

PHYSIQUE HADRONIQUE  
MASTER 2 - NPAC

David Lhuillier  
CEA Saclay Service de Physique Nucléaire  
91191 Gif-sur-Yvette, France  
david.lhuillier@cea.fr

30 septembre 2009

Enseignement de 15 heures au 2<sup>e</sup> semestre. Ce cours traite différentes approches expérimentales et théoriques de la structure interne des hadrons, du nucléon en particulier. L'accent est mis sur les techniques développées pour comprendre la dynamique d'un système de quarks confinés, dans un domaine cinématique où l'interaction forte ne peut plus être traitée en perturbation.

L'existence d'une version électronique de ces cours est le fruit du travail opiniâtre de Valérie Poyeton, documentaliste au CEA Saclay. Un grand merci à elle!

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Quelques éléments de spectroscopie</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.1.1	Signes expérimentaux de la structure interne des hadrons . . . . .	7
1.1.2	Les multiplets de hadrons : . . . . .	9
1.2	Groupe Unitaire Spécial SU(N) . . . . .	11
1.3	Les multiplets de SU(2) . . . . .	14
1.4	Généralisation à SU(3) . . . . .	17
1.4.1	Triplet fondamental de SU(3) . . . . .	17
1.4.2	Diagrammes de poids . . . . .	18
1.4.3	Tableaux d'Young . . . . .	19
1.4.4	Multiplets SU(3) des états hadroniques . . . . .	21
1.4.5	Séparation en masse et brisure explicite . . . . .	21
1.5	Quarks avec spin . . . . .	24
1.5.1	Fonction d'onde du nucléon . . . . .	25
1.5.2	Modèle de quarks non-relativiste . . . . .	26
1.6	Calculs simples dans le modèle de quark N-R . . . . .	28
1.6.1	Charge du nucléon : . . . . .	28
1.6.2	Moment magnétique du nucléon : . . . . .	28
1.6.3	Prédiction du rayon de charge : . . . . .	30

1.6.4	Polarisabilité d'une répartition de charge : . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Facteurs de forme</b>	<b>49</b>
2.1	Diffusion non relativiste d'une particule de spin 0 sur un potentiel fixe . . . . .	49
2.2	Diffusion d'un électron relativiste . . . . .	53
2.3	Discussion des sections efficaces de diffusion . . . . .	54
2.3.1	Pas de structure interne . . . . .	54
2.3.2	Extension finie du noyau . . . . .	55
2.3.3	Dépendance de $F(q)$ avec $q^2$ . . . . .	56
2.3.4	Facteur de forme du $\pi$ . . . . .	57
2.4	Description relativiste de la diffusion $ep \rightarrow ep$ . . . . .	58
2.4.1	Courant Hadronique général $J_\mu$ . . . . .	60
2.4.2	Repère de Breit . . . . .	64
2.4.3	Calcul du taux de transition $ \mathcal{M}^{(e,p)} ^2$ . . . . .	66
2.4.4	Section efficace de Rosenbluth . . . . .	68
2.5	Résultats expérimentaux . . . . .	69
2.5.1	Rayon quadratique moyen à bas $Q^2$ ( $Q^2 \ll M_p^2$ ) . . . . .	69
2.5.2	$Q^2$ intermédiaires ( $Q^2 \sim M_N^2$ ) . . . . .	71
2.6	Grand $Q^2$ ( $Q^2 \gtrsim M_p^2$ ) . . . . .	72
2.7	Exemple de mesure de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , appareillage . . . . .	72
2.8	Les "Facteurs de forme de quarks" . . . . .	74
2.9	La sonde faible du nucléon . . . . .	76
2.9.1	Diffusion élastique . . . . .	76
2.9.2	Symétrie de parité . . . . .	76
2.9.3	Expérience de Mme Wu . . . . .	77
2.9.4	Asymétrie de violation de parité en diffusion d'e' . . . . .	79

2.9.5	L'étrangeté du nucléon . . . . .	81
2.10	Formulaire . . . . .	84
2.10.1	Spineurs . . . . .	84
2.10.2	Matrices $\gamma$ . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Diffusion profondément inélastique <math>ep \rightarrow eX</math></b>	<b>105</b>
3.1	Cinématique . . . . .	105
3.2	Tenseur hadronique général . . . . .	106
3.3	Fait expérimental de l'invariance d'échelle . . . . .	108
3.4	Le modèle des Partons . . . . .	108
3.4.1	Factorisation . . . . .	109
3.4.2	Distributions d'impulsions . . . . .	110
3.5	Phénoménologie des fonctions de structure . . . . .	112
3.6	Diffusion Profondément Inélastique de neutrinos . . . . .	114
3.7	Evolution en $Q^2$ . . . . .	117
3.8	Diffusion Profondément Inélastique Polarisée . . . . .	120
<b>4</b>	<b>Modèle du nucléon : le "M.I.T. Bag"</b>	<b>137</b>
4.1	Phylosophie du modèle . . . . .	137
4.2	Modèle de Bogolioubov . . . . .	138
4.2.1	Les bons nombres quantiques des fonctions d'onde . . . . .	138
4.2.2	Résoudre l'équation de Dirac en coordonnées polaires . . . . .	140
4.2.3	Condition aux limites . . . . .	142
4.2.4	Prédiction . . . . .	143
4.3	Le modèle du MIT Bag . . . . .	143
4.3.1	Formalisme Lagrangien . . . . .	144
4.3.2	Conditions aux limites . . . . .	145

4.3.3	Conservation Energie-Impulsion . . . . .	146
4.3.4	Equations du sac pour des quarks libres, sans masse . . . . .	147
4.3.5	Prédictions . . . . .	147
4.3.6	Quarks de masse non nulle . . . . .	148
4.3.7	Structure hyperfine . . . . .	150
4.3.8	Lagrangien avec quarks massifs et gluons . . . . .	151
4.3.9	Conditions aux limites . . . . .	152
4.3.10	Contribution $\Delta E_g$ de l'échange d'un gluon à l'énergie du sac . . . . .	153
4.3.11	Corrections à la formule de masse . . . . .	156
4.3.12	Prédictions . . . . .	157
<b>5</b>	<b>Introduction à la symétrie chirale et sa brisure</b>	<b>161</b>
5.1	Les symétries de QCD . . . . .	161
5.2	Quarks gauches (L) et droits (R) . . . . .	162
5.3	Le Lagrangien de QCD . . . . .	163
5.4	Transformations chirales . . . . .	163
5.5	Courants et charges . . . . .	164
5.6	Brisure explicite . . . . .	167
5.7	Spectre des hadrons . . . . .	168
5.8	Mécanisme de Goldstone . . . . .	170
5.9	Relation de Gell-Mann-Oakes-Renner . . . . .	171
5.10	Intéraction Forte effective à basse énergie . . . . .	176

# Chapitre 1

## Quelques éléments de spectroscopie

Matériel bibliographique utilisé pour préparer ce cours :

- F.E. Close, *An introduction to Quarks and Partons*, Ed. Academic Press.
- D.B. Lichtenberg, *Unitary Symmetry and Elementary Particles*, Ed. Academic Press.
- J.M. Legoff, Cours de l'école Joliot-Curie 2005.

### 1.1 Introduction

Rappel de terminologie :

- hadrons : toutes particules subissant l'interaction Forte. Tous les hadrons sont instables... sauf le proton.
- mésons : "masses intermédiaires", spin entier, états ( $q\bar{q}$ ).
- baryons : "grandes masses", spin demi-entier, états ( $qqq$ ).

#### 1.1.1 Signes expérimentaux de la structure interne des hadrons

- Moment magnétique anormal du proton, mesuré par Otto Stern,  $\mu_p = 2.79\mu_N$ . Déviation importante de la prédiction de Dirac pour une particule ponctuelle qui pointe vers l'existence d'une structure interne.
- En 1947 l'équipe de Cecil Powell découvre le méson  $\pi$  dans les rayons cosmiques. Avec l'essor des accélérateurs de particules, on dénombre des dizaines de hadrons à la fin des années 50. Au départ toutes ces particules sont considérées aussi fondamentales les unes que les autres et sont décrites par le modèle compliqué dit du bootstrap. En 1961, Gell-Mann et Ne'eman introduisent la symétrie  $SU(3)$  qui explique la variété

croissante des hadrons par des combinaisons d'un ensemble restreint "d'entités" plus fondamentales. La symétrie  $SU(3)$  se révélera être la "bonne symétrie de rotation" qui permet de construire l'équivalent d'une table périodique pour les hadrons.

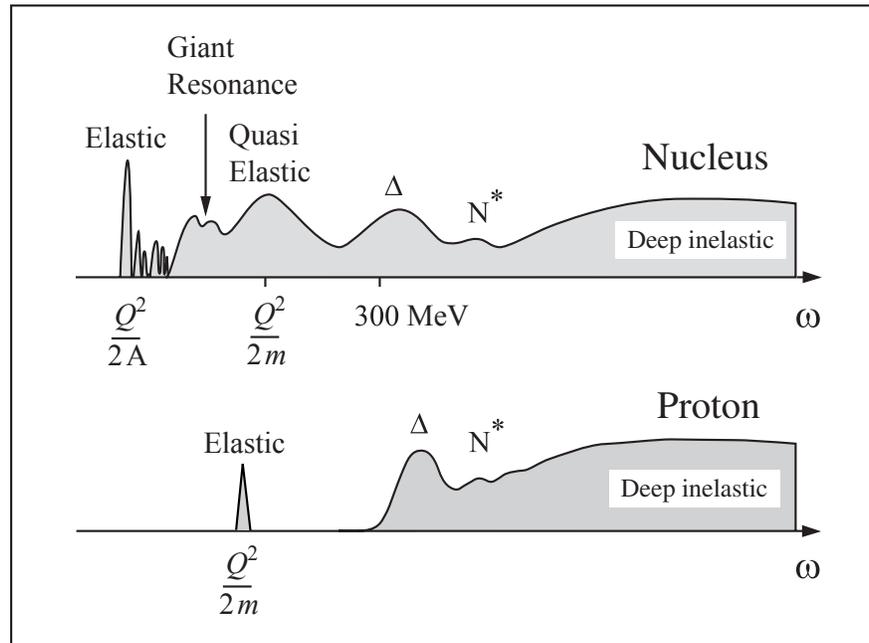


FIG. 1.1 – Réponse d'un noyau et d'un proton à la diffusion d'électrons avec un transfert d'énergie  $w$ .

- L'observation directe de la structure d'un hadron nécessite de résoudre des détails plus fins que sa taille qui est de l'ordre d'un demi Fermi,  $10^{-15}\text{m}$  (fig.1.1). Dans un processus de diffusion cela équivaut à un moment transféré  $\geq 200 \text{ MeV}/c$ . De tels transferts deviennent accessibles à la fin des années 50, avec les premières mesures de rayon de charge des noyaux et du nucléon par Hofstadter à Stanford (voir cours 2). La mise en service de l'accélérateur Linéaire de Standford (SLAC) en 1967 permet d'atteindre des transferts d'impulsion très supérieurs (plusieurs  $\text{GeV}/c$ ) et d'étudier le régime de diffusion profondément inélastique. On observe que des électrons diffusent sur le proton à grand transfert "plus souvent que prévu" (voir fig.1.2 et cours 3). Par analogie avec l'expérience de Rutherford qui observe un excès de particules  $\alpha$  diffusées sur les noyaux d'atomes d'or aux angles arrières, cet excès de collisions violentes  $e^- - p$  suggère l'existence de centres de diffusion ponctuels à l'intérieur du proton.

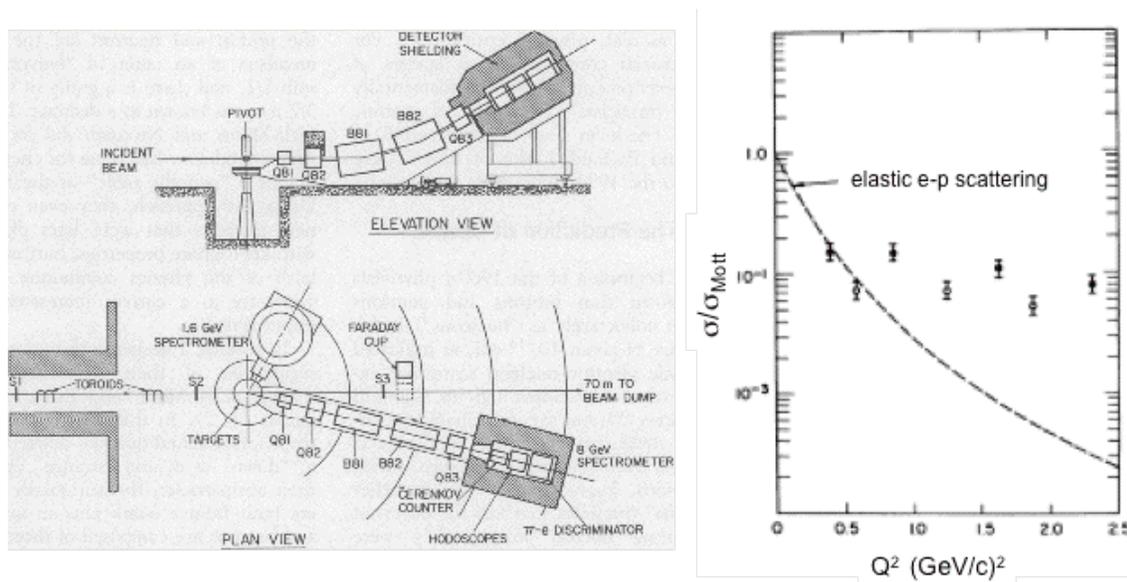


FIG. 1.2 – Schéma du dispositif expérimental de End Station A au SLAC (Californie), utilisé pour les premières mesures de diffusion profondément inélastiques d'électrons sur le nucléon. Le graphe à droite montre la section efficace mesurée à 6 degrés et normalisée à la diffusion Mott. Les points correspondent à une masse invariante de l'état hadronique final de 2 (noir) et 3 GeV (blanc).

### 1.1.2 Les multiplets de hadrons :

L'observation des hadrons recensés par les physiciens fait apparaître plusieurs groupes de particules "semblables" par les nombres quantiques qu'elles portent : même spin, parité et par leur masse. La charge électrique peut varier à l'intérieur d'un multiplet puisqu'elle est connectée à l'interaction électromagnétique et non à l'interaction forte étudiée ici. L'interaction électromagnétique va donc lever la dégénérescence en masse entre certains membres des multiplets mais on s'attend à des effets faibles en comparaison des mécanismes de l'interaction forte qui gouvernent la structure des hadrons. Parmi les hadrons les plus légers des multiplets évidents apparaissent :

Doublet des nucléons : n (939.5), p (938.3),  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ .

Triplet des pions :  $\pi^-$  (139.6),  $\pi^0$  (135.0),  $\pi^+$  (139.6),  $J^\pi = 0^-$ .

où les masses sont exprimées en MeV. Bien que la charge électrique lève la dégénérescence de ces états, ces multiplets témoignent d'une symétrie sous-jacente de l'interaction forte (analogie avec l'effet Zeeman qui lève la dégénérescence des  $(2J_z + 1)$  niveaux atomiques en

brisant la symétrie par rotation sous-jacente).

Si l'on autorise des différences de masse jusqu'à  $\sim 20\%$ , des multiplets de dimensions supérieures apparaissent avec des différences marquées entre mésons et baryons :

Les mésons s'organisent en nonets

Les baryons s'organisent en singlets, octets, décuplets

Le but de ce cours est de reprendre la démarche de Gell-Mann et Zweig (1964) qui proposèrent que l'interaction forte est invariante sous la **symétrie globale**  $SU(3)_{\text{saveur}}$ , c'est à dire invariante sous toute rotation dans l'espace des saveurs u, d, s. Les états hadroniques sont alors décrits comme la composition de triplets fondamentaux de  $SU(3)$  qui génèrent les multiplets observés (fig. 1.3 et 1.4) :

$$\text{Mésons : } q\bar{q} \equiv 3 \otimes \bar{3} \equiv 1 \oplus 8$$

$$\text{Baryons : } qqq \equiv 3 \otimes 3 \otimes 3 \equiv 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

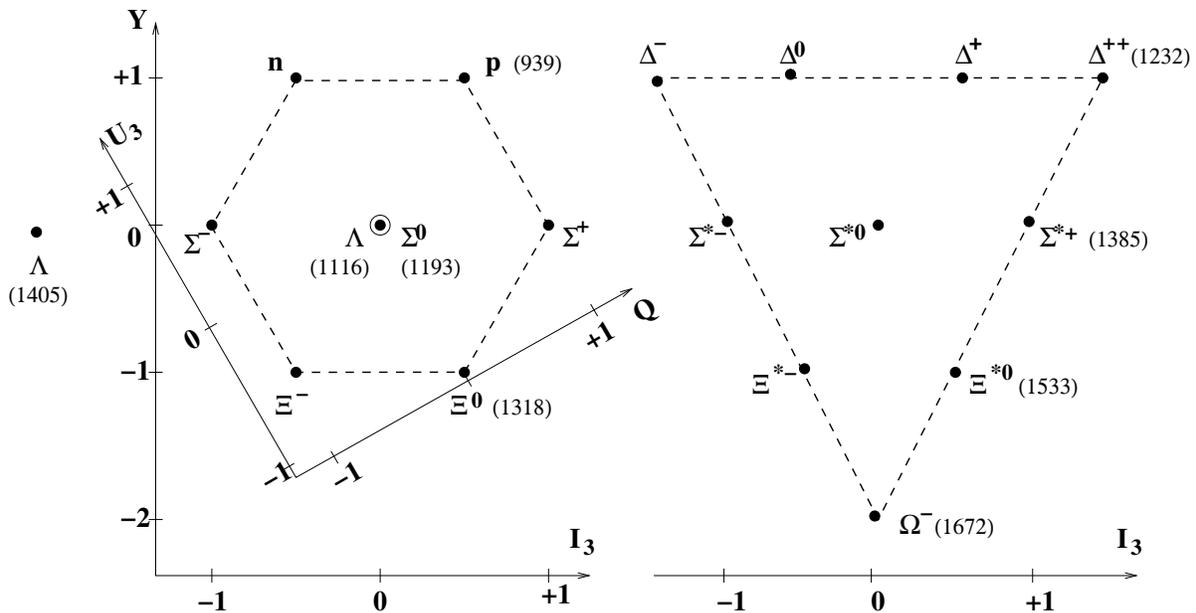


FIG. 1.3 – Singlet  $J^P = 1/2^-$ , Octet  $J^P = 1/2^+$  et décuplet  $J^P = 3/2^+$  des baryons. Les axes sont discutés plus tard dans le cours, les masses moyennes par état d'isospin sont indiquées en MeV.

Historiquement, ce regroupement n'a pas été trivial car tous les hadrons des multiplets n'avaient pas encore été découverts et pour les hadrons déjà observés leur spin, déduit de l'analyse de leurs produits de décroissance, n'était pas toujours connu. La "bonne solution" s'est imposée suite à de nombreux essais et surtout grâce au succès des prédictions des

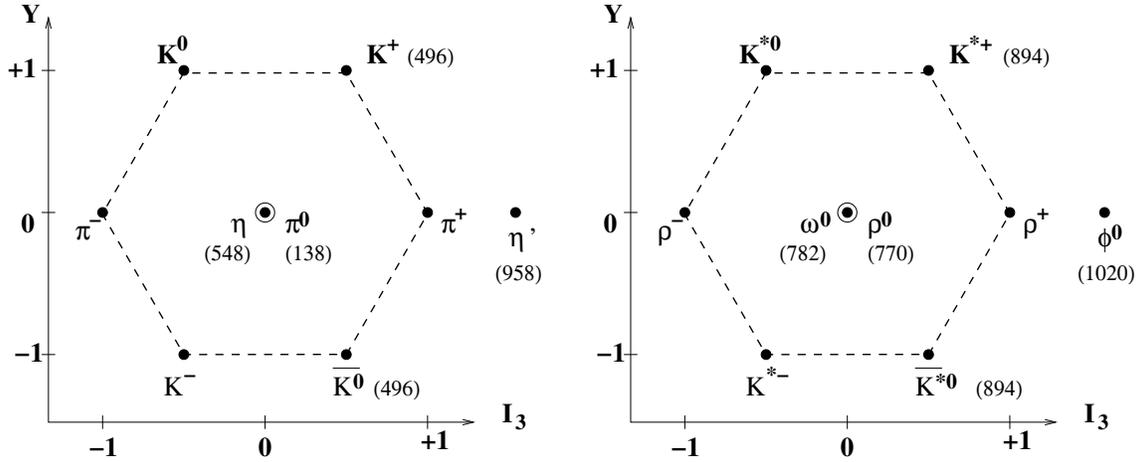


FIG. 1.4 – Octets et singlets  $J^P = 0^-$  et  $J^P = 1^-$  des mésons.

particules manquantes et des effets de brisure explicite de la dégénérescence de masse due aux masses différentes des quarks.

Nous allons voir comment cette approche permet de "classer" tous les hadrons observés et de comprendre la hiérarchisation des masses entre multiplets.

## 1.2 Groupe Unitaire Spécial SU(N)

Les symétries invoquées sont des rotations dans l'espace des saveurs. Ces transformations sont unitaires. Appliquées à des vecteurs d'état physiques elles ont la propriété de conserver le produit scalaire et donc les amplitudes.

Commençons par le cas simple du doublet  $(n, p)$ . Dès 1932, W. Heisenberg propose que du point de vue de l'interaction forte, ces deux particules ne sont que la projection d'un même objet. Il introduit un "spin isotopique" ou "isospin" dont la projection vaut  $+\frac{1}{2}$  (up) pour le proton et  $-\frac{1}{2}$  (down) pour le neutron. On définit ainsi le doublet

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Nous considérons l'interaction forte invariante sous toute rotation dans l'espace d'isospin

$$\chi' = U\chi, \quad U \equiv \text{matrice } 2 \times 2 \text{ de rotation.}$$

$U$  est unitaire afin de préserver le produit scalaire et donc la norme :

$$\chi'^{\dagger}\chi' = \chi^{\dagger}\underbrace{U^{\dagger}U}_I\chi = \chi^{\dagger}\chi \quad (1.2)$$

Tout opérateur unitaire peut s'écrire comme  $U = e^{iaA}$  avec  $a$  réel et  $A$  hermitique ( $A^{\dagger} = A$ ).  $A$  est alors un **générateur** de  $U$ . Dans le cas d'une rotation de l'angle  $\theta$  autour de l'axe porté par le vecteur unitaire  $\vec{n}$  nous avons

$$U \equiv \exp\left(\frac{1}{2}i\theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right) \quad (1.3)$$

où les matrices  $2 \times 2$   $\vec{\sigma}$  sont les générateurs des rotations

$$\chi' \rightarrow \chi + \delta\chi \quad , \quad \delta\chi \equiv i\delta\theta \vec{n} \cdot \frac{1}{2}\vec{\sigma} \chi \quad (1.4)$$

pour une rotation infinitésimale. L'ensemble des rotations dans l'espace d'isospin forme un **groupe**, le groupe des transformations unitaires  $SU(2)$

- Élément neutre ( $\theta = 0$ )
- Élément inverse ( $\theta = -\theta$ )
- Composition des rotations est associative
- Le produit de deux rotations est une rotation.

L'unitarité impose

$$\vec{\sigma}^{\dagger} = \vec{\sigma}, \quad Tr(\vec{\sigma}) = 0 \quad \text{donc} \quad \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & -a \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Il n'existe que 3 matrices indépendantes qui vérifient ces propriétés, les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Avec les relations de commutation habituelles :

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = \frac{1}{2}i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (1.7)$$

Notons

$$\begin{aligned} \text{u} &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ l'état d'isospin "up"} \\ \text{d} &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ l'état d'isospin "down"} \end{aligned}$$

Ces états sont états propres de  $\sigma_3$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma_3 u &= +\frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}\sigma_3 d &= -\frac{1}{2}d\end{aligned}\tag{1.8}$$

L'état d'isospin est caractérisé par  $\langle \frac{1}{2}\sigma_3 \rangle$ . On définit les opérateurs

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)\tag{1.9}$$

qui incrémentent ou décrémentent l'isospin d'une unité

$$\begin{aligned}\sigma_+ d &= u, & \sigma_+ u &= 0 \\ \sigma_- u &= d, & \sigma_- d &= 0\end{aligned}\tag{1.10}$$

(voir transparent 1).

Remarque :

- On peut choisir une représentation de dimension supérieure, par exemple  $\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$ , les rotations sont alors celles de l'espace réel autour des axes  $(1,2,3) \rightarrow (x,y,z)$ , les générateurs du groupe correspondant au moment angulaire (matrices  $3 \times 3$ ).

Résumé :

- Le doublet d'isospin  $\chi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  est la représentation fondamentale de SU(2) saveur, symétrie globale de QCD.
- Nous pouvons associer le doublet  $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  à cette représentation fondamentale ou le triplet  $\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$  pour une représentation de dimension supérieure. La symétrie SU(N) considère ces états comme dégénérés, avec des projections d'isospin séparées d'une unité (opérateurs  $\sigma^{\pm}$ ). Nous pourrions ainsi "ranger" chaque multiplet de hadrons dans une nouvelle représentation de SU(N) mais cela perdrait toute notion unificatrice d'une structure interne commune. L'idée de Gell-Mann et Zweig est de décrire tous les hadrons comme des compositions d'une même représentation fondamentale de SU(N)...
- SU(N) possède  $N^2 - 1$  générateurs, qui satisfont la même algèbre.

### 1.3 Les multiplets de SU(2)

Nous choisissons le doublet  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  comme représentation fondamentale de SU(2). Physiquement ce doublet va correspondre au doublet des quarks "up" et "down" d'isospin  $I_z = \pm \frac{1}{2}$ . Les hadrons sont alors décrits comme la composition de deux ou trois quarks, avec les mêmes règles de composition que pour les moments cinétiques :

$$\begin{aligned} I_z |I, M\rangle &= M\hbar |I, M\rangle \\ I^2 |I, M\rangle &= I(I+1)\hbar^2 |I, M\rangle \\ I^\pm |I, M\rangle &= \hbar\sqrt{I(I+1) - M(M \pm 1)} |I, M \pm 1\rangle \end{aligned} \quad (1.11)$$

2 quarks :

- L'état  $|I = 1, I_z = 1\rangle$  ne peut s'obtenir qu'avec les deux quarks dans l'état  $|I = \frac{1}{2}, I_z = \frac{1}{2}\rangle$  :

$$|1, 1\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = uu \quad (1.12)$$

On applique alors successivement l'opérateur  $I^-$  :

$$\begin{aligned} I^- |1, 1\rangle &= \hbar\sqrt{2} |1, 0\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (I_1^- + I_2^-) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ud + du) \end{aligned} \quad (1.13)$$

de même

$$|1, -1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} I^- |1, 0\rangle = dd \quad (1.14)$$

nous avons formé le **triplet**

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &= uu \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ud + du) \quad (S) \\ |1, -1\rangle &= dd \end{aligned} \quad (1.15)$$

**symétrique** sous l'échange  $u \leftrightarrow d$ . Reste l'état  $|0, 0\rangle$  qui doit être orthogonal aux autres

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (ud - du) \quad (1.16)$$

qui forme un **singlet antisymétrique** sous  $u \leftrightarrow d$  (voir transparent 2).

3 quarks :

- La composition avec le troisième quark se fait de manière semblable. En partant de l'état  $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = uuu$  et en appliquant successivement l'opérateur  $I^-$  on construit le **quadruplet d'états symétriques**

$$I = \frac{3}{2} \quad I_z = \begin{array}{l} \frac{3}{2} \quad uuu \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu) \\ -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd) \\ -\frac{3}{2} \quad ddd \end{array} \quad (S) \quad (1.17)$$

Les états  $I = \frac{1}{2}$  s'obtiennent à la fois à partir du singlet (1.16) et du triplet (1.15). La composition avec  $|0, 0\rangle$  est triviale et donne le doublet

$$I = \frac{1}{2} \quad I_z = \begin{array}{l} \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu) \\ -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud) \end{array} \quad (MA) \quad (1.18)$$

Ces états sont antisymétriques sous l'échange des deux premiers quarks mais n'ont pas de symétrie sous l'échange  $1 \leftrightarrow 3$  ou  $2 \leftrightarrow 3$ . C'est pourquoi ils sont qualifiés de Mixtes Antisymétriques ou (MA).

La composition à partir du triplet donnera des états mixtes symétriques (MS)

$$\alpha \left( \frac{ud + du}{\sqrt{2}} \right) u + \beta (uu)d \quad (1.19)$$

La normalisation et orthogonalité avec le quadruplet imposent les conditions

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= 1 \\ \beta + \sqrt{2}\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

qui permettent de résoudre le système  $(\alpha, \beta)$ . En procédant de même avec l'autre possibilité d'état (MS)

$$\alpha' \left( \frac{ud + du}{\sqrt{2}} \right) d + \beta' (dd)u \quad (1.21)$$

on obtient le doublet Mixte Symétrique

$$I = \frac{1}{2} \quad I_z = \begin{array}{l} \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(udu + duu - 2uud) \\ -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(ddu + dud - 2ddu) \end{array} \quad (MS) \quad (1.22)$$

- Les états à 3 quarks  $|I = \frac{1}{2}, I_z = \pm \frac{1}{2}\rangle$  sont identifiés au doublet p-n

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \phi_{MS} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \phi_{MA} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \\ n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \phi_{MS} \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + \phi_{MA} \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le quadruplet  $I = \frac{3}{2}$  peut être identifié aux  $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$  (voir transparent 3)

## Représentation conjuguée

Le triplet d'états à 2 quarks fait penser au triplet des  $\pi$  mais les nombres quantiques ne correspondent pas aux états physiques. Une bonne description requiert un état  $q\bar{q}$ . Du point de vue de la théorie des groupes,  $\bar{q}$  est la représentation conjuguée de  $q$ . Pour connaître ses transformation sous  $SU(2)$  il suffit de prendre le conjugué de charge des transformations de  $q$ .

En reprenant l'exemple de la rotation autour de l'axe 2 on peut se convaincre que la représentation conjuguée  $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$  se transforme comme  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ . Ceci est un cas particulier à  $SU(2)$ . Pour le cas plus général ( $SU(3)$ ,  $SU(4)$ ...) nous verons des règles de compositions "graphiques", issues de la théorie des groupes, qui permettent de déterminer la dimension des multiplets et les symétries de la fonction d'onde.

Les états du triplet symétrique  $q\bar{q}$  s'écrivent

$$\begin{cases} \pi^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} + \bar{d}u) \\ \pi^0 &= \frac{1}{2}(d\bar{d} - u\bar{u} + \bar{d}d - \bar{u}u) \\ \pi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} + \bar{u}d) \end{cases} \quad (1.24)$$

### Remarques :

- Le succès de la symétrie globale  $SU(2)$  saveur tient plus à la faible masse des quarks  $u$  et  $d$  qu'au fait que ces masses sont voisines,  $m_u, m_d \ll M_p$  mais  $m_u/m_d \neq 1$ . Le fait que  $m_s \lesssim M_p$  et  $m_s \gg m_u$  brise explicitement la symétrie de saveur étendue à  $u, d, s$  sans affecter cependant la classification des particules, basée sur les nombres quantiques de spin, parité, ... plus que sur les masses.
- Les fonctions d'ondes (1.23) du nucléon impliquent que les charges électriques des quarks doivent être des fractions de la charge de l'électron ou du proton. Cette idée a longtemps repoussé les physiciens. Dans son article original, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964), Gell-Mann lui-même écrivait "a search for stable quarks of charge  $-1/3$  or  $+2/3$  at the highest energy accelerators would help to reassure us of the nonexistence of real quarks". Jusqu'à l'interprétation des données de diffusion profondément inélastique en terme de partons (cours 3), les quarks sont donc restés une construction mathématique utile mais sans réalité physique.

## 1.4 Généralisation à SU(3)

### 1.4.1 Triplet fondamental de SU(3)

Pour prendre en compte les particules étranges (observées dès les années 50 dans les chambres à brouillard), Gell-Mann et Zweig étendent le groupe de symétrie à SU(3) avec pour représentation fondamentale le triplet

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Les générateurs du groupe SU(3) sont  $3^2 - 1 = 8$  matrices  $3 \times 3$  (transparent 4) appelées matrices de Gell-Mann et notées  $\lambda$ . L'examen des matrices  $\lambda$  révèle rapidement les sous-groupes SU(2) contenus dans SU(3). On retrouve ainsi les opérateurs de changement d'isospin

$$I^\pm = \frac{1}{2}\lambda_1 \pm i\frac{1}{2}\lambda_2 \quad u \leftrightarrow d \quad (1.26)$$

et deux autres sous-groupes

$$U^\pm = \frac{1}{2}\lambda_6 \pm i\frac{1}{2}\lambda_7 \quad d \leftrightarrow s \quad (U - spin) \quad (1.27)$$

$$V^\pm = \frac{1}{2}\lambda_4 \pm i\frac{1}{2}\lambda_5 \quad u \leftrightarrow s \quad (V - spin) \quad (1.28)$$

La représentation du triplet de SU(3) requiert un axe qui "compte" l'étrangeté en plus de l'isospin (fig.1.5). On peut choisir l'étrangeté elle-même ou l'**hypercharge**, qui est décrite par  $\lambda_8$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\lambda_8 = B + S \quad (Q = \frac{1}{2}B + I_z + \frac{S}{2}) \quad (1.29)$$

avec  $B$  le nombre baryonique, conservé par la symétrie globale  $U_V(1)$  de QCD

$$B(q) = +1/3, \quad B(\bar{q}) = -1/3$$

et  $S$  est le nombre d'étrangeté

$$S(u) = S(d) = 0, \quad S(s) = -S(\bar{s}) = -1 \quad (\text{convention de signe historique})$$

On retrouve ainsi la diagonale de  $\lambda_8$

$$Y(u) = \frac{1}{3}, \quad Y(d) = \frac{1}{3}, \quad Y(s) = -\frac{2}{3}$$

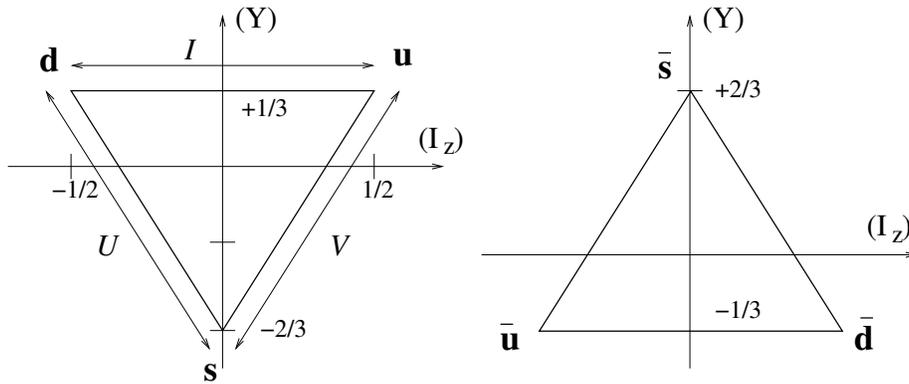


FIG. 1.5 – Représentation fondamentale (gauche) et conjuguée de  $SU(3)$ .

Les multiplets et leur dimension s’obtiennent facilement à l’aide de différentes méthodes graphiques présentées ci-dessous. Elles émanent bien-sûr de la théorie des groupes mais permettent d’obtenir simplement la décomposition en représentations irréductibles du groupe, les multiplets. Ils correspondent à des sous-espaces déconnectés et invariants sous les transformations du groupe.

### 1.4.2 Diagrammes de poids

La composition avec un triplet  $q$  ou  $\bar{q}$  supplémentaire s’obtient en centrant ce nouveau triplet sur tous les états du multiplet précédent (voir transparents 6 et 8). La dimension de chaque multiplet est calculée par la méthode suivante que nous ne démontrerons pas

- Les opérateurs  $I^+, V^+, U^-$  incrémentent la valeur de  $I_z$ . L’état d’isospin maximum  $\phi_{max}$  vérifie donc  $I^+\phi_{max} = V^+\phi_{max} = U^-\phi_{max} = 0$

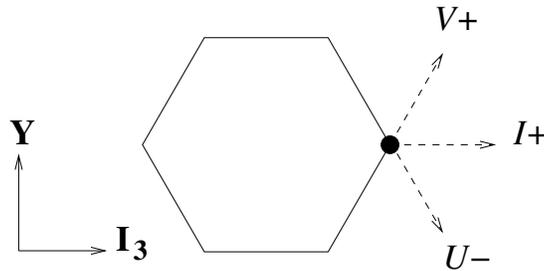


FIG. 1.6 – Position de  $\phi_{max}$  dans l’octet.

- A partir de  $\phi_{max}$  on applique  $p$  fois l’opérateur  $V^-$  jusqu’à atteindre le prochain sommet du multiplet

$$(V^-)^{p+1}\phi_{max} = 0$$

– Ensuite on applique  $q$  fois  $I^-$  jusqu'au prochain sommet

$$(I^-)^{q+1}(V^-)^{p+1}\phi_{max} = 0$$

La représentation de  $SU(3)$  étudiée est complètement spécifiée par  $(p, q)$ . On a ainsi la correspondance suivante pour les premiers multiplets de  $SU(3)$

$(p, q)$	Dimension
$(0, 0)$	1
$(1, 0)$	3
$(0, 1)$	$\bar{3}$
$(1, 1)$	8
$(2, 0)$	6
$(3, 0)$	10

Les formules suivantes permettent de déterminer la dimension d'un multiplet de  $SU(N)$  dans ces notations

$$\begin{aligned}
 SU(2) : \quad Dim(p) &= \frac{p+1}{1} \\
 SU(3) : \quad Dim(p, q) &= \frac{p+1}{1} \times \frac{q+1}{1} \times \frac{p+q+2}{2} \\
 SU(4) : \quad Dim(p, q, r) &= \frac{p+1}{1} \times \frac{q+1}{1} \times \frac{r+1}{1} \times \frac{p+q+2}{2} \times \frac{q+r+2}{2} \times \frac{p+q+r+3}{3}
 \end{aligned}
 \tag{1.30}$$

Remarque : Les multiplets 3,  $\bar{3}$  et 6 ne sont pas présents dans le spectre des hadrons. Il n'y a pas d'états à  $1q, 1\bar{q}, 2q...$

### 1.4.3 Tableaux d'Young

Cette autre méthode graphique permet d'obtenir rapidement les multiplets de  $SU(N)$  et leur dimension. La représentation fondamentale de  $SU(N)$  est notée  $\square$ . Sa représentation conjuguée est notée



avec  $N-1$  boîtes

La composition de plusieurs représentations se fait en complétant une ligne ou en commençant une nouvelle, par exemple

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}
 \tag{1.31}$$

La seule restriction est de ne former que des angles ouverts vers le bas à droite

$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square &= \left( \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \square \\ &= \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ainsi les représentations

$$\begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} \quad (1.33)$$

sont interdites (règles complètes de formation des diagrammes dans Hammermesh, 1963).

La dimension de chaque représentation s'obtient en écrivant le chiffre  $N$  de  $SU(N)$  sur la diagonale, et en progressant de  $+1$  vers la droite et de  $-1$  vers le bas. Chaque case est l'angle

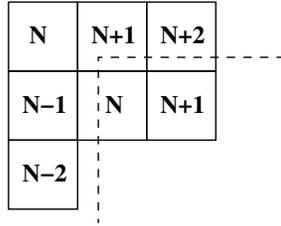


FIG. 1.7 – Exemple de tableau d'Young représentant un multiplet de  $SU(N)$ . Le trait pointillé illustre la trajectoire associée à la 2<sup>e</sup> case de la première ligne.

d'une trajectoire associée à la fraction :

$$\frac{\text{Chiffre de la case}}{\text{Nb. de cases traversées}} = \frac{N+1}{3} \text{ dans l'exemple de la figure 1.7.}$$

La dimension finale est le produit de toutes les trajectoires.

- Exemple de composition de deux doublets  $SU(2)$

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \frac{2}{2} \times \frac{3}{1} = 3 & \quad \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

On retrouve le triplet et le singlet des équations (1.15) et (1.16).

- Exemple de composition de trois doublets  $SU(2)$

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{1} = 4 & \quad \frac{3}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = 2 \quad \frac{3}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = 2 \quad 0 \end{aligned}$$

On retrouve de même les multiplets des équations (1.17), (1.18) et (1.22).

### 1.4.4 Multiplets $SU(3)$ des états hadroniques

Mésons  $q\bar{q}$  :

$$\begin{array}{c} \boxed{3} \\ (3) \end{array} \otimes \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ (\bar{3}) \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{3} \ \boxed{4} \\ \boxed{2} \\ \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 3 \times 1} = 8 \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \\ 1 \end{array}$$

Baryons  $qqq$  :

$$\begin{array}{c} \boxed{3} \\ (3) \end{array} \otimes \begin{array}{c} \boxed{3} \\ (3) \end{array} \otimes \begin{array}{c} \boxed{3} \\ (3) \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{3} \ \boxed{4} \ \boxed{5} \\ \frac{3 \times 4 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 10 \\ (S) \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{3} \ \boxed{4} \\ \boxed{2} \\ 8 \\ (MS) \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{3} \ \boxed{4} \\ \boxed{2} \\ 8 \\ (MA) \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \\ 1 \\ (A) \end{array}$$

On trouve en effet des particules de même spin, même parité et  $\sim$  même masse qui se rangent dans les multiplets de  $SU(3)$  ! (voir transparents 7 et 9). Des états à deux quarks seulement produiraient des triplets de hadrons, non identifiés par les expériences.

Lors de la publication des travaux de Gell-Mann et Zweig tous les membres des multiplets n'ont pas encore été observés. L'existence de la particule  $\Omega^-$  dans le décuplet par exemple a été prédite uniquement sur des arguments de symétrie. Son observation est un grand succès du modèle (voir transparent 10).

On peut remarquer que les deux multiplets prédits pour les mésons contiennent deux états d'isospin et d'hypercharge nulles (fig.1.4 : le  $\eta$  et le  $\eta'$  pour les pseudoscalaires, le  $\phi$  et le  $\omega$  pour les mésons vecteurs. Les états physiques pourront donc être un mélange des deux états prédits par  $SU(3)$  (indités 1 et 8), par exemple

$$\begin{aligned} \phi^0 &= \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_8 \\ \omega^0 &= -\sin \theta \omega_1 + \cos \theta \omega_8 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Expérimentalement  $\theta$  est proche de  $35^\circ$ , ce qui correspond à une fonction d'onde du  $\phi$  quasiment étrange ( $s\bar{s}$ ).

### 1.4.5 Séparation en masse et brisure explicite

$SU(3)$  est brisée par la différence de masse  $m_u \neq m_s$ . Par exemple  $M_p \sim M_n \simeq 938 \text{ MeV}$  alors que  $M_\Sigma \simeq 1193 \text{ MeV}$ , soit une brisure de 20%... Cependant la classification des nombres quantiques reste valable et on retrouve les multiplets dans le spectre des particules observées.

Nous avons déjà abordé en début de section 1.4 l'existence des sous-groupes  $SU(2)$  d'isospin, d'U-spin et de V-spin. La figure 1.3 fait par exemple apparaître les axes d'isospin et d'U-spin dans l'octet des baryons. On voit clairement que la symétrie de masse est plus brisée dans les multiplets d'U-spin ( $\Delta M_{max} = M_{\Xi^0} - M_n = 374 \text{ MeV}$ ) que dans les multiplets d'isospin ( $\Delta M_{max} = M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+} = 8 \text{ MeV}$ ). Cependant l'axe perpendiculaire à  $U_3$  est la charge électrique  $Q$ . Un multiplet d'U-spin possède donc un seul état de charge, tout comme un multiplet d'isospin est défini par son hypercharge  $Y$ .

Nous pouvons alors utiliser l'approximation que la masse des baryons provient d'une part de l'interaction forte, qui conserve l'isospin, et d'autre part de l'interaction électromagnétique, qui conserve l'U-spin. En conséquence la contribution électromagnétique à la masse  $\delta_{elec}M$  sera la même pour tous les membres d'un multiplet d'U-spin, ce qui conduit à

$$\delta_{elec}M_p = \delta_{elec}M_{\Sigma^+}, \quad \delta_{elec}M_n = \delta_{elec}M_{\Xi^0}, \quad \delta_{elec}M_{\Sigma^-} = \delta_{elec}M_{\Xi^-} \quad (1.35)$$

Mais puisque l'interaction électromagnétique est la seule à briser la dégénérescence de masse d'un multiplet d'isospin, nous devons aussi avoir

$$\delta_{elec}M_n - \delta_{elec}M_p = M_n - M_p \quad (1.36)$$

$$\delta_{elec}M_{\Xi^-} - \delta_{elec}M_{\Xi^0} = M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0} \quad (1.37)$$

$$\delta_{elec}M_{\Sigma^-} - \delta_{elec}M_{\Sigma^+} = M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+} \quad (1.37)$$

Ce qui conduit à la *formule de Coleman-Glashow (1961)*

$$\boxed{M_n - M_p + M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0} = M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+}} \quad (1.38)$$

bien vérifiée expérimentalement ( $7.7 \pm 0.24$  comparé à  $8.08 \pm 0.07$ ).

De manière équivalente, la symétrie U-spin dans le décuplet donne

$$\begin{aligned} M_{\Delta^-} - M_{\Delta^0} &= M_{\Sigma^{*-}} - M_{\Sigma^{*0}} = M_{\Xi^{*-}} - M_{\Xi^{*0}} \\ M_{\Delta^0} - M_{\Delta^+} &= M_{\Sigma^{*0}} - M_{\Sigma^{*+}} \end{aligned} \quad (1.39)$$

La précision sur les masses expérimentales ne permet pas de contraindre sévèrement ces relations.

Une relation de masse peut aussi s'écrire entre les membres de l'octet des mésons mais le fait que particules et anti-particules soient dans un même multiplet rend cette relation triviale

$$M_{K^0} - M_{K^+} + M_{K^-} - M_{\bar{K}^0} = M_{\pi^-} - M_{\pi^+} \quad (1.40)$$

En appliquant la conjugaison de charge elle revient à écrire  $0 = 0$ .

La masse du quark  $s$  ( $95 \pm 25 \text{ MeV}$ ) est très grande devant celle des quarks  $u$  et  $d$ . Elle introduit une brisure explicite de la symétrie  $SU(3)$ , responsable de la majeure partie de la séparation en masse entre différents multiplets d'isospin. Nous supposons que ce terme de brisure explicite reste cependant petit devant la partie  $SU(3)$  symétrique de l'interaction forte et utilisons un développement en perturbation. Le modèle le plus simple est de supposer que l'opérateur de masse contient un terme constant, invariant sous  $SU(3)$ , plus un terme linéaire (1<sup>er</sup> ordre) dans les générateurs de  $SU(3)$ . Si nous négligeons les effets électromagnétiques les multiplets d'isospin doivent rester dégénérés. Le seul opérateur disponible est donc le  $8^e$ , l'opérateur d'hypercharge, qui ne change pas la troisième composante d'isospin. L'opérateur de masse s'écrit alors

$$M = a + bY \quad (1.41)$$

avec  $a$  et  $b$  des constantes du multiplet considéré. Ceci prédit la séparation régulière recherchée entre les multiplets d'isospin, par exemple

$$\underbrace{M_{\Omega} - M_{\Xi^*}}_{139.2 \pm 0.7} = \underbrace{M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*}}_{148.7 \pm 1.4} = \underbrace{M_{\Sigma^*} - M_{\Delta}}_{152.6 \pm 1.2} \quad (1.42)$$

Les masses sont ici moyennées sur les multiplets d'isospin. Cette relation dévie largement des barres d'erreurs expérimentales mais les résidus ( $\leq 10 \text{ MeV}$ ) restent cependant faibles devant les séparations de masses considérées. L'accord global est donc satisfaisant. En revanche cette approche est insuffisante dans le cas de l'octet des baryons. En particulier la séparation  $M_{\Sigma^0} - M_{\Lambda} = 77 \text{ MeV}$  n'est pas expliquée.

On se résout donc à introduire à l'ordre supérieur, en plus du terme en  $Y^2$ , une dépendance en isospin avec un terme proportionnel à l'opérateur de Casimir du sous-groupe d'isospin

$$M = a + bY + cI(I + 1) + dY^2 \quad (1.43)$$

Les paramètres  $c$  et  $d$  sont ensuite contraints par le fait de conserver la séparation en masse constante de l'équation (1.41) entre les multiplets d'isospin

$$cI(I + 1) + dY^2 = x + yY \quad (1.44)$$

avec  $x$  et  $y$  constantes du multiplets de hadrons. On obtient alors la relation  $d = -1/4c$  qui conduit à la *formule de masse de Gell-Mann Okubo*

$$\boxed{M = a + bY + c \left[ I(I + 1) - \frac{1}{4}Y^2 \right]} \quad (1.45)$$

Cette formule reste, par construction, compatible avec eq.(1.42) et permet de prédire une nouvelle relation entre les hadrons de l'octet

$$2(M_N + M_{\Xi}) = 3M_{\Lambda} + M_{\Sigma} \quad (1.46)$$

Cette équation est vérifiée expérimentalement à  $7.7 \pm 0.7$  MeV près. Encore une fois le désaccord est très en dehors des barres d'erreurs mais il reste faible face aux séparations de masse de l'ordre de 100 MeV étudiées ici. Ces prédictions de brisure explicite sont donc un succès supplémentaire de la symétrie  $SU(3)$ .

Restent cependant des questions sur lesquelles la seule symétrie globale  $SU(3)_{saveur}$  ne peut rien prédire. Pourquoi l'octet des baryons porte les nombres quantiques  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$  et le décuplet  $J^\pi = \frac{3}{2}^+$ ? Pourquoi les membres de l'octet sont en moyenne plus légers que ceux du décuplet? Pourquoi l'octet des mésons le plus léger est-il pseudo-scalaire?

⇒ Essayons de décrire des états plus complets avec non seulement la fonction d'onde de saveur mais aussi de spin, d'espace et de couleur.

## 1.5 Quarks avec spin

Nous avons déjà tous les ingrédients :

– Combinaison de 3 spin  $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rcccl}
 \boxed{2} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{2} & = & \boxed{2\ 3\ 4} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \text{Multiplets } SU(2) : & & 4 & & 2 & & 2 \\
 \text{Symétrie :} & & (S) & & (MS) & & (MA) \\
 \text{Spin :} & & 3/2 & & 1/2 & & 1/2
 \end{array}$$

– Combinaison de 3 quarks

$$\begin{array}{rcccl}
 \boxed{3} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{3} & = & \boxed{3\ 4\ 5} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
 \text{Multiplets } SU(3) & & 10 & & 8 & & 8 & & 1 \\
 \text{Symétrie} & & (S) & & (MS) & & (MA) & & (A)
 \end{array}$$

Nous regroupons tous les produits possibles suivant leur symétrie en utilisant les propriétés du "tableau de multiplication" 1.1. On obtient alors les états (voir transparent 12)

$$\begin{array}{rcl}
 S : & (10 \otimes 4) \oplus (8 \otimes 2) & 56 \text{ états} \\
 MS : & (10 \otimes 2) \oplus (8 \otimes 4) \oplus (8 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2) & 70 \text{ ''} \\
 MA : & (10 \otimes 2) \oplus (8 \otimes 4) \oplus (8 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2) & 70 \text{ ''} \\
 A : & (8 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 4) & 20 \text{ ''}
 \end{array} \tag{1.47}$$

$\chi_{spin} \setminus \phi_{saveur}$	S	M	A
S	S	M	A
M	M	S,M,A	M

TAB. 1.1 – Symétrie de la fonction d’onde  $\phi_{saveur} \otimes \chi_{spin}$

Les mêmes multiplets s’obtiennent de manière équivalente avec les tableaux d’Young

$$\begin{array}{cccccc}
 \boxed{6} \otimes \boxed{6} \otimes \boxed{6} & = & \boxed{6\ 7\ 8} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{6} & \boxed{7} \\ \hline \boxed{5} & \phantom{\boxed{7}} \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{6} & \boxed{7} \\ \hline \boxed{5} & \phantom{\boxed{7}} \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|} \hline \boxed{6} \\ \hline \boxed{5} \\ \hline \boxed{4} \\ \hline \end{array} \\
 \text{Multiplets } SU(6) & & 56 & & 70 & & 70 & & 20 \\
 \text{Symétrie} & & (S) & & (MS) & & (MA) & & (A)
 \end{array}$$

où  $\boxed{6}$  est la représentation fondamentale de  $SU(6)$ , groupe de symétrie des fonctions d’onde  $SU(2) \otimes SU(3)$ .

A ce niveau les octuplets et décuplets sont associés aussi bien avec des spins  $\frac{1}{2}$  que  $\frac{3}{2}$ , contrairement aux multiplets des particules observées. Continuons à compléter la fonction d’onde...

### 1.5.1 Fonction d’onde du nucléon

Le nucléon est un fermion et obéit donc au principe de Pauli. Sa fonction d’onde totale d’état à trois quarks doit être antisymétrique sous l’échange des quarks. Cette antisymétrie s’applique donc aux permutations de **toutes** les coordonnées d’un quark. Les différentes symétries ( $S, A, MS, MA$ ) que nous avons rencontré jusqu’à présent concernaient la permutation du nombre quantique de saveur seulement. Des symétries partielles de spin, saveur, espace, ... peuvent donc apparaître tant que leur produit final est anti-symétrique pour un ensemble de fermions identiques.

En plus des nombres quantiques de saveur et de spin, un nombre quantique de couleur est nécessaire pour expliquer l’existence de hadrons tels que le  $\Delta^{++}(u \uparrow u \uparrow u \uparrow)$ , pour lequel les 3 quarks seraient tous dans le même état quantique en l’absence de couleur. On postule la symétrie  $SU(3)$  couleur pour l’interaction forte. Sachant qu’aucun objet ”coloré” n’a jamais été observé, la fonction d’onde  $\psi_{couleur}$  est donc un état singlet de couleur, anti-symétrique (combinaison de trois triplets élémentaires de couleur (RBG) dans  $SU(3)_c$ ).

Finalement la fonction d'onde du nucléon s'exprime comme

$$\underbrace{\psi_{3q}}_{(A)} \equiv \underbrace{\psi_{couleur}}_{(A)} \otimes \underbrace{\phi_{saveur} \otimes \chi_{spin} \otimes \varphi_{espace}}_{(S)} \quad (1.48)$$

D'après le tableau de produits (1.1),  $\phi_{saveur} \otimes \alpha_{spin} \otimes \varphi_{espace}$  est nécessairement symétrique.

## 1.5.2 Modèle de quarks non-relativiste

On utilise un potentiel d'oscillateur harmonique pour traduire le confinement des quarks

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{2}k\vec{r}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2 \\ H &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \\ E_n &= \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \end{aligned} \quad (1.49)$$

avec  $\omega$  la pulsation d'oscillation classique.

Le moment angulaire total  $J$  est composé du spin  $S$  et du moment orbital des quarks  $L$ ,  $J = L \oplus S$ . Supposons les quarks dans l'état fondamental (1s) de l'oscillateur harmonique

(1s)(1s)(1s)  $\rightarrow$  état  $\varphi_{espace}$  **symétrique**,  $L=0$  et Parité  $+$ .

Donc  $\phi_{saveur} \otimes \chi_{spin}$  doit être (S). D'après les expressions des multiplets (1.47), les états de plus faible masse forment donc

Un décuplet de spin 3/2 et parité  $+$  : 10,  $J^\pi = \frac{2}{3}^+$

Un octuplet de spin 1/2 et parité  $+$  : 8,  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$  (contenant p et n)

Ce qui est effectivement observé!

Rq : La décomposition (1.47) montre qu'il n'est pas possible de construire un singlet de SU(3) dans l'état fondamental  $L=0$  et parité  $+$ . La première possibilité est de mettre un quark dans l'onde p, (1s)(1s)(1p) soit  $L=1$  et parité  $-$

$$\begin{array}{ccc} \phi_{saveur} & \otimes & \chi_{spin} & \otimes & \varphi_{espace} \\ 1(A) & & 2(M) & & (M) \end{array}$$

État symétrique  $J^\pi = \frac{1}{2}^-$  identifié à  $\Lambda(1405)$ .

Que nous apprend  $SU(3)_{saveur} \otimes SU(2)_{spin}$  pour les mésons ?

$$\begin{array}{ccccccc}
 SU(3)_{saveur} & \boxed{3} & \otimes & \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}} & = & \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 2 & \end{array}} & \oplus & \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}} \\
 & (q) & & (\bar{q}) & & Octet & & & Singlet
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 SU(2)_{spin} & \boxed{2} & \otimes & \boxed{2} & = & \boxed{2 \ 3} & \oplus & \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}} \\
 & (q) & & (\bar{q}) & & Triplet \text{ spin } 1 & & & Singlet \text{ spin } 0
 \end{array}$$

Il est donc *a priori* possible de former des octets et des singlets de spin 0 ou 1. L'état fondamental pour les mésons,  $(1s) (\bar{1}s)$ , est de parité négative car quark et anti-quark ont des parités intrinsèques opposées.

**NB** : Il n'y a pas de contrainte d'anti-symétrisation de la fonction d'onde totale pour un état  $(q, \bar{q})$  !

Au final les multiplets de mésons attendus, et effectivement observés, sont

$$\begin{array}{l}
 \text{Octets : } J^\pi \quad 0^- \text{ et } 1^- \\
 \text{Singlets : } J^\pi \quad 0^- \text{ et } 1^-
 \end{array}$$

On comprend donc les multiplets de plus basse masse pour les baryons et les mésons, avec leur spin et leur parité. Les états excités ( $L=1, L=2, \dots$ ) forment les mêmes multiplets avec alternance de la parité et à des masses plus élevées.

Le simple modèle de quarks n'explique cependant pas toutes les observations de la spectroscopie. Pourquoi les multiplets  $(10, J^\pi = \frac{3}{2}^+)$  et  $(8, J^\pi = \frac{1}{2}^+)$  des baryons ne sont-ils pas dégénérés en masse ? Même question pour  $(8, J^\pi = 0^-)$  et  $(8, J^\pi = 1^-)$  des mésons.

Nous verrons que pour expliquer le splitting de ces multiplets il faut tenir compte de la structure hyperfine de l'interaction forte, c'est à dire l'interaction spin-spin entre les quarks de la forme

$$\alpha \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \tag{1.50}$$

Intuitivement cette interaction traduit l'alignement du spin du quark  $i$  dans le "champ magnétique de couleur" induit par le quark  $j$ . Le coefficient  $\alpha$  dépend de la dynamique de l'interaction forte (voir cours 4 sur le modèle de sac). On acceptera pour l'instant qu'il favorise l'**anti-alignement** des spins.

Les multiplets de plus bas spin ont donc les masses les plus basses.

## 1.6 Calculs simples dans le modèle de quark N-R

### 1.6.1 Charge du nucléon :

$$Q = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \phi_{MS} \chi_{MS} + \phi_{MA} \chi_{MA} | e_i | \phi_{MS} \chi_{MS} + \phi_{MA} \chi_{MA} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.51)$$

La fonction d'onde  $\phi \times \varphi$  est symétrique donc

$$Q = \sum_{i=1}^3 \langle \phi \chi | e_i | \phi \chi \rangle \equiv 3 \langle \phi \chi | e_3 | \phi \chi \rangle \quad (1.52)$$

Donc

$$Q_p = \frac{3}{2} [\langle \phi_{MS}^p | e_3 | \phi_{MS}^p \rangle + \langle \phi_{MA}^p | e_3 | \phi_{MA}^p \rangle] \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{MS}^p | e_3 | \phi_{MS}^p \rangle &= \frac{1}{6} \langle u d u + d u u - 2 u u d | e_3 | u d u + d u u - 2 u u d \rangle \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 4 \left( -\frac{1}{3} \right) \right) = 0 \\ \langle \phi_{MA}^p | e_3 | \phi_{MA}^p \rangle &= \frac{1}{2} \langle u d u - d u u | e_3 | u d u - d u u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Finalement

$$Q_p = \frac{3}{2} \left( 0 + \frac{2}{3} \right) = 1 \quad (1.55)$$

De même pour  $Q_n$  en échangeant  $u \leftrightarrow d$  dans l'expression de la fonction d'onde.

### 1.6.2 Moment magnétique du nucléon :

$$\mu = \sum_{i=1}^3 \mu_i e_i \sigma_{iz} \quad (1.56)$$

On pose  $m_u \sim m_d \equiv m_q$  d'où  $\mu_i = \mu_q = \hbar/2m_q$ .

$$\mu_p = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \langle \phi_{MS}^p \chi_{MS}^p + \phi_{MA}^p \chi_{MA}^p | \mu_i e_i \sigma_{iz} | \phi_{MS}^p \chi_{MS}^p + \phi_{MA}^p \chi_{MA}^p \rangle$$

$$\mu_p = \mu_q \frac{3}{2} \langle \phi_{MS}^p \chi_{MS}^p + \phi_{MA}^p \chi_{MA}^p | e_3 \sigma_{3z} | \phi_{MS}^p \chi_{MS}^p + \phi_{MA}^p \chi_{MA}^p \rangle \quad (1.57)$$

$$(1.58)$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_{MS} | \sigma_{3z} | \chi_{MS} \rangle &= \frac{1}{6} \langle \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2 \uparrow\uparrow\downarrow | \sigma_{3z} | \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2 \uparrow\uparrow\downarrow \rangle \\ &= \frac{1}{6} (1 + 1 + 4(-1)) = -\frac{1}{3} \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_{MA} | \sigma_{3z} | \chi_{MA} \rangle &= \frac{1}{2} \langle \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow | \sigma_{3z} | \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow \rangle \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1) = 1 \end{aligned} \quad (1.60)$$

Soit, en utilisant le fait que  $\chi_{MS}^p = \chi_{MS}^n$  et  $\chi_{MA}^p = \chi_{MA}^n$ ,

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{3}{2} \mu_q \left[ \underbrace{Q_{MS}^p}_0 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \underbrace{Q_{MA}^p}_{2/3} \times (1) \right] = \mu_q \\ \mu_n &= \frac{3}{2} \mu_q \left[ \underbrace{Q_{MS}^p}_{1/3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \underbrace{Q_{MA}^p}_{-1/3} \times (1) \right] = -\frac{2}{3} \mu_q \end{aligned} \quad (1.61)$$

D'où la prédiction du modèle de quarks

$$\boxed{\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2}} \quad (1.62)$$

Malgré l'approche très simple du modèle cette prédiction s'avère vérifiée avec grande précision puisque les valeurs des moments magnétiques expérimentaux sont, en unité de magnéton nucléaire

$$\mu_p = 2.79 \quad \mu_n = -1.91 \quad \text{soit} \quad \frac{\mu_p}{\mu_n} = -1.46! \quad (1.63)$$

Nous avons vu section 1.4.5 que les rotations d'U-spin conservent la charge électrique. En supposant la conservation du U-spin par l'interaction forte on obtient donc des prédictions pour les moments magnétiques des autres hadrons de l'octet

$$\begin{array}{cccccc} \mu_p & = & \mu_{\Sigma^+} & & \mu_{\Sigma^-} & = & \mu_{\Xi^-} & & \mu_n & = & \mu_{\Xi^0} \\ 2.79 & & 2.46(1) & & -1.16(3) & & -0.651(3) & & -1.91 & & -1.25 \end{array} \quad (1.64)$$

L'accord n'est pas très bon à cause de la brisure explicite de  $SU(3)$  par la masse élevée du quark étrange. Ceci est indépendant de toute hypothèse sur le modèle de quarks.

La valeur expérimentale du moment magnétique et l'éq.(1.61) peuvent être utilisées pour déduire la masse des quarks du modèle

$$\mu_p = 2.79 \frac{\hbar}{2M_p} = \mu_q = \frac{\hbar}{2m_q} \quad (1.65)$$

Soit une masse de quark "constituant"

$$\boxed{m_q = \frac{M_p}{2.79} \sim 336 \text{ MeV}} \quad (1.66)$$

Les 3 quarks dans le potentiel d'oscillateur harmonique portent les nombres quantiques de l'état de valence des hadrons. La masse  $m_q$  "intègre" sur les échanges de gluons du système lié et sur les fluctuations en  $q\bar{q}$  de ces gluons.  $m_q$  est donc une masse effective, nous verrons que par des considérations de symétrie globale du lagrangien de  $QCD$  (voir cours 5 sur la symétrie chirale), la masse intrinsèque des quarks  $u$  et  $d$  est contrainte à quelques  $MeV$  seulement. La quasi totalité de la masse du nucléon (et donc de la matière visible de l'univers) provient de la dynamique des quarks confinés.

La pulsation  $\omega$  est un autre paramètre important du modèle puisque  $\hbar\omega$  est la séparation entre les multiplets les plus bas ( $10, \frac{3}{2}^+$ ) et ( $8, \frac{1}{2}^+$ ) et les premiers états excités  $L=1$ , de parité négative

$$\hbar\omega \sim \langle M^* \rangle - \langle M_N, M_\Delta \rangle \quad (1.67)$$

Les particules non étranges identifiées dans les multiplets de parité négative ont une masse moyenne d'environ  $1635 \text{ MeV}$  et  $(M_N + M_\Delta)/2 = (938 + 1232)/2 = 1085 \text{ MeV}$ . D'où

$$\hbar\omega \simeq 550 \text{ MeV} \quad (1.68)$$

### 1.6.3 Prédiction du rayon de charge :

Le rayon quadratique moyen de charge du proton permet d'estimer l'extension spatiale du nucléon. Nous verrons que cette quantité est accessible expérimentalement via la diffusion élastique d'électrons (voir cours 2). Il s'écrit simplement

$$\langle r^2 \rangle = \langle N | r^2 | N \rangle \quad (1.69)$$

On cherche à exprimer  $r^2$  en fonction d'un commutateur avec l'hamiltonien

$$\begin{aligned} [H, r^2 \cdot \vec{p}] &= \left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2, \vec{r} \cdot \vec{p} \right] \\ &= -i\hbar \left( \frac{p^2}{m} - m\omega^2 r^2 \right) \end{aligned} \quad (1.70)$$

Où nous avons utilisé la relation de commutation

$$[r_i, p_j] = i\hbar \delta_{i,j} \quad (1.71)$$

La moyenne du commutateur (1.70) sur le nucléon

$$\langle N | [H, \vec{r} \cdot \vec{p}] | N \rangle = (E_0 - E_0) \langle N | \vec{r} \cdot \vec{p} | N \rangle = 0 \quad (1.72)$$

conduit à l'égalité

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{1}{2} m \omega^2 \langle r^2 \rangle \quad (1.73)$$

qui correspond à l'application du théorème du Viriel pour l'oscillateur harmonique

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle \quad (1.74)$$

Or nous savons que l'énergie de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique vaut

$$\langle E_{tot} \rangle = \langle T \rangle + \langle U \rangle = \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (1.75)$$

Soit, dans les unités ( $\hbar = c = 1$ )

$$\boxed{\langle r^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{m\omega}} \quad (1.76)$$

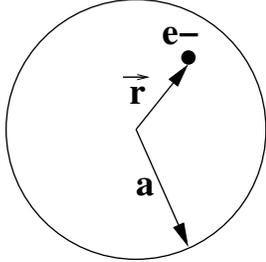
**Application numérique :**

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \frac{3}{2} \frac{(\hbar c)^2}{m c^2 (\hbar \omega)} = \frac{3}{2} \frac{(197 \text{ MeV} \cdot \text{fm})^2}{336 \text{ MeV} \times 550 \text{ MeV}} \\ \sqrt{\langle r^2 \rangle} &= 0.56 \text{ fm}, \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle}_{exp} = 0.87 \text{ fm} \end{aligned} \quad (1.77)$$

- Pourquoi ça ne marche pas bien ? : Le modèle n'est pas consistant,  $m_q = 336 \text{ MeV}$ , alors que les quarks sont confinés dans le volume du nucléon (sphère de 1fm) et possèdent donc une impulsion comparable à leur masse. Il faut une approche relativiste.
- Autre extension nécessaire : Inclure l'interaction spin-spin, génératrice de la structure hyperfine qui explique la différence de masse entre le nucléon et le  $\Delta$ .

### 1.6.4 Polarisabilité d'une répartition de charge :

$e^-$  dans une sphère de rayon  $a$  possédant une répartition de charge uniforme de charge totale  $+e$



Le champ électrique local vu par l'électron s'obtient en appliquant le théorème de Gauss

$$\begin{aligned} \int \vec{E}_{loc} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{er^3}{\epsilon_0 a^3} \\ \vec{E}_{loc} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Soumis à un champ externe  $\vec{E}_{ext}$  constant, le système évolue vers l'équilibre

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \\ -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3} - e\vec{E}_{ext} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{-e\vec{r}}_{\vec{d}} &= \underbrace{4\pi\epsilon_0 a^3}_{\alpha} \vec{E}_{ext} \\ \vec{d} &= \alpha \vec{E}_{ext} \end{aligned} \quad (1.80)$$

$\alpha$  est la polarisabilité électrique, homogène à un volume,  $[\alpha] \equiv [L^3]$ .

Le champ local exerce une force de rappel sur l'électron

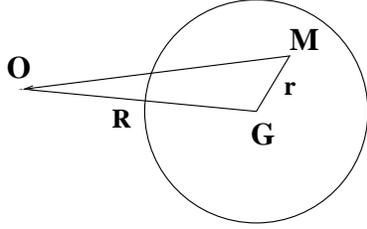
$$\begin{aligned} \vec{F} &= -e\vec{E}_{loc} \\ -m\omega_0^2 &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3} \\ m\omega_0^2 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \end{aligned} \quad (1.81)$$

Soit

$$\boxed{\alpha = \frac{e^2}{m\omega_0^2}} \quad (1.82)$$

### Champ extérieur oscillant :

Sous l'effet d'un champ extérieur  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , l'électron oscille autour du centre de gravité  $G$  de la distribution de charge, toujours supposée indéformable pour l'instant



$$\begin{aligned}\vec{F} &= e \int \vec{E}(\vec{r}, t) d^3r \rho(r) \\ \vec{F} &= e \vec{E} \int d^3r \rho(r) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}\end{aligned}\quad (1.83)$$

On voit apparaître la transformée de Fourier de la distribution de charge (une quantité que nous retrouverons dans le cours 2 sur les facteurs de forme).

On note

$$\begin{aligned}F(k) &= \int d^3r \rho(r) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ F(k) &= 1 - \frac{1}{6} k^2 \langle r^2 \rangle + \dots\end{aligned}\quad (1.84)$$

Le deuxième terme du développement peut s'interpréter comme un effet de retardation dû à l'extension spatiale du système

### Traitement quantique :

Voir par exemple le Cohen Tannoudji p.1270-1271.

L'action du champ extérieur est traité comme une perturbation du système

$$H' = H + W, \quad W = -q \vec{E} \cdot \vec{r} = -q E \cdot Z \quad (1.85)$$

où l'orientation du champ est choisie parallèle à l'axe  $Z$ .

$$|N'\rangle = |N\rangle - q E \sum_{N^*} |N^*\rangle \frac{\langle N^* | Z | N \rangle}{E_N - E_{N^*}} \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned}d_z &= \langle N' | q Z | N' \rangle \\ d_z &= 2q^2 E \sum_{N^*} \frac{|\langle N^* | Z | N \rangle|^2}{E_{N^*} - E_N}\end{aligned}\quad (1.87)$$

D'où l'expression de la polarisabilité

$$\boxed{\alpha = 2q^2 \sum_{N^*} \frac{|\langle N^* | Z | N \rangle|^2}{E_{N^*} - E_N}} \quad (1.88)$$

## Calcul dans le cadre de l'oscillateur harmonique

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \frac{2}{3} e^2 \sum_{N^*} \frac{|\langle N^* | \vec{r} | N \rangle|^2}{E_{N^*} - E_N} \\ \alpha_p &= \frac{2}{3} e^2 \sum_{N^*} \frac{\langle N | \vec{r} | N^* \rangle \langle N^* | \vec{r} | N \rangle}{E_{N^*} - E_N}\end{aligned}\quad (1.89)$$

On cherche à exprimer l'opérateur  $\vec{r}$  à nouveau en fonction d'un commutateur avec l'hamiltonien  $H$ . Appliqué à  $|N\rangle$  et  $|N^*\rangle$ ,  $H$  fera apparaître la différence  $E_{N^*} - E_N$  au numérateur. En insérant la relation de fermeture  $\sum_{N^*} |N^*\rangle \langle N^*| = 1$  le calcul se réduit alors à une simple moyenne sur l'état fondamental :  $\langle N | \dots | N \rangle$ .

Pour l'oscillateur harmonique

$$H = \frac{p^2}{2m} + m \frac{\omega^2}{2} r^2 \quad (1.90)$$

Exprimons le commutateur

$$[H, \vec{p}] = \frac{1}{2m} \underbrace{[p^2, p]}_0 + \frac{m\omega^2}{2} [r^2, \vec{p}] \quad (1.91)$$

D'après le commutateur (1.71)

$$[r^2, p_j] = r_i [r_i, p_j] + [r_i, p_j] r_i = 2i\hbar r_j \quad (1.92)$$

D'où

$$[H, \vec{p}] = i\hbar m \omega^2 \vec{r} \quad (1.93)$$

et

$$\begin{aligned}\langle N^* | \vec{r} | N \rangle &= \langle N^* | [H, \vec{p}] | N \rangle \left( \frac{-i}{\hbar m \omega^2} \right) \\ &= -\frac{i}{\hbar m \omega^2} (E_{N^*} - E_N) \langle N^* | \vec{p} | N \rangle\end{aligned}\quad (1.94)$$

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \frac{2}{3} \left( \frac{-i}{\hbar m \omega^2} \right) e^2 \sum_{N^*} \langle N | \vec{r} | N^* \rangle \langle N^* | \vec{p} | N \rangle \\ \alpha_p &= \frac{2}{3} \left( \frac{-i}{\hbar m \omega^2} \right) e^2 \langle N | \vec{r} \cdot \vec{p} | N \rangle\end{aligned}\quad (1.95)$$

On utilise à nouveau un commutateur avec  $H$ , dont la moyenne sur l'état fondamental sera nulle

$$\begin{aligned}
[p^2, r^2] &= p_k [p_k, r^2] + [p_k, r^2] p_k \\
&= p_k ([p_k, r_i] r_i + r_i [p_k, r_i]) + (\dots) p_k \\
&= -2i\hbar (\vec{p} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{p}) \\
&= -2i\hbar (2\vec{r} \cdot \vec{p} - 3i\hbar), \quad \left( \vec{r} \cdot \vec{p} = \sum_{i=1}^3 r_i \cdot p_i \right)
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle N|[H, r^2]|N \rangle &= \frac{1}{2m} \langle N|[p^2, r^2]|N \rangle = 0 \\
\langle N|2\vec{r} \cdot \vec{p} - 3i\hbar|N \rangle &= 0 \\
\langle N|\vec{r} \cdot \vec{p}|N \rangle &= \frac{3}{2}i\hbar
\end{aligned} \tag{1.97}$$

Finalement, d'après l'eq.(1.95)

$$\boxed{\alpha_p = \frac{e^2}{m\omega^2}} \tag{1.98}$$

ou de manière équivalente en utilisant la relation (1.76)

$$\boxed{\alpha_p = \frac{2e^2 \langle r^2 \rangle}{3\omega}} \tag{1.99}$$

L'application numérique dans les unités usuelles de Gauss ( $e^2 = 1$ ) donne

$$\alpha_{theo}^p = \frac{e^2(\hbar c)^2}{mc^2(\hbar\omega)^2} = \frac{197^2}{336 \times 550^2} = 3.8 \cdot 10^{-4} fm^3 \tag{1.100}$$

À comparer avec la mesure  $\alpha_{exp}^p = 12.0 \pm 0.6 \cdot 10^{-4} fm^3$ .

Nous pouvons estimer de même la polarisabilité magnétique  $\beta$  en supposant que la contribution dominante provient de la transition M1  $N \rightarrow \Delta$  ( $p \rightarrow \Delta^+$ ) pour le proton.

$$\beta = 2 \frac{|\langle N|\mu_z|\Delta \rangle|^2}{M_\Delta - M_N}, \quad \vec{\mu}_z = \sum_{i=1}^3 \mu_i \vec{\sigma}_z, \quad \mu_i = \frac{e_i \hbar}{2m_q} \tag{1.101}$$

où nous avons supposé la symétrie  $SU(3)$ , c'est-à-dire  $m_u = m_d = m_s = m_q$ .

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2}{M_\Delta - M_p} \left| \sum_{i=1}^3 \mu_q \langle N | e_i \sigma_z | \Delta \rangle \right|^2 \\
\beta &= \frac{2}{M_\Delta - M_p} |3\mu_q \langle N | e_3 \sigma_{z_3} | \Delta \rangle|^2 \\
\beta &= \frac{2}{M_\Delta - M_p} \left| 3\mu_q \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle \phi_{MS}^p \chi_{MS}^p + \phi_{MA}^p \chi_{MA}^p | e_3 \sigma_{z_3} | \phi_S^{\Delta+} \chi_S^{\Delta+} \rangle}_X \right|^2 \tag{1.102}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &= \langle \phi_{MS}^p | e_3 | \phi_S^{\Delta+} \rangle \langle \chi_{MS}^p | \sigma_{z_3} | \chi_S^{\Delta+} \rangle \\
&+ \langle \phi_{MA}^p | e_3 | \phi_S^{\Delta+} \rangle \langle \chi_{MA}^p | \sigma_{z_3} | \chi_S^{\Delