple de marée total exercé par le disque sur la planète (qui est l'opposé du couple exercé par la planète sur le disque) peut alors être écrit comme suit :

$$\Gamma = \sum_{m>0} \Gamma_{ILR} + \sum_{m>0} \Gamma_{OLR} + \sum_{m>0} \Gamma_{CR}. \quad (3.1)$$

La première série de cette somme est le couple de Lindblad interne, la seconde est le couple de Lindblad externe, et la troisième est le couple de corotation. La somme des deux couples de Lindblad, interne et externe, est généralement appelée le *couple différentiel de Lindblad*.

3.1.1 Couple différentiel de Lindblad

Si l'on souhaite effectuer la sommation sur les résonances de Lindblad comme requis par l'équation (3.1), il faut connaître la position effective de ces résonances. Puisque la planète est considérée en orbite circulaire fixe, tous les composantes de Fourier du potentiel ont la fréquence orbitale de la planète. Aussi, leurs ILRs se trouvent à l'intérieur de l'orbite de la planète, tandis que leurs OLRs se trouvent à l'extérieur. L'équation (2.6) montre que les résonances de Lindblad s'approchent de la corotation lorsque $m \rightarrow \infty$. Cependant, nous avons également vu à la section 2.3.3 que les ondes excitées par les composantes individuelles du potentiel sont légèrement décalées par rapport aux positions théoriques des résonances. En particulier, lorsque $m \rightarrow \infty$, les points tournant tendent à s'accumuler à un rayon donné par :

$$r = r_c \pm \frac{\Omega}{2A}H. \quad (3.2)$$

Ces points d'accumulation correspondent au rayon auquel le flot devient supersonique dans le référentiel tournant avec la planète (Goodman et Rafikov, 2001). Dans le cas d'un disque képlérien, ces points sont situés à $\pm(2/3)H$ de la corotation. Ceci a une conséquence importante : il y a une coupure forte des composantes à grand m du couple (pour $m \gg r/H$) (Artymowicz, 1993b), puisque les composantes du potentiel sont localisées dans des anneaux de plus en plus étroits autour de l'orbite à mesure que m augmente. L'amplitude du potentiel perturbateur aux points d'accumulation tend donc vers zéro lorsque $m \rightarrow \infty$.

La figure 3.1 montre les couples de Lindblad latéraux. En particulier, on peut voir que la coupure intervient pour de plus grandes valeurs de m dans les disques plus minces (le couple externe est maximal pour $m \sim 8 - 9$ pour $h = 0.07$, alors qu'il est maximal pour $m \sim 21 - 22$ pour $h = 0.03$). En outre, pour ces deux rapports d'aspect, il y a une nette différence entre les couples externe et interne, le premier étant systématiquement plus important que le second. Le couple total exercé sur la planète est donc négatif. Par conséquent, la planète migre vers l'objet central (Ward, 1986).

On notera que le couple de Lindblad latéral est proportionnel à h^{-3} . Cette relation peut être comprise à partir de l'argument simple suivant : les couples de Lindblad individuels donnés par l'équation (2.5) sont proportionnels à m^2 . Le couple latéral est obtenu en sommant une série jusqu'à une valeur de coupure proportionnelle à h^{-1} , donc la somme est proportionnelle à h^{-3} .

On peut aussi noter à la figure 3.1 que la différence entre les deux couples (externe et interne) est plus grande dans le disque le plus épais. En effet, on peut montrer que la différence relative est proportionnelle à l'épaisseur du disque (Ward, 1997). Puisque le couple latéral est proportionnel à h^{-3} , la vitesse de migration est proportionnelle à h^{-2} .

Ils y a plusieurs raisons à cette asymétrie du couple, qui conspirent à faire du couple différentiel de Lindblad une fraction non négligeable du couple latéral dans un disque pour lequel $h = O(10^{-1})$ (Ward, 1997). Par exemple, pour toute

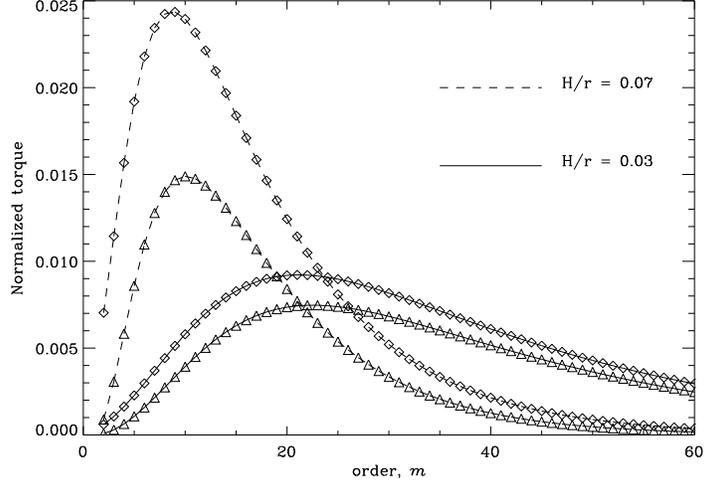


FIG. 3.1 – Valeur absolue des couples internes (triangles) et externes (losanges) dans des disques de rapport d’aspect $h = 0.07$ et $h = 0.03$, en fonction de m . Ces couples sont normalisés par la valeur $\Gamma_0 = \pi q^2 \Sigma a^4 \Omega_p^2 h^{-3}$. Puisque les couples de Lindblad latéraux sont proportionnels à h^{-3} , les aires totales sous chaque courbe sont du même ordre de grandeur.

valeur de m , la résonance interne de Lindblad se trouve plus loin de l’orbite de la planète que la résonance externe. Ceci est très apparent à la figure 2.3.

Tanaka et al. (2002) ont donné la valeur la plus sophistiquée et la plus récente du couple différentiel de Lindblad. Ils examinent le cas d’un disque tridimensionnel, verticalement résolu et isotherme, ainsi que le cas d’un disque bidimensionnel, infiniment mince et isotherme. Leurs résultats sont respectivement :

$$\Gamma_{LR}^{3D} = -(2.340 - 0.099\zeta)q^2\Sigma\Omega_p^2a^4h^{-2} \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{LR}^{2D} = -(3.200 + 1.468\zeta)q^2\Sigma\Omega_p^2a^4h^{-2} \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

A partir de ces expressions, on peut estimer une échelle de temps de migration d’une planète. Ce calcul est seulement approché dans la mesure où il néglige le couple de corotation exercé sur la planète. Comme nous le reverrons par la suite, le couple de corotation n’est pas assez grand pour changer l’ordre de grandeur du couple total excepté dans des circonstances très particulières (au bord d’une cavité, par exemple, ou dans le cas d’un régime faiblement non-linéaire). Puisque le taux de perte de moment angulaire de la planète de masse M_p et de taux de migration \dot{a} est donné par $2Ba\dot{a}M_p$, nous pouvons déduire que l’échelle de temps

de migration $\tau_{\text{mig}} = a/\dot{a}$ vaut :

$$\tau_{\text{mig}} = \frac{h^2}{4Cq\mu_D} T_0, \quad (3.6)$$

où C est un coefficient sans dimension qui est une fonction affine de ζ ($C = 2.340 - 0.099\zeta$, dans le cas d’une disque 3D isotherme). Nous renvoyons le lecteur à la section 2.2 pour les autres notations. Évaluons le temps caractéristique de migration d’un cœur protoplanétaire de masse $M_p = 10 M_{\oplus}$ immergé dans une nébuleuse protosolaire de masse minimale (MMSN) de rapport d’aspect $h = 0.07$ à 5 U.A. d’une étoile centrale de masse solaire. La masse réduite du disque est $\mu_D = 1.4 \cdot 10^{-3}$, donc le temps de migration est approximativement $3 \times 10^4/C$ orbites ou encore $3 \times 10^5/C$ années. Une estimation plus précise requiert une évaluation de $C > \sim 1$, qui dépend des profils de température et de densité de surface. Tant que ces quantités sont des fonctions lentement variables du rayon et peuvent être localement assimilées à des lois de puissance, le temps de migration reste de l’ordre de grandeur précédemment évalué. Ce résultat constitue un goulet d’étranglement des théories de migration planétaire. Le temps de doublement de masse d’une protoplanète de masse $M_p \sim 10 M_{\oplus}$ est beaucoup plus grand que le temps sur lequel cet objet migre jusqu’à son étoile centrale. Ceci semble impliquer que le processus d’accrétion gazeuse, qui transforme un cœur tellurique massif en planète géante, ne peut intervenir qu’une fois que ce cœur a été amené au voisinage de l’étoile centrale par la migration. À ce titre, l’existence de planètes géantes avec des rayons orbitaux bien plus grands que ceux des “Jupiters chauds” reste à ce jour un problème non résolu.

3.1.2 Le rôle du gradient de pression

Une caractéristique remarquable des équations (3.3) et (3.4) est la faible dépendance du couple différentiel de Lindblad par rapport à la pente du profil de densité de surface dans le cas tridimensionnel. Dans le cas bidimensionnel, le couple différentiel de Lindblad *augmente* lorsque l’on augmente la pente du profil de densité de surface. Ceci est exactement l’opposé de ce que l’on était naïvement en droit d’attendre, puisque lorsque l’on augmente la pente, on augmente la densité de surface aux résonances internes de Lindblad et on la diminue aux résonances externes. Toutefois, lorsque l’on augmente la pente du profil de densité de surface, on augmente le gradient radial de pression, et le disque devient de plus en plus sous-képlérien. En conséquence, les OLRs s’approchent de l’orbite et les ILRs s’en éloignent. Ce processus joue contre les effets plus évidents de variation de la densité surfacique. Dans un disque 3D, ils se compensent à peu près, alors que les effets du décalage des résonances dominent dans un disque 2D. Cet effet est connu dans la littérature anglo-saxonne sous le nom de “pressure buffer” (Ward, 1997; Tanaka et al., 2002). Il voue à l’échec tout essai réaliste d’annuler le couple différentiel de Lindblad en ajustant les indices des lois de puissance de la densité surfacique et de la température. Il rend inévitable la migration de type I vers l’objet central.

Mentionnons toutefois le travail de Menou & Goodman (2004), qui exploite l'extrême dépendance du couple différentiel de Lindblad en la position exacte des résonances de Lindblad. Ces auteurs considèrent un modèle réaliste de disque α de T Tauri au lieu des modèles en loi de puissance habituels. Ils trouvent que la migration de type I peut être ralentie de manière très significative à certaines positions dans le disque, qui correspondent notamment aux transitions d'opacité. Dans une autre veine, le travail de Terquem (2003) considère un disque où règne un champ magnétique toroïdal. Dans ce cas apparaissent des résonances de Lindblad magnétiques de part et d'autre de la corotation, où un échange de moment angulaire a lieu entre la planète et le disque. Dans certaines configurations le couple total exercé sur la planète peut être positif. La configuration magnétique considérée par Terquem (2003) est en principe instable à la MRI (voir section 3.4), mais elle peut être testée par des simulations numériques 2D, où la MRI ne peut apparaître. C'est ce qu'ont fait Fromang et al. (2005), dont les simulations numériques confirment les prédictions analytiques de Terquem (2003).

3.1.3 Propriétés du sillage

Jusqu'à présent le couple planétaire a été évalué en sommant des couples à des résonances individuelles. Un examen du sillage de la planète peut apporter une meilleure compréhension des propriétés du couple. Ce dernier résulte de l'action simultanée de toutes les résonances : il est la superposition de toutes les réponses individuelles aux composantes du potentiel. Ogilvie & Lubow (2002) ont montré que ces ondes interfèrent constructivement pour donner un sillage spiral à un bras, tel que celui représenté sur la figure 3.2. Plus précisément, ils ont montré que dans le disque externe toutes les ondes de différents m interfèrent constructivement à l'exception des modes de plus bas m ($m \leq 2$ pour un disque de rapport d'aspect $h = 0.1$). Dans le disque interne les composantes du potentiel interfèrent constructivement également, mais lorsque $r \rightarrow 0$ l'accord de phase disparaît pour tout m .

Les ondes excitées par une composante donnée du potentiel peuvent être écrites sous la forme :

$$\xi(r, \phi, t) = \xi_0(r) \exp \left\{ i \left[\int k_r(r) dr + m(\phi - \Omega_p t) \right] \right\} + c.c., \quad (3.7)$$

où ξ représente toute quantité perturbée associée à l'onde, $\xi_0(r)$ est son amplitude et $k_r(r)$ est son nombre d'onde radial. Si à un instant t donné, on se trouve à une position spécifiée par r et ϕ , puis l'on se déplace en variant ces quantités respectivement de dr et $d\phi$, alors la phase de l'onde varie de $k_r(r)dr + md\phi$. On reste donc sur une surface isophasique si dr et $d\phi$ vérifient la relation $dr/d\phi = -m/k_r(r)$. L'angle d'ouverture β (appelé *pitch angle* dans la littérature anglo-saxonne) de l'onde (et par conséquent du sillage, puisque les ondes interfèrent constructivement selon le sillage, comme mentionné ci-dessus) est donné par $\tan \beta = |dr/(rd\phi)|$, de telle sorte que $\beta = \tan^{-1}(m/k_r r)$. Dans la limite de m grand et pour une onde très enroulée, l'équation (2.7) conduit

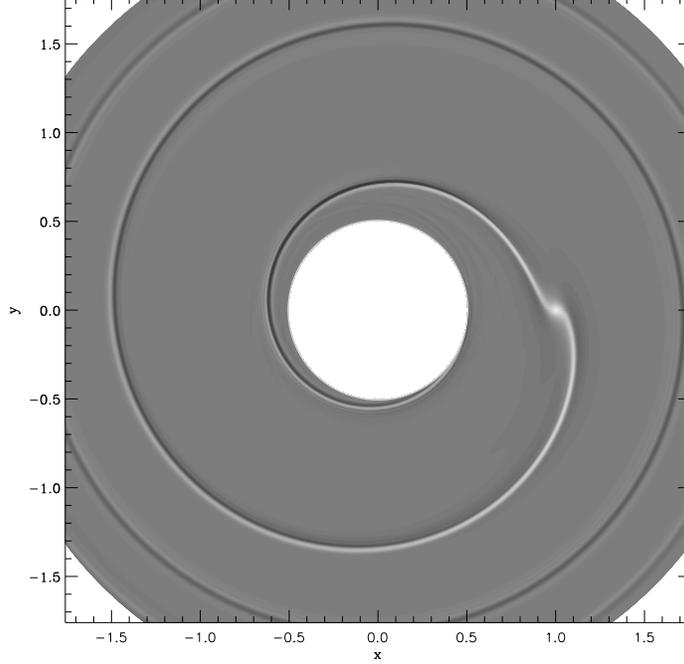


FIG. 3.2 – La réponse de la densité surfacique à une planète immergée de petite masse, dans un disque avec un rapport d’aspect uniforme $h = 0.05$. Le sillage a une forme caractéristique de spirale à un bras.

à la relation $m^2(\Omega - \Omega_p)^2 \approx c_s^2 k(r)^2$. De cette relation on peut déduire l’angle d’ouverture $\beta = \tan^{-1}[c_s/(r|\Omega - \Omega_p|)]$. En conséquence, nous voyons que l’onde (et donc le sillage) devient de plus en plus enroulé au fur et à mesure que l’on s’éloigne du rayon de corotation, ce qui est apparent sur la figure 2.2, et également que l’onde (et le sillage) sont plus enroulés dans un disque où la vitesse du son est plus basse (c.-à-d. des disques plus minces). Enfin, notons que l’expression ci-dessus de l’angle d’ouverture est indépendante du nombre d’onde azimuthal m , ce qui est une condition nécessaire pour que les ondes de tout m interfèrent constructivement. Comme nous l’avons vu à la figure 3.1, le couple de marée est dominé par des ondes ayant $m_{\max} \sim r/(2H)$. La largeur azimuthale du sillage est donc $w_1 \sim 2\pi r/m_{\max} \sim 4\pi H$, alors que la largeur du sillage mesurée perpendiculairement au bras spiral est $w_1 \sin \beta \sim 4\pi r h^2 \Omega/|\Omega - \Omega_p| \sim 4\pi r h^2$. Dans les disques protoplanétaires minces ($h < 0.1$) cette largeur peut être extrêmement petite (de l’ordre de 10^{-2} pour $h = 0.03$) ce qui souligne le besoin d’une résolution suffisante dans les simulations numériques des interactions planète–disque.

3.1.4 Couple de corotation co-orbital

À la section précédent nous avons considéré le couple exercé aux résonances de Lindblad. Nonobstant les considérations de saturation, le couple de corotation (le troisième terme de l'équation 3.1) reste à évaluer. Dans la limite linéaire ce terme peut être évalué de la même manière que l'on évalue le couple de Lindblad, c.-à-d. en sommant les couples aux résonances individuelles sur m . Toutes ces résonances de corotation partagent la même position : le rayon de corotation de la planète, qui est très près de l'orbite de la planète (et qui coïncide exactement avec cette dernière dans le cas où l'on n'a pas de gradient radial de pression). En voie de conséquence, ce couple est appelé le couple de corotation co-orbital.

Une estimation du couple de corotation est donnée par Tanaka et al. (2002), qui utilisent une expression améliorée du couple à une résonance isolée (voir l'équation 2.11). Ils trouvent les expressions suivantes pour le couple co-orbital de corotation (complètement insaturé) :

$$\Gamma_{CR}^{3D} = (0.976 - 0.640\zeta)q^2\Sigma_p^2a^4h^{-2} \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{CR}^{2D} = (2.040 - 1.360\zeta)q^2\Sigma_p^2a^4h^{-2} \quad (3.9)$$

Nous pouvons faire les commentaires suivants sur les équations (3.8) et (3.9) :

- Leur dépendance vis-à-vis des paramètres du disque et de la planète est la même que celle du couple différentiel de Lindblad donnée aux équations (3.3) et (3.4). Le rapport de ces couples ne dépend donc ni de la masse de la planète (pourvu qu'elle soit suffisamment petite pour que l'on reste dans le régime linéaire) ni de l'épaisseur du disque. Comparer ces couples revient donc à comparer directement les coefficients numériques, qui sont des fonctions de ζ seulement.
- Un examen de ces coefficients montre que pour toute valeur réaliste de ζ le couple différentiel de Lindblad a une valeur absolue supérieur à celle du couple de corotation. Aussi, comme nous l'avions anticipé à la section 2.3.1, le couple différentiel de Lindblad dicte le sens de l'échelle de temps de la migration planétaire.
- Nous notons que les équations (3.8) et (3.9) donnent une valeur positive du couple de corotation lorsque $\zeta = 0$, alors que cette valeur s'annule lorsque $\zeta = 3/2$. Ce dernier résultat était attendu, puisque le couple de corotation est proportionnel au gradient de vortécité ($2B/\Sigma$) au rayon de corotation. Quand le profil de rotation du disque est non-perturbé, nous avons $B \propto r^{-3/2}$, de telle sorte que le gradient de vortécité s'annule pour $\zeta = 3/2$. Dans les disques avec des profils de densité surfacique moins piqués ($\zeta < 3/2$), le couple de corotation est une quantité positive qui tend à ralentir la migration. Pour finir, notons que dans un disque 3D, l'annulation du couple de corotation n'est pas stricte pour $\zeta = 3/2$ (profil de vortécité plat). Ceci est dû à l'excitation d'ondes avec $n \neq 0$ dans ces disques (où n est un nombre qui décrit la structure verticale de l'onde). Le couple de corotation associé à ces ondes ne s'annule pas pour $\zeta = 3/2$ (Tanaka, communication privée).

Il est intéressant, pour comprendre la dynamique de la région co-orbitale, d'évaluer le couple que la région fer-à-cheval exerce sur la planète. La région fer-à-cheval d'une protoplanète en orbite dans un disque képlérien gazeux ressemble à la région fer-à-cheval du problème restreint à trois corps (ci-après désigné par les initiales PRTC, voir Murray et Dermott (2000), pp. 63 *et sq*). Cette région est représentée à la figure 3.3, qui montre les lignes de courant dans le référentiel tournant avec une planète géante dans un disque de rapport d'aspect $h = 0.04$. Ward (1991) a évalué le couple exercé par cette région sur la planète. Il correspond au taux d'échange de moment angulaire entre la planète et les éléments de fluide qui décrivent un demi-tour au travers de l'orbite. Les éléments de fluide qui exécutent ces demi-tours derrière la planète gagnent du moment angulaire, puisqu'elles voient augmenter leur rayon orbital, et de ce fait elles exercent un couple négatif sur la planète. De manière similaire, les éléments de fluide qui exécutent leur demi-tour devant la planète exercent sur cette dernière un couple positif. Ainsi que l'a montré Ward (1991), ces contributions ne s'annulent pas s'il y a un gradient radial de vortensité. En outre, Ward (1992) a montré que le couple fer-à-cheval et le couple de corotation ont la même dépendance fonctionnelle en les paramètres du disque. Finalement, Masset et al. (2006a) ont montré que le couple fer-à-cheval est en excellent accord¹, numériquement, avec le couple de corotation donné par Tanaka et al. (2002), même si ces deux quantités n'ont pas de raison de coïncider exactement². Si x_s représente la moitié de la largeur de la région fer-à-cheval (c.-à-d. la distance de la corotation à l'une des séparatrices), alors le couple de la région fer-à-cheval est donné par l'expression suivante (Ward, 1991) :

$$\Gamma_{HS} = \frac{3}{4} \Sigma \Omega_p^2 x_s^4 \left[\frac{d \log(\Sigma/B)}{d \log r} \right]. \quad (3.10)$$

Le couple co-orbital de corotation est sujet à saturation, de manière très similaire à ce que nous avons vu pour une résonance de corotation isolée. La libration dans la région fer-à-cheval tend à aplatir le profil de vortensité au travers de cette région, ce qui tend à annuler le couple de corotation. La saturation, toutefois, est un effet non-linéaire. Il nécessite une largeur finie de la région fer-à-cheval et un temps de libration fini. Pour connaître le degré de saturation du couple co-orbital de corotation, il serait incorrect de sommer les contributions individuelles, partiellement saturées des résonances de corotation. Le couple de corotation total est en fait toujours plus saturé que ce qu'indiquerait une telle estimation. Aussi, pour connaître le taux de saturation du couple co-orbital de corotation, on préférera évaluer le couple de la région fer-à-cheval en régime stationnaire dans un disque visqueux (Masset, 2001). Chaque fois qu'il y a une dérive radiale entre le disque et la planète, qu'elle soit due à la dérive visqueuse du disque, à la migration de la planète, ou à combinaison des deux, la région

¹Voir article 4, page 148.

²Une raison de se convaincre que ces deux quantités peuvent différer consiste à considérer des planètes de très petite masse. Dans cette limite la largeur de la région fer-à-cheval tend vers zéro, tandis que le couple de corotation vient d'une région qui s'étend typiquement sur une distance H de part et d'autre de la corotation.

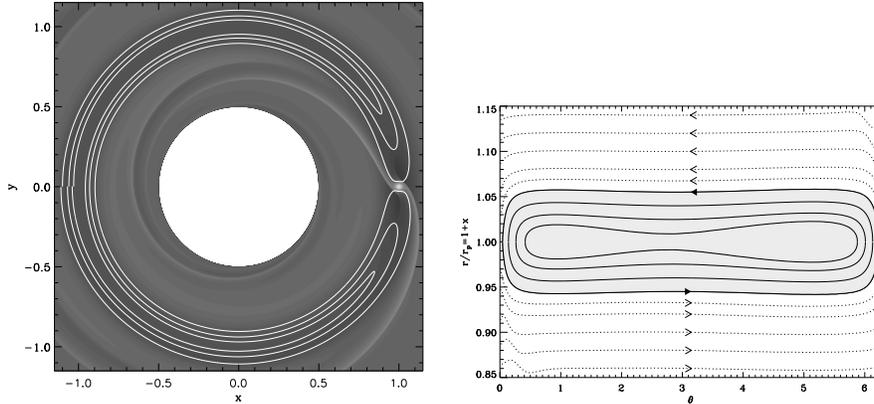


FIG. 3.3 – Lignes de courant fer-à-cheval d’une planète de grande masse maintenue sur une orbite circulaire fixe, montrées dans le plan $x - y$ (à gauche) et dans le plan $r - \phi$ (à droite). La région grisée de la figure de droite représente l’ensemble de toutes les lignes fer-à-cheval, c.-à-d. la région fer-à-cheval. Cette région doit son nom à l’aspect des lignes de courant dans le référentiel tournant (voir figure de gauche).

fer-à-cheval change de forme dans le référentiel comobile³. Plus précisément, la région fer-à-cheval adopte une forme asymétrique comme on peut le voir à la figure 3.4, de telle manière que des éléments de fluide peuvent passer du disque externe au disque interne via des demi-tours fer-à-cheval (ou inversement, selon le signe de la dérive relative disque-orbite). La figure de gauche montre les lignes de courant obtenues avec un modèle extrêmement simplifié, dans lequel l’action de la planète sur le flot est décrite de la manière suivante :

1. La planète agit sur les éléments de fluide à $\phi = 0 \pmod{2\pi}$, c.-à-d. en conjonction avec la planète.
2. Si à la conjonction la distance $|x|$ entre un élément de fluide et l’orbite est plus petite que la valeur de seuil $|x_s|$ (demi-largeur de la région fer-à-cheval), alors l’élément de fluide est “réfléchi” par rapport à l’orbite de la planète et envoyé en $(\phi, -x)$, comme le ferait un demi-tour fer-à-cheval. Sinon, aucune action n’est entreprise sur l’élément de fluide qui passe son chemin.
3. La vitesse de l’élément de fluide est supposée être partout égale à la vitesse du disque non-perturbé.

Dans le cas inviscide, ce modèle extrêmement simplifié reproduit les principales caractéristiques de la région co-orbitale : ligne des courant “rectangulaires” en libration dans une région fer-à-cheval de largeur $2x_s$, et lignes de courant circu-

³Le référentiel qui est en corotation instantanée avec la planète et qui migre avec elle.

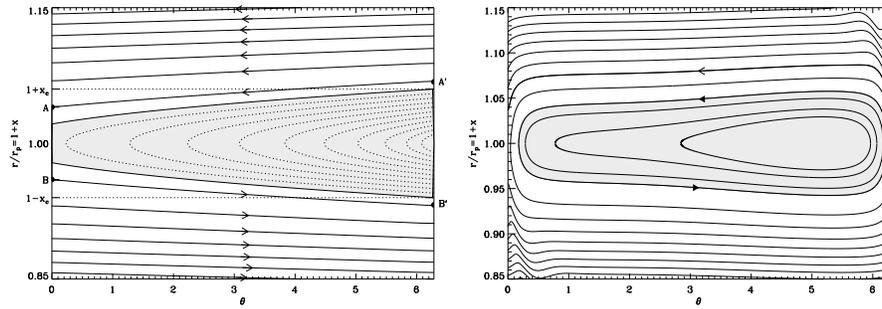


FIG. 3.4 – Lignes de courant dans le référentiel tournant dans un disque visqueux. La figure de gauche montre les lignes de courant du modèle simplifié présenté dans le texte, tandis que la figure de droite montre les lignes de courant extraites d’une simulation numérique. Dans les deux cas la région grisée représente l’ensemble des éléments de fluide piégés dans la région co-orbitale, tandis que l’*unique* ligne de courant dans la région blanche représente le trajet d’un élément fluide qui initialement circule dans le disque externe, puis exécute un (et un seul) demi-tour fer-à-cheval devant la planète ($\phi > \sim 0$), perdant ainsi une certaine quantité de moment angulaire, et finalement circule dans le disque interne. L’asymétrie de la région fer-à-cheval apparaît clairement (sa largeur du côté gauche est inférieure à sa largeur du côté droit), et celle-ci autorise un flux de gaz du disque externe vers le disque interne.

lantes dans le disque externe et interne. Toutefois, il n’y a pas de sillage dans un tel modèle. Dans un disque où la viscosité cinématique et la densité surfacique sont uniformes, la vitesse de l’élément de fluide dans le référentiel tournant, à l’ordre le plus bas en x/a , est donnée par :

$$\dot{x} = -\frac{3\nu}{2a} \quad \text{et} \quad \dot{\phi} = -\frac{3\Omega_p}{2a}x. \quad (3.11)$$

Ceci s’intègre en

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{\Omega_p}{\nu} x^2 + \phi_0. \quad (3.12)$$

Les lignes de courant sont donc des arcs de parabole dans le plan $\phi - r$. Quand la dérive relative planète–disque est suffisamment lente, les lignes de courant de la région fer-à-cheval peuvent être représentées de manière approchée par des lignes droites. Il y a un cas limite pour lequel la séparatrice de la région piégée (représentée par une ligne continue grasse à la figure 3.4) atteint la corotation.

En utilisant l’équation (3.12), on trouve que ceci a lieu pour $\nu \geq \frac{\Omega_p x_c^2}{4\pi}$. Au-dessus de cette valeur critique de la viscosité, le temps de dérive d’un élément de fluide au travers de la région fer-à-cheval est plus court que le temps de libration. Nous examinerons plus en détail les conséquences de cette dérive rapide sur la topologie du flot à la section 3.3. Pour l’heure nous nous limitons aux cas de viscosité faible ou modérée, de sorte que l’on peut considérer que les lignes de courant sont des cercles concentriques à l’étoile centrale (la distance des éléments fluides à la corotation, entre de possibles demi-tour fer-à-cheval, est une constante). Nous pouvons exploiter le fait que les éléments de la région grisée de la figure 3.4 sont piégés pour subdiviser le couple fer-à-cheval en deux composantes :

- Le couple exercé par cette région piégée sur la planète. Puisque le moment angulaire de cette région est constant en régime stationnaire⁴, le couple qu’il exerce sur la planète est exactement celui qu’il reçoit du reste du disque. Si l’on néglige l’auto-gravité du disque et le couple de pression exercé sur cette région, ce couple se réduit à la friction visqueuse exercés par le reste du disque aux séparatrices de la région fer-à-cheval.
- Le couple exercé par les éléments de fluide qui exécutent un demi-tour fer-à-cheval mais qui ne sont pas dans la région piégée (grisée). Ces éléments de fluide sont ceux qui passent du disque externe au disque interne, exerçant de ce fait un couple positif sur la planète, lequel est proportionnel au flux de masse à travers la région co-orbitale.

En utilisant cette décomposition du couple fer-à-cheval, en même temps qu’une description adéquate de la libration et de la diffusion visqueuse à l’intérieur de la région fer-à-cheval, Masset (2001) a trouvé une expression du couple fer-à-cheval en régime stationnaire qui dépend de la viscosité. Initialement cette expression a été obtenue pour une planète en orbite dans un disque sans gradient de densité

⁴C’est un système fermé et sa position est fixe.

de surface, mais le résultat peut être généralisé à des profils en loi de puissance :

$$\Gamma_{\text{HS}} = \frac{3}{4} \Sigma \Omega_p^2 x_s^4 \frac{d \log(\Sigma/B)}{d \log r} \mathcal{F}(z_s), \quad (3.13)$$

où z_s est défini par

$$z_s = x_s \left(\frac{\Omega_p}{2\pi\nu a} \right)^{1/3} \quad (3.14)$$

et

$$\mathcal{F}(z_s) = \frac{4}{z_s^3} - \frac{4g(z_s)}{z_s^4 g'(z_s)}. \quad (3.15)$$

Dans cette dernière expression, g peut être toute combinaison linéaire des fonctions d’Airy Ai et Bi qui s’annule pour $z = 0$, comme par exemple

$$g(z) = \text{Bi}(z) - \sqrt{3}\text{Ai}(z). \quad (3.16)$$

Nous pouvons utiliser le développement limité $g(z) + g'(z) = z - (1/4)z^4 + o(z^4)$ pour trouver le couple fer-à-cheval dans la limite à petit z_s (c.-à-d. à grande viscosité). Ceci donne $\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{F} = 1$, aussi nous retrouvons l’expression du couple fer-à-cheval de l’équation (3.10). Ceci est logique dans la mesure où une grande viscosité lisse les variations de densité surfacique locales. À tout instant le profil de densité de surface initial prévaut, et l’on peut ainsi retrouver l’équation (3.10) par intégration directe sur les lignes de courant. Dans la limite des faibles viscosités on peut utiliser le fait que $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z)/g'(z) = 0$ et donc que $\mathcal{F}(z) = 4z^{-3} + o(z^{-4})$, ce qui donne l’expression suivante du couple fer-à-cheval :

$$\Gamma_{\text{HS}} (\nu \rightarrow 0) \sim 6\pi\nu a \Sigma \Omega_p x_s \frac{d \log(\Sigma/B)}{d \log r}. \quad (3.17)$$

Dans la limite des faibles viscosités, ce couple est donc proportionnel à la viscosité (Balmforth et Korycansky, 2001). Il est nul dans un disque inviscide, ce qui correspond au couple d’une région fer-à-cheval complètement saturée.

Mentionnons que dans le cas d’un objet profondément immergé (pour lequel le rayon de Hill est beaucoup plus petit que l’épaisseur du disque, comme nous le verrons aux sections suivantes) la largeur de la région fer-à-cheval est proportionnelle à $q^{1/2}$ (Masset et al., 2006a), de telle sorte que le couple fer-à-cheval est proportionnel à q^2 . La même dépendance s’applique au couple co-orbital de corotation. Masset et al. (2006a) ont trouvé à partir d’un ensemble de simulations numériques que, bien que le couple fer-à-cheval ne représente pas exactement la même chose que le couple co-orbital de corotation, il représente néanmoins l’essentiel de ce dernier. Le couple fer-à-cheval constitue une excellente approximation du couple co-orbital de corotation.

Il y a un antagonisme entre l’action de la libration, qui tend à aplatir le profil de vortensité, et celle de la diffusion visqueuse, qui tend à rétablir son gradient à grande échelle. Dans l’analyse exposée ci-dessus, cet antagonisme est quantifié en supposant un disque laminaire décrit par les équations de Navier-Stokes. Sous ces conditions, on peut estimer la viscosité critique requise pour empêcher la

saturation du couple de corotation (ou la saturation d’une résonance isolée qui n’est pas co-orbitale, comme nous le verrons à la section 4.1). Il n’est pas certain que cette description puisse s’appliquer au cas plus réaliste où la viscosité du disque est de nature turbulente (voir la section 3.4) sur des échelles plus grandes que la largeur de la région de libration. Tout ce qui est requis pour éviter la saturation du couple de corotation est d’apporter de la vortensité “fraîche” du disque interne ou externe à la région de libration sur des échelles de temps plus courtes que celle de la libration. L’approche standard, basée sur une comparaison des temps de libration et des temps visqueux, est certainement correcte quand la plus grande échelle de la turbulence est plus petite que la largeur de la région de libration. Dans ce cas la vortensité entre dans la région de libration de manière diffusive. Cette approche est toutefois probablement inadaptée au cas où l’échelle de la turbulence est plus grande que la largeur de libration. Dans ce cas, qui a lieu par exemple en présence de turbulence MHD, il est vraisemblable que l’on doive plutôt comparer le temps de libration au temps caractéristique d’advection à la vitesse turbulente. Cette approche favorise la dé-saturation, et semble impliquer qu’empêcher la saturation du couple de saturation est chose plus aisée que ne suggère la simple comparaison des temps de libration et de diffusion visqueuse.

3.1.5 Migration de type I et apparition des effets non-linéaires

La migration de type I correspond par définition à un régime où la réponse du disque est correctement décrite par une analyse linéaire. On peut noter que si la viscosité du disque est suffisamment basse, il existera une distance à la corotation au-delà de laquelle l’approximation linéaire devient incorrecte. En effet, la marée de la planète excite des ondes qui s’éloignent dans le disque externe et interne. Au fur et à mesure qu’elles s’éloignent, leur profil se raidit, de manière analogue à ce qui se passe pour une onde acoustique dans un milieu au repos. En fin de compte, ce raidissement de profil débouche sur l’apparition d’un choc. Des effets non-linéaires apparaissent donc toujours à une certaine distance de l’orbite, distance qui dépend de la masse de la planète. Ceci ne veut pas dire que la migration de type I n’existe pas, mais souligne l’importance de définir la migration de type I comme le régime de migration où la réponse du disque est linéaire au voisinage de la planète, de telle manière que le couple total soit correctement prédit par une analyse linéaire. Le destin ultime des ondes excitées est sans importance, pourvu qu’elles soient amorties loin de leur région d’excitation. Goodman et Rafikov (2001) ont donné une description analytique du raidissement des profils des sillages excités par des planètes de petite masse. Ils ont obtenu les résultats suivants :

- La région d’excitation peut être séparée du choc si la masse de la planète est plus petite que $M_1 = c_s^3/(2|A|G)$. On notera que M_1 est la masse pour laquelle le rayon de Bondi (GM_1/c_s^2) devient égal à la distance $c_s/2|A|$ entre corotation et région d’excitation du sillage (région où le flot devient supersonique) / Lorsque $M_p > M_1$, le sillage devient un choc immédiatement est leur analyse n’est plus valable.

- Le choc apparaît à une distance d de l’orbite qui est donnée par $d \approx 0.93 \left(\frac{\gamma+1}{12^{5/3}} \frac{M_p}{M_1} \right)^{-2/5} H$, où γ est l’index adiabatique du gaz. Il est logique que cette distance augmente avec l’épaisseur du disque et soit plus courte lorsque M_p augmente. Notons que dans un milieu non-cisaillé, la distance sur laquelle le raidissement de profil donne lieu à un choc est inversement proportionnelle à l’amplitude initiale de l’onde. Ici, dans un disque en rotation différentielle, cette distance est proportionnelle à l’amplitude à la puissance $-2/5$. Aussi, même pour une toute petite masse de planète, le sillage peut choquer à une distance relativement courte de l’orbite. Par exemple, dans un disque de rapport d’aspect $h = 0.05$, M_1 vaut $20 M_\oplus$, et le sillage devient un choc à $d \approx 3.6H$ d’une planète d’une masse terrestre. Dit d’une autre manière, chaque fois que les effets de marée sont un processus important pour l’interaction d’un cœur planétaire et du disque, le raidissement des profils conduit à la formation de chocs à une distance de l’orbite qui est au plus, radialement, de quelques fois l’épaisseur du disque. Notons toutefois que cette distance est beaucoup plus importante que la distance à la région d’excitation du sillage, qui se trouve essentiellement à $\pm(4/3)H$ de l’orbite, de telle sorte que le mode de migration adopté par les objets d’au plus quelques masses terrestres peut être considéré comme du type I.
- Une fois que le sillage devient un choc, son flux de moment angulaire décroît comme $|x|^{-5/4}$ (pour $|x| \gg d$).
- Des coupes azimutales de la densité surfacique perturbée montrent qu’au fur et à mesure que l’on s’éloigne du choc, le profil obtenu adopte une forme en N.

Commentons que dans les résolutions numériques d’objets de petite masse immergés dans des disques minces, la résolution de la grille peut être insuffisante pour suivre précisément l’évolution du profil du sillage, lorsqu’il s’éloigne de la planète et devient de plus en plus enroulé. Toutefois, on peut évaluer correctement le couple de marée à condition que la résolution soit suffisante sur la région d’excitation du sillage, et le taux de migration inféré devrait être correct. Il faut toutefois garder présent à l’esprit que si la résolution est insuffisante, le sillage peut être artificiellement amorti par la grille plus près de la planète qu’il ne l’aurait été autrement par apparition d’un choc.

Nous notons que M_1 est aussi la masse pour laquelle le rayon de Hill, donné par $R_H = (GM_p/4|A|\Omega)^{1/3}$, est égal à $(\Omega/2\sqrt{2}|A|)^{2/3} \approx 0.61H$ dans un disque képlérien. Grâce à une écriture des équations gouvernant le flot sous une forme non dimensionnelle, Korycansky et Papaloizou (1996) ont trouvé un paramètre sans dimension qui détermine la non-linéarité du flot : $\mathcal{M} = q^{1/3}/h = 3^{1/3}R_H/H$. Dans un disque képlérien, on a $M_p/M_1 = (3/2)\mathcal{M}^3$. Lorsque $\mathcal{M} \rightarrow 0$, le flot devient linéaire et la planète subit une migration de type I. Lorsque \mathcal{M} devient comparable à l’unité, le flot devient non-linéaire au voisinage de la planète. On a longtemps pensé que l’apparition des non-linéarités se traduisait par l’ouverture d’un sillon autour de l’orbite (voir la section 3.2). Ce que l’on appelle le critère thermique d’ouverture de sillon correspond à la

condition $R_H > H$ (c.-à-d., $\mathcal{M} = 1.44$); quand la sphère de Hill émerge du disque, la planète commence à ouvrir un sillon (nous examinerons le mécanisme d’ouverture de sillon plus en détail à la section 3.2). Ceci justifie le qualificatif d’”immergé” pour les objets qui ont un lobe de Roche plus petit que l’épaisseur du disque, et pour lesquels la perturbation du flot reste linéaire au voisinage de la planète, qui subit une migration de type I.

Récemment, Masset et al. (2006a) ont trouvé que la non-linéarité du flot apparaît pour des valeurs du paramètre sans dimension plus petites que celles requises pour l’ouverture d’un sillon. En effet, ils trouvent une augmentation significative de la largeur de la région fer-à-cheval pour $q/h^3 \sim 0.6$, qui a pour conséquence une augmentation du couple de la région fer-à-cheval et donc du couple de corotation. Cette croissance de la région co-orbitale est liée à une transition du flot d’une situation à petite masse de planète, pour laquelle on n’a pas de lobe de Roche, à une situation à grande masse de planète et à l’apparition de ligne de courant circumplanétaires (c.-à-d. un “lobe de Roche”). Ceci peut avoir des conséquences importantes pour la migration planétaire dans les disques à profil de densité surfacique peu piqué (ceux pour lesquels $\zeta < 3/2$). Dans ces disques, le gradient radial de vortensité est positif, ainsi que le couple de corotation. Comme nous pouvons le voir à partir des équations (3.3-3.4) et (3.8-3.9), bien que le couple différentiel de Lindblad domine le couple de corotation, ils ont néanmoins le même ordre de grandeur. Aussi, si le couple de corotation est suffisamment amplifié par les effets non-linéaires, il peut annuler le couple total et arrêter la migration. La figure 3.5 montre à quel point cet effet peut être important sur la migration de proto-cœurs de masse $M_p \sim 10 M_\oplus$, pour lesquels la migration de type I, en l’absence de ces effets, serait extrêmement rapide et mettrait en péril la possibilité d’accréter une enveloppe gazeuse. En régime linéaire, on peut également envisager des profils de disque particuliers, comme ceux que l’on rencontre au bord d’une cavité. Dans cette situation, qui favorise un couple de corotation positif et arbitrairement grand, on peut montrer que le couple total s’exerçant sur la planète peut être positif, et qu’il existe au bord de la cavité un point fixe stable où les planètes subissent un couple nul de la part du disque, ce point agissant comme un “piège” à planètes⁵.

Nous résumons à la table 3.1 les différents (mais tous équivalents entre eux) paramètres sans dimension qui peuvent être utilisés pour caractériser la non-linéarité du flot. Les valeurs de ces paramètres sont données pour le régime linéaire, le régime du décrochement maximal, et l’ouverture d’un sillon (correspondant au critère thermique décrit ci-dessus).

3.2 Migration de type II

La section 3.1 a introduit le concept de migration planétaire en examinant les interactions planète–disque par une analyse linéaire. À la section 3.1.5 nous avons commencé à regarder les effets non-linéaires, en nous intéressant à leur apparition à petite masse de planète. Dans cette section, nous allons considérer le

⁵Voir article 5 page 158.

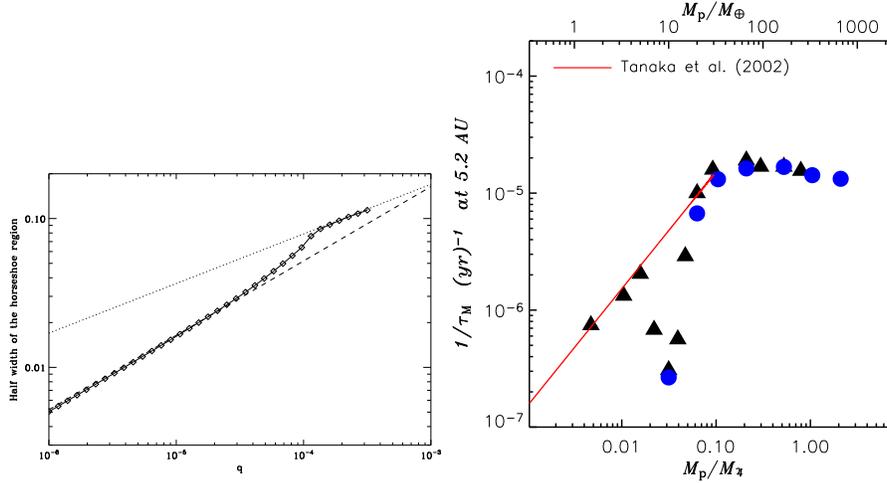


FIG. 3.5 – À gauche : demi-largeur de la région fer-à-cheval en fonction de la masse de la planète dans un disque pour lequel $h = 0.05$. Aux petites masses de planète cette largeur est proportionnelle à $q^{1/2}$ (ligne en tirets), tandis qu'à grande masse on retrouve les résultats du PRTC, à savoir qu'elle est proportionnelle à $q^{1/3}$ (ligne pointillée). À la transition entre ces deux régimes, autour de $q \sim 10^{-4}$, la largeur de la région fer-à-cheval est plus grande que ce que prédit l'analyse linéaire (ligne en tirets). Par conséquent, le couple de corotation co-orbital est aussi plus grand que prédit par une analyse linéaire. À droite : inverse du temps de migration τ_M en fonction de la masse de la planète, pour un disque de même rapport d'aspect ($h = 0.05$). On voit clairement le décrochement entre le taux de dérive réel et celui prédit par une analyse linéaire (ligne continue), pour une planète de masse $M_p \sim 10 M_\oplus$. Ce décrochement correspond dans le cas présent à un ralentissement de la migration d'un ordre de grandeur par rapport au taux de type I. Cette figure a été obtenue à partir de simulations 3D effectuée par D'Angelo et al. (2003). Les différents symboles se réfèrent à différentes prescription pour le lissage du potentiel au voisinage de la planète.

TAB. 3.1 – Propriétés du flot pour différentes valeurs des paramètres sans dimension qui caractérisent le degré de non-linéarité. $R_B = GM_p/c_s^2$ est le rayon de Bondi de la planète. La dernière colonne donne la masse correspondante de la planète en masses terrestres, dans le cas où le disque a un rapport d'aspect $h = 0.04$ et où l'objet central a une masse solaire (auquel cas $M_1 = 14 M_\oplus$).

	R_H/H	\mathcal{M}	M_p/M_1	R_B/H	M_p/M_\oplus
Régime linéaire	$\rightarrow 0$				
Décrochement maximal	0.58	0.84	0.9	0.6	13
Ouverture de sillon	1.0	1.44	4.5	3.0	64

flot fortement linéaire autour d'une planète géante. Ceci implique que la masse de la planète est supérieure à une masse critique que nous spécifierons ultérieurement. Comme nous allons le voir, une planète de grande masse peut ouvrir un sillon dans le disque de part et d'autre de son orbite, avec des conséquences importantes pour sa migration.

3.2.1 Apparition des chocs et asymétrie de la région fer-à-cheval

Ainsi que nous l'avons à la section 3.1.5, le sillage excité par une planète fini par devenir un choc qui cède le moment angulaire qu'il a extrait de la planète au flot sous-jacent. L'endroit auquel le raidissement de profil produit un choc dépend de la masse de la planète. Plus cette dernière est grande, plus le choc apparaît près de la planète. Pour une masse de planète supérieure à une masse critique, le sillage est déjà un choc dans sa région d'excitation. Dans ce cas, les éléments de fluide qui circulent juste au-delà de la région co-orbitale reçoivent une quantité finie de moment angulaire chaque fois qu'ils croisent le sillage. Ceci est représenté sur la figure 3.6. Les éléments de fluide C_1 et C_2 , qui circulent respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de l'orbite de la planète, s'éloignent de l'orbite après avoir croisé le sillage. La trajectoire (circulaire) non perturbée de ces éléments de fluide est indiquée par une ligne en tirets. Les trajectoires réelles sont représentées par une ligne continue.

Une autre conséquence de la présence immédiate du choc est que les demi-tours fer-à-cheval ne sont pas symétriques. La figure 3.6 montre également les lignes de courant des éléments de fluide en libration L_1 et L_2 . Ils sont envoyés après un demi-tour fer-à-cheval aux points L'_1 et L'_2 , qui sont situés plus loin de l'orbite que respectivement L_1 et L_2 . Un élément de fluide initialement situé à l'intérieur de la région de libration peut ainsi progressivement s'éloigner de l'orbite au fur et à mesure qu'il effectue ses demi-tours fer-à-cheval, jusqu'à ce qu'il se retrouve dans le disque interne ou dans le disque externe (Lubow et al., 1999). La région co-orbitale est ainsi vidée, et un sillon annulaire finit par apparaître à l'orbite. L'échelle de temps pour l'ouverture du sillon peut facilement être estimée à partir de la figure 3.6. Après chaque demi-tour, la distance entre un élément de fluide et l'orbite augmente entre 10 et 20 %. Le temps caractéristique de vidage de la région fer-à-cheval est donc entre 5 et 10 fois le demi-temps de libration, qui est donné par $\tau_{\text{lib}}/2 = 2\pi a/(3/2)\Omega_p x_s = (2/3)T_o(a/x_s)$. Ici nous pouvons estimer sur la figure que $x_s \approx 0.16a$, de telle sorte que $\tau_{\text{lib}}/2 \approx 4 T_0$. En conséquence, sur cet exemple particulier, la région co-orbitale se vide en 20 à 40 orbites. Cette estimation simple montre aussi que plus la masse de la planète est petite, plus le temps d'ouverture de sillon est grand. En effet, lorsque la masse de la planète décroît, la région fer-à-cheval devient de plus en plus symétrique, de telle sorte que plus de temps de libration sont nécessaires pour arriver dans le disque interne ou dans le disque externe. En même temps, le temps de libration augmente. Pour une planète de masse jovienne dans un disque de rapport d'aspect $h = 0.05$, le temps d'ouverture de sillon est d'environ 100 orbites.

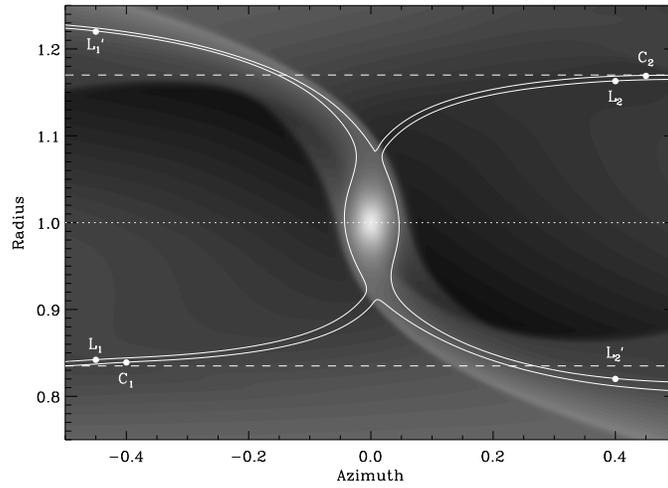


FIG. 3.6 – Asymétrie de la région fer-à-cheval. Les éléments de fluide en circulation C_2 (qui se déplace vers la gauche) et C_1 (qui se déplace vers la droite) s'éloignent de l'orbite après avoir traversé le choc excité par la planète. De manière similaire, les éléments de fluide en libration s'éloignent de l'orbite après avoir exécuté leur demi-tour fer-à-cheval (voir le texte pour plus détails). Ce cas particulier montre les lignes de courant du flot dans le référentiel en corotation avec une planète de deux masses joviennes dans un disque de rapport d'aspect $h = 0.05$. La planète est sur une orbite circulaire fixe, et l'on représente ici la situation 22.5 périodes orbitales après l'introduction de la planète dans le disque.

3.2.2 Flot en régime stationnaire et critères d'ouverture de sillon

La situation représentée à la figure 3.6 ne peut être stationnaire que si la séparatrice de la région fer-à-cheval est fermée, ce qui implique que l'élément de fluide L'_1 , lorsqu'il progresse sur sa ligne de courant, arrive finalement à la position de L_2 . Si ce n'est pas le cas, la région co-orbitale continue de perdre de la matière. Dans un disque visqueux, cependant, le processus même d'ouverture de sillon permettra finalement d'arriver à fermer la séparatrice. Le matériel expulsé de la région co-orbitale s'accumule juste au-delà de la séparatrice, où un fort gradient de densité surfacique se construit. Ce gradient conduit à un fort couple visqueux négatif sur les éléments de fluide qui le longent. Ceci implique qu'ils dérivent de manière importante vers l'intérieur sur une période synodique. Quand le gradient de densité de surface est suffisamment important, les éléments fluides dérivent vers l'intérieur de la quantité juste nécessaire pour fermer la ligne de courant. Notons que ce processus s'auto-régule : si trop de matériel est expulsé de la région co-orbitale, alors la dérive radiale des éléments fluide est plus importante que le gain de distance à l'orbite qu'ils reçoivent lorsqu'ils passent par le sillage. Le matériel tend alors à rentrer dans la région co-orbitale, ce qui adoucit le gradient de densité surfacique du bord du sillon et tend à fermer la séparatrice.

Historiquement, les conditions d'ouverture de sillon se résumaient à deux critères indépendants (Lin et Papaloizou, 1979; Lin et Papaloizou, 1993; Bryden et al., 1999) qui devaient être vérifiés simultanément. Le premier, appelé le critère thermique (puisqu'il impose une limite sur l'épaisseur du disque, et donc sur sa température), a été déjà mentionné à la section 3.1.5. il requiert que le sillage soit un choc dans sa région d'excitation. Le flot doit donc être fortement non-linéaire au voisinage de la planète, et le paramètre R_H/H doit être supérieur à une valeur critique. Cette valeur critique est ~ 1 , bien que la valeur précise puisse être légèrement différente. Le second critère est que la viscosité soit suffisamment basse pour que le saut de densité de surface aux bord de la région creusée soit une fraction importante de la densité surfacique totale. Cette condition, qui est connue sous le nom de critère visqueux, s'exprime (Lin et Papaloizou, 1979; Lin et Papaloizou, 1986a; Papaloizou et Lin, 1984; Lin et Papaloizou, 1993; Bryden et al., 1999)

$$q > \frac{40}{\mathcal{R}} \quad (3.18)$$

où $\mathcal{R} = a^2\Omega_p/\nu$ est le nombre de Reynolds.

Crida et al. (2006a) ont utilisé une autre condition, à savoir que la ligne de courant circulante située juste au-delà de la séparatrice soit fermée, de manière à dériver le profil du sillon semi-analytiquement. Ils requièrent que l'intégrale de la somme des couples visqueux, gravitationnel et de pression s'annule sur la période synodique d'un élément de fluide. Ils donnent un *ansatz* du couple de pression qui est valide pour un ensemble raisonnable de masses planétaires et d'épaisseurs de disque, et ils aboutissent au critère suivant d'ouverture de

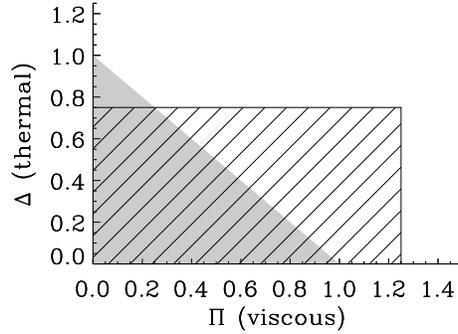


FIG. 3.7 – Représentation graphique des critères d’ouverture de sillons. Le rectangle hachuré montre l’ensemble des paramètres (Π, Δ) pour lesquels les deux critères standards (thermique et visqueux) sont satisfaits, alors que le triangle grisé montre l’ensemble des paramètres pour lequel le critère de Crida et al. (2006a) est satisfait. Π et Δ sont définis dans le texte.

sillon :

$$\frac{3}{4} \frac{H}{R_H} + \frac{50}{q\mathcal{R}} < 1. \quad (3.19)$$

L’équation (3.19) est obtenue en supposant que la densité de surface résiduelle est 10 % de la densité de surface non-perturbée. On peut noter que ce critère est un mélange des deux critères standards. Si l’on appelle $\Delta = \frac{3}{4} \frac{H}{R_H}$ et $\pi = \frac{50}{q\mathcal{R}}$, alors les critères standards s’écrivent $\Delta < \frac{3}{4}$ et $\pi < \frac{5}{4}$. Le nouveau critère est lui : $\Delta + \pi < 1$. Ce critère est approximativement équivalent aux deux précédents (voir Fig. 3.7) excepté pour le cas où les deux critères usuels sont marginalement satisfaits. Dans ce coin de l’espace des paramètres, le sillon résultant est trop peu profond pour être capturé par le critère (3.19).

Comme décrit précédemment, le temps caractéristique pour ouvrir un sillon est essentiellement le temps requis pour construire un gradient de densité de surface qui ferme la séparatrice de la région co-orbitale. Après ce temps relativement court (de l’ordre de $O(10^2)$ orbites), cependant, rien n’assure que la distribution de densité de surface résultante soit une distribution d’équilibre. En fait, les régions sur-denses situées sur les bords du sillon, qui proviennent de l’empilement de matériel co-orbital évacué par le sillon, vont s’étaler radialement sur leurs temps visqueux, donc sur une échelle de temps de l’ordre de $\sim r^2/\nu$, qui peut être beaucoup plus longue que le temps de vidage du sillon. Pour un disque ayant $\alpha = 10^{-3}$ et $h = 0.05$, le temps visqueux est de l’ordre de 10^4 orbites. Crida et al. (2006a) ont souligné l’existence de ces deux échelles de temps dans leur analyse d’ouverture de sillons. En particulier, ils ont montré que la première échelle de temps, plus courte, correspond à l’établissement d’un profil relativement constant de $(1/\Sigma)d\Sigma/dr$, tandis que la seconde échelle

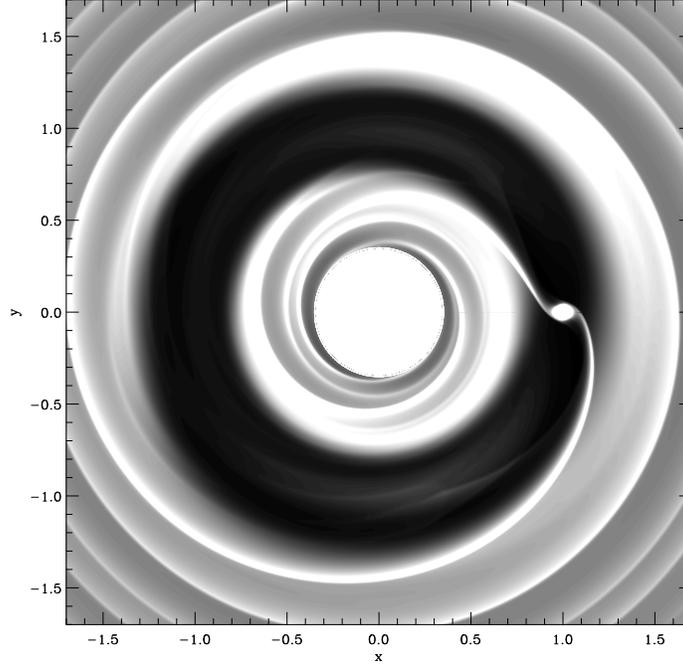


FIG. 3.8 – Sillon ouvert par une planète de masse $M_p = 2 M_J$ dans un disque de rapport d'aspect $h = 0.04$ et de viscosité cinématique uniforme $\nu = 10^{-5}$ (ces paramètres donnent $\alpha = 6 \times 10^{-3}$ à l'orbite de la planète), après $t = 50$ orbites. Les niveaux de gris représentent la densité surfacique du gaz.

de temps, plus longue, correspond au temps de relaxation du profil de densité surface sur tout le disque. La figure 3.8 montre l'apparence d'un sillon ouvert dans un disque protoplanétaire par une planète géante.

Comme nous l'avons vu à la section 3.1.5, le sillage finit toujours par devenir un choc à une certaine distance de l'orbite même s'il peut être correctement décrit par une analyse linéaire au voisinage de la planète. Ceci suggère qu'une protoplanète profondément immergée qui ne satisfait pas le critère thermique d'ouverture de sillon peut quand même ouvrir un sillon, dont la demi-largeur sera la distance entre l'orbite et l'endroit où le sillage devient un choc (Rafikov, 2002). Ceci a été constaté dans des simulations numériques, mais nous rappelons ici ce que nous avons mentionné à la section 3.1.5 : si la résolution est trop basse, l'amortissement du sillage (par la grille) va avoir lieu trop près de l'orbite. Le sillon sera alors trop étroit, et s'ouvrira sur une échelle de temps beaucoup plus courte que si la résolution était suffisante.

3.2.3 Migration des planètes qui ouvrent un sillon

La migration d'une planète qui a ouvert un sillon devrait être très différente du scénario de migration de type I. De nombreuses résonances de Lindblad tombent dans le sillon et sont de ce fait inactives. En outre le fait que la région co-orbitale soit vide signifie que le couple de corotation co-orbital devrait être négligeable. On s'attend donc à ce que le taux de migration soit plus petit qu'en migration de type I.

En fait, un sillon profond (c.-à-d. un sillon dans lequel la densité surfacique résiduelle est négligeable devant la densité surfacique du disque) divise le disque en deux parties : le disque externe et le disque interne. Aussi, la planète doit migrer vers l'intérieur au rythme auquel le disque externe peut progresser vers l'intérieur. En d'autres termes, le taux de migration d'une planète géante qui a ouvert un sillon dans le disque est le même que le taux de dérive visqueuse du disque (Lin et Papaloizou, 1986b). Ce type de migration est usuellement appelé migration de type II (Ward, 1997; Nelson et al., 2000). On a coutume de dire que dans ce régime de migration, la planète est verrouillée dans l'évolution visqueuse du disque. Le taux de migration de type II d'une planète est par conséquent :

$$\frac{da}{dt} \sim -\frac{\nu}{a}, \quad (3.20)$$

et son temps de migration est :

$$\tau_{\text{mig}} \sim \frac{a^2}{\nu}. \quad (3.21)$$

Pour une planète de masse $M_p = 1 M_J$ qui subit une migration de type II dans un disque de rapport d'aspect $h = 0.04$ et de paramètre $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$, la durée d'une migration commençant à $a = 5$ U.A. est d'environ $1.6 \cdot 10^4$ orbites. Ceci correspond à $\sim 1.6 \cdot 10^5$ années, si l'objet central a une masse solaire.

Au moyen de simulations numériques 2D, Nelson et al. (2000) ont montré que la migration de planètes géantes (avec des masses égales ou supérieure à celle de Jupiter) dans un disque visqueux obéit au scénario décrit ci-dessus, tout au moins dans ses grandes lignes. En particulier, ils trouvent que l'échelle de temps de variation du demi grand-axe est similaire à l'échelle de temps visqueuse du disque.

Ils ont également utilisé une prescription pour représenter l'accrétion du gaz sur le cœur planétaire. Ceci est réalisé en retirant à chaque pas de temps une petite fraction du gaz des cellules centrales du lobe de Roche, et en attribuant la masse et l'impulsion ainsi retirés à la planète. Le moment angulaire spécifique de la planète peut ainsi varier à cause des effets de l'accrétion. Nous notons au passage que ce couple d'accrétion partage un certain nombre de similarités avec le couple de corotation. Tous deux correspondent à du matériel qui initialement circule au voisinage des séparatrices de la région fer-à-cheval, mais dans le cas de l'accrétion ce matériel finit par arriver sur la planète. Alors que dans le scénario du couple fer-à-cheval un élément de fluide aurait effectué un demi-tour fer-à-cheval complet (variant ainsi son demi grand-axe de $2x_s$ et échangeant

une quantité de moment angulaire égale à $4Bax_s$ par unité de masse) le demi grand-axe d'un élément de fluide accrété ne varie que de x_s , ce qui fait que le couple d'accrétion est proportionnel à $2Bax_s$. De manière logique, Nelson et al. (2000) ont montré qu'autoriser l'accrétion ralentit légèrement la migration de la planète. Cet effet est toutefois modéré. Il n'arrête pas la migration ni ne change drastiquement son taux de migration. Rappelons que dans un disque de densité de surface uniforme (utilisé par Nelson et al. dans leurs simulations) le couple de corotation est positif. Nelson et Benz (2003b), qui ont simulé des planètes géantes dans des disques présentant des profils de densité surfacique beaucoup plus piqués⁶, ont trouvé que le couple d'accrétion, dans leur cas, est une quantité négative, qui est cependant une petite fraction du couple total.

Le gaz accrété tend à former un disque circumplanétaire à l'intérieur du lobe de Roche. À l'intérieur de ce disque, un choc spiral $m = 2$ est excité par la composante de marée principale ($m = 2$) de l'objet central. Ce choc apparaît très marqué dans les simulations 2D, mais il est beaucoup plus faible dans les simulations 3D (D'Angelo et al., 2002; D'Angelo et al., 2003b). Ce choc peut contribuer à l'accrétion du matériel du disque circumplanétaire sur la planète. La figure 3.9 est une image haute résolution de la réponse en densité de surface à l'intérieur du lobe de Roche d'une protoplanète de masse jovienne, peu de temps après que la planète ait été introduite dans un disque initialement non-perturbé.

Au fur et à mesure qu'une planète géante accrété le gaz qui traverse son sillon, sa masse augmente. La troncature du disque par effet de marée devient de plus en plus marquée, le sillon devient plus profond et plus large. En conséquence, le taux d'accrétion de masse de la planète décroît. Ceci suggère que l'accrétion de gaz par des planètes géantes soit un processus auto-limitant. Nelson et al. (2000) ont obtenu des masses finales de planètes géantes de quelques masses joviennes (environ $5 M_J$). Lubow et al. (1999) ont trouvé que le taux d'accrétion planétaire est substantiellement que le taux auquel la nébuleuse peut apporter du matériel au niveau de l'orbite, pour des masses de planète supérieure à environ $6 M_J$. Bien que ces résultats dépendent certainement de la viscosité du disque, de son épaisseur, et de la prescription adoptée pour l'accrétion, ils suggèrent toutefois une masse limite de $5 - 10 M_J$. Ce résultat est du même ordre de grandeur que les plus grandes masses inférées pour les planètes extra-solaires.

Tous les résultats ci-dessus ont été obtenus en supposant que la viscosité effective du disque est correctement modélisée par l'équation de Navier-Stokes. Dans ce contexte la viscosité cinématique est choisie de manière à rendre compte des taux d'accrétion inférés d'observations d'étoiles T Tauri. Papaloizou et al. (2004a) ont effectué des simulations numériques lourdes. Au lieu d'avoir recours à des schémas purement hydrodynamiques incluant une viscosité cinématique *ad hoc*, leur modèle décrit la turbulence magnéto-hydrodynamique (MHD) provenant de l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI).

Ils trouvent qu'une protoplanète géante ouvre toujours un sillon dans le

⁶Initialement leurs profils étaient $\propto r^{-3/2}$, correspondant à un couple de corotation nul, mais après relaxation de leur disque ils obtiennent une accumulation de matériel dans le disque interne compatible avec un couple de corotation négatif.

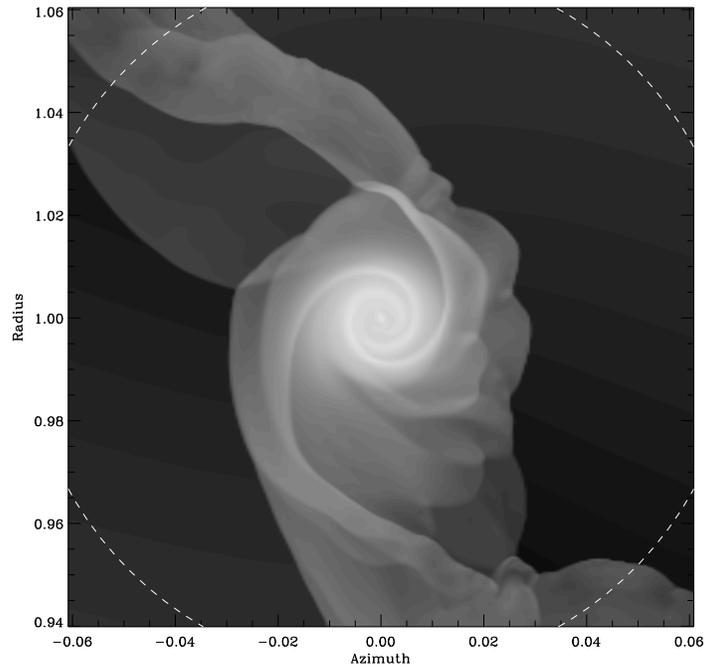


FIG. 3.9 – Densité de surface à l’intérieur du rayon de Hill (ligne en tirets) d’une protoplanète d’une masse de Jupiter orbitant dans un disque de rapport d’aspect $h = 0.05$, après que la planète ait décrit seulement une orbite après son introduction dans le disque. Cette figure est extraite d’un code 2D-3D de type Godunov à grilles emboîtées, utilisant un solveur de Riemann exact. La structure spirale $m = 2$ est très apparente. La longueur de lissage du potentiel est $\varepsilon = 1.4 \cdot 10^{-3}a$, tandis que la résolution est de $8.4 \cdot 10^{-4}a$

disque, de manière très semblable à ce qui se passe dans un disque laminaire (c.-à-d. un disque décrit par les équations de Navier–Stokes). En particulier, la masse critique pour l’ouverture de sillon a approximativement la même valeur dans les deux cas (laminaire et MHD). De manière assez surprenante, le sillon d’un disque turbulent tend à être plus large et plus profond que dans le cas d’un disque laminaire (Papaloizou et al., 2006). Le taux d’accrétion sur la planète tend à être plus grand dans le cas turbulent, certainement à cause du freinage magnétique du disque circumplanétaire (Papaloizou et al., 2004a).

Dans le paradigme standard de la migration de type II, la planète est supposée se comporter comme un élément de fluide du disque protoplanétaire. Son taux de dérive radiale devrait ainsi être égal à la vitesse radiale du disque protoplanétaire *en l’absence de planète*, au même endroit. Bien que la dérive réelle soit du même ordre de grandeur que le taux de dérive visqueuse (Nelson et al., 2000), les détails de leurs calculs montrent que ce paradigme, *stricto sensu*, n’est pas vérifié. Le taux de dérive dans un disque visqueux de densité de surface uniforme et de viscosité cinématique uniforme est donné par $-\frac{3\nu}{2r}$, de telle sorte que dans un tel disque on devrait s’attendre à ce que la migration de type II d’une planète géante accélère lorsque la planète s’approche de l’objet central. On pourra argumenter qu’à cause de l’accrétion la masse de la planète peut excéder largement celle du disque environnant, ce qui conduit à un ralentissement de la planète. La planète ralentit toutefois même dans le cas où elle n’accrète pas, ce qui contredit les canons de la migration de type II. Ceci suggère que le partitionnement du disque en un disque externe et un disque interne qui n’échangent pas de matériel est une vision erronée des choses, tout du moins pour les planètes considérées dans le travail de Nelson et al. (2000). Il semble plutôt qu’il existe un flux significative de masse du disque externe vers le disque interne, et que ce processus découple l’évolution du demi grand-axe de la planète de la dérive visqueuse du disque. Le lecteur intéressé par ce problème est renvoyé au récent travail de Lubow et D’Angelo (2006) sur le flot de gaz au travers des sillons dans les disques protoplanétaires.

Si les taux de migration et de dérive visqueuse sont les mêmes en migration de type II, on devrait s’attendre à ce qu’une planète géante arrête sa migration dans un disque inviscide. Cette prédiction n’a pas encore été testée dans les simulations numériques. Lorsque l’on simule la réponse d’un disque inviscide à la perturbation de marée d’une planète géante, des vortex apparaissent le long des bords du sillon (de Val-Borro et al., 2006). Dans la plupart des cas ces vortex finissent par coalescer en un grand vortex de chaque côté du sillon. Puisque ces sillons circulent le long des bords du sillon, ils induisent des variations importantes du couple de marée sur quelques périodes orbitales. On s’attend à l’apparition du vortex aux endroits où la vortensité présente un extremum relatif (Lovelace et al., 1999; Li et al., 2000; Li et al., 2001), ce qui arrive aux bords du sillon. Leur persistance dépend de deux processus antagonistes : le premier est la diffusion visqueuse, qui tend à étaler les extrema de vortensité. Le second correspond au fait que, chaque fois que le vortex passe par le choc excité par la planète, il gagne une certaine quantité de vortensité qui dépend des propriétés du choc telles que l’angle d’ouverture (*pitch angle*) et du nombre de Mach (Koller

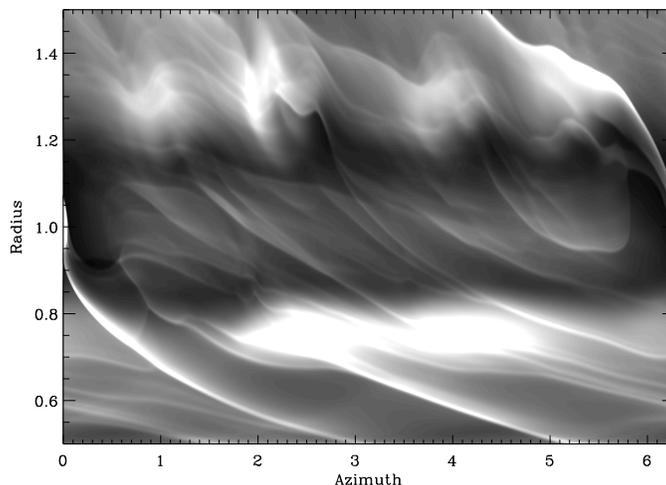


FIG. 3.10 – Densité de surface dans un disque inviscide de rapport d’aspect $h = 0.04$ perturbé par une protoplanète de masse $M_p = 1 M_J$, après 50 orbites. Des vortex sont apparents sur les deux bords du sillon.

et al., 2003). La figure 3.10 montre des vortex sur les bords d’un sillon ouvert par une planète géante.

Pour finir, notons que Ward (Ward, 2003) a envisagé la possibilité de migration de type II vers l’extérieur dans des disques visqueux tronqués, qui s’étendent vers l’extérieur. Dans de tels disques, une fraction significative de la masse des régions externes s’étale vers les grands rayons en retirant le moment angulaire des régions internes. Une planète géante située dans la partie du disque qui dérive vers l’extérieur devrait ainsi dériver vers l’extérieur. Cette prédiction attend toujours une confirmation numérique. Un travail préliminaire de Crida et al. (2006b), qui effectuent des simulations numériques globales d’un disque visqueux sur une grande dynamique de rayon (grâce à l’utilisation d’un code hybride 1D-2D), semble impliquer que même des planètes géantes situées au-delà du rayon critique où le disque s’étend vers l’extérieur migrent vers l’intérieur.

3.3 Migration de type III

Jusqu’à présent, on a considéré que le couple qui s’exerçait sur une planète en migration était indépendant de la vitesse de migration de la planète. Ceci est vrai pour le couple différentiel de Lindblad. Cependant, le couple de corotation implique du matériel qui traverse l’orbite sur des demi-tours de lignes de courant fer-à-cheval. Dans le cas sans migration, seul le matériel piégé dans la région fer-à-cheval participe à ces demi-tours. Dans le cas d’une planète migrant vers l’intérieur (resp. vers l’extérieur), cependant, du matériel du disque interne

(resp. externe) doit exécuter un demi-tour fer-à-cheval pour pouvoir traverser la région co-orbitale. Ce faisant, il exerce un couple de corotation sur la planète, proportionnel au taux de dérive planète–disque. Nous donnons ci-dessous une démonstration simplifiée de la dépendance fonctionnelle du couple de corotation en la vitesse de migration \dot{a} . Une démonstration plus complète peut être trouvée dans Masset et Papaloizou (2003)⁷. La différence essentielle entre ces deux démonstrations est la suivante : le présent calcul est effectué dans le formalisme de la couche de cisaillement (*shearing sheet* dans la littérature anglo-saxonne (Narayan et al., 1987)), dans lequel le couple de corotation est proportionnel au gradient de densité surfacique (il n’y a pas de gradient de vortacité en *shearing sheet*). Dans la démonstration plus générale de Masset et Papaloizou (2003), toutefois, on conserve la géométrie cylindrique du système et le couple de corotation dépend du gradient de vortensité. Hormis cette différence, la présente démonstration est en tous points semblable à la démonstration originale. Notons que nous avons aussi déjà souligné la différence entre couple fer-à-cheval et couple de corotation à la section 3.1. Toutefois, dans la présente analyse où nous considérons des grandes masses de planète et des régions fer-à-cheval larges, nous ne ferons pas cette distinction. Comme nous allons le voir, le couple de corotation est dominé par le couple fer-à-cheval du matériel du disque interne ou externe qui passe au travers de l’orbite.

Comme aux sections précédents, nous définissons x_s comme la demi-largeur radiale de la région fer-à-cheval. Nous rappelons que la quantité de moment angulaire spécifique qu’un élément de fluide au voisinage de la séparatrice prend à la planète est $4Bax_s$, lorsqu’il passe d’une orbite interne de rayon $a - x_s$ à une orbite externe de rayon $a + x_s$.

Le couple exercé par une planète en migration régulière (de taux \dot{a} constant), par les éléments du disque interne ou externe lorsqu’ils traversent l’orbite de la planète sur un demi-tour fer-à-cheval, à l’ordre le plus bas en x_s/a , est donc :

$$\Gamma_2 = (2\pi a \Sigma_s \dot{a}) \cdot (4Bax_s). \quad (3.22)$$

Nous utilisons les mêmes notations que Masset et Papaloizou (2003), où Σ_s est la densité surfacique à la séparatrice amont. Le premier facteur du membre de droite de l’équation ci-dessus représente le flux de masse au travers de l’orbite. Pour faire le bilan des couples, nous choisissons le système composé de la planète et de tous les éléments de fluide piégés en libration dans ses régions co-orbitales. En d’autres termes, nous prenons toute la région fer-à-cheval (de masse M_{HS}) et tout le matériel circumplanétaire (de masse M_R), parce que toutes ces parties sont engagées dans une migration de concert avec la planète.

Le taux de migration de ce système est donné par

$$(M_p + M_{HS} + M_R) \cdot (2Ba\dot{a}) = (4\pi ax_s \Sigma_s) \cdot (2Ba\dot{a}) + \Gamma_{LR}. \quad (3.23)$$

Ceci peut se réécrire sous la forme :

$$m_p \cdot (2Ba\dot{a}) = (4\pi a \Sigma_s x_s - M_{HS}) \cdot (2Ba\dot{a}) + \Gamma_{LR}, \quad (3.24)$$

⁷Voir article 3 page 133

où $m_p = M_p + M_R$ est la masse totale du système circumplanétaire, qui inclut la planète et le disque circumplanétaire. Pour des raisons de brièveté nous appellerons désormais cette masse totale “la masse de la planète”, ce qui est justifié par le fait que le matériel en orbite circumplanétaire “appartient” à la planète, au moins temporairement. Nous reviendrons sur ce type de considérations concernant la définition et l’extension de ce système “circumplanétaire” à la section 5.2.4. Le premier terme de la première parenthèse du membre de droite de l’équation (3.24) est égal à l’aire de la région fer-à-cheval multipliée par la densité de surface à la séparatrice amont, et il représente donc la masse qu’aurait la région co-orbitale si elle avait uniformément la densité de surface de la séparatrice amont. Le second terme est sa vraie masse. La différence des deux est appelée par Masset et Papaloizou (2003) le déficit de masse co-orbitale (DMC), noté δm . (Notons que l’on aurait pu inclure la masse du lobe de Roche dans l’expression du DMC, auquel cas on aurait utilisé le vocable “masse de planète” pour désigner exclusivement la masse de l’objet planétaire (à l’exclusion du matériel circumplanétaire). Ce choix aurait conduit à une formulation équivalente, et au même critère d’emballage que celui que nous allons obtenir ci-après).

L’équation (3.24) donne le taux de migration suivant :

$$\dot{a} = \frac{\Gamma_{LR}}{2Ba(m_p - \delta m)} \quad (3.25)$$

Si nous considérons l’intervalle de masses planétaires pour lequel la région co-orbitale est déplétée, au moins partiellement, alors $\delta m > 0$ et ainsi le taux de dérive donné par l’équation (3.25) est toujours plus grand que les estimations standards (qui négligent δm). Ceci vient du fait que la dynamique co-orbital allège la tâche du couple différentiel de Lindblad en déplaçant les éléments de fluide de la séparatrice amont à la séparatrice aval. Le moment angulaire que ces éléments de fluide extraient de (ou donnent à) la planète lors de ce processus favorise sa migration, qu’elle ait lieu vers l’intérieur ou l’extérieur.

Lorsque δm tend vers m_p , l’essentiel du moment angulaire perdu par la planète et sa région co-orbitale est gagnée par le matériel en circulation qui traverse l’orbite, rendant la migration de plus en plus “rentable”.

Notons au passage que le mécanisme sur lequel la migration de type III (ou emballée) est basée peut-être décrit par le formalisme standard des boucles de rétroaction positive, comme montré à la figure 3.11.

Le gain en boucle ouverte est $G' = \mathcal{AB} = \delta m/m_p$, de telle sorte que la condition de stabilité du système $G' < 1$ s’écrit ici $\delta m < m_p$. Au-dessus de ce seuil, on obtient une migration emballée. En dessous, le gain en boucle fermée, donné par :

$$G = \frac{\mathcal{A}}{1 - \mathcal{AB}}, \quad (3.26)$$

conduit à l’équation (3.25).

Lorsque $\delta m \geq m_p$, l’analyse ci-dessus (qui suppose une migration régulière, c.-à-d. un taux de migration \dot{a} constant) n’est plus valide. Comme nous allons le

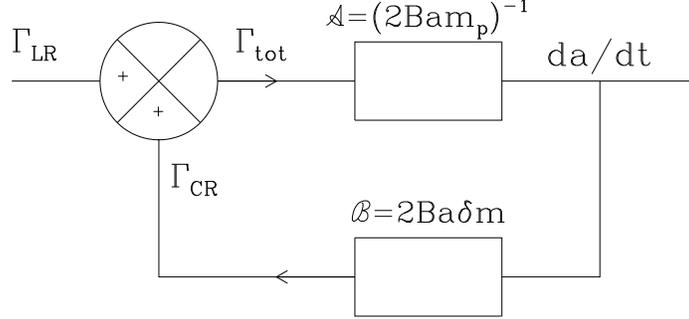


FIG. 3.11 – Représentation schématique de la boucle de rétroaction positive. Le temps de latence est $\sim \tau_{\text{lib}}$. Le couple total ressenti par la planète, Γ_{tot} , est la somme du couple de Lindblad Γ_{LR} et du couple de corotation Γ_{CR} . Ceci donne un taux de migration da/dt , qui exerce une rétroaction sur la valeur du couple de corotation, au travers de la branche inférieure de cette boucle.

voir ci-après, la migration entre dans un régime emballé. Le taux de migration varie fortement au cours du temps, en commençant par augmenter exponentiellement au cours des premiers temps de libration. Une analyse similaire à celle effectuée ci-dessus peut alors être entreprise, en autorisant le couple de corotation à dépendre du taux de migration, mais en tenant compte d'un délai τ entre l'arrivée d'un flux de masse à la séparatrice amont et son impact sur le couple de corotation. Ce délai représente le temps de latence de la boucle de rétroaction. Nous pouvons écrire :

$$\Gamma_{\text{CR}}(t) = 2Ba \delta m \dot{a}(t - \tau), \quad (3.27)$$

où nous supposons que la migration est toujours suffisamment lente pour que le couple de corotation soit proportionnel au taux de migration. L'expression du couple de corotation de l'équation (3.27) peut alors être utilisée dans le bilan de moment angulaire, qui s'écrit :

$$2Bam_p \dot{a} = \Gamma_{\text{LR}}(t) + \Gamma_{\text{CR}}(t). \quad (3.28)$$

En utilisant les équations (3.27) et (3.28), un développement de Taylor au premier ordre de $\dot{a}(a - \tau)$ nous donne l'équation différentielle suivante pour \dot{a} :

$$\left(1 - \frac{\delta m}{m_p}\right) \dot{a} + \tau \frac{\delta m}{m_p} \ddot{a} = \frac{\Gamma_{\text{LR}}}{2Bm_p a}. \quad (3.29)$$

Ceci peut être récrit de la manière suivante :

$$\gamma \dot{a} + \xi \ddot{a} = \frac{\Gamma_{\text{LR}}}{2Bm_p a}, \quad (3.30)$$

où $\gamma = 1 - \delta m/m_p$ et $\xi = \tau \delta m/m_p$.

Notons au passage que si nous prenons $\tau = \tau_{\text{lib}}/4$, où $\tau_{\text{lib}} = 4\pi a/(|A|x_s)$ est le temps requis pour décrire une ligne de courant fer-à-cheval complète au voisinage de la séparatrice, alors $\xi = (\pi a/|A|x_s)\delta m/m_p$. Masset et Papaloizou (2003) trouvent, à leur équation (A5) : $\xi = (3\pi a/4|A|x_s)\delta m/m_p$. La valeur qu'ils obtiennent pour γ est la même que celle utilisée dans la présente analyse.

L'équation ci-dessus est vérifiée tant que le couple de corotation est proportionnel au taux de migration. Elle conduit à deux comportements différents, selon le signe des coefficients des dérivées temporelles de a . Sa solution générale est la somme d'une valeur constante pour \dot{a} , donnée par l'équation (3.25), et d'une solution générale de l'équation différentielle homogène associée.

- Si γ et ξ ont le même signe, alors cette solution générale est une fonction exponentielle qui décroît avec le temps. Le taux de migration tend alors vers la valeur donnée par l'équation (3.25) sur une courte échelle de temps. C'est le régime de migration régulière, dont le “moteur principal” est le couple différentiel de Lindblad. La dynamique co-orbitale allège sa tâche et accélère la migration.
- Si γ et ξ ont des signes opposés (c.-à-d. si $\gamma < 0$, puisque ξ est toujours positif), alors la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (3.30) est une exponentielle qui croît au cours du temps. Le taux de migration augmente ainsi rapidement, d'où l'épithète “emballée” pour caractériser ce type de migration, aussi appelé “migration de type III”. Le taux de migration va augmenter (en valeur absolue) indépendamment de son signe, qui dépend des conditions initiales. La condition $\gamma < 0$ se traduit par $\delta m > m_p$. Ceci signifie que pour qu'une planète entre en migration de type III, elle doit significativement dépléter sa région co-orbitale. Aussi, puisque le DMC est proportionnel à la densité de surface initiale du disque, la migration de type III est attendue dans les disques protoplanétaires massifs.

Dans le régime emballé, le temps d'exponentiation du taux de migration est $\tau_e = -\xi/\gamma = \tau \delta m/(\delta m - m_p)$. Cette échelle de temps est du même ordre que le temps de libration, de l'ordre de la dizaine d'orbites (fonction de la masse de la planète et du déficit de masse co-orbitale). Le taux de migration peut ainsi rapidement atteindre de très grandes valeurs, pour lesquelles l'hypothèse de l'équation (3.27) (à savoir que le couple de corotation est proportionnel au taux de migration) n'est plus valable. Cette dépendance linéaire du couple de corotation en le taux de migration est valide tant que le demi-grand axe varie d'une quantité inférieure à la demi-largeur fer-à-cheval sur un temps de libration :

$$|\dot{a}| < \dot{a}_{\text{crit}} = \frac{Ax_s^2}{2\pi a}. \quad (3.31)$$

On doit alors considérer une relation plus générale entre $\Gamma_{CR}(t)$ et le taux de migration. La valeur du couple de corotation à tout instant t , de manière générale, dépend de $\dot{a}(t')$ pour tout $t' < t$, puisque la distribution de vortensité dans la région co-orbitale dépend de tout l'historique de migration de la planète.

Ceci rend le problème de la détermination de l'évolution du demi grand-axe pratiquement insoluble, à moins que l'on ait recours à des simulations numériques ou à des hypothèses simplificatrices. Une telle hypothèse est que la migration est régulière, et que son déficit de masse co-orbitale est fixe. Sous ces conditions, le couple de corotation dépend (seulement) de la valeur de \dot{a} . On peut alors écrire la conservation du moment angulaire sous la forme :

$$2Bam_p\dot{a} = \Gamma_{LR} + \Gamma_{CR}(\dot{a}). \quad (3.32)$$

Il s'agit d'une équation implicite sur \dot{a} . Son nombre de racines dépend de la fonction $\Gamma_{CR}(\dot{a})$.

Si l'on fait l'hypothèse que la planète possède un déficit de masse co-orbitale donné, le couple de corotation dépend linéairement du taux de migration pourvu que celle-ci soit lente, c.-à-d. que \dot{a} satisfasse l'inégalité (3.31). Il atteint ensuite un maximum et décroît pour des valeurs plus grandes de \dot{a} (Masset et Papaloizou, 2003). Notons toutefois que la dépendance fonctionnelle exacte de Γ_{CR} vis-à-vis de \dot{a} dans le régime de migration rapide ($|\dot{a}| > \dot{a}_{\text{crit}}$) dépend de la déplétion du profil de vortensité dans la région co-orbitale. C'est notablement différent du régime de migration lente, où le couple de corotation ne dépend du profil de vortensité que par son intégrale radiale, liée au déficit de masse co-orbitale. En particulier, l'examen de la figure 9 de Masset et Papaloizou (2003) montre que le pic du couple de corotation atteint une valeur supérieure à ce que l'extrapolation de la dépendance linéaire prédit pour $\dot{a} = \dot{a}_{\text{crit}}$, puis décroît à grande valeur de \dot{a} . Ces résultats sont assez différents de ceux présentés à la figure 3.12, qui ont été obtenus en utilisant pourtant une masse de planète et des paramètres de disque identiques à ceux de Masset et Papaloizou (2003) (la résolution numérique est légèrement meilleure dans ce nouveau cas, toutefois). La différence la plus importante dans ces nouveaux calculs (qui ont été obtenus en imposant "manuellement" une dérive du disque par rapport à l'orbite, plutôt qu'en ayant une planète migrant réellement, comme expliqué à la section 5.6 de Masset et Papaloizou (2003)) tient au fait qu'il n'y a pas eu de "préparation" préalable du système autorisant la planète à acquérir un déficit de masse co-orbitale avant que la dérive planète-disque n'ait lieu. Le déficit est cette fois créé en même temps que le disque dérive par rapport à la planète. Lorsqu'il est grand, il est difficile pour la planète d'évacuer une grande quantité de matière de sa région co-orbitale. Ceci montre bien à quel point le couple de corotation $\Gamma_{CR}(\dot{a})$ dépend de la manière dont le déficit de masse co-orbitale a été acquis. Néanmoins, les nouveaux résultats de la figure 3.12 ont en commun avec ceux de Masset et Papaloizou (2003) un certain nombre de propriétés :

- Le couple total exhibe une dépendance affine en \dot{a} dans le régime de migration lente.
- Bien que les valeurs maximales aient des valeurs différentes, elles ont le même ordre de grandeur.
- Le couple décroît au-delà de cette valeur maximale. La raison en est double : quand le déficit de masse co-orbitale est acquis durant la migration (ou la dérive du disque), le déficit atteint est petit pour les grands

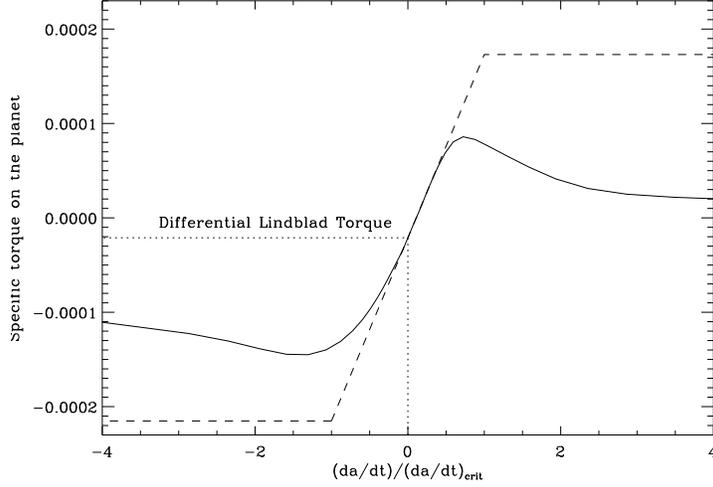


FIG. 3.12 – Couple spécifique total agissant sur une planète de la masse de Saturne dans un disque de rapport d’aspect $h = 0.03$ et de densité surfacique $\Sigma \propto r^{-3/2}$. La viscosité cinématique est uniforme et vaut $\nu = 10^{-5}$, tandis que la densité de surface (initiale) à l’endroit de la planète est 10^{-4} . L’abscisse montre $\dot{a}/\dot{a}_{\text{crit}}$, où \dot{a}_{crit} est évalué en utilisant les équations (3.31) et en supposant $x_s/a = 0.11$. La ligne en tirets montre la dépendance “naïve” d’une relation affine dans le régime lent, et d’une plateau constant dans le régime rapide.

taux de migration. La décroissance est aussi présente, toutefois, lorsque le déficit de masse co-orbitale est acquis *avant* la migration. Elle est due au fait que, lorsque la dérive est rapide, le temps mis pour dériver au travers de la région fer-à-cheval est comparable, ou plus court, que le temps d’un demi-tour fer-à-cheval. Ceci résulte en une coupure du couple de corotation, qui justifie cette décroissance.

Une fois que la dépendance du couple de corotation en le taux de migration est connue, que ce soit par un modèle simplifié ou par des simulations numériques, on peut chercher les racines de l’équation (3.32). Ceci peut être fait pour n’importe quelle masse de disque, puisque tout étant fixé par ailleurs le couple de Lindblad et le couple de corotation sont proportionnels à la densité surfacique du disque. Selon la valeur respective des pentes de terme d’inertie (membre de gauche de l’équation [3.32]) et du couple à l’origine (membre de droite de l’équation [3.32]), on peut avoir soit une, soit trois racines, comme montré à la figure 3.13.

Lorsque l’on effectue une recherche de racines à partir de la courbe présentée à la figure 3.12, on obtient les résultats de la figure 3.14. Celle-ci montre les racines dans le plan $(\Sigma/\Sigma_{\text{crit}}, [\dot{a}/\dot{a}_{\text{crit}}/(\Sigma/\Sigma_{\text{crit}})])$. Sur ce graphe, si la migration n’était pas modifiée par la dynamique co-orbitale, on aurait simplement une

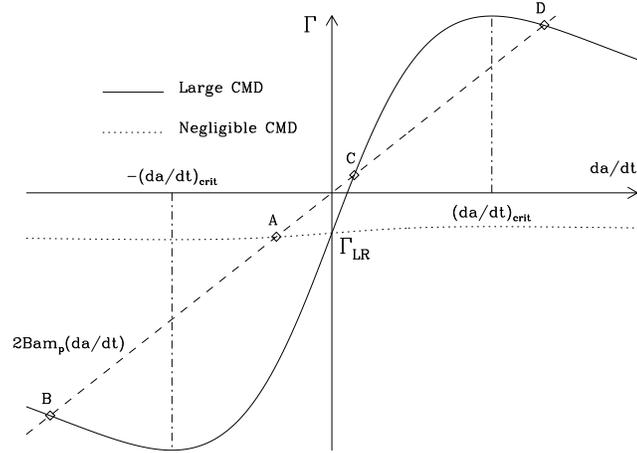


FIG. 3.13 – La courbe continue montre le couple total subi par une planète dans un disque massif (avec un grand déficit de masse co-orbitale), en fonction du taux de dérive, en supposant celui-ci constant dans le temps. Pour $|\dot{a}| \ll \dot{a}_{\text{crit}}$ le couple exhibe une dépendance linéaire en \dot{a} (ce qui a été confirmé de manière très précise par les simulations numériques). La ligne pointillée montre le couple dans un disque de faible masse (c.-à-d. avec un déficit de masse co-orbitale négligeable). Dans ce cas le couple est presque indépendant de la vitesse de migration et est toujours pratiquement égal à la valeur du couple différentiel de Lindblad Γ_{LR} . La ligne en tirets représente le taux auquel la planète gagne du moment angulaire en fonction de \dot{a} , en supposant son orbite circulaire. Dans tous les cas, les situations stationnaires sont obtenues par l'intersection de cette droite avec la courbe du couple. Dans le cas d'un disque de faible masse, l'intersection se réduit à un point unique (A), stable. Le taux de migration correspondant est négatif, et contrôlé par le couple différentiel de Lindblad. Pour un disque massif (cas emballé ou type III), il y a trois points d'intersection (B, C et D). Le point central (C) est instable, alors que les points extrêmes (B et D) sont stables et correspondent à la dérive maximale que la planète peut atteindre, soit vers l'intérieur (point B, $\dot{a} < 0$), soit vers l'extérieur (point D, $\dot{a} > 0$).

droite horizontale donnant la pente de la dépendance de \dot{a} vis-à-vis de Σ . C’est le comportement asymptotique que l’on obtient à petite masse de disque. Même pour $\Sigma < \Sigma_{\text{crit}}$, cependant, on peut voir que la vitesse de migration augmente (plus vite que par une dépendance purement linéaire) lorsque l’on s’approche de la densité de surface critique, puisque le déficit de masse co-orbitale augmente. Une planète située sur la branche instable (ligne en tirets) se dirigera soit vers la branche supérieure, soit vers la branche inférieure. Tant qu’elle reste dans le domaine de migration lente (zone grisée), où le couple de corotation est proportionnel à la vitesse de migration, elle s’éloigne de la branche instable à un taux qui croît exponentiellement, comme indiqué par les solutions de l’équation (3.30). Notons que l’apparition des trois racines a lieu pour une valeur de Σ légèrement plus grande que Σ_{crit} , plutôt que pour $\Sigma = \Sigma_{\text{crit}}$. Ceci est dû au fait que la racine “extérieure” ($\dot{a} > 0$) apparaît quand la ligne en tirets est tangente à la courbe (c.-à-d. quand les points C et D sont confondus) sur la figure 3.13. La pente de la ligne en tirets est alors légèrement inférieure à la pente de la tangente à la courbe du couple en $\dot{a} = 0$, de telle sorte que δm est légèrement plus grande que m_p . Dans le cas particulier de la figure 3.14, on a trois racines pour $\Sigma > 1.38\Sigma_{\text{crit}}$ et une racine seulement dans le cas contraire. L’allure du déficit de masse co-orbitale dans les régimes lent et rapide est montré à la figure 3.15. Dans le régime rapide, le gaz sous-dense piégé dans la zone co-orbitale ne couvre qu’une petite partie de la région co-orbitale puisque le temps de dérive au travers de cette région est plus court que le temps de libration. La forme du déficit piégé est approximativement parabolique dans le plan (φ, r) . Ceci peut être facilement compris dans le cadre du modèle simplifié développé par Masset (2001) à la section 3.2⁸.

Ce type de comportement est observé chaque fois que la dérive planète–disque est rapide (c.-à-d. $|\dot{a}| > \dot{a}_{\text{crit}}$). Un exemple pour des disques visqueux est donné par Masset (2002) aux figures 7 et 8. La masse critique du disque (au-dessus de laquelle la migration s’emballe) dépend du rapport d’aspect du disque et de sa viscosité effective. La limite a été recherchée par Masset et Papaloizou (2003) pour plusieurs rapports d’aspect du disque et pour la viscosité cinématique $\nu = 10^{-5}$. Nous montrons à la figure 3.16 le domaine de migration de type III pour un disque de rapport d’aspect $h = 0.04$. Notons que dans ce travail la masse critique du disque correspond à $m_p = \delta m$ et non à la masse critique légèrement plus grande (comme expliqué précédemment) pour laquelle on obtient plusieurs taux de migration. Notons pour finir que le DMC de ces simulations a été acquis en orbite circulaire fixe, avant que la dérive disque–planète ne commence.

La figure 3.16 montre que la migration de type III est facilement obtenue pour des planètes de masse de Saturne dans des disques suffisamment massifs (légèrement plus massifs que la MMSN à 10 U.A.). Papaloizou (2005) a effectué des simulations 3D locales en “boîte de cisaillement” (*shearing box* dans la littérature anglo-saxonne) qui confirment ces résultats. Toutefois, rappelons que le

⁸Ce modèle simplifié a été développé dans le contexte d’une dérive visqueuse entre le disque et la planète, mais il est en fait valide pour tout type de dérive.

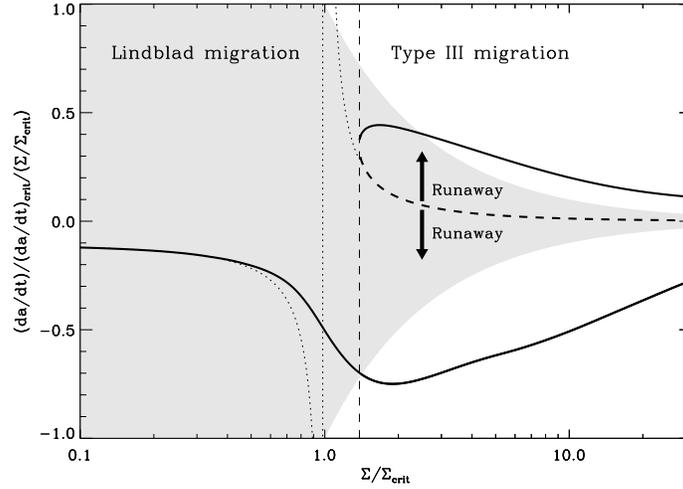


FIG. 3.14 – Taux de migration régulière normalisé en fonction de la masse du disque (en unités de masse critique), pour la série de calculs présentés à la figure 3.12. La ligne continue en gras montre les solutions stables, tandis que la ligne en tirets gras montre la solution instable. Pour les disques de faible masse, il n’y a qu’un seul taux de dérive régulière possible, donné par le couple différentiel de Lindblad, d’où le qualificatif de “Lindblad migration” (migration de type I serait incorrect, car le profil de densité surfacique est perturbé; migration régulière serait également incorrect, puisque par hypothèse ici la migration est régulière même pour les grandes masses de disque). L’hyperbole en pointillés est obtenue à partir de l’équation (3.25). Elle se connecte à la solution instable dans le régime des grandes masses de disque. La surface grisée montre la région de migration lente ($|\dot{a}| < \dot{a}_{\text{crit}}$).

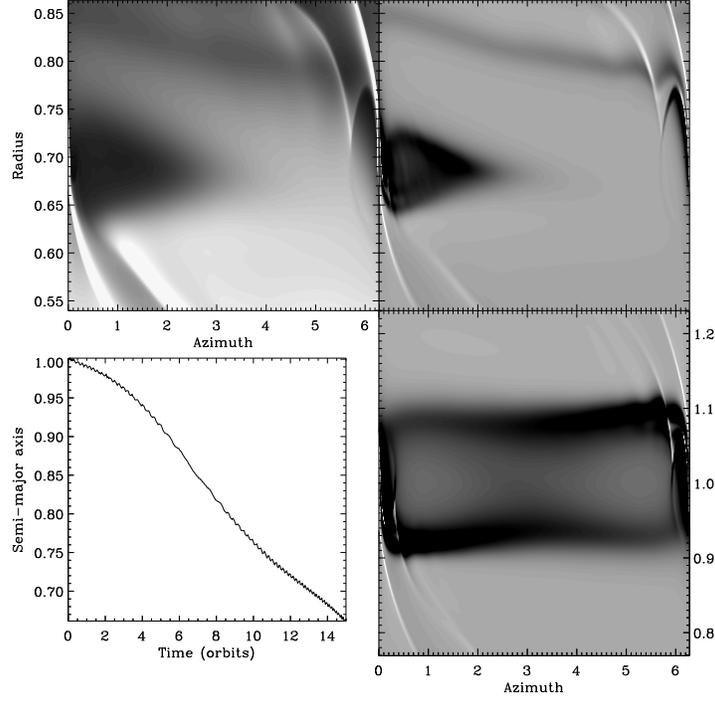


FIG. 3.15 – Exemple de migration de type III d’une planète de masse de Saturne dans un disque pour lequel $\Sigma \approx 3\Sigma_{\text{crit}}$. La planète est maintenue sur une orbite circulaire fixe durant 64 orbites, durant lesquelles elle acquiert un déficit de masse co-orbitale. Elle est ensuite autorisée à migrer librement. La figure en bas à droite montre la distribution de vortensité juste avant le lâcher, avec une échelle de niveaux de gris en négatif (c.-à-d. que les régions les plus sombres correspondent à une vortensité plus grande). Il y a un excès de $(\nabla \times \mathbf{v})_z / \Sigma$ dans la région co-orbitale, et donc un déficit de $\Sigma / (\nabla \times \mathbf{v})_z$. La figure en haut à droite montre la vortensité 13 orbites après le lâcher, tandis que la figure en haut à gauche montre la densité de surface (avec une échelle de niveaux de gris positive) au même moment. Le graphe en bas à gauche montre l’évolution temporelle du demi grand-axe, qui montre une accélération initiale suivie d’une saturation à un taux de migration rapide d’environ $0.03a \text{ orbite}^{-1}$.

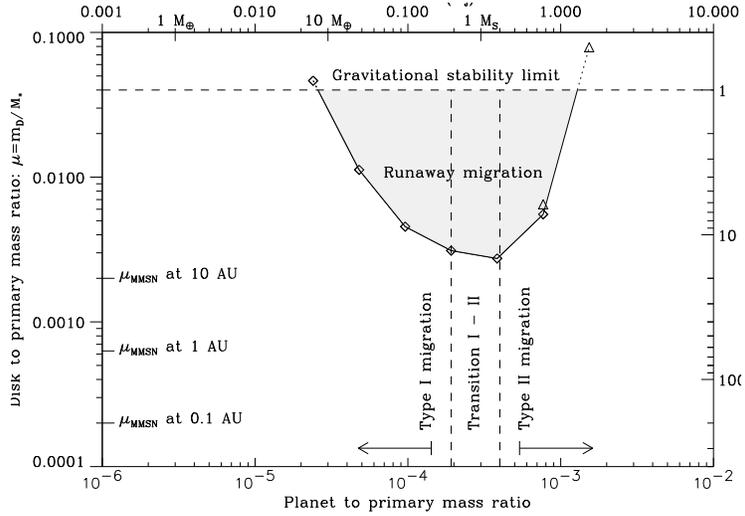


FIG. 3.16 – Limite du domaine d’emballage pour un disque ayant $h = 0.04$, $\nu = 10^{-5}$ et un profil de densité de surface $\Sigma \propto r^{-3/2}$. La variable $m_D = \pi \Sigma r^2$ est représentée sur l’axe des ordonnées. Elle représente la masse “locale” du disque, et dépend par conséquent du rayon. La graduation de l’axe de droite montre le paramètre de Toomre Q . La migration emballée est plus facile à obtenir pour des planètes de la masse de Saturne, pour lesquelles elle interviendra dans des disques quelques fois plus massifs que la nébuleuse solaire de masse minimale (MMSN). La migration emballée est impossible pour des planètes massives ($M > 1 M_J$), puisque la densité de surface est basse sur la séparatrice amont (qui se trouve dans le sillon). Les objets de petite masse ($M < 10 M_\oplus$) ne déplètent pas leur région co-orbitale, et ne peuvent donc pas subir de migration emballée.

domaine de migration de type III et le diagramme de la figure 3.14 dépendent fortement de la manière dont la planète a acquis son déficit de masse co-orbitale. Si la planète est maintenue sur une orbite circulaire fixe sur un temps suffisant pour dépler son orbite, alors le DMC dépend de la masse de la planète, de l'épaisseur du disque et de la viscosité. Plus la viscosité et/ou l'épaisseur du disque est importante, plus la déplétion est faible et plus le DMC est petit.

Alors que les figures 3.12 et 3.14 montrent que la migration de type III peut en principe avoir lieu vers l'extérieur ($\dot{a} > 0$), la figure 3.14 montre que pour que ceci ait lieu, la planète doit initialement avoir un taux de migration vers l'extérieur significatif (c.-à-d. qu'elle doit se trouver "au-dessus" de la ligne en tirets gras). Sinon elle se dirigera vers la branche inférieure et subira une migration de type III vers l'objet central. Puisque le taux de migration doit être maintenu sur au moins un temps de libration pour "s'imprimer" sur la distribution de vortensité co-orbitale de la planète, l'amorce de migration vers l'extérieur de la planète doit être maintenue sur quelques dizaines d'orbites. Masset et Papaloizou (2003) ont cherché à savoir si l'on pouvait obtenir de la migration rapide vers l'extérieur de planètes de masse de Saturne. Ils ont réussi à obtenir des épisodes de migration emballée vers l'extérieur pour des profils de disque peu piqués ($\Sigma \propto r^{-\zeta}$, avec $\zeta = 0$ ou $\zeta = 1/2$), puisque ceux-ci donnent naturellement un déficit de masse co-orbitale qui augmente lorsque la planète migre vers l'extérieur. Toutefois, ils ont également trouvé qu'on l'on ne peut pas obtenir de migration vers l'extérieur qui dure indéfiniment. Au lieu de ceci, le déficit de masse co-orbitale fini par être perdu et la migration s'inverse, repartant vers l'intérieur. Cet effet peut être vu à la figure 3.17, qui montre le lâcher d'une planète à $a = 1$ dans un disque où elle a été forcée à migrer auparavant sur 100 orbites. À l'heure actuelle il n'existe pas de critère qui permette de prédire la perte du déficit de masse co-orbitale, qui dépend de la variation temporelle de \dot{a} . Dans le référentiel comobile (en corotation instantanée et "co-migration" avec la planète) les lignes de courant ne sont pas fermées, ce qui laisse la possibilité au déficit de masse co-orbitale de "fuir" dans le disque interne ou dans le disque externe.

Dans toute l'analyse exposée dans cette section, l'accrétion sur la planète a été négligée. On suppose que tout le matériel du disque qui traverse la séparatrice amont finit par traverser, après un demi-tour fer-à-cheval, la séparatrice aval. Cependant, la masse des planètes susceptibles de subir de la migration de type III est bien supérieure à la masse critique pour l'accrétion rapide de gaz sur le cœur planétaire. Aussi, une fraction du gaz traversant la région co-orbitale devrait être retenue par la planète. D'un autre côté, le flux de masse au travers de l'orbite durant un épisode de type III est extrêmement élevé. Par exemple, durant l'épisode montré à la figure 3.15, le flux de masse atteint $\dot{M} \sim 3 - 4 \cdot 10^{-4} M_{*} \cdot \text{orbite}^{-1}$, c.-à-d. une demi masse de Jupiter par orbite. C'est beaucoup plus que ce que peut accréter la planète, aussi seule une petite fraction du matériel traversant l'orbite devrait être déviée vers la planète. Aussi, l'analyse de la migration emballée exposée ci-dessus devrait être pratiquement inchangée par l'introduction de l'accrétion.

Nous terminons cette section en mentionnant un travail récent de D'Angelo

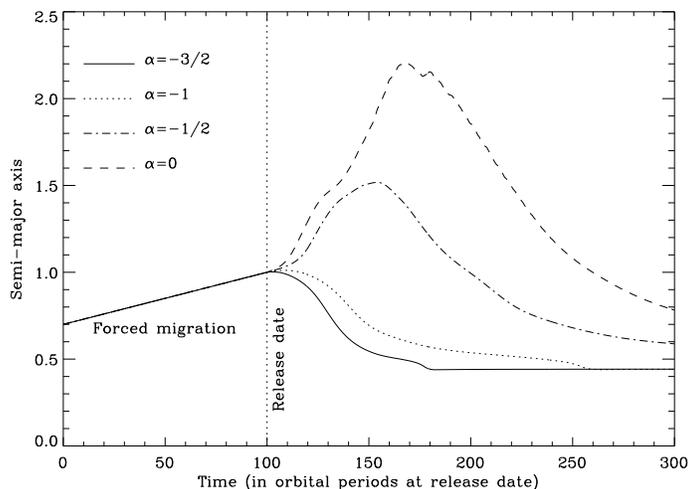


FIG. 3.17 – Une migration de type III vers l’extérieur est constatée pour les deux profils les moins piqués. Elle augmente le demi grand-axe respectivement d’un facteur 1.5 et 2.2 en quelques dizaines d’orbites.

et al. (2005), qui étudient la dépendance du couple co-orbital de corotation vis-à-vis du taux de migration au moyen de simulations 2D et 3D. Ils utilisent une technique de grilles emboîtées qui leur permet une résolution bien plus élevée que celle de Masset et Papaloizou (2003). Ils trouvent que si on prend en compte tout le matériel circumplanétaire dans l’évaluation du couple de marée, le couple de corotation co-orbital ne dépend pas du taux de dérive, ou très faiblement. Cette conclusion contredit celle de Masset et Papaloizou (2003). Toutefois, indiquons qu’à ces deux travaux il manque un ingrédient physique essentiel : l’auto-gravité du gaz. Alors que cet ingrédient devrait avoir une importance mineure lorsque la masse du matériel circumplanétaire est petite devant celle de la planète (par exemple à basse résolution), il devrait avoir une importance considérable à haute résolution (lorsqu’un disque circumplanétaire massif apparaît autour de la planète). En particulier, alors que dans le cas auto-gravitant il est naturel de sommer sur tout le gaz pour connaître le couple de marée (chaque élément du système attire tous les autres), ceci n’est plus du tout automatique dans le cas où l’on rejette explicitement l’auto-gravité du gaz. Dans ce cas, prendre en compte le contenu du lobe de Roche dans le calcul du couple peut conduire à des paradoxes, un peu comme celui d’arriver à se soulever en tirant sur ses lacets de chaussure. Un travail de clarification est très attendu dans ce domaine, dans la mesure où il permettra de débloquer la situation et de faire converger les partisans du “on prend tout dans le calcul du couple” et les partisans du “on doit tronquer au lobe de Roche quand le disque n’est pas auto-gravitant” (dont je suis). Ce travail correspond à l’un des aspects de la thèse de doctorat

de Clément Baruteau.

3.4 Migration stochastique

Dans les sections précédents, le disque protoplanétaire était considéré comme laminaire et l'accrétion de gaz sur l'objet central était assurée par une viscosité cinématique *ad hoc*, choisie de manière à avoir un bon accord avec les taux d'accrétion mesurés pour les étoiles T Tauri. La viscosité moléculaire des disques protoplanétaires est largement insuffisante, toutefois, pour rendre compte de la viscosité effective des disques protoplanétaires (par de nombreux ordres de grandeur). La source de la grande viscosité effective que l'on infère des observations semble être la turbulence, bien que des hypothèses alternatives aient été envisagées. Un exemple de tels hypothèses alternatives est le transport de moment angulaire, à grande échelle, qui provient de l'interaction du flot avec un grand ensemble de planètes de petite masse. L'effet d'un tel transport peut être décrit en valeur moyenne et à grande échelle par une viscosité effective (Goodman et Rafikov, 2001). La turbulence peut avoir un certain nombre d'origines : l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI), par exemple, a été identifiée comme une puissante source de turbulence MHD dans les disques magnétisés (Balbus et Hawley, 1991; Hawley et Balbus, 1991; Hawley et Balbus, 1992). D'autres sources ont été suggérées, comme la turbulence hydrodynamique (Dubrulle et al., 2005; Klahr et Bodenheimer, 2003) ou la turbulence résultant de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, qui est due au cisaillement vertical du gaz provenant de la sédimentation de la poussière (Johansen et al., 2006). Seule la turbulence MHD, toutefois, a été intensivement étudiée par des simulations numériques dans le contexte des interactions planète–disque. Aussi n'avons nous des statistiques de couple que dans ce cas particulier, et c'est la raison pour laquelle nous nous focaliserons exclusivement sur la turbulence MHD dans cette section.

L'instabilité magnéto-rotationnelle peut se développer exclusivement dans les régions du disque où la matière et le champ magnétique sont couplés, ce qui requiert un taux d'ionisation suffisant (bien que faible). Dans les régions du disque où l'on pense que les planètes se forment (1–10 U.A.), on pense que seules les couches superficielles du disque sont ionisées par des rayons X provenant de l'étoile centrale ou par des rayons cosmiques (Gammie, 1996; Fromang et al., 2002). Le gros du disque, toutefois, devrait être ionisé en dehors de cette région. Ceci a conduit Gammie (1996) au concept d'accrétion en couche : les couches supérieures de la région entre 1 et 10 U.A. participent à l'accrétion sur l'étoile centrale, alors que les parties équatoriales, inactives, appelées usuellement la zone morte (*dead zone*, dans la littérature anglo-saxonne) ne participe pas au flux de masse vers l'intérieur.

Il existe déjà un grand ensemble de travaux décrivant des simulations numériques de planètes immergées dans un disque envahi par la turbulence MHD (Nelson et Papaloizou, 2004; Papaloizou et al., 2004b; Nelson et Papaloizou, 2003; Nelson, 2005; Winters et al., 2003). Ils ont fourni une information précieuse sur les interactions de marée dans le cas turbulent. Tous considèrent exclusivement

un disque complètement magnétisé (c.-à-d. sans zone morte), sans stratification verticale (c.-à-d. sans composante verticale de la gravité, autrement dit leurs disques sont “cylindriques”). Fromang et Nelson (2006) ont récemment effectué des simulations MHD globales dans des disques turbulents stratifiés. Toutefois, ils n’ont pas encore considéré l’interaction d’une planète immergée avec un tel disque.

Le couple exercé sur une protoplanète par un disque turbulent exhibe de grandes fluctuations temporelles. On peut donner un ordre de grandeur de l’amplitude de ces fluctuations en considérant une région sur-dense d’extension H , située à une distance H de la planète, et telle que la densité perturbée dans cette région soit du même ordre que la densité non perturbée. Ceci conduit à une amplitude de l’ordre de $G\Sigma a$ (Nelson et Papaloizou, 2004; Nelson, 2005).

Nelson et Papaloizou (2003) et Papaloizou, Nelson et Snellgrove (2004b) se sont intéressés à la morphologie du flot au voisinage d’une planète géant qui ouvre un sillon, et ils ont vérifié que l’ouverture du sillon est contrôlée par le même paramètre sans dimension que celui qui contrôle l’ouverture dans un disque laminaire (voir section 3.2).

Nelson et Papaloizou (2004) et Nelson (2005) se sont intéressés à la migration de planètes immergées dans des disques turbulents. Laughlin et al. (2004) se sont également intéressés à ce problème, mais plutôt que de s’y attaquer par des simulations numériques lourdes ils ont effectué des simulations 2D dans lesquelles ils imitent les effets de la turbulence en appliquant un potentiel non axisymétrique variable, qui agit sur le gaz, plutôt que directement sur la planète. Ils calibrent les propriétés statistiques de ce potentiel variable en utilisant des simulations MHD 3D préliminaires (sans planète). La migration de planètes de petite masse immergées dans des disques turbulents, dans ce modèle, est très différente de la migration de type I dans les disques laminaires. Les grandes fluctuations de couple dues à la turbulence induisent une marche au hasard du demi grand-axe de la planète, plutôt qu’une décroissance monotone.

La débat n’est pas encore tranché de savoir si le couple total exercé sur la planète par un disque turbulent peut être considéré comme la somme du couple laminaire et les fluctuations provenant de la turbulence. Nous appelons dorénavant cette dernière composante du couple (sa partie variable), le couple stochastique.

On peut s’attendre à ce que le couple stochastique moyenné sur de grands intervalles de temps soit négligeable devant le couple moyen (qui peut donc être égal au couple en régime laminaire, mais la réponse à cette question est encore inconnue), à condition que cette moyenne soit effectuée sur un intervalle de temps qui soit beaucoup plus long que le temps de récurrence de la turbulence. Sur ces grandes échelles de temps, la planète devrait exhiber un comportement systématique réminiscent de la migration de type I, plutôt qu’une marche au hasard. Nelson (2005) a étudié les propriétés statistiques des fluctuations du couple, et il a trouvé une puissance significative à très basse fréquence. En conséquence, dans la plupart de ses simulations on n’observe pas de tendance systématique. La migration stochastique domine largement la migration de type I sur la durée complète de ses simulations, qui est d’environ 150 orbites. La raison de ce

comportement est encore inconnue.

Notons également que l'amplitude du couple stochastique spécifique est quasiment indépendant de la masse de la planète (strictement indépendant dans la limite de masse nulle). Aussi, au-dessus d'une certaine masse les effets systématiques devraient dominer les effets stochastiques (pour une échelle de temps donnée) alors que ce devrait être le contraire pour des masses de planète plus petites. Notons que cette valeur critique ne devrait pas dépendre de la masse du disque puisque le couple du sillage et le couple stochastique sont tous deux proportionnels à la masse du disque. Nelson (2005) trouve que pour des masses de planètes jusqu'à $\sim 10 M_{\oplus}$ la migration stochastique domine les effets systématiques (sur une durée de 150 orbites) alors que les effets systématiques dominent à plus grande masse de planète. Mentionnons toutefois le travail récent de Fromang et Nelson (2006), qui affirment que dans un disque turbulent stratifié les fluctuations de densité sont plus petites que dans les modèles non stratifiés utilisés jusqu'à présent pour obtenir les statistiques de couple. Cet argument suggère que les effets systématiques pourraient être dominants pour des masses plus petites que $10 M_{\oplus}$.

Ainsi que l'on fait remarquer Johnson et al. (2006), si la turbulence a un temps de corrélation fini alors les effets de la migration stochastique (ou diffusive) de planètes de petite masse peuvent être réduits à une équation d'advection-diffusion. Ils montrent alors que la diffusion réduit toujours le temps moyen de migration des planètes, bien qu'une petite fraction d'entre elles puisse "survivre" sur une longue durée.

Chapitre 4

Évolution de l'excentricité des protoplanètes

Quand une planète possède une excentricité finie e , la transformée de Fourier azimutale de son potentiel contient des termes qui ne sont pas en corotation avec la planète et qui peuvent en principe exciter une réponse dans le disque (réponse sous forme d'onde propagative aux résonances de Lindblad, et réponse évanescente aux résonances de corotation). Le moment angulaire et l'énergie cédés au disque par ces nouvelles composantes du potentiel vont affecter le bilan d'énergie et de moment angulaire de la planète. Le rapport du flux d'énergie au flux de moment angulaire dans le disque n'est pas (contrairement à ce qui se passe pour une orbite circulaire) égal au rapport des variations d'énergie et de moment angulaire de la planète. Cette dernière réagit en ajustant son excentricité. Nous allons à présent voir comment ces nouvelles résonances peuvent soit exciter l'excentricité, soit l'amortir. Nous effectuons ensuite le bilan dans deux cas (celui d'une planète de petite masse à la section 4.2, et celui d'une planète géante à la section 4.3).

Considérons le bilan de moment angulaire et d'énergie d'une planète de masse M_p , de demi grand-axe a , et d'excentricité e , que l'on suppose décrire une orbite képlérienne. Son énergie total est E_p et son moment angulaire est J_p :

$$E_p = -\frac{GM_*M_p}{2a} \quad (4.1)$$

$$J_p = M_p\sqrt{GM_*a(1-e^2)} \quad (4.2)$$

Les dérivées temporelles de ces quantités sont :

$$\dot{E}_p = \frac{GM_*M_p}{2a^2}\dot{a} \quad (4.3)$$

et

$$\dot{J}_p = \frac{M_p}{2}\sqrt{\frac{GM_*(1-e^2)}{a}}\dot{a} - \frac{\Omega_p M_p e a^2}{\sqrt{1-e^2}}\dot{e}, \quad (4.4)$$

qui sont reliées par :

$$\dot{J}_p = \Omega_p^{-1} \sqrt{1 - e^2} \dot{E}_p - \frac{\Omega_p M_p e a^2}{\sqrt{1 - e^2}} \dot{e}. \quad (4.5)$$

Nous supposons dans ce qui suit que la planète excite une seule perturbation dans le disque, de fréquence Ω_d (d comme *disturbance*). Si l'on appelle F_E et F_H respectivement les flux d'énergie et de moment angulaire de cette perturbation, alors la conservation de l'énergie et du moment angulaire conduisent respectivement à :

$$\dot{E}_p + F_E = 0 \quad (4.6)$$

et

$$\dot{J}_p + F_H = 0. \quad (4.7)$$

Nous devons également utiliser la relation générale suivante, entre le flux d'énergie, de moment angulaire, et la fréquence d'une perturbation :

$$F_E = \Omega_d F_H. \quad (4.8)$$

En combinant les équations (4.5) à (4.8), on arrive à l'équation suivante :

$$\frac{M_p}{2} \frac{\Omega_p a^2}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{de^2}{dt} = \left(1 - \frac{\Omega_d}{\Omega_p} \sqrt{1 - e^2} \right) F_H. \quad (4.9)$$

L'équation (4.9) relie la variation temporelle de e^2 au couple F_H exercé sur le disque par une composante du potentiel de fréquence Ω_d . Notons que le nombre d'onde azimutal m n'apparaît pas dans cette équation, qui s'applique à *toute* perturbation de fréquence Ω_d . Si F_H est inconnu, toutefois, il peut être utile de considérer séparément les composantes azimutales du potentiel perturbateur et d'utiliser l'équation (2.5) et l'équation (2.11). Avant d'appliquer cette équation aux résonances de premier ordre (celle qui apparaissent pour une excentricité petite mais finie), il peut être intéressant de considérer l'impact sur l'excentricité des résonances principales (celles que nous avons déjà considéré à la section 2.3), où la planète excite une réponse même lorsqu'elle est en orbite circulaire. Nous supposons que la planète possède une petite excentricité e , et nous développons l'équation (4.9) au deuxième ordre en e . Puisque nous considérons les résonances principales, nous avons $\Omega_d = \Omega_p$. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = \frac{F_H}{2M_p \Omega_p a^2}. \quad (4.10)$$

Puisque F_H est le couple des perturbations de fréquence Ω_p , il correspond au couple du sillage (et c'est aussi le couple exercé par le perturbateur sur le disque). Il est donc (en général) positif et c'est ce couple qui fait migrer la planète (en général) vers l'intérieur. La quantité $F_H(M_p a \Omega_p / 2)$ est aussi $-\dot{a}$ dans un disque képlérien, en supposant que l'excentricité est suffisamment petite pour que seules les couples de résonances principales aient un effet sur la migration. Nous avons donc $\dot{e}/e = -(1/4)\dot{a}/a$. Nonobstant le rôle des résonances de premier

ordre, que nous allons étudier à la section 4.1, les résonances principales excitent (si la migration se fait vers l'intérieur) ou amortissent (si la migration se fait vers l'extérieur) l'excentricité sur une échelle de temps qui est quatre fois l'échelle de temps de la migration (Goldreich et Sari, 2003). On peut aussi s'intéresser séparément à l'impact de chaque résonance. Les résonances principales externes de Lindblad, pour lesquelles $F_H > 0$, excitent l'excentricité. Les résonances principales internes de Lindblad l'amortissent. Enfin, les résonances principales de corotation excitent l'excentricité si le gradient de vortensité est négatif au rayon de corotation, et sinon l'amortissent. Puisque les planètes migrent en général vers l'intérieur, leur excentricité est excitée par les résonances principales. L'échelle de temps de cette excitation est toutefois très longue. Comme nous allons le voir à la section suivante, cet effet est complètement masqué par les effets des résonances de premier ordre.

4.1 Résonances du premier ordre

Quand la planète possède une excentricité finie e , certaines des composantes azimutales du potentiel, de nombre d'onde m , ont une vitesse angulaire différente de celle de la planète. Nous ne présentons pas ici la démonstration de l'amplitude de ces composantes, que l'on peut trouver par exemple dans (Goldreich et Tremaine, 1980). Pour notre propos, il suffit de savoir qu'en plus des termes du potentiel de fréquence Ω_p (qui existent même pour une orbite circulaire, et qui ont été déjà contemplés à la section 2.3), il y a aussi des termes du potentiel dont l'amplitude est proportionnelle à e et qui ont une fréquence de rotation $\Omega_p \pm \kappa_p/m$, où κ_p est la fréquence épicyclique de la planète. On peut qualitativement justifier la valeur de ces fréquences comme suit : une planète en orbite excentrique décrit une épicycloïde dans le sens contraire de sa rotation, à la fréquence κ_p , dans le référentiel en corotation avec le centre-guide de la planète. Dans ce référentiel toutes les composantes de Fourier de la planète oscillent donc avec une période $2\pi/\kappa_p$, et leur transformée de Fourier temporelle implique donc des fréquences qui sont des multiples de $\pm\kappa_p$. En particulier, quand e est petite la variation du potentiel en un point donné du référentiel tournant est sinusoïdale dans le temps. La transformée de Fourier temporelle du potentiel consiste donc essentiellement en sa valeur moyenne et un mode fondamental, de fréquence $\pm\kappa_p$ dans le référentiel tournant. Cela se traduit par une fréquence de rotation $\pm\kappa_p/m$ dans ce référentiel, et donc une fréquence de rotation $\Omega_p \pm \kappa_p/m$ dans un référentiel fixe.

À partir de maintenant nous allons appeler les résonances (de Lindblad et de corotation) de ces composantes du potentiel des résonances de premier ordre, puisque leur amplitude est proportionnelle à l'excentricité. Nous appellerons les composante du potentiel de fréquence de rotation $\Omega_p + \kappa_p/m$ des composantes rapides, et les autres (de fréquence de rotation $\Omega_p - \kappa_p/m$) des composantes lentes.

Nous pouvons à présent rechercher la position des résonances de Lindblad et de corotation de premier ordre. Les résonances de Lindblad se trouvent en

disant que la fréquence du perturbateur, corrigée de l'effet Doppler, est égale à $\pm\kappa$, la fréquence épicyclique locale :

$$m(\Omega_p \pm \kappa_p/m - \Omega) = \pm\kappa, \quad (4.11)$$

où un signe + dans le membre de droite se réfère à l'OLR et un signe - se réfère à l'ILR. Le potentiel est képlérien, ce qui implique que $\Omega_p = \kappa_p$ et $\Omega = \kappa$, de telle sorte que nous obtenons pour le terme rapide :

$$\Omega = \frac{m+1}{m\pm 1}\Omega_p. \quad (4.12)$$

Pour le terme lent, nous avons :

$$\Omega = \frac{m-1}{m\pm 1}\Omega_p. \quad (4.13)$$

De manière similaire, nous trouvons les résonances de corotation des termes lents et rapides en remplaçant $\pm\kappa$ par 0 dans le membre de droite de l'équation (4.11). Nous trouvons

$$\Omega = \frac{m\pm 1}{m}\Omega_p, \quad (4.14)$$

où un signe + (resp. -) du membre de droite se réfère à un terme rapide (resp. lent). Comme on peut le voir, l'OLR du terme rapide et l'ILR du terme lent sont toutes deux données par $\Omega = \Omega_p$, c'est-à-dire qu'elles se trouvent toutes deux au rayon de corotation de la planète. Elles sont appelées les résonances de Lindblad co-orbitales. Cherchons également la position de l'ILR de la composante de Fourier principale de nombre d'onde $m+1$. Elle est donnée par

$$\Omega = \frac{m+1}{m}\Omega_p, \quad (4.15)$$

et donc elle coïncide avec la résonance de corotation du terme rapide de nombre d'onde m . De manière analogue, la position de l'OLR de la composante de Fourier principale et nombre d'onde $m-1$ est donnée par

$$\Omega = \frac{m-1}{m}\Omega_p, \quad (4.16)$$

et coïncide donc avec la résonance de corotation du terme lent du premier ordre et de nombre d'onde m . L'effet de chaque terme de Lindblad du premier ordre sur l'excentricité peut être trouvé en utilisant l'équation (4.9). En prenant en compte l'équation (2.5) et le fait que le potentiel perturbateur est proportionnel à $GM_p e/a$, on peut montrer que $F_H = \lambda(GM_p^2 \Sigma a/M_*)e^2$. Dans cette égalité λ est un coefficient sans dimension qui dépend de la résonance. Il est positif à l'OLR, et négatif à l'ILR. L'équation (4.9) conduit à

$$q^{-1} \mu_D^{-1} \frac{T_0}{2} \frac{d \log e}{dt} = \left(1 - \frac{\Omega_d}{\Omega_p}\right) \lambda, \quad (4.17)$$

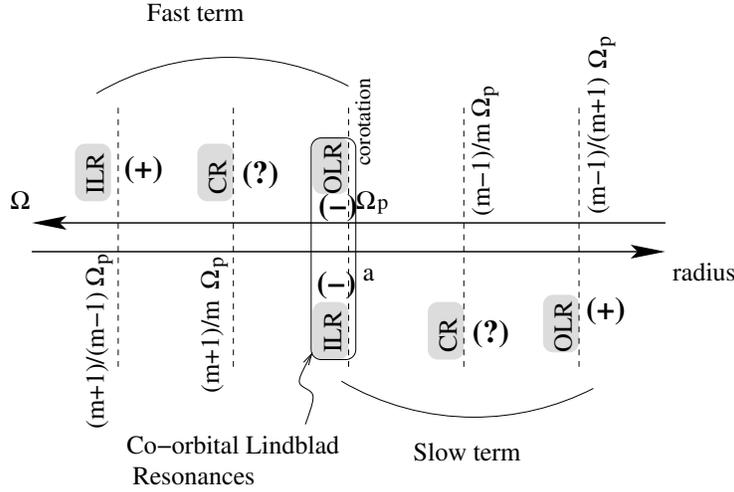


FIG. 4.1 – Résonances des composantes du premier ordre du potentiel, de nombre d’onde azimutal m . Les résonances co-orbitales de Lindblad amortissent l’excentricité, comme indiqué par les signes $(-)$, tandis que les résonances externes de Lindblad l’excitent comme indiqué par les signes $(+)$. Le rôle des résonances de corotation n’est pas déterminé, il dépend du signe du gradient de vortensité.

où nous avons utilisé le fait que $\Omega_d \neq \Omega_p$. Le signe de $d \log e / dt$ est le même que celui de $(\Omega_p - \Omega_d)\lambda$. L’excentricité est donc *amortie* par le disque à l’OLR du terme rapide et à l’ILR du terme lent, c.-à-d. aux résonances de Lindblad co-orbitales. Inversement, l’excentricité est excitée à l’OLR du terme lent et à l’ILR du terme rapide (c.-à-d. aux résonances de Lindblad externe du premier ordre). Le rôle des résonances de corotation du premier ordre dépend du gradient de vortensité à l’endroit de ces résonances. La figure 4.1 résume les positions et les effets des résonances du premier ordre.

4.2 Amortissement de l’excentricité des objets de faible masse

L’évolution de l’excentricité d’objets dont la masse est suffisamment faible pour ne pas altérer le profil de densité de surface du disque peut être déterminée en sommant les contributions de toutes les résonances de premier ordre. Comme nous l’avons vu, les résonances de Lindblad externes excitent l’excentricité tandis que les résonances de Lindblad co-orbitales l’amortissent. Le couple aux résonances co-orbitales, toutefois, est supérieur au couple aux résonances externes puisque l’amplitude du potentiel perturbateur est plus grande au niveau de l’orbite. Artymowicz (1993a) a trouvé que l’amortissement de l’excentricité par les résonances co-orbitales de Lindblad l’emporte d’un facteur ~ 3 sur l’excitation

par les résonances externes, c.-à-d. :

$$0 > \left. \frac{1}{e} \frac{de}{dt} \right|_{cLR} \approx -3 \left. \frac{1}{e} \frac{de}{dt} \right|_{eLR}. \quad (4.18)$$

En plus de l'effet des résonances de Lindblad du premier ordre, l'effet des résonances de corotation devrait également être inclus si elles ne sont pas saturées. Il est très improbable qu'elles puissent être saturées si e est petite, que la planète est un objet en migration de type I et que le disque a un paramètre $\alpha \sim$ quelques 10^{-3} . Cependant, on trouve que leur effet est négligeable, comparé à l'effet des résonances de Lindblad du premier ordre (Ward, 1988; Artymowicz, 1993a). En outre, la contribution des résonances de corotation du premier ordre internes et externes devrait s'annuler si le profil de vortensité est suffisamment régulier (les deux couples ont alors la même valeur et le même signe, mais les composantes du potentiel auxquels ils sont respectivement associées tournent plus lentement que la planète pour l'une, et plus vite pour l'autre, conduisant à un signe opposé sur la dérivée de l'excentricité).

De la discussion ci-dessus, on peut voir que l'effet net des résonances du premier ordre sur une planète de faible masse est d'amortir l'excentricité. L'échelle de temps de cet amortissement est plutôt courte. À l'instar du temps de migration, elle est proportionnelle à l'inverse de la masse. Toutefois, le temps de circularisation est environ 100 fois plus court que le temps de migration (Artymowicz, 1993a). Ce fait justifie notre hypothèse consistant à supposer que la migration des planètes immergées se fait sur une orbite circulaire, et cela montre que les résonances principales contribuent de manière négligeable à l'évolution de l'excentricité.

4.3 Évolution de l'excentricité des planètes géantes

Une des surprises apportées par les statistiques des planètes géantes extrasolaires est leur distribution d'excentricité. Les excentricités des planètes géantes dont la période orbitale est supérieure à ~ 10 jours présentent une dispersion importante. Quelques systèmes atteignent des valeurs aussi importantes que 0.9, mais les excentricités de la plupart des planètes à longue période est uniformément distribuée entre 0 et 0.6 – 0.7. Plusieurs explications ont été envisagées jusqu'à présent pour rendre compte de ces excentricités, telles que les interactions planète-planète (Rasio et Ford, 1996; Ford et al., 2001), les perturbations externes dues à un compagnon binaire distant ou des rencontres d'étoiles (Holman et al., 1997; Mazeh et al., 1997), et bien sûr les interactions planète-disque (Goldreich et Sari, 2003; Ogilvie et Lubow, 2003). Dans cette section nous contemplons exclusivement cette dernière possibilité.

La différence majeure entre cette analyse et la discussion précédente (section 4.2) est qu'une planète géante ouvre un sillon profond (c.-à-d. de densité de surface résiduelle petite). Ceci a deux conséquences importantes :

- Les résonances de Lindblad co-orbitales, qui sont une puissante source de circularisation, sont désactivées.

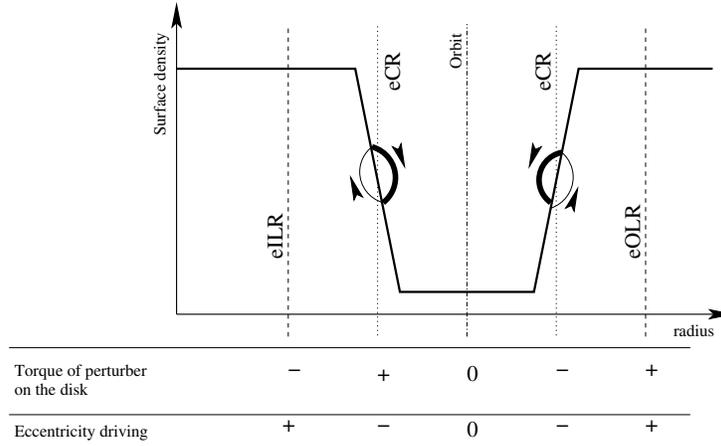


FIG. 4.2 – Position des résonances externes de Lindblad du premier ordre (lignes en tirets) et de résonance du premier ordre (lignes en pointillés) par rapport au sillon. Les résonances internes de corotation exercent un couple positif sur le disque, puisqu’elles promeuvent plus de matériel vers du fort moment angulaire spécifique qu’elles n’en dégradent. Cet échange est schématisé par les flèches. C’est l’opposé qui a lieu aux résonances externes de corotation. Le signe de la dérivée de l’excentricité peut alors être obtenu en utilisant l’équation (4.17). On trouve que les résonances de corotation du premier ordre amortissent l’excentricité.

- Les résonances de corotation, qui partagent leur position avec les résonances de Lindblad principales, se trouvent sur les bords du sillon où l’on a par conséquent un fort gradient de vortensité. Ces gradients (aux bords interne et externe du sillon) conduisent à un couple de corotation qui amortit l’excentricité. Ceci est illustré à la figure 4.2.

Le travail de Goldreich et Tremaine (1980) et celui de Goldreich et Sari (2003), qui négligent une possible saturation des résonances de corotation, montrent que l’effet d’amortissement par les résonances de corotation l’emporte sur celui d’excitation par les résonances externes de Lindblad, d’une faible marge de 4.6 %. Si l’on suppose que le sillon est suffisamment propre pour que les résonances de Lindblad co-orbitale soient inactives, alors un petit degré de saturation des résonances de corotation (4.6 %) est requis pour inverser le bilan et obtenir une excitation de l’excentricité. Goldreich et Sari (2003) et Ogilvie et Lubow (2003) ont évalué les conditions sous lesquelles une planète géante peut subir une excitation d’excentricité. La saturation des résonances de corotation est contrôlé par le rapport des temps de libration et visqueux. Plus ce rapport est petit, plus les résonances sont saturées. Si on note w la largeur de l’îlot de libration d’une résonance de corotation donnée, alors le temps de libration est proportionnel à $1/w$ alors que le temps visqueux est proportionnel à w^2/ν . Leur rapport est donc proportionnel à νw^{-3} . Puisque nous souhaitons que les

résonances de corotation saturent, il faut que ce rapport soit petit. Cela signifie que soit la viscosité doit être suffisamment faible, soit w doit être suffisamment grande. Pour un disque de viscosité donnée, cela signifie que l'excentricité initiale doit être plus grande qu'une certaine valeur critique pour qu'elle puisse continuer à s'amplifier. C'est une instabilité d'amplitude finie. Ogilvie et Lubow (2003) ont examiné le cas d'une planète de masse jovienne dans un disque de rapport d'aspect $h = 0.05$ et de paramètre $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$. Ils trouvent que pour ces paramètres, un degré de saturation suffisant des résonances de corotation du premier ordre peut être atteint si l'excentricité initiale est plus grande que $e_{\text{crit}} \sim 0.01$.

Cette analyse, toutefois, souffre de deux limitations : la possibilité d'un recouvrement entre les îlots de libration de résonances de corotation voisines, et le fait que les résonances de corotation partagent leur position avec des résonances de Lindblad principales. Masset et Ogilvie (2004) ont étudié ces problèmes potentiels au moyen de simulations numériques adaptées, et ont trouvée que les propriétés de saturation d'une résonance de corotation donnée restent pratiquement inchangées dans ces nouvelles conditions.

Ceci semble suggérer que les planètes géantes orbitant dans des disques de viscosité suffisamment basse devraient voir leur excentricité s'amplifier si leur excentricité initiale n'est pas trop petite, bien que la valeur critique de l'excentricité ne soit pas encore déterminée avec précision. Il est probable que la croissance d'excentricité s'arrête quand la planète commence à frôler les bords de son sillon, auquel cas il est improbable que ce mécanisme de croissance puisse rendre compte de la distribution observée des excentricités de planètes géantes extra-solaires.

Mentionnons également que jusqu'à présent aucune simulation numérique n'a clairement validé ce mécanisme comme une source possible de croissance d'excentricité. Rappelons également la remarque nous que nous avons faite au dernier paragraphe de la section 3.1.4 : saturer une résonance de corotation étroite peut s'avérer plus difficile que ne le suggèrent les modèles de disque laminaires.

Pour finir, soulignons qu'il existe un autre aspect du problème de la croissance de l'excentricité : l'échange séculaire d'excentricité entre la planète et le disque. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux d'Ogilvie (2001), Papaloizou (2002) et Goldreich et Sari (2003) pour une étude de l'excentricité dans les systèmes planète–disque. Une estimation de la contribution de ce mécanisme à l'évolution de l'excentricité peut être réalisée en étudiant ce que l'on appelle parfois la résonance apsidale (Goldreich et Sari, 2003).

4.4 Migration d'une planète excentrique de petite masse

Jusqu'à présent, nous avons exclusivement considéré la contribution des résonances de premier ordre à l'amortissement ou à l'excitation de l'excentricité.

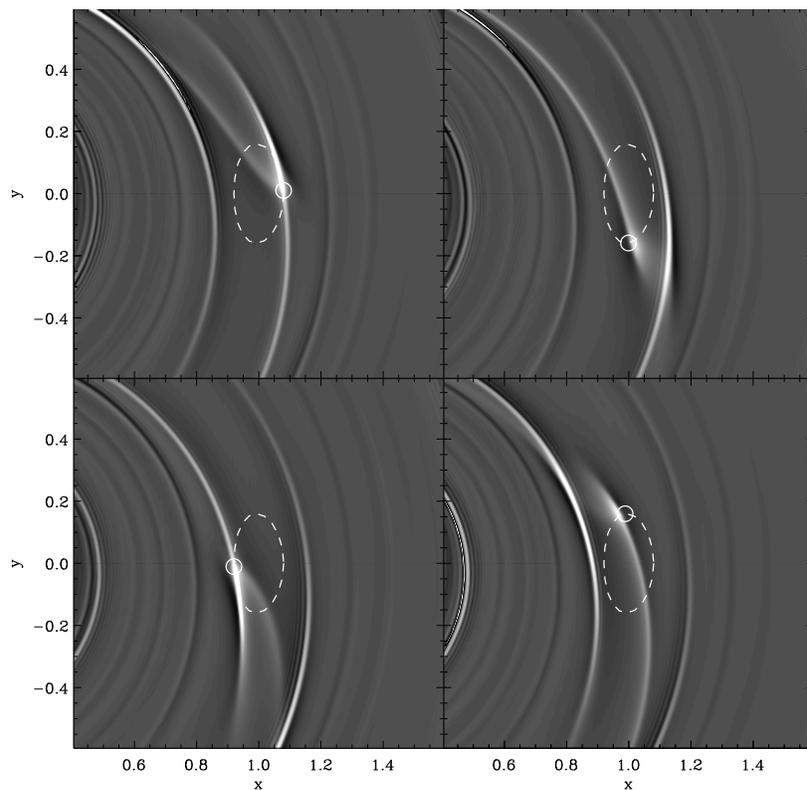


FIG. 4.3 – Cette figure montre la réponse en densité de surface à une planète immergée de masse terrestre et d'excentricité $e = 0.08$. Le rapport d'aspect du disque est $h = 0.05$. La ligne en tirets montre l'épicycle, qui est décrite dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le petit cercle en trait continu montre la position instantanée de la planète. La séquence est à lire de gauche à droite et de haut en bas. Dans les figures de la colonne de gauche, la planète est à une distance extrême de l'objet central. On peut voir que la planète excite essentiellement un sillage interne lorsqu'elle passe par son apoastre (en haut à gauche) et un sillage externe lorsqu'elle passe par son péri-astre (bas à gauche).

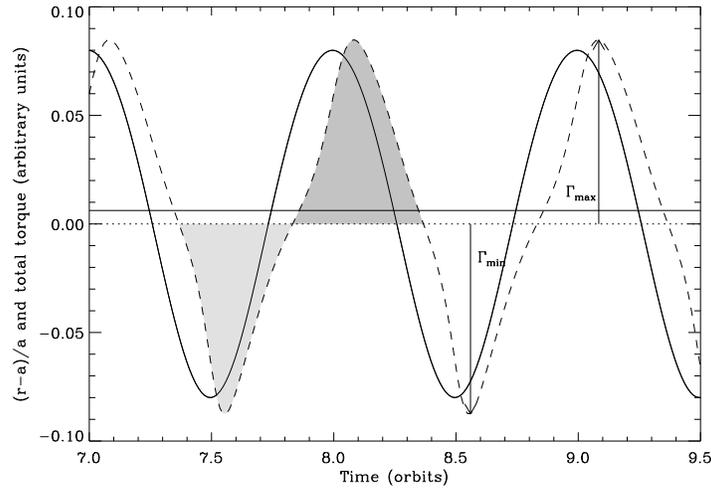


FIG. 4.4 – Cette figure correspond à la figure 4.3, et montre le couple exercé par le disque sur la planète en fonction du temps (ligne en tirets). La ligne continue montre l’excursion radiale relative de la planète $(r-a)/a$. Comme nous l’attendions, le couple exercé sur la planète est positif à l’apoastre et négatif au péri-astre. Il y a aussi un délai entre les deux courbes, qui correspond au temps nécessaire pour exciter un sillage externe ou interne. Un léger déséquilibre entre le couple négatif du sillage externe et le couple positif du sillage interne est apparent ($|\Gamma_{rmin}| > \sim |\Gamma_{max}|$), mais il est clair également que la planète passe plus de temps loin de l’objet central. En conséquence, la contribution positive au couple moyenné dans le temps (la région en grisé sombre) l’emporte sur la contribution négative (la région en grisé clair). La valeur moyenne du couple, montrée par la ligne horizontale continue, est donc une quantité positive.

Comme il y a un flux net d'énergie de la planète vers le disque à ces résonances, elles ont également un impact sur l'évolution du demi grand-axe de la planète, c.-à-d. qu'elles ont des conséquences pour la migration. Papaloizou et Larwood (2000) ont effectué un calcul linéaire du couple du disque pour chaque nombre d'onde azimutal m qui prend en compte autant de résonances que nécessaire pour atteindre la convergence (ils ne se sont pas limités au cas des résonances du premier ordre). Ils trouvent que le déséquilibre usuel ILR/OLR en faveur des OLRs est inversé quand $e > 1.1h$. Ceci est dû au fait que la planète traverse alors des résonances qui ne recoupent normalement pas l'orbite aux petites excentricités. Les considérations suivantes, mentionnées par Papaloizou et Larwood (2000), permettent de comprendre ces résultats. Lorsque la planète est à l'apoastre, elle est plus lente que le disque ambiant. Sa corotation instantanée se trouve alors plus loin dans le disque, de telle sorte que le sillage qu'elle excite est essentiellement un sillage interne qui exerce un couple positif sur la planète. Au péri-astre la planète excite essentiellement un sillage externe, qui exerce un couple négatif. Le déséquilibre naturel en $O(h)$ entre les couples interne et externe est compensé par les effets de la deuxième loi de Kepler : la planète passe plus de temps à l'apocentre où elle ressent le couple (certes plus faible) positif du sillage interne. Si e/h est assez grand, la planète devrait ressentir en moyenne un couple positif¹. Le principe de cette inversion du couple est illustré par les figures 4.3 et 4.4. Notons pour finir que le fait que le couple moyen ressenti par la planète soit positif n'implique pas qu'elle migre vers l'extérieur. Ce qui dicte le taux de migration dans la cas d'une orbite excentrique est la puissance moyenne des forces de marée, puisque l'énergie mécanique de la planète ne dépend que du demi-grand axe (ce qui n'est pas le cas du moment angulaire). Or la puissance moyenne des forces de marée reste négative même pour $e \sim h$ (la puissance moyenne comprend un produit scalaire de la force avec la vitesse, qui compense les effets de la deuxième loi de Kepler). L'excès de moment angulaire transféré à la planète, plutôt que de ralentir ou inverser la migration, sert à circulariser son orbite. On peut d'ailleurs retrouver la dépendance du taux d'amortissement de l'excentricité en fonction des paramètres du disque, par le raisonnement simple suivant : plaçons-nous dans une situation où l'excentricité vaut $e = 1.1h$, et supposons pour simplifier que la planète migre à la même vitesse que si elle était en orbite circulaire. Cherchons de combien la planète va migrer avant de circulariser son orbite. Faisons l'hypothèse simplificatrice qu'elle va conserver son moment angulaire au cours de sa migration. Cette hypothèse est bien entendu fautive, puisque lorsque e va devenir inférieure à h , le couple s'exerçant sur la planète sera à nouveau négatif et elle perdra du moment angulaire. Néanmoins, faire cette hypothèse simplificatrice a le mérite de nous donner un ordre de grandeur de la distance δa dont migre une planète avant de se circulariser. Le fait que l'on suppose que la planète migre à moment angulaire constant signifie que l'aire de son orbite reste constante. Elle vaut

$$\mathcal{S} = \pi \sqrt{1 - e^2} a^2, \quad (4.19)$$

¹Le couple exercé par le disque sur une planète excentrique n'est pas constant dans le temps comme dans le cas circulaire. C'est au contraire une quantité variable de période $2\pi/\kappa_p$.

et elle vaut encore, lorsque le demi-grand axe de la planète est devenu $a + \delta a$:

$$\mathcal{S} = \pi(a + \delta a)^2. \quad (4.20)$$

En remplaçant e par h dans l'équation (4.19) et en négligeant le facteur 1.1 puisque l'on recherche un ordre de grandeur, on obtient, en utilisant les équations (4.19) et (4.20) l'égalité suivante :

$$\delta a = -ah^2/4, \quad (4.21)$$

ce qui indique que la planète, indépendamment de sa masse, ne migre qu'une petite fraction $O(h)$ de l'épaisseur locale du disque $H = ha$ avant que l'on ne puisse considérer son orbite comme circulaire. Le temps d'amortissement de l'excentricité, τ_e , peut donc s'écrire :

$$\tau_e = O\left(\frac{h^2}{4}\tau_{\text{mig}}\right). \quad (4.22)$$

En utilisant l'équation (3.6), on en déduit que le temps d'amortissement de l'excentricité est proportionnel à $\propto h^4/(q\mu_D)$, ce qui est en accord avec la dépendance fonctionnelle donnée par Artymowicz (1993a) et Papaloizou et Larwood (2000).

Chapitre 5

Simulations numériques

Ce chapitre ne prétend pas offrir une liste exhaustive des techniques de simulations numériques utilisées jusqu'à présent pour modéliser les interactions planète–disque, ni même une liste exhaustive des résultats obtenus (essentiellement durant la dernière décade) par les numériciens travaillant sur le sujet. Nous renvoyons le lecteur intéressé au travail de De Val-Borro et al. (2006) et aux références qui s'y trouvent, qui couvrent toute la gamme des techniques numériques appliquées jusqu'à présent au problème des interactions planète–disque. Enfin, nous renvoyons le lecteur au travail de Masset (2000) pour la description d'un algorithme rapide d'advection dans les disques en rotation différentielle¹. Cet algorithme a depuis été implémenté, outre le code original FARGO², dans le code GENESIS d'Arnaud Pierens, et plus récemment dans le code RH2D de Wilhelm Kley.

À la section 5.1 nous présentons une liste de résultats récents qui incluent de la physique que nous n'avons pas considéré jusqu'à présent dans ce mémoire. Pour des raisons de taille, ces résultats ne sont que brièvement décrits. À la section 5.2 nous dressons une liste partielle des problèmes potentiels et des défauts des schémas numériques que les numériciens devraient avoir présents à l'esprit lorsqu'ils simulent les interactions planète–disque.

5.1 Résultats récents des simulations numériques

5.1.1 Simulations en disques auto-gravitants

Jusqu'à présent, très peu de recherches ont été faites sur l'auto-gravité du disque dans les simulations numériques d'interactions planète–disque. Boss (2005) a effectué de nombreuses simulations de disques dans lesquelles l'auto-gravité est un ingrédient clé, mais son travail considère la gravité comme le responsable de la formation de planètes géantes par instabilité gravitationnelle.

¹Voir article 1 page 119.

²Voir <http://www.maths.qmul.ac.uk/~masset/fargo>

Par conséquent ses simulations sont courtes, et ne concernent que des objets très massifs. Les planètes formées dans ces simulations provoquent une réponse fortement non-linéaire du disque, et les effets de migration y sont probablement marginaux ou négligeables. Une exception notable est le travail de Nelson et Benz (2003a; 2003b), qui ont inclut l’auto-gravité dans leur simulations 2D des interactions planète–disque. Ils trouvent que la migration d’une planète qui n’ouvre pas de sillon est ralentie d’un facteur 2 ou plus quand l’auto-gravité du disque est incluse. Nous discuterons plus en détail cette affirmation à la section 5.2, à la lumière d’un travail analytique récent de Pierens et Huré (2005).

5.1.2 Simulations tridimensionnelles

Jusqu’à très récemment les simulations 3D des interactions planète–disque étaient réservées aux gros calculateurs, à cause de la haute résolution requise et du grand nombre de pas de temps nécessaires. Une seule orbite requiert un grand nombre de pas de temps (à cause de la condition de Courant, Friedrich et Levy, ou condition CFL), et pour mesurer des couples un grand nombre d’orbites est nécessaire.

Des simulations 3D à haute résolution des interactions planète–disque ont récemment été réalisées par D’Angelo et al. (2003b) et Bate et al. (2003) sur un grand intervalle de masses de planètes. Le but de ces travaux était essentiellement de comparer les estimations linéaires de Tanaka et al. (2002). Ces deux travaux ont obtenu des résultats différents pour les masses intermédiaires (voir section 3.1.5), mais ils ont essentiellement validé le travail de Tanaka et al. (2002), dans la mesure où ils reproduisent les prédictions linéaires aux petites masses.

Dans le cas de D’Angelo et al. (2003b), de telles simulations à haute résolution ont été rendues possibles par l’utilisation d’une technique à grille emboîtées. Ces auteurs utilisent un code dérivé de NIRVANA (Ziegler et Yorke, 1997). La technique des grilles emboîtées consiste à subdiviser les cellules dans une région donnée de la grille de manière à obtenir une meilleure résolution. Généralement une cellule est partagée en huit sous-cellules, de qui correspond à un doublement de la résolution en rayon, azimut et colatitude. Ce raffinement peut être répété récursivement à l’intérieur d’une région qui est déjà raffinée. La résolution atteinte au plus haut niveau de raffinement est donc 2^{l-1} fois plus haute que sur la grille de base, où l est le nombre total de niveaux incluant la grille de base (D’Angelo et al., 2002; D’Angelo et al., 2003b). La technique est grilles emboîtées est donc parfaitement adaptée aux simulations de l’interaction de marée du disque et d’une planète, effectuées dans le référentiel tournant avec la planète. Dans ce référentiel la planète est fixe par rapport à la grille, une condition désirable, bien que strictement non indispensable. On pourra consulter D’Angelo et al. (2005) pour des simulations 3D à grilles emboîtées où la planète se déplace par rapport à la grille de base.

Les techniques à grille emboîtées utilisent fréquemment le sous-cyclage en temps également. Nonobstant les inhomogénéités de vitesse de la matière et du son, la condition CFL devient de plus en plus exigeante au fur et à mesure

que l'on augmente le niveau de raffinement. Il est par conséquent judicieux d'effectuer deux pas de temps sur un niveau fin pour chaque pas de temps sur le niveau antérieur (grossier). Ce sous-cyclage est répété récursivement jusqu'à ce que le niveau de raffinement le plus élevé soit atteint. À titre d'exemple supposons que nous avons une grille de base A, et successivement deux niveaux raffinés B et C. Si l'on effectue du sous-cyclage, le calcul d'un pas de temps complet sur la grille de base peut correspondre à l'une des séquences suivantes : CCBCCBA ou ABCBCC, selon l'implémentation

Bate et al. (2003), qui ont utilisé le code ZEUS (Stone et Norman, 1992), obtiennent une haute résolution en prenant des pas de grille plus serrés en rayon et azimut au voisinage de la planète (c.-à-d. près du demi grand-axe a de la planète et de l'azimut φ_p de celle-ci). Ceci n'est pas équivalent à la technique des grilles emboîtées, où la résolution est grossière loin de la planète, même si l'azimut est proche de φ_p ou si le rayon est proche de a . Néanmoins, la résolution qu'ils ont atteinte dans leurs simulations est comparable à celle permise par la technique des grilles emboîtées, à un coût en temps de calcul bien supérieur, toutefois, puisque la technique du sous-cyclage ne peut pas être appliquée. La résolution fine au voisinage de la planète limite ainsi le pas de temps sur toute la grille.

5.1.3 Simulations impliquant deux planètes géantes

Jusqu'à présent nous avons seulement considéré l'interaction d'une seule planète avec un disque protoplanétaire. Cependant, des systèmes extra-solaires se sont avérés avoir plusieurs planètes, fréquemment en résonance de moyen mouvement. Il est par conséquent intéressant d'effectuer des simulations impliquant plusieurs planètes géantes, de manière à voir (1) comment la présence d'une autre planète peut affecter la migration et (2) comment la migration peut verrouiller deux planètes en résonance de moyen mouvement.

Kley (2000) a étudié l'évolution de deux planètes ayant initialement chacune une masse de Jupiter et des demi grand-axes dans la proportion 2 à 1. Les planètes sont autorisées à migrer librement dans un disque de rapport d'aspect $h = 0.05$ et de viscosité cinématique uniforme, choisie de telle manière que $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ au niveau de l'orbite de la planète la plus interne. Les deux planètes sont autorisées à accréter du gaz du disque. Dans la pratique, cela se fait en attribuant du matériel des parties internes du lobe de Roche à la planète, à un taux limité par la capacité de la nébuleuse à fournir du gaz aux planètes (Kley, 1999). On trouve que la planète externe migre vers l'intérieur, tandis que la planète interne migre légèrement vers l'extérieur. En d'autres termes, les planètes subissent une migration convergente. À la fin de la simulation, après 2500 orbites de la planète interne, la planète externe a atteint une masse de $3.2 M_{\text{Jup}}$, tandis que la planète interne a atteint une masse de $2.3 M_{\text{Jup}}$. Ce travail montre que la migration d'une planète géante interne peut être arrêtée par la présence d'une planète géante plus externe. Les deux planètes s'entourent d'un large sillon commun. Dans ces conditions la planète interne n'a pas de sillage externe dans son voisinage immédiat qui la pousse à migrer vers l'intérieur.

Puisque les planètes sont rapprochées l'une de l'autre par la migration, et puisqu'elles atteignent des masses importantes, le système pourrait devenir instable après que le gaz soit dispersé. Kley (2000) invoque un critère pour la stabilité basé sur la comparaison de la séparation orbitale des deux planètes à leur rayon de Hill mutuel (Gladman, 1993), et conclut qu'il y a deux comportements possibles à long terme :

1. Le système est instable. Les orbites peuvent se croiser, et il est possible d'avoir une rencontre proche entre les deux planètes qui éjecte l'une d'entre elles et laisse l'autre sur une orbite excentrique. Kley (2000) argumente que ce mécanisme pourrait expliquer les grandes excentricités observées dans beaucoup de systèmes extra-solaires.
2. La dispersion du disque intervient suffisamment tôt pour que la migration cesse avant que la distance qui sépare les planètes ne devienne inférieure à la valeur minimale requise pour la stabilité. Cette situation pourrait rendre compte de l'existence de systèmes comme le Système Solaire, avec des planètes géantes d'orbites quasi circulaires et bien séparées.

Masset et Snellgrove (2001) ont approché ce problème en étudiant un cas différent : leur planète externe a été choisie de manière à avoir une masse de Saturne plutôt qu'une masse de Jupiter, et les planètes n'étaient pas autorisées à accréter du matériel du disque (la justification étant que les taux d'accrétion planétaires sont peu contraints). Ils ont trouvé le comportement suivant³, assez inattendu :

- Saturne migre rapidement durant les premiers temps de la simulation (en fait sa migration s'emballe, mais ce mode de migration n'était pas encore découvert à l'époque de ces simulations). Puisque Jupiter entame une migration beaucoup plus lente, de type II, les orbites des deux objets convergent rapidement. Saturne atteint la résonance de moyen mouvement 2 : 1 avec Jupiter, mais ne s'y trouve pas piégée à cause de son grand taux de migration. Elle n'est pas piégée non plus à la résonance 5 : 3, mais se retrouve finalement piégée par la résonance de moyen mouvement 3 : 2.
- Tant que les planètes sont piégées dans cette résonance de moyen mouvement proche, elles migrent de concert vers l'extérieur.
- Le comportement à long terme de ce scénario, non mentionné dans Masset et Snellgrove (2001), peut consister en un certain nombre d'épisodes d'emballement de Saturne vers l'extérieur. Ces résultats sont présentés à la figure 5.1.

Un certain nombre d'effets convergent pour faire perdurer la migration vers l'extérieur spécifique à ce système à deux planètes verrouillées en résonance de moyen mouvement :

1. Les planètes possèdent un large sillon commun, avec une faible troncation par effet de marée du côté externe (côté de Saturne). Le sillon est également moins marqué sur sa moitié externe.

³Voir article 2, page 128.

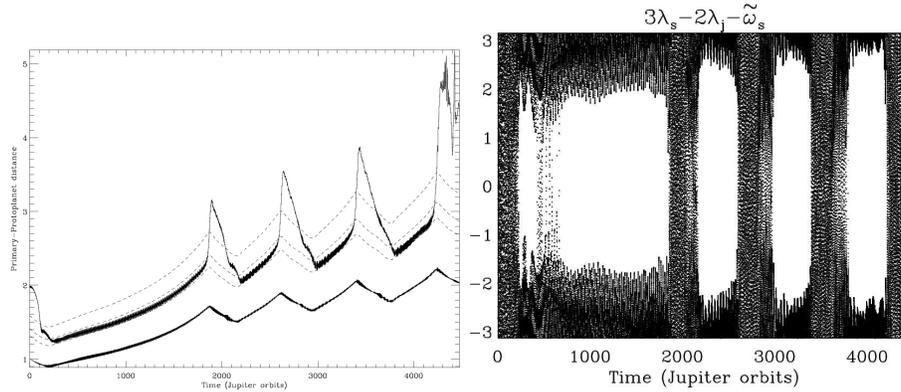


FIG. 5.1 – À gauche : distance des protoplanètes à l’objet central en fonction du temps (en unités de périodes orbitales de Jupiter). Une phase rapide de migration convergente a lieu sur les première 200 orbites. Les courbes en tirets représentent, de haut en bas, les positions nominales des résonances de moyen mouvement 2 :1, 5 :3 et 3 :2 avec Jupiter. Saturne est piégée dans la résonance 3 :2, comme on peut le voir sur le graphe de droite qui montre l’angle critique $\varphi_r = 3\lambda_s - 2\lambda_j - \tilde{\omega}_s$. Dans cette expression λ_s (resp. λ_j) représente la longitude moyenne de Saturne (resp. Jupiter), et $\tilde{\omega}_s$ est la longitude moyenne du péri-astre de Saturne. Chaque fois que cet angle critique ne balaye pas tout l’intervalle $[-\pi, +\pi]$ (ce qui correspond à l’existence de plages blanches), il libère au lieu de circuler, ce qui signifie que les planètes sont piégées en résonance 3 :2. Notons que l’autre angle critique (non représenté ci-dessus) $\varphi'_r = 3\lambda_s - 2\lambda_j - \tilde{\omega}_j$, est en libration aux même époques que φ_r . Les épisodes de migration vers l’extérieur puis vers l’intérieur de Saturne aux alentours de $t = 2000$, $t = 2800$, $t = 3600$ et $t = 4500$ sont tous des emballements, qui déverrouillent Saturne de sa résonance de moyen mouvement avec Jupiter.

2. Le sillage interne est excité par Jupiter, la plus massive des deux planètes. Il exerce un plus grand couple (positif) sur Jupiter (et par conséquent sur le système des deux planètes verrouillées en résonance) que le sillage externe n'en exerce sur Saturne. Nous avons ainsi un déséquilibre inhabituel des couples qui favorise une migration vers l'extérieur.
3. Ce couple total positif engendre une migration vers l'extérieur, qui peut entrer dans un régime stationnaire grâce à la faible troncature par effet de marée sur le bord externe du sillon de Saturne : le gaz du disque externe passe à travers la séparatrice fer-à-cheval externe de Saturne, ce qui a deux conséquences :
 - Ce gaz ravitaille en permanence le disque interne, permettant de ce fait à Jupiter d'exciter son sillage interne.
 - De manière très similaire à ce que la dynamique co-orbitale donne un couple de corotation qui dépend du taux de migration (voir la section 3.3), le flot exerce un couple positif sur le système constitué des deux planètes et aide donc leur migration vers l'extérieur. Notons toutefois que cet effet est d'importance assez marginale (Morbidelli et Crida, *subm.*)

La conjonction de tous ces effets permet une migration vers l'extérieur auto-entretenu du système des deux planètes. Ceci devrait être un comportement générique sous les conditions suivantes. Premièrement, la planète externe, bien que géante, devrait être significativement plus légère que la planète interne; Masset et Snellgrove (2001) donnent une estimation du rapport maximal de la masse de la planète externe sur celle de la planète interne. Deuxièmement, le critère d'ouverture thermique devrait être marginalement vérifié par la planète externe, de telle sorte que la troncature par effet de marée soit faible au bord externe du sillon commun.

Nous pouvons en outre faire les commentaires suivants sur les résultats de Masset et Snellgrove (2001) :

- L'accrétion planétaire peut significativement modifier ces résultats, à la fois quantitativement et qualitativement, à la fois par le couple d'accrétion qu'elle entraîne, et par le fait qu'elle peut détourner une grande partie du flot de gaz qui normalement devrait ravitailler le disque interne.
- Une résonance de moyen mouvement proche (telle que la 3 :2) semble être nécessaire pour qu'une planète géante légère externe et une planète géante plus massive interne aient un sillon commun. À ce jour on n'a pas observé de résonance de moyen mouvement si proche dans les systèmes de planètes extra-solaires détectées, où la résonance la plus commune est la 2 :1. La résonance 3 :2 n'a pas non plus été observée dans les simulations numériques impliquant une planète externe plus massive. Dans ce cas, les planètes tendent à se verrouiller en résonance 2 :1 ou sur des résonances encore plus distantes (Nelson et Papaloizou, 2002). Il semble qu'une migration rapide (peut-être de type III) de la planète externe soit nécessaire pour traverser la résonance 2 :1 et atteindre des résonances de moyen mouvement plus proches.

Comme indiqué ci-dessus, la résonance de moyen mouvement la plus communément observée dans les systèmes de planètes géantes extra-solaires est la résonance 2 :1. L'exemple le plus étudié en est celui de GJ 876, qui a motivé de nombreuses tentatives de modélisation (Snellgrove et al., 2001; Kley et al., 2004; Kley et al., 2005). Un défi intéressant de cette modélisation est de rendre compte des excentricités observées dans ce système. Il consiste en une étoile centrale de type spectral M4 V et de masse $0.32 M_{\odot}$, et de trois planètes de période respectivement 60.94 jours, 30.1 jours et $1.93776 \pm 7 \cdot 10^{-5}$ jours. Ces trois planètes sont respectivement appelées Gliese 876b, Gliese 876c et Gliese 876d. Leurs excentricités et $M_p \sin i$ respectifs sont : $e = 0.0249 \pm 0.0026$ et $M_p \sin i = 1.935 \pm 0.007 M_J$ pour Gliese 876b, $e = 0.27$ et $M_p \sin i = 0.56 M_J$ pour Gliese 876c et $e = 0$ et $M_p \sin i = 0.023 \pm 0.003 M_J$ pour Gliese 876d. Les deux premières planètes sont en résonance orbitale 2 : 1. La troisième planète est beaucoup moins massive, a une orbite beaucoup plus serrée que les deux autres, et devrait avoir une influence négligeable sur leur dynamique. Elle n'a été découverte que récemment et était inconnue à l'époque des travaux cités ci-dessus. Les propriétés de ce système peuvent résulter d'un équilibre entre une migration en résonance, qui tend à augmenter les excentricités, et de l'action du matériel co-orbital, qui tend à circulariser les orbites. Snellgrove et al. (2001) trouvent que pour un système avec une planète externe trois fois plus massive que la planète interne, l'excentricité de la planète interne est donnée par $e_1 \sim (0.07 t_c / t_{\text{mig}})^{1/2}$. Dans cette expression, t_c est le temps de circularisation et t_{mig} est l'échelle de temps de la migration. Plus t_c est petite, plus l'orbite sera circulaire. Réciproquement, une migration plus rapide (c.-à-d. t_{mig} plus petite) conduit à une planète interne plus excentrique. Kley et al. (2004) ont réexaminé ce problème, et ont trouvé que l'amortissement d'excentricité obtenu dans les simulations numériques n'est pas suffisant pour rendre compte des propriétés de GJ 876. Kley et al. (2005) ont ensuite suggéré que le système a subi une migration résonante modérée et que le disque a été dissipé peu après la capture en résonance. L'excentricité finale de la planète interne serait alors compatible avec les observations. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux publications mentionnées ci-dessus pour plus de détails.

5.1.4 Simulations avec une thermodynamique réaliste

Les simulations numériques d'interactions planète–disque utilisent traditionnellement une équation d'état isotherme et un profil de température fixe et axisymétrique (ce qui revient à fixer le rapport d'aspect à tout rayon). Cette approche suppose que l'énergie interne gagnée à la traversée des chocs est rayonnée efficacement. D'Angelo et al. (2003a) ont étudié l'interaction de marée d'une planète géante avec disque décrit de manière plus réaliste. Ils utilisent un disque 2D, et une équation d'énergie qui inclut le chauffage visqueux et les pertes radiatives. Le terme de radiation est valide aussi bien dans le régime optiquement épais que dans le régime optiquement mince, et est donc bien adapté au cas des disques protoplanétaires qui peuvent devenir optiquement minces au niveau d'un sillon profond. Les résultats de D'Angelo et al. (2003a) sont en accord avec les études

plus restrictives fondées sur l'utilisation d'une équation d'état isotherme, autant en terme de taux de migration que de taux d'accrétion planétaire. En utilisant la technique des grilles emboîtées (voir la section 5.1.2), ils obtiennent aussi les propriétés du disque circumplanétaire : il est généralement optiquement épais, a un rapport d'aspect de quelques dixièmes, et a un profil de température en r^{-1} (r étant ici la distance à la planète).

Papaloizou et Nelson (2005) ont effectué des simulations hybrides de manière à décrire l'évolution d'une planète géante accrétant du gaz. Ils utilisent un modèle 1D pour décrire le gaz entourant la planète, lequel modèle inclut du transfert soit radiatif, soit convectif. Ils résolvent ensuite ce modèle analytiquement, en adoptant comme conditions aux limites externes les valeurs données par une simulation hydrodynamique localement isotherme.

Jusqu'ici, les simulations hydrodynamique 3D avec transfert radiatif n'ont presque pas été employées dans la modélisation des interactions planète–disque. Ce type de calcul pour permettre de tester les prédictions de Jang-Condell et Sasselov (2005), qui affirment qu'en prenant en compte les variations de température dues aux ombres (phénomène de *shadowing*) et à l'irradiation de la photosphère on pourrait significativement réduire le taux de migration de type I.

De telles simulations pourraient aussi permettre de décrire l'ouverture d'un sillon dans un disque évasé et irradié par l'objet central (D'Alessio et al., 1998). Une question à ce jour sans réponse est si l'irradiation du bord externe du sillon (aux hautes altitude, puisque la région équatoriale est dans l'ombre du disque interne) pourrait permettre à ce bord de s'épaissir significativement. Puisque le couple de marée sur une planète géante dû aux disques interne et externe est extrêmement sensible à l'épaisseur du disque, les planètes géantes pourraient voir leur taux de migration de type II considérablement altéré par cet effet.

À l'heure d'écriture de ce mémoire, nous notons cependant deux travaux qui tentent une description hydrodynamique incluant du transfert radiatif des interactions planète–disque. Klahr et Kley (2006) considèrent une planète de masse jovienne, et étudient la structure du champ de température à son voisinage. Ils trouvent une morphologie du flot à l'intérieur du lobe de Roche significativement différente de celle prédite à l'aide d'une équation d'état isotherme. Une bulle chaude apparaît autour de la planète plutôt qu'un disque mince képlérien.

Une autre simulation remarquable est celle récemment publiée par Paardekooper et Mellema (2006a), qui considère une planète de petite masse immergée dans un disque où le refroidissement radiatif est inefficace. Une structure complexe en température apparaît au voisinage de la planète sur le temps de cisaillement A^{-1} , qui semble conduire à une région sous-dense derrière la planète. En conséquence, le disque exerce un couple positif sur la planète. Des simulations additionnelles sont requises pour mieux cerner ce phénomène, mais ce résultat indique clairement que les effets de transfert radiatif jouent un rôle crucial pour résoudre le problème de la trop rapide dérive de type I.

Notons également le travail de Morohoshi et Tanaka (2003), qui considère le cas d'un objet de faible masse immergé dans un disque optiquement mince (les auteurs argumentent que la croissance des grains devrait être suffisante pour

abaisser suffisamment l'épaisseur optique du disque à l'époque de la formation planétaire). Ils trouvent que la température en aval du sillage est plus faible que la température non perturbée. Ce changement important de la structure du champ de température au voisinage de la planète peut altérer le couple latéral d'environ 40 % pour une planète de masse $M_m = 3 M_\oplus$. Ce résultat suggère également que l'impact des effets de transfert radiatif sur le couple différentiel de Lindblad peut être important.

5.1.5 Simulations MHD tridimensionnelles

Les simulations MHD tridimensionnelles sont probablement les simulations les plus coûteuses jamais effectuées sur le sujet des interactions planète–disque. Nous renvoyons le lecteur à la section 3.4 pour une discussion des résultats de ces simulations.

5.1.6 Évolution globale du disque

Les simulations 2D et 3D ont un défaut majeur : elles ne couvrent nécessairement qu'un intervalle de rayons étroit. En particulier, elles ne peuvent pas s'étendre très loin en direction de l'objet central car le pas de temps y devient sévèrement limité par la condition CFL. Cette limitation peut conduire à des artefacts importants dans les simulations d'ouverture de sillon. Le disque interne (c'est-à-dire la région entre la frontière interne de la grille et le bord interne du sillon) est usuellement plus étroite qu'elle ne devrait être, et la disparition de ce disque au travers de la frontière interne pourrait être fortement affectée par la proximité de cette frontière interne. Crida et al. (2006b) ont inventé une technique hybride pour résoudre ce problème : la grille polaire 2D est étendue vers l'intérieur et l'extérieur au moyen d'une grille 1D pour un coût additionnel virtuellement nul. Cette technique requiert une attention particulière sur la manière dont la masse et le moment angulaire passent de la grille 2D vers une grille 1D. Ceci nécessite d'évaluer le flux de masse à travers les frontières de la grille 2D. Ce flux de masse est associé à un flux de moment angulaire, qui peut être évalué en utilisant la vitesse angulaire moyenne à l'interface entre 1D et 2D. Le moment angulaire ainsi gagné (resp. perdu) par la grille 1D est généralement différemment du moment angulaire perdu (resp. gagné) par la grille 2D à l'interface correspondante. La différence est transportée par les perturbations non-axisymétriques (ici des ondes) qui ne peuvent pas être décrites sur la grille 1D. Crida et al. (2006b) donne une prescription simple et efficace pour traiter le flux de moment angulaire associé à ces ondes lorsqu'elles arrivent à une interface 2D/1D. Des calculs préliminaires ont montré que les simulations hybrides donnent essentiellement les mêmes résultats que des simulations entièrement 2D, beaucoup plus coûteuses. Comme indiqué ci-dessus, cette technique peut permettre de décrire de manière plus adaptée l'évolution du disque interne en migration de type II. Elle peut également permettre de tester une suggestion de Ward (2003), à savoir que des planètes géantes pourraient éviter une migration de type II vers l'intérieur dans les disques visqueux tronqués, quand les régions

externes s'étalent vers l'extérieur. Bien que dans ce type de schéma hybride le rayon interne de la grille 1D puisse être aussi petit que le rayon de corotation avec l'étoile, une description réaliste de l'interaction disque-étoile n'est pas possible. Néanmoins, cette technique permet une description plus réaliste de l'évolution visqueuse du disque sur un grand intervalle de rayon, à l'intérieur duquel les détails de la physique de la connexion étoile-disque devraient être sans importance.

5.2 Problèmes potentiels des schémas numériques

Nous donnons à cette section une liste partielle de problèmes que les numériques qui simulent les interactions planète-disque devraient avoir à l'esprit. Premièrement, nous décrivons quelques problèmes liés à des schémas numériques spécifiques. Deuxièmement, nous décrivons quelques problèmes conceptuels qui sont indépendants du schéma adopté, et nous suggérons des solutions possibles à ces problèmes.

En première approximation, nous divisons les schémas numériques en trois familles : les schémas à grille alternée, les schémas de type Godunov (autre variété de schémas à grille), et les schémas Lagrangiens. En ce qui concerne les interactions planète-disque, cette dernière catégorie se réduit aux SPH (*Smooth Particle Hydrodynamics*).

5.2.1 Schéma de type Godunov

Les schémas de type Godunov sont basés sur l'utilisation d'un solveur de Riemann pour prédire les flux des quantités conservatives aux interfaces entre des cellules adjacentes. Ils possèdent un certain nombre de propriétés désirables : ils décrivent correctement les chocs, qui vérifient les relations de Rankine-Hugoniot, et ils ne nécessitent pas de faire usage d'une viscosité artificielle pour stabiliser les chocs, qui sont donc étalés sur une ou deux zones seulement. En conséquence, pour le même nombre de cellules ils ont une résolution effective légèrement meilleure que les schémas à grille alternée, qui sont plus diffusifs. En outre, toutes les quantités dans les simulations hydrodynamiques non magnétisées sont définies au centre des cellules, ce qui rend la gestion des grilles plus simple que pour un schéma à grilles alternées.

Ces schémas ont deux problèmes importants, toutefois, dans le contexte des simulations d'interaction planète-disque. Les chocs stationnaires qui sont presque alignés avec la grille souffrent d'une instabilité de type "rouge-noir", appelée l'instabilité *carbuncle*, dans la littérature anglo-saxonne (*carbuncle* signifie "furoncle", mais le terme anglo-saxon est systématiquement utilisé dans la littérature spécialisée en français). Cette instabilité fait faseyer le sillage spiral d'une planète géante dans un disque de basse viscosité, lorsqu'il est décrit dans le référentiel tournant. Ce comportement semble inévitable dans les schémas de type Godunov quand la résolution est élevée et la dissipation est basse, mais il n'apparaît pas dans les simulations à haute résolution avec les schémas à grille

alternée. Ce comportement est encore assez mal compris. Il existe toutefois des solveurs qui sont conçus spécifiquement pour éviter cette instabilité (Pandolfi et D'Ambrosio, 2001).

Un autre grave défaut des schémas de type Godunov est leur incapacité générique à décrire correctement des états stationnaires avec un terme source. En conséquence ils sont incapables de décrire correctement un disque képlérien en équilibre hydrostatique vertical, ce qui peut avoir des conséquences indésirables lorsque l'on modélise son interaction de marée avec une protoplanète. Nous illustrons cette incapacité à décrire des régimes stationnaires dans l'un des cas les plus simples, celui d'une atmosphère isotherme 1D dans un champ de gravité uniforme. La solution analytique est un profil de densité qui suit une loi exponentielle : $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/H)$, où ρ_0 est la densité au niveau du sol, z est l'altitude, et $H = c_s^2/g$ est l'échelle de hauteur de l'atmosphère (g étant l'accélération de la pesanteur). Nous pouvons essayer de décrire cette atmosphère au moyen du schéma de Godunov le plus simple possible, dans lequel les valeurs des champs définies au centre des cellules sont utilisées pour définir les problèmes de Riemann aux interfaces. Cette méthode ne requiert donc pas d'évaluation de pentes ou d'étape prédictrice. Raisonnons par l'absurde et supposons que ce schéma décrit un profil d'équilibre sur une grille uniforme. Ce profil doit correspondre à une suite géométrique de densités $(\rho_i)_{i \geq 0}$, c.-à-d. que pour tout i on a : $\rho_{i+1} = \eta \rho_i$, où η est une constante qui dépend de c_s^2 , de g , et du pas de la grille δz . Le profil d'équilibre consiste également, par hypothèse, en une suite nulle de vitesses : $u_i = 0$ pour tout i . Le problème de Riemann à l'interface entre la zone i et la zone $i+1$ est par conséquent défini par les conditions $\rho_L = \rho_i$, $u_L = 0$, $\rho_R = \rho_{i+1}$, et $u_R = 0$. Ce problème admet manifestement une solution (ρ_*, u_*) qui vérifie $\rho_L > \rho_* > \rho_R$ et $u_* > 0$ (la matière a tendance à aller vers les i croissants puisque $\rho_L > \rho_R$). Le problème de Riemann suivant est défini par $\rho_L = \eta \rho_i$, $u_L = 0$, $\rho_R = \eta \rho_{i+1}$, et $u_R = 0$, c'est-à-dire qu'à un facteur η près il est identique au problème de Riemann précédent. Nous pouvons utiliser le fait que l'équation d'Euler est invariante par multiplication de la densité par un facteur uniforme (autrement dit cette équation peut s'écrire en fonction de $\log \rho$ exclusivement) pour arguer que la solution de ce problème de Riemann est $(\eta \rho_*, u_*)$. Nous voyons se profiler le problème : il y a un flux net de masse dans la cellule i , puisque le flux entrant $\rho_* u_* \neq 0$ est différent du flux sortant $\eta \rho_* u_*$. De manière analogue, il y a un flux net de moment dans cette zone qui est compensé, strictement ou approximativement, par le terme source. Le flux de masse, lui, ne peut cependant pas être compensé puisque dans le problème que nous considérons il n'y a pas de terme source dans l'équation de continuité. Un équilibre hydrostatique numérique strict ne peut donc pas être maintenu par ce schéma.

Une solution à ce problème générique peut consister à prendre en compte le terme source (ici la gravité) dans le solveur de Riemann ou à utiliser des états modifiés (Zingale et al., 2002). Ces derniers sont généralement adaptés à une forme particulière du terme source. LeVeque (1998) a élaboré une méthode qui permet une description numérique exacte des états stationnaires et de leurs perturbations. Cela consiste à partager en deux chaque cellule, un peu à la

manière d'une écluse. Les deux parties de la cellule sont construites de manière à définir, autour de l'écluse, une situation localement stationnaire. Les problèmes de Riemann aux interfaces décrivent donc les écarts à la stationnarité du flot. Ils se réduisent à des problèmes triviaux (donc en particulier de solution à vitesse nulle, ce que l'on souhaitait) dans le cas où le flot est stationnaire. Le schéma de LeVeque fonctionne en principe avec n'importe quel terme source. Il peut être adapté au cas d'un disque képlérien (Masset, en préparation), auquel cas on peut imposer l'équilibre hydrostatique vertical et l'équilibre centrifuge (dans lequel le gradient radial de pression entre pour une faible part). Notons toutefois que cette solution a un coût non négligeable.

Jusqu'à présent il n'y a eu que quelques travaux publiés de simulations d'interaction planète–disque basés sur l'utilisation d'une méthode de type Godunov. Bryden et al. (1999), ainsi que Nelson et Benz (2003a; 2003b) ont utilisé un code PPM (méthode de type Godunov d'usage très répandu) pour simuler l'interaction de marée de planètes avec un disque protoplanétaire. Cieliegi et al. (2000) ont utilisé un code 2D de type Godunov à maille adaptative (AMRA) pour étudier le flot dans le voisinage d'une planète géante. Enfin, plus récemment, Paardekooper et Mellema (2006a) ont utilisé le code RODEO pour effectuer des simulations hydrodynamiques avec transfert radiatif d'objets de faible masse immergés dans un disque protoplanétaire.

5.2.2 Schémas à grille alternée

Le code le plus connu qui utilise un schéma à grille alternée est le code ZEUS (Stone et Norman, 1992), mais il existe une pléthore de telles codes (de Val-Borro et al., 2006). Dans un schéma à grille alternée, les vitesses sont définies au centre des interfaces auxquelles elles sont perpendiculaires. Ceci part du principe que l'on respecte mieux ainsi le centrage des dérivées spatiales dans l'équation de continuité et l'équation d'Euler. Le problème principal vient du fait que ces codes ne sont pas conçus spécifiquement pour traiter des chocs, de telle sorte que leur traitement est délicat. Une viscosité artificielle doit être introduite pour éviter les oscillations post-choc qui, sinon, rendraient le schéma instable. Ces schémas sont donc plus diffusives que les schémas basés sur une méthode de type Godunov.

D'un autre côté, les schémas à grille alternée ne souffrent pas de l'instabilité de carbuncle, leur implémentation est simple, ils sont plus rapides que les schémas de type Godunov, et ils peuvent décrire correctement des états stationnaires avec terme source sans travail ou coût supplémentaire. Ces avantages expliquent leur grande popularité, et les simulations réalisées avec ces codes ont considérablement amélioré notre connaissance des interactions planète–disque au cours de la dernière décennie.

5.2.3 Méthodes SPH

Au premier abord, les méthodes SPH ne semblent absolument pas adaptées à la description des interactions planète–disque. Ce sont des méthodes diffusive,

qui ne peuvent décrire aussi finement que des méthodes à grille les transitions abruptes aux bords des sillons, ou des bras spiraux très minces. Par construction, elles ont une basse résolution dans les régions de faible densité, comme à l'intérieur d'un sillon. Elles donnent aussi des sillages moins contrastés que les méthodes à grille (de Val-Borro et al., 2006), et ce sont des méthodes plutôt lentes. Cependant, elles permettent d'emblée des simulations 3D sans complexité additionnelle, et ne souffrent pas du problème de conditions aux limites dont souffrent les méthodes à grille. Un gros avantage, et non des moindres, de ces méthodes, est que la structure en arbre des algorithmes sur lequel elles sont basées permet facilement l'implémentation de l'auto-gravité. Pour finir, les codes SPH conservent le moment linéaire, ce qui est impossible pour les méthodes à grille cylindrique ou sphérique. Ceci peut être très important dans les problèmes tels que ceux des disques excentriques où il est crucial de fixer le centre de masse du système {disque+étoile+planète}. Les schémas SPH auto-gravitants peuvent aussi aider à trouver une solution adaptée aux problèmes exposés aux sections 5.2.4 et 5.2.4, qui sont des problèmes qui se posent dans les simulations d'interactions planète–disque sans auto-gravité. Pour finir, mentionnons qu'il existe des schémas SPH spécifiquement conçus pour décrire la migration et l'accrétion planétaire (Schäfer et al., 2004).

5.2.4 Artefacts dans les disques non auto-gravitants

Il est courant que l'auto-gravité soit négligée dans les simulations d'interactions planète–disque. Plus précisément, alors que la planète ressent la force gravitationnelle du disque (raison pour laquelle elle migre) et que le disque ressent la force exercée par la planète (raison pour laquelle un sillage y apparaît), un élément de fluide du disque ne ressent aucune force exercée par le reste du disque. La justification usuelle de cette simplification, outre une économie considérable de temps de calcul, est le fait que les disques protoplanétaires ont un paramètre Q de Toomre qui est grand. Bien que ces disques ne soient pas menacés par l'instabilité gravitationnelle, nous allons voir que négliger l'auto-gravité du disque peut avoir des conséquences importantes pour la migration planétaire.

Migration de type I et décalage indésirable des résonances

Ainsi que nous l'avons présenté à la section 3.1, la migration de type I provient d'un déséquilibre relativement léger des couples aux résonances de Lindblad externes et des couples aux résonances de Lindblad internes. Nous avons vu à la section 3.1.2 que la migration est très sensible à un léger décalage des résonances, tel que celui imposé par le gradient radial de pression (rappelons que cet effet était capable de contrecarrer celui des variations de la pente de la densité de surface). Notons tout d'abord que si les résonances sont décalées vers l'intérieur, alors les couples aux résonances externes de Lindblad sont renforcés alors que les couples aux résonances internes de Lindblad sont affaiblis. Par conséquent si les résonances sont décalées vers l'intérieur, la migration s'accélère. Réciproquement, si les résonances sont décalées vers l'extérieur, elle

ralentit. Deuxièmement, notons que si la planète sent seulement la gravité de l’objet central (et a par conséquent une orbite strictement képlérienne), elle sera légèrement plus lente que si elle ressent la gravité à la fois de l’objet central et du disque. La même chose est vraie pour le disque : un disque auto-gravitant tourne légèrement plus vite que le même disque sans auto-gravité.

Nous soulignons le fait que dans cette section nous considérons le cas linéaire, qui est pertinent pour les objets profondément immergés, de petite masse. La masse de la planète est un infiniment petit, tandis que les masses de l’étoile centrale et du disque sont des quantités finies (la seconde étant beaucoup plus petite que la première). La discussion qui suit concerne exclusivement les positions des résonances de Lindblad et leur impact sur le couple de marée, lorsque que la gravité du disque est prise en compte ou pas.

Considérons à présent l’expérience numérique suivante : une planète de petite masse est maintenue sur une orbite circulaire fixe dans un disque sans auto-gravité, et nous mesurons le couple agissant sur cette planète. Ceci correspond au cas A de la figure 5.2. Cette configuration est celle des nombreux travaux analytique d’évaluation de couple en régime linéaire (Tanaka et al., 2002; Ward, 1997), qui négligent l’auto-gravité du disque, et pour lesquels la planète a exclusivement une orbite képlérienne. On peut vérifier dans ce cas que le couple de marée est bien proportionnel à la densité de surface du disque (et qu’il est en accord avec les prédictions analytiques).

Nous pouvons à présent effectuer une deuxième expérience, dans laquelle on autorise la planète à migrer librement sous l’action du disque. En d’autres termes, on “lâche” la planète et on la laisse réagir au potentiel du disque. Ceci correspond au cas B de la figure 5.2. Nous pouvons faire les deux observations suivantes :

1. Le taux de migration mesuré pour cette planète est plus important que ce que prédit la mesure de couple sur une planète en orbite circulaire.
2. Le taux de migration n’est pas proportionnel à la densité de surface du disque. La dépendance est plus raide qu’une relation de proportionnalité, et l’on ne tend à retrouver les résultats des calculs en orbite circulaire fixe que lorsque la masse du disque tend vers zéro (Tanigawa et Lin, 2005).

Ces deux observations inattendues peuvent être comprises de la manière suivante : puisque la planète, dans le second cas, ressent la gravité du disque, sa fréquence orbitale augmente légèrement. Le disque, en revanche, continue d’orbiter à la même vitesse, et garde le profil de rotation du cas non auto-gravitant. En conséquence, les résonances se décalent toutes vers l’intérieur (comme on peut le voir sur le cas B de la figure 5.2) et la migration s’accélère. Cette augmentation de la vitesse de migration *est un artefact*, qui provient du fait que la planète et le disque n’orbitent pas dans le même potentiel. Ceci explique aussi pourquoi la vitesse de migration croît plus vite que linéairement avec la masse du disque : à l’augmentation des couples avec la densité de surface se superpose le décalage des résonances, qui augmente lui aussi avec la densité de surface. Si à ce stade on introduit l’auto-gravité du disque, alors le disque se met à tourner légèrement plus vite alors que la planète garde la même vitesse angulaire. Les ré-

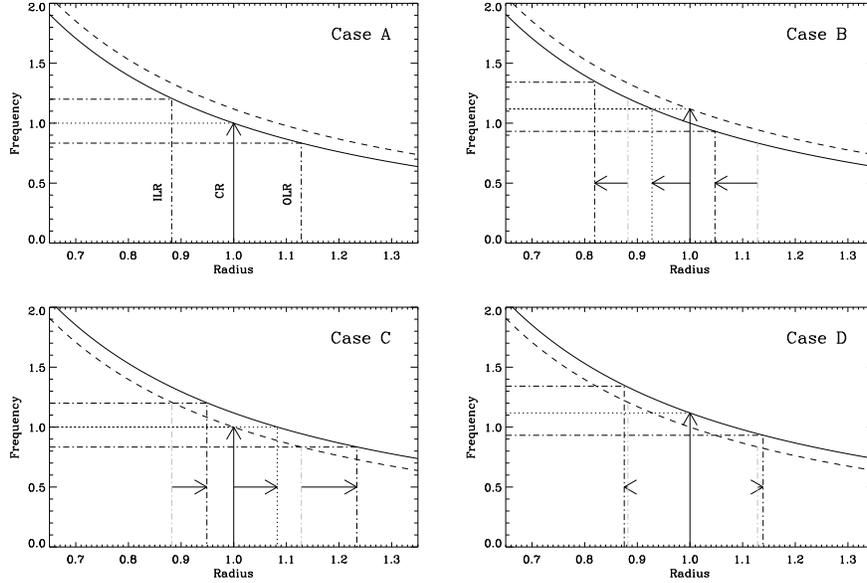


FIG. 5.2 – Position des résonances dans quatre cas différents. La courbe du bas, sur chaque graphe, représente un profil de rotation strictement képlérien, tandis que la courbe du haut représente le profil de rotation dans le potentiel de l’objet central et du disque. La masse du disque a été exagérée pour améliorer la lisibilité. La flèche verticale à $r = 1$ indique la fréquence orbitale de la planète. Dans la colonne de gauche cette flèche s’arrête à la courbe du bas, donc la planète orbite strictement à la fréquence képlérienne dans les cas A et C. La courbe en trait continu indique la fréquence orbitale du disque. Dans la rangée du haut la courbe en trait continu est la courbe inférieure, donc le disque a une fréquence strictement képlérienne dans les cas A et B : il ne ressent que la gravité de l’objet central. En revanche, dans la rangée du bas, sa courbe de rotation est la courbe supérieure (cas C et D) : il ressent la gravité de l’objet central et la sienne, donc dans ces deux cas il est auto-gravitant. La position de la résonance de corotation est indiquée par une ligne en pointillés dans chaque cas. Elle correspond à l’intersection de la courbe solide avec la ligne horizontale passant par la pointe la flèche, c.-à-d. l’endroit du disque où la fréquence est la fréquence orbitale de la planète. Cette résonance coïncide avec l’orbite dans les cas A et D car la planète et le disque sont en orbite dans le même potentiel (notons que pour des raisons de simplicité, le gradient radial de pression est négligé dans cette analyse, puisque son effet est le même dans chacun de ces quatre cas). Les droites en tirets-pointillés montrent les positions de résonances de Lindblad arbitrairement choisies (OLR du $m = 4$ et ILR du $m = 5$). Leurs positions originelles (celles du cas A) sont indiquées par des segments grisés sur chaque diagramme. Cela permet d’apprécier le décalage des résonances dans chacun des cas, indiqué par les flèches horizontales.

sonances se re-décalent vers l’extérieur et la migration ralentit. Ceci correspond à la transition du cas B au cas D à la figure 5.2. Ce résultat que l’auto-gravité du disque ralentit la dérive planète est en accord avec les résultats de Nelson et Benz (2003a), ainsi que ceux de Pierens et Huré (2005).

Cette formulation peut toutefois prêter à confusion, dans la mesure où elle compare les résultats de l’auto-gravité à une situation fortement biaisée. Cette dernière inclut un décalage *artificiel* des résonances, puisque la planète “ressent” un disque qui ne se “ressent” pas lui-même (cas B). Ce décalage des résonances introduit en relâchant la planète, et celui, dans l’autre sens, dû à la prise en compte de l’auto-gravité du disque, se compensent presque exactement. En particulier, si l’on souhaite établir des comparaisons avec les prédictions analytiques, il faut comparer le taux de migration final à celui d’une situation où la planète et le disque ne ressentent que la gravité de l’objet central. Cette situation correspond à toutes les estimations analytiques sans auto-gravité (Ward, 1997; Tanaka et al., 2002).

Il y a un autre effet, jusqu’ici non considéré dans cette analyse, à savoir le fait que les ondes de densité se propagent légèrement à l’intérieur de leurs résonances de Lindblad dans les disques auto-gravitant. Pierens et Huré (2005) affirment que cet effet domine le décalage des résonances introduit par le potentiel du disque, et que l’effet net est une légère augmentation du taux de migration.

Pour résumer les résultats ci-dessus, on peut dire qu’utiliser le potentiel du disque pour déterminer à la fois son profil de rotation et la rotation de la planète augmente légèrement la vitesse de migration par rapport aux prédictions analytiques où la planète et le disque ne ressentent qu’un potentiel strictement képlérien. Il s’agit d’un effet subtil qui vient d’un léger décalage des résonances, et qui ne se manifeste qu’aux masses de disque élevées (Pierens et Huré, 2005).

Cependant, si on considère une simulation numérique avec une planète libre de migrer dans un disque qui ne ressent pas sa propre gravité, alors il y a un décalage artificiel des résonances qui accélère la migration (cas B). Ce décalage est beaucoup plus important que le léger décalage de la situation auto-gravitante, et il peut conduire à surestimer le taux de dérive d’un facteur deux ou plus dans une MMSN à $r = 10$ U.A.

Clairement, une solution doit être trouvée à ce problème. Nous en suggérons deux possibles :

- La moyenne azimutale de la densité de surface du disque pourrait être soustraite de chaque cellule avant d’évaluer la force exercée par le disque sur la planète. Dans ce cas, seules les perturbations non-axisymétriques dans le disque vont exercer une force sur la planète. Nonobstant ces perturbations, la planète est essentiellement en orbite dans le potentiel de l’objet central seulement et son orbite est képlérienne.
- Au lieu de considérer un disque complètement auto-gravitant, ce qui peut être coûteux, on peut inclure seulement la composante axisymétrique du potentiel du disque. La raison en est que c’est essentiellement le décalage des résonances qui est important, et ce décalage est une conséquence du changement du profil 1D de vitesse orbitale. Cette solution suffit à décaler les résonances exactement comme si le disque était auto-gravitant, et peut

être implémentée de manière virtuellement gratuite en temps de calcul (Baruteau et Masset, en préparation).

Problèmes d’inertie dans les disques sans auto-gravité

Les disques sans auto-gravité soulèvent un autre problème, cette fois pour les planètes de grande masse qui possèdent un disque circumplanétaire. Nous considérons la situation représentée à la figure 5.3. Nous partageons le gaz en deux régions : le système d’intérêt (SI) et le reste du disque. Nous limitons notre discussion au cas où le le SI peut être traité comme fermé, c.-à-d. qu’il ne devrait pas échanger de matière avec le reste du disque. Comme la planète est entourée par un disque circumplanétaire, on devrait pouvoir isoler une telle région où les lignes de courant sont fermées et font le tour de la planète. Si une telle région n’existe pas, le bilan de moment angulaire du SI doit inclure le flux de moment angulaire advecté à travers sa frontière. Il est néanmoins utile d’avoir présents à l’esprit les résultats que l’on obtient en supposant que le SI est strictement fermé. Dans ce cas nous utilisons le terme “disque circumplanétaire” (DCP) pour désigner le gaz inclus dans le SI.

Le sillage de la protoplanète induit un couple spécifique $\gamma_{\text{wake}}(\vec{r})$ part out dans le SI. Pour notre propose nous supposons que le SI est suffisamment petit pour la valeur moyenne (pondérée par la masse) de $\gamma_{\text{wake}}(\vec{r})$ puisse être considérée comme égale à $\gamma_{\text{wake}}(\vec{r}_p)$, \vec{r}_p étant le vecteur position de la planète ;

$$\int_{\text{DCP}} \rho \gamma_{\text{wake}}(\vec{r}) d^3\vec{r} = M_{\text{DCP}} \gamma_{\text{wake}}(\vec{r}_p), \quad (5.1)$$

où M_{DCP} est la masse du disque circumplanétaire.

Nous supposons en outre que nous avons un schéma parfaitement conservatif, de telle sorte que le taux de variation du moment angulaire dans un système fermé soit égal au couple total appliqué sur chacune de ses parties. L’équation qui gouverne le demi grand-axe de l’évolution du SI (en supposant que son “demi grand-axe” est une quantité bien définie, correspondant au demi grand-axe de la planète au centre du SI) s’écrit de la manière suivante :

$$2Ba(M_p + M_{\text{DCP}})\dot{a} = \Gamma_{\overline{\text{SI}} \rightarrow p} + \Gamma_{\text{DCP} \rightarrow p} + \Gamma_{\overline{\text{SI}} \rightarrow \text{DCP}} + \Gamma_{p \rightarrow \text{DCP}}, \quad (5.2)$$

où $\Gamma_{A \rightarrow B}$ est le couple exercé par le système A sur le système B , et $\overline{\text{SI}}$ est la région complémentaire du SI, c’est-à-dire tout le reste du disque. Les deux premiers termes du membre de droite de l’équation (5.2) correspondent respectivement aux couples exercés sur la planète (première composante du SI) par le reste du disque et par le disque circumplanétaire. Les deux derniers termes du membre de droite correspondent respectivement au couple exercé sur le disque circumplanétaire (deuxième composantes du SI) par le reste du disque et par la planète. La présence du deuxième et du quatrième terme peut sembler surprenante, dans la mesure où l’on s’attend à ce que ces couples, internes au SI, s’annulent entre eux en vertu de la loi de l’action et de la réaction : on s’attend à ce que $\Gamma_{\text{DCP} \rightarrow p} + \Gamma_{p \rightarrow \text{DCP}} = 0$. Néanmoins, nous avons déjà vu que négliger

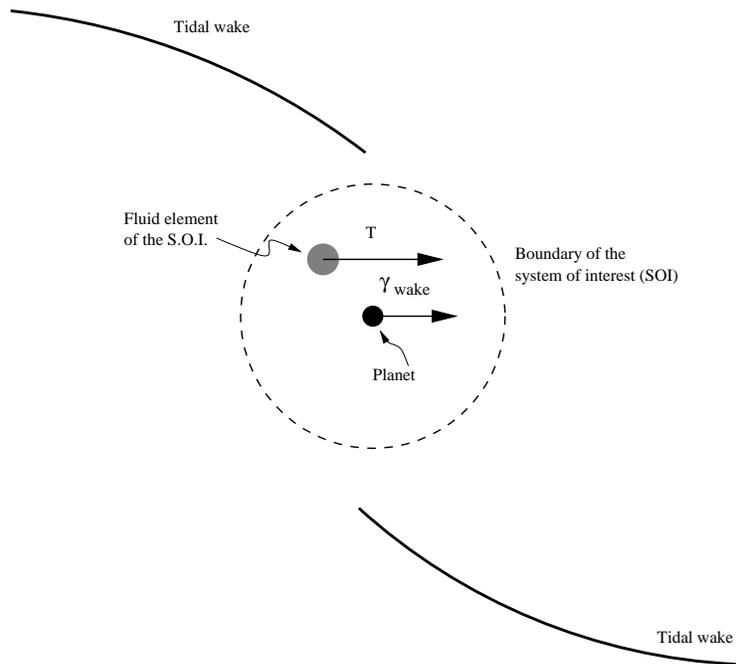


FIG. 5.3 – Le Système d’Intérêt (SI), qui est la région encerclée par la ligne en tirets, inclut la planète. Le point gris représente un élément de fluide du SI, de masse δm . Si le disque est auto-gravitant, cet élément de fluide est soumis à un couple T de la part du sillage égal à $\delta m \gamma_{\text{wake}}$. Si le disque n’est pas auto-gravitant, l’élément de fluide n’est soumis à aucun couple du sillage.

l'auto-gravité du disque peut conduire à certaines incohérences. Dans le cas présent une solution à ces incohérences est de renoncer à la réciprocité des actions. L'équation (5.2) est cependant correcte même dans de tels cas puisque la seule hypothèse sur laquelle elle repose est que le schéma est conservatif, ce qui est toujours vrai.

Supposons à présent que nous souhaitons imposer la réciprocité des actions, c'est-à-dire que le couple du disque sur la planète soit opposé au couple exercé par la planète sur le disque. Implémenter cette règle, dans le schéma numérique, revient à dire que le couple exercé par le disque sur la planète doit être obtenu en sommant sur tout le gaz, y compris celui qui est à l'intérieur du SI. Dans ce cas seulement le deuxième et le quatrième terme du membre de droite de l'équation (5.2) s'annulent entre eux, ce qui nous donne :

$$2Ba(M_p + M_{DCP})\dot{a} = M_p\gamma_{\text{wake}} + \Gamma_{\overline{SI} \rightarrow DCP}. \quad (5.3)$$

Par souci de brièveté nous utilisons dorénavant la notation γ_{wake} pour désigner la quantité $\gamma_{\text{wake}}(\vec{r}_p)$. Si le disque est auto-gravitant, alors en utilisant l'équation (5.1) nous obtenons : $\Gamma_{\overline{SI} \rightarrow DCP} = M_{DCP}\gamma_{\text{wake}}$, ce qui nous conduit à :

$$\dot{a}_{SG} = \frac{\gamma_{\text{wake}}}{2Ba}. \quad (5.4)$$

Ceci n'est pas surprenant, dans la mesure où tout le SI ressent le couple spécifique γ_{wake} . D'un autre côté, si le disque n'est pas auto-gravitant, alors $\Gamma_{\overline{SI} \rightarrow DCP} = 0$ et en utilisant l'équation (5.2) nous obtenons :

$$2Ba(M_p + M_{DCP})\dot{a}_{NSG} = M_p\gamma_{\text{wake}}. \quad (5.5)$$

Nous obtenons donc les égalités suivantes :

$$\dot{a}_{NSG} = \left(\frac{M_p}{M_p + M_{DCP}} \right) \frac{\gamma_{\text{wake}}}{2Ba} = \left(\frac{M_p}{M_p + M_{DCP}} \right) \dot{a}_{SG}. \quad (5.6)$$

La migration est donc ralentie dans un disque sans auto-gravité par l'inertie du disque circumplanétaire. Ceci est assez logique ; le disque circumplanétaire doit en dernier ressort perdre son moment angulaire, par unité de masse, au même taux que la planète, mais il ne participe pas à la migration puisqu'il ne ressent pas le couple du sillage. Il contribue à l'inertie du système en migration, mais seul un sous-ensemble de ce système (la planète) contribue au couple. L'incohérence introduite dans le schéma en ignorant les effets de l'auto-gravité affecte la migration d'une manière non triviale, qui dépend de la façon dont le flot est organisé au voisinage de la planète. Si l'on cherche une solution au problème du ralentissement de la migration posé par cette incohérence, alors cette solution requière une connaissance des propriétés du flot. Ce problème devrait être relativement mineur quand la masse du disque circumplanétaire est petite devant celle de la planète. Ceci sera le cas à basse résolution ou lorsque le disque est de faible masse, sinon on peut avoir une réduction important (et artificielle) du taux de migration.

Cherchons à présents des solutions possibles à ce problème. En principe nous pouvons réconcilier le taux de migration avec celui d’une configuration auto-gravitante de deux manières possibles : soit nous “transformons” le terme de masse du membre de droite de l’équation (5.5) en $M_p + M_{DCP}$, ou nous “transformons” le terme du membre de gauche de cette équation en M_p .

- La première solution peut être aisément implémentée en appliquant “manuellement” le couple spécifique γ_{wake} à tout le disque circumplanétaire. Ceci est équivalent à ajouter le terme additionnel $+\gamma_{\text{wake}}M_{DCP}$ au membre de droite de l’équation (5.2). Ceci correspond à une tentative de rétablir le couple spécifique du sillage sur tout le système en migration, comme représenté sur la figure 5.3. Des calculs préliminaires semblent indiquer que cette approche fonctionne correctement, dans la mesure où le taux de migration converge vers une valeur finie lorsque l’on augmente la résolution (Pepliński et Artymowicz, en préparation).
- La deuxième solution peut être réalisée de la manière suivante. Notons tout ’abord que dans le cas d’un disque sans auto-gravité le seul couple exercé sur le disque circumplanétaire est $\Gamma_{p \rightarrow DCP}$. Ce terme peut également s’écrire $2BaM_{DCP}\dot{a}$, puisque le disque circumplanétaire migre au taux \dot{a} . L’équation (5.2) peut alors s’écrire sous la forme :

$$2BaM_p\dot{a} = M_p\gamma_{\text{wake}} + \Gamma_{DCP \rightarrow p}. \quad (5.7)$$

Nous voyons que nous retrouvons $\dot{a} = \dot{a}_{SG} = \gamma_{\text{wake}}/(2Ba)$ si et seulement si $\Gamma_{DCP \rightarrow p} = 0$. Notre seconde solution consiste donc à s’assurer que le disque circumplanétaire n’exerce aucun couple sur la planète (alors que le potentiel de la planète est ressenti par tout le disque). Pour implémenter cette approche, il suffit de tronquer la sommation du couple au niveau du disque circumplanétaire. Éviter le SI dans la sommation du couple soulage la planète de l’inertie additionnelle indésirable du disque circumplanétaire. La masse de celui-ci devient virtuellement nulle, et migre sans coût pour la planète. Le disque circumplanétaire devient alors essentiellement un spectateur passif de la migration de la planète.

Nous pouvons faire les commentaires suivants sur cette analyse :

- La seconde solution a été utilisée par de nombreux auteurs, alors que la première n’a pas encore été utilisée dans des simulations publiées.
- Comme nous l’avons indiqué plus haut, ces solutions requièrent une connaissance *a priori* du flot autour de la planète de telle sorte que le SI puisse être proprement défini. Le débat sur l’existence et l’extension d’un tel SI est encore ouvert. La fraction du lobe de Roche qui devrait être exclue des calculs de couple est encore un sujet controversé.
- L’analyse exposée ci-dessus suppose que le SI est strictement fermé. Les conséquences d’un flot de matière à travers la frontière du disque circumplanétaire n’ont pas encore été étudiées.
- L’analyse ci-dessus suppose que le sillage est strictement le même dans le cas avec et sans auto-gravité, de manière à isoler les effets de l’inertie du disque circumplanétaire. En fait, dans le cas auto-gravitant, la masse du

disque circumplanétaire contribue elle aussi à l'excitation du sillage. Ceci exacerbe encore la différence entre les deux cas.

- Nous avons supposé que la moyenne pondérée par la masse du couple spécifique du sillage sur le système d'intérêt est égal au couple spécifique à la position de la planète. Même si ceci n'est pas le cas, cependant, les deux solutions forcent un taux de migration dicté par le couple spécifique au niveau de la planète. Il apparaît donc intéressant de tester jusqu'à quel niveau notre hypothèse de départ est raisonnable, possiblement au moyen de simulations numériques.
- L'intégralité de l'analyse ci-dessus montrant l'importance de l'auto-gravité du disque est valide indépendamment du paramètre Q de Toomre, aussi bien celui du disque protoplanétaire que celui du disque circumplanétaire. Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la température ou la vitesse du son dans ces disques.
- Exclure le disque circumplanétaire du calcul du couple sur la planète est certes nécessaire pour rétablir l'équilibre entre inertie et gravitation, mais cela peut cacher d'autres effets. D'Angelo et al. (2005) ont effectué une analyse des couples exercés par le lobe de Roche interne sur une planète géante à haute résolution, dans un disque sans auto-gravité. Ils ont considéré le cas particulier d'une planète de la masse de Saturne dans un disque très massif, et ont trouvé que lorsque la résolution de la grille augmente, la masse du matériel circumplanétaire augmente et le taux de migration décroît. Ces résultats sont compatibles avec l'analyse ci-dessus. Cependant, ils ont aussi considéré le cas d'une planète de la masse de Jupiter entourée par un disque beaucoup plus léger. Dans ce cas ils trouvent que le matériel des parties internes du lobe de Roche exerce un couple significatif sur la planète, même si celle-ci ne migre pas. Clairement, ces résultats n'entrent pas dans le cadre de l'analyse ci-dessus. L'origine de ce couple est encore inconnue. En régime stationnaire, le moment angulaire donné à la planète par le lobe de Roche interne (si ce dernier est un système fermé) doit être compensé par un couple exercé par le reste du système. Ce couple peut ou bien provenir du reste du gaz ou bien de l'objet central. La marée due à l'objet central semble être beaucoup trop faible pour rendre compte du couple exercé par le lobe de Roche interne sur la planète (Baruteau, communication privée; D'Angelo, communication privée), mais on peut aussi considérer les couples exercés par le reste du gaz sur le lobe de Roche interne : couple de pression, couple visqueux, couple de la pression visqueuse (pression artificielle propre aux schémas à grille alternée). Si aucun de ces couples ne peut rendre compte du couple exercé par le lobe de Roche interne sur la planète, il conviendra de s'interroger sur les propriétés de conservation et la réciprocity des actions du schéma numérique aux petites échelles.

Chapitre 6

Prospective

Les pages qui suivent résument mes projets d'activité de recherche pour les années à venir. Ces projets peuvent se regrouper en quatre grands thèmes, à savoir :

1. Une modélisation simple (1D) des phénomènes de migration, orientée vers une description statistique des résultats de la migration dans un système planétaire.
2. Une exploitation immédiate des résultats de mon nouveau code 3D à grilles emboîtées, JUPITER, sur un certain nombre de problèmes précis (migration de type III, évolution des inclinaisons, etc.)
3. Une étude théorique, guidée par les simulations numériques, du flot de gaz au voisinage d'une planète immergée, avec une emphase particulière sur le rôle de la vorticité.
4. L'inclusion de nouveaux processus physiques pertinents dans les simulations numériques, de manière à tendre vers une description réaliste des disques protoplanétaires et de leurs interactions de marée avec des proto-planètes.

Comme on le voit, ces projets reposent en grande partie sur les simulations numériques. Nous sommes en effet aujourd'hui à un tournant important des théories de migration planétaire, dans la mesure où la plupart des travaux qui pouvaient être menés à bien de manière analytique ou semi-analytique ont été réalisés. Manifestement, une compréhension fine de la migration planétaire et l'apparition de scénarios prédictifs, qui donnent la configuration probable d'un système en fonction des caractéristiques du disque, ne pourra émerger que grâce à des simulations numériques intensives et correctement comprises. Il se trouve que l'évolution de moyens de calcul permet maintenant de réaliser facilement des simulations 3D, et surtout d'en réaliser un grand nombre, afin de bien comprendre comment les paramètres du système en régulent la physique. En outre, cette percée quantitative des prochaines années va coïncider avec les moissons de résultats des missions spatiales comportant un volet de détection d'exoplanètes (à commencer par COROT, dont l'arrivée des premiers résultats est im-

minente). Nous nous trouvons donc à une convergence très particulière de trois branches (maturité des théories d’interaction de marée planète–disque, essor des moyens de calculs, imminence de statistiques importantes sur les exoplanètes) qui requiert une évolution adaptée des activités de recherche sur les interactions planète–disque. Je développe ci-après chacun des quatre grands thèmes évoqués ci-dessus.

6.1 Modélisation de la migration et lien avec les propriétés statistiques

6.1.1 Amélioration des prescriptions analytiques

Un certain nombre de travaux récents tente de rendre compte des statistiques (encore maigres et biaisées) des distributions de demi grand-axe, masse et excentricité des planètes extra-solaires, par des modèles 1D simplifiés de migration (Thommes, 2005; Alibert et al., 2005; Daisaka et al., 2006). Ces modèles incluent généralement :

- une prescription analytique pour le couple de marée en migration de type I,
- une prescription pour l’accrétion planétaire,
- un amortissement local du couple de Lindblad pour les grandes masses, de manière à créer un sillon,
- une physique du disque plus ou moins raffinée, pouvant inclure de la viscosité, du transfert radiatif, un grand nombre de planétésimaux, etc.

L’avantage de ces modèles consiste en la possibilité d’obtenir des statistiques robustes des systèmes planétaires auxquels ils conduisent, puisque, de part leur simplicité et leur faible coût, on peut les faire tourner un très grand nombre de fois. Toutefois, par essence ces modèles n’incluent pas les processus suivants, dont nous avons vu aux chapitres précédents la grande importance, quantitative et qualitative, pour les phénomènes de migration :

- toute la dynamique co-orbitale. À ce titre, ils négligent soit le couple de corotation, soit sa saturation, et ne peuvent décrire la migration de type III, dont on a vu la grande richesse de scénarios de migration.
- En négligeant la dynamique co-orbitale, ils ne peuvent rendre compte des effets de perméabilité du sillon, lesquels peuvent donner lieu à des scénarios comme celui Masset et Snellgrove (2001), de renversement de la migration de planètes géantes.
- Enfin, ces modèles négligent les effets stochastiques de la migration diffusive en disque turbulent.

Je souhaite développer un modèle simple qui permette d’intégrer la dynamique co-orbitale aux modèles 1D de migration, et qui permette de décrire toute la richesse de comportements qu’elle permet (oscillations de relaxation du couple de saturation lorsqu’il sature, migration de type III, mécanisme de Masset et Snellgrove). Étant donné l’intérêt que peut représenter un tel modèle, je compte orienter Clément Baruteau, mon étudiant de thèse, sur ce sujet pour la deuxième partie de sa thèse. Les prescriptions de ce modèle pourraient alors être utilisées

par nous-mêmes ou d'autres auteurs pour construire des prédictions statistiques fines, qui seraient d'un grand intérêt à l'heure d'interpréter les statistiques de COROT.

6.1.2 Application aux interactions planète–planète

Nous avons vu aux chapitres précédents qu'il était très peu vraisemblable que les seules interactions de marée planète–disque soient capables de rendre compte de la distribution des excentricités des planètes extra-solaires. Il semble alors naturel de supposer que des interactions planète–planète puissent être responsables de ces grandes excentricités. Toutefois, un certain nombre d'arguments ont été avancés (Goldreich et Sari, 2003) qui suggèrent que les interactions planète–planète ne sont pas aptes à reproduire les distributions d'excentricités observées. Il est donc tentant de considérer des scénarios hybrides, somme toute naturels, dans lesquels une migration convergente amène tout d'abord en résonance une paire de deux planètes géantes, lesquels pourront subir des rencontres proches (si leurs masses et leurs séparations initiales les y autorisent) après la disparition du gaz. Les modèles de migration 1D mentionnés à la section précédente seraient donc une première étape indispensable à la préparation de systèmes N-corps présentant fréquemment des résonances de moyen mouvement.

6.2 Exploitation immédiate du code JUPITER

Le code JUPITER a atteint une phase de maturité qui lui permet désormais d'obtenir des résultats nouveaux dans le domaine de la migration planétaire. Avec la physique qu'il comporte à l'heure actuelle, il est entre autres possible d'étudier les processus détaillés aux paragraphes ci-dessous. Notons qu'aux sections qui suivront nous verrons d'autres exemples d'applications possibles que, pour des raisons de cohérence, j'ai préféré relier aux thématiques des sections concernées (à savoir l'étude théorique du flot, et l'inclusion de processus physiques nouveaux).

6.2.1 Migration de type III en disque 3D

Les études publiées de migration de type III ont toutes été réalisées, jusqu'à présent, soit en 2D, soit en 3D par des simulations locales de type boîte de cisaillement, ou *shearing box* (Papaloizou et al., 2006). Il est intéressant de déterminer précisément les limites du domaine de la bifurcation vers la migration emballée. Pour ce faire, il est possible d'utiliser un code à grilles emboîtées tel que JUPITER et la technique dite de migration "sur-place", développée par Masset et Papaloizou (2003). Ceci avait été l'objet du stage de DEA de Clément Baruteau, mais à l'époque (début 2005) l'état de maturité du code JUPITER ne permettait pas de mener à bien une exploration systématique de l'espace des paramètres, aussi bien pour des raisons de temps de calcul (JUPITER a depuis été très significativement amélioré par *profiling*), que de stabilité (l'algorithme

hydrodynamique que nous utilisons s’est avéré instable –ce n’était pas connu à l’époque, nous nous en sommes rendu compte par la suite– dans les milieux soumis à une force de Coriolis, comme c’est le cas dans les disques képlériens). Il est à présent pleinement possible déterminer le seuil d’emballement en 3D, en particulier pour les petites masses, pour lesquelles l’approximation 2D que Masset et Papaloizou ont utilisé est injustifiée.

6.2.2 Amortissement des inclinaisons

Jusqu’à présent, les tentatives de vérification des prédictions analytiques de Tanaka et al. (2002; 2004) se sont cantonnées essentiellement à la vérification des prédictions du taux de migration (D’Angelo et al., 2003b; Bate et al., 2003). Tanaka et Ward (2004) prédisent également par des calculs semi-analytiques l’évolution de l’excentricité et de l’inclinaison d’une protoplanète. Ils montrent en particulier que l’évolution de l’inclinaison est gouvernée par l’excitation d’ondes de gauchissement dans le disque. Ceci pourrait être facilement testé en utilisant le code JUPITER, en raffinant à la position (r, ϕ) de la planète, sur un intervalle de colatitude suffisamment grand pour englober son excursion verticale. Ceci serait particulièrement utile pour disposer par la suite de prescriptions fiables pour l’évolution des inclinaisons dans les modèles 1D, ce qui est par exemple très utile pour décrire l’évolution orbitale d’un grand ensemble de planétésimaux immergés dans du gaz. Enfin, on pourrait également tester le domaine des grandes inclinaisons ($i > h$), qui échappe à une description analytique exacte, pour voir comment se comporte l’évolution de l’inclinaison d’un corps qui orbite la plupart du temps en dehors du disque.

6.3 Propriétés du flot et rôle de la vorticité

Si les propriétés du flot dans ses grandes lignes sont bien connues (déflexion des lignes de courant dans le sillage, présence d’une région fer-à-cheval à toute masse de planète, apparition d’un disque circumplanétaire au-delà d’une certaine masse, etc.) de nombreuses zones d’ombre demeurent. Quelle est la structure tridimensionnelle de la région fer-à-cheval, dans le cas d’une planète de grande masse? et de petite masse? Il s’agit de questions très techniques, mais possiblement d’une grande importance pour la migration, ou pour la croissance des cœurs (puisque le flot de gaz dans son voisinage peut grandement influencer sur l’apport de planétésimaux ou de poussières).

6.3.1 Dynamique dans la sphère de Bondi

Quelle est la dynamique à l’intérieur de la sphère de Bondi? Avec Gennaro D’Angelo et Wilhelm Kley (Masset et al., 2006a), j’ai mis en évidence le rôle de cette sphère qui limite l’extension des non-linéarités du flot dans le régime des petites masses (c.-  -d. quand le rayon de cette sphère est inférieur au rayon de Hill), mais la dynamique du gaz à l’intérieur de cette sphère, et sa connexion

au flot képlérien, est essentiellement inconnue. En particulier, dans le cas où le disque est supporté par un gradient radial de pression, la corotation se trouve à une certaine distance de l’orbite, distance qui peut être plus grande que le rayon de Bondi, si la masse du cœur est suffisamment petite. La sphère de Bondi apparaît alors comme un “obstacle” dans un flot très subsonique. En régime stationnaire, un ou plusieurs points de stagnation doivent apparaître. Où se trouvent-ils? La réponse à ces questions peut être apportées par des simulations (ici nécessairement 3D, car nous parlons d’objets très enfouis) à très haute résolution, nécessitant un grand nombre de niveaux de raffinement.

6.3.2 Couple du lobe de Roche interne

Comme nous l’avons mentionné à la section 5.2.4, D’Angelo et al. (2005) trouvent que le gaz des parties internes du lobe de Roche exerce un couple non négligeable sur la planète, même lorsque le disque circumplanétaire est peu massif et que la planète ne migre pas. L’origine de ce couple est inconnue, et il est important de l’élucider pour savoir s’il doit être pris en compte dans les scénarios de migration ou s’il s’agit d’un artefact de nature numérique. En régime stationnaire le couple exercé par ce gaz des parties internes est aussi le couple exercé par le reste du disque sur ce gaz, et il peut donc s’agir *a priori* d’un couple dû aux forces de pression, aux forces visqueuses, ou à la pression visqueuse. Le couple de marée de l’objet central semble beaucoup trop faible pour rendre compte de ce couple.

6.3.3 Problème de l’exclusion du lobe de Roche et de l’auto-gravité

À l’heure actuelle, on peut diviser les numériciens travaillant sur le problème de la migration des planètes géantes en deux écoles : celle de ceux qui utilisent la force due à tout le gaz (y compris celui du lobe de Roche) pour mettre à jour la vitesse de la planète, et celle (dont je suis) de ceux qui tronquent le calcul de la somme de forces de manière à ne pas inclure une fraction du lobe de Roche interne (l’idée étant que le système du disque circumplanétaire appartient à la planète, et constitue avec celle-ci le système pertinent d’étude sur lequel on effectue le bilan des forces *extérieures*). Il est bien évident que si le disque était auto-gravitant, la question ne se poserait pas : toutes les composantes du système attirent toutes les autres composantes, et le calcul de la force ne devrait pas être tronqué. Toutefois, ce n’est pas le cas des simulations qui divisent les numériciens : le gaz n’y est pas auto-gravitant et la seule manière pour le disque circumplanétaire de migrer avec la planète est de se faire au détriment de la planète, qui est la seule à pouvoir lui faire perdre du moment angulaire. Ainsi que nous l’avons vu à la section 5.2.4, ceci conduit à un ralentissement indésirable de la migration. Les travaux numériques sur la migration des planètes géantes sont actuellement partiellement dans l’impasse en raison des désaccords entre les tenants des deux écoles. Pour se mettre d’accord, il faut réaliser des simulations auto-gravitantes de migration de planètes géantes afin de trouver quel est le

bon protocole de calcul (troncature ou non, et en cas de troncature, jusqu’à quel rayon). Ceci constitue l’un des volets de la thèse de doctorat de Clément Baruteau.

6.3.4 Problèmes liés à la vorticité

Ainsi que nous l’avons vu à la section 3.2, des vortex peuvent apparaître sur les bords du sillon si la viscosité est suffisamment faible. (Koller et al., 2003) ont montré quelle était le mécanisme permettant d’amplifier les vortex : le matériel qui traverse le choc à chaque période synodique, de part et d’autre de la planète, gagne de la vorticité. Il est intéressant de regarder le comportement à long terme des systèmes dans lesquels apparaissent ces vortex. Après leur coalescence, restent-ils un temps indéfini ? Ils correspondent à des sur-densités notables, et de ce fait se comportent comme des “planètes floues” dans le disque, aussi ils excitent des sillages dans lesquels ils perdent du moment angulaire : les vortex doivent aussi migrer, et avoir de ce fait un impact sur la migration de la planète géante qu’ils encadrent.

Ce problème présente certaines similarités formelles avec les problèmes de couplage vortical–acoustique ou entropique–acoustique (Foglizzo et Tagger, 2000; Foglizzo, 2002; Foglizzo et al., 2005). J’ai entamé une collaboration sur l’étude numérique de ces cycles avec Thierry Foglizzo, par le biais de simulations numériques, avec le code JUPITER (voir la figure 6.1). Ces simulations rencontrent toutefois un problème inhérent aux méthodes de type Godunov, lorsque l’on essaye de décrire un choc stationnaire (l’un des ingrédients essentiels d’un cycle vortical–acoustique). La résolution de ce problème permettra de décrire finement le cycle et d’en comparer le taux de croissance aux résultats analytiques.

6.4 Vers une modélisation réaliste des disques protoplanétaires

Ainsi que nous l’avons mentionné ci-dessus, les scénarios de migration planétaire, qui n’étaient il y a quelques années que des mécanismes décrits par des ordres de grandeur, entrent désormais dans l’ère du quantitatif, grâce à la possibilité de réaliser des simulations tridimensionnelles.   ce titre, il est important de rajouter, de manière progressive et maîtrisée, tous les ingrédients physiques pertinents susceptibles d’altérer les scénarios de migration planétaire.

6.4.1 Transfert radiatif

Le transfert radiatif est, à plusieurs titres, un ingrédient central dans les scénarios de migration, aussi bien pour les planètes de petite masse que pour les planètes de grande masse.

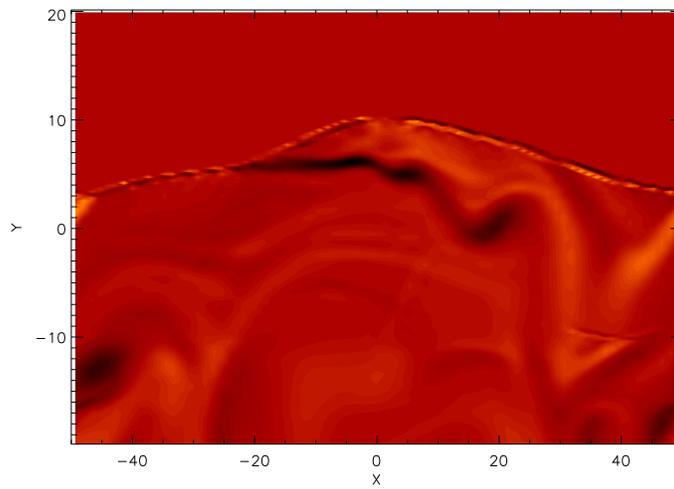


FIG. 6.1 – Couplage vortical–acoustique à un choc stationnaire. Un flot supersonique isotherme entre dans la grille en $Y = 20$, avec une vitesse dirigée vers le bas. Il y rencontre un choc stationnaire, sur lequel des ondes acoustiques incidentes produisent de la vorticité, advectée par le flot. La fermeture du cycle est assurée par une marche de potentiel lissée en $Y = -10$, qui permet de renvoyer vers le choc des ondes acoustiques, dans la partie subsonique, en aval de celui-ci.

Transfert radiatif et migration de Type II

Lorsqu'une planète géante ouvre un sillon dans un disque passif évasé (qui doit son évasement à l'irradiation de sa photosphère par l'objet central), on peut envisager que le bord externe de son sillon soit irradié sous incidence normale par l'objet central (tout du moins ses parties à haute altitude, puisque la partie équatoriale est dans l'ombre du disque interne), et que ceci cause le renflement du disque ou bord externe du sillon. Comme le couple de Lindblad est une quantité extrêmement sensible à l'épaisseur du disque (voir la section 3.1), et qui décroît lorsque l'épaisseur du disque augmente, on peut envisager les deux conséquences suivantes :

- le couple total exercé sur la planète devient une quantité positive, suite à l'affaiblissement du couple externe ; la planète commence par conséquent à migrer vers l'extérieur.
- la troncature par effet de marée au bord externe s'affaiblit, ce qui ne permet pas à la planète de repousser son disque externe au taux auquel elle migre vers l'extérieur. Par conséquent, le matériel traverse le sillon plutôt que de s'accumuler au bord externe : le mécanisme de migration vers l'extérieur peut donc être entretenu.

On notera que des simulations préliminaires, alternant de l'hydrodynamique seule et des étapes de transfert radiatif suivies de relaxation verticale du disque, montrent que le rapport d'aspect du disque peut augmenter de 30 à 40 % au travers du sillon. Dans un deuxième temps, l'imposition d'un tel profil de rapport d'aspect au travers de l'orbite d'une planète géante dans le code FARGO montre que la migration de cette dernière est renversée durablement (voir la figure 6.2). Pour valider complètement ce mécanisme qui semble très important pour gouverner l'évolution de planètes géantes immergées dans des disques évasés, il est fondamental de réaliser des simulations hydrodynamiques tridimensionnelles. Celles-ci devront au moins inclure deux "groupes" : une première bande d'énergie correspondant aux fréquences dans lesquelles l'étoile émet son énergie et irradie la photosphère du disque (visible) et une bande dans laquelle le disque rayonne l'énergie qu'il reçoit de l'étoile (infrarouge moyen, dans lequel il est beaucoup moins opaque).

Accrétion planétaire

L'accrétion du gaz sur une planète géante est un processus extrêmement mal contraint, qui est décrit de manière *ad-hoc* dans les codes. Cela se fait en enlevant une fraction de la masse (et du moment associé) aux cellules les plus internes du lobe de Roche. L'énergie dégagée par l'accrétion est usuellement négligée par cette prescription, qui continue à se baser sur une équation d'état localement isotherme. Alternativement, il existe un travail semi-analytique (Pollack et al., 1996) qui prend en compte les différents processus physique en compétition pour réguler l'accrétion (accrétion des planétésimaux, transfert radiatif, etc.) mais ce travail suppose une accrétion sphérique dans une nébuleuse homogène et infinie. Dans ces circonstances très particulières le problème du transfert du moment

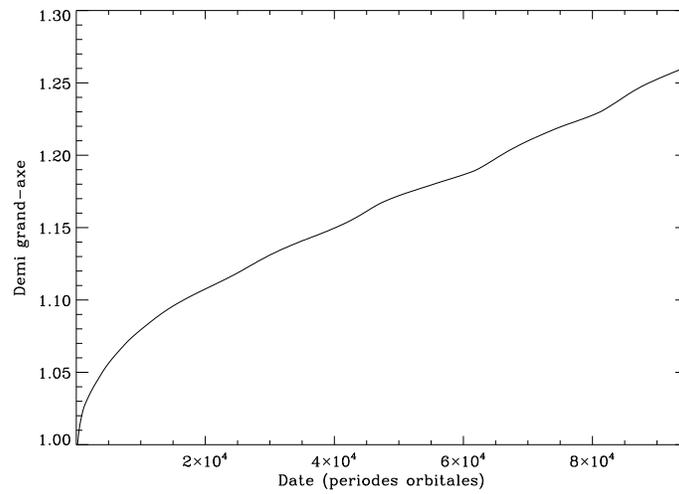


FIG. 6.2 – Evolution du demi grand-axe d’une protoplanète de masse saturnienne, dans un disque dans lequel le rapport d’aspect $h = H/r$ est donné par : $h = h_0[1 + (1 + \delta/\sqrt{\delta^2 + 1})/4]$, où $h_0 = 0.04$ et où $\delta = (r - a)/H$. Ainsi, le rapport d’aspect augmente de 50 % au travers de l’orbite, et la migration de la protoplanète s’effectue vers l’extérieur. Il s’agit ici d’une simulation 2D effectuée avec le code FARGO.

angulaire dans le disque circumplanétaire (qui est ici une enveloppe sphérique, en l'absence de rotation) ne se pose pas et biaise certainement les conclusions. On peut aussi remarquer que la probabilité d'avoir une masse finale de planète M_p est inversement proportionnelle à $\dot{M}_p(M_p)$, où le taux d'accrétion \dot{M}_p dépend de la masse de la planète M_p . Les deux prescriptions données ci-dessus donnent toutes les deux de taux d'accrétion considérables pour des planètes de masse saturnienne, aussi ces planètes devraient être peu courantes dans les systèmes extra-solaires. Ce n'est pas du tout le cas : on observe beaucoup de planètes géantes sous-joviennes, ce qui suggère qu'un processus vient limiter le taux d'accrétion (formation d'un disque circumplanétaire, dégagement d'énergie, etc.) On voit dès lors l'importance d'inclure du transfert radiatif, de préférence dans un code à grilles emboîtées permettant une haute résolution au voisinage de la planète, de manière à décrire correctement l'accrétion du gaz.

Transfert radiatif et migration de type I

Les processus de transfert radiatif peuvent avoir un rôle sur la migration de type I, ainsi que l'ont montré Jang-Condell et Sasselov (2005). Le travail de ces auteurs permet de montrer que la migration de type I est (marginale) affectée par les effets d'ombre et d'épaisseur verticale du disque. Menou et Goodman (2004) ont eux examinés l'impact des transitions d'opacité sur la position des résonances de Lindblad (dans la mesure où celles-ci sont décalées lorsque le gradient radial de pression est grand, qu'ils soit dû au gradient radial de densité de surface ou au gradient de température). Comme le couple différentiel est très sensible à ces positions, on obtient que le taux de migration peut être très nettement plus bas que celui obtenu dans un disque où la densité de surface et la température sont en loi de puissance. Naturellement, les calculs effectués par Menou et Goodman (2004) sont sujets à des approximations classiques pour l'évaluation analytique des couples de marée. Un code mixte d'hydrodynamique et transfert radiatif permettra de tester les prédictions de Menou et Goodman et d'évaluer le couple de marée au voisinage d'une transition d'opacité, et permettre d'avoir une idée précise des temps de migration des petits corps dans le disque. En outre, l'étude de Menou et Goodman néglige explicitement le couple de corotation, lequel est positif dans les disques envisagés par Menou et Goodman. Il est donc fort possible que l'on trouve des endroits dans le disque où la migration s'arrête.

Migration dans les disques radiativement inefficaces

L'immense majorité des travaux de migration planétaire contemplent ou bien un disque isotherme, ou bien un disque polytropique, sans gradient radial d'entropie, et ceci qu'il s'agisse de travaux numériques ou de travaux analytiques. Il n'y a à ceci que deux exceptions notables, que nous avons contemplées à la section 5.1.4 : celle de Morohoshi et Tanaka(2003) et celle de Paardekooper et Mellema(2006a). Ces derniers auteurs ont en particulier montré que si la température du disque est affectée par le flot au voisinage de la planète (c.-à-d. que le

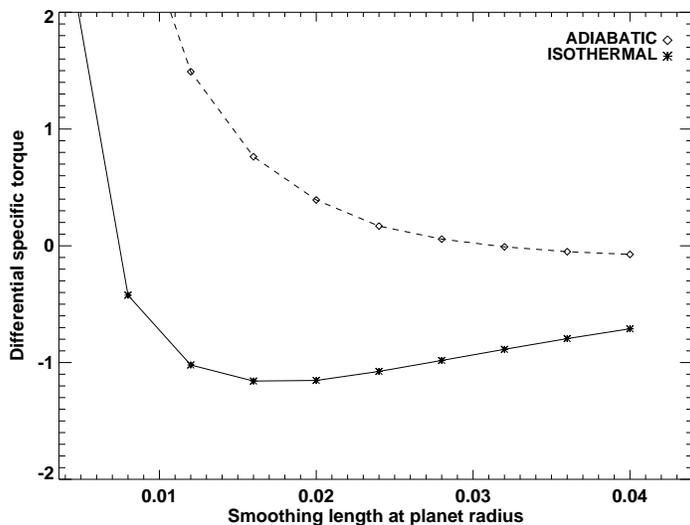


FIG. 6.3 – Couple normalisé (à la valeur donnée par Tanaka et al. 2002) exercé par un disque sur une protoplanète de masse $M_p = 5 M_\oplus$, dans un disque inviscide de densité de surface $\Sigma \propto r^{-1/2}$, et de rapport d’aspect $h = 0.05$, respectivement dans un disque isotherme et dans un disque adiabatique (après une fraction du temps de libration de la région fer-à-cheval). La longueur de lissage du potentiel peut être ici interprétée comme l’altitude d’une tranche de matière au-dessus du plan équatorial. On voit que la situation adiabatique favorise clairement un couple positif sur l’essentiel de l’épaisseur du disque.

temps de refroidissement du disque devient plus grand que le temps dynamique), alors le couple de marée peut devenir positif. La compréhension des effets en jeu est cruciale pour les scénarios de migration. Elle permettra de donner des critères pour l’annulation du couple de marée, qui nous permettront de savoir si la migration de type I doit s’arrêter quelque part ou continuer jusqu’à l’objet central. L’étude et la compréhension des mécanismes de migration dans un disque gazeux adiabatique constitue donc une clef de voûte pour les théories de migration planétaire. Aussi, cette étude constitue un autre volet de la thèse de doctorat de Clément Baruteau. Nous avons d’ores et déjà acquis une compréhension relativement fine du mécanisme dévoilé par Paardekooper et Mellema (2006a), qui donnera prochainement lieu à une publication. La figure 6.3 illustre certains de nos résultats, compatibles avec ceux de Paardekooper et Mellema (2006a).

6.4.2 MHD

Ainsi que nous l’avons vu aux sections 3.4 et 3.2, les processus MHD, et en particulier la turbulence MHD, peuvent jouer un rôle prépondérant sur la migration. Naturellement, l’inclusion de processus MHD dans un code de simulation

numérique est un art en soi, relativement éloigné des considérations de formation et migration planétaire. Toutefois, au Service d’Astrophysique nous disposons d’un groupe important et actif en simulations numériques, et des schémas MHD de type Godunov y ont été élaborés. Il s’agira d’adapter ceux-ci à des grilles cylindriques ou sphériques pour pouvoir décrire l’instabilité magnéto-rotationnelle dans un disque protoplanétaire. Il y aura alors une pléthore de thèmes à explorer, dont les sections suivantes donnent un aperçu.

Migration dans la zone morte

La zone morte, mentionnée à la section 3.4, est une zone où le taux d’ionisation de la matière est insuffisant pour assurer un couplage de la matière et du champ magnétique. Elle est prise en sandwich entre deux couches externes qui sont elles magnétiquement active. La dynamique de la zone morte (en particulier l’ampleur de la turbulence résiduelle) et *a fortiori* son rôle sur la migration planétaire sont encore très mal connus. En particulier on peut se poser la question de la migration de type II dans une telle région : pratiquement inviscide, la zone morte doit donner lieu à des sillons très profonds et une migration très lente dans la zone morte. On peut aussi s’interroger sur les caractéristiques de la migration des objets de petite masse : la faible turbulence résiduelle au sein de la zone morte doit donner lieu à une composante stochastique du couple de marée, laquelle doit induire une marche au hasard des tout petits corps. Toutefois, on doit tendre vers une migration systématique, de type I, pour des masses de cœurs beaucoup plus faibles qu’en migration stochastique dans un disque pleinement turbulent.

Piégeage des embryons au bord interne de la zone morte

Le bord interne de la zone morte correspond à une transition entre une région de faible viscosité effective (dans la zone morte) et une zone de viscosité effective plus élevée (en deçà de cette zone). On doit donc y observer un saut de densité surfacique (cette dernière étant plus élevée à l’extérieur), en proportion inverse du saut de viscosité effective. Ce saut de densité surfacique constitue un piège à planètes, ainsi que l’ont montré Masset et al. (2006b). Toutefois, leur étude du piège à planète, même si elle prend en compte de manière simplifiée les considérations liées aux fluctuations de couple en disque turbulent, reste une étude simplifiée 2D conservatrice (le coefficient de lissage du potentiel est très grand, ce qui coupe considérablement l’effet recherché). Il serait très intéressant d’évaluer l’efficacité du mécanisme dans un cas tridimensionnel (cette efficacité serait certainement accrue, puisque le couple de corotation — responsable du mécanisme — ne serait pas atténué par le lissage), et en tenant compte de la faible turbulence résiduelle qui doit régner au bord interne de la zone morte (cette turbulence est requise pour éviter une saturation du couple de corotation). En outre, ces simulations permettraient de s’attaquer à un problème qui n’a pas reçu jusqu’à ce jour de réponse satisfaisante : le devenir d’un ensemble d’embryons piégés au bord interne. Masset et al. (2006b) spéculent que plusieurs

cœurs piégés pourraient conduire à la formation d’un cœur de planète géante en un temps plus court que celui traditionnellement requis pour un cœur isolé. Terquem et Papaloizou (Terquem et Papaloizou, 2007) prétendent au contraire que les effets de scattering entre cœurs vont vider le piège des embryons qu’il contient. Enfin, Morbidelli (priv. comm.) trouve un scénario intermédiaire dans lequel la plupart des cœurs sont effectivement éjectés vers l’intérieur et poursuivent leur migration de type I vers l’objet central, tandis qu’un cœur est retenu au piège et maintient dans le disque externe quelques cœurs verrouillés en résonance de moyen mouvement. Toutefois ce scénario a de grandes chances d’être modifié si l’on prend en compte la légère stochasticité qui règne au bord interne de la zone morte, qui devrait permettre aux embryons de sortir des résonances et de subir des collisions non destructrices. De telles simulations sont particulièrement coûteuses en temps de calcul (puisque les processus envisagés sont lents : piégeages, rencontres proches, sortie de résonance, etc., et puisque la physique nécessaire est complexe – MHD 3D –). En soi, leur réalisation constitue un challenge, mais elles apporteront certainement beaucoup à notre connaissance de la formation des cœurs de planètes géantes.

Connexion jet–migration ; piège à planètes

Dans une veine similaire à ce qui a été décrit à la section précédente, on peut envisager un piège à planète à la transition entre un disque d’accrétion standard (SAD, externe) et un disque émettant un jet (JED, interne). Dans ce dernier, le couple magnétique est tel que la dérive vers l’étoile de la matière est beaucoup plus rapide que dans le SAD. Il s’ensuit une chute de densité surfacique qui agit, comme précédemment, comme un piège à planète. La description de ce problème est très numériquement exigeante, puisqu’il s’agit dans un premier temps de reproduire la configuration magnétique de l’interface SAD-JED. Il serait alors possible d’étudier en détail le devenir d’embryons piégés à la transition. Ici, ce qui permettrait aux embryons d’éviter de se retrouver piégés indéfiniment en résonance de moyen mouvement avec l’embryon piégé à la transition pourrait être la non-stationnarité de l’accrétion ou l’existence d’instabilité de type Rossby. Le scénario qui sortira de ce genre d’étude nous réserve certainement des surprises, car il comporte beaucoup d’inconnues. En tout état de cause, la jonction entre deux problèmes initialement si différents (celui des jets et de la configuration magnétique associée, et celui de la migration planétaire) est un thème fascinant, qui apportera sans aucun doute des éléments nouveaux à notre compréhension de la formation des systèmes planétaires.

6.4.3 Poussières

La poussière, dans les disques protoplanétaires, bien que négligeable en masse (au plus un pourcent de la masse du gaz), joue un rôle de premier plan à plusieurs égards. Tout d’abord, c’est essentiellement elle qui émet un rayonnement thermique et qui confère au disque sa température d’équilibre. Ensuite, c’est elle que l’on voit en continuum lorsque l’on observe le disque (en millimétrique).

À ce titre, il est intéressant s’attacher à l’étude de la dynamique des poussières et de voir en quoi elle est différente de celle du gaz. Nous mentionnons ci-après deux études possibles, liée pour l’une à la détection de cavités internes dans les disques protoplanétaires, et pour l’autre à la dynamique des poussières au voisinage d’un sillon.

Cavité interne

Les récents progrès de l’interférométrie dans l’infrarouge proche ont permis de mesurer les tailles d’objets entourant les étoiles T Tauri les plus brillantes (Millan-Gabet et al., 2007; Lachaume et al., 2003), et ont permis de montrer que ces dernières possèdent vraisemblablement une cavité interne, contenant du gaz mais vide de poussières, et qui est radialement optiquement mince au rayonnement de l’étoile (ceci peut être vrai pour les étoiles de Herbig AeBe, et l’est certainement pour les T Tauri, car il y a a priori moins de gaz dans la cavité, et le rayonnement de l’étoile est de plus grande longueur d’onde). Ce rayonnement arrive à l’endroit du disque où la température est également à 1500 K, qui est la température de sublimation des silicates. À cet endroit, on a un mur de poussières chauffées sous incidence normale par le rayonnement de l’étoile. Le rayon estimé de cette cavité, pour les étoiles de type T Tauri, est d’environ $r = 0.1$ U.A. Le profil radial de température et de densité de surface du gaz à cet endroit du disque reste à déterminer, mais il pourrait se comporter comme un piège à planète. À ce titre Masset et al. (2006b) affirment qu’une transition de température d’un facteur 2 sur quelques échelles de hauteur pourrait jouer le rôle d’un piège à planètes, à l’instar d’une transition de densité de surface. Il serait donc intéressant de déterminer le rôle de cette cavité de poussière sur la migration planétaire, ainsi que son devenir à long terme (augmentation du rayon, stabilisation, etc.), puisqu’elle pourrait contraindre les planètes incidentes à suivre son évolution.

Déteçtabilité des sillons avec ALMA

(Wolf et al., 2002) ont montré qu’un sillon ouvert dans un disque par une planète géante à 5 U.A. seraient en principe déteçtable avec ALMA. Pour leur étude, ces auteurs ont utilisé des simulations hydrodynamiques et ont supposé que la poussière trace le gaz. En fait, les sillons offrent un bien meilleur contraste en poussières que dans le gaz. Ceci a été démontré par Paardekooper et Mellema (2006b), qui ont montré qu’une masse de planète bien inférieure à $1 M_J$ était requise pour ouvrir un sillon dans la poussière. En revanche, la visibilité de tels sillons avec ALMA n’a pas encore été étudiée. Il serait donc très intéressant d’étudier la déteçtabilité des planètes avec ALMA par les traces qu’elles laissent dans la poussière.

Chapitre 7

Liste des publications

7.1 Publication dans des revues arbitrées

1. Crida, A., Morbidelli, A., **Masset, F.**, *Simulating planet migration in globally evolving disks*, 1/2007 *Astronomy and Astrophysics*, 461, 1173-1183
2. **Masset, F. S.**, D'Angelo, G., Kley, W., *On the Migration of Protoplanet Solid Cores*, 11/2006 *Astrophysical Journal*, 652, 730-745
3. de Val-Borro, M., Edgar, R. G., Artymowicz, P., Cieliegielag, P., Cresswell, P., D'Angelo, G., Delgado-Donate, E. J., Dirksen, G., Fromang, S., Gwryszczak, A., Klahr, H., Kley, W., Lyra, W., **Masset, F.**, Mellema, G., Nelson, R. P., Paardekooper, S.-J., Peplinski, A., Pierens, A., Plewa, T., Rice, K., Schäfer, C., Speith, R., *A comparative study of disc-planet interaction*, 8/2006 *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 370, 529-558
4. **Masset, F. S.**, Morbidelli, A., Crida, A., Ferreira, J., *Disk Surface Density Transitions as Protoplanet Traps*, 5/2006 *Astrophysical Journal*, 642, 478-487
5. Crida, A., Morbidelli, A., **Masset, F.**, *On the width and shape of gaps in protoplanetary disks*, 4/2006 *Icarus*, 181, 587-604
6. Duc, P.-A., Bournaud, F., **Masset, F.**, *A top-down scenario for the formation of massive Tidal Dwarf Galaxies*, 12/2004 *Astronomy and Astrophysics*, 427, 803-814
7. **Masset, F. S.**, Ogilvie, G. I., *On the Saturation of Corotation Resonances : A Numerical Study*, 11/2004 *Astrophysical Journal*, 615, 1000-1010
8. Bournaud, F., Duc, P.-A., **Masset, F.**, *The large extent of dark matter haloes probed by the formation of tidal dwarf galaxies*, 12/2003 *Astronomy and Astrophysics*, 411, L469-L472

9. **Masset, F. S.**, Papaloizou, J. C. B., *Runaway Migration and the Formation of Hot Jupiters*, 5/2003 *Astrophysical Journal*, 588, 494-508
10. **Masset, F. S.**, Bureau, M., *On the Spiral Structure of NGC 2915 and Dark Matter*, 3/2003 *Astrophysical Journal*, 586, 152-169
11. **Masset, F. S.**, *The co-orbital corotation torque in a viscous disk : Numerical simulations*, 5/2002 *Astronomy and Astrophysics*, 387, 605-623
12. **Masset, F. S.**, *On the Co-orbital Corotation Torque in a Viscous Disk and Its Impact on Planetary Migration*, 9/2001 *Astrophysical Journal*, 558, 453-462
13. **Masset, F.**, Snellgrove, M., *Reversing type II migration : resonance trapping of a lighter giant protoplanet*, 2/2001 *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 320, L55-L59
14. Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., **Masset, F.**, *Orbital eccentricity growth through disc-companion tidal interaction*, 1/2001 *Astronomy and Astrophysics*, 366, 263-275
15. Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., **Masset, F.**, Kley, W., *The migration and growth of protoplanets in protostellar discs*, 10/2000 *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 318, 18-36
16. **Masset, F.**, *FARGO : A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks*, 1/2000 *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 141, 165-173
17. **Masset, F.**, Tagger, M., *Non-linear coupling of spiral waves in disk galaxies : a numerical study.*, 6/1997 *Astronomy and Astrophysics*, 322, 442-454
18. **Masset, F.**, Tagger, M., *Non-linear generation of WARPS by spiral waves in galactic disks.*, 2/1997 *Astronomy and Astrophysics*, 318, 747-767
19. **Masset, F.**, Tagger, M., *Propagation of WARPS in moderately thick disks.*, 3/1996 *Astronomy and Astrophysics*, 307, 21-

7.2 Liste des publications non arbitrées

1. Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., Kley, W., Masset, F. S., Artymowicz, P., *Disk-Planet Interactions During Planet Formation*, 0/2007 *Protostars and Planets V*, 655-668
2. Crida, A., Morbidelli, A., Masset, F., *Type II Migration and Cavity Opening in Protoplanetary Disks*, 9/2006 *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, 38, 63.05-
3. Baruteau, C., Masset, F., *On the impact of disk gravity on planetary migration*, 6/2006 *SF2A-2006 : Semaine de l'Astrophysique Francaise*, 569-
4. Masset, F., Kley, W., *Disk-planet interaction and migration*, 5/2006 *Planet Formation*, 216-

5. Crida, A., Masset, F., Morbidelli, A., Coupling 1D and 2D grids to compute global evolution of protoplanetary disks with embedded planets, 12/2005 SF2A-2005 : Semaine de l'Astrophysique Francaise, 747-
6. Crida, A., Morbidelli, A., Masset, F., Gaps in protoplanetary disks : the role of pressure, 12/2005 SF2A-2005 : Semaine de l'Astrophysique Francaise, 153-
7. Morbidelli, A., Crida, A., Masset, F., Preventing Type II Migration of Jupiter and Saturn, 8/2005 Bulletin of the American Astronomical Society, 37, 667-
8. Crida, A., Morbidelli, A., Masset, F., Beating Migration During Giant Planet Accretion : A Plausible Scenario, 0/2005 Protostars and Planets V, 8021-
9. Masset, F. S., Bureau, M., Rotating Halos and Heavy Disks : The Case of NGC 2915, 7/2004 Dark Matter in Galaxies, 220, 293-
10. Duc, P.-A., Bournaud, F., Masset, F. S., Identifying old Tidal Dwarf Galaxies in Simulations and in the Nearby Universe, 6/2004 Recycling Intergalactic and Interstellar Matter, 217, 550-
11. Masset, F. S., Bureau, M., Rotating Halos and Heavy Disks : the Case of NGC 2915, 6/2004 Recycling Intergalactic and Interstellar Matter, 217, 172-
12. Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., Masset, F., Orbital Eccentricity Growth through Disc-Companion Tidal Interactions, 0/2004 Planetary Systems in the Universe, 202, 226-
13. Masset, F. S., Snellgrove, M. D., Reversing type II migration : resonance trapping of a lighter giant protoplanet, 0/2004 Planetary Systems in the Universe, 202, 211-
14. Masset, F. S., Bureau, M., On the Spiral Structure of NGC 2915, 12/2002 Disks of Galaxies : Kinematics, Dynamics and Perturbations, 275, 49-56
15. Bureau, M., Masset, F. S., On the Spiral Structure of NGC2915 and Dark Matter, 12/2002 Bulletin of the American Astronomical Society, 34, 1118-
16. Masset, F., Snellgrove, M., Reversing type II migration : resonance trapping of a lighter giant protoplanet, 1/2001 ArXiv Astrophysics e-prints, arXiv :astro-ph/0101332-
17. Masset, F. S., FARGO : A Fast Eulerian Transport Algorithm for Differentially Rotating Disks, 0/2000 Disks, Planetesimals, and Planets, 219, 75-
18. Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., Masset, F. S., Kley, W., The Evolution of Giant Protoplanets in Protostellar Disks (Contributed Talk), 0/2000 Disks, Planetesimals, and Planets, 219, 31-
19. Masset, F., Tagger, M., Dynamics of the asymmetries at galactic centers, 0/1998 The Central Regions of the Galaxy and Galaxies, 184, 275-

20. Ungerechts, H., Kramer, C., Lefloch, B., Leon, S., Masset, F., Moreno, R., Paubert, G., Reynaud, D., Sievers, A., Wild, W., Millimeter Continuum Monitoring of Extragalactic Radio Sources with the IRAM 30m Telescope, 0/1998 IAU Colloq. 164 : Radio Emission from Galactic and Extragalactic Compact Sources, 144, 149-
21. Masset, F., Tagger, M., Non-Linear Excitation of WARPS by Spiral Waves in Galaxies, 0/1996 IAU Colloq. 157 : Barred Galaxies, 91, 363-
22. Despois, D., Masset, F., Andre, P., Baudry, A., Montmerle, T., Cabrit, S., Snapshot Observations of Circumstellar Material Around Young Stellar Objects, 0/1994 IAU Colloq. 140 : Astronomy with Millimeter and Submillimeter Wave Interferometry, 59, 272-

Chapitre 8

Curriculum Vitae

Curriculum Vitae

Frédéric Masset

Né le 08 décembre 1970, à Limoges (87).

Marié à Liliana Pardo Lopez, de nationalité mexicaine.

Un enfant (Marianne, trois ans).

Nationalité : française.

Adresses professionnelles :

Service d'Astrophysique, bât 709
Orme des Merisiers
CE-Saclay
91191 Gif-sur-Yvette Cedex
France
+33 – 1 69 08 18 21

Cubiculo 207
Instituto de Astronomia
UNAM
Apartado postal 70-264
Mexico D.F., CP 04510,
Mexique

fmasset@cea.fr

Téléphone permanent : +33 870 448 254

Education et expériences professionnelles, par ordre chronologique :

Intitulé	Période	Commentaire
Classes préparatoires au Lycée Gay Lussac (Limoges)	Année scolaire 1988-89 Année scolaire 1989-90	Math. Sup. Math. Spé P'.
Intégration ENS Paris	Septembre 1990	Concours B (Physique-Chimie), rang 1.
Scolarité ENS Paris	09-1990 à 09-1994	
Magistère Interuniversitaire de Physique (MIP)	09-1990 à 07-1993	Mention TB
Stage MIP à l'Observatoire de Bordeaux, sous la direction de Didier Despois.	01-1992 à 07-1992	Dépouillement d'observations réalisées avec l'interféromètre millimétrique du Plateau de Bure.
DEA d'Astrophysique et Techniques Spatiales (Meudon – Paris 7)	09-1992 à 07-1993	Mention TB
Agrégation de Sciences Physiques, spécialité Physique	Juin-juillet 1993	Admis, rang 7.
Doctorat d'Astrophysique et Techniques Spatiales, au Service d'Astrophysique du CE-Saclay, sous la direction de Michel Tagger.	Octobre 1993 à Novembre 1997	<i>Entrecoupé par une coopération VSNA à l'IRAM.</i> Titre « Couplage non-linéaire dans les disques galactiques : le lien spirales-gauchissement ». Mention TB avec félicitations du jury.
Coopération VSNA à l'Institut de Radio Astronomie Millimétrique	Décembre 1995 à Avril 1997	Poste d'astronome support à l'antenne de 30 m de l'IRAM (Pico Veleta, Grenade, Espagne).

IUFM et enseignement de Physique-Chimie en classe de Seconde	Année scolaire 1997-1998	IUFM d'Antony et Lycée les Tourelles à Sarcelles (95).
Séjour de recherche post-doctoral à l' <i>Astronomy Unit</i> au <i>Queen Mary & Westfield College</i> , à Londres, dans le groupe de John Papaloizou	Septembre 1998 à septembre 2000	Bourse TMR de l'Union Européenne. Mise en disponibilité pour convenance personnelle de l'Education Nationale française.
Visite au Max Planck Institut für Astrophysik, Garching.	Octobre 2000 à Décembre 2000.	Bourse TMR de l'Union Européenne.
Ingénieur chercheur (CDI) au Service d'Astrophysique du CE-Saclay	Depuis le 22 janvier 2001	
Chercheur visiteur à l'Institut d'Astronomie de l'Université Nationale Autonome du Mexique (UNAM)	Depuis le 1 ^{er} juin 2004	Visiteur à temps partiel.

Encadrement d'étudiants

Janvier 2004 à juin 2004 : direction du stage de DEA d'Astrophysique et Techniques Spatiales (Paris 7) de Gilles Ferrand, sur le thème « Couple de marée disque-protoplanète : étude numérique ».

Janvier 2005 à juin 2005 : direction du stage de DEA Dynamique des Systèmes Gravitationnels (Observatoire de Paris) de Clément Baruteau, sur le thème « Simulations 3D de la migration de type III ».

Depuis octobre 2005 : direction de la thèse de doctorat de Clément Baruteau, effectuée au Service d'Astrophysique du CE-Saclay sous Contrat de Formation à la Recherche, sur le thème « Simulations numériques de la migration planétaire dans les disques auto-gravitants ».

Expériences d'enseignement

Outre l'enseignement en classe de seconde en 1997-98 et la formation en IUFM (correspondant au stage d'agrégation) mentionnés ci-dessus :

Préparateur (colleur) en classes préparatoires (Math. Sup, Math Spé. P, P' et bio), 4h par semaine, en 1993-1995.

Travaux dirigés de Mathématiques (2h par semaine) au Queen Mary & Westfield College, en 1998-2000.

Auteur de deux livres d'exercices corrigés de Physique-Chimie (parascolaire), respectivement pour classes de Seconde et Terminale S, dans la collection « Les Interros des Lycées », publiés par Nathan.

En 2004, 2005 et 2006 : cours de post-DEA de l'Ecole Doctorale d'Astrophysique et Techniques Spatiales d'Ile de France, 15h par an, sur « Les interactions disque-planètes et migration planétaire ».

Intérêts de recherche

Formation planétaire et interactions disque-planète.
Simulations numériques hydrodynamiques et calcul parallèle.
Astrophysique des disques en général.

Chapitre 9

Bibliographie

- Alibert, Y., Mordasini, C., Benz, W., et Winisdoerffer, C. : 2005, *A&A* **434**, 343
- Artymowicz, P. : 1993a, *ApJ* **419**, 166
- Artymowicz, P. : 1993b, *ApJ* **419**, 155
- Balbus, S. A. et Hawley, J. F. : 1991, *ApJ* **376**, 214
- Balmforth, N. J. et Korycansky, D. G. : 2001, *MNRAS* **326**, 833
- Bate, M. R., Lubow, S. H., Ogilvie, G. I., et Miller, K. A. : 2003, *MNRAS* **341**, 213
- Boss, A. P. : 2005, *ApJ* **629**, 535
- Bryden, G., Chen, X., Lin, D. N. C., Nelson, R. P., et Papaloizou, J. C. B. : 1999, *ApJ* **514**, 344
- Cieciela, P., Plewa, T., et Różycka, M. : 2000, *Astronomische Nachrichten* **321**, 171
- Crida, A., Morbidelli, A., et Masset, F. : 2006a, *Icarus* **181**, 587
- Crida, A., Morbidelli, A., et Masset, F. : 2006b, *ArXiv Astrophysics e-prints*, *Accepted for publication in A&A*
- Daisaka, J. K., Tanaka, H., et Ida, S. : 2006, *Icarus* **185**, 492
- D'Alessio, P., Canto, J., Calvet, N., et Lizano, S. : 1998, *ApJ* **500**, 411
- D'Angelo, G., Bate, M. R., et Lubow, S. H. : 2005, *MNRAS* **358**, 316
- D'Angelo, G., Henning, T., et Kley, W. : 2002, *A&A* **385**, 647
- D'Angelo, G., Henning, T., et Kley, W. : 2003a, *ApJ* **599**, 548
- D'Angelo, G., Kley, W., et Henning, T. : 2003b, *ApJ* **586**, 540
- de Val-Borro, M., Edgar, R. G., Artymowicz, P., Cieciela, P., Cresswell, P., D'Angelo, G., Delgado-Donate, E. J., Dirksen, G., Fromang, S., Gawryszczak, A., Klahr, H., Kley, W., Lyra, W., Masset, F., Mellema, G., Nelson, R. P., Paardekooper, S.-J., Peplinski, A., Pierens, A., Plewa, T., Rice, K., Schäfer, C., et Speith, R. : 2006, *MNRAS* pp 695–+
- Dubrulle, B., Marié, L., Normand, C., Richard, D., Hersant, F., et Zahn, J.-P. : 2005, *A&A* **429**, 1
- Foglizzo, T. : 2002, *A&A* **392**, 353
- Foglizzo, T., Galletti, P., et Ruffert, M. : 2005, *A&A* **435**, 397

- Foglizzo, T. et Tagger, M. : 2000, *A&A* **363**, 174
- Ford, E. B., Havlickova, M., et Rasio, F. A. : 2001, *Icarus* **150**, 303
- Fromang, S. et Nelson, R. P. : 2006, *ArXiv Astrophysics e-prints*
- Fromang, S., Terquem, C., et Balbus, S. A. : 2002, *MNRAS* **329**, 18
- Fromang, S., Terquem, C., et Nelson, R. P. : 2005, *MNRAS* **363**, 943
- Gammie, C. F. : 1996, *ApJ* **457**, 355
- Gladman, B. : 1993, *Icarus* **106**, 247
- Goldreich, P. et Sari, R. : 2003, *ApJ* **585**, 1024
- Goldreich, P. et Tremaine, S. : 1979, *ApJ* **233**, 857
- Goldreich, P. et Tremaine, S. : 1980, *ApJ* **241**, 425
- Goodman, J. et Rafikov, R. R. : 2001, *ApJ* **552**, 793
- Haisch, Jr., K. E., Lada, E. A., et Lada, C. J. : 2001, *ApJ* **553**, L153
- Hawley, J. F. et Balbus, S. A. : 1991, *ApJ* **376**, 223
- Hawley, J. F. et Balbus, S. A. : 1992, *Bulletin of the American Astronomical Society* **24**, 1234
- Holman, M., Touma, J., et Tremaine, S. : 1997, *Nature* **386**, 254
- Jang-Condell, H. et Sasselov, D. D. : 2005, *ApJ* **619**, 1123
- Johansen, A., Henning, T., et Klahr, H. : 2006, *ApJ* **643**, 1219
- Johnson, E. T., Goodman, J., et Menou, K. : 2006, *ArXiv Astrophysics e-prints*
- Klahr, H. et Kley, W. : 2006, *A&A* **445**, 747
- Klahr, H. H. et Bodenheimer, P. : 2003, *ApJ* **582**, 869
- Kley, W. : 1999, *MNRAS* **303**, 696
- Kley, W. : 2000, *MNRAS* **313**, L47
- Kley, W., Lee, M. H., Murray, N., et Peale, S. J. : 2005, *A&A* **437**, 727
- Kley, W., Peitz, J., et Bryden, G. : 2004, *A&A* **414**, 735
- Koller, J., Li, H., et Lin, D. N. C. : 2003, *ApJ* **596**, L91
- Korycansky, D. G. et Papaloizou, J. C. B. : 1996, *ApJS* **105**, 181
- Lachaume, R., Malbet, F., et Monin, J.-L. : 2003, *A&A* **400**, 185
- Laughlin, G., Steinacker, A., et Adams, F. C. : 2004, *ApJ* **608**, 489
- LeVeque, R. J. : 1998, *J. Comput. Phys.* **146**, 346
- Li, H., Colgate, S. A., Wendroff, B., et Liska, R. : 2001, *ApJ* **551**, 874
- Li, H., Finn, J. M., Lovelace, R. V. E., et Colgate, S. A. : 2000, *ApJ* **533**, 1023
- Lin, D. N. C., Bodenheimer, P., et Richardson, D. C. : 1996, *Nature* **380**, 606
- Lin, D. N. C. et Papaloizou, J. : 1979, *MNRAS* **186**, 799
- Lin, D. N. C. et Papaloizou, J. : 1986a, *ApJ* **307**, 395
- Lin, D. N. C. et Papaloizou, J. : 1986b, *ApJ* **309**, 846
- Lin, D. N. C. et Papaloizou, J. C. B. : 1993, in E. H. Levy et J. I. Lunine (eds.), *Protostars and Planets III*, pp 749–835
- Lovelace, R. V. E., Li, H., Colgate, S. A., et Nelson, A. F. : 1999, *ApJ* **513**, 805
- Lubow, S. H. et D'Angelo, G. : 2006, *ApJ* **641**, 526
- Lubow, S. H., Seibert, M., et Artymowicz, P. : 1999, *ApJ* **526**, 1001
- Masset, F. : 2000, *A&AS* **141**, 165
- Masset, F. et Snellgrove, M. : 2001, *MNRAS* **320**, L55+
- Masset, F. S. : 2001, *ApJ* **558**, 453
- Masset, F. S. : 2002, *A&A* **387**, 605
- Masset, F. S., D'Angelo, G., et Kley, W. : 2006a, *ApJ* **652**, 730

- Masset, F. S., Morbidelli, A., Crida, A., et Ferreira, J. : 2006b, *ApJ* **642**, 478
- Masset, F. S. et Ogilvie, G. I. : 2004, *ApJ* **615**, 1000
- Masset, F. S. et Papaloizou, J. C. B. : 2003, *ApJ* **588**, 494
- Mayor, M., Queloz, D., Marcy, G., Butler, P., Noyes, R., Korzennik, S., Krockenberger, M., Nisenson, P., Brown, T., Kennelly, T., Rowland, C., Horner, S., Burki, G., Burnet, M., et Kunzli, M. : 1995, *IAU Circ.* **6251**, 1
- Mazeh, T., Krymolowski, Y., et Rosenfeld, G. : 1997, *ApJ* **477**, L103+
- Menou, K. et Goodman, J. : 2004, *ApJ* **606**, 520
- Meyer-Vernet, N. et Sicardy, B. : 1987, *Icarus* **69**, 157
- Millan-Gabet, R., Malbet, F., Akeson, R., Leinert, C., Monnier, J., et Waters, R. : 2007, in B. Reipurth, D. Jewitt, et K. Keil (eds.), *Protostars and Planets V*, pp 539–554
- Morohoshi, K. et Tanaka, H. : 2003, *MNRAS* **346**, 915
- Murray, C. D. et Dermott, S. F. : 2000, *Solar System Dynamics*, Solar System Dynamics, by C.D. Murray and S.F. Dermott. ISBN 0521575974. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2000.
- Narayan, R., Goldreich, P., et Goodman, J. : 1987, *MNRAS* **228**, 1
- Nelson, A. F. et Benz, W. : 2003a, *ApJ* **589**, 556
- Nelson, A. F. et Benz, W. : 2003b, *ApJ* **589**, 578
- Nelson, R. P. : 2005, *A&A* **443**, 1067
- Nelson, R. P. et Papaloizou, J. C. B. : 2002, *MNRAS* **333**, L26
- Nelson, R. P. et Papaloizou, J. C. B. : 2003, *MNRAS* **339**, 993
- Nelson, R. P. et Papaloizou, J. C. B. : 2004, *MNRAS* **350**, 849
- Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., Masset, F. S., et Kley, W. : 2000, *MNRAS* **318**, 18
- Ogilvie, G. I. : 2001, *MNRAS* **325**, 231
- Ogilvie, G. I. et Lubow, S. H. : 2002, *MNRAS* **330**, 950
- Ogilvie, G. I. et Lubow, S. H. : 2003, *ApJ* **587**, 398
- Paardekooper, S. . et Mellema, G. : 2006a, *ArXiv Astrophysics e-prints*
- Paardekooper, S.-J. et Mellema, G. : 2006b, *A&A* **453**, 1129
- Pandolfi, M. et D'Ambrosio, D. : 2001, *JCP* **166**, 271
- Papaloizou, J. et Lin, D. N. C. : 1984, *ApJ* **285**, 818
- Papaloizou, J. C. B. : 2002, *A&A* **388**, 615
- Papaloizou, J. C. B. : 2005, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **91**, 33
- Papaloizou, J. C. B. et Larwood, J. D. : 2000, *MNRAS* **315**, 823
- Papaloizou, J. C. B. et Nelson, R. P. : 2005, *A&A* **433**, 247
- Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., Kley, W., Masset, F. S., et Artymowicz, P. : 2006, *ArXiv Astrophysics e-prints*
- Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., et Snellgrove, M. D. : 2004a, *MNRAS* **350**, 829
- Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., et Snellgrove, M. D. : 2004b, *MNRAS* **350**, 829
- Pierens, A. et Huré, J.-M. : 2005, *A&A* **433**, L37
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J. J., Podolak, M., et Greenzweig, Y. : 1996, *Icarus* **124**, 62

- Rafikov, R. R. : 2002, *ApJ* **572**, 566
- Rasio, F. A. et Ford, E. B. : 1996, *Science* **274**, 954
- Schäfer, C., Speith, R., Hipp, M., et Kley, W. : 2004, *A&A* **418**, 325
- Shakura, N. I. et Sunyaev, R. A. : 1973, *A&A* **24**, 337
- Snellgrove, M. D., Papaloizou, J. C. B., et Nelson, R. P. : 2001, *A&A* **374**, 1092
- Stone, J. M. et Norman, M. L. : 1992, *ApJS* **80**, 753
- Tanaka, H., Takeuchi, T., et Ward, W. R. : 2002, *ApJ* **565**, 1257
- Tanaka, H. et Ward, W. R. : 2004, *ApJ* **602**, 388
- Tanigawa, T. et Lin, D. N. C. : 2005, in *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 37 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pp 684–+
- Terquem, C. et Papaloizou, J. C. B. : 2007, *ApJ* **654**, 1110
- Terquem, C. E. J. M. L. J. : 2003, *MNRAS* **341**, 1157
- Thommes, E. W. : 2005, *ApJ* **626**, 1033
- Toomre, A. : 1969, *ApJ* **158**, 899
- Ward, W. R. : 1986, *Icarus* **67**, 164
- Ward, W. R. : 1988, *Icarus* **73**, 330
- Ward, W. R. : 1991, in *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, pp 1463–+
- Ward, W. R. : 1992, in *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, pp 1491–+
- Ward, W. R. : 1997, *Icarus* **126**, 261
- Ward, W. R. : 2003, in S. Mackwell et E. Stansbery (eds.), *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, pp 1736–+
- Winters, W. F., Balbus, S. A., et Hawley, J. F. : 2003, *ApJ* **589**, 543
- Wolf, S., Gueth, F., Henning, T., et Kley, W. : 2002, *ApJ* **566**, L97
- Ziegler, U. et Yorke, H. : 1997, *Computer Physics Communications* **101**, 54
- Zingale, M., Dursi, L. J., ZuHone, J., Calder, A. C., Fryxell, B., Plewa, T., Truran, J. W., Caceres, A., Olson, K., Ricker, P. M., Riley, K., Rosner, R., Siegel, A., Timmes, F. X., et Vladimirova, N. : 2002, *ApJS* **143**, 539

Chapitre 10

Sélection d'articles

FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks

F. Masset

School of Mathematical Sciences, Queen Mary & Westfield College, Mile End Road, London E1 4NS, UK

Received July 19; accepted October 20, 1999

Abstract. We present an efficient and simple modification of the standard transport algorithm used in explicit eulerian fixed polar grid codes, aimed at getting rid of the average azimuthal velocity when applying the Courant condition. This results in a much larger timestep than the usual procedure, and it is particularly well-suited to the description of a Keplerian disk where one is traditionally limited by the very demanding Courant condition on the fast orbital motion at the inner boundary. In this modified algorithm, the timestep is limited by the perturbed velocity and by the shear arising from the differential rotation. FARGO stands for “Fast Advection in Rotating Gaseous Objects”. The speed-up resulting from the use of the FARGO algorithm is problem dependent. In the example presented here, which shows the evolution of a Jupiter sized protoplanet embedded in a minimum mass protoplanetary nebula, the FARGO algorithm is about an order of magnitude faster than a traditional transport scheme, with a much smaller numerical diffusivity.

Key words: accretion — accretion disks — hydrodynamics — methods: numerical

1. Introduction

We want hereafter to model the hydrodynamical (HD) evolution of a disk described on a fixed polar eulerian grid. For the sake of simplicity we are only going to deal with a two dimensional Keplerian disk, but the algorithm can be extended with little additional effort to any gaseous thin or thick disk in differential rotation. Usually in this kind of numerical simulations the timestep is limited by the Courant Friedrich Levy (CFL) condition at the inner boundary, where the motion is fast and the cells are narrow. Indeed, the ratio of the distance swept by the

material in one timestep to the cell width must be lower than unity over the whole grid, otherwise a numerical instability occurs (i.e. non physical short-wavelength oscillations appear, grow exponentially and spoil the model). In a Keplerian disk this ratio (which we call hereafter the CFL ratio) decreases as $r^{-3/2}$. Since in most cases the “interesting region” of the grid is located much further than the grid inner boundary, the CFL ratio in the region of interest is much smaller than unity, which corresponds to a waste of computing time, and, as we are going to see below, to an enhanced undesirable numerical viscosity. The most obvious solution to get rid of such a limitation is to work in the comoving frame. Unfortunately, most finite-difference HD eulerian codes require an orthogonal system of coordinates (Stone & Norman 1992), which makes them unsuitable if one wants to work in the comoving frame in a differentially rotating disk, and even a non-orthogonal grid eulerian code would be unable to track accurately the fluid motion after a few orbits, due to the strong winding of the coordinate system. On the other hand, one can adopt a Lagrangian description of the disk (Whitehurst 1995), but the implementation is much more tricky and difficult. Furthermore, the geometry of an accretion disk provides a polar mesh as a natural grid. We describe hereafter a simple method which enables one to work on a fixed polar grid and to get rid of the CFL condition on the average azimuthal velocity at each radius.

2. Notations and standard method

We consider a polar grid composed of N_s sectors, each one $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N_s}$ wide, and N_r rings, with separations at radii $R_{i(0 \leq i \leq N_r)}$. The inner boundary is then located at the radius R_0 , and the outer one at the radius R_{N_r} . The density (and the internal energy if needed by the equation of state) is centered in the cells, and is denoted $(\Sigma_{ij})_{(i,j) \in [0, N_r - 1] \times [0, N_s - 1]}$. The radial velocity is denoted v_{ij}^r , and is considered centered in azimuth and half-centered in radius (applied at radius R_i ,

Send offprint requests to: F. Masset
e-mail: F.S.Masset@qmw.ac.uk

i.e. at the interface between the cells $[i, j]$ and $[i - 1, j]$). In a similar way, the azimuthal velocity is denoted v_{ij}^θ , and is considered centered in radius and half-centered in azimuth (i.e. at the interface between the cells $[i, j]$ and $[i, j - 1]$; throughout this paper the algebra on the j coordinate is meant in $Z/N_s Z$ to account for the periodicity in azimuth). Usually in a finite difference code the timestep is split in two main parts (Stone & Norman 1992). The first part is composed of eulerian substeps which consist in updating the HD quantities through the source terms in the evolution equations, and which include all the physical processes at work: pressure, gravity, viscosity, etc., and which can formally be described by the transformation $\xi \xrightarrow{E} \xi^a$, ξ being any HD field on the grid. The second part is the transport substep, in which the quantities are conservatively moved through the grid according to the flow $[(v_{ij}^r)^a, (v_{ij}^\theta)^a]$, and which can be formally represented as $\xi^a \xrightarrow{R} \xi^b \xrightarrow{T} \xi^+$, where ξ^+ denotes any HD field after a whole timestep is completed, and R and T denote respectively the radial and azimuthal transport operators, which can be alternated every other timestep. The CFL condition comes both from the source part and the transport part, and the most stringent restriction is given by the T -substep, due to the unperturbed azimuthal flow. Classically, the azimuthal transport can be written as:

$$\xi_{ij}^+ = \xi_{ij}^b + \frac{\Delta t}{\Delta y_i} \left(\xi_{ij}^{b,*/v^{\theta a}} v_{ij}^{\theta a} - \xi_{ij+1}^{b,*/v^{\theta a}} v_{ij+1}^{\theta a} \right) \quad (1)$$

where $\Delta y_i = \frac{R_i + R_{i+1}}{2} \Delta \theta$ is the ‘‘mean azimuthal width’’ of a cell. Equation (1) expresses the balance of the arbitrary conservative quantity ξ in the cell $[i, j]$ by computing the difference of its inflow at the $[i, j - 1]/[i, j]$ interface with the velocity $v_{ij}^{\theta a}$ and its outflow at the $[i, j + 1]/[i, j]$ interface with the velocity $v_{ij+1}^{\theta a}$. Actually we consider the flux of the upwinded interfacial quantity $\xi^{b,*/v^{\theta a}}$, where the ‘‘*/ $v^{\theta a}$ ’’ operator depends on the numerical method (donor cell, van Leer, PPA, see e.g. Stone & Norman 1992) and on the velocity field $v^{\theta a}$.

3. New azimuthal transport algorithm

3.1. Overview

Let us take as an example the angular momentum conservation equation:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial (v^\theta J)}{\partial \theta}}_{\text{azim. transport}} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial (r v^r J)}{\partial r}}_{\text{rad. transport}} = \text{Source terms} \quad (2)$$

where $J = \rho r v^\theta$. The transport equation of any HD quantity ξ will look the same as the L.H.S. of Eq. (2).

Now without loss of generality we can rewrite Eq. (2) as:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial [(v^\theta - u) J]}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \frac{\partial J}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v^r J)}{\partial r} = \text{Source terms} \quad (3)$$

where u can be any quantity which does not depend on θ . No assumption has been made on the behavior of J up to this point, and Eqs. (2) and (3) are strictly equivalent. If we take u to be the average azimuthal velocity \bar{v}^θ , then Eq. (3) can be described as a composition of different steps, and each of them can be worked out independently with the well-known operator splitting technique:

- a source step;
- a radial transport step;
- an azimuthal transport step with the velocity $v^\theta - \bar{v}^\theta$, which we are going to call the azimuthal *residual* velocity;
- and an additional step which corresponds to the following PDE:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\bar{v}^\theta}{r} \frac{\partial J}{\partial \theta} = 0. \quad (4)$$

It is an easy matter to check that the solution of this last equation can be written in a general way as:

$$J(\theta, t) = J \left(\theta - \frac{\int_0^t \bar{v}^\theta dt}{r}, 0 \right) \quad (5)$$

which means that the solution of this equation at any time t looks like the initial profile ($t = 0$), except for a shift $-\int_0^t \bar{v}^\theta dt/r$ in azimuth. It should be noted that this is true *whatever the profile of J* , which can even contain discontinuities (i.e. shocks). In particular *no assumption has to be made* on the linearity of the flow (i.e. on the relative amplitude of the perturbed quantities).

A qualitative reason of why such a decomposition is valid is that the time evolution of the HD quantities can be described either by an observer sitting on a ring of radius r which rotates at any instant in time with the average azimuthal velocity, or by an observer at rest in an inertial frame. Now the time evolution of the system is of course observer-independent, which is why their observations are reconciled through the simple shift described by Eq. (5).

The idea on which the FARGO algorithm is based on is precisely to evolve the HD quantities through operators which mimic in a discrete way the different terms of Eq. (3). The source step, the radial transport step and the residual azimuthal velocity transport step are performed in a standard way (see e.g. Stone & Norman 1992). Now the last step in the operator-splitting described above, which corresponds to a simple shift which amounts to be $\bar{v}^\theta \Delta t/r$ in one timestep, can be implemented in such a way that the matter can sweep an arbitrary number of cell widths in one timestep.

In order to lay down the basic mechanism by which FARGO works, let us take the following concrete example. We assume that, after the classical substeps (which are the source step, the radial transport and the residual azimuthal velocity transport), the material at a given radius r has to be shifted by 4.7 cells in one timestep (which means that $\bar{v}^\theta \Delta t/r \Delta \theta = 4.7$). What is actually done is

that 4.7 is decomposed as $4.7 = -0.3 + 5$, i.e. the nearest integer and a remainder which by construction is lower or equal to 0.5 in absolute value. In the first substep of this shift step the material is shifted by this remainder (here -0.3), which can be achieved through a classical transport method since the remainder is lower or equal to 0.5 in absolute value (it has to be ≤ 1 in order for the standard transport method to be possible), with the additional simplicity that the corresponding velocity field is uniform (which is actually why shift and transport happen to coincide in this special case, since there is no compression in the corresponding flow). The second substep just corresponds to an integer number of cells shift, which is done in our example simply by copying the content of cell j into cell $j + 5$, for any j .

A more formal and detailed description of the FARGO algorithm is given in the next section.

3.2. Mathematical formulation of each step of the FARGO algorithm

In the modified algorithm, the azimuthal transport substep is split in several parts. We assume that the timestep Δt has already been chosen, and defer discussion of the timestep constraints until Sect. 3.3. We first compute the average azimuthal velocity at each radius:

$$\bar{v}_i^\theta = \frac{1}{N_s} \sum_{j=0}^{N_s-1} v_{ij}^{\theta a}. \quad (6)$$

We then introduce the residual velocity: $v_{ij}^{\theta \text{res}} = v_{ij}^{\theta a} - \bar{v}_i^\theta$, and the “shift number” at each radius:

$$n_i = E \left[\frac{\bar{v}_i^\theta \Delta t}{\Delta y_i} \right] \quad (7)$$

where $E[X]$ denotes the nearest integer to the real X . We define the constant residual velocity to be:

$$v_i^{\theta \text{cr}} = \bar{v}_i^\theta - n_i \frac{\Delta y_i}{\Delta t}. \quad (8)$$

Hence the total velocity can be expressed as:

$$v_{ij}^{\theta a} = v_i^{\theta \text{SH}} + v_i^{\theta \text{cr}} + v_{ij}^{\theta \text{res}} \quad (9)$$

where the “shift velocity” $v_i^{\theta \text{SH}} = n_i \frac{\Delta y_i}{\Delta t}$ corresponds to a uniform shift of n_i cells over one timestep.

We first transport the HD quantities according to the flow $v^{\theta \text{res}}$:

$$\xi_{ij}^c = \xi_{ij}^b + \frac{\Delta t}{\Delta y_i} \left(\xi_{ij}^{b,*/v^{\theta \text{res}}} v_{ij}^{\theta \text{res}} - \xi_{ij+1}^{b,*/v^{\theta \text{res}}} v_{ij+1}^{\theta \text{res}} \right) \quad (10)$$

then to the uniform flow $v^{\theta \text{cr}}$:

$$\xi_{ij}^d = \xi_{ij}^c + \frac{\Delta t v_i^{\theta \text{cr}}}{\Delta y_i} \left(\xi_{ij}^{c,*/v^{\theta \text{cr}}} - \xi_{ij+1}^{c,*/v^{\theta \text{cr}}} \right). \quad (11)$$

We split the first part of the transport into two parts ($v^{\theta \text{res}}$ and $v^{\theta \text{cr}}$) instead of using a single transport step with the velocity $v^{\theta \text{res}} + v^{\theta \text{cr}}$, in order to ensure (as can be checked below given the timestep constraints) that in each of these transport substeps the material sweeps at most half a cell

(it could sweep up to one cell, but for reasons which will become clear in Sect. 4, we prefer to take a half cell limitation), and in order for the continuity considerations of Sect. 3.4 to apply. Finally, the quantities are transported along the $v^{\theta \text{SH}}$ uniform flow:

$$\xi_{ij}^+ = \xi_{ij-n_i}^d. \quad (12)$$

Only the first two parts of this transport step introduce some numerical diffusion. The last one, given by Eq. (12), which in many cases corresponds to the largest part of the motion, does not introduce any numerical error, since it just corresponds to a circular permutation of the grid cells, or in other words it is just an integer discrete version of the shift given by Eq. (5).

A precise quantification of the lower numerical diffusivity of FARGO is beyond the scope of this paper though. An extremely rough estimation can be done in the case of the comparison of a standard method (in which the effective CFL ratio is a sizable fraction of one) and a FARGO method for which $n_i \neq 0$. If we assume that numerical effects will behave in azimuth as a physical viscosity would do, then the effective numerical viscosity in FARGO is about n_i/C_0 times lower than the standard method’s one, where C_0 is the CFL standard dimensionless limitation factor, which is detailed in the next section. Nevertheless a variety of numerical experiments can be found below which all show that FARGO’s numerical diffusivity is smaller than the standard method’s.

3.3. Timestep limitation

In the standard transport method, the timestep limitation arises from the combination of four different constraints (see e.g. Stone & Norman 1992), namely the fact that a flow advected test particle in cell $[i, j]$ should not sweep a distance longer than Δy_i in azimuth nor longer than $R_{i+1} - R_i$ in radius over one timestep (which introduces the limit timestep δt_2 and δt_3 in Stone & Norman’s paper), and that the wavefront of any wave present in the system should not travel across a whole cell over one timestep (Richtmyer & Morton 1957), which corresponds to the limit timestep δt_1 in Stone & Norman’s paper. The last constraint comes from a stability limit arising from the viscosity (numerical or physical). With the modified azimuthal transport algorithm, the constraint on the azimuthal motion has to be modified slightly. Following Stone & Norman’s notation, instead of writing $\delta t_3^{ij} = \Delta y_i / v_{ij}^{\theta a}$, we write:

$$\delta t_3^{ij} = \frac{\Delta y_i}{v_{ij}^{\theta a} - \bar{v}_i^\theta} = \frac{\Delta y_i}{v_{ij}^{\theta \text{res}}} \quad (13)$$

which means that the timestep limitation comes now from the perturbed azimuthal velocity, which results in a much higher absolute value of δt_3 . Another limitation arises from the shear. Indeed we do not want the shear to

disconnect the two neighboring cells $[i, j]$ and $[i + 1, j]$ after one timestep. We write this condition as:

$$\delta t_{\text{shear}}^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{ij}^{\theta a}}{\Delta y_i} - \frac{v_{i+1j}^{\theta a}}{\Delta y_{i+1}} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Following Stone & Norman's notations, we finally adopt:

$$\Delta t = C_0 / \left\{ \max_{ij} \left[(\delta t_1^{ij})^{-2} + (\delta t_2^{ij})^{-2} + (\delta t_3^{ij})^{-2} + (\delta t_4^{ij})^{-2} + (\delta t_{\text{shear}}^{ij})^{-2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (15)$$

3.4. Continuity

At each timestep, N_r values of n_i (with $i \in [0, N_r - 1]$), used in Eq. (12), are computed using Eq. (7). These integer values scale roughly as $R_i^{-3/2}$. The shift on the central parts generally amounts to several cells over one timestep, while in the outer parts n_i is small, and possibly zero. One can wonder whether or not problems may arise at the radii R_i where $n_i \neq n_{i-1}$ (i.e. at radii where the azimuthal shift corresponding to the third substep of the transport step is discontinuous). More generally we want to examine the question of the continuity of ξ_{ij}^+ with respect to $\bar{v}_i^\theta \Delta t$. In order to check for this continuity, we assume $\bar{v}_i^\theta = (N + \frac{1}{2} + \epsilon) \frac{\Delta y_i}{\Delta t}$, where N is an integer, and we work out the behavior of $\xi_{ij}^+(\epsilon)$ in the vicinity of $\epsilon = 0$. Since we have to use the explicit form of the “*/ $v^{\theta a}$ ” operator, we adopt the van Leer algorithm (van Leer 1977), which is widely used. Some straightforward algebra leads to:

$$\begin{aligned} \xi_{ij}^+ &= \xi_{ij-N}^c - \epsilon \left(\xi_{ij-N}^c - \xi_{ij-N-1}^c \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{4} - \epsilon^2 \right) \frac{\Delta y_i}{2} (d\xi_{ij-N}^c - d\xi_{ij-N-1}^c) \end{aligned} \quad (16)$$

both for $\epsilon > 0$ and $\epsilon < 0$ provided $|\epsilon| < \frac{1}{2}$ and where the operator “ $d\xi$ ” is the van Leer slope. Equation (16) shows that the field ξ_{ij}^+ is a continuous function of ϵ and hence of \bar{v}_i^θ . In particular no special problem is to be expected from the discontinuities of n_i across the disk.

3.5. Operators swapping

As we said in Sect. 2, it is a common practice to alternate the radial R and azimuthal T transport operators every other timestep. In this modified algorithm, R should usually be applied first, unless the velocity field is updated just after applying the T operator from the new momenta and new density fields, or unless special care is devoted to the j indices. Indeed swapping blindly the R and T operators would result in moving radially the matter with the radial velocity it actually has $\sim n_i$ cells upwards, and would quickly end in a non-physical staggering everywhere $n_i \neq 0$.

4. Mono-dimensional tests

4.1. General considerations

In order to validate this modified transport algorithm, we present some 1D tests, and we compare the results of the standard method and of the FARGO method on a realistic test problem. We solve simultaneously the continuity and Navier Stokes equation for an isothermal gas (which has a non-vanishing but small kinematic viscosity):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (18)$$

We assume that at rest the system has a uniform density ρ_0 and sound speed c_s . The waves which can propagate in this system have the following dispersion relationship:

$$\begin{aligned} \omega &= \pm \sqrt{k^2 c_s^2 - \frac{k^4 \nu^4}{4}} - i \frac{k^2 \nu}{2} \\ \text{or: } \omega &= \pm k c_s - i \frac{k^2 \nu}{2} \quad \text{if } \nu \ll \nu_{\text{lim}} = \frac{2c_s}{k} \end{aligned} \quad (19)$$

which reduces to the standard dispersion relation for an undamped acoustic wave $\omega = \pm k c_s$ provided the system is evolved for a time small compared to the damping timescale $\tau = \frac{2}{\nu k^2}$. This will be the case for the results we are going to present below, so that any apparent damping of the waves has a numerical origin. We do the following:

1. We first analyze the propagation of a sound wave in the matter frame, i.e. we take as initial conditions:

$$\rho(x) = s \rho_0 \cos(kx) \quad \text{and} \quad v(x) = s c_s \cos(kx) \quad (20)$$

where s is the wave relative amplitude. The polarization adopted corresponds to a rightwards propagating wave. According to Eq. (19), it propagates with a phase velocity which is $\Re\left(\frac{\omega}{k}\right) = c_s$. We study this propagation with the standard transport algorithm (we are in the matter frame so there is no systematic average x -velocity, hence no need for a FARGO algorithm). We check that in this case the solution we get is accurate by varying the timestep and checking that the solution has converged.

2. We then turn to a case where the setup is slightly modified. We take:

$$\rho(x) = s \rho_0 \cos(kx) \quad \text{and} \quad v(x) = v_0 + s c_s \cos(kx) \quad (21)$$

where v_0 is a constant, which we choose much bigger than c_s (which would correspond to the conditions of a thin keplerian disk, for example). The evolution of the system from this setup ought to be the same as before, since it merely corresponds to the same physical situation, but described from a frame moving at a constant speed $-v_0$ wrt the first one, so one can invoke Galilean invariance to conclude that the wave profile evolution has to be the same. So any “good” algorithm should

approach as closely as possible the results of the matter frame simulations. We show that this is not quite the case with the standard transport method, which suffers from quite a high numerical dissipation, whereas FARGO behaves much better (not to mention its much faster execution). As a side result we also show that in this problem taking a CFL effective ratio (for the standard transport method) bigger than $\frac{1}{2}$ leads to an artificial and non-linear increase of the wave profile, and hence has to be avoided.

4.2. 1D numerical results

We deal with a 1D grid composed of $N_s = 200$ cells, with periodic boundary conditions. The cell width is $\Delta x = 0.0314$, the isothermal sound speed is $c_s = 0.04$. The equilibrium density is $\Sigma_0 = 6 \cdot 10^{-4}$. These parameters correspond roughly to the ones used in the numerical study of a protoplanet on a circular orbit at 5 AU embedded in a minimum mass protoplanetary disk (Hayashi et al. 1985 or Bryden et al. 1998), that are described in Sect. 5), when the central star mass and the protoplanet orbit radius are taken to be respectively the units of mass and distance. We present the results of different test runs in Fig. 1. The thick solid line represents the initial profile, which corresponds to a rightward propagating acoustic wave, with wavelength $\lambda = 40\Delta x = 1.256$. The relative amplitude of this sound wave is $s = 10^{-2}$. The thick dashed line represents the density profile at time $t_0 = 220$, i.e. after the wave has traveled $c_s t_0 / \lambda = 7$ times its own wavelength, when studied in the matter frame, i.e. when the velocity at $t = 0$ is set to be only the perturbed velocity associated to the sound wave. The thick dashed profile is obtained with the *standard* transport algorithm (there is no need for the modified one in this case since we work in the matter frame), with a timestep $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$. The curves obtained by choosing a much smaller timestep appear to coincide exactly with this one, hence we can consider this thick dashed line as the actual state the system must have at the date t_0 . This profile does not exactly coincide with the initial one because t_0 is $\sim \frac{1}{7}$ of the profile steepening time $t_{ps} \sim \frac{\lambda}{2c_s s}$.

Now if we just change the initial velocity by uniformly adding 1.0 to them at $t = 0$, which means that we are no more in the matter frame, and we still work with the standard transport algorithm, then we get the dotted profile, which has $\sim 1/5$ the amplitude obtained from the computation in the matter frame. In this run the CFL ratio is $v\Delta t/\Delta x = 0.16$. In order to check the timestep dependency of this result, we redo this test with twice as smaller a timestep ($\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$) and we get the dash-dotted profile, which has about twice as smaller a density contrast than the previous curve. Note that if this effect were to be due to a physical kinematic viscosity ν , then its value should be: $\nu \sim \frac{\lambda^2 \log 5}{2\pi^2 t_0} \sim 5.8 \cdot 10^{-4}$, much higher

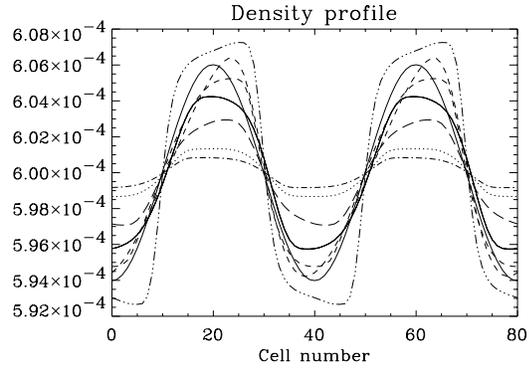


Fig. 1. Compared evolution of an acoustic wave evolved with the standard transport algorithm and with the modified transport algorithm. We plot only two of the five wavelengths, i.e. 80 cells out of 200. Due to numerical effects the phase velocity of all these profiles do not *exactly* coincide with c_s , so that after a time t_0 their phases do not coincide. For this reason the profiles have been shifted so that they have all approximately the same phase in order to improve the clarity of the plot

than the expected viscosity in a minimum mass protoplanetary disk ($\nu \sim 10^{-5}$ in our dimensionless units). Now, instead of decreasing the timestep, we increase it and set $\Delta t = 2.0 \cdot 10^{-2}$ (hence the CFL ratio is about 0.64). We then get at time t_0 the dot-dot-dot-dashed profile, which is not numerically damped but slightly amplified. With such a large timestep, we can use the modified transport algorithm, which in that case corresponds to a rightwards one cell shift and a leftwards normal transport with a remaining CFL ratio of $1 - 0.64 = 0.36$. In that case we get the thin long-dashed profile. If we use the modified FARGO transport algorithm, we can still increase the timestep. The thin solid profile and the thin short-dashed profile have been obtained respectively with $\Delta t = 4 \cdot 10^{-2}$ (effective CFL ratio ~ 1.3) and $\Delta t = 1.2 \cdot 10^{-1}$ (effective CFL ratio ~ 3.8). We clearly see from these results that the FARGO transport algorithm leads to less numerical dissipation than the standard transport. From the first two tests in the non-comoving frame, one can conclude that increasing the *number* of timesteps over a given time interval with the standard transport algorithm increases the numerical dissipation (if the grid is moving wrt the matter frame with a velocity $v_0 \neq 0$ and if the main part of the velocity comes from v_0). A simple explanation for the lower numerical dissipation of the FARGO algorithm is that it requires less iterations as the timestep increases, and since most of the distance swept is achieved through an exact shift (a circular permutation), the numerical dissipation has to decrease as the timestep increases.

5. Two-dimensional example: The embedded protoplanet problem

We show in this section the validity of the modified transport algorithm when applied to the interaction of a Jupiter sized protoplanet with a minimum mass protoplanetary disk in which it is embedded. The perturbed potential associated with the planet excites spiral density waves in the disk, which propagate away both inwards and outwards, with a pattern frequency equal to the planet orbital frequency. The spiral waves interact with the disk and give it the angular momentum they removed from the planet, and eventually open a gap centered on the planet orbit, provided the planet mass is high enough (Papaloizou & Lin 1984). We present a run with a one solar mass primary, one Jupiter mass protoplanet initially on a fixed circular orbit at $r_0 = 5$ AU embedded in a standard protoplanetary nebula whose parameters have been mentioned above. The grid has an inner radius at 2 AU and an outer radius at 12.5 AU. The sequence $(R_i)_{i \in [0, N_r]}$ is equally spaced, with $N_r = 49$; The grid has $N_s = 143$ sectors, it is fixed in a non-Galilean non-rotating frame centered on the primary. Its outer boundary is rigid and its inner boundary allows outflow but no inflow. The disk aspect ratio is set to $4 \cdot 10^{-2}$ everywhere. The planet perturbed potential is smoothed on a length scale which amounts to 40% of the Roche radius. In Eq. (14) we choose $C_0 = 0.5$. We plot in Fig. 2 the quantity $e_{ij} = \frac{v_{ij}^{\theta a} \Delta t}{\Delta y_{ij}}$ after 2.86 orbits. This quantity represents the effective CFL ratio. With the standard transport algorithm this ratio is bounded by C_0 .

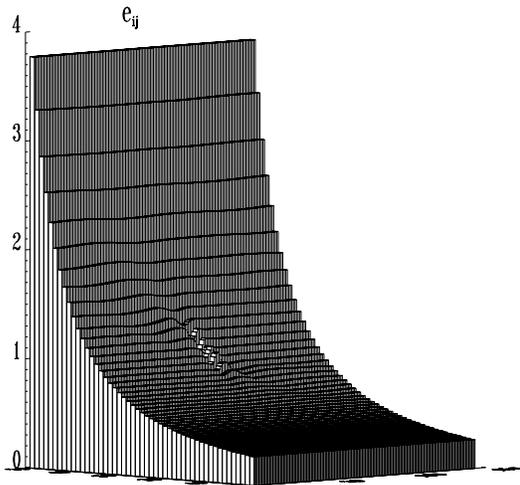


Fig. 2. Number of cells crossed during one timestep. See text for parameters. The inner boundary is at the left (high values) and the outer boundary at the right (low values)

We see that the innermost ring sweeps almost four cells on one timestep, hence the use of the FARGO transport algorithm in this case results in a speed-up by a factor ~ 8 of the computation. One can note that the difference in e_{ij} between the innermost ring and its immediate neighbor is 0.5, which is the maximum allowed by Eq. (14). Indeed the timestep in this run is shear-limited, and the constraint on the residual velocities only would lead to an even bigger timestep, since as one can see the residuals of the distance swept over one timestep amounts to far less than $1/2$, even in the vicinity of the planet. Indeed, runs performed with a logarithmic polar grid (i.e. with R_{i+1}/R_i constant), which have a smaller value of $R_{i+1} - R_i$ in the inner part, have shown to allow a speed-up by a factor ~ 30 wrt the standard method.

In order to see how numerical viscosity affects the disk response in both cases, we plot in the Fig. 3 the disk density after 28.6 orbits, obtained from different algorithms. The left plot corresponds to a non-rotating frame standard transport run, while the middle plot represents a non-rotating frame FARGO transport run, and the right plot represents a standard transport run in a frame corotating with the planet (hence the planet is fixed with respect to the grid, so we expect from the results of Sect. 4 the density response in the vicinity of the planet to be given with a high accuracy). Note that special care has to be devoted to the treatment of the Coriolis force in that case in order to conserve exactly the angular momentum and then to avoid a spurious outwards transport in the disk (Kley 1998). We clearly see that the global spiral pattern excited by the protoplanet in the disk is identical in the three cases, though the response in the immediate vicinity of the planet is much more spread out in the *non-rotating* frame standard accretion case (left plot), and that the most sharply peaked response is achieved through the use of a corotating frame (right plot), as expected. Indeed, we plot in Fig. 5 a cut of the disk density at the planet radius in the three cases. The solid line represents the FARGO transport result, and the dot-dashed line the corotating frame result. They both have the same width, though the maximum of the density in the corotating case is higher. The dashed curve represents the result of the standard transport in a *non-rotating* frame. Its width is about twice as large as the other curves' width, and we also see that numerical effects in that case lead to additional leading and trailing material (near cells number 65 and 77), and to a smaller density peak value.

The FARGO plot in Fig. 3 exhibits at its inner boundary an oscillatory behavior which originates from three combined effects. First, this is a shear-limited run — see Eq. (14) and Fig. 2 —; if we change the 0.5 factor in Eq. (14) to 0.3, this oscillatory behavior disappears (hence in any high resolution run, where the algorithm is most likely to be residual velocity limited rather than shear-limited, it never turns up). Second, the inner grid has strongly radially elongated cells. If we take a log-grid

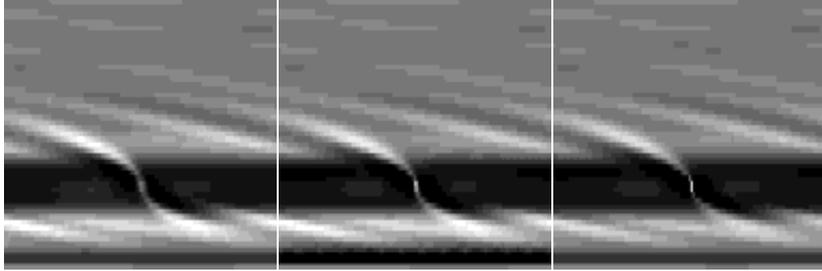


Fig. 3. Disk density Σ_{ij} ; j is in abscissa and i in ordinate. The left plot has been obtained by a *non-rotating* frame standard method, the middle one by a *non-rotating* frame FARGO transport method and the right one by a corotating frame standard method. Since each of these plots is approximately square, any circular feature in the disk should appear on the plots as a 1:3 vertical ellipse. This is not quite the case of the material surrounding the planet in the left panel, which leads to the conclusion that in a non-rotating frame standard transport method, the matter is artificially elongated along the orbital motion. The FARGO case, in the middle panel, shows much better behavior, and the coorbital material has a distribution which looks very much like the right panel one

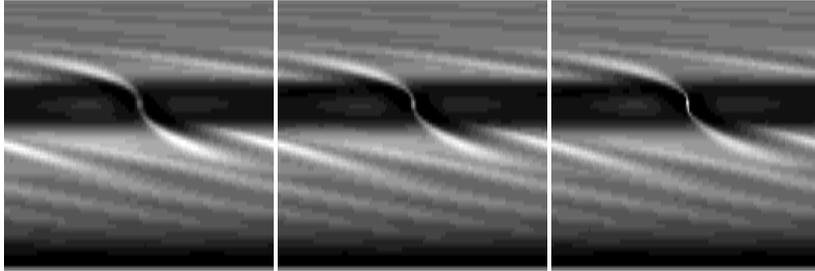


Fig. 4. Disk density Σ_{ij} ; j is in abscissa and i in ordinate, for the log-grid runs described in the text. The left plot has been obtained by a non-rotating frame standard method, the middle one by a non-rotating frame FARGO transport method and the right one by a corotating frame standard method. The same comments as in Fig. 3 apply here. On this specific example, the FARGO run turned out to be 17 times faster than the standard run in the non-rotating frame, and 15 times faster than the standard run in the co-rotating frame

(see e.g. Nelson 1999, or the example below), where the cells are almost “square” everywhere, this behavior is not observed, even if the run remains shear-limited. And finally, we have a steep density gradient close to the inner boundary. If the inner boundary was closed and hence if we had no density gradient, this oscillatory behavior would never appear. In all the cases where it was observed this behavior always disappeared after a few tens of dynamical times.

It should be noted that the numerical damping observed in the non-stationary frame in Sect. 4 occurs both in the non-rotating frame *and corotating frame (far from the coorbital region)* standard method runs. Hence the amplitude of the protoplanet triggered density wave is marginally higher in a FARGO run at the inner boundary. Both this reason and the effect we noticed in the previous paragraph lead to a marginally higher mass loss through the inner boundary, at least during the first

stages of the evolution of the system, which results in the darker band at the inner boundary in the middle panel of Fig. 3.

We present in Fig. 4 the results of three runs (non-rotating standard and FARGO, and corotating standard), which describe the same physical system as before after the same amount of time, but with a grid for which $N_r = 70$, $N_s = 180$, $R_{\min} = 0.25$ and $R_{\max} = 2.5$, and with a geometric sequence for $(R_i)_{i \in [0, N_r]}$ (hence it is a log-grid, and everywhere its cells are almost “square”). One can check on these plots that there is no oscillatory behavior in the FARGO results (this time the cells are no radially elongated near the inner boundary), whereas the run is still shear-limited. Furthermore, as stated above, a careful look at the inner spiral structure shows that it has a slightly higher amplitude in the FARGO case.

From the results depicted in Figs. 3, 4 and 5, one can deduce that the FARGO transport algorithm on this

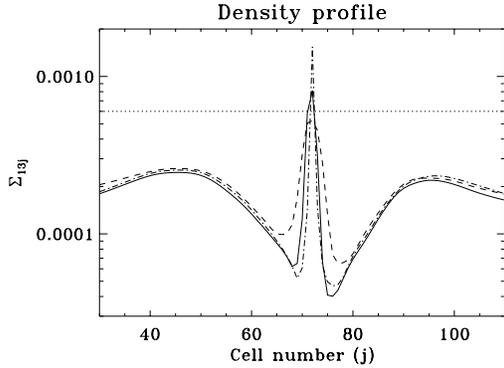


Fig. 5. Disk density cuts at the planet radius. The solid line represents the FARGO transport case, the dashed line represents the standard case, and the dot-dashed line represents the corotating frame result. The dotted line indicates the unperturbed surface density. Note that the local maxima at $j \simeq 46$ and $j \simeq 94$ correspond to a temporary residual accumulation of material at the L_4 and L_5 Lagrange points of the protoplanet

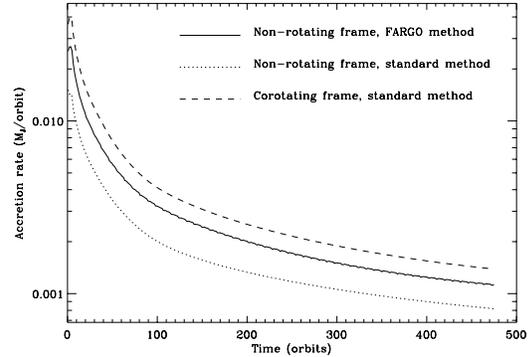


Fig. 6. Accretion rate as a function of time onto a one Jupiter mass protoplanet with three different methods. See text for details

particular problem is much closer than the usual standard transport algorithm to the exact solution (which must closely resemble the results given by the corotating frame run, at least in the coorbital region, since in Sect. 4 we have seen that one needs to be in the comoving frame in order to get accurate results even in the limit of a vanishing timestep). Another quantitative evaluation of the FARGO algorithm consists in monitoring the accretion rate onto the planet as a function of time. We present in Fig. 6 the accretion rate onto a one Jupiter mass protoplanet embedded in a minimum mass protostellar disk with no initial gap. The disk parameters are the same as before, as well as the grid resolution (arithmetic radial spacing with $N_r = 49$ and $N_s = 143$). Three runs are presented with three different schemes: the standard method in the rotating frame, which gives, according to Sect. 4, the most accurate results, the standard method in the non-rotating frame, and the FARGO method in the non-rotating frame. We use a slightly different accretion procedure than the one described by Kley (1999). We see from the curve obtained in the corotating frame that the accretion rate is about $1.6 \cdot 10^{-3} M_J \text{ orbit}^{-1}$ after 400 orbits. This is in relatively good agreement with Kley's results, who gets slightly more than $2.0 \cdot 10^{-3} M_J \text{ orbit}^{-1}$ after 400 orbits in a similar run, but with a different grid resolution and a slightly different accretion protocol. We see from Fig. 6 that the accretion rate in the non-rotating frame, with a standard method, is smaller than in the rotating frame run, by a factor $\simeq 2$. The fact that the accretion rate is slower in this case was to be expected from the curves of Fig. 5. Now the run with the FARGO algorithm leads to an accretion rate which is between the rotating

frame results and the non-rotating frame standard transport results, and which are closer to the rotating frame results. From these considerations again we see that the FARGO transport leads to a smaller error wrt the rotating frame results. The point here is that the FARGO transport algorithm is about one order of magnitude or more faster than the corotating frame standard transport run, and that the corotating frame is suitable only to the study of a protoplanet on a fixed circular orbit. From these remarks it clearly appears that the FARGO transport algorithm is particularly well suited to the study of the protoplanet orbit long-term evolution. FARGO has already been used to study the migration and mass accretion of a Jupiter sized protoplanet in a protoplanetary disk. It has been extensively tested against existing independent codes, which use the standard transport algorithm. It has proven to give very similar results, and the slight differences which remain between these codes and FARGO can all be understood in terms of FARGO's lower numerical diffusivity (Nelson et al. 1999).

6. Conclusion

The FARGO algorithm for the azimuthal transport turns out to be able to speed up by about an order of magnitude the numerical simulation of a differentially rotating disk, with a smaller numerical viscosity than the usual transport algorithm. It has been validated by many tests on the embedded protoplanet problem. It is worth mentioning that the FARGO transport algorithm must be used with a good understanding of the physical processes at work in the system. In particular, the timestep given by Eq. (15) must be short compared to all the physical time scales relevant for the system. In the case we have presented in this paper this is automatically ensured by the set of

Eqs. (13) to (15), but if additional physics is to be added (magnetic field, radiative transfer, etc.), the timestep limit needs to be carefully worked out. Furthermore, no advantage is gained in using FARGO in problems where the perturbed velocity is comparable to the rest velocity. It is the case for instance of the gas flow in a galactic bar. This does not mean that the FARGO algorithm leads to wrong results in that case, but simply that it will not be better than a standard method, both in terms of numerical diffusivity and execution time. On the other hand, the FARGO algorithm appears to be very well suited to all the cases where the perturbed velocities in any differentially rotating disk are small compared to the unperturbed velocities, which does not mean that the problem under consideration has to be linear; indeed the relative perturbed amplitude can be arbitrarily high (see e.g. Sect. 5 in which the protoplanet wake generates shocks in the disk). More generally the FARGO algorithm can be used to describe the HD evolution of any sheared fluid on a fixed orthogonal eulerian grid.

Acknowledgements. I am indebted to R.P. Nelson for many valuable discussions and suggestions in the course of this work, as well as for a careful reading of the successive drafts of this

paper, to J.M. Stone for advice on eulerian numerical simulations, to J.C.B. Papaloizou for many discussions on the protoplanet migration problem, to Willy Kley for advice on the corotating frame runs, and to an anonymous referee whose comments led to an improvement of the paper. This work was done in the research network "Accretion onto black holes, compact stars and protostars" funded by the European Commission under contract number ERBFMRX-CT98-0195.

References

- Bryden G., Chen X., Lin D.N.C., Nelson R.P., Papaloizou J.C.B., 1999, ApJ 514, 344
 Hayashi C., Nakazawa K., Nakagawa Y., 1985, in: Protostars and Planets II, Black D.C. and Matthew M. (eds.). Tucson: Univ. Arizona Press, p. 1100
 Kley W., 1998, A&A 338, L37-41
 Kley W., 1999, MNRAS 303, 696
 Nelson R.P., Papaloizou J.C.B., Masset F., Kley W. (submitted to MNRAS) astro-ph 9909486
 Papaloizou J.C.B., Lin D.N.C., 1984, ApJ 285, 818
 Richtmyer R.D., Morton R.W., 1957, Difference Methods for Initial-Value Problems, 2ed. New York: Wiley Interscience
 Stone J.M., Norman M.L., 1992, ApJ 80, 753
 Van Leer B., 1977, J. Comput. Phys. 23, 276
 Whitehurst R., 1995, MNRAS 277, 655

Reversing type II migration: resonance trapping of a lighter giant protoplanet

F. Masset^{★†} and M. Snellgrove

Astronomy Unit, School of Mathematical Sciences, Queen Mary & Westfield College, Mile End Road, London E1 4NS

Accepted 2000 October 25. Received 2000 August 25; in original form 2000 March 10

ABSTRACT

We present a mechanism related to the migration of giant protoplanets embedded in a protoplanetary disc whereby a giant protoplanet is caught up, before having migrated all the way to the central star, by a lighter outer giant protoplanet. This outer protoplanet may get captured into the 2:3 resonance with the more massive one, in which case the gaps that the two planets open in the disc overlap. Two effects arise, namely a squared mass-weighted torque imbalance and an increased mass flow through the overlapping gaps from the outer disc to the inner disc, which both play in favour of an outwards migration. Indeed, under the conditions presented here, which describe the evolution of a pair of protoplanets respectively Jupiter- and Saturn-sized, the migration is reversed, while the semimajor axis ratio of the planets is constant and the eccentricities are confined to small values by the disc material. The long-term behaviour of the system is briefly discussed, and could account for the high eccentricities observed for the extrasolar planets with semimajor axis $a > 0.2$ au.

Key words: accretion, accretion discs – hydrodynamics – Solar system: formation – planetary systems: formation – planetary systems: protoplanetary discs.

1 INTRODUCTION

In the past few years a number of extrasolar giant planets have been discovered around nearby solar-type stars. These objects masses range from 0.17 – $11 M_J$ (where M_J is Jupiter's mass) and their orbital semimajor axis ranges from 0.038 – 3.3 au (Marcy, Cochran & Mayor 1999). Although many uncertainties remain about planet formation, it is now commonly accepted that planets have formed in and from protoplanetary discs. Necessarily, there must be some time interval over which a giant planet and the surrounding gaseous disc material coexist. The planet and the disc exchange angular momentum through tidal interactions which generally make the planet lose angular momentum. This mechanism is called migration. It can roughly be divided into two regimes.

(i) If the planet mass is small enough, the disc response is linear. The migration rate, in that regime, is proportional to the planet and disc masses, independent of the viscosity and weakly dependent of the disc surface density and temperature profiles. This is the so-called type I migration (Ward 1997).

(ii) When the protoplanet mass is above a certain threshold, the torques acting locally on the surrounding disc material open a gap (Papaloizou & Lin 1984), the width and depth of which are

controlled by the balance between the tidal torques, which tend to open the gap, and the viscous torques, which tend to close it. The disc response is significantly non-linear, and most of the protoplanet Lindblad resonances fall in the gap and therefore cannot contribute to the planet–disc angular momentum exchange. The migration rate slows down dramatically compared with type I migration. Furthermore, the tidal truncation splits the disc into two parts and the planet is locked to the disc viscous evolution (Nelson et al. 2000). This is the type II migration, which describes the orbital evolution of giant protoplanets.

In this Letter we consider the coupled evolution of a system of giant protoplanets consisting of two non-accreting cores with masses 1 and $0.29 M_J$, which we are going to call from now on respectively ‘Jupiter’ and ‘Saturn’. Attempts have already been made to describe the behaviour of a system of planets embedded in a disc. Melita & Woolfson (1996) and Haghighipour (1999) considered an embedded Jupiter and Saturn system orbiting a solar-mass star, and showed how resonance trapping would affect their evolution. However, the dissipative force in these works was caused by the dynamical friction with a uniform density interplanetary medium, hence type II migration effects were not taken into account. Resonance trapping of planetesimals by a fixed-orbit Jupiter-sized protoplanet has also been investigated by Beaugé, Aarseth & Ferraz-Mello (1994), and shown to be able to build up a single planetary core with orbital characteristics close to Saturn's ones. Kley (2000) studied the orbital evolution of two maximally accreting giant cores embedded in a minimal mass protosolar disc,

[★]E-mail: masset@mpa-garching.mpg.de

[†]Present address: Service d’Astrophysique, CE-Saclay, L’Orme des Merisiers, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

and showed how the migration of the inner core could be halted by the presence of the outer one, and how the eccentricity of the inner core is pumped up by the outer one.

2 RESULTS

2.1 Numerical code description

In order to investigate the long-term behaviour of the embedded Jupiter and Saturn system, we have used two independent hydrocodes, which have been described elsewhere in full detail (Nelson et al. 2000). These two codes are fixed Eulerian grid-based codes; one of them is NIRVANA (Ziegler & Yorke 1997) and the other one has been written by one of us (FM). Both have been endowed with the fast advection FARGO algorithm (Masset 2000), and can run either with this algorithm or with a standard advection algorithm. They gave very similar results. They consist of a pure N -body kernel based on either a fourth- (NIRVANA) or fifth-order adaptive time-step Runge–Kutta solver (sufficient for the short time-scales involved in this dissipative problem) embedded in a hydrocode that provides a tidal interaction with a 2D non-self-gravitating gaseous disc. The simulations are performed in the non-inertial non-rotating frame centred on the primary. The grid outer boundary does not allow inflow or outflow and is chosen sufficiently far from the planets in order for the spiral density waves that they launch to be damped before they reach it, while the grid inner boundary only allows outflow (inwards), so that the disc material can be accreted on to the primary. Failing to do so may lead us to overestimate the inner disc density and artificially favours an outwards migration. In the following our length unit is 5.2 au, the mass unit is one solar mass, and the time unit is the initial orbital period of Jupiter (the actual period may vary as Jupiter migrates). The disc aspect ratio H/R is uniform and constant. In the run presented here the grid resolution adopted is $N_r = 122$ and $N_\theta = 300$ with a geometric spacing of the interzone radii such that all the zones are ‘as square as possible’, i.e. $N_r \log(1 + 2\pi/N_\theta) = \log(R_{\max}/R_{\min})$. The grid outer boundary is at $R_{\max} = 5$ and its inner boundary is at $R_{\min} = 0.4$. The geometric spacing is the most natural one because the disc thickness scales as r . On the other hand, a constant spacing leads to an oversampling of the outer disc and an undersampling of the inner one, and therefore is likely to favour an inwards migration.

2.2 Initial setup

The cores we consider are embedded in a gaseous minimal mass protosolar nebula around a unit mass central object, and we assume they start their evolution with semimajor axis $a_j = 1$ for Jupiter and $a_s = 2$ for Saturn. The disc surface density is uniform and corresponds to two Jupiter masses inside Jupiter’s orbit. The effective viscosity ν , the nature of which remains unclear and is usually thought to arise from turbulence generated by magnetohydrodynamic (MHD) instabilities (Balbus & Hawley 1991), is assumed to be uniform through the disc and corresponds to a value of $\alpha = 6 \times 10^{-3}$ in the vicinity of Jupiter’s orbit. The disc aspect ratio is $H/r = 0.04$.

The mass of Jupiter is sufficient to open a deep gap and hence it settles in a type II migration (Nelson et al. 2000), whereas Saturn is unable to fully empty its co-orbital region because (i) its mass is smaller and (ii) the planet is in a regime known as the inertial limit (Ward & Hourigan 1989) where the inwards migration speed is so

high that it makes the planet pass through what would be the gap inner edge before it had time to actually open it.

Therefore Saturn does not clear a deep gap initially, and its migration rate is typical of type I migration, because all its Lindblad resonances can still contribute to the angular momentum exchange with the disc.

2.3 Run results

We present in Fig. 1 the central star–planet distance curves as a function of time. We see how initially Jupiter migrates as if it were the only planet in the disc (see test run). In the meantime, Saturn starts a much faster migration (the obvious initial acceleration of its migration will be discussed elsewhere), and reaches the 1:2 resonance with Jupiter at time $t \approx 110$. The eccentricities at that time are small (see Fig. 2), and in particular Saturn’s eccentricity is much smaller than the eccentricity threshold below which the capture into resonance is certain if the ‘adiabatic’ condition on

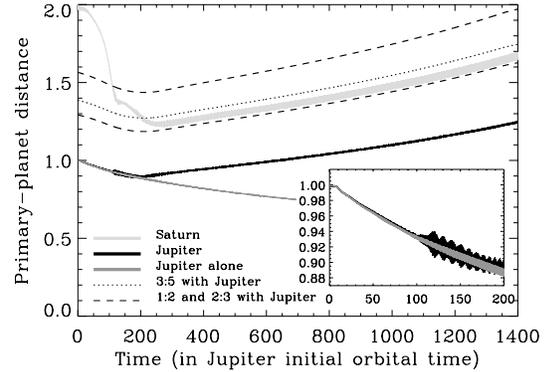


Figure 1. Primary–planet distances as a function of time. The outer dashed curve represents the nominal position of the 1:2 resonance with Jupiter, while the inner dashed curve is the nominal position of the 2:3 resonance. The zoomed plot enables one to compare Jupiter’s orbital evolution closely against a test run without Saturn.

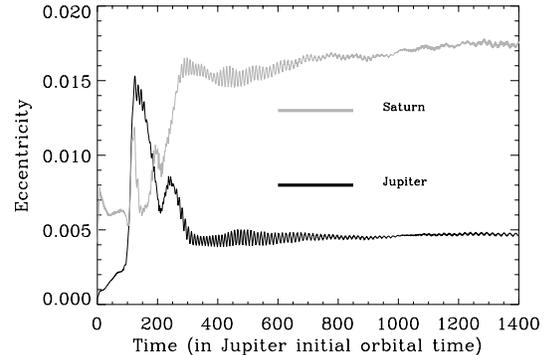


Figure 2. In this figure we see the eccentricities of the planets as a function of time. They simultaneously increase as Saturn passes through the 1:2 and 3:5 resonances with Jupiter. Once Saturn is trapped into the 2:3 resonance with Jupiter, both eccentricities settle at a roughly constant level, which results in a balance between the migration rate that pumps them up and the eccentricity damping by the disc co-orbital material.

the migration rate is satisfied (Malhotra 1993): $|\dot{a}_s|/(a_s\Omega_s) \ll 0.5j(j+1)\mu_j e_s$ for the $j:j+1$ resonance, where μ_j is the mass ratio of Jupiter to the central object, and where e_s is Saturn's eccentricity. This condition is not satisfied when Saturn reaches the 1:2 resonance, and it passes through.

The planets then obtain higher eccentricities, and Saturn's migration rate is reduced. This will appear later, and has to do with an increased inwards mass flow. Saturn's eccentricity increases again rapidly as it passes through the 3:5 resonance with Jupiter at $t \approx 220$. Eventually the adiabatic condition on the migration rate is satisfied for the 2:3 resonance and Saturn's eccentricity is still below the corresponding critical threshold, so it gets trapped into the 2:3 resonance with Jupiter (both e and e' resonances, because the two critical angles $\phi = 3\lambda_S - 2\lambda_J - \tilde{\omega}_S$ and $\phi' = 3\lambda_S - 2\lambda_J - \tilde{\omega}_J$ librate, where λ is the mean longitude and $\tilde{\omega}$ the longitude of perihelion). At that time both planets steadily migrate outwards.

2.4 Interpretation

We define the system of interest as the system composed of the two planets. This resonance-locked system interacts with the inner disc through torques proportional to M_J^2 , at Jupiter's inner Lindblad resonances (ILR), whereas it interacts with the outer disc through torques proportional to M_S^2 at Saturn's outer Lindblad resonances (OLR), as indicated in Fig. 3. It can be seen that Saturn's ILR fall in Jupiter's gap and Jupiter's OLR fall in Saturn's gap, so their effect is weakened compared with the situation where Jupiter is alone. As $M_J^2/M_S^2 \sim 10$, the torque imbalance does not favour an inwards migration as strongly as in a one-planet case, and may even lead to a positive differential Lindblad torque on the two-planet system. Actually one can estimate what the maximum mass ratio of the outer planet to the inner one should be to get a migration reversal, if one neglects the inner Lindblad torque on the outer planet and the outer Lindblad torque on the inner planet. The inner Lindblad torque on the inner planet reads as

$$T_{\text{ILR}} = C_{\text{ILR}} \mu_J^2 \Sigma_0 a_J^2 (a_J \Omega_J)^2 h'^{-3}, \quad (1)$$

where C_{ILR} is a dimensionless coefficient which is a sizable fraction of unity (Ward 1997), and where h' is the disc aspect ratio. There is a similar formula for the outer Lindblad torque on the outer planet (obtained by substituting the ILR and J indices in equation (1) respectively with OLR and S). The resulting torque imbalance will be positive if: $T_{\text{ILR}} > T_{\text{OLR}}$, which reads here as

$$\frac{\mu_S}{\mu_J} < \left(\frac{C_{\text{ILR}}}{C_{\text{OLR}}} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3}. \quad (2)$$

If we assume that $C_{\text{ILR}} = C_{\text{OLR}}$ then we get $\mu_S/\mu_J < 0.87$, whereas if we make the conservative assumption that $C_{\text{ILR}} = 0.5C_{\text{OLR}}$, we have $\mu_S/\mu_J < 0.62$. This threshold is much bigger than the actual ratio, therefore if the common gap is deep enough to shut off Jupiter's OLR torques (and Saturn's ILR torques) then the net Lindblad torque on the two-planet system is positive. As the two planet system proceeds outwards in the disc, it does not act on the gas as a snow-plough, but rather it allows the material from the outer disc to travel across the common gap and eventually feed the inner disc. We can find the gap 'permeability' condition by requiring that the rate of angular momentum change of the ring of material lying immediately outside Saturn's gap that is required to expand accordingly to Saturn's orbit (snow-plough

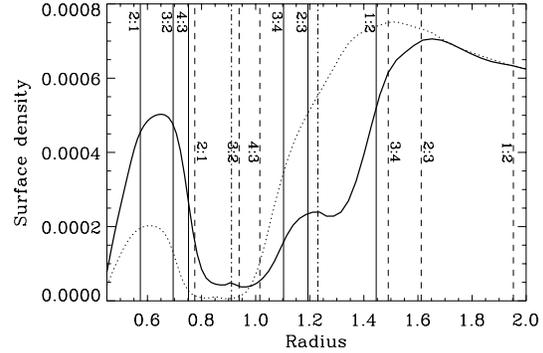


Figure 3. Azimuthally averaged surface density as a function of radius, for the two-planet run (solid curve) and for the test run with Jupiter only (dotted curve), at time $t = 286$ orbits. The solid vertical lines show Jupiter's circular Lindblad resonances, and the dashed lines Saturn's circular Lindblad resonances. The dot-dashed lines at $r = 0.91$ and $r = 1.23$ show respectively the positions of Jupiter (in the two-planet run) and Saturn. As can be seen also in Fig. 1, the Jupiter to Saturn orbital ratio is slightly larger than 3/2. This is a result of the fast precession of the perihelions.

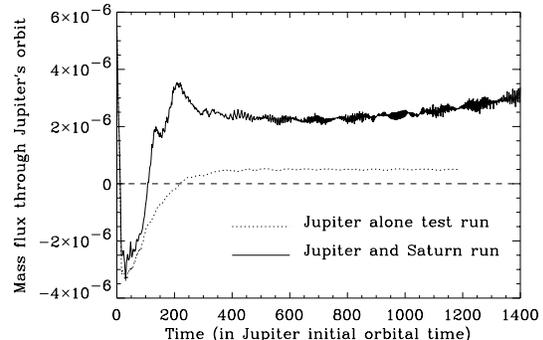


Figure 4. Mass flux crossing Jupiter's orbit (in mass units per orbital time), where positive is for an inwards flow. This quantity can be estimated from the total amount of mass located outside Jupiter's orbit (more precisely outside a circle having a radius equal to Jupiter's semimajor axis, in order to smooth out the short-period variations linked to the eccentricity), because the outer boundary is closed ($v_{\text{rad}} = 0$). The negative value at the early stages is caused by a relatively fast inwards migration; it reverses for both runs, even for the Jupiter-only test run (where the inner disc is rapidly depleted). Note that the mass flux is reversed *before* the migration reverses, when Saturn passes through the 1:2 resonance, which more or less corresponds to the time at which the co-orbital regions of both planets merge.

effect) is greater than the torque available from Saturn (at most the sum of its outer Lindblad torques, in which case we need to assume that the waves excited at their OLR are damped locally). Here, this turns out to be the case and most of the outer disc material flows through the common gap to the inner disc. We find that in all our runs it is possible to check that the rate of mass flow through the common gap (see Fig. 4) can be expressed as

$$\dot{M} \approx 3\pi\nu\Sigma_0 + 2\pi r_s \dot{r}_s \Sigma_0 \quad (3)$$

with a reasonable precision (10–20 per cent). Furthermore we

have performed many ‘restart runs’, which consist of restarting a run once Jupiter and Saturn are locked into resonance, and then by varying one parameter at one time, e.g. the viscosity or the aspect ratio (which changes the Lindblad torques and therefore the migration rate). The mass flux through the gap rapidly switches (in a few tens of orbits) to a new value after the restart, so that equation (3) remains fulfilled.

From the considerations above we can conclude that the presence of Saturn unlocks Jupiter from the disc evolution: the two-planet system evolution (outwards) and the disc viscous evolution (inwards) are basically decoupled. This decoupling and the corresponding mass flow through the common gap has two consequences.

(i) A refilling of the inner disc, which is too depleted for the torques at Jupiter’s ILR to have any sizable effect in the one-planet case (the inner disc is accreted on to the primary on its short viscous time-scale and maintaining its surface density at not too low a value implies a permanent flow of material from the outer disc to the inner one).

(ii) The angular momentum lost by the material which flows from the outer disc to the inner one is gained by the planets. The exchange of angular momentum between a planet and a gas fluid element occurs during a ‘close encounter’ between these two, the one-planet version of which corresponds to the angular momentum exchange at each end of a horseshoe orbit of the fluid element. The resulting torque is the so-called co-orbital corotation torque (Goldreich & Tremaine 1979; Ward 1991, 1992). To the best of our knowledge, an analytical evaluation of the corotation torque in the case of a non-vanishing net mass flow through the orbit (either because of viscous accretion on to the primary or radial migration or both) has not been performed yet. Obviously even the one-planet case deserves a large amount of work on this specific topic, therefore the estimate of the corotation torque in this two-planet problem is far beyond the scope of this paper. We will just comment that the corotation torque in our case might not be negligible compared with the differential Lindblad torque at some stage.

3 DISCUSSION

We have performed a series of restart runs (see Section 2.4) in order to check for a variety of behaviours.

3.1 Differential Lindblad torque sign

The one-sided Lindblad torque has been shown to be proportional to h'^{-3} (Ward 1997). We have performed two restart runs ($h' = 0.04 \rightarrow 0.03$ and $h' = 0.04 \rightarrow 0.05$) in order to check that the migration rate variation is consistent with this dependence. This is indeed the case. We note in passing that the migration rate varies as h'^{-3} , and not as h'^{-2} as would be the case in a one-planet problem, because the outer/inner Lindblad torque asymmetry does not vanish as the disc thickness tends to zero (the OLRs would pile up at Saturn’s orbit, whereas the ILRs would pile up at Jupiter’s orbit). These results confirm that the behaviour we observe occurs mainly as a result of the differential Lindblad torque and also show that this latter quantity is positive, as expected from equation (2).

3.2 α viscosity versus uniform viscosity

So far we have only considered a uniform viscosity. Switching to a uniform α viscosity of the form $\nu = \alpha c_s H$ makes ν scale here as

$r^{1/2}$, so the viscosity at the outer edge of the common gap is higher, whereas it is smaller in the inner disc. This has the following effect, which plays in favour of enhancing the migration reversal mechanism: the viscous time-scale of the inner disc is higher and therefore its surface density increases accordingly, because the material brought through the gap piles up in the inner disc for a longer time before being accreted on to the primary. This has been checked with a restart run.

3.3 Accretion on to the planets

The cores considered above do not accrete gas from the disc. One can wonder what would be the effects of accretion. We have performed a number of restart runs in order to investigate the effect of accretion on the mechanism presented here. We have only considered accretion on to Jupiter, as it is likely that the accretion rate on to Saturn can be regarded as being negligible (i.e. its mass doubling time is much longer than the time-scale of the outwards migration, see e.g. Pollack et al. 1996). The prescription we used to model accretion on to Jupiter consists of removing a proportion of the material which lies in the inner Roche lobe (i.e. a sphere with a radius of half the Hill radius). The amount which is removed in one time-step is calculated from the half-emptying time of the inner Roche lobe $\tau_{1/2}$. We have performed four different restart runs, corresponding to the following values of $\tau_{1/2}$: $\tau_{1/2} = T_0$ (maximally accreting core, see Kley 1999), $3T_0$, $10T_0$ and $30T_0$, where $T_0 = 2\pi/\Omega_J$ is Jupiter’s orbital time. In each of these cases, turning on accretion had no impact on the system migration rate, at least in the early stages: in the first case, the mass doubling time for Jupiter is relatively short, and when Jupiter’s mass is significantly larger than its initial mass some additional effects, which will be presented in much greater detail elsewhere, affect the migration rate, which then differs from the non-accreting case.

3.4 Smoothing

The smoothing parameter of the potential can have a dramatic impact on Saturn’s initial migration rate. This rate is controlled by a subtle balance between outer disc and inner disc torques. In the case of Saturn, all the Lindblad resonances play a role, as there is no gap. Many prescriptions for the smoothing are unable to give trustworthy results for the balance between the outer and inner torques since, depending on the prescription, these two quantities are affected in a different way. On the other hand Jupiter’s migration rate is much more robust, because the presence of the gap prevents high- m Lindblad resonances playing a role in the migration, which is therefore controlled only by remote, low m resonances and thus almost insensitive to the smoothing parameter. For this reason we have adopted an approach which involves choosing a smoothing prescription that endows Saturn with a migration velocity of the order of magnitude of the linear analytical predictions (type I migration), which is needed to give correct results for the capture into resonance. Once Saturn is trapped into resonance with Jupiter, it is dynamically slaved by the latter and the system evolution is only very weakly affected by the exact value of the outer disc torque exerted on Saturn. We have found that using either of the two prescriptions below satisfactorily preserves the analytical torque imbalance on Saturn and therefore gives it a type I migration rate.

- (i) The potential of a planet acting on the disc is smoothed over

the length $\varepsilon = 0.4R_H$ where R_H is the Hill radius of the planet under consideration, whereas the potential of the disc acting back on the planet is smoothed over $\varepsilon' = \sqrt{H^2 + d^2}$ where H and d are respectively the local disc thickness and zone diagonal. As $\varepsilon' \neq \varepsilon$, the action–reaction law is not fulfilled and the numerical biases that arise favour an inwards migration, as can be easily checked.

(ii) The potential of a planet acting on the disc and the potential of the disc acting on the same planet are smoothed over $\varepsilon = 0.4R_H$. This prescription does fulfil the action–reaction law. In both these two cases, as in any other which gives Saturn a type I migration rate, including runs performed with a uniform radial spacing, the migration gets reversed. The run presented here corresponds to the first prescription.

3.5 Impact of mass ratio and long-term behaviour

One can wonder about the size of the interval of Saturn’s mass that causes the migration to be significantly slowed down or reversed. If ‘Saturn’ is not massive enough it will not significantly affect Jupiter’s evolution (the common ‘gap’ will be too full on Saturn’s side, and therefore Jupiter’s OLR torques will not be shut off), whereas if it is too massive, the torque imbalance will be negative again. Work is in progress to determine accurately which range of parameters leads to a migration reversal. It should be noted that the results presented here depend on the artificial initial conditions. We have performed other runs in which Saturn is initially very close either to the 1:2 or 3:5 resonance, and it turns out that neither of these resonances is able to struggle against the strong Lindblad torques on Saturn: no resonance angle can be found that provides a resonant torque on Saturn to counteract the tide. Therefore a trapping into the 2:3 resonance is the most likely outcome when the system is still embedded in a massive disc, whatever the initial conditions: catching-up of ‘Saturn’ or in situ assembling from smaller, type I migrating bodies.

The long-term behaviour of the system is twofold

(i) The system is locked into resonance as long as the following conditions hold.

(a) The two-planet system can adjust its resonance angle in order to prevent the planets being ‘pushed’ towards each other by the Lindblad torques exerted by the disc on each of them. In all our runs we have never observed this behaviour. Now, given the small eccentricities involved here, and given the fact that the adiabatic criterion threshold increases as $j(j+1)$, the most probable outcome is that Saturn would then be captured in the next order resonance, that is to say 3:4, and all the physics exposed in this paper would still be valid (presence of a common gap, sharing of the co-orbital material by the two planets, mass-weighted torque imbalance, etc.)

(b) The planets are not pulled apart by any other torques. Now we have mentioned the possibly important role of the co-orbital corotation torque in this problem, which may be sufficient to move

the planets apart at some stage, in which case we may ultimately get a low eccentricity double giant planet system when the disc disappears. This will be presented in greater detail elsewhere.

(ii) If the planets happen to be locked into resonance at the time that the gas effects become negligible, then the system is likely to be unstable (we mentioned already that at least two angles librate simultaneously, which strongly suggests a possible chaotic behaviour; see also Kley 2000), and the most likely outcome is that one planet will be ejected whereas the other planet will end up on an eccentric orbit. This could account for the observed eccentricities of the extrasolar planets that are not orbiting close to their host star, i.e. that have not migrated all the way to the star.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank J. C. B. Papaloizou, R. P. Nelson, C. Terquem, J. D. Larwood, A. A. Christou and an anonymous referee for useful comments and criticism. This work was partially supported (for FM) by the research network ‘Accretion onto black holes, compact stars and protostars’ funded by the European Commission under contract number ERBFMRX-CT98-0195, and additionally supported (for MS) by funding from a PPARC research studentship. Computational resources of the Grand HPC consortium were available and are gratefully acknowledged. We thank Udo Ziegler for making a FORTRAN version of his code NIRVANA publicly available.

REFERENCES

- Balbus S. A., Hawley J. F., 1991, *ApJ*, 376, 214
 Beaugé C., Aarseth S. J., Ferraz-Mello S., 1994, *MNRAS*, 270, 21
 Goldreich P., Tremaine S., 1979, *ApJ*, 233, 857
 Haghighipour N., 1999, *MNRAS*, 304, 185
 Kley W., 1999, *MNRAS*, 303, 696
 Kley W., 2000, *MNRAS*, 313, 47
 Malhotra R., 1993, *Icarus*, 106, 264
 Marcy G. W., Cochran W. D., Mayor M., 1999, in Mannings V., Boss A. P., Russell S., eds, *Protostars and Planets IV*. Univ. Arizona Press, Tucson, p. 1285
 Masset F., 2000, *A&AS*, 141, 165
 Melita M. D., Woolfson M. M., 1996, *MNRAS*, 280, 854
 Nelson R. P., Papaloizou J. C. B., Masset F., Kley W., 2000, *MNRAS*, 318, 18
 Papaloizou J. C. B., Lin D. N. C., 1984, *ApJ*, 285, 818
 Pollack J. B., Hubickyj O., Bodenheimer P., Lissauer J. J., Podolak M., Greenzweig Y., 1996, *Icarus*, 124, 62
 Ward W. R., 1991, *Abstr. Lunar Planet. Sci. Conf.*, 22, 1463
 Ward W. R., 1992, *Abstr. Lunar Planet. Sci. Conf.*, 23, 1491
 Ward W. R., 1997, *Icarus*, 126, 261
 Ward W. R., Hourigan K., 1989, *ApJ*, 347, 490
 Ziegler U., Yorke H. W., 1997, *Comp. Phys. Comp.*, 101, 54

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

RUNAWAY MIGRATION AND THE FORMATION OF HOT JUPITERS

F. S. MASSET¹

Service d’Astrophysique, Centre d’Etudes de Saclay, Batiment 709, Orme des Merisiers, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France;
fmasset@cea.fr

AND

J. C. B. PAPALOIZOU

Astronomy Unit, School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London, Mile End Road, London E1 4NS, UK;
j.c.b.papaloizou@qmul.ac.uk

Received 2002 September 16; accepted 2003 January 10

ABSTRACT

We evaluate the coorbital corotation torque on a migrating protoplanet. The coorbital torque is assumed to come from orbit crossing fluid elements that exchange angular momentum with the planet when they execute a U-turn at the end of horseshoe streamlines. When the planet migrates inward, the fluid elements of the inner disk undergo one such exchange as they pass to the outer disk. The angular momentum they gain is removed from the planet, and this corresponds to a negative contribution to the corotation torque, which scales with the drift rate. In addition, the material trapped in the coorbital region drifts radially with the planet, giving a positive contribution to the corotation torque, which also scales with the drift rate. These two contributions do not cancel out if the coorbital region is depleted, in which case there is a net corotation torque that scales with the drift rate and the mass deficit in the coorbital region and has the same sign as the drift rate. This leads to a positive feedback on the migrating planet. In particular, if the coorbital mass deficit is larger than the planet mass, the migration rate undergoes a runaway that can vary the protoplanet semimajor axis by 50% over a few tens of orbits. This can happen only if the planet mass is sufficient to create a dip or gap in its surrounding region and if the surrounding disk mass is larger than the planet mass. This typically corresponds to planet masses in the sub-Saturnian to Jovian mass range embedded in massive protoplanetary disks. Runaway migration is a good candidate to account for the orbital characteristics of close orbiting giant planets, most of which have sub-Jovian masses. These are known to cluster at short periods, whereas planets of greater than two Jovian masses are rare at short periods, indicating a different type of migration process operated for the two classes of object. Further, we show that in the runaway regime, migration can be directed outward, which makes this regime potentially rich in a variety of important effects in shaping a planetary system during the last stages of its formation.

Subject headings: accretion, accretion disks — hydrodynamics — methods: numerical —
planetary systems: formation — planetary systems: protoplanetary disks

1. INTRODUCTION

The study of the tidally induced migration of protoplanets embedded in protoplanetary disks has received renewed attention in the last few years following the discovery of extrasolar giant planets (EGPs). It is in particular the best candidate to explain the short-period EGPs (the so-called hot Jupiters) that are likely to have begun to form farther out in the disk and migrated radially inward.

When the planet mass is small (i.e., when its Hill radius is much smaller than the disk thickness), the migration rate can be evaluated using linear analysis and is shown to be proportional to the planet mass and the disk surface density and inversely proportional to the square of the disk aspect ratio (Ward 1997). The linear regime is often called the type I regime. It corresponds to a fast migration rate, although recent estimates (Miyoshi et al. 1999; Tanaka, Takeuchi, & Ward 2002; Masset 2002) show that the linear analytical estimate assuming a flat two-dimensional disk has to be reduced by a factor of 2–3 or more in a more realistic calculation that accounts for the disk vertical structure and a

possible nonsaturation of the corotation torque if the disk is viscous enough. Migration in the type I regime is nevertheless still too fast, in the sense that the migration timescale it yields is shorter than the buildup timescale of a giant protoplanet (see, e.g., Papaloizou & Terquem 1999). We shall not address this issue here but rather assume that a giant planet embryo can form in the disk at a distance $r \geq 1$ AU and with a mass $M > M_{\text{crit}}$, where $M_{\text{crit}} \sim 15 M_{\oplus}$ is the critical mass above which rapid gas accretion begins.

When this embryo mass is large enough, it enters another well-studied migration regime, called type II migration (Ward 1997). In this regime, the protoplanet has a mass sufficient to open a gap in the disk, which is therefore split into an inner disk and an outer disk. The protoplanet then finds itself locked into the disk viscous evolution drifting inward with it (Lin & Papaloizou 1986; Trilling et al. 1998). As the protoplanet undergoes type II migration toward the central object, it may accrete the surrounding nebula material. The accretion rate scales with the mass accretion rate onto the central object $\dot{M}_p \sim 3\pi\nu\Sigma$, where Σ is the disk surface density. Here one assumes that the processes at work in the disk that contribute to the angular momentum exchange between neighboring rings can be adequately modeled by a

¹ Corresponding author.

phenomenological kinematic viscosity ν . On the other hand, the type II migration timescale is of the order of the disk viscous timescale $\tau_{\text{mig}}^{\text{II}} \sim r^2/3\nu$. The maximum mass that a giant protoplanet can accrete on its way to the central object should be therefore of the order of $M_p \sim \dot{M}_p \tau_{\text{mig}}^{\text{II}} \sim \pi r^2 \Sigma$, that is, of the order of the disk mass interior to the planet starting distance. Noticeably, this mass does not depend on the disk viscosity. If the planet does not migrate all the way to the central object before the disk is dispersed, then because more time is spent at larger radii, it is most likely to be left with a semimajor axis larger than the typical one for hot Jupiters (0.05–0.2 AU; see Trilling, Lunine, & Benz 2002). This is consistent with the observed paucity of planets with masses exceeding two Jovian masses at short periods (Zucker & Mazeh 2002). Note too that planets undergoing type II migration should tend to have higher masses at shorter periods. This is contrary to the observed trend. Furthermore, as the planet mass grows, it becomes eventually larger than the surrounding disk mass, and its migration rate tends to drop, as the disk cannot remove enough angular momentum from it. This has been investigated by Ivanov, Papaloizou, & Polnarev (1999). In this case, the amount of time necessary to bring the planet to a close orbit can be considerably larger than the disk viscous timescale and can even exceed the disk lifetime. This migration slowing can be seen in the simulations of Nelson et al. (2000). It occurs *soon* after the planet has entered its type II migration regime.

From the above considerations, it is questionable whether the orbital characteristics of most close orbiters can be accounted for by type II migration driven by the evolution of the disk. Furthermore, the vast majority of these have sub-Jovian masses (here one excepts τ Boo and GJ 86, which have large masses and may have had a different origin). Depending on the physical conditions of the protoplanetary disks in which they formed, they may not have fulfilled the gap opening criteria (Lin & Papaloizou 1986 and references therein), with the consequence that they may have been involved in a migration regime intermediate between type I and type II.

This transitional regime has received little attention. Ward (1997) and Ward & Hourigan (1989) have worked out the feedback on the migration rate due to the nebula surface density profile perturbation under the action of the protoplanet Lindblad torques. They introduced the concept of an inertial limit, that is, the maximum mass of a protoplanet that can undergo steady state migration. It was suggested that masses above the inertial limit lead to a gap opening and to type II migration. In their analysis, Ward & Hourigan (1989) neglected the coorbital dynamics and the corotation torque it implies on the migrating planet. The purpose of this work is to give an evaluation of the corotation torque for a migrating planet and to analyze its consequences on migration. We define the notation in § 2, present an appropriate expression for the corotation torque for a planet held on a fixed circular orbit in § 3, then derive the corotation torque for a migrating planet in § 4, and illustrate its properties using customized numerical simulations in § 5. As we investigate the intermediate regime between type I and type II migration, for which the disk response is affected by non-linear effects, the Hill radius and the disk thickness have

comparable orders of magnitude. The regime of interest thus involves mildly embedded protoplanets. We assume that it can be safely studied through two-dimensional flat disk calculations provided that a reasonable value is adopted for the gravitational potential smoothing length. In § 6 we demonstrate the existence of runaway migration and relate the condition for its occurrence to the analytic discussion in § 4. Finally, in § 7 we summarize our results and discuss their application to EGPs.

2. NOTATION

We adopt a cylindrical coordinate system (r, θ, z) centered on the primary, the origin of which corotates with the planet that is located at azimuth $\theta = 0$. We consider a thin gaseous disk with midplane at $z = 0$, with surface density $\Sigma(r)$, orbiting a central pointlike object of mass M_* . The associated Keplerian frequency is $\Omega_K(r) = (GM_*/r^3)^{1/2}$. In the unperturbed disk the orbital frequency is $\Omega_0(r)$, which is usually slightly smaller than $\Omega_K(r)$ because the central acceleration is compensated for by not only the centrifugal acceleration but also a radial pressure gradient. The disk thickness is $H(r)$, and the disk aspect ratio is $h(r) = H(r)/r$. In this disk we consider an embedded planet with mass M_p (we note $q = M_p/M_* \ll 1$) and semimajor axis a . Its orbital frequency is $\Omega_p = \Omega_K(a)$. We shall restrict ourselves to the case in which its eccentricity e can be neglected. We now write the angular frequency as $\Omega(r, \theta) = \Omega_0(r) + v/r$, and we denote by $u(r, \theta)$ the radial velocity of the fluid element at (r, θ) .

3. COROTATION TORQUE FOR A PLANET ON A FIXED CIRCULAR ORBIT

The link between the corotation torque and the horseshoe orbit drag has been indicated by Ward (1991, 1992). A torque estimate for a planet on a fixed circular orbit embedded in a viscous disk has been given by Masset (2001), who considered a steady flow as seen in the planet frame. We here derive an expression for the corotation torque in a disk with very small viscosity. Then the specific vorticity is conserved along a streamline (Balmforth & Korycansky 2001 and references therein).

We assume a steady flow in the planet frame. As we assume that the viscosity is low, we can write a Bernoulli invariant along a streamline:

$$J = \frac{u^2 + r^2(\Omega - \Omega_p)^2}{2} + \phi_{\text{eff}} + \eta, \quad (1)$$

where η is the fluid specific enthalpy and $\phi_{\text{eff}} = \phi - r^2\Omega_p^2/2$, with ϕ being the gravitational potential. The Bernoulli invariant is a useful label of the librating streamlines in the horseshoe region. The corotation torque expression, following Ward (1991), can be obtained by summing the contribution to the torque due to individual fluid elements over the horseshoe annular slab. The positive contribution coming from the outer fluid elements caught up by the planet, when they execute a U-turn in front of the latter, reads

$$\Gamma^+ = \int_{r_c}^{r_c+x_s} \Sigma(r_+) r_+ (\Omega_p - \Omega) [j(r_+) - j(r_-)] dr_+, \quad (2)$$

where x_s is the horseshoe zone half-width, $j(r) = r^2\Omega$ is the

specific angular momentum, r_c is the corotation radius, and we add an index $+$ ($-$) to any quantity to refer to its value on the outer (inner) part of its horseshoe streamline. The gradient of the Bernoulli invariant is linked to the flow vorticity (see, e.g., Foglizzo & Ruffert 1997). If we denote by ω the vertical component of the flow vorticity in the inertial frame, then we have

$$\frac{\partial J}{\partial r} = r\omega(\Omega - \Omega_p), \quad (3)$$

where we use the fact that $r\Omega^2 = \partial(\phi + \eta)/\partial r$ and evaluate this expression sufficiently far from the planet so that we can assume $u = 0$ and neglect the dependency of J on θ . This allows one to transform equation (2) as

$$\Gamma^+ = - \int_{J(r_c)}^{J(r_c+x_s)} \frac{\Sigma(J)}{\omega} \gamma(J) dJ, \quad (4)$$

where $\gamma(J) = j(r_+) - j(r_-)$ is the specific angular momentum drop of a fluid element as it switches from the outer horseshoe leg to the inner one. If $w = \Sigma/\omega$ is the inverse of the specific vorticity, then

$$\Gamma^+ = 16|A_p|B_p^2a \int_0^{x_s} w(x)x^2 dx, \quad (5)$$

where $A_p = \frac{1}{2}r\partial\Omega/\partial r$ and $B_p = (1/2r)\partial(r^2\Omega)/\partial r$ are, respectively, the first and second Oort's constants, evaluated at the planet orbit. Here we assume that the planet mass is small enough that we can consider that a fluid element on an outer horseshoe leg at $r = x + a$ is mapped on the inner leg with radius $r = a - x$, we have developed $\gamma(x)$ to first order in x [$\gamma(x) = 4B_pax$], and we have assumed $r_c = a$. A similar treatment for the inner horseshoe leg yields the torque exerted on the protoplanet by the fluid elements that catch the planet up and are promoted to higher specific angular momentum orbits:

$$\Gamma^- = 16|A_p|B_p^2a \int_0^{-x_s} w(x)x^2 dx. \quad (6)$$

It should be noted that the corotation torque, in the non-linear regime (i.e., for x_s finite), should include all the fluid elements that corotate, in average, with the planet, that is to say, all the fluid elements that librate in the corotating frame. This includes not only the horseshoe streamlines but also the circumplanetary disk (corresponding to the closed streamlines interior to the Roche lobe). We find it more convenient to consider only the horseshoe drag exerted on the system planet plus circumplanetary disk, considered as a whole, and hereafter the planet should be understood as this system.

4. COROTATION TORQUE ON A MIGRATING PLANET

We shall now use equations (5) and (6) to evaluate the torque on a migrating object. We separate the orbital timescale $O(\Omega^{-1})$ (which is also the horseshoe U-turn timescale from one leg to another) from the horseshoe libration timescale $O(\Omega^{-1}a/x_s)$, which is much longer. In particular, we neglect migration over the orbital timescale, while we consider it over the libration timescale. We say that migration is slow whenever the libration time of an outermost fluid element close to the separatrix between librating and circulating

streamlines is short compared to the migration time across the horseshoe zone half-width. As the former quantity is $2\pi a/(|A_p|x_s)$ and the latter $x_s/|\dot{a}|$, the condition for slow migration reads

$$|\dot{a}| \ll \frac{|A_p|x_s^2}{\pi a}, \quad (7)$$

which is also, for a Keplerian disk,

$$|\dot{a}| \ll \frac{3}{2} \frac{x_s}{\tau_{\text{orb}}} \frac{x_s}{a}, \quad (8)$$

where $\tau_{\text{orb}} = 2\pi/\Omega$ is the orbital timescale. We assume that equations (5) and (6) are still valid, provided that care is taken about the evaluation of $w(x)$. In particular, as the planet migrates, the ‘‘impact parameter’’ $x = r - a$ of a fluid element varies as its azimuth varies. We therefore have to consider the outer incident fluid elements at an azimuth $\theta_R \gtrsim 0$. This azimuth needs to be small enough so that no significant radial drift occurs between the fluid element and the planet before the close encounter and large enough so that the close encounter has not begun yet. Similarly, the azimuth at which the incident inner fluid elements need to be considered has to be $\theta_L \lesssim 2\pi$. We use the index R (L) for the quantities relating to the close encounters originating from $\theta_R \gtrsim 0$ ($\theta_L \lesssim 2\pi$). The positive part of the corotation torque is given by

$$\Gamma_+ = 16|A_p|B_p^2a \int_0^{x_s} w_R^+(x)x^2 dx, \quad (9)$$

while the negative part of the corotation torque is given by

$$\Gamma_- = 16|A_p|B_p^2a \int_0^{-x_s} w_L^-(x)x^2 dx. \quad (10)$$

Note that we assume the value of x_s to be the same as in the nonmigrating case. Although this needs to be reconsidered for a significant drift rate, this is surely true as long as migration is slow (with the meaning defined earlier in this section). The numerical simulations presented in the next section will be used to check this assumption. The sum of equations (9) and (10) can be transformed so that values of $w_L(x)$ and $w_R(x)$ on the same side of the orbit are considered. Care has to be taken about the sign of \dot{a} before making this transformation. We shall assume hereafter that $\dot{a} < 0$. Hence,

$$\Gamma = 16|A_p|B_p^2a \int_{-x_s}^0 [w_R^-(x) - w_L^-(x)]x^2 dx, \quad (11)$$

where we use the fact that $w_R^+(x) = w_L^-(x)$ for any x in $(-x_s, +x_s)$, since all of the fluid elements that execute a right U-turn are trapped in the coorbital region (see also Figs. 16 and 17 in the Appendix).

We shall now temporarily assume a steady migration case ($\ddot{a} = 0$). We call $f : x \rightarrow y$ the mapping of a fluid element, between two close encounters with the planet. This notation is illustrated in Figure 1. Consider a fluid element initially located at the distance x of the orbit just after a close encounter. Its distance to the orbit just before the next close encounter is

$$y = f(x) = x + \frac{\pi a}{|A_p|x} \dot{a}, \quad (12)$$

where we assume that $y \simeq x$ (i.e., slow migration). Within

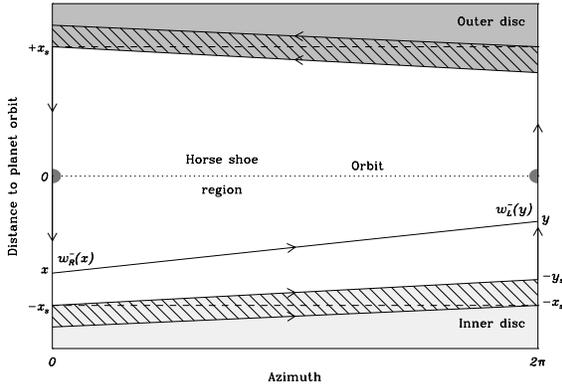


FIG. 1.—Sketch of a fluid element path for a situation with $\dot{a} < 0$. The planet is orbiting to the right. It is located at $\theta = 0 \pmod{2\pi}$. The fluid element paths are represented in a $(\theta, x = r - a)$ -plane. The separatrices are represented by dashed lines. The distance to the orbit of the fluid element is initially x (just after an R -close encounter) and is y after a half-libration time (just before an L -close encounter). The bottom hashed zone represents the material from the inner disk that will have crossed the inner separatrix before the next close encounter. Therefore, this material participates once in the corotation torque and then flows out of the horseshoe region at the outer separatrix and circulates in the outer disk.

this approximation, the reciprocal map f^{-1} reads

$$x = f^{-1}(y) = y - \frac{\pi a}{|A_p|y} \dot{a}. \quad (13)$$

Because of the conservation of specific vorticity, one can write $w_R^-(x) = w_L^-(y)$, for any x in $(-x_s, 0)$. Equation (11) therefore reads

$$\int_{-x_s}^0 w_R^-(x) x^2 dx = \int_{-y_s}^0 w_L^-(y) \left(y - \frac{\pi a \dot{a}}{|A_p|y} \right)^2 \times \left(1 + \frac{\pi a \dot{a}}{|A_p|y^2} \right) dy, \quad (14)$$

where $y_s = f(x_s)$ and we have taken $x = y = 0$ as an upper limit for both integrals, since the contribution of material close to the orbit is vanishingly small for slow migration.² Expanding the integrand to first order in $a\dot{a}/(|A_p|y^2)$, one can write the corotation torque given by equation (11) as

$$\Gamma_{\text{sm}} = 16|A_p|B_p^2 a \left[\int_{-y_s}^0 w_L^-(y) y^2 \left(1 - \frac{\pi a \dot{a}}{|A_p|y^2} \right) dy - \int_{-x_s}^0 w_L^-(x) x^2 dx \right], \quad (15)$$

where the “sm” index stands for “steady migration.”

² More precisely, the material at low $|x|$ is not mapped onto y , and one should write $-x_T$ as an upper limit of the left-hand side integral of eq. (14) instead of 0, where $-x_T$ is defined by $f(-x_T) = 0$. One finds $x_T^3 = 8\pi a \dot{a} / (3\Omega)$. The contribution of material in the $(-x_T, 0)$ region is therefore $\sim \frac{1}{3} w_R(0) x_T^3$, and scales as $\dot{a}^{3/2}$, whereas the effect of migration on the corotation torque is in \dot{a} . The relative contribution of this innermost material is therefore vanishingly small for slow migration, and it is safe to write 0 as an upper limit for the left-hand side integral.

Equation (15) can be transformed into

$$\Gamma_{\text{sm}} = 16|A_p|B_p^2 a \left[- \int_{-y_s}^0 w_L^-(y) \frac{\pi a \dot{a}}{|A_p|} dy - \int_{-x_s}^{-y_s} w_L^-(x) x^2 dx \right]. \quad (16)$$

The first integral (over y , from $-y_s$ to 0) corresponds to the material that librates in the horseshoe region (Fig. 1, white trapezoidal area). The corresponding torque expression is

$$\Gamma_1 = -16\pi B_p^2 a^2 \dot{a} \int_{-y_s}^0 w_L^-(y) dy = -2B_p a \dot{a} M_{\text{coorb}}, \quad (17)$$

where M_{coorb} , the “vorticity-weighted coorbital mass,” is defined as

$$M_{\text{coorb}} = 4\pi a B_p \int_{-y_s}^0 \frac{\Sigma_L(y)}{B(y)} dy = 4\pi a B_p \int_{-x_s}^0 \frac{\Sigma_R(x)}{B(x)} dx. \quad (18)$$

This component Γ_1 of the torque arises because the librating fluid elements migrate radially with the planet and have to lose specific angular momentum at the same rate as the latter. For the case of an inward migration, the torque exerted on this region by the planet is negative. It exerts therefore a positive torque on the planet and thus has a negative feedback on migration. A similar conclusion applies for the case of an outward migration.

The second integral in equation (16) can be evaluated assuming $y_s \approx x_s$ (i.e., slow migration), in which case it reduces to

$$\Gamma_2 = -16|A_p|^2 B_p^2 a (x_s - y_s) w_L(-x_s) x_s^2 = 8\pi B_p^2 a^2 x_s \dot{a} \frac{\Sigma(-x_s)}{B(-x_s)}. \quad (19)$$

As this torque corresponds to the integral over $-x_s < y < -y_s$, it comes from the fluid elements of the hashed area of Figure 1. These fluid elements are promoted to higher specific angular momentum trajectories after their (unique) close encounter with the planet. For the case of inward migration, they therefore contribute negatively to the corotation torque and hence exert a positive feedback on migration.

When one adds equations (17) and (19), one gets the following torque expression:

$$\Gamma = 2B_p a \delta m \dot{a}, \quad (20)$$

where we introduce the “vorticity-weighted coorbital mass deficit” defined as

$$\delta m = 8\pi a \left[x_s w_R(-x_s) - \int_{-x_s}^0 w_R(x) dx \right] B_p = 4\pi a \left[x_s \frac{\Sigma_R(-x_s)}{B(-x_s)} - \int_{-x_s}^0 \frac{\Sigma_R(x)}{B(x)} dx \right] B_p. \quad (21)$$

If one neglects the radial variation of $B(x)$ across the horseshoe region, the coorbital mass deficit appears as the mass

difference between the mass of the horseshoe region, if the material in it had everywhere the surface density that it has at the inner separatrix, and its actual mass. As the coorbital region is generally depleted, this coorbital mass deficit is positive.

One can then get an estimate of the torque for a non-steady migration using the following simple argument: if \dot{a} varies, the mass flux across the upstream separatrix varies, and this will have an impact on the torque exerted on the planet when the deficit or excess of in-flowing mass with respect to a steady state situation undergoes a close encounter with the planet, i.e., after a characteristic time equal to $\tau_{\text{lag}} = \tau(x_s)/2$, where $\tau = (\pi a/|A_p|)|x|^{-1}$ is half the libration time, i.e., the time a fluid element at a distance $|x|$ from the orbit needs to go from azimuth $\theta_R \approx 0$ to azimuth $\theta_L \approx 2\pi$. Therefore, τ_{lag} is the time that a fluid element opposite the planet needs to drift to attain conjunction with it. One can therefore write

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_{\text{sm}}[\dot{a}(t - \tau_{\text{lag}})] \\ &= \Gamma_{\text{sm}}(\dot{a}) - \tau_{\text{lag}} \ddot{a} \frac{d\Gamma_{\text{sm}}}{d\dot{a}} \\ &= 2B_p \delta m a \dot{a} - \frac{\pi a^2 B_p}{|A_p| x_s} \delta m \ddot{a}. \end{aligned} \quad (22)$$

An exact method to evaluate the \ddot{a} term in the slow migration limit, when one knows the specific vorticity profile across the horseshoe region, is provided in the Appendix. It can be noted that this torque expression cancels out for a planet held on a fixed circular orbit ($\dot{a} = \ddot{a} = 0$). This is expected as we have used $w_R^-(-x) = w_R^+(x)$, i.e., that the specific vorticity is conserved along a streamline. Hence, in the absence of migration, the torque is saturated. We could have used another dependency of $w_R^-(-x)$ on $w_R^+(x)$, involving a radial gradient of specific vorticity, which would have led to a constant term that we would interpret as the “static” part of the corotation torque. However, as our concern is to capture the planet drift effects on the torque, this would not have brought further insight regarding the runaway process we aim at characterizing.

We note $\Delta\Gamma_{\text{LR}}$, the other torque that is applied to the planet, which corresponds to nonlibrating (i.e., circulating) material, which we assume to correspond to the differential Lindblad torque. Assuming that migration occurs with a negligible eccentricity, we have

$$2B_p a M_p \dot{a} = \Gamma + \Delta\Gamma_{\text{LR}}. \quad (23)$$

This takes also the following form:

$$2B_p a (M_p - \delta m) \dot{a} = \Delta\Gamma_{\text{LR}} - \frac{\pi a^2 \delta m B_p}{x_s |A_p|} \ddot{a}, \quad (24)$$

which also takes the following form in the Keplerian case:

$$a \frac{\Omega_p}{2} (M_p - \delta m) \dot{a} = \Delta\Gamma_{\text{LR}} - \frac{\pi a^2 \delta m}{3x_s} \ddot{a}. \quad (25)$$

Assuming that the \dot{a} variations, if any, occur on a time interval short enough to consider a as a constant, one gets two different behaviors from equation (24):

1. $M_p > \delta m$.—The coorbital mass deficit is smaller than the planet mass, which is the case for either sufficiently low planet masses or a large planet mass, when the planet mass

is comparable to or larger than the surrounding disk. In that case the coorbital mass deficit cannot become larger than the planet mass. Then the corresponding homogeneous equation indicates that disturbances to a are damped on the short timescale

$$\tau_d \simeq \tau_{\text{orb}} \frac{a}{x_s} \frac{\delta m}{M_p - \delta m}. \quad (26)$$

One can therefore discard transient behavior, retaining only the standard first-order ordinary differential equation (o.d.e.) for migration:

$$a \frac{\Omega_p}{2} (M_p - \delta m) \dot{a} = \Delta\Gamma_{\text{LR}}, \quad (27)$$

where the only difference with the usual expression is that we replace the planet mass alone M_p by the “planet effective mass” $m_{\text{eff}} = M_p - \delta m$.

2. $M_p < \delta m$.—The planet mass is large enough to open a significant dip in the disk, and the latter is substantial enough for the coorbital mass deficit to be larger than the planet mass. In that case the homogeneous o.d.e. associated with equation (24) indicates that small perturbations to a are exponentially growing on a timescale τ_d , which, although depending on the exact value of $|M_p - \delta m|/M_p$, is of the order of a few tens of orbital periods (assuming, as is reasonable for a mildly embedded object in a typical protoplanetary disk, that $x_s/a \sim 0.1$). The assumptions that we made to derive equation (22), namely, migration slow enough that the dip profile drifts instantaneously with the planet and slow enough that the horseshoe zone crossing time is much larger than the libration time, rapidly break down, and one can only say at this point that this runaway regime is extremely fast and that it occurs for $\delta m > M_p$. The actual behavior of a protoplanet in this regime has to be assessed through numerical simulations. Since the ultimate sign of \ddot{a} depends on the initial values of a and \dot{a} , runaway can in principle occur outward under specific initial conditions that need to be specified.

5. NUMERICAL SIMULATIONS

5.1. Code Description

We performed a series of dedicated numerical simulations to test the runaway regime and the validity of equation (27). The code that we used has already been described elsewhere (see, e.g., Nelson et al. 2000). As this code is a Eulerian grid-based code, it must fulfill the Courant condition on the time step to ensure numerical stability. An improved algorithm resulting in a less demanding CFL condition, with the average azimuthal velocity at each radius subtracted out (Masset 2000a, 2000b), was used in order to increase the time step and speed up the code. The grid corotates with the guiding center of the planet osculating orbit. As a result, the planet motion with respect to the grid is slow and mainly corresponds to a radial drift. Our rotating frame is angularly accelerated. The corresponding acceleration, that is, $\mathbf{r} \times \Omega_p \mathbf{e}_z$, is applied in much the same way as Kley (1998) handles the Coriolis acceleration in a rotating frame, so as to enforce angular momentum conservation. As these dedicated runs involve as accurate as possible a torque evaluation, we used nonreflecting boundary conditions so as to eliminate any reflected wave (which can bring back to the

planet the angular momentum previously removed from it), and we used an initial profile with uniform specific vorticity (i.e., with $\Sigma \propto r^{-3/2}$, which leads to a constant drift rate \dot{a} up to the center, if one only considers the differential Lindblad torque). Our mesh consists of 450 sectors equally spaced in azimuth, divided radially in 143 zones, the successive radii of zone boundaries being in geometric progression.

5.2. Units and Setup

Our unit of mass is the central object mass M_* , our unit of length is the initial planet semimajor axis a_0 , and our unit of time is $\Omega_K(a_0)^{-1}$. In this system of units, the gravitational constant is therefore $G = 1$. The mesh outer boundary lies at $2.5a_0$ and the inner boundary at $0.4a_0$. We use a uniform aspect ratio disk with $h(r) \equiv 0.03$. The resolution of our mesh is barely sufficient to accurately describe the differential Lindblad torque acting on the planet. On the other hand, it is enough for a proper description of coorbital effects (Masset 2002). Our planet mass is $M_p = 3 \times 10^{-4}$ (which corresponds to a Saturn mass planet if the central star has a solar mass). We used a number of disk surface density profiles

$$\Sigma(r) = S_n \times 10^{-4} r^{-3/2}, \quad (28)$$

with the following values: $S_0 = 0.5$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1.5$, $S_3 = 2$, $S_4 = 3$, $S_5 = 5$, $S_6 = 8$, $S_7 = 12$, and $S_8 = 20$. We used a uniform kinematic viscosity $\nu = 10^{-5}$ throughout the disk. The planet was initially held on a fixed circular orbit for 477 orbits ($t = 3000$) in order to give it a sufficient time to open a dip/gap around its orbit. This creates a depression of the specific vorticity profile that can lead to the effect we described in § 2. It should be noted that the coorbital mass deficit that arises during the first 477 orbits just scales with the disk surface density, that is to say, $\delta m \propto \Sigma_0$, where $\Sigma_0 = \Sigma(a_0)$. Equation (27) can therefore be written as

$$(M_p - K\Sigma_0)\dot{a} = K'\Sigma_0, \quad (29)$$

where the constants K and K' both depend on M_p and the disk parameters, but this dependency does not need to be considered here as we only vary the disk surface density in these runs. Equation (29) can be written as

$$\ddot{a}^{-1} = A(\Sigma_0^{-1} - \Sigma_{\text{crit}}^{-1}), \quad (30)$$

where we introduce the critical surface density Σ_{crit} for migration runaway, with A being a proportionality constant that is simply related to the differential Lindblad torque, as one can see by letting $\Sigma_0 \rightarrow 0$. The novelty here is that the migration rate below the runaway limit grows faster than linearly with the disk surface density. Our simulations aim at testing this superlinearity by checking whether the drift rate fulfills equation (30) or not. When it does, we determine the critical disk surface density for runaway and whether we indeed get a runaway for larger surface densities. We also check that the critical surface density so determined is consistent with coorbital mass deficit estimates.

5.3. Smoothing Issues

The protoplanet potential in the runs presented here is smoothed using a softening parameter $\varepsilon = \eta H$, where H is the disk thickness and $\eta = 0.6$. The results turn out to be sensitive to the value of the softening parameter because the horseshoe zone width crucially depends on it. Lowering the

softening parameter moves the separatrices away from the orbit. As a result, the coorbital mass deficit is increased, and the critical surface density for runaway is reduced. However, sensitivity to the softening parameter in a numerical simulation does not necessarily imply that the region within the Roche lobe matters, but rather that coorbital processes matter, as their effectiveness depends strongly on the horseshoe zone width that is linked to it (for details see § 5 of Masset 2002). Note that the discussion of the softening parameter by Masset (2002) is valid only for the case in which the specific vorticity has a linear dependence on the distance to corotation (in which case the corotation torque scales as x_1^3). Here the specific vorticity profile has a depleted, more complex profile, and the analysis is no longer valid. We used a softening parameter comparable to the one derived by Masset (2002), which was found to give reasonable results for the case of mildly embedded planets. It should be kept in mind that if a smaller softening parameter is used, the critical surface density for runaway that we shall discuss later would be even lower than what we found. In that sense the extent of the runaway regime that we shall delineate later in this work can be considered as a conservative estimate.

5.4. Results

We show the temporal behavior of the planet semimajor axis for our nine runs in Figure 2. The origin of time is chosen at the planet release. The first 477 orbits are therefore not shown. One can already notice that the radial drift rate is not proportional to the disk mass. The heaviest disk is indeed “only” 40 times heavier than the lightest one we consider. For the lightest disk the planet migrates about $\sim 1.5\%$ inward over 250 orbits, whereas for the heaviest disk the planet is already at $r = 0.5$ after about 20 orbits. Figure 3 shows the migration rate as a function of time. We see that it is relatively constant for the runs S_0 to S_4 , that a slight global variation can be seen for the run S_5 , and that the other runs, S_6 to S_8 , display a strongly variable migration rate, which peaks at very large values. Some oscillations in the migration rate for S_0 to S_6 can be seen. These can be identified with the planet crossing the boundaries of mesh zones (i.e., the period for these oscillations is $|\Delta r/\dot{a}|$, where

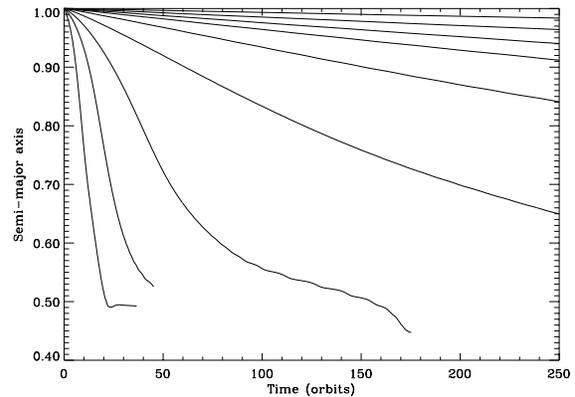


FIG. 2.—Semimajor axis as a function of time, for the different values of S_n , n ranging from 0 to 8 from top to bottom. The behavior is meaningless when a gets close to the grid inner boundary, located at $R_{\text{min}} = 0.4$.

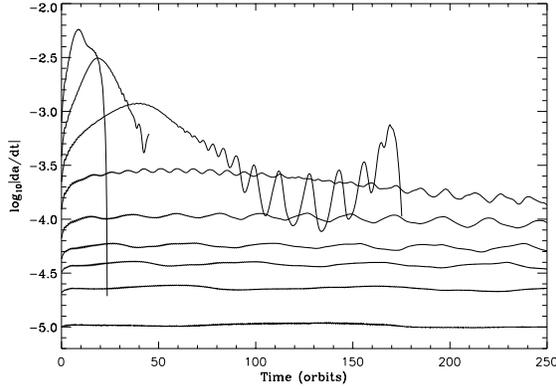


FIG. 3.—Drift rate as a function of time; n ranges from 0 to 8 from bottom to top.

Δr is the radial zone size, which explains why these oscillations are slower for the smaller migration rates). This also gives us an idea of the accuracy of the numerical scheme and of the torque dependency on the planet placement with respect to a mesh zone. This accuracy is satisfactory except for the run S_6 , which exhibits large amplitude variations, but these are likely not relevant since the planet is then close to the grid inner boundary. We can check that the drift rate grows faster than linearly with the disk surface density for runs S_0 to S_5 . We estimate the average migration rate for these runs, over the whole time interval for runs S_0 to S_4 , and over the time interval 40–80 orbits for the run S_5 (we discuss this choice later). Figure 4 shows $|\dot{a}|^{-1}$ as a function of Σ^{-1} . The points are relatively well aligned, as was expected from equation (30). A linear regression fit allows one to determine the critical surface density for runaway and yields $S_{\text{crit}} = 6.7$. The runs S_6 to S_8 , which correspond to disk surface densities larger than this runaway threshold, do indeed exhibit a very fast migration and a strongly time variable migration rate. One can also understand the time behavior of the drift rate in the first orbits of Figure 3. As can be seen in equation (26), the timescale τ_{dt} , over which the migration rate tends to its limiting value given by equation

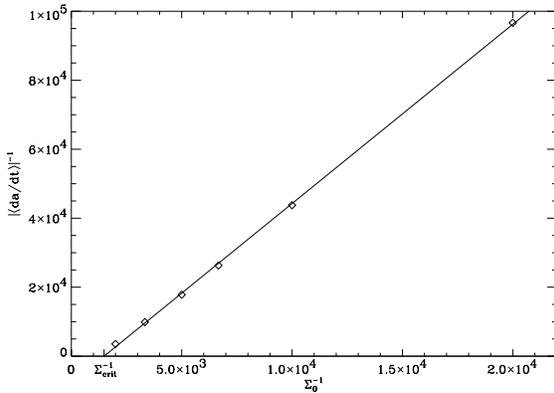


FIG. 4.—Inverse of average drift rate as a function of the inverse of disk surface density.

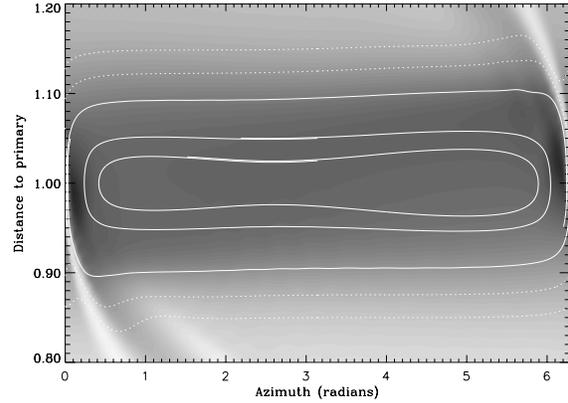


FIG. 5.—Surface density and streamline aspect for any run S_0 to S_5 just before the planet is released. The circulating streamlines are dotted, while the librating ones are solid.

(27), increases when the disk surface density approaches its critical value. This is precisely the trend that we see in our runs. This is the reason we took 40 orbits as a lower time value for estimating the average migration rate for run S_5 . The higher time value of 80 orbits comes from the fact that by then the planet has already migrated a sizable fraction of its initial distance to the star such that its coorbital mass deficit may have been significantly altered.

We finally check whether the critical surface density corresponds to a coorbital mass deficit comparable to the planet mass. We display in Figure 5 the surface density in the coorbital region [in a (θ, r) -plane], and we superimpose a few streamlines. This allows us to get an estimate of the position of the separatrices, which we find at $x_s \approx \pm 0.1a_0$. Once one knows the location of the separatrices, one can estimate the coorbital mass deficit. Figure 6 shows the inverse specific vorticity profile for run S_1 , from which one can estimate a coorbital mass deficit $\delta m = 3.44 \times 10^{-5}$. The latter needs therefore to be $M_p/\delta m = 8.7$ times more massive to fulfill the runaway condition, from which we conclude that the runaway should occur for $S = 8.7$. This value is 30% larger than the value inferred from the linear regression fit. The agreement is, not surprisingly, rough, probably as a result of the various assumptions made to derive equation (21).

5.5. Additional Runs

In addition to the main runs involving freely migrating planets, we have performed a series of additional runs in which the migration rate \dot{a} is fixed in order to check the behavior described by equation (22). Namely, in these runs, the planet was held on a fixed \dot{a} trajectory for 200 orbits. The run was started with semimajor axis $a_0 = 1 - 150(2\pi\dot{a})$ and ended with semimajor axis $a_1 = 1 + 50(2\pi\dot{a})$, so that in all the runs the planet has semimajor axis $a = 1$ at $t = 150$ orbits. The planet is given an instantaneous orbital frequency equal to $\Omega_K(a)$. The runs are performed as before in the frame corotating with the guiding center. The resolution and other numerical values are unchanged with respect to what is described in the previous section. The values adopted for \dot{a} are $\dot{a} = 5 \times 10^{-5}D$, where D is an integer

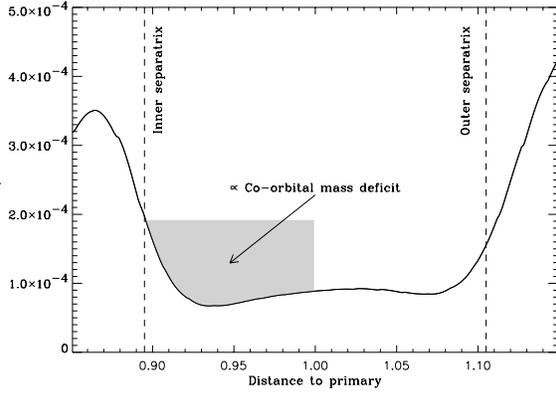


FIG. 6.—Coorbital mass deficit estimate from run S_1 . As can be seen, the profile is depleted in the coorbital region. The coorbital mass deficit is related to the shaded area. The profile is relatively symmetric inside of the coorbital region, which indicates that the corotation torque is saturated (cancels out) in the absence of migration. The inner separatrix position is $x_s = -0.105$. The coorbital mass deficit, as shown here, has to be evaluated from the depleted profile shape between the orbit and the upstream separatrix. For the case of an outward migration the right part of the profile should have been used. As we consider in this case a $\Sigma \propto r^{-3/2}$ profile, this would make no difference as the unperturbed specific vorticity profile is flat.

ranging from -3 to 6 . The surface density in all these runs is $\Sigma_0 = 10^{-4}$, corresponding to $S = 1$.

Figure 7 shows the torque as a function of time for each of the 10 runs performed, and Figure 8 shows the average value of the torque as a function of \dot{a} (the average is taken over the time interval (100, 200) orbits, which eliminates initial transient behavior occurring over the first 100 orbits and ensures that the average semimajor axis of the planet over this time interval is the same for all the runs and is $\bar{a} = 1$).

The torque modulation as the planet sweeps radially the mesh zones is again apparent in Figure 7. These plots confirm the linear dependence of the total torque on the migration rate. One can check that the slope of Γ as a function of \dot{a} is positive, i.e., the feedback is positive, and one can infer from the slope estimate the critical disk surface density for runaway. We note $\gamma = \Gamma/M_p$, the specific torque

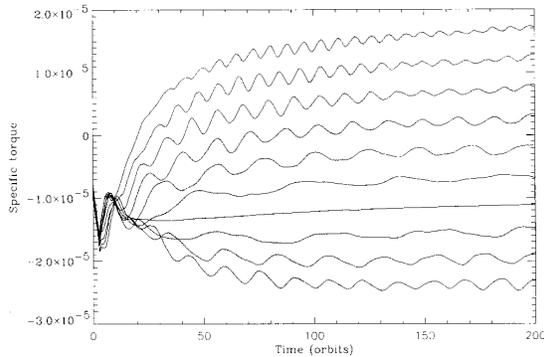


FIG. 7.—Measured total specific torque value (smoothed over a five-orbit temporal window) as a function of time, for runs $D = -3$ to 6 . The value of D increases from bottom to top.

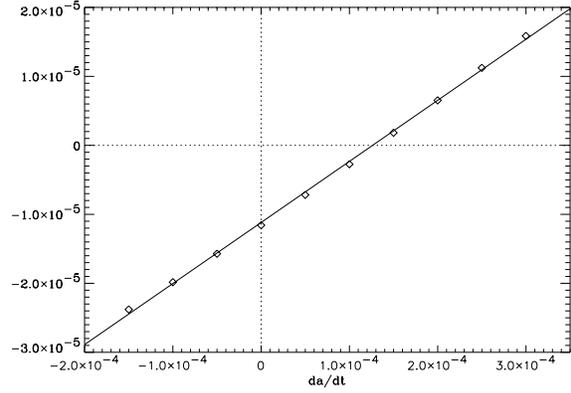


FIG. 8.—Average total specific torque value over the time interval (100, 200) orbits for the runs of Fig. 7, as a function of the imposed drift rate. The solid line shows the linear regression fit performed on the runs. The torque value for $da/dt = 0$ corresponds to the differential Lindblad torque (one can notice that this value is much smaller than what is given by a linear estimate, mainly because of the strong perturbation of the surface density profile). Also note, as stated in § 5.2, that the resolution used in our runs is just barely sufficient to get a proper estimate of the Lindblad torques for the very thin disks that we consider, whereas it is large enough to describe properly coorbital effects.

acting on the planet. We can write, since $\dot{a} = 0$,

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{tot}} &= \gamma + \Delta\gamma_{\text{LR}} \\ &= 2B_p a \frac{\delta m}{M_p} + \Delta\gamma_{\text{LR}}. \end{aligned} \quad (31)$$

We also have the relationship

$$\delta m = \frac{M_p \Sigma}{\Sigma_{\text{crit}}}, \quad (32)$$

since δm scales with Σ , and since the runaway starts for $\delta m = M_p$. If we call \mathcal{S} the slope of γ_{tot} as a function of \dot{a} , then we have

$$2B_p a \frac{\Sigma}{\Sigma_{\text{crit}}} = \mathcal{S}. \quad (33)$$

The linear regression fit displayed at Figure 8 yields $\mathcal{S} = 0.088$, from which one infers $\Sigma_{\text{crit}} = 5.7 \times 10^{-4}$, in good agreement (within $\sim 15\%$) with the estimate given by the linear regression fit of Figure 4. This is, however, only in rough agreement with the result given by the coorbital mass deficit estimate.

These additional runs also enable one to check whether the assumption that the horseshoe zone width does not depend on the drift rate is valid or not. We evaluate the distance x_s of the inner separatrix to the orbit at time $t = 150$ orbits for all the runs. We find that $x_s = 0.105 \pm 0.005$ and that this quantity exhibits no systematic trend with \dot{a} .

5.6. Corotation Torque in the Fast Migration Regime

The previous section illustrates the linear dependency of the coorbital corotation torque on the drift rate in the slow migration regime (i.e., $\dot{a} \ll |A_p| x_s^2 / \pi a$). In order to investigate the fast migration regime and, in particular, in order to get an idea of the migration rates that can be achieved in a

runaway episode, it is of interest to know the $\Gamma(\dot{a})$ relationship for large values of \dot{a} . The problem in that regime is that if an external operator imposes a fixed large drift rate to the planet, the latter sweeps a sizable fraction of its initial orbital radius in a very short time, and no reliable value can be measured for the corresponding torque. A workaround can be found as follows. As the torque that we aim at measuring arises from a relative drift of the disk material with respect to the planet horseshoe region, one can mimic this drift by adding an external specific torque to the disk material in order to make the fluid elements drift radially, while the planet is held on a fixed circular orbit. That way a steady state situation can be achieved, which allows a precise measurement of the torque even for very large drift rates. Namely, we performed a number of runs for which the following conditions apply:

1. The planet is held on a fixed circular orbit with radius $a = 1$.
2. The disk material undergoes an additional, external specific torque, with expression

$$\gamma_{\text{add}} = \frac{2B(r)av_d\Sigma_p}{\Sigma_0(r)}, \quad (34)$$

where v_d is the disk material radial drift velocity at the planet orbit and $\Sigma_0(r)$ is the unperturbed surface density; this expression ensures that the radial drift velocity in an axisymmetric situation, that is, $u = v_d[\Sigma_p a / \Sigma_0(r)r]$, corresponds to a steady state situation [i.e., that $\partial(\Sigma ru) / \partial r = 0$].

3. A source of disk material with the adequate surface density is set at the grid outer (inner) boundary for $v_d < 0$ ($v_d > 0$). This ensures that no disk depletion occurs at large v_d , which would modify the surface density profile and therefore would affect the torque value.

This torque prescription leads to the radial drift of any structure in the surface density profile in much the same way as for a viscous drift, but contrary to the latter, it does not lead to a radial spread of the profiles. We ran 16 such configurations, with $v_d^i = -5 \times 10^5 (2^{i/2})$ ($0 \leq i \leq 15$). As this corresponds to an inward drift of the disk material, the upstream separatrix is the outer separatrix, and therefore the torque value should correspond to the ones measured in the previous section for positive values of \dot{a} . The results are presented in Figures 9 and 10. Clearly there is a satisfactory agreement between these results and the results obtained in the previous section for the case of true slow migration, as can be seen on the left part of the plots. This validates this method as an alternate way of measuring the corotation torque dependence on the migration rate. This agreement can be understood using similar arguments as the ones used by Masset (2001) to evaluate the corotation torque in a viscous disk. The librating fluid elements define a trapped region, the angular momentum of which is therefore constant in time. The external torque applied on this region is therefore exactly transmitted to the planet in a steady state situation. One can easily show that to lowest order in x/a an expression similar to equation (20) is obtained for the corotation torque. The agreement between the measured torques for a drifting planet and for a backward-drifting disk, as well as the similarity of the flow topology in the $(\theta, r - a)$ -plane in either case, suggests that the torque measurement for a drifting disk, even in the fast migration limit, gives a reasonable idea of the behavior of the corotation torque on a migrating

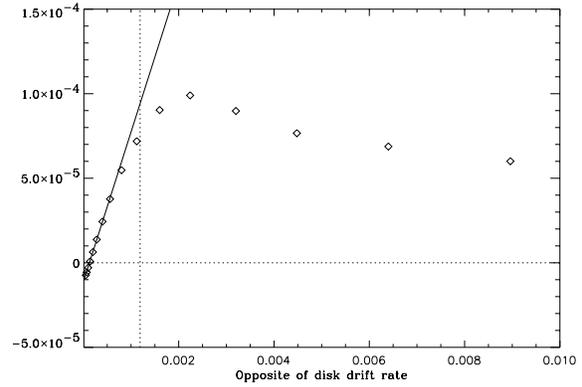


FIG. 9.—Total specific torque acting on the planet as a function of the opposite of the imposed disk drift, with a linear scale on the x -axis. The solid line shows the linear regression fit that was obtained from the data of Fig. 8. The vertical dotted line shows the critical drift rate $|\dot{a}_c|$ for fast migration.

planet. This new method also offers the advantage that the planet is fixed with respect to the grid, and therefore there is no torque modulation as observed in Figure 7 when the planet sweeps the mesh zones; thus, it enables us to get a more precise estimate of the disk torque. The critical drift rate for fast migration is

$$|\dot{a}_c| = \frac{|A_p| x_c^2}{2\pi a}. \quad (35)$$

Below this rate, all of the disk fluid elements crossing the upstream separatrix undergo a horseshoe-like close encounter with the planet and contribute to the corotation torque, while above this rate, some of them miss the planet. In the fast regime, which corresponds to the right part of the plots of Figures 9 and 10, the corotation torque reaches a maximum value and then slowly decays, while its characteristic order of magnitude is

$$\Gamma_{\text{fast}} = 2B_p a \delta m \dot{a}_c. \quad (36)$$

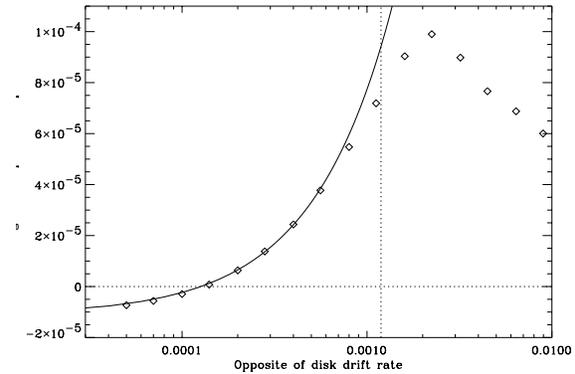


FIG. 10.—Same as Fig. 9, but with a logarithmic scale on the x -axis. This plot offers a number of similarities with the relationship of torque vs. viscosity (Masset 2002).

In the series of runs presented in § 5.4, δm scales with the disk surface density. The maximum drift rate should therefore roughly scale with the disk surface density during a runaway episode. This is in agreement with the results displayed in Figure 3.

5.7. Outward Runaway Migration

Since in the runaway regime the differential equation governing the time evolution of the planet semimajor axis is second order in time, it is formally possible to have an outward migration for an adequate choice of the initial a and \dot{a} . For an outward migration, the upstream separatrix is the outer one. The higher the (inverse of the) specific vorticity jump across that separatrix, the easier it is to get an outward migration. Therefore, outward migration should be easier to get for shallower surface density profiles (corresponding to steeply increasing profiles of Σ/B). The weakening of the differential Lindblad torque for shallower surface density profiles (Tanaka et al. 2002) plays in the same direction, since this torque tends to favor inward runaway rather than outward runaway. In order to illustrate this trend, we have performed a series of runs in which we hold the planet on a fixed $\dot{a} > 0$ orbit for 100 orbital times and then release it (i.e., we allow it to freely migrate under the action of the disk torque). The planet mass, disk aspect ratio and viscosity, grid resolution, and numerical algorithm were strictly the same as in § 5.4, and the disk surface density was $\Sigma(r) = 10^{-3}r^\alpha$, corresponding for $r = 1$ to $\mathcal{S} = 10$, i.e., approximately 50% above the runaway critical surface density. We tried four values for α : $-3/2$, -1 , $-1/2$, and 0 , corresponding to an increasingly shallower surface density profile. The starting semimajor axis is $a = 0.7$, and the semimajor axis at the time of release ($t = 100$ orbital times) is $a = 1$, which ensures that in the four runs the disk surface density at the planet orbit is the same at the release time and only differs by its slope. We see in Figure 11 that the planet undergoes an inward runaway for the two steepest surface density profiles and an outward runaway for the two shallowest. The maximum \dot{a} is of the same order of magnitude in the four cases, and the runaway starting time, corre-

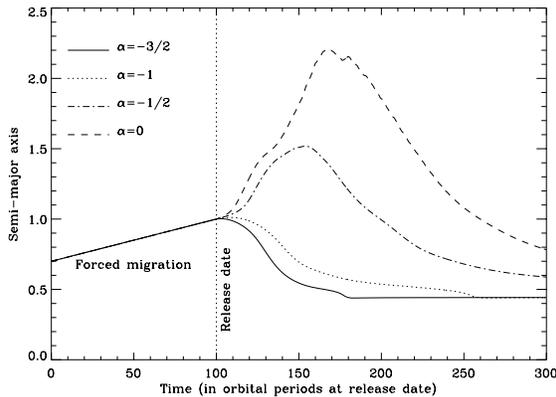


FIG. 11.—Time evolution of the planet semimajor axis for the four runs detailed in text. An outward runaway occurs for the two shallowest surface density profiles. The inner grid boundary is located at $r = 0.4$, and the curves lose significance whenever the planet gets close to this inner boundary.

sponding to the short exponential regime in which migration can be considered as slow ($|\dot{a}| < |\dot{a}_c|$), is of the order of 10 orbits, comparable to the outermost horseshoe libration time. This illustrates that a common mechanism is at work for the inward and outward runaways and that these are tightly linked to the coorbital dynamics.

6. DISCUSSION

6.1. Occurrence of Runaway Migration

In order to assess the importance of runaway migration in protoplanetary nebulae, we have tried to delineate the runaway migration domain borders in a (planet mass, disk mass) space, while keeping the disk aspect ratio and viscosity fixed. All our disks have $\Sigma_0(r) \propto r^{-3/2}$ and a viscosity $\nu = 10^{-5}$. We tried three values of the disk aspect ratio: $h = 0.03, 0.04$, and 0.05 , corresponding to values for the α parameter 1.1×10^{-2} , 6.3×10^{-3} , and 4×10^{-3} , respectively. We call disk mass the quantity $m_D = \pi a^2 \Sigma_0(a)$ and disk reduced mass the quantity $\mu = m_D/M_*$. The critical disk mass for runaway depends on the planet mass, as it depends on the dip shape around the orbit and the position of the separatrices. In order to determine the disk critical mass, we measure the disk torque exerted on the planet, which is held on a fixed circular orbit, for the case in which we exert no additional torque on the disk material (we do not impose any additional disk radial drift other than the one arising from its viscous evolution) and for the case in which we exert an additional torque on the disk material (which corresponds to imposing an additional radial drift of the disk material with velocity v_d). In the first case we measure a torque Γ , and in the second case a torque Γ' . From equation (22) and § 5.6, these two torques can be written, respectively, as

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Delta\Gamma_{\text{LR}} , \\ \Gamma' &= \Delta\Gamma_{\text{LR}} - 2B_p a v_d \delta m , \end{aligned} \quad (37)$$

where $\Delta\Gamma_{\text{LR}}$, the differential Lindblad torque, is assumed to be independent of the disk radial drift velocity and the “static” part of the corotation torque vanishes since we consider initially a uniform specific vorticity disk. As the planet is held on a fixed circular orbit and a stationary state is reached, one can use equation (32), which yields

$$\Sigma_{\text{crit}} = -\frac{2B_p M_p v_d \Sigma}{\Gamma' - \Gamma} = -\frac{2B_p v_d \Sigma}{\gamma' - \gamma} , \quad (38)$$

where $\gamma = \Gamma/M_p$ and $\gamma' = \Gamma'/M_p$. The value v_d must be chosen small enough so that it corresponds to the slow migration limit and large enough that it allows an accurate measurement of $\gamma' - \gamma$. Preliminary runs have shown that an accurate estimate of the critical surface density can be reached with a value of v_d as small as 2×10^{-5} , corresponding to a disk radial drift that amounts to less than one zone radial width over the whole simulation, which illustrates the fact that even a small resolution grid, with a reduced number of zones across the horseshoe region, captures remarkably well most of the features of the corotation torque, as noted by Masset (2002). The measurement of γ and γ' can be performed in two different ways: either (1) we perform two different runs with constant values of the disk drift, 0 and v_d , or (2) we perform one run with a vanishing additional disk drift, and once a steady state is reached, we

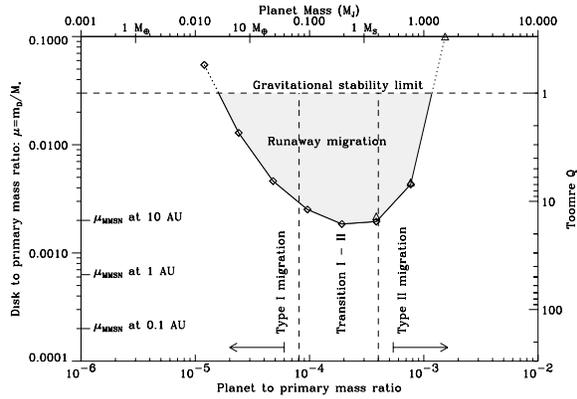


FIG. 12.—Runaway migration domain for a 3% aspect ratio disk with viscosity $\nu = 10^{-5}$. The domain horizontal upper limit corresponds to the $Q = 1$ gravitational stability limit (which translates into $\mu = h$). The left vertical dashed line shows the limit of linear type I migration and corresponds to $R_H = H$, where R_H is the planet Hill radius. Note that Miyoshi et al. (1999) find a threshold for nonlinear effects for even lower masses ($R_H = H/2$), which corresponds to a factor of 8 in the mass. The right vertical dashed line corresponds to the viscous gap opening criterion $q > 40/R$, where $R = a^2\Omega(a)/\nu$ is the disk Reynolds number at the planet orbit (Papaloizou & Lin 1984), beyond which the disk is split into an outer and an inner disk, and the planet is locked in the disk viscous drift (type II migration). Diamonds indicate the critical values found using method 1 (see text), while triangles indicate critical values found using method 2. The tick marks on the left axis represent the reduced disk mass of the MMSN, respectively, at 10, 1 and 0.1 AU. The upper axis shows the planet mass in Jupiter masses if one assumes that the central object has one solar mass.

switch the drift to v_d . The new torque value can then be measured after a horseshoe libration time. The first method is better suited to low-mass planets, for which the libration time is prohibitively long, while the second method is well suited for higher mass planets, since it allows almost a 50% saving of CPU time compared to the first method. For intermediate, Saturn mass planets we used both methods to check that they give comparable results. The results are presented in Figures 12, 13, and 14. These plots lead to a number of comments:

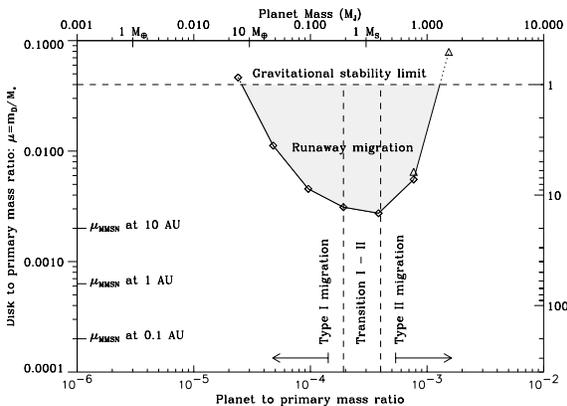


FIG. 13.—Same as Fig. 12, but for an $h = 4\%$ aspect ratio disk

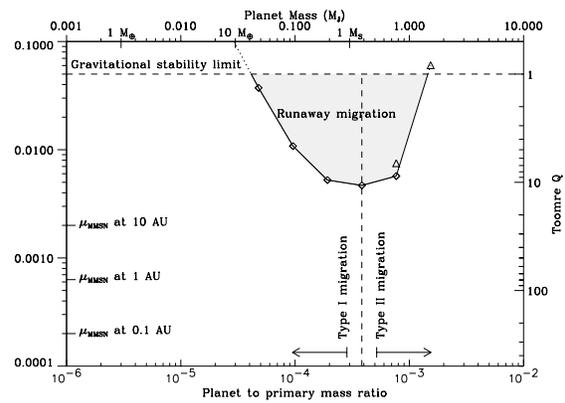


FIG. 14.—Same as Fig. 12, but for an $h = 5\%$ aspect ratio disk

1. The thinner the disk, the larger the runaway domain. This corresponds to expectations: for a given planet mass and disk viscosity (such that the planet mass is smaller than the viscous gap opening criterion), the thinner the disk, the deeper the dip opened around the orbit, and therefore the larger the coorbital mass deficit.

2. In the three cases, the mass most favorable to runaway (corresponding to the minimum of the critical disk mass curve) is $\sim 0.3M_J - 0.4M_J$, or typically a Saturn mass.

3. Runaway migration can be found in relatively massive protoplanetary disks (a few times more massive than the minimum mass solar nebula [MMSN], depending on the protogiant semimajor axis).

4. Runaway migration should be common, in such disks, for giant protoplanets that reach a sizable fraction of a Saturn mass.

5. The right part of the domain boundary shows a steep rise around $1M_J$ in the three cases.

6. Even in a disk with $\Sigma \propto r^{-3/2}$ such as the MMSN, runaway migration is more difficult as one gets close to the star. The coorbital mass deficit scales indeed as $a^2\Sigma(a) \propto a^{1/2}$.

7. The analysis performed breaks down for lower mass planets ($R_H < H$), as the torque cannot reliably be estimated through a two-dimensional calculation. The runaway limit for the low-mass planets at the left of the vertical dashed line is likely higher than found in our analysis, as in their case only a fraction of the disk vertical extent is involved in the coorbital dynamics.

6.2. Additional Effects

The viscosity chosen for these runs is high enough that the dip viscous time $\tau \sim w^2/3\nu$ is comparable to the libration time ($w \simeq x_s$ being the dip half-width). This time is also the dip opening time when the planet is “switched on” in the disk, or also the minimum time that the planet needs to sweep radially its own dip radial width in order for the surface density profile depression to follow the planet migration. It is therefore possible to talk unambiguously of *the* disk runaway critical mass for a given planet, independently of its “preparation state.” In other words, whether we release ab initio the planet in an unperturbed disk or whether we hold it on a fixed circular orbit for a few hundred orbits in order to allow it to open a dip before being

released makes no difference: a runaway is observed above the same disk mass, and the maximum drift rate measured is the same in both cases. If one tries to delineate the runaway domain for a disk with a much smaller viscosity, one finds that the estimate strongly depends on the disk preparation state, contrary to the case of Figures 12–14. One can achieve indeed a significant coorbital mass deficit if one holds the planet on a fixed circular orbit for a sufficient amount of time. Simulations performed for Saturn mass planets in massive, low-viscosity disks display a very erratic behavior, with an alternation of brief runaway episodes followed by moderately eccentric ($e \sim 0.01$), halted migration episodes, the overall drift rate being a relatively small but sizable ($\sim 20\%$) fraction of the corresponding type I drift rate.

It is of interest to evaluate the ratio of type I to runaway drift rate at the critical disk mass μ_c for runaway, as a function of planet mass. At this boundary, equation (36) leads to $\dot{a} = \dot{a}_c$ (since $\delta m = M_p$), whereas the type I drift rate in the same disk, according to equation (70) of Tanaka et al. (2002), is given by

$$\dot{a}_I = 1.38\mu_c q h^{-2} \Omega_p a. \quad (39)$$

Figure 15 shows the ratio of the runaway to type I migration rate estimate, as a function of planet mass, for the three aspect ratios presented in Figures 12–14. These ratios are estimated at the critical disk mass for runaway. Since the maximum runaway drift rate scales roughly with the disk mass (see § 5.6), this ratio should not vary significantly if one considers disk masses higher than the critical one. One can see that this ratio is marginally larger than unity for slightly sub-Saturn mass planets and drops considerably for smaller and larger masses. The runaway drift rate estimate is, however, still considerably larger than the type II viscous drift rate estimate for a Jupiter mass planet, as it corresponds typically to one-third of the type I drift rate of a Saturn mass planet.

The main source of the effect we have presented is the drift across the separatrices of the coorbital region of inner and outer disk material, in the cases of inward and outward planet drift, respectively. We have assumed that the drift velocity of the planet with respect to the disk is \dot{a} , thereby

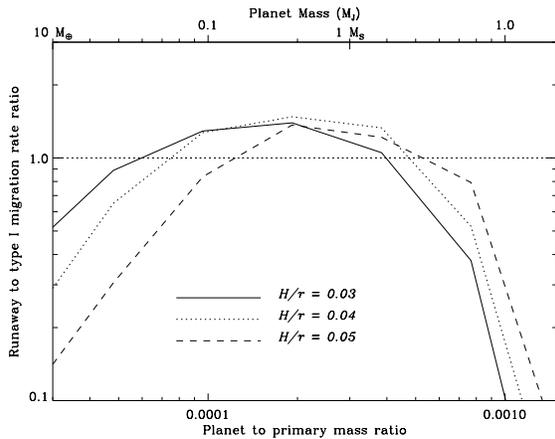


FIG. 15.—Ratio of runaway to type I drift rate, at the critical disk mass.

neglecting the disk viscous drift rate of roughly $-(3/2)\nu/r$. Taking this additional drift into account would add a positive contribution to the corotation torque $\sim 3B_p \delta m \nu$. For the case of a weak coorbital depletion, $\delta m \propto \Gamma_{LR}/\nu$, so that this additional term scales as Γ_{LR} , the one-sided Lindblad torque. This additional term, coupled to the one-sided Lindblad torque, has been evaluated to order of magnitude by Masset (2001, 2002) and found to be small. Furthermore, since it does not participate in the feedback and therefore in the runaway, it is legitimate to have neglected it in the present analysis.

The ability of the planet to maintain its coorbital mass deficit during a runaway episode deserves further investigation. Before runaway, the coorbital region is partially cleared of disk material under the action of the Lindblad torques. During the runaway drift, the Lindblad torques are assisted in maintaining the coorbital mass deficit by the horseshoe dynamics, which traps the coorbital material. The streamlines are not exactly closed in the $(\theta, r - a)$ -space, however, and the coorbital material can be lost. In that case the coorbital region is no longer depleted, and the planet switches to type I migration, which endows it with a comparable drift rate. No case has been found in which the runaway is maintained “forever.” A single runaway episode, however, can sizably affect the planet semimajor axis, by a factor of 2 or more.

In this work we have neglected accretion onto the protoplanets, whereas the mass range for which the runaway mechanism is relevant seems to imply gas accretion. A runaway episode is likely to be accompanied by a simultaneous accretion of disk material. A simple way to take into account gas accretion is to consider that a fraction ε of the material that enters the coorbital zone through one separatrix and flows out along the other one is kept by the planet. In the absence of accretion, this disk material contribution to the corotation torque amounts to $\Gamma_2 = 4B_p a x_s [2\pi a \dot{a} \Sigma(x_s)]$. When accretion is considered, the contribution to the corotation torque reduces to

$$\Gamma'_2 = (1 - \varepsilon)\Gamma_2 + \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_2, \quad (40)$$

since the material that is accreted onto the planet loses (gains) only half of the specific angular momentum that it would lose (gain) otherwise. Accretion therefore plays the role of a runaway moderator. It would be of interest to investigate in detail the interplay between runaway and accretion, taking consistently into account the corotation torque feedback reduction and the growth of the horseshoe region.

7. SUMMARY AND CONCLUSIONS

We have evaluated the torque exerted on a protoplanet embedded in a gaseous disk produced by the fluid elements as they perform a horseshoe U-turn in the planet vicinity. We have interpreted this torque as the coorbital corotation torque. This torque exhibits a dependency on the planet radial drift rate in the disk that is tied to the depletion of the coorbital region of the planet, that is to say, to the existence of a dip or gap cleared around the orbit. The sign of the corotation torque is the same as that of the drift rate. Hence, it exerts a positive feedback on the migration process. This feedback leads to a migration runaway in massive disks when the coorbital mass deficit is larger than the planet

mass. We have checked and illustrated the main properties of the corotation torque through customized numerical simulations. These showed the link between runaway and the coorbital mass deficit. They indicated that the migration rate for disks with subcritical masses grows faster than linearly with disk mass, and they illustrated that the planet drift rate characteristic response time is the horseshoe libration time.

The occurrence of inward runaway in disks with $\Sigma \propto r^{-3/2}$ has been investigated and found to be likely in thin ($h \leq 5\%$), massive disks with a mass several times that of the MMSN. Typically, it occurs for Saturn-sized giant protoplanets, but it can involve planets up to one Jupiter mass for sufficiently massive disks. The runaway drift rate is found to be comparable to the type I estimate given by the differential Lindblad torque that one would obtain using linear theory even though that would be invalid for a planet held in a fixed circular orbit (because the planet opens a significant dip around its orbit and the actual differential torque acting on it amounts to a small fraction of its linear estimate). It turns out that the corotation torque is at most equal to the differential Lindblad torque in a $\Sigma \propto r^{-3/2}$ disk. This prevents the possibility of outward runaway in these disks, and we indeed found no occurrence of outward runaways in such disks. Additional runs with shallower disk profiles, however, have shown that outward runaway can occur, provided that the planet is endowed with an adequate value for a and \dot{a} (the latter needs to be established at least over a libration time).

The way we initiated outward runaway was artificial. Masset & Snellgrove (2001) have exhibited a two-planet configuration engaged in an outward migration. Their outer planet is of Saturn mass and is therefore a good candidate for outward runaway in a massive disk. An alternate possibility to initiate an outward motion is that the disk mass flow across the orbit is strongly variable in time. If a larger \dot{M} enters the coorbital zone through the outer separatrix, the corotation torque may be temporarily large (and positive), providing the seed for an outward runaway.

When the viscosity is large enough that the viscous diffusion time across the horseshoe zone is faster than the time to migrate through it, relaxation and depletion of the coorbital region occur in a sufficiently short amount of time that the coorbital mass deficit and the disk critical mass for runaway are well-defined quantities. The situation turns out to be much more chaotic in a very low viscosity disk, although globally the average drift rate of the planet toward the central object amounts to a sizable fraction of the type I drift rate.

Inspection of Figures 12–14 shows that in massive disks, sub-Jovian planets can still undergo a type I-like drift,

whereas on previous grounds they were expected to have a much slower (type II) drift rate, comparable to the slow viscous disk drift rate.

The runaway threshold is lower in thinner disks. If protoplanetary disks are flared (i.e., $\partial \log H / \partial \log r > 1$), they could be extremely thin in their inner regions, which could assist runaway there.

A runaway episode or a succession of them stops whenever the coorbital mass deficit that can be achieved is too small. If one assumes a disk surface density profile $\Sigma(r) \propto r^\alpha$, then the coorbital mass deficit scales as $\delta m \propto a^2 \Sigma(a) \propto a^{2+\alpha}$. As the runaway condition reads $M_p = \delta m$, one would get, at the end of the runaway episodes, the relationship $M_p \propto P^{(4+2\alpha)/3}$, where P is the planet orbital period. This indicates a tendency for smaller masses to reach smaller periods. A recent analysis by Zucker & Mazeh (2002) indicates a paucity of planets with masses exceeding a Jupiter mass at small periods of roughly a few days, while sub-Jovian mass planets tend to cluster at these small periods. The observational data for the larger mass planets are consistent with a type II migration scenario in which most time is spent at larger radii (Trilling et al. 2002). However, the distribution of smaller mass objects would appear to require a relatively fast migration of the type discussed here followed by a slowing down or stopping near their current orbital locations. The fate of a giant protoplanet at the end of its runaway episode(s), if it has not been brought close to the primary, would be a slow, type II migration, together with a possible mass growth, along the lines already studied, e.g., by Nelson et al. (2000), followed possibly by stopping inside a magnetospheric cavity.

An alternative scenario could be envisaged to account for the properties of EGPs. In this, the disks in which they formed would have been massive enough to sustain a succession of runaway episodes typically up to the central tenth of an astronomical unit where hot “Jupiters” with $M \sin i \sim 0.3 M_J$, roughly corresponding to the most favorable mass for runaway, are found to accumulate (or alternatively protoplanets that massive could be constituted in situ by the accumulation of lower mass bodies brought there by type I migration). Some of these hot protoplanets could then be involved in outward runaway. At the same time, gas accretion onto these cores would eventually endow them with a mass sufficient to prevent any further runaway migration episodes. These planets would then correspond to the massive ($M_p > 1 M_J - 2 M_J$) extrasolar planets, which are found farther out from their host stars than the hot Jupiters.

Computational resources were available at the CGCV Grenoble and are gratefully acknowledged.

APPENDIX

COROTATION TORQUE ON A MIGRATING PLANET FOR A GIVEN SPECIFIC VORTICITY PROFILE

We transform equation (11) using the fact that a coorbital fluid element does not undergo any radial drift (we assume a low viscosity) between two successive close encounters, and we write

$$w_L^-(x, t) = w_R^-[x + a(t) - a(t - \tau), t - \tau], \quad (\text{A1})$$

where we use the fact that the distance $r = x + a(t - \tau)$ of the fluid element to the central object, just after the R -close encounter at time $t - \tau$, is the same as the distance $r = x + a(t)$, just before the L -close encounter at time t . We now assume

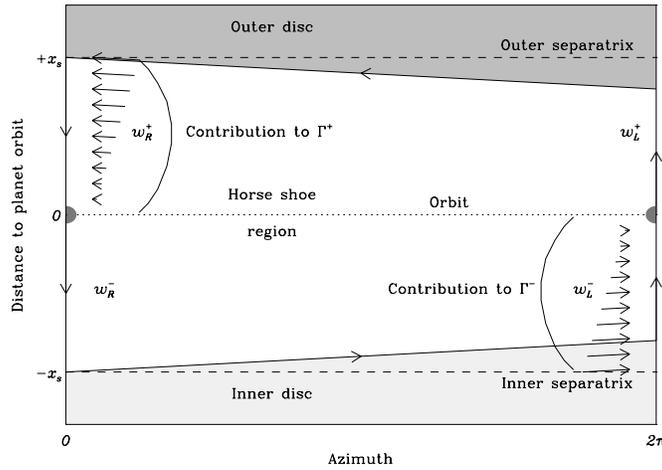


FIG. 16.—Sketch of the flow for the case $\dot{a} < 0$. We see that over the whole interval $(-x_s, +x_s)$, one has $w_R(x) = w_R(-x)$. On the other hand, one cannot write $w_L(-x) = w_L(x)$ for any x in $(-x_s, +x_s)$, since fluid elements from the inner disk (*light shaded region*) contribute to the negative part of the corotation torque (Γ^-) and therefore bring into the coorbital region new material, with a priori an arbitrary specific vorticity. The consequence of this distinction is that one has to evaluate the coorbital mass deficit from the upstream side of the coorbital depletion (i.e., in this case from the mass flow across the inner separatrix).

that the profile $w_R(x, t)$ is independent of t for any x in $(-x_s, +x_s)$, which corresponds to assuming that migration is either steady state or slow enough that the surface density profile responds much faster than $|x_s/\dot{a}|$. As we are dealing with the case $\dot{a} < 0$, this corresponds to the situation depicted in Figure 16. The case for outward migration ($\dot{a} > 0$), which is depicted in Figure 17, can be treated in a similar manner. We can therefore write

$$w_L^-(x, t) = w_R^-(x, t) + [a(t) - a(t - \tau)] \frac{\partial w_R^-}{\partial x} + \frac{1}{2} [a(t) - a(t - \tau)]^2 \frac{\partial^2 w_R^-}{\partial x^2} . \tag{A2}$$

A Taylor expansion in τ of this expression yields

$$w_L^-(x, t) = w_R^-(x, t) + \tau \dot{a} \left(\frac{\partial w_R^-}{\partial x} + \frac{1}{2} \tau \dot{a} \frac{\partial^2 w_R^-}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \tau^2 \ddot{a} \frac{\partial w_R^-}{\partial x} . \tag{A3}$$

The second term in parentheses, an upper limit of which is $\sim \frac{1}{2} \dot{a} \tau (\partial w_R^- / \partial x) / H$, is negligible compared to the first one, as long

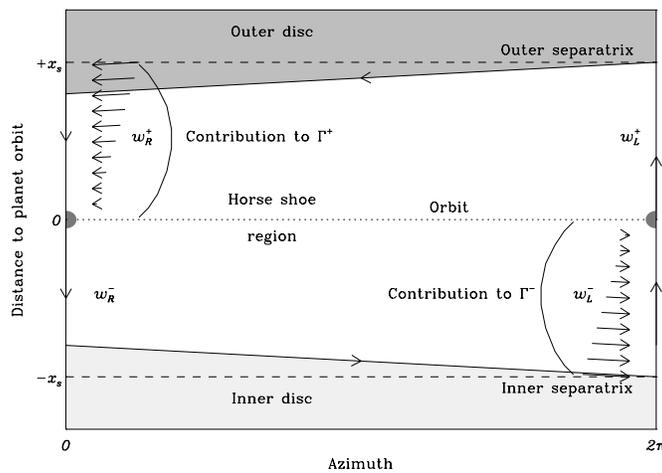


FIG. 17.—Same as Fig. 16, but with $\dot{a} > 0$. We see that over the whole interval $(-x_s, +x_s)$, one has $w_L(x) = w_L(-x)$. On the other hand, one cannot write $w_R(x) = w_R(-x)$ for any x in $(-x_s, +x_s)$, as new material from the outer disk is involved in the corotation torque (*heavy shaded region*) and has a priori an arbitrary specific vorticity.

as the migration remains slow. Equations (11) and (A3) yield

$$\Gamma = 16\pi B_p^2 a^2 \left\{ \dot{a} \left[x_s w_R(-x_s) - \int_{-x_s}^0 w_R(x) dx \right] + \frac{\pi a \ddot{a}}{2|A_p|} [w_R(0) - w_R(-x_s)] \right\}. \quad (\text{A4})$$

An order-of-magnitude estimate of the last term (in \ddot{a}) of equation (A4) can be given if one assumes, e.g., a quadratic dependency of $w_R(x)$ on x : $w_R(x) \propto x^2$, in which case one has $w_R(-x_s) - w_R(0) = 3\delta m/(16\pi a x_s B_p)$. Equation (A4) can then be rewritten as

$$\Gamma = 2B_p a \delta m \dot{a} - \frac{3\pi a^2 B_p}{2|A_p| x_s} \delta m \ddot{a}, \quad (\text{A5})$$

which is similar to equation (22), except for a factor 3/2 in the \ddot{a} term, which we had claimed to be given in order of magnitude only.

REFERENCES

- Balmforth, N. J., & Korycansky, D. G. 2001, MNRAS, 326, 833
 Foglizzo, T., & Ruffert, M. 1997, A&A, 320, 342
 Ivanov, P. B., Papaloizou, J. C. B., & Polnarev, A. G. 1999, MNRAS, 307, 79
 Kley, W. 1998, A&A, 338, L37
 Lin, D. N. C., & Papaloizou, J. C. B. 1986, ApJ, 309, 846
 Masset, F., & Snellgrove, M. 2001, MNRAS, 320, L55
 Masset, F. S. 2000a, A&AS, 141, 165
 ———. 2000b, in ASP Conf. Ser. 219, Disks, Planetesimals, and Planets, ed. F. Garzón, C. Eiroa, D. de Winter, & T. J. Mahoney (San Francisco: ASP), 75–80
 ———. 2001, ApJ, 558, 453
 ———. 2002, A&A, 387, 605
 Miyoshi, K., Takeuchi, T., Tanaka, H., & Ida, S. 1999, ApJ, 516, 451
 Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., Masset, F. S., & Kley, W. 2000, MNRAS, 318, 18
 Papaloizou, J. C. B., & Lin, D. N. C. 1984, ApJ, 285, 818
 Papaloizou, J. C. B., & Terquem, C. 1999, ApJ, 521, 823
 Tanaka, H., Takeuchi, T., & Ward, W. R. 2002, ApJ, 565, 1257
 Trilling, D. E., Benz, W., Guillot, T., Lunine, J. I., Hubbard, W. B., & Burrows, A. 1998, ApJ, 500, 428
 Trilling, D. E., Lunine, J. I., & Benz, W. 2002, A&A, 394, 241
 Ward, W. R. 1991, Lunar Planet. Sci. Conf., 22, 1463
 ———. 1992, Lunar Planet. Sci. Conf., 23, 1491
 ———. 1997, Icarus, 126, 261
 Ward, W. R., & Hourigan, K. 1989, ApJ, 347, 490
 Zucker, S., & Mazeh, T. 2002, ApJ, 568, L113

Note added in proof.—As this paper was being typeset, we were made aware of results obtained by P. Artymowicz (P. Artymowicz, in *Debris Disks and the Formation of Planets: A Symposium in Memory of Fred Gillet*, in press [2003]), who describes the very fast, runaway migration that can be undergone by giant protoplanets released in a disk near a sharp edge. There is naturally a large coorbital mass deficit in these cases that is consistent with the operation of unsaturated corotation torques. Thus, we believe that the mechanism responsible is essentially the one we describe here.

DISK SURFACE DENSITY TRANSITIONS AS PROTOPLANET TRAPS

F. S. MASSET^{1,2}

Service d’Astrophysique, Orme des Merisiers, CE-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France; fmasset@cea.fr

A. MORBIDELLI AND A. CRIDA

Laboratoire Cassiopée, Centre National de la Recherche Scientifique, UMR 6202, Observatoire de la Côte d’Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France; morby@obs-nice.fr, crida@obs-nice.fr

AND

J. FERREIRA

Laboratoire d’Astrophysique de Grenoble, 414 Rue de la piscine, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France; jonathan.ferreira@obs.ujf-grenoble.fr

Received 2005 October 17; accepted 2006 January 3

ABSTRACT

The tidal torque exerted by a protoplanetary disk with power-law surface density and temperature profiles onto an embedded protoplanetary embryo is generally a negative quantity that leads to the embryo inward migration. Here we investigate how the tidal torque balance is affected at a disk surface density radial jump. The jump has two consequences: (1) It affects the differential Lindblad torque. In particular, if the disk is merely empty on the inner side, the differential Lindblad torque almost amounts to the large negative outer Lindblad torque. (2) It affects the corotation torque, which is a quantity very sensitive to the local gradient of the disk surface density. In particular, if the disk is depleted on the inside and the jump occurs radially over a few pressure scale heights, the corotation torque is a positive quantity that is much larger than in a power-law disk. We show by means of customized numerical simulations of low-mass planets embedded in protoplanetary nebulae with a surface density jump that the second effect is dominant; that is, that the corotation torque largely dominates the differential Lindblad torque on the edge of a central depletion, even a shallow one. Namely, a disk surface density jump of about 50% over 3–5 disk thicknesses suffices to cancel out the total torque. As a consequence, the type I migration of low-mass objects reaching the jump should be halted, and all these objects should be trapped there provided some amount of dissipation is present in the disk to prevent the corotation torque saturation. As dissipation is provided by turbulence, which induces a jitter of the planet semi-major axis, we investigate under which conditions the trapping process overcomes the trend of turbulence to induce stochastic migration across the disk. We show that a cavity with a large outer to inner surface density ratio efficiently traps embryos from 1 to 15 M_{\oplus} , at any radius up to 5 AU from the central object, in a disk that has same surface density profile as the minimum mass solar nebula (MMSN). Shallow surface density transitions require light disks to efficiently trap embryos. In the case of the MMSN, this could happen in the very central parts ($r < 0.03$ AU). We discuss where in a protoplanetary disk one can expect a surface density jump. This effect could constitute a solution to the well-known problem that the buildup of the first protogiant solid core in a disk takes much longer than its type I migration toward the central object.

Subject headings: accretion, accretion disks — hydrodynamics — methods: numerical — planetary systems: formation — planetary systems: protoplanetary disks

1. INTRODUCTION

The migration of low-mass protoplanets ($M_p < 15 M_{\oplus}$) under the action of disk tides is long known to be a fast process in disks with power-law surface density profiles (Ward 1997; Tanaka et al. 2002). The fast migration timescale estimates of these objects even constitute a bottleneck for the core accretion scenario, which implies a slow buildup of a solid core until it reaches the mass threshold ($\sim 15 M_{\oplus}$) above which rapid gas accretion begins. Indeed, the solid core buildup time is 10^6 – 10^7 yr (Pollack et al. 1996), while the migration timescale of a $M_p = 1 M_{\oplus}$ planet is $O(10^5)$ yr (Ward 1997; Tanaka et al. 2002) and scales inversely proportionally to the planet mass. The existence of gaseous giant planets at large distances ($a \sim 0.1$ – 10 AU) from their central star therefore constitutes a puzzle. Recent work by Alibert

et al. (2005) has shown that the core buildup timescale can be lowered by taking migration into account, which prevents the depletion of the core feeding zone. However, these authors found that the most up-to-date type I migration timescale estimate, which includes three-dimensional effects and the corotation torque (Tanaka et al. 2002), still needs to be lowered by a factor of 10–100 in order to allow for the solid core survival. The total torque exerted by the disk onto the planet can be split into two parts: the differential Lindblad torque, which corresponds to the torque of the spiral wake that the planet excites in the disk, and the corotation torque, exerted by the material located in the planet co-orbital region. The role of the corotation torque has often been overlooked in migration rate estimates. The two main reasons for that are that it is harder to evaluate than the differential Lindblad torque and that it saturates (i.e., tends to zero) in the absence of dissipation. The corotation torque scales with the radial gradient of Σ/B , where Σ is the disk surface density and B is the second Oort’s constant, or half the disk flow vorticity vertical component in a nonrotating frame. This scaling makes the corotation torque a

¹ Also at Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Apartado Postal 70-264, Mexico DF 04510, Mexico.

² Send offprint requests to: fmasset@cea.fr.

quantity very sensitive to local variations of the disk surface density or rotation profile. Here we investigate the behavior of the total (Lindblad + corotation) tidal torque exerted on a planet in the vicinity of a surface density radial jump in order to investigate a suggestion by Masset (2002) that localized, positive surface density jumps may be able to halt migration. We assume that the surface density transition occurs on a length scale λ of a few pressure scale heights H . We consider the case in which the surface density is larger on the outside of the transition, but we do not limit ourselves to the case in which the surface density on the inside is negligible compared to its value on the outer side. The case of a virtually empty central cavity has already been contemplated by Kuchner & Lecar (2002) in the context, different from ours, of giant planet migration. They concluded that giant planet migration is halted or considerably slowed down once the planet is inside the cavity and in 2:1 resonance with the cavity edge, as beyond this resonance the disk torque onto a planet on a circular orbit becomes negligible.

In § 2 we provide simple analytical estimates of the Lindblad and corotation torques at a surface density transition. We show that the corotation torque, which is a positive quantity there, is likely to overcome the Lindblad torque if the transition is localized enough, i.e., λ less than a few H . In § 3 we describe the numerical setup that we used to check this prediction with a numerical hydrocode. In § 4 we present the results of our numerical simulations, which indeed exhibit for a wide range of parameters a fixed point at the transition, i.e., a point where the corotation and Lindblad torques cancel each other and planetary migration stops. We also discuss in this section the issue of the saturation of the corotation torque and the need for turbulence to prevent it, and the conditions under which turbulence is able or unable to unlock a planet from the transition. We then discuss in § 5 where in protoplanetary disks such surface density transitions can be found and the consequences of these planet traps on giant planet formation.

2. A SIMPLE ANALYTIC ESTIMATE

A protoplanet embedded in a gaseous protoplanetary disk excites in the latter a one-armed spiral wake (Ogilvie & Lubow 2002) as a result of the constructive interference of propagative density waves excited at Lindblad resonances with the planet. This wake exerts a torque on the planet, which can be decomposed into the outer Lindblad torque (Γ_o), which is negative, and is exerted by the outer arm, and the inner Lindblad torque (Γ_i), which is positive and is exerted by the inner arm. These two torques do not cancel out. The residue $\Delta\Gamma = \Gamma_o + \Gamma_i$, called the differential Lindblad torque, is negative (Ward 1986), thereby leading to inward migration. If one calls one-sided Lindblad torque the arithmetic mean of the absolute values of the outer and inner Lindblad torques,

$$\Gamma_{\text{LR}} = \frac{\Gamma_i - \Gamma_o}{2}, \quad (1)$$

then the differential Lindblad torque is a fraction of this torque that scales with the disk aspect ratio $h = H/r$, where H is the pressure scale height or disk thickness and r is the radius. In particular, for a disk with uniform surface density and aspect ratio (Ward 1997),

$$\Delta\Gamma \approx -8h\Gamma_{\text{LR}}. \quad (2)$$

As noted by Ward (1997), in a nebula with $h = O(10^{-1})$, the differential Lindblad torque is a sizable fraction of the one-sided

Lindblad torque. This is of some importance for our concern: denoting $\Delta\Gamma'$ the Lindblad torque on an empty cavity edge (it then amounts to the outer Lindblad torque, i.e., $\Delta\Gamma' = \Gamma_o$) and $\Delta\Gamma$ the Lindblad torque farther out in the disk where we assume the surface density and aspect ratio profiles to be flat, we have

$$\Delta\Gamma' \approx \Delta\Gamma/(8h), \quad (3)$$

which means that the Lindblad torque on a cavity edge is at most 2–3 times larger than farther out in the disk, for $0.04 < h < 0.06$.

In addition to the wake torque, the material in the orbit vicinity exerts on the planet the so-called corotation torque. This torque scales with the gradient of the specific vorticity (or vortensity) (Goldreich & Tremaine 1979; Ward 1991, 1992):

$$\Gamma_C \propto \Sigma \frac{d \log(\Sigma/B)}{d \log r}. \quad (4)$$

This torque comes from the exchange of angular momentum between the planet and fluid elements that perform U-turns at the end of their horseshoe streamlines (Ward 1991; Masset 2001, 2002). It has been estimated that the corotation torque amounts to a few tens of percent (Korycansky & Pollack 1993) of the differential Lindblad torque for a disk with a power-law surface density profile. Tanaka et al. (2002) give the following estimate for a three-dimensional disk with flat surface density and temperature profiles:

$$\Gamma_C \approx -(1/2)\Delta\Gamma. \quad (5)$$

Note that the corotation torque cancels out for a surface density profile $\Sigma \propto r^{-3/2}$, while it is a positive quantity for a shallower surface density profile.

We now estimate the ratio of the corotation torque at a cavity edge and farther out in the disk (assuming a flat surface density profile). We assume that the surface density inside of the transition is Σ_i , while it is $\Sigma_o > \Sigma_i$ on the outside. The transition from Σ_i to Σ_o occurs on a length scale $\lambda \ll r$. In the outer disk where $\Sigma \equiv \Sigma_o$, we have

$$\frac{d \log(\Sigma/B)}{d \log r} = 3/2, \quad (6)$$

while at the transition, $d \log \Sigma / d \log r$ is a sharply peaked function with a maximum that scales as

$$\left| \frac{d \log \Sigma}{d \log r} \right|_{\text{max}} \sim \frac{r}{\lambda} \log \left(\frac{\Sigma_o}{\Sigma_i} \right). \quad (7)$$

Similarly, retaining only the terms that vary most rapidly with r at the transition:

$$\frac{d \log B}{d \log r} \simeq \frac{2r^2}{\Omega} \frac{d^2 \Omega}{dr^2}, \quad (8)$$

where Ω is the angular velocity. The last factor of the above equation can also be expressed, using the disk rotational equilibrium and again keeping only the terms that vary most rapidly with r , as

$$\frac{d^2 \Omega}{dr^2} \simeq -\frac{\Omega h^2 r}{2} \frac{d^3 \log \Sigma}{dr^3}. \quad (9)$$

The last factor of the right-hand side is a function of r that scales as $(H^2 r / \lambda^3) \log(\Sigma_o / \Sigma_i)$, and that has, for a sufficiently smooth,

monotonic transition from Σ_i to Σ_o , two minima and one maximum, the exact locations and amplitudes of which depend on the surface density profile. The (inverse of) the specific vorticity logarithmic gradient is therefore

$$\frac{d \log(\Sigma/B)}{d \log r} = \frac{r}{\lambda} \log\left(\frac{\Sigma_o}{\Sigma_i}\right) \left(a + b \frac{H^2}{\lambda^2}\right), \quad (10)$$

where a and b are numerical functions of r of order unity that depend on the exact shape of the surface density profile. In particular, one sees immediately that if $\lambda \sim H$, then the contributions of both terms (the surface density gradient and the vorticity gradient) to the corotation torque are of similar magnitude.

The corotation torque at the transition Γ'_C can therefore be larger than the corotation torque Γ_C farther out in the disk by a factor

$$\frac{\Gamma'_C}{\Gamma_C} \approx \frac{2r}{3\lambda} C, \quad (11)$$

where C is a numerical factor of order unity that depends on the surface density profile.

Using equations (3), (5), and (11), we find that

$$\frac{\Gamma'_C}{\Delta\Gamma'} \approx -\frac{8H}{3\lambda} C, \quad (12)$$

which means that the (positive) corotation torque can counteract the (negative) Lindblad torque at a cavity, provided that the edge of the latter be narrow enough ($\lambda < 8HC/3$). We check by means of numerical simulations that it is indeed possible to halt type I migration on the edge of a surface density transition.

3. NUMERICAL SETUP

We performed a large number of two-dimensional hydrodynamic simulations that we detail below. The code used was FARGO.³ It is a staggered mesh code on a polar grid, with upwind transport and a harmonic, second-order slope limiter (van Leer 1977). It also uses a change of rotating frame on each ring that enables one to increase the time step significantly (Masset 2000a, 2000b).

The surface density transition was set in the following manner. We call F the target surface density ratio between the inside and the outside of the cavity: $F = \Sigma_o/\Sigma_i$. In order to realize this ratio, we adopt a fixed profile of kinematic viscosity with an inverse ratio: $\nu_o/\nu_i = F^{-1}$. If we call r_t the mean radius of the transition, then for $r > r_t + \lambda/2$, $\nu \equiv \nu_o$; for $r < r_t - \lambda/2$, $\nu \equiv \nu_i$; and for $r_t - \lambda/2 < r < r_t + \lambda/2$, ν is an affine function of r . We then relax the surface density profile during a preliminary one-dimensional calculation over $\sim 10^5$ orbits, so that the profile can safely be considered as steady state in the two-dimensional calculations. In our calculations we use nonreflecting inner and outer boundary conditions, while we impose the disk surface density at the inner and outer boundary.

In all our calculations the disk aspect ratio is $h = 0.05$, the disk is not self-gravitating, and it has a locally isothermal equation of state. The length unit is r_t . The mesh inner and outer boundaries are at $r = 0.42$ and 2.1 , respectively. The mass unit is the mass M_* of the central object, and the gravitational constant is $G = 1$. The time unit is $(GM_*/r_t^3)^{-1/2}$. Whenever we quote a planet mass in Earth masses, we assume the central object to have a solar mass.

³ See <http://www.maths.qmul.ac.uk/~masset/fargo>.

The mesh size in all our runs is $N_r = 168$ and $N_\phi = 450$; hence, the radial resolution is 10^{-2} . The horseshoe zone width for a $15 M_\oplus$ planet is $\sim 7.8 \times 10^{-2}$, so it is approximately eight zones wide. The error on the corotation torque due to this finite width therefore amounts to at most $\sim 10\%$ (see Masset 2002; their Fig. A.3). We also made calculations with a $4 M_\oplus$ mass planet for which the horseshoe zone is only four zones wide. This resolution may seem low, but the corotation torque is very well captured at low resolution for small-mass planets that hardly perturb the surface density profile (see discussion in Masset 2002; their Appendix A).

We contemplated the fashionable issue of whether the Roche lobe content must be included or not when integrating the torque over the disk material (D'Angelo et al. 2005; Masset & Papaloizou 2003). We found that taking that material into account or not makes essentially no difference in our case. We make the following technical comments related to this issue:

1. D'Angelo et al. (2005) have envisaged the case of Jupiter- or Saturn-mass planets, for which there is a significant Roche lobe with radius $\sim a(M_p/3M_*)^{1/3}$ (a being the planet semimajor axis). For the mass range studied here ($M_p < 15 M_\oplus$), the Roche lobe size is much smaller than this simple estimate. In particular, in the linear limit, the flow does not exhibit any circumpolar libration, while the two ends of the horseshoe region reconnect through a single stagnation point located on the orbit (F. S. Masset et al. 2006, in preparation; H. Tanaka 2005, private communication), which is offset from the planet as a result of the gaseous disk slight sub-Keplerianity. The issue of Roche lobe sampling in that case is therefore irrelevant.

2. D'Angelo et al. (2005) have found that resolution may alter the torque exerted on the planet when the Roche lobe material is taken into account. This behavior, which appears at very high resolution, is related to the buildup of a gaseous envelope around the pointlike planet, while the mass of this envelope depends heavily on the equation of state, which is poorly known. The envelope mass may be considerable for the giant protoplanets considered by D'Angelo et al. (2005), as it may be several times the planet mass, but it is presumably a much smaller fraction of the planet mass for the planet masses that we consider ($M_p < 15 M_\oplus$; see also Alibert et al. 2005).

In two-dimensional simulations one has to introduce a potential smoothing length ϵ meant to mimic the disk vertical extent. The planet potential expression is then $-GM_p/(r^2 + \epsilon^2)^{1/2}$, where G is the gravitational constant and r is the distance to the planet. In our calculations we use a potential smoothing length $\epsilon = 0.7H$. This is quite a large value, which leads to underestimate the corotation torque (Masset 2002), as it lowers the horseshoe zone width, while the corotation torque is proportional to the fourth power of this width. Our calculations are therefore conservative, and it is likely that three-dimensional calculations would yield a torque cancellation for an even wider set of disk parameters than we found.

4. RESULTS OF NUMERICAL SIMULATIONS

4.1. Torque Sampling on a Cavity Edge

We consider in this section a disk with a target surface density ratio between the inside and the outside of the transition set to $F = 7$. As this value is large compared to 1, we call the inside part of the transition a cavity. We performed two sequences of 75 calculations in which a planet was set on a fixed circular orbit with radius $a_i = 0.65 + 10^{-2}i$ ($i = 0 \dots 74$). For these calculations we report as a function of a_i the total torque exerted on the

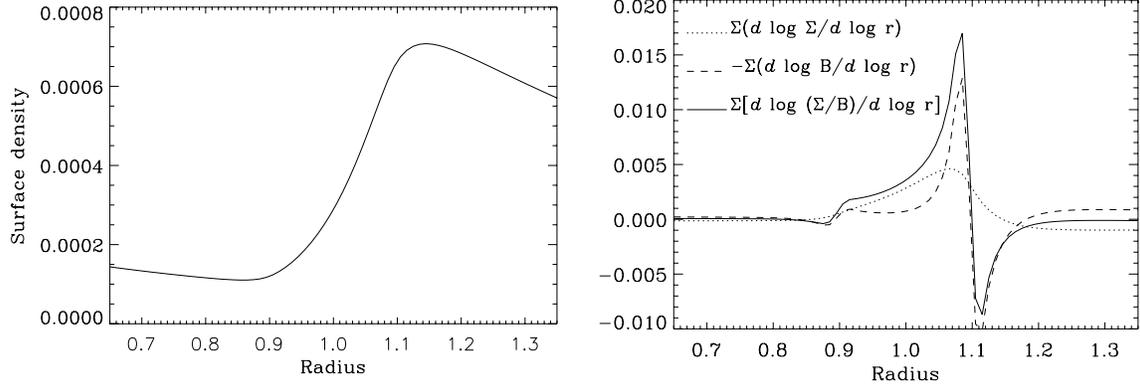


FIG. 1.—*Left*: Surface density profile for the runs of § 4.1. The surface density transition occurs over $\sim 4H$, between $r \approx 0.9$ and 1.1 . *Right*: Corresponding profiles of the different logarithmic derivatives involved in the expression of the corotation torque, weighted by the surface density. The dotted line shows the logarithmic derivative of the surface density, the dashed line shows the opposite of the logarithmic derivative of the flow vorticity, and the solid line shows the sum of these two quantities. It corresponds to the right-hand side of eq. (4).

planet (averaged over 100 orbits, in order for the libration flow inside the co-orbital region to reach a steady state; Masset 2002).

The left plot of Figure 1 shows the relaxed surface density profile after 10^5 orbits of the preliminary one-dimensional calculation, and the right panel of Figure 1 shows that the vortensity gradient peak is only partially due to the surface density gradient, since the gradient of the flow vorticity plays a role of comparable importance, as suggested in § 2.

The total torque measured from numerical simulations is presented in Figure 2. Both plots, which correspond to two different planet masses, exhibit similar features:

1. On the left side (for $r < 0.8$) and on the right side (for $r > 1.2$), the torque profile is flat and negative. This corresponds to the total negative torque acting on a planet embedded in a flat surface density disk. Since the surface density is $F = 7$ times lower on the inside, the torque value is much smaller on that side.
2. In the range $0.8 < r < 1.2$, the torque as a function of radius exhibits a shape very similar to the vortensity gradient shown in Figure 1. In particular, the torque has a maximum value near $r = 1.08-1.10$ and a minimum value near $r = 1.12-1.13$.

This last observation unambiguously indicates that the corotation torque largely dominates the total torque at the surface density transition, as expected from the analytic estimate. In

particular, there are two positions in the disk where the total torque cancels out (and therefore where the migration is halted): one at $r \approx 0.92$ and the other at $r \approx 1.11-1.12$. The first of these fixed points is unstable: moving the planet away from it yields a torque that moves it farther away, while the second one (i.e., the outermost one) is stable: moving the planet to a higher radius yields a negative torque that tends to bring the planet back to its former position, and vice versa for a motion toward smaller radii. The fixed point at $r = 1.12$ should therefore trap all type I migrating embryos. We note in passing that the torque as a function of radius does not have exactly the same shape between a $15 M_{\oplus}$ and a $4 M_{\oplus}$ planet. There are two reasons for this: the onset of nonlinear effects between 4 and $15 M_{\oplus}$, and the inaccuracy of the corotation torque estimate for the $4 M_{\oplus}$ case, for the resolution that we have adopted. However, we see that even in the $4 M_{\oplus}$ case, the value of the torque maximum ($\sim 6 \times 10^{-5}$) is much larger than the torque absolute value away from the cavity (for $r > 1.2$, this value is $\sim 10^{-5}$). Therefore, even if the error on the corotation torque amounts to 50% (see Masset 2002), one still gets a torque cancellation and a stable fixed point.

4.2. Halting Migration at a Cavity Edge

We have performed a series of 10 calculations with planets of masses $1.3-15 M_{\oplus}$ in geometric sequence, with the same disk

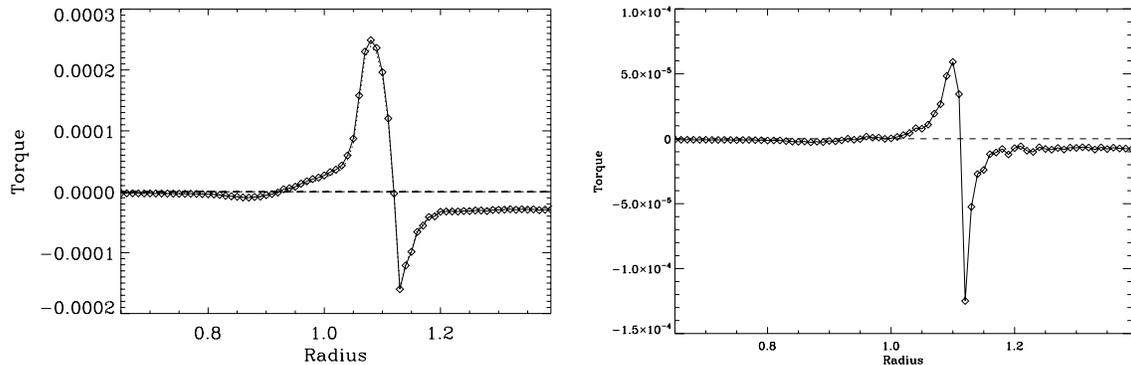


FIG. 2.—*Left*: Specific torque acting on a $15 M_{\oplus}$ planet on a fixed circular orbit, as a function of its orbital radius. *Right*: Same, but for a $4 M_{\oplus}$ planet.

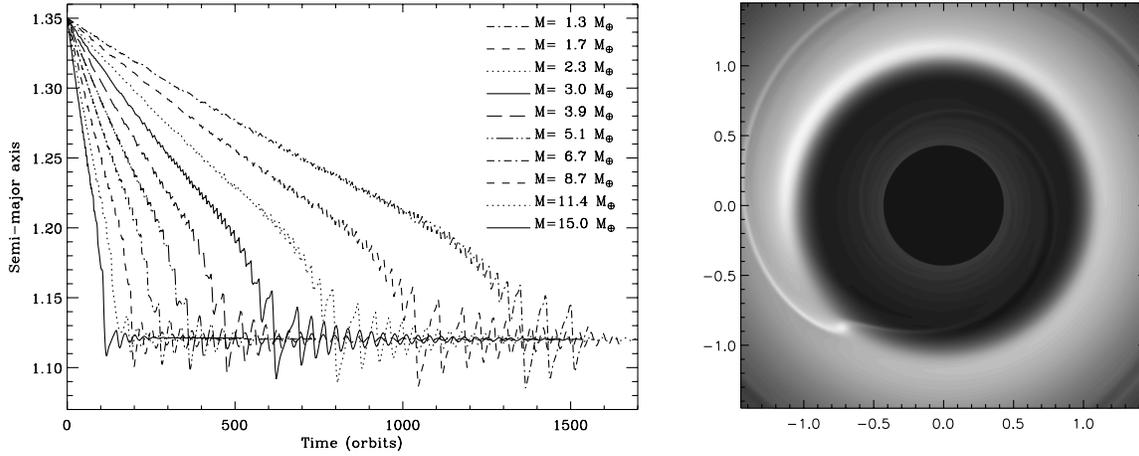


FIG. 3.—*Left*: Primary to planet separation curve as a function of time, for the 10 different planet masses. *Right*: Snapshot of the surface density map with a $15 M_{\oplus}$ planet embedded at $t = 480$ orbits.

cavity as in the previous section ($F = 7$). In these calculations the planets were released at $r = 1.35$, i.e., beyond the cavity edge, and then allowed to freely migrate under the action of the disk torque. The results are presented in Figure 3. We see how the transition efficiently traps all these objects at the fixed point at $r = 1.12$ identified in the previous section. We note in passing that on the lower side of the mass range considered, the small width of the horseshoe region may lead to large uncertainties on the corotation torque. Nevertheless, the migration of all objects stops at locations that are all very close to 1.12. This indicates that the corotation torque at the edge, even misrepresented by a too low resolution, still strongly dominates the differential Lindblad torque. For masses lower than a few Earth masses, the Hill radius is much smaller than the disk thickness, and the disk response is linear. In the linear regime, the corotation to Lindblad torque ratio is independent of the planet mass. As we have stressed already, our potential smoothing length is large, and our corotation torque estimate is conservative. This indicates that any small-mass in-falling embryo will be trapped at the cavity edge that we modeled.

Disk profiles with an extremum of the specific vorticity are prone to a linear Rossby wave instability that eventually leads to

the formation of vortices (Li et al. 2000, 2001). This is the case of the transitions that we have simulated. The arc-shaped overdense region located near $x = -0.5, y = +0.5$ in the right plot of Figure 3 corresponds to such a vortex. It leads to a torque modulation over the synodic period between the planet and the vortex, which is seen on the migration curves of the left plot of Figure 3. As a planet approaches the transition, the synodic period increases, and so does the period of the semimajor axis modulations.

4.3. Torque Sampling at a Shallow Surface Density Jump

We have performed a series of calculations similar to those of § 4.1, except that we adopted a much smaller target outer to inner surface density ratio: $F = 1.4$ instead of 7. The surface density jump is therefore a very shallow one. The results are presented in Figure 4. They show that again there is a fixed point at which migration is halted, at $r \approx 1.09$. We have not searched further the limit inner to outer surface density ratio that leads to migration reversal, as this quantity depends on the jump radial size, on the profile adopted for the kinematic viscosity, and on the potential smoothing length. We just stress that a factor $F = 1 + O(1)$ and a jump size of $\sim 4H$ suffice to halt migrating bodies.

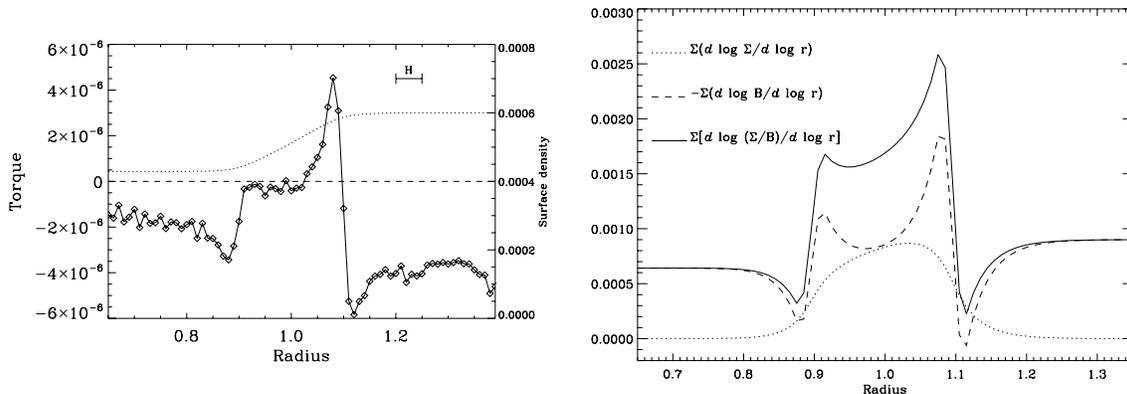


FIG. 4.—*Left*: Surface density profile for the runs of § 4.3 (dotted line and right axis) and total torque exerted by the disk on the planet as a function of its semimajor axis (diamonds and left axis), for a $4 M_{\oplus}$ planet. *Right*: Corresponding profiles of the different logarithmic derivatives involved in the expression of the corotation torque, weighted by the surface density, as in Fig. 1.

4.4. Driving of Trapped Planets

As can be seen in Figure 2 or 4, the torque maximum value is positive and large. This implies that, if the cavity radius evolves with time, either inward or outward, it drives any planet trapped on its edge so that its migration follows the edge evolution. More precisely, a planet will be held at a location where the specific torque acting on it endows it with a drift rate equal to that of the cavity radius. As the torque maximum in absolute value is at least of the order of the total torque in the outer disk, this means that the edge expansion or contraction can be as fast as the type I drift rate of its trapped objects and still keep these objects trapped. We illustrate this shepherding in Figure 5. We performed a calculation in which an initially fixed cavity, such as the one considered at the previous sections (here with $F = 10$ and a transition over $4H-5H$), traps a $15 M_{\oplus}$ infalling planet and then is endowed with an expansion rate $\dot{r}_l = 8 \times 10^{-5}$. This is achieved by imposing a kinematic viscosity profile as described in § 3 with a radius r_l that varies linearly with time. One can see that the planet semimajor axis follows the cavity radius evolution, so that the planet remains trapped on the cavity edge.

4.5. Dissipation and Corotation Torque Saturation

4.5.1. Corotation Torque Saturation

The corotation torque, in the absence of any angular momentum exchange between the horseshoe region and the rest of the disk, is prone to saturation: its value tends to zero after a few libration periods (Ward 1991, 1992; Masset 2001, 2002; Balmforth & Korycansky 2001). The disk turbulence, which endows the disk with an effective viscosity, can help to prevent the corotation torque saturation. Here we estimate the amount of viscosity required to prevent saturation, as a function of the planet mass. The maximal amount of saturation for which one still has a torque cancellation depends on the planet mass and on the detailed disk profiles. Here we just give an order of magnitude of the viscosity needed to prevent saturation by assuming a 50% saturation. This amount of saturation is reached when the viscous timescale across the horseshoe region is equal to the horseshoe libration timescale (Masset 2001):

$$\frac{x_s^2}{3\nu} = \frac{4\pi a}{(3/2)\Omega_p x_s}, \quad (13)$$

where x_s is the horseshoe zone half-width, ν is the disk effective kinematic viscosity, Ω_p is the planet orbital frequency, and a its semimajor axis. In order to express x_s as a function of the planet mass,⁴ we note that in the linear (hence fully unsaturated) limit the corotation torque can be expressed as (Ward 1991; Masset 2001)

$$\Gamma_C = \frac{9}{8} x_s^4 \Omega_p^2 \Sigma, \quad (14)$$

while from Tanaka et al. (2002) we have

$$\Gamma_C = 0.939 h^{-2} q^2 a^4 \Omega_p^2 \Sigma, \quad (15)$$

where $q = M_p/M_*$. Equations (14) and (15) yield

$$x_s = 0.96 a \sqrt{\frac{q}{h}}. \quad (16)$$

⁴ The estimate provided here is given for a flat surface density profile, but the horseshoe region width should not, or very weakly, depend on this assumption.

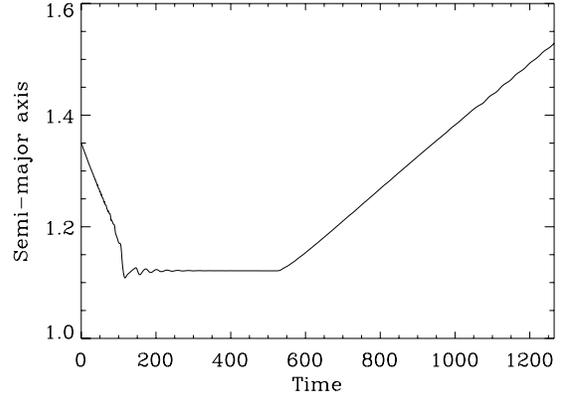


FIG. 5.—Semimajor axis as a function of time for a planet trapped in an expanding cavity. The cavity is fixed for the first 520 orbits, then is linearly expanding with time. The planet semimajor axis follows the cavity evolution so that the planet remains trapped at the cavity edge. At $t = 0$ the planet is released beyond the cavity, at $r = 1.35$. During the first 100 orbits it migrates toward the cavity, where it gets trapped.

Equations (13) and (16) give the minimum effective viscosity to prevent the corotation torque saturation:

$$\nu = 0.035 \left(\frac{q}{h}\right)^{3/2} a^2 \Omega_p, \quad (17)$$

or, in terms of the α -coefficient ($\nu = \alpha H^2 \Omega_p$):

$$\alpha = 0.035 q^{3/2} h^{-7/2} = 6.5 \times 10^{-6} \left(\frac{M_p}{1 M_{\oplus}}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{0.05}\right)^{-7/2}. \quad (18)$$

The value of α required to prevent the corotation torque saturation of an Earth-mass planet is therefore much smaller than the one inferred from disk lifetimes of T Tauri stars, namely, $\alpha = 10^{-3}$ to 10^{-2} (Hartmann 2001). Note that this also holds for large-mass solid cores ($M_p = 10-15 M_{\oplus}$). The corotation torque acting on these objects should therefore be a large fraction of the unsaturated estimate, so the analysis presented above for the torque cancellation is essentially valid. We also note that the planets of Figures 3 and 5 remain trapped over a timescale much longer than the horseshoe libration timescale, so that their corotation torque partial saturation is weak enough. The disk effective viscosity at the trap location is in these calculations 5×10^{-6} (i.e., $\alpha = 2 \times 10^{-3}$).

We remark that the corotation torque saturation could be different in a laminar disk with kinematic viscosity ν and in a turbulent disk (we discuss this topic in more detail in the next section) with the same effective viscosity, when the horseshoe region width is smaller than the turbulence length scale. The saturation should be easier to remove in this last case, which suggests that our saturation estimate is a conservative one.

4.5.2. Dissipation and Turbulence

Since the likely physical origin of the disk effective viscosity is turbulence, in particular, the turbulence generated by the magnetorotational instability (MRI; Balbus & Hawley 1991), the torque acting on the planet does not have a value constant in time as in a laminar disk, but rather displays large temporal fluctuations arising from the density perturbations in the planet vicinity.

It is important to assess the impact of these fluctuations on the mechanism outlined here. In the bulk of a disk with a smooth surface density profile, these torque fluctuations can yield an erratic behavior of the planet semimajor axis referred to as “stochastic migration” (Nelson & Papaloizou 2004; Nelson 2005). In what follows we use the torque fluctuation estimates of Nelson & Papaloizou (2004) and Nelson (2005) in order to determine whether despite its semimajor axis jitter the planet is confined to the trap vicinity, or whether it is unlocked from the trap position. We use a very simple prescription, which we detail in the Appendix, to perform Monte Carlo calculations of the planet semimajor axis over a period of time $t = 10^7 \Omega^{-1}$. We place initially the planet at the outer stable fixed point, and we declare it trapped if, over that amount of time, it never goes through the inner, unstable fixed point, while we declare it not trapped if it happens to go through the inner fixed point. While the Appendix presents the technical details of our calculations, we discuss below a number of issues relevant to these calculations.

1. Can the torque acting on the planet be considered as the sum of the torque in a laminar disk and the fluctuations arising from turbulence? Nelson (2005) found that this might not be the case, at least as long as the differential Lindblad torque is concerned, since the corotation region is not sufficiently resolved in his calculations; as an alternative explanation to the lack of the torque convergence to the laminar value, Nelson (2005) suggested the existence of very low frequency components of the torque fluctuations. As this problem is essentially open (and totally unaddressed as far as the corotation torque is concerned), we chose to describe the torque acting on the planet by the sum of the torque in the laminar case and of the torque fluctuations due to the turbulence.

2. The amplitude A of the torque fluctuations can be estimated by considering a density fluctuation of order unity with a length scale of order H , at a distance H from the planet (Nelson & Papaloizou 2004; Nelson 2005) and found to amount to $A = G\Sigma r$, where G is the gravity constant and r is the distance to the central object. This is the value that we adopt for our calculations.

3. The timescale of the fluctuations is of particular importance to assess the torque convergence toward its laminar value. Nelson (2005) found in his calculations that the torque fluctuations due to turbulence contain significant power at very low frequency and suggested that this could be linked to global communication across the disk on the viscous timescale. Here our situation is rather different, as the planet lies on a radially localized structure, with a radial extent λ . Fluctuations with frequency lower than $\sim \lambda/c_s$ would imply turbulent structures larger than the trap width and therefore would imply a radial displacement of the trap itself along the lines of § 4.4. Here we choose a correlation timescale for the turbulence of $t_c = 8\Omega^{-1} \sim 2\lambda/c_s$ for $\lambda \sim 4H$.

4. Both the tidal torque and the torque fluctuations scale with the disk surface density, so that the time needed for the time-averaged torque to reach convergence does not depend on the latter. However, the spread of the probability density of the planet semimajor axis after that timescale does depend on the disk surface density. If the expectancy of the distance of the planet to its initial location is larger than the trap width, then the planet can certainly be lost, while if it is much smaller than the trap width, the planet is certainly trapped. Our study therefore amounts to a disk critical mass search. For a given trap profile, a given planet mass and given fluctuation characteristics $A \propto \Sigma$ and t_c , there exists a critical disk mass so that a lighter disk keeps the planet trapped,

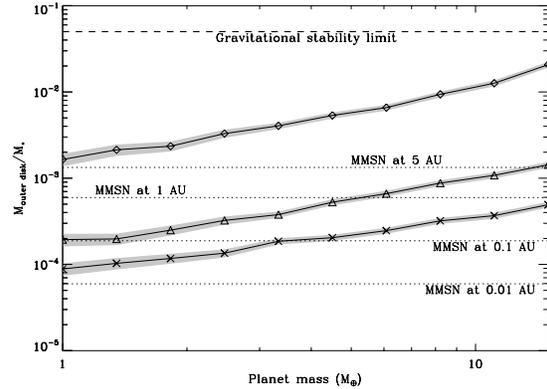


FIG. 6.—Critical disk mass as a function of the planet mass (from 1 to $15 M_{\oplus}$), for different transition profiles: the $F = 7$ cavity of § 4.1 (*diamonds*) and the $F = 1.4$ shallow jump of § 4.3 (*crosses*). The triangles represent the trapping limit for a torque curve with a peak maximum, which is the geometric mean of the peak values of the $F = 7$ and $F = 1.4$ transitions, which we assume to be representative of a transition with $F \approx 1 + (0.4 \times 6)^{1/2} = 2.5$. The dotted lines show the MMSN relative mass (as defined by its local surface density) at different radii. The thickness of the gray line indicates the results standard deviation found with different random seeds.

while a heavier disk is unable to lock it, and the planet is likely to go through the inner unstable fixed point. We perform this search in a dichotomic manner until we reach a precision of 5% on the disk mass, and we repeat the calculation with different random seeds, so as to get an idea of the precision on the disk critical mass estimate. Our results are displayed in Figure 6. The “disk outer mass” is defined as $M_{\text{outer disk}} = \pi r_{\text{out}}^2 \Sigma_{\text{out}}$, where Σ_{out} is the disk surface density on the outside of the surface density transition. We see in this figure that the deep cavity with $F = 7$ unconditionally traps $M = 1\text{--}15 M_{\oplus}$ protoplanets in a disk with a density profile of the MMSN, at any distance up to ~ 5 AU, while the shallow surface density transition would be able to retain in falling bodies only in the very central regions ($r_{\text{t}} \simeq 0.01$ AU, if the nebula extends that far in) of such a nebula. Farther out in the disk, at $r = 0.1$ AU, a shallow transition in the MMSN would only capture embryos with $M > 4 M_{\oplus}$, etc.

It is not unreasonable to assume that these simple calculations are conservative, for the following reasons:

1. We have assumed the torque fluctuations to scale only with the disk surface density, which implies that all the disk material in the trap vicinity is turbulent. There is at least one realization of the trap, which is the inner edge of a dead zone (detailed in the next section), for which this statement is wrong. In our example, the trap stable fixed point corresponds to a location with a large surface density, therefore located rather on the “dead” side of the transition, i.e., where turbulent transport of angular momentum is inefficient and hence where the turbulence should be much weaker than contemplated in our simple Monte Carlo calculations.

2. We recall that our large potential smoothing length tends to significantly underestimate the corotation torque, while the trap ability to lock infilling bodies, for a given turbulence characteristics, strongly depends on the corotation torque peak value at the surface density transition.

We conclude this section with two remarks. First, the numerical simulations undertaken by Nelson & Papaloizou (2004) and Nelson (2005) neglect, for reasons of computational speed, the

gravitational potential z -dependency, which means that their disks have no vertical stratification. Future numerical experiments with vertical stratification may lead to different characteristics of the torque fluctuations. Second, other sources of turbulence have been suggested in protoplanetary disks, such as the global baroclinic instability (Klahr 2004), which may have different torque fluctuations statistics, and for which the trap efficiency may therefore be different. To date this is essentially an unaddressed issue.

5. DISCUSSION

The mechanism exhibited here is generic, since it plays a role at any positive disk surface density transition, even shallow ones, with the cautionary remark that some turbulence is required to prevent the corotation torque saturation, and that a condition is required on the disk mass to prevent the stochastic migration induced by the turbulence to overcome the trap effect. Although our knowledge of the detailed properties of protoplanetary disks is still incipient, we already know a number of locations for transitions exhibiting the above properties, which constitute potential traps for infalling embryos:

1. At the inner edge of a dead zone (Gammie 1996; Fromang et al. 2002), the surface density is expected to be significantly larger in the dead zone than in the ionized inner disk, while the inner disk turbulence provides the dissipation required to maintain the corotation torque. If the dead zone inner radius changes with time (since layered accretion involving a dead zone is thought not to be a steady process), then the objects trapped at the fixed point follow the transition radius, as shown in § 4.4. The edges of dead zones are thought, in the totally different context of runaway or type III migration (Masset & Papaloizou 2003), to be able to halt or reverse a runaway episode (Artymowicz 2004). Here, in our context of small-mass, type I migrating objects, we argue that the inner edge of a dead zone halts type I migrating bodies and efficiently traps them.

2. Sizable surface density transitions can also be found at the transition between an inner disk region where jets are launched and the outer viscous disk (Ferreira & Pelletier 1995). Indeed, the accretion velocity in the jet-emitting disk (JED) region is entirely due to the jet torque and becomes much larger than in a standard accretion disk (SAD). Mass flux conservation then leads to a surface density jump at the transition radius between the SAD and the JED. This radius has been inferred to vary from 0.3 to a few AU in some T Tauri stars⁵ (Coffey et al. 2004; Pesenti et al. 2004). As all known embedded objects have jets, the existence of such a transition radius provides a natural trap for infalling embryos over the jet lifetime.

3. We finally mention the outer edge of a gap opened by a preexisting giant protoplanet. The latter can trap planetesimals at mean motion resonances (Hahn & Ward 1996) and also at the large positive surface density gradient found on its gap outer edge.

We note that the first two possibilities might not coexist in an accretion disk. Not all T Tauri stars show indeed evidence of high-velocity jets (Hartigan et al. 1995). For these jetless stars, the whole disk is likely to resemble a SAD with a dead zone in its innermost region. The protoplanet trap would then be realized at the inner radius of the dead zone, namely, only if there is a SAD

⁵ In fact, velocity shifts detected in jets are interpreted as being a rotation signature, which then allows one to derive the outer jet launching radius in the underlying accretion disk. This radius corresponds to our transition radius.

settled at smaller radii. Objects with a dead zone extending down to the star would have no trap. On the contrary, young stars producing jets require the presence of a JED in the inner disk region. In that case, the trap is located at the outer JED radius (the JED itself may extend down to the star with no impact on the trap). Note also that, since a JED is less dense than a SAD, it is unlikely that a dead zone would establish (J. Ferreira et al. 2006, in preparation).

The likely existence of such planetary traps in protoplanetary disks has important implications for the formation of giant planets. First, it constitutes a workaround to the timescale conflict between a solid core buildup (which is slow) and its migration to the central object (which would be fast, if the object was not stopped at a trap). Second, a large amount of solid embryos should accumulate at the trap location. This should speed up the buildup of a critical mass core ($M_p \simeq 15 M_{\oplus}$), which could accrete the nebula gas and convert itself into a giant planet. The dynamics of the set of embryos trapped at the jump is, however, beyond the scope of this communication and will be presented in a forthcoming work.

We have seen in § 2 that the corotation torque value is boosted not only by the large surface density gradient but also by the alteration of the rotation profile, which yields a large gradient of B , with both large minimal and maximal values, since the gradient of B involves the second derivative of the angular velocity. One may wonder whether at a disk opacity transition, in which there is a disk temperature jump and hence a pressure gradient radial jump, the alteration of the rotation profile is sufficient to yield a peak value of the corotation torque that counteracts the Lindblad torque. We have undertaken subsidiary calculations in which we have a power-law surface density profile and a sound speed profile with a localized radial jump. We found that we need a jump of the aspect ratio of ~ 1.5 over $4H$ in order to halt migration. This ratio is too large and is unrealistic in a SAD. Indeed, in a standard accretion disk in which energy is transported vertically by radiative diffusion, the central temperature scales as $\tau^{1/8}$, where τ is the optical depth. As a consequence, even in the vicinity of an opacity transition, the temperature profile exhibits a smooth behavior and the corotation torque is not sufficiently strong to counterbalance the Lindblad torque. Nevertheless, Menou & Goodman (2004) have found that the opacity transitions may induce a significant reduction of the differential Lindblad torque, but they explicitly neglected the corotation torque in their study. It would be of interest to investigate whether the corotation torque boost at these locations can be sufficient to halt migration.

Remarkably, the scale height of a JED is always smaller than that of the SAD, so that the transition between these two flows naturally yields a jump in the disk aspect ratio. This is due to two effects. First, a JED feeds its jets with most of the released accretion power so that only a small fraction of it is radiated away at the disk surface: the disk is cooler. Second, in addition to gravity, the large-scale magnetic field vertically pinches the disk (Ferreira 1997).

We also stress that at the inner dust puffed-up rims of protoplanetary disks (Isella & Natta 2005), there can be a large radial gradient of the gas temperature, which may be sufficient to trap migrating planets.

We finally emphasize that the mechanism presented here does not allow low-mass objects to proceed inside of a cavity, but rather traps them on the cavity edge. This is quite different from what has been studied in the context of gap opening planets, which migrate farther inside until they reach the 2:1 resonance with the cavity edge (Kuchner & Lecar 2002).

6. CONCLUSIONS

We have shown that the type I migration of $M_p < 15 M_{\oplus}$ planets can be halted at radially localized disk surface density jumps (the surface density being larger on the outside of the jump). Some turbulence is then required to prevent the corotation torque saturation. The latter tends to induce stochastic migration of the embryos and therefore tends to act against the trap. The lighter the disk, the easier it is to keep an embryo trapped, since its radial jitter over the timescale needed to reach torque convergence is small and can be confined to the vicinity of the trap stable fixed point. Inversely, the lighter the embryo, the more difficult it is to trap it: in the zero-mass limit, the embryo has no tidal torque and only feels the torque fluctuations arising from turbulence. We have shown that a jump with a large surface density ratio efficiently traps embryos above $1 M_{\oplus}$ up even in relatively massive disks, such as the MMSN at $r = 5$ AU, while shallow jumps (a 40% surface density increase over ~ 4 disk scale heights) will retain embryos of a few Earth masses and more only in light disks, such as the MMSN at $r = 0.1$ AU. We have illustrated by means of numerical simulations that a surface density

jump traps infalling embryos and that it drives them along with it if it moves radially as the disk evolves. Such a jump can occur at different locations in a protoplanetary disk: it can be found at the transition between the standard accretion disk solution (SAD) and the jet-emitting disk (JED), thought to be at a distance 0.3 to 1–2 AU from the central object. It can also be found at the inner edge of a dead zone, where one expects a very large ratio of outer to inner surface densities. It may also be found at the outer edge of a protoplanetary gap if one giant planet already exists in the disk. We have stressed that these planetary traps have two important consequences: (1) they can hold the type I migration of protoplanet cores over the timescale needed to overcome the critical mass ($\sim 15 M_{\oplus}$) over which rapid gas accretion begins onto these cores, which are then quickly converted into giant planets that should enter the slow, type II migration regime; and (2) as solid embryos accumulate at the trap, the buildup of critical cores should be faster than elsewhere in the disk. Finally, we mentioned that, although temperature radial jumps in principle also yield large peaks of the corotation torque, they are unlikely to be able to counteract the Lindblad torque by themselves, as the temperature gradients required for that are unrealistically large in a standard accretion disk.

APPENDIX

PRESCRIPTION FOR THE ONE-DIMENSIONAL CALCULATION OF THE PLANET SEMIMAJOR AXIS TIME EVOLUTION IN THE PRESENCE OF TORQUE FLUCTUATIONS

The planet semimajor axis is evolved in time using a Euler method:

$$a(t + \Delta t) = a(t) + \Delta t \frac{\Gamma_l + \Gamma_f}{2B[a(t)]a(t)}, \quad (\text{A1})$$

where $a(t)$ is the planet semimajor axis at date t , Γ_l is the torque as measured in a laminar disk for a planet in circular orbit of radius a , linearly interpolated from the results displayed in either Figure 2a or 4a, Γ_f is the torque fluctuation due to turbulence, and where a Keplerian profile is assumed for B (this is grossly wrong as far as its radial derivative is concerned, as we saw in the main text, but this is largely sufficient for our purpose here). The torque fluctuation is evaluated as follows:

$$\Gamma_f = G \Sigma_m[a(t)] a(t) [2V - 1], \quad (\text{A2})$$

where $\Sigma_m[a] = \max[\Sigma(r)]_{r \in [a-H, a+H]}$ and V is a random variable uniformly distributed over $[0, 1]$. The value of Γ_f is kept constant over t_c . We use the above prescription for $\Sigma_m[a]$, since the planet is located in a region where the surface density gradient is large. The largest torque fluctuations may arise from regions located within $a - H$ to $a + H$ from the central object and where the surface density may be significantly different from the one at the planet location. Each realization of the random variable is independent of the previous ones. We anticipate that the results should not depend on the torque fluctuation law, since the central limit theorem states that the cumulative torque law tends toward a normal law (Nelson 2005).

REFERENCES

- Alibert, Y., Mordasini, C., Benz, W., & Winisdoerffer, C. 2005, *A&A*, 434, 343
 Artymowicz, P. 2004, in *ASP Conf. Ser. 324, Debris Disks and the Formation of Planets*, ed. L. Caroff et al. (San Francisco: ASP), 39
 Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, *ApJ*, 376, 214
 Balmforth, N. J., & Korycansky, D. G. 2001, *MNRAS*, 326, 833
 Coffey, D., Bacciotti, F., Woitatz, J., Ray, T. P., & Eisloffel, J. 2004, *ApJ*, 604, 758
 D'Angelo, G., Bate, M. R., & Lubow, S. H. 2005, *MNRAS*, 358, 316
 Ferreira, J. 1997, *A&A*, 319, 340
 Ferreira, J., & Pelletier, G. 1995, *A&A*, 295, 807
 Fromang, S., Terquem, C., & Balbus, S. A. 2002, *MNRAS*, 329, 18
 Gammie, C. F. 1996, *ApJ*, 457, 355
 Goldreich, P., & Tremaine, S. 1979, *ApJ*, 233, 857
 Hahn, J. M., & Ward, W. R. 1996, *Lunar Planet. Sci. Conf.*, 27, 479
 Hartigan, P., Edwards, S., & Ghandour, L. 1995, *ApJ*, 452, 736
 Hartmann, L. 2001, *Accretion Processes in Star Formation* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
 Isella, A., & Natta, A. 2005, *A&A*, 438, 899
 Klahr, H. 2004, *ApJ*, 606, 1070
 Korycansky, D. G., & Pollack, J. B. 1993, *Icarus*, 102, 150
 Kuchner, M. J., & Lecar, M. 2002, *ApJ*, 574, L87
 Li, H., Colgate, S. A., Wendroff, B., & Liska, R. 2001, *ApJ*, 551, 874
 Li, H., Finn, J. M., Lovelace, R. V. E., & Colgate, S. A. 2000, *ApJ*, 533, 1023
 Masset, F. S. 2000a, *A&AS*, 141, 165
 ———. 2000b, in *ASP Conf. Ser. 219, Disks, Planetesimals, and Planets*, ed. F. Garzón et al. (San Francisco: ASP), 75
 ———. 2001, *ApJ*, 558, 453
 ———. 2002, *A&A*, 387, 605
 Masset, F. S., & Papaloizou, J. C. B. 2003, *ApJ*, 588, 494
 Menou, K., & Goodman, J. 2004, *ApJ*, 606, 520
 Nelson, R. P. 2005, *A&A*, 443, 1067
 Nelson, R. P., & Papaloizou, J. C. B. 2004, *MNRAS*, 350, 849
 Ogilvie, G. I., & Lubow, S. H. 2002, *MNRAS*, 330, 950

- Pesenti, N., Dougados, C., Cabrit, S., Ferreira, J., Casse, F., Garcia, P., & O'Brien, D. 2004, *A&A*, 416, L9
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J. J., Podolak, M., & Greenzweig, Y. 1996, *Icarus*, 124, 62
- Tanaka, H., Takeuchi, T., & Ward, W. R. 2002, *ApJ*, 565, 1257
- van Leer, B. 1977, *J. Comput. Phys.*, 23, 276
- Ward, W. R. 1986, *Icarus*, 67, 164
- . 1991, *Lunar Planet. Sci. Conf.*, 22, 1463
- . 1992, *Lunar Planet. Sci. Conf.*, 23, 1491
- . 1997, *Icarus*, 126, 261

ON THE MIGRATION OF PROTOGIANT SOLID CORES

F. S. MASSET^{1,2}

AIM-UMR 7158, CEA/CNRS/Université Paris 7, DSM/DAPNIA/SAp, Orme des Merisiers, CE-Saclay,
91191 Gif/Yvette Cedex, France; fmasset@cea.fr

G. D'ANGELO³

NASA-ARC, Space Science and Astrobiology Division, MS 245-3,
Moffett Field, CA 94035; gdangelo@arc.nasa.gov

AND

W. KLEY

Universität Tübingen, Institut für Astronomie und Astrophysik, Abt. Computational Physics,
Auf der Morgenstelle 10, D-72076 Tübingen, Germany; wilhelm.kley@uni-tuebingen.de

Received 2006 May 22; accepted 2006 July 7

ABSTRACT

The increase of computational resources has recently allowed high-resolution, three-dimensional calculations of planets embedded in gaseous protoplanetary disks. They provide estimates of the planet migration timescale that can be compared to analytical predictions. While these predictions can result in extremely short migration timescales for cores of a few Earth masses, recent numerical calculations have given an unexpected outcome: the torque acting on planets with masses between 5 and 20 M_{\oplus} is considerably smaller than the analytic, linear estimate. These findings motivated the present work, which investigates existence and origin of this discrepancy or “offset,” as we shall call it, by means of two- and three-dimensional numerical calculations. We show that the offset is indeed physical and arises from the co-orbital corotation torque, since (1) it scales with the disk vortensity gradient, (2) its asymptotic value depends on the disk viscosity, (3) it is associated to an excess of the horseshoe zone width. We show that the offset corresponds to the onset of nonlinearities of the flow around the planet, which alter the streamline topology as the planet mass increases: at low mass the flow nonlinearities are confined to the planet’s Bondi sphere, whereas at larger mass the streamlines display a classical picture reminiscent of the restricted three-body problem, with a prograde circumplanetary disk inside a “Roche lobe.” This behavior is of particular importance for the subcritical solid cores ($M \lesssim 15 M_{\oplus}$) in thin ($H/r \lesssim 0.06$) protoplanetary disks. Their migration could be significantly slowed down, or reversed, in disks with shallow surface density profiles.

Subject headings: accretion, accretion disks — hydrodynamics — methods: numerical — planetary systems: formation — planetary systems: protoplanetary disks

1. INTRODUCTION

Ever since it was realized that the torque exerted by a protoplanetary disk onto an orbiting protoplanet could vary its semimajor axis on a timescale much shorter than the disk lifetime (Goldreich & Tremaine 1979), many efforts have been made to determine the direction and rate of this semimajor axis change, referred to as planetary migration. For two decades, this problem was essentially tackled through linear analytical estimates of the disk torque onto a pointlike perturber. The torque on a planet in a circular orbit can be split into two components: the differential Lindblad torque and the corotation torque. Early work on planetary migration consisted in determining the sign and value of the differential Lindblad torque in a two-dimensional disk (Ward 1986), since this torque, in the linear regime, typically exceeds the co-orbital corotation torque and therefore dictates the direction and timescale of planetary migration. This work indicated that planetary migration in most cases corresponds to an orbital decay toward the center, and that it is a fast process, thus posing a threat to the survival of protoplanets embedded in protoplanetary disks. Later efforts focused on the corotation torque (Ward 1989) and

on the disk’s vertical extent and pressure effects on the differential Lindblad torque (Artymowicz 1993). The analytical predictions in the linear regime were checked by numerical integration of the differential equations (Korycansky & Pollack 1993). Finally, Tanaka et al. (2002) have given an expression of the tidal torque, in the linear regime, that takes into account both the Lindblad and co-orbital corotation torques, and that fully takes into account the three-dimensional structure of the disk. These analytical or semianalytical studies all consider small-mass planets, for which a linear approximation of the disk response is valid. Other studies dealt with a strongly nonlinear case, that of embedded giant planets (Lin & Papaloizou 1986a, 1986b). They showed that a giant planet tidally truncates the disk by opening a gap around its orbit, and that it is then locked in the viscous disk evolution, a process that was much later referred to as type II migration (Ward 1997). A more recent work (Masset & Papaloizou 2003) considers the case of subgiant planets (planets that have a mass of the order of a Saturn mass, if the central object has a solar mass) embedded in massive disks. This work shows that the co-orbital corotation torque may have a strong impact on the migration, and can lead to a runaway of the latter, either inward or outward. As this mechanism heavily relies on the finite width of the horseshoe region, it also corresponds to a nonlinear mechanism. The onset of nonlinear effects should therefore occur below a subgiant planet mass, but the first manifestation of these

¹ Also at IA-UNAM, Ciudad Universitaria, Apartado Postal 70-264, Mexico DF 04510, Mexico.

² Send offprint requests to fmasset@cea.fr.

³ NASA Postdoctoral Fellow.

effects and their impact on planetary migration have not been investigated thus far. Korycansky & Papaloizou (1996), by writing the flow equations in dimensionless units, have shown that the flow nonlinearity is controlled by a parameter $\mathcal{M} = q^{1/3}/h$, where $q = M_p/M_*$ is the planet mass to star mass ratio and $h = H/r$ is the disk aspect ratio. The linear limit corresponds to $\mathcal{M} \rightarrow 0$, while the condition $\mathcal{M} > 1$ has been considered as a necessary condition for gap clearance, and has sometimes been referred to as the gap opening thermal criterion, although a recent work by Crida et al. (2006) has revisited the conditions for gap opening.

In the last few years, the increase of computational resources has made possible the evaluation of the disk torque exerted on an embedded planet by means of hydrodynamic calculations, both in two dimensions (Lubow et al. 1999; Nelson et al. 2000; D’Angelo et al. 2002; Masset 2002; Nelson & Benz 2003a, 2003b) and in three dimensions (D’Angelo et al. 2003; Bate et al. 2003), both for small-mass planets and for giant planets. In particular, the case of small-mass planets allows comparison with analytical linear estimates. This was done by D’Angelo et al. (2002, 2003) and Bate et al. (2003), who compared the torques they measured with the estimate by Tanaka et al. (2002). Although D’Angelo et al. (2002) and Bate et al. (2003) found results in good agreement with linear expectations, D’Angelo et al. (2003) found a significant discrepancy for planet masses in the range $5\text{--}20 M_\oplus$. Namely, they found that migration in this planet mass range may be more than 1 order of magnitude slower than expected from linear estimates. In the same vein, Masset (2002) found that planetary migration for the same planet masses can be much slower, or even reversed, compared to linear estimates. Since the migration of protoplanetary cores of this mass constitutes a bottleneck for the build up of giant planet cores (as this build up is slow, while the migration of these cores is fast), it is fundamental to establish whether this effect is real and, if confirmed, to investigate the reasons of this behavior. We hereafter refer to this discrepancy as the “offset.”

We adopt for the presentation of our results a heuristic approach that consists in first presenting the set of properties that we could infer from our calculations and then interpreting and illustrating them through the appropriate analysis. Besides its pedagogical interest, this approach also closely follows our own approach to this problem.

In § 2.4 we describe the two independent codes that we used to check the properties of the offset, and we give the numerical setup used by each of these codes. In § 3 we list the set of properties of the offset that our numerical experiments allowed us to identify, namely, the following:

1. The offset scales with the vortensity gradient (the vortensity being defined as the vertical component of the vorticity divided by the surface density).
2. The offset value varies over the horseshoe libration time-scale, and tends to small values at small viscosity, whereas it remains large at high viscosity.
3. The maximum relative offset occurs for a planet mass that scales as h^3 .

We then interpret these properties as due to a nonlinear behavior of the co-orbital corotation torque that exceeds its linearly estimated value. Using the link between co-orbital corotation torque and horseshoe zone drag (Ward 1991, 1992; Masset 2001, 2002; Masset & Papaloizou 2003), we perform in § 4 a stream-line analysis in order to check whether the co-orbital corotation torque excess is associated with a horseshoe zone width excess. We find that this is indeed the case. In § 5 we relate this width

excess of the horseshoe region to a transition of the flow properties in the planet vicinity, from the linear regime to the large-mass case in which a circumplanetary disk surrounds the planet. We finally discuss in § 6 the importance of these properties for the migration of subcritical solid cores. We sum up our results in § 7.

2. HYDRODYNAMIC CODES AND NUMERICAL SETUP

We used two independent hydrocodes to perform our tidal torque estimates. One of these codes is the three-dimensional nested grid code NIRVANA, and the other is the two-dimensional polar code FARGO. The use of these codes was complementary: while FARGO suffers from the two-dimensional restriction and its outcome is plagued by the use of a gravitational softening length, it enables one to perform a wide exploration of the parameter space (mainly, in our case, in terms of planet mass, surface density slope, disk thickness, and viscosity). The properties suggested by the FARGO runs can later be confirmed by much more CPU-demanding three-dimensional runs with NIRVANA.

2.1. The NIRVANA Code

This code is a descendant of an early version of the MHD code NIRVANA (Ziegler & Yorke 1997); hence the name. For the current application, the magnetic terms in the MHD equations are excluded. The code features a covariant Eulerian formalism that allows us to work in Cartesian, cylindrical, or spherical polar coordinates in one, two, or three dimensions. The MHD equations are solved on a staggered mesh, with a constant spacing in each coordinate direction via a directional splitting procedure, whereby the advection part and the source terms are dealt with separately. The advection of the hydrodynamic variables is performed by means of a second-order accurate scheme that uses a monotonic slope limiter (van Leer 1977), enforcing global conservation of mass and angular momentum. Viscous forces are implemented in a covariant tensor formalism. The code allows a static mesh refinement through a hierarchical nested-grid structure (D’Angelo et al. 2002, 2003). The resolution increases by a factor of 2 in each direction from a subgrid level to the next nested level. When employed in a three-dimensional geometry, this technique produces an effective refinement of a factor of 8 from one grid level to the next one.

2.2. The FARGO Code

The FARGO code is a staggered mesh hydrocode on a polar grid, with upwind transport and a harmonic, second-order slope limiter (van Leer 1977). It solves the Navier-Stokes and continuity equations for a Keplerian disk subject to the gravity of the central object and that of embedded protoplanets. It uses a change of rotating frame on each ring that enables one to increase significantly the time step (Masset 2000a, 2000b). The hydrodynamic solver of FARGO resembles the widely known one of the ZEUS code (Stone & Norman 1992), except for the handling of momenta advection. The Coriolis force is treated so as to enforce angular momentum conservation (Kley 1998). The mesh is centered on the primary. It is therefore noninertial. The frame acceleration is incorporated in a so-called potential indirect term. The full viscous stress tensor in cylindrical coordinates of the Navier-Stokes equations is implemented in FARGO. A more detailed list of its properties can be found on its World Wide Web site.⁴

⁴ See <http://www.maths.qmul.ac.uk/~masset/fargo>.

2.3. Units

As is customary in numerical calculations of disk-planet tidal interactions, we use the planet orbital radius a as the length unit, the mass of the central object M_* as the mass unit, and $(a^3/GM_*)^{1/2}$ as the time unit, where G is the gravitational constant, which is $G = 1$ in our unit system. Whenever we quote a planet mass in Earth masses, we assume the central object to have a solar mass. We note M_p the planet mass and $q = M_p/M_*$ the planet to star mass ratio.

2.4. Numerical Setup

Both codes use an isothermal equation of state with a given radial temperature (or sound speed) profile. If P is the (vertically integrated for FARGO) pressure and ρ the (vertically integrated for FARGO) gas density, then the equation of state is $P = c_s^2 \rho$. The disk vertical scale-height is $H(r) = c_s(r)/\Omega(r)$, where $\Omega(r)$ is the disk angular frequency at radius r . The disk aspect ratio, $h(r) = H(r)/r$, is taken uniform in the disks that we simulate, and it varies from $h = 0.03$ to $h = 0.06$ depending on the runs.

The softening length is applied to the planet potential in the following manner:

$$\Phi_p = -\frac{GM_p}{\sqrt{r_p^2 + \epsilon^2}}, \quad (1)$$

where Φ_p is the planet potential, r_p the distance to the planet, and ϵ is the softening length.

In all the runs presented in this work, the planet is held on a fixed circular orbit. Moreover, there is no gas accretion onto the planet. This is quite different from the prescription of D'Angelo et al. (2003) and Bate et al. (2003). However, we shall see that the effect we investigate is related to the co-orbital corotation torque, which itself is related to the horseshoe dynamics. In the case in which accretion is allowed, the flow topology in the planet vicinity is more complex than in a nonaccreting case, with an impact on the horseshoe zone and on the co-orbital corotation torque value. In order to retain only the physics relevant to the effect we are interested in, we discard gas accretion onto the planet. It should, however, be kept in mind that this is not realistic for planet masses $M_p \gtrsim 15 M_\oplus$. Nonetheless, the phenomenon we describe does persist, and indeed was originally observed, when planetary cores are allowed to accrete.

In our runs the disk surface density is initially axisymmetric and has a power-law profile: $\Sigma(r) = \Sigma_0(r/r_0)^{-\alpha}$, where r_0 is the radius at which the surface density is Σ_0 . The kinematic viscosity has a uniform value over the disk. We have adopted a reference setup that closely resembles the one of D'Angelo et al. (2003) or Bate et al. (2003). Its characteristics are listed in Table 1. Whenever we vary one disk parameter (e.g., aspect ratio or viscosity), we adopt for the other parameters the reference values. For a given set of disk parameters, we perform several calculations with different planet masses.

We list below the details specific to each code:

1. In the three-dimensional NIRVANA runs, the computational domain is a spherical sector $[R_{\min}, R_{\max}] \times [\theta_{\min}, \theta_{\max}] \times 2\pi$, whose radial boundaries are $R_{\min} = 0.4$, $R_{\max} = 2.5$. Symmetry is assumed relative to the disk midplane and only the upper half of the disk is simulated; hence $\theta_{\max} = 90^\circ$. The minimum colatitude, θ_{\min} , varies from 80° to 82.5° , according to the value of the aspect ratio h . The vertical extent of the disk comprises at least 3 pressure scale heights. Outgoing-wave (or nonreflecting) boundary conditions are used at the inner radial border (Godon 1996). In

TABLE 1
DISK PARAMETERS FOR THE REFERENCE CALCULATIONS;
THERE IS NO ACCRETION ONTO THE PLANETS

Parameter	Notation	Reference Value
Aspect ratio	h	0.05
Surface density slope	α	1/2
Viscosity	ν	10^{-5}

order to exploit the mirror symmetry of the problem with respect to the disk equatorial plane (the disk and the planet orbit are coplanar), a symmetry boundary condition was used at the disk midplane, which enables us to simulate only the upper half of the disk. Finally, reflecting boundary conditions were used at the outer radial border, which is located sufficiently far from the orbit so that the wake reflection will not alter our torque evaluation, and at $\theta = \theta_{\min}$, where the matter is so rarefied that the choice of the boundary condition has virtually no impact on the flow properties on the bulk of the disk. The reference frame has its origin on the center of mass of the star-planet system and corotates with the planet. The grid hierarchy consists of a basic mesh with $(N_R, N_\theta, N_\phi) = (143, 13, 423)$ grid zones and four additional sub-grid levels centered at the planet's position, each with $(64, 12, 64)$ grid zones. The initial vertical density distribution is that of an unperturbed disk in hydrostatic equilibrium, which in spherical coordinates reads $\rho(t=0) = \rho_0(R) \exp[(\sin\theta - 1)/h^2]/(\sin\theta)^{(\alpha+1)}$, where $\rho_0 \propto 1/R^{(\alpha+1)}$ and the sound speed is assumed to scale as $c_s \propto h/(R \sin\theta)^{1/2}$. Such density profile is stationary in the limit $M_p \rightarrow 0$. The initial surface density, obtained by integrating the mass density in θ , is $\Sigma = \Sigma_0(a/R)^\alpha$, where $\Sigma_0 = 2.9 \times 10^{-4}$. Calculations were performed for many values of the planet to star mass ratio, from $q = 10^{-6}$ to $q = 2 \times 10^{-4}$, in disks with various values of the initial density slope α , aspect ratio h , and kinematic viscosity ν . Simulations were run for up to 140 orbital periods to measure (partially) saturated co-orbital corotation torques. Shorter runs (10 orbits) were used to monitor (partially) unsaturated corotation torques. In three-dimensional calculations, torques arising from the Roche lobe are not very sensitive to the choice of the softening parameter, ϵ , in the planet gravitational potential, as long as it is a small fraction of the Hill radius $R_H = a(q/3)^{1/3}$. We used $\epsilon = 0.1R_H$. However, some models were also run with a smaller softening length and produced no significant differences.

2. In the two-dimensional FARGO runs, the mesh inner boundary is at $R_{\min} = 0.5$ and the mesh outer boundary is at $R_{\max} = 2.1$. A nonreflecting boundary condition was used at each boundary. The resolution is of $N_{\text{rad}} = 153$ zones in radius and $N_\phi = 600$ zones in azimuth. The mesh spacing is uniform both in radius and in azimuth. The frame corotates with the planet. The value of Σ_0 is 6×10^{-4} . The potential softening length is $\epsilon = 0.3H$. This value is quite low. Preliminary calculations have shown that the offset is much larger at small potential softening length value, which is why we adopted this value. For a given set of disk parameters, we performed 35 calculations with 35 different planet masses, in geometric sequence and ranging from $q = 10^{-6}$ to $q = 10^{-3.5}$: $q_i = 10^{-6+2.5i/34}$, $0 \leq i \leq 34$. Most of the calculations are run for 100 orbits, in order for the co-orbital corotation torque to saturate if the disk parameters imply its saturation. We have also performed series of short runs for 10 orbits, in order to have an unsaturated corotation torque.

2.5. Torque Evaluation

In the three-dimensional runs, the gravitational torques acting on the planet are evaluated either every five orbits (long-run

simulations) or every orbit (short-run simulations). In the first case, the total torque is averaged over the last 30 orbital periods of the calculation whereas, in the second case, it is averaged from $t = 7$ and $t = 10$ orbits. As mentioned in § 2.4, accretion onto the planetary core is not allowed. In the low-mass limit, this leads to the formation of a gas envelope around the planet. The size of the envelope depends on the core mass and is a fraction of R_H . To avoid the envelope region, torque contributions from within the Hill sphere were discarded. This choice may occasionally result in some corotation torques being unaccounted for. When this happens, the departure from the linear regime may be underestimated. However, tests performed by excluding torques from a region of radius $0.5R_H^5$ indicate that the effects would not significantly change the results of this study. Therefore, this choice is conservative since it may occasionally underestimate the excess of co-orbital corotation torques but assures that our analysis is not affected by spurious torques from material possibly bound to the core. In FARGO, the torque exerted by the disk onto the planet is evaluated every 1/20 of orbit. In the long runs case (100 orbits), the torque value is averaged from $t = 40$ to $t = 100$ orbits, in order to discard any transient behavior at the beginning of the calculation due to corotation torque (possibly partial) saturation on the libration timescale. In the short runs case, we generally take (unless otherwise stated) the torque average between $t = 6$ and $t = 7$ orbits. We also entertained the issue of whether the Roche lobe material must be taken into account. The FARGO code, in its standard version, outputs both the torque exerted by the totality of the disk onto the planet, without a special treatment of the Roche lobe material, and the torque obtained by tapering the torque arising from the Roche lobe and its surroundings by $1 - \exp[-(r_p/R_H)^2]$, where r_p is the zone center distance to the planet. We show in § 3 that taking or not taking the Roche lobe content into account does make a difference, but that qualitatively one obtains the offset properties in both cases. We have chosen to include the Roche lobe content in the torque evaluation for the FARGO calculations presented in this work. There is another reason for this choice, namely, that the material that should be discarded in the torque calculation should be the one pertaining to the circumplanetary disk: one would define the system of interest as “the planet + the circumplanetary disk.” If the circumplanetary disk has a radius that scales with R_H and that amounts to several $0.1R_H$ for large planet masses, this is not true for the small planet masses that represent most of the mass interval over which we perform the calculations. For these small masses, the circumplanetary disk has a radius much smaller than a few $0.1R_H$, or may not even exist, as we shall see in § 5.

3. OFFSET PROPERTIES

3.1. Reference Run

3.1.1. Two-dimensional Results

Figure 1 shows the results of the reference run, corresponding to the parameters of Table 1, both with and without Roche lobe tapering. Both curves show the offset near $q = 10^{-4}$. However, the curves do not coincide, and the offsets have slightly different shapes, which indicates that it is due to material located inside of the Hill sphere or in its immediate vicinity.

As mentioned in § 1, previous two-dimensional simulations by D’Angelo et al. (2002) have apparently missed the offset

⁵ The net torque exerted by material deep inside the Hill sphere of a non-accreting planet is negligible if density gradients are appropriately resolved (D’Angelo et al. 2005).

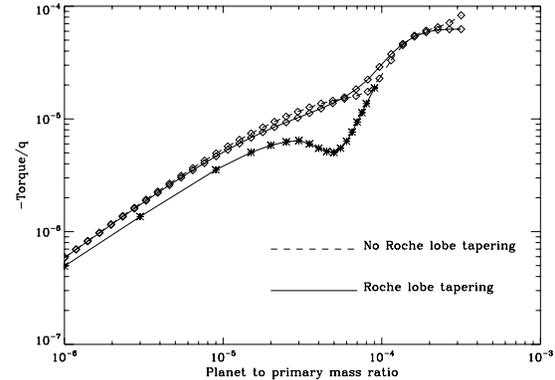


FIG. 1.—Negative of specific torque acting on the planet, as a function of its mass, in the reference disk for the two-dimensional case. The solid line with diamonds shows the torque computed with Roche lobe tapering, while the dashed line shows the torque computed without special treatment of the Roche lobe zones. The solid line with stars shows the results of the three-dimensional calculations, scaled by $\Sigma_0^{2D}/\Sigma_0^{3D} = 60/29$. We note that the offset depth is larger in the three-dimensional case.

feature shown in Figure 1. The most likely reason why this happened is the use of an extremely small softening parameters (on the order of $0.02R_H$), associated with the action of torques deep inside the planet’s Hill sphere (at distances from the planet $r_p \lesssim 0.2R_H$). We shall see in § 5 that for such a small softening length we should expect the offset feature to peak at $q < 10^{-6}$, which is not in the mass range covered by D’Angelo et al. (2002). Furthermore, their analysis is complicated by the inclusion of accretion and the presence of a gap or dip in the initial surface density profile. We also performed a set of calculations with NIRVANA in two-dimensional mode, using the reference parameters and adopting a setup similar to that of FARGO. The resulting specific torque versus the planetary mass is consistent with the solid line with diamonds in Figure 1.

3.1.2. Three-dimensional Results

The behavior of the total specific torque exerted by the planet on a three-dimensional disk, for the parameters given in Table 1, is illustrated in Figure 1. The departure from the total torque predicted by the linear theory is largest at $q = 5 \times 10^{-5}$. A comparison between Figure 1 and Figure 6 in D’Angelo et al. (2003) allows us to evaluate the impact of core accretion on the excess of corotation torques. This represents an important issue since around $10 M_\oplus$ the runaway gas accretion phase is most likely to occur (e.g., Wuchterl 1993; Pollack et al. 1996; Hubickyj et al. 2005). Accretion on the planet seems to enhance the excess of co-orbital corotation torques, over the predictions based on the linear regime, since it affects the width of the horseshoe region. The location where the offset is maximal recedes from $q = 5 \times 10^{-5}$, when cores are nonaccreting, to $q = 3 \times 10^{-5}$, when cores accrete at maximum rate.

3.2. Dependence on the Vortensity Gradient

3.2.1. Two-dimensional Results

Figure 2a shows the results of a set of calculations with four different disks, having different surface density slopes. The set that exhibits the smallest departure to a linear trend (straight line) corresponds to $\alpha = 3/2$, i.e., to a flat vortensity profile, since $d \log(\Sigma/B)/dr = 3/2 - \alpha$.

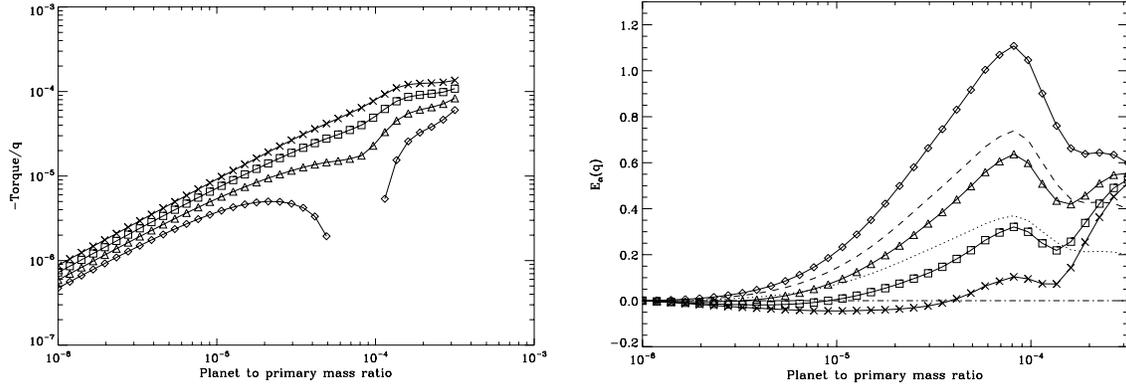


FIG. 2.—Two-dimensional results. *Left*: Negative of specific torque acting on the planet, as a function of its mass, for four values of the surface density slope: $\alpha = 0$ (diamonds), $\alpha = 1/2$ (reference calculation; triangles), $\alpha = 1$ (squares), and $\alpha = 3/2$ (crosses). The hole in the data for the flat surface density profile corresponds to a torque reversal. *Right*: Departure from linearity for the same surface density slopes (same symbols). The meaning of the additional lines is explained in the text.

Figure 2b shows the quantity

$$E_\alpha(q) = 1 - \frac{T_\alpha(q)}{q^2} \frac{q_{\min}^2}{T_\alpha(q_{\min})}, \quad (2)$$

where $T_\alpha(q)$ is the disk torque on the planet with planet to star mass ratio q when the disk surface density slope is α , and q_{\min} is the minimal mass ratio in our sample (here $q_{\min} = 10^{-6}$). Whenever the disk response is linear, the torque scales with q^2 and E_α vanishes. The quantity $E_\alpha(q)$ is therefore a measure of the departure from linearity⁶ of the torque. It reaches unity when the total torque cancels out, and exceeds one when migration is reversed. From Figure 2b we can see that for $q > 10^{-4}$, the torque value differs from its linearly extrapolated value, regardless of the vortensity slope. For smaller masses, the departure from the linearly predicted value is larger for larger vortensity slopes. Although the flat surface vortensity profile ($\alpha = 3/2$) does not have a vanishing E_α , it is nevertheless the profile that exhibits the smallest departure to linear prediction (by at most 10% up to $q \sim 1.5 \times 10^{-4}$). The dashed and dotted lines show the curve of E_0 for the flat surface density profile (maximal vortensity slope), respectively, scaled by $2/3$ and $1/3$. These curves show that the departure to linearity approximately scales with the vortensity slope.

3.2.2. Three-dimensional Results

The left panel of Figure 3 shows the specific torque exerted by the disk on the planet, obtained from three-dimensional calculations with different surface density slopes, α . Torques are (partially) saturated, which means that they have reached their steady state value, which is a fraction of their initial (unsaturated) value. The behavior of the quantity E_α is illustrated in right panel for the same models. As observed in the two-dimensional results, the departure from the linear (type I) regime, increases with increasing vortensity gradient.

3.3. Dependence on the Viscosity

The previous section suggests that the offset is linked to the co-orbital corotation torque, since it scales with the vortensity

⁶ By this we mean the departure from the torque value predicted by a linear analysis of the disk-planet interaction. Naturally, it is also the departure from the linear scaling of the torque with q^2 .

gradient across the orbit. For the vortensity slopes considered, the co-orbital corotation torque acting on the planet is positive. Note that as the offset corresponds to a positive value added to the linearly expected torque value, this would suggest that the offset corresponds to a corotation torque larger than predicted by the linear analysis. If the offset is indeed due to the corotation torque, then it should depend on the disk viscosity, since the corotation torque depends on it (Ward 1992; Masett 2001, 2002; Balmforth & Korycansky 2001; Ogilvie & Lubow 2003). We have undertaken additional sets of calculations, in which we take the reference values of Table 1, except that we vary the disk viscosity ν .

3.3.1. Two-dimensional Results

We have taken twice the viscosity reference value ($\nu = 2 \times 10^{-5}$) and half the reference value ($\nu = 5 \times 10^{-6}$). The results are presented in Figure 4.

The trend observed in this figure is compatible with the saturation properties of the corotation torque. The largest offset is observed for the early torque value, i.e., the unsaturated one, while as the viscosity decreases the departure from linearity decreases as well. Quantitatively, the behavior observed is also in agreement with a corotation torque saturation. The latter depends on the ratio of the libration timescale in the horseshoe region and the viscous timescale across it (Ward 1992; Masett 2001, 2002). We can for instance evaluate how saturated the corotation torque should be for $q = 10^{-4}$. The horseshoe zone half-width x_s for such planet mass in a disk with $h = H/r = 0.05$ can be estimated by equating the linear estimate of the co-orbital corotation torque (Tanaka et al. 2002) and the horseshoe drag (Ward 1991, 1992; Masett 2001). One is led, in a two-dimensional disk, to

$$x_s = 1.16a \sqrt{\frac{q}{h}}. \quad (3)$$

This yields here $x_s = 0.052$. The ratio \mathcal{R} defined by Masett (2001) is therefore $\mathcal{R} = 0.07$ for the reference run, $\mathcal{R} = 0.14$ for the larger viscosity run, and $\mathcal{R} = 0.035$ for the lower viscosity run. To within a numerical factor, \mathcal{R} represents the ratio of the libration timescale to the viscous timescale across the horseshoe region, and therefore indicates whether the corotation torque should saturate (at low \mathcal{R}) or remain unsaturated (at higher \mathcal{R}). From Figure 2 of Masett (2002), one can infer that the co-orbital

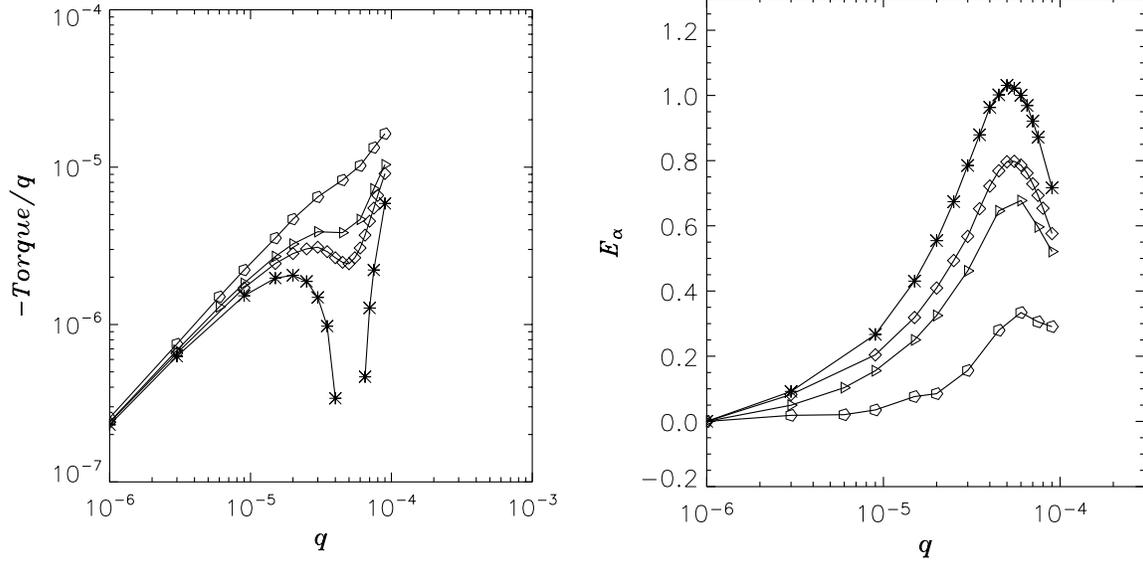


FIG. 3.—Three-dimensional results. *Left*: Negative of the specific torque exerted on the planet, as a function of its mass, for different values of the surface density slope: $\alpha = 0$ (asterisks), $\alpha = 1/2$ (diamonds), $\alpha = 3/4$ (triangles), and $\alpha = 3/2$ (pentagons). The gap in the data for the $\alpha = 0$ case corresponds to situations where the total torque is positive. *Right*: Departure from linearity (eq. [2]) for the same values of α (same symbols).

corotation torque should be about 40% of its unsaturated value for the smaller viscosity calculation, 60% for the reference calculation, and 80% for the larger viscosity calculation. The scatter of the curves of Figure 4b is roughly compatible with these expectations. We note in passing that (1) this estimate is only an order of magnitude estimate, since we inferred the value of x_s from linear calculations, whereas we suspect the offset to be due to a corotation torque value that differs from the linear estimate and (2) it is by chance that the reference calculation, which takes the parameters of D'Angelo et al. (2003) and Bate et al. (2003), corresponds precisely to a corotation torque that is half-saturated, so that varying slightly the viscosity with respect to the reference one yields a strong variation of the offset amplitude. We finally note that the saturation of the corotation torque depends on the planet mass, for a fixed viscosity. The smaller the planet mass,

the less saturated is the corotation torque. We observe this behavior in Figure 4 (right). Quite surprisingly, however, the torque is found to depend (weakly) on the viscosity at very small q , whereas one would expect the corotation torque to be unsaturated. The evolution of the surface density profile is too weak to account for this observation. We have not investigated further this behavior, which we believe to be of minor importance for the work presented here. Nevertheless, we suggest that it is linked to a drop of the co-orbital corotation observed by Masset (2002), when the viscosity is larger than the so-called cut-off viscosity, which corresponds to the viscosity for which the time needed by a fluid element to drift from the separatrix to the corotation is also half the libration time of this fluid element. This limit viscosity ν_l is given by $\nu_l \sim x_s^2 \Omega_p / 4\pi$ (Masset 2001, 2002). Using equation (3), this translates into $\nu_l \sim 0.1 a^2 \Omega_p q / h$. We should observe a drop

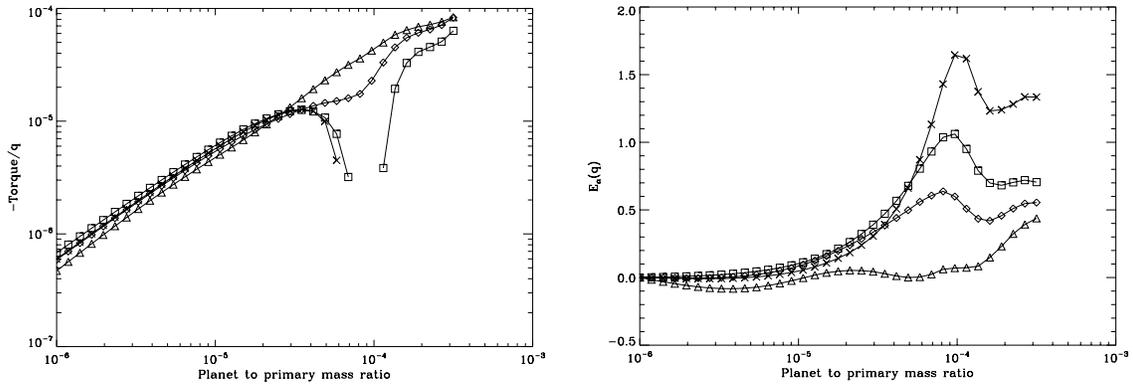


FIG. 4.—*Left*: Specific torque acting on the planet as a function of the planet mass for different disk viscosities: $\nu = 5 \times 10^{-6}$ (triangles), $\nu = 10^{-5}$ (reference calculations; diamonds), $\nu = 2 \times 10^{-5}$ (squares). The curve with crosses shows the torque of the reference calculations averaged between $t = 6$ and $t = 7$ orbits, i.e., the early value of the torque, before it possibly saturates. *Right*: The value of E_α (given by eq. [2]) for these calculations (same symbols).

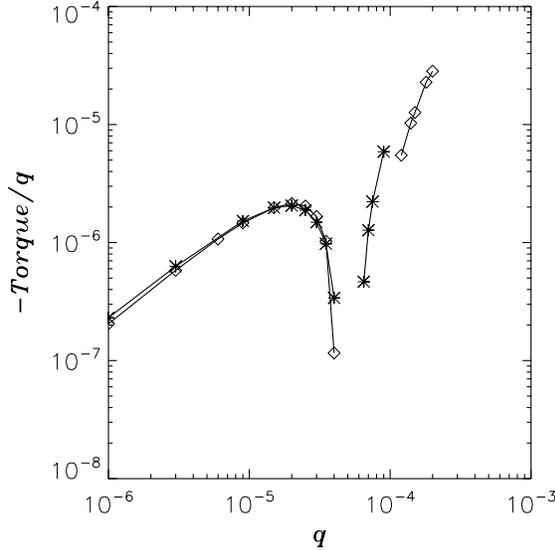


FIG. 5.—Negative of the specific torque acting on the planet, as a function of its mass, for models with $\alpha = 0$. Asterisks indicate torques, from long-run simulations, for which corotation torques are saturated. Diamonds represent torques at early times (between 7 and 10 orbits); hence corotation torques are unsaturated.

of the corotation torque (and therefore a dependence of the torque on the viscosity) for $\nu \gtrsim \nu_l$, i.e., for $q \lesssim q_l \sim 10h\nu/(a^2\Omega_p)$. For the reference calculation, we have $q_l \sim 5 \times 10^{-6}$, while we get twice and half this value for the higher and lower viscosity runs, respectively. The curves of Figure 4a are roughly compatible with these expectations, although around $q \sim 10^{-5}$ it is difficult to disentangle this effect from the onset of the departure from linearity of the torque.

3.3.2. Three-dimensional Results

As explained above, torques evaluated at early times contain co-orbital corotation torques that are unsaturated and thus their effect is the strongest. At later evolutionary times, the effects of corotation torques may tend to weaken. Figure 5 illustrates the behavior of saturation on the total specific torque, as a function of the planet mass, obtained from calculations with a flat initial surface density ($\alpha = 0$). The asterisks represent torques measured around 100 orbits, when corotation torques are partially saturated whereas diamonds refer to torques measured between 7 and 10 orbits, before saturation occurs. The offset reduces as corotation torques saturate. The planet mass for which the offset is maximum shifts toward larger values and the range of masses in which the total torque is positive shrinks (see Fig. 5). However, a finite mass interval persists in which the departure from the linear regime can still be very large.

3.4. Dependence on the Disk Thickness

The two previous sections strongly suggest that the offset is indeed a physical effect, independent on the code used, and that it is linked to an excess of the co-orbital corotation torque with respect to its linearly estimated value. This therefore implies that the offset corresponds to the onset of nonlinear effects in the flow. The flow nonlinearity depends on the parameter $\mathcal{M} = q^{1/3}/h$ (Korycansky & Papaloizou 1996). The onset of this behavior should therefore be observed for a planet to primary mass ratio $q \propto h^3$. We have undertaken additional series of calculations in

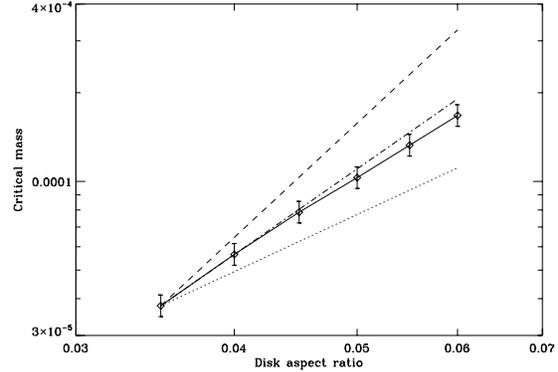


FIG. 6.—Critical mass q_c for maximal offset as a function of the disk thickness, for the two-dimensional runs. The dotted, dashed, and dot-dashed lines show, respectively, the relationships $q_c \propto h^2$, $q_c \propto h^4$, and $q_c \propto h^3$, which pass through the leftmost data point. The error bars indicate the sampling of data points around the critical mass.

which we take the reference parameters of Table 1, except that we vary the disk aspect ratio.

3.4.1. Two-dimensional Results

We ran series of calculations with $h = 0.035, 0.04, 0.045, 0.055$, and 0.06 , in addition to the reference calculation with $h = 0.05$. For each series, we estimate the mass for which the departure to linearity given by equation (2) is maximal. We refer to this mass as the critical mass, and we denote q_c its ratio to the primary mass. This mass is determined from a parabolic interpolation of the data point which has the largest departure and its two neighbors. Since the disk viscosity is kept constant and equal to its reference value in all these calculations, and since the critical mass varies between two sets of calculations, we expect different saturation levels of the co-orbital corotation torque at the critical mass, on the long term. This could mangle our analysis, and it is therefore important to take the unsaturated torque value. This is why the $E_\alpha(q)$ values in the analysis of this section are evaluated using the torque value averaged between $t = 3$ and $t = 5$ orbits. The results are presented in Figure 6. We see in this figure that there is an excellent agreement between the results of the calculations and the expectation $q_c \propto h^3$. This is a strong point in favor of our hypothesis that this behavior is due to the onset of nonlinear effects.

3.4.2. Three-dimensional Results

In order to examine the dependence of the offset on the disk aspect ratio, we set up three-dimensional models with an initial surface density slope equal to $\alpha = 0$ and a relative disk thickness h ranging from 0.03 to 0.06. For each value of h , a series was built by varying the planet to star mass ratio, q , from 10^{-6} to 2×10^{-4} . The specific torque as a function of the planet mass, for selected disk aspect ratios, is shown in Figure 7. In thinner (i.e., colder) disks, the offset of corotation torques moves toward smaller planetary cores. When $h = 0.03$, the effects of the offset are dominant between $q \approx 10^{-5}$ (or about $3 M_\oplus$) and $q \approx 2 \times 10^{-5}$ (or about $6 M_\oplus$), regardless of the saturation level of corotation torques.

From each series, the critical mass ratio q_c was estimated by means of a parabolic interpolation, as done for the two-dimensional calculations. For this analysis we used total torques averaged between $t = 7$ and $t = 10$ orbits, i.e., before the corotation

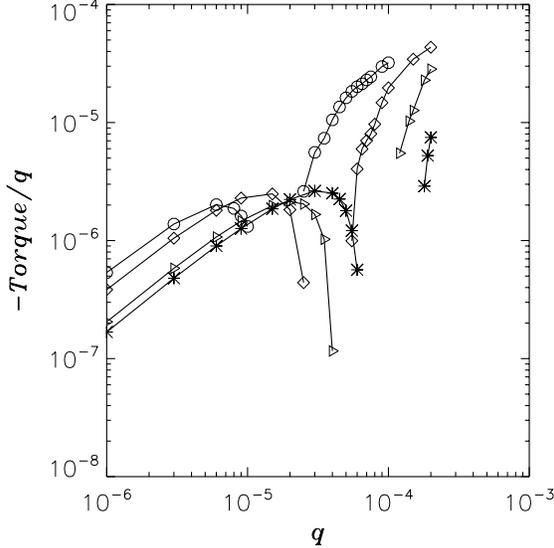


FIG. 7.—Negative of the specific torque acting on the planet as a function of the planet to primary mass ratio, for different values of h : 0.06 (*asterisks*), 0.05 (*triangles*), 0.04 (*diamonds*), and 0.03 (*circles*). Torques are measured at early times (between 7 and 10 orbits) so that corotation torques are unsaturated. Gaps in the curves identify the ranges of planetary masses for which the total torque is positive.

torque possibly saturate, for the reasons clarified in the previous section. The dependence of the critical mass ratio on the disk thickness is illustrated in Figure 8, along with the curve $q_c/q_c(h = 0.03) = (h/0.03)^3$ (*dashed line*). The error bars indicate the sampling of the data points around the critical mass and thus represent the largest possible error on the estimates of q_c . It is evident that three-dimensional numerical results accurately reproduce the h^3 -scaling expected to arise from nonlinear effects in the corotation region.

4. STREAMLINE ANALYSIS

The calculations shown at the previous section strongly suggest that the offset is a physical effect, and that nonlinear effects boost the corotation torque value with respect to its linearly estimated value. There is a link between the co-orbital corotation torque and the so-called horseshoe drag (Ward 1991, 1992; Masset 2001, 2002), which is the torque arising from all the fluid elements of the horseshoe region. Although the corotation torque and the horseshoe drag have the same dependency on the disk and planet parameters, and although the horseshoe drag may result in a very effective concept for some aspects of planetary migration related to co-orbital material (Masset & Papaloizou 2003), there is no reason why these two quantities should be exactly the same. In particular, in the low-mass regime, the horseshoe region can be arbitrarily radially narrow, while the corotation torque always arises, in the linear limit, from a region of width $\sim H$, which corresponds to the length scale over which the disturbances in the corotation vicinity are damped. Nevertheless, it is instructive to investigate whether the behavior found is linked to a boost of the horseshoe region width with respect to its linearly estimated width. We recall the horseshoe drag expression (Ward 1991, 1992; Masset 2001):

$$\Gamma_{\text{HS}} = \frac{3}{4} x_s^4 \Omega_p^2 \Sigma \frac{d \log(\Sigma/B)}{d \log r}, \quad (4)$$

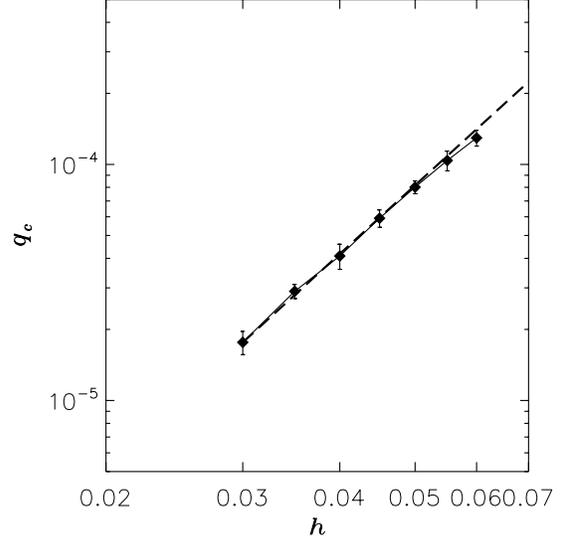


FIG. 8.—Critical mass vs. the relative disk thickness obtained from three-dimensional calculations. At $q = q_c$, the offset is the largest. The error bars indicate the sampling of the data points around the critical mass. The dashed line identifies the relationship $q_c \propto h^3$ passing through the data point with minimum h .

where x_s is the half-width of the horseshoe region, Ω_p is the planet orbital frequency, and Σ is the disk surface density at the orbit. Since, in the linear limit, the torque scales with the square of the planet mass, we expect the dependency $x_s \propto q^{1/2}$ (see also Ward 1992). On the large-mass side we may expect that the horseshoe region has a behavior similar to the one of the restricted three-body problem (RTBP) and that we have the scaling $x_s \propto q^{1/3}$. We performed an automatic streamline analysis on the flow of the two-dimensional reference runs,⁷ in the frame corotating with the planet, after $t = 10$ orbits (an early stage in order to avoid, on the large-mass side, a radial redistribution of the disk material that alters the streamlines and hence the horseshoe zone width, but still sufficiently evolved so that the flow can be considered steady with a good approximation in the corotating frame), in order to find the separatrices of the horseshoe region by a bisection method. We show in Figure 9 the half-width of the horseshoe region as a function of the planet mass. We see in this figure the following:

1. The horseshoe zone width indeed scales as $q^{1/2}$ as long as the planet mass remains sufficiently small, since the data points and the dashed line have same slope for $q < 3 \times 10^{-5}$.
2. There is a correct agreement between the co-orbital corotation torque and the horseshoe drag, since the data points and the dashed curve, obtained from equation (3) by assuming a strict equality between horseshoe drag and linearly estimated co-orbital corotation torque, nearly coincide on this mass range.
3. We also see how the horseshoe zone width scales with $q^{1/3}$ on the large-mass side, as expected. The width displayed on the dotted line however differs from the horseshoe width of the RTBP. The latter is $x_s = \sqrt{12} a (q/3)^{1/3}$, while we find that the data points

⁷ The runs on which the streamline analysis was performed differ slightly from the reference runs of § 2.4: (1) the resolution was increased, with $N_{\text{rad}} = 386$ and $N_{\phi} = 1728$, and the radial interval was narrowed, from $R_{\text{min}} = 0.6$ to $R_{\text{max}} = 2.0$; (2) the sound speed, instead of the aspect ratio, was taken uniform, so that $H(r = 1) = 0.05$. Everything else corresponds to the reference runs.

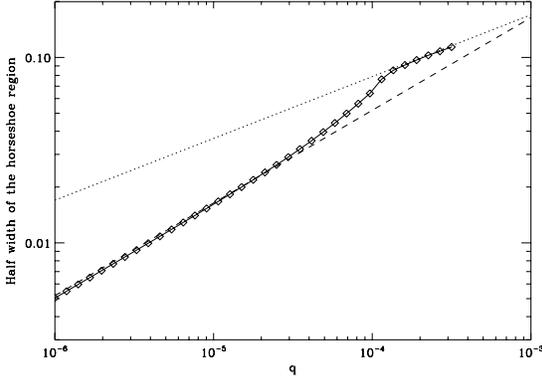


FIG. 9.—Horseshoe zone half-width as a function of the planet mass for the 35 planets of the reference calculations. The dashed line represents the horseshoe zone half-width expected from eq. (3). It scales with $q^{1/2}$. The dotted line shows the relationship $x_s \propto q^{1/3}$, which passes through the large-mass data points.

are correctly fitted by $x_s \simeq 2.45a(q/3)^{1/3}$, i.e., the horseshoe width is ~ 1.4 times narrower than in the RTBP.

4. Between the linear range and the $q^{1/3}$ scaling range, that is for $3 \times 10^{-5} < q < 1.5 \times 10^{-4}$, the horseshoe zone width falls between the two regimes, which makes it larger than its linearly estimated value for any $q > 3 \times 10^{-5}$. This corresponds precisely to the mass for which migration becomes slower than linearly estimated.

In order to finally assess whether the torque offset can indeed be due to the excess of the horseshoe zone width, we can directly estimate the excess of horseshoe drag (with regard to the linearly extrapolated value),

$$\Delta\Gamma_{\text{HS}}(q) = \Gamma_{\text{HS}}(q) - \Gamma_{\text{HS}}(q_{\text{min}}) \left(\frac{q}{q_{\text{min}}} \right)^2, \quad (5)$$

and compare it to the total torque excess,

$$\Delta T(q) = T(q) - T(q_{\text{min}}) \left(\frac{q}{q_{\text{min}}} \right)^2 = \frac{|T(q_{\text{min}})|}{q_{\text{min}}^2} E_{\alpha}(q). \quad (6)$$

The results are displayed in Figure 10, in which we divide the torque values by q^2 . We see that the horseshoe drag excess and the total torque excess exhibit the same behavior and have a very similar value in the mass range $10^{-4} < q < 2 \times 10^{-4}$, which is a quantitative confirmation that the torque excess of the offset maximum is attributable to the horseshoe zone width excess. We note that although the two curves display a similar behavior for $q < 10^{-4}$, they do not coincide on this mass range, and that the total torque excess is systematically larger than the horseshoe drag excess. It is precisely for this mass range ($q < 10^{-4} \sim h^3/1.16^2$; see eq. [3]) that the horseshoe zone width is narrower than the disk thickness, so that not all the co-orbital corotation torque arises from the horseshoe region.

5. FLOW TRANSITION

The previous section shows that the torque offset is due to a transition of the corotational flow, which has a horseshoe zone width $\propto q^{1/2}$ in the linear regime, whereas it scales as $q^{1/3}$ in the large-mass regime. Figure 11 shows the streamline topology for different masses (A: $q = 5.44 \times 10^{-6}$; B: $q = 2.96 \times 10^{-5}$; C: $q = 8.16 \times 10^{-5}$; and D: $q = 2.67 \times 10^{-4}$). The linear case (A)

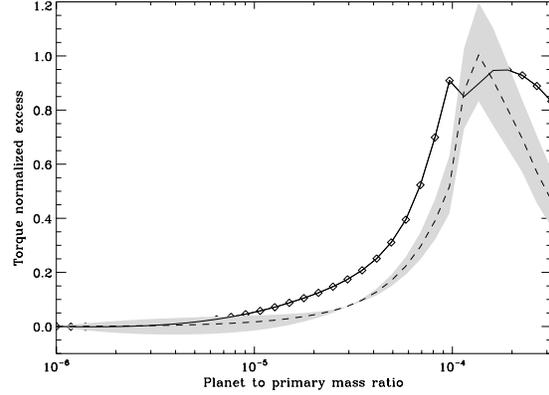


FIG. 10.—Horseshoe drag (dashed line) and total torque (solid line) normalized excesses as a function of planet mass. The shaded area shows the uncertainty on the horseshoe drag, arising from the uncertainty on the horseshoe zone width. If one calls x_s^- (x_s^+) the distance of the inner (outer) separatrix to the corotation, then the upper (lower) limit of the shaded zone is given by using $\max(x_s^-, x_s^+)$ [$\min(x_s^-, x_s^+)$] in eq. (4), while the dashed line uses $(1/2)(x_s^- + x_s^+)$.

shows two stagnation points⁸ located almost at corotation, and offset in azimuth from the planet. These two stagnation points are not symmetric with respect to the planet and are not located on the same streamline. As long as we are in the linear regime, they remain essentially at the same location. Then, as the planet mass increases, both stagnation points move toward the planet. The central libration region defined by the separatrix of the right stagnation point shrinks until it disappears, in which case we only have one stagnation point (case B). As the planet mass still increases, this unique stagnation point moves toward smaller azimuth while it recedes radially from the orbit (case C); then, for larger masses one gets two stagnation points practically on the star-planet axis, which yields a picture very similar to the RTBP, where the stagnation points are reminiscent of the Lagrange points L_1 and L_2 , and a prograde circumplanetary disk appears within the “Roche lobe” (case D). This corresponds to the regime in which the horseshoe zone width scales with $q^{1/3}$.

One could argue that despite the larger resolution adopted for the streamline analysis, the radial resolution $\delta r = (R_{\text{max}} - R_{\text{min}})/N_{\text{rad}} = 3.63 \times 10^{-3}$ is still too coarse to properly describe the corotational flow of the small-mass planets, as it amounts to a significant fraction of the horseshoe zone width. Figure 12 shows the flow for $q = 5.44 \times 10^{-6}$ (case A) run with 10 times higher a radial resolution ($N_{\text{rad}} = 3860$, hence $\delta r = 3.63 \times 10^{-4}$). The excellent agreement between the streamlines obtained with the two different radial resolutions confirms a fact already noted by Masset (2002), i.e., that even a low or mild radial resolution associated with a bilinear interpolation of the velocity fields allows us to capture correctly the features of the corotation region.

These flow properties are illustrated in Figure 13, which shows both the azimuth and the distance to corotation of the stagnation point(s). We see that for $q < 2 \times 10^{-5}$ we have two stagnation points located at corotation and on each side of the planet (i.e., one at negative azimuth, and one at positive azimuth). Around $q \sim 2 \times 10^{-5}$, the stagnation points coalesce on a narrow mass

⁸ We restrict ourselves to the case of hyperbolic points (X-type), as these lie on the separatrices of the libration region. The flow also features elliptic stagnation points (O-type) such as the ones that can be found inside the region of closed streamlines in case (A) or (D). Since those are not connected to separatrices, they are not relevant to the present discussion.

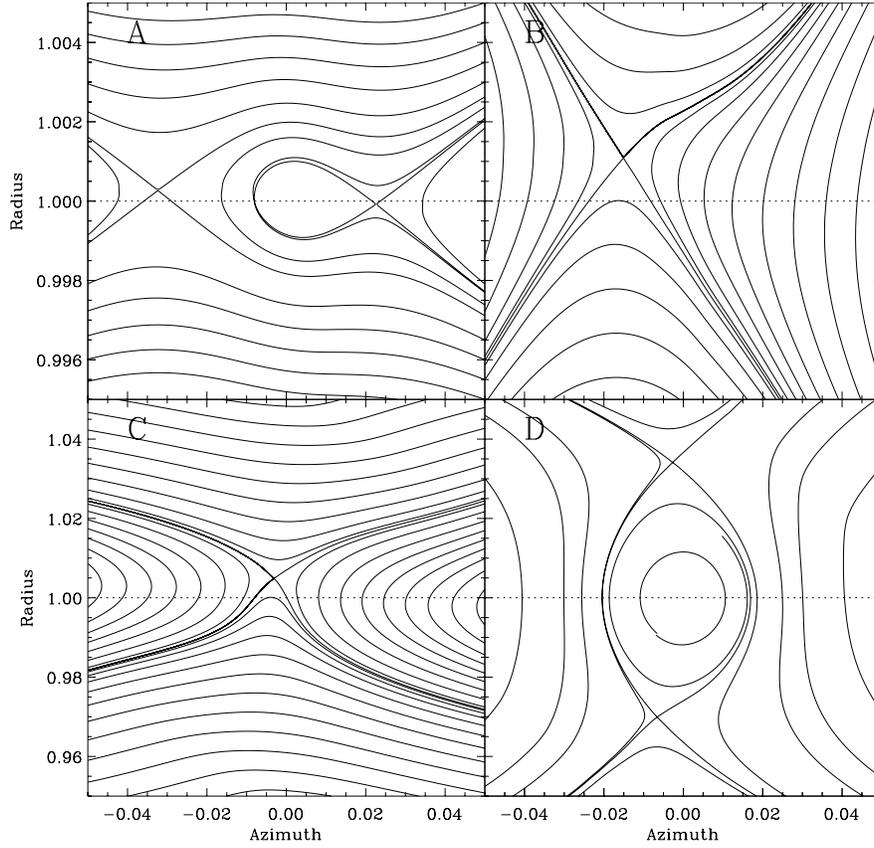


FIG. 11.—Streamline appearance for the four planet masses quoted in text, at $t = 10$ orbits. The radial range is the same for cases A and B and for cases C and D. It is 10 times larger for the latter than from the former. The aspect ratio is 1 : 1 for cases C and D.

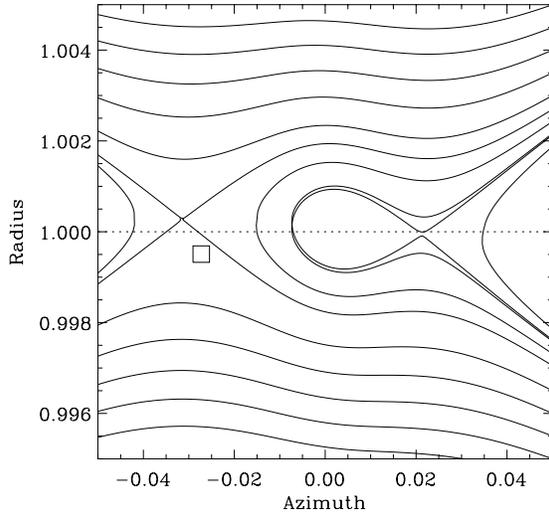


FIG. 12.—Streamline appearance for the planet mass A quoted in text, at $t = 10$ orbit, with a radial resolution 10 times higher than in Fig. 11. The streamlines appearance and the position of the stagnation points is almost indistinguishable from the lower resolution case. The square shows a zone from the high-resolution mesh.

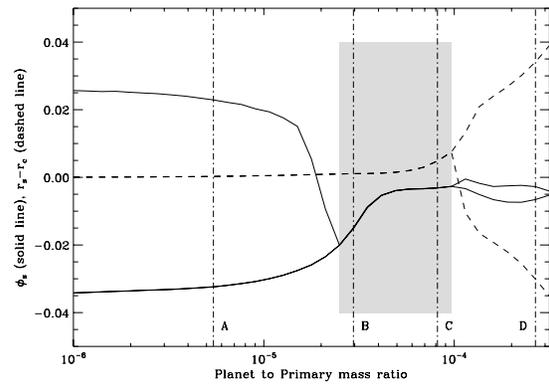


FIG. 13.—Azimuth ϕ_s of the stagnation point(s) (solid line) and radial distance to corotation ($r_s - r_c$) of the fixed point(s) (dashed line) as a function of the planet mass. The gray shaded zone shows the mass interval over which there is a unique stagnation point. The four vertical dot-dashed lines show the masses for which the flow topology is sketched in Fig. 11.

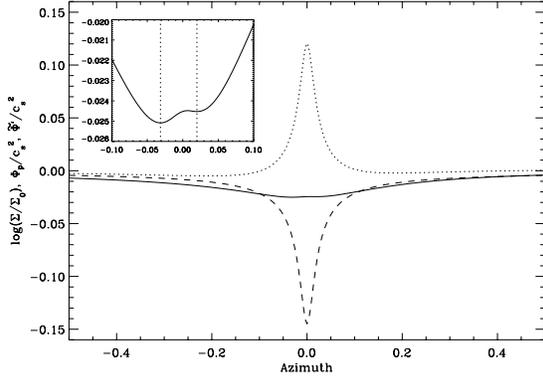


FIG. 14.—Graph shows $\log(\Sigma/\Sigma_0)$ (dotted line), Φ_p/c_s^2 (dashed line), and their sum ($\tilde{\Phi}'/c_s^2$; solid line) as a function of azimuth at $r = 1$ for the case A (planet mass $q = 5.44 \times 10^{-6}$) with the very high radial resolution ($N_{\text{rad}} = 3860$). We note in passing that the close up shows two relative extrema (vertical dotted lines), which correspond to the position of the stagnation points shown in Fig. 11. The Bondi radius to softening length ratio for this planet is $r_B/\epsilon = 0.145 \ll 1$, which implies that the flow is linear even at the planet location. We see that indeed the maximum value of $|\Sigma - \Sigma_0|/\Sigma_0 \approx \log(\Sigma/\Sigma_0)$ is of the order of the above ratio.

interval. Up to $q \sim 10^{-4}$, there is a unique stagnation point located slightly beyond corotation and at a small, negative azimuth. Finally, at $q \approx 10^{-4}$, another bifurcation occurs, and one recovers two stagnation points on each side of corotation, and almost aligned with the star ($|\phi_s| \ll |r_s - r_c|/a$).

For a given finite potential softening length, there is a mass limit under which a two-dimensional flow is linear everywhere, even at the planet location. A simple estimate of this mass limit can be found as follows. The effective potential that dictates the motion of fluid elements is $\tilde{\Phi} = \Phi + \eta$, where Φ is the gravitational potential and η is the gas specific enthalpy. The latter reads $\eta = \eta_0 + \eta'$, where η_0 is the fluid specific enthalpy of the unperturbed flow, which is a uniform quantity as the disk has initially a uniform sound speed and a uniform surface density, and where $\eta' = c_s^2 \log(\Sigma/\Sigma_0)$ is the perturbation of the specific enthalpy introduced by the planet. Similarly, the gravitational potential can be written as $\Phi = \Phi_* + \Phi_p$, where Φ_* , the gravitational potential of the central star, corresponds to the unperturbed flow and where Φ_p , the gravitational potential of the planet, corresponds to the perturbation. Hence the effective potential can be decomposed as $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 + \tilde{\Phi}'$, where $\tilde{\Phi}_0 = \Phi_* + \eta_0$ is its value in the unperturbed flow and $\tilde{\Phi}' = \Phi_p + \eta'$ is its perturbed value.

Figure 14 shows that the two quantities Φ_p and η' are of the same order of magnitude and of opposite sign in the planet vicinity, so that the perturbed effective potential reduces to a tiny fraction of the absolute value of either quantity. A condition for the flow linearity is that $|\Sigma - \Sigma_0|/\Sigma_0 \ll 1$, which therefore translates into $|\eta'|/c_s^2 \ll 1$, or, at the planet location, into

$$r_B \ll \epsilon, \quad (7)$$

where

$$r_B = \frac{GM_p}{c_s^2} \quad (8)$$

is the planet's Bondi radius. The flow linearity in the planet vicinity in a two-dimensional calculation is therefore controlled by the ratio of the potential softening length to the Bondi radius.

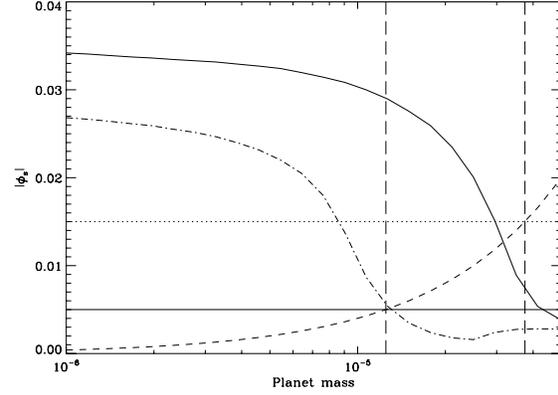


FIG. 15.—Negative of the azimuth of the left stagnation point as a function of the planet mass for the standard softening length case ($\epsilon = 0.3H$; solid line) and for a 3 times smaller softening length case ($\epsilon = 0.1H$; dash-dotted line). The dashed line shows the Bondi radius as a function of the planet mass. The horizontal dotted line shows the standard softening length ($\epsilon = 0.015$), while the horizontal solid line shows the shorter softening length ($\epsilon = 0.005$). The vertical lines show the mass for which the planet's Bondi radius is equal to the potential softening length in both cases. We see that the stagnation point enters the Bondi sphere when $r_B \approx \epsilon$.

Figure 15 shows the absolute value of the azimuth of the left stagnation point as a function of mass, for the runs described below as well as for a similar set of runs with a smaller softening length ($\epsilon = 0.1H = 0.005$). In both cases, we see that as long as the planet's Bondi radius is much smaller than the softening length, the stagnation point has an almost fixed and large value, so that it resides far from the planet, whereas it lies within the Bondi radius when the latter is larger than the potential softening length. The departure from linearity therefore occurs at lower mass in the smaller softening length case.

Assuming that the horseshoe zone separatrix does not intersect any shock (a reasonable assumption for small-mass planets), one can use the invariance of the Bernoulli constant in the corotating frame, in the steady state, to relate the perturbed quantities at the stagnation point to the horseshoe zone width. The Bernoulli constant reads

$$J = \frac{u^2 + r^2(\Omega - \Omega_p)^2}{2} + \Phi - r^2\Omega_p^2/2 + \eta. \quad (9)$$

This expression reduces, at a stagnation point located on the orbit, to

$$J_{\text{stag}} = \Phi_*(a) + \eta_0 + \tilde{\Phi}'_S - a^2\Omega_p^2/2, \quad (10)$$

while it reads

$$J_{\text{sep}} = (a + x_s)^2[\Omega(a + x_s) - \Omega_p]^2/2 + \Phi_*(a + x_s) + \eta_0 - (a + x_s)^2\Omega_p^2/2 \quad (11)$$

on the separatrix, far from the planet, where the effective potential essentially reduces to its unperturbed value $\Phi_* + \eta_0$. Equating equations (10) and (11) and expanding equation (11) to second order in (x_s/a) yields

$$x_s = \frac{1}{\Omega_p} \sqrt{-\frac{8}{3}\tilde{\Phi}'_S}. \quad (12)$$

The horseshoe zone half-width is therefore simply related to the value of the Bernoulli constant at the stagnation point. We can understand the boost of the horseshoe region width in the transition region as follows:

1. As long as the flow remains linear, the stagnation point is located at a fixed position far from the planet. It therefore samples a value of the perturbed Bernoulli constant that simply scales with q , and hence the horseshoe zone width scales with $q^{1/2}$.

2. When $r_B \sim \epsilon$, the stagnation point begins to move toward the planet (see Fig. 15), which implies that $|\Phi'_s|/q$ is no longer a constant but increases with q , as the stagnation point goes deeper into the effective potential well of the planet. As a consequence, the horseshoe zone width increases faster than $q^{1/2}$ in this regime.

The above discussion is valid for a two-dimensional situation with a finite potential softening length. Under these circumstances, the dimensionless parameter that controls the flow linearity is ϵ/r_B . In a three-dimensional case with a pointlike mass, we can gain some insight on the condition for the flow linearity assuming a horizontal, layered motion for each slice of disk material. Although we know that this is not strictly the case (D'Angelo et al. 2003), it is nevertheless a useful approximation that relates the three-dimensional case to the above discussion. In each slice, the planet potential is the one of a two-dimensional situation with a potential softening length $|z|$, where z is the slice altitude. Therefore, if over most of the disk's vertical extent, the flow is linear (that is, if over most of the disk's vertical extent, $|z| \gg r_B$, which amounts to the condition $H \gg r_B$), then most of the torque acting on the planet arises from slices that contribute linearly to the torque, and hence the total torque nearly amounts to its linearly estimated value, whereas if the Bondi radius amounts to a significant fraction of the disk's vertical extent, the layers with altitude $|z| < r_B$ have an excess of horseshoe zone width and contribute significantly to the total torque value, which therefore has a significant offset with respect to the linear estimate. The condition for the appearance of the offset in a three-dimensional case is therefore $r_B \sim H$, which also reads $q \sim h^3$, or, using the notation of Korycansky & Papaloizou (1996), $\mathcal{M} \sim 1$. This is consistent with the dimensional analysis of Korycansky & Papaloizou (1996) and with our findings of § 3.4. We make the following comments:

1. Although the Bondi sphere and the Hill sphere have different expression and scaling with the planet mass, they happen to coincide with the disk thickness at roughly the same planet mass (within a factor of 3), so that characterizing the flow nonlinearity by comparing the Hill radius to the disk thickness also amounts to comparing the Bondi radius to the disk thickness.

2. Although we probably do not have a sufficient resolution to properly characterize the flow within the Bondi radius (when the softening length is shorter than this radius), it seems that there is no trapped region of material librating about the planet within this radius. Indeed, in Figures 11b and 11c we see that the unique stagnation point, within the Bondi radius, splits the disk material in its vicinity into four regions: the inner and outer disk, and the two ends of the horseshoe region. This may have important consequences for the numerical simulations of embedded planets in non-self-gravitating disks: for such disks, a common (and still debated) practice consists in truncating the torque summation so as to reject the contributions from the circumplanetary material (e.g., Masset & Papaloizou 2003), which is considered to form, together with the planet, a relevant system that migrates as a whole, and the migration of which is accounted for by the *external* forces applied (hence the truncation). In the case of

embedded small-mass planets, however, should it be confirmed that no trapped circumplanetary material exists in the planet vicinity, then no torque truncation should be performed when evaluating the torque.

3. The offset displays a remarkable amplitude in three-dimensional calculations, not even reproduced with the relatively small softening length that we adopted in our two-dimensional calculations ($\epsilon = 0.3H$). A possible explanation for this is the vertical motion of the disk material in the planet vicinity described by D'Angelo et al. (2003), which results in a bent of the horseshoe streamlines toward the planet. As a result, the stagnation point associated with the horseshoe separatrix with altitude z far away from the planet has an altitude $|z_s| < |z|$. Therefore, this stagnation point is closer to the planet than it would be in a sliced horizontal motion approximation; hence the perturbed Bernoulli constant at that point is larger than given by the horizontal motion approximation, and the associated horseshoe separatrix is wider, yielding a larger contribution to the co-orbital corotation torque.

6. DISCUSSION

6.1. Consequences for Planetary Migration

To analyze the effect of the torque offset from linearity on the evolution of planets in disks we have performed a set of test simulations. We start from the linear relation for the change in semimajor axis of a planet as given by Tanaka et al. (2002) for the three-dimensional case which can be written in the form

$$\dot{a}_{\text{lin}} = -2(1.364 + 0.541\alpha) \frac{\Sigma a^2}{M_*} qa\Omega_p/h^2, \quad (13)$$

which, in our system of units, can be recast as

$$\dot{a}_{\text{lin}} = -2(1.364 + 0.541\alpha) \Sigma_0 qa^{3/2-\alpha}/h^2, \quad (14)$$

where \dot{a}_{lin} is now given in units of AU yr⁻¹, and in which we used $M_* = 1 M_\odot$ and $r_0 = 1$ AU. In equation (14), Σ_0 denotes the surface density at r_0 in units of M_* / r_0^2 . To model deviations from linearity the above \dot{a}_{lin} is modified by our numerically found offset $E_\alpha(q)$ as defined by equation (2), while the scaling law for the critical mass $q_c \propto h^3$ (see § 3.4) is included, in the following manner:

$$\dot{a} = \dot{a}_{\text{lin}} \left[1 - E_\alpha \left(\frac{qh_0^3}{h^3} \right) \right], \quad (15)$$

where $h_0 = 0.05$ is the disk aspect ratio for which we have sampled the dimensionless offset $E_\alpha(q)$ by three-dimensional calculations.

To make the simulations numerically simpler the hydrodynamically found data points are approximated by analytical functions, where we find a combination of two Lorentzians matched at $q = q_c$ very useful. In addition, we use, for demonstration only, a linear growth law for the planetary mass $q = q_0 t / t_{\text{grow}}$. To integrate the equation a standard fourth-order Runge-Kutta scheme is used.

As an illustrative example we have performed simulations for the intermediate case $\alpha = 1/2$, and in Figure 16 our results are displayed. The left panel shows the offset for the three-dimensional case for the unsaturated and partially saturated torques ($\nu = 10^{-5}$) with $h = 0.05$, where the symbols refer to the hydrodynamic models described above and the lines refer to the analytical fit

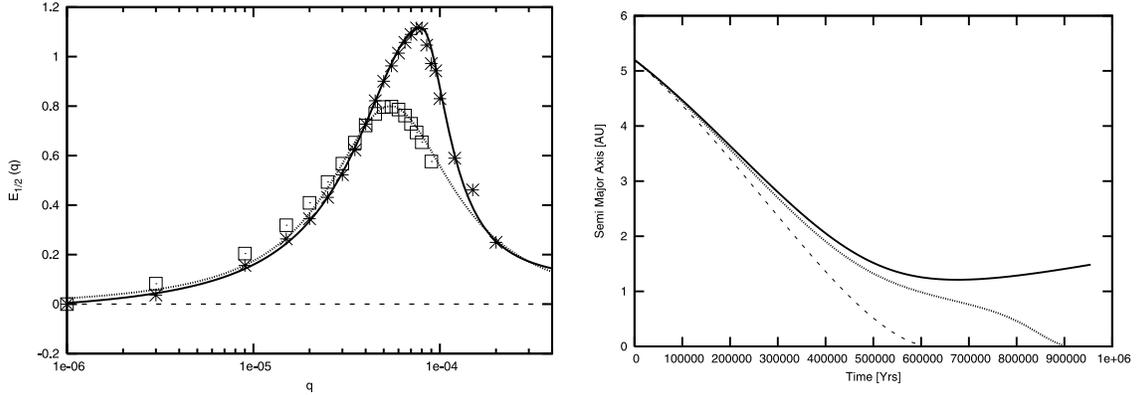


FIG. 16.—*Left*: The departure from linearity for three-dimensional models with $\alpha = 1/2$ for the unsaturated (*stars*) and saturated (*squares*) case. The solid and dotted lines are the corresponding analytical fit formulae used for evolving the planet. The dashed line ($E_{1/2} = 0$) refers to the linear case. *Right*: The evolution of an embedded planet in the disk using these analytical formulae (unsaturated, *solid line*; saturated, *dotted line*; linear, *dashed line*).

formulae. In the right panel we display our results on the migration of a planet in the presence of an offset from linearity, using $q_0 = 10^{-5}$ and $t_{\text{grow}} = 10^5$ yr. For the flaring of the disk we use $h \propto r^{0.28}$ with $h = 0.07$ at $r = 5.2$ AU and a value of $\Sigma = 300 \text{ g cm}^{-2}$ at $r_0 = 1$ AU, translating to $\Sigma_0 = 3.4 \times 10^{-5}$.

The dashed line refers to the standard linear case, the dotted line to the partially saturated case, and the solid line to the unsaturated case. Clearly the offset yields an extended migration timescale. In the partially saturated case, where E_α remains always smaller than unity, the total migration time (to reach $r = 0$) is increased by roughly 50%. In the unsaturated case, where E_α is larger than unity at the critical value q_c , we find indeed a reversal of the migration. This is possible if during the migration process of a planet the local $h(r)$ is such that the actual mass of the planet is above the minimal mass for migration reversal [i.e., the mass q_{min} for which $E_\alpha(q_{\text{min}}) = 1$].

We have also thoroughly investigated the migration reversal domain in the flat surface density case ($\alpha = 0$), for the unsaturated case (short runs) and partially saturated case (long runs with $\nu = 10^{-5}$). The results are displayed in Figure 17. In this figure one can see that the reversal domain, for $h = 0.03$ – 0.05 , typically corresponds to masses representative of subcritical solid cores of giant planets.

6.2. Corotation Torque Saturation Issues

As we already mentioned in § 3.3, in the absence of any process that allows angular momentum exchange between the horseshoe region and the rest of the disk, the co-orbital corotation torque saturates after a few libration timescales (Balmforth & Korycansky 2001; Masset 2002). Such exchange cannot be provided by pressure waves excited by the planet, as these wave corotate with the planet and are evanescent in the co-orbital region. The viscous stress at the separatrices of the horseshoe region gives rise to a net flux of angular momentum from this region to the inner or outer disk. In principle, some amount of disk viscosity should therefore be able to prevent the corotation torque saturation. An estimate of the minimum viscosity required to prevent the torque saturation can be determined as follows: the saturation results from the libration, which tends to flatten out the vortensity profile across the horseshoe region (in an inviscid two-dimensional flow, the vortensity is conserved along a fluid element path), while viscous diffusion tends to restore the large-scale vortensity gradient, if any. It succeeds in doing so if the

viscous timescale across the horseshoe region is shorter than the libration timescale (Ward 1992; Masset 2001, 2002). This yields

$$\nu_m = 0.035 \left(\frac{q}{h} \right)^{3/2} a^2 \Omega_p, \quad (16)$$

where ν_m is the minimal viscosity to avoid the co-orbital torque saturation (Masset et al. 2006). As can be seen in equation (16), it is easier to desaturate the corotation torque of lower mass planets (the minimal viscosity required to do so is smaller). The reason for this is twofold: as the planet mass decreases, the horseshoe zone width decreases, and therefore (1) the libration

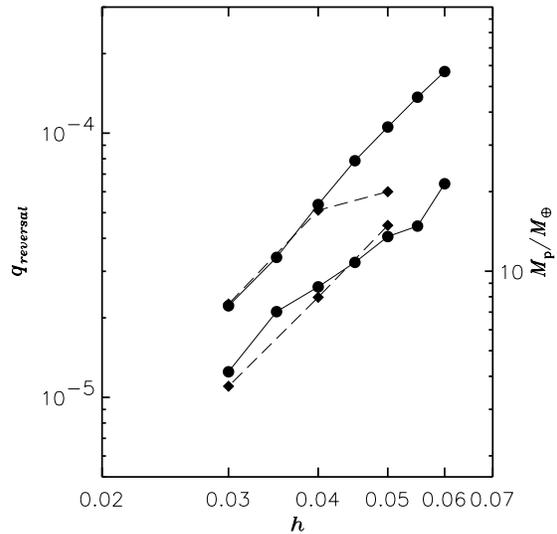


FIG. 17.—Domain of migration reversal, in the (h, q) -plane, in the unsaturated case (*solid curves*) and partially saturated case (*dashed curve*). For each line style (*solid or dashed*), the lower curve represents the minimal mass for migration reversal while the upper curve represents the maximal mass for migration reversal. At low h (hence low q), the partially saturated and unsaturated results almost coincide, since the corotation torque is very weakly saturated (we work with a constant kinematic viscosity), while the reversal domain is more narrow at large h , owing to the increasing corotation torque saturation. The right axis labeling assumes a solar mass central object.

time increases and (2) the viscous timescale across the horseshoe region decreases. Recast in terms of an α -parameter,⁹ equation (16) reads

$$\alpha_m = 0.035q^{3/2}h^{-7/2}. \quad (17)$$

We can use the fact that the mass ratio q at the maximum of the offset is a linear function of h^3 that reads

$$q \approx 0.56h^3, \quad (18)$$

as can be easily found from Figure (8). Using equation (18) to substitute either h or q in equation (17), we obtain either

$$\alpha_m \approx 0.018q^{1/3}, \quad (19)$$

or

$$\alpha_m \approx 0.015h. \quad (20)$$

These equivalent expressions give the minimal viscosity required to prevent the saturation of the corotation torque for a planet mass for which the offset is maximal, i.e., for which migration could be significantly slowed down or reversed, provided the corotation torque amounts to a sizable fraction of its unsaturated value. In a disk with $h = 0.04$, this yields $\alpha_m = 6 \times 10^{-4}$, which falls in the range of the α -values inferred from observations of T Tauri stars, for which $\alpha = 10^{-4}$ to 10^{-2} .

The molecular viscosity of the gas is, however, orders of magnitude too low to account for such values of α . It is generally admitted that a large fraction of a protoplanetary disk is subject to the magnetorotational instability or MRI (Balbus & Hawley 1991), the nonlinear outcome of which is a turbulent state that endows the disk with an effective kinematic viscosity of the order of magnitude of the viscosity needed to account for the mass accretion rate inferred from observations of T Tauri disks. In such disks, however, the torque exerted by the gas on an embedded protoplanet displays large temporal fluctuations that tend to yield a random walk of the planet semimajor axis, rather than a steady drift of the latter (Nelson & Papaloizou 2004; Nelson 2005). Nelson (2005) has shown that even for planet masses of the order of $10\text{--}30 M_\oplus$ (in a disk with $h = 0.07$, with no vertical stratification), the random fluctuations of the semimajor axis overcome the effects of type I migration on timescales of the order of $O(10^2)$ orbits, while Johnson et al. (2006) argue that such diffusive migration systematically lowers the planet lifetimes, even if it allows a small fraction of protoplanets to “survive” migration over the disk lifetime. In MHD turbulent disks, the stochastic nature of the turbulent viscosity, although largely sufficient to maintain the corotation torque unsaturated, would certainly hide the effect that we describe in this work, at least over $O(10^2)$ orbits. Should the random fluctuations average out over longer timescales, so that a systematic drift could be reliably measured, the effect of migration slow down of subcritical solid cores should become noticeable.¹⁰

There are other situations, as of yet numerically unexplored, in which the disk’s turbulent state could prevent the corotation

torque saturation and yet be sufficiently mild that the planet would undergo a systematic rather than stochastic migration. This could be the case of the so-called dead zone, a region of the disk where the gas ionization fraction is too low to allow the coupling of the gas to the magnetic field and where the MRI does not occur. The disk upper layers above a dead zone are sufficiently ionized by external irradiation of cosmic rays or high-energy photons to be subject to the MRI and therefore to be turbulent (Gammie 1996). This turbulence generates velocity fluctuations at the disk midplane, within the dead zone, which is therefore not completely “dead” and has an α -value several times smaller than that of the active layers (Fleming & Stone 2003; Reyes-Ruiz et al. 2003; Fromang & Papaloizou 2006). It is likely that within the dead zone, the torque convergence is reached, over a given timescale, at a smaller planet mass than in an MHD turbulent disk, which suggests that subcritical solid cores could undergo a steady migration, significantly slowed down, or reversed, within the dead zone.

It is also possible that weaker forms of turbulence may exist that are still able to prevent the corotation torque saturation, such as the hydrodynamics turbulence triggered by the global baroclinic instability (Klahr & Bodenheimer 2003). However, the turbulence resulting from the Kelvin Helmholtz instability due to the gas vertical shear arising from the dust sedimentation (Johansen et al. 2006) seems to be too weak to desaturate the corotation torque for planet masses larger than $\sim 1 M_\oplus$, as it yields an α -value of the order of 10^{-6} .

We close this section with the following comment: all that is needed to avoid the corotation torque saturation is to bring “fresh” vortensity from the inner or outer disk to the horseshoe region in less than a libration timescale. The standard approach based on the comparison of the libration and viscous timescales across the horseshoe region is certainly correct when the largest turbulent scale is smaller than the horseshoe zone width, so that the vortensity enters the horseshoe region in a diffusive manner, but it is unlikely to be adequate when the turbulence scale is larger than the horseshoe region width. In this case, which occurs among others in the case of the MHD turbulence, one rather has to compare the libration timescale to the advection timescale across the horseshoe region at the average turbulent speed. This plays in favor of desaturation, and seems to imply that preventing the corotation torque saturation is much easier than suggested by the libration/viscous diffusion timescales comparison.

7. CONCLUSION

By means of two- and three-dimensional calculations we have found the following:

1. There is a boost of the co-orbital corotation torque for subcritical solid cores ($M \lesssim 15 M_\oplus$) in thin ($H/r \lesssim 0.06$) protoplanetary disks. In disks with shallow surface density profiles, i.e., $\Sigma(r) \propto r^{-\alpha}$ with $\alpha < 3/2$, this yields a *positive* excess of the corotation torque that leads to a slowing down or reversal of the migration.

2. This boost appears to be the first manifestation of the flow nonlinearity (prior to gap opening, which occurs at larger planet mass).

3. The horseshoe region has a width that scales as $M_p^{1/2}$ at low planet mass (linear regime), whereas it scales as $M_p^{1/3}$ at large planet mass. At the transition between the two regimes the horseshoe region is wider than linearly predicted, which yields the aforementioned boost of the corotation torque.

4. Since this is a nonlinear effect, its occurrence is controlled by the dimensionless parameter $\mathcal{M} = R_H/H$, or $r_B/H = 3\mathcal{M}^3$. For

⁹ In this section only, α denotes in a standard manner the effective kinematic viscosity in units of $H^2\Omega$, as introduced by Shakura & Sunyaev (1973), rather than the surface density slope index, as previously defined.

¹⁰ Provided that the total torque, in a turbulent disk, can be considered as the sum of the fluctuations arising from turbulence and of the laminar torque, which remains to date an open question.

a disk of given aspect ratio h , the corotation torque enhancement is maximal for a planet mass M_p given by

$$M_p \approx 5 \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right) \left(\frac{h}{0.03} \right)^3 M_\oplus, \quad (21)$$

which represents a mass typical for solid cores of giant protoplanets, those for which the (type I) migration timescale problem is the most acute.

5. The torque reversal, if any, occurs therefore at lower masses in thinner disks (lower aspect ratio). As a consequence, the migration of a planet of given mass would stop, in a flaring disk, at a distance from the central object that depends on the planet mass. Conversely, if an accreting protoplanet, in a flaring disk, reaches a point where the tidal torque cancels out, it starts to recede from the central object at a rate dictated by its mass growth rate.

6. This effect has been unnoticed thus far in two-dimensional calculations probably owing to the large softening length adopted or to strong torques arising from within the Roche lobe of accreting planets. Poor mass sampling may have also played a role.

7. Small-mass planets do not have a Roche lobe (i.e., a prograde circumplanetary disk extending over a fraction of the Hill radius). They have a Bondi sphere that is smaller than their Roche lobe. There is presently an issue about the torque evaluation in calculations with non-self-gravitating disks. In these calculations, it is still debated whether one must include the Roche lobe content (D'Angelo et al. 2005) or not (Masset & Papaloizou 2003) in the sum of the elementary contributions to the torque of the disk material. Regardless of the correct answer to this question, numericists who truncate the torque summation in the planet vicinity should be aware that the sum should only exclude at most the (small) Bondi sphere rather than the Roche lobe when simulating deeply embedded ($r_B \ll H$) protoplanets.

8. In two-dimensional calculations, the dimensionless parameter that determines the flow linearity in the planet vicinity is r_B/ϵ . If $\epsilon \propto H$ (a prescription that we chose for the two-dimensional runs presented in this work) or $\epsilon \propto R_H$, this dimensionless parameter scales as a function of q/h^3 and the flow nonlinearities in such two-dimensional calculations also appear for mass ratios $q \propto h^3$.

We suggest that the findings listed above could motivate future work on the following points:

1. The flow transition exhibited in this work could be studied in the simplified framework of the shearing sheet approximation. Then the asymmetry between the left and right stagnation points (which we believe to be a feature of minor importance, despite its robustness) would disappear, and they would lie on the same separatrix. This study could be undertaken using the method of Korycansky & Papaloizou (1996). A quantitative study of the flow transitions (planet mass for which the left and right stagnation points coalesce, and planet mass for which a Roche lobe appears) would provide a very valuable insight on the dynamics of the flow in the planet vicinity.

2. Although we have seen that in the low-mass case (deeply embedded core, or $r_B \ll H$) the flow nonlinearities are confined to the Bondi sphere, we do not have undertaken a study of the flow within this sphere. Characterizing this flow, possibly by means of very high (nested grid) numerical simulations, would be of great interest.

3. The role of accretion has been neglected in the present analysis, while the mass range for which the offset is observed, depending on the disk thickness, may involve accreting cores. It seems that accretion enhances the offset (D'Angelo et al. 2003), but a quantitative analysis of its impact remains to be done.

4. We have emphasized the role played by dissipation, which must be present to prevent the corotation torque saturation. As the present study deals with small-mass planets, it should be relatively easy to prevent this saturation. So far the only self-consistent calculations of a turbulent disk with embedded planets deal with a fully turbulent disk subject to the MRI. A study characterizing the ability of other forms of turbulence (such as the global baroclinic instability, or the residual turbulence of the dead zone in a layered accretion disk) to desaturate the corotation torque of small-mass planets would be very valuable.

The computations with NIRVANA reported in this paper were performed using the UK Astrophysical Fluids Facility (UKAFF). The computations with FARGO were performed at the Centre de Calcul de l'IN2P3. G. D. acknowledges support from the Leverhulme Trust through a UKAFF Fellowship, from the NASA Postdoctoral Program, and in part from NASA's Outer Planets Research Program through grant 811073.02.01.01.20. The authors are indebted to Hidekazu Tanaka for bringing to their attention the role played by the Bondi radius.

REFERENCES

- Artymowicz, P. 1993, *ApJ*, 419, 155
 Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, *ApJ*, 376, 214
 Balmforth, N. J., & Korycansky, D. G. 2001, *MNRAS*, 326, 833
 Bate, M. R., Lubow, S. H., Ogilvie, G. I., & Miller, K. A. 2003, *MNRAS*, 341, 213
 Crida, A., Morbidelli, A., & Masset, F. 2006, *Icarus*, 181, 587
 D'Angelo, G., Bate, M. R., & Lubow, S. H. 2005, *MNRAS*, 358, 316
 D'Angelo, G., Henning, T., & Kley, W. 2002, *A&A*, 385, 647
 D'Angelo, G., Kley, W., & Henning, T. 2003, *ApJ*, 586, 540
 Fleming, T., & Stone, J. M. 2003, *ApJ*, 585, 908
 Fromang, S., & Papaloizou, J. 2006, *A&A*, 452, 751
 Gammie, C. F. 1996, *ApJ*, 457, 355
 Godon, P. 1996, *MNRAS*, 282, 1107
 Goldreich, P., & Tremaine, S. 1979, *ApJ*, 233, 857
 Hubickyj, O., Bodenheimer, P., & Lissauer, J. J. 2005, *Icarus*, 179, 415
 Johansen, A., Henning, T., & Klahr, H. 20056, *ApJ*, 643, 1219
 Johnson, E. T., Goodman, J., & Menou, K. 2006, *ApJ*, 647, 1413
 Klahr, H. H., & Bodenheimer, P. 2003, *ApJ*, 582, 869
 Kley, W. 1998, *A&A*, 338, L37
 Korycansky, D. G., & Papaloizou, J. C. B. 1996, *ApJS*, 105, 181
 Korycansky, D. G., & Pollack, J. B. 1993, *Icarus*, 102, 150
 Lin, D. N. C., & Papaloizou, J. 1986a, *ApJ*, 307, 395
 ———. 1986b, *ApJ*, 309, 846
 Lubow, S. H., Seibert, M., & Artymowicz, P. 1999, *ApJ*, 526, 1001
 Masset, F. S. 2000a, *A&AS*, 141, 165
 ———. 2000b, in *ASP Conf. Ser.*, 219, *Disks, Planetesimals, and Planets*, ed. F. Garzón, C. Eiroa, D. de Winter, & T. J. Mahoney (San Francisco: ASP), 75
 ———. 2001, *ApJ*, 558, 453
 ———. 2002, *A&A*, 387, 605
 Masset, F. S., Morbidelli, A., Crida, A., & Ferreira, J. 2006, *ApJ*, 642, 478
 Masset, F. S., & Papaloizou, J. C. B. 2003, *ApJ*, 588, 494
 Nelson, A. F., & Benz, W. 2003a, *ApJ*, 589, 556
 ———. 2003b, *ApJ*, 589, 578
 Nelson, R. P. 2005, *A&A*, 443, 1067
 Nelson, R. P., & Papaloizou, J. C. B. 2004, *MNRAS*, 350, 849
 Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., Masset, F., & Kley, W. 2000, *MNRAS*, 318, 18
 ———. 2003, *ApJ*, 587, 398
 Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J. J., Podolak, M., & Greenzweig, Y. 1996, *Icarus*, 124, 62
 Reyes-Ruiz, M., Pérez-Tijerina, E., & Sánchez-Salcedo, F. J. 2003, *Rev. Mex. AA Conf. Ser.*, 18, 92
 Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 24, 337

- Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992, *ApJS*, 80, 753
Tanaka, H., Takeuchi, T., & Ward, W. R. 2002, *ApJ*, 565, 1257
van Leer, B. 1977, *J. Comput. Phys.*, 23, 276
Ward, W. R. 1986, *Icarus*, 67, 164
———. 1989, *ApJ*, 336, 526
Ward, W. R. 1991, *Lunar Planet. Sci. Abstr.*, 22, 1463
———. 1992, *Lunar Planet. Sci. Abstr.*, 23, 1491
———. 1997, *Icarus*, 126, 261
Wuchterl, G. 1993, *Icarus*, 106, 323
Ziegler, U., & Yorke, H. W. 1997, *Comput. Phys. Commun.*, 101, 54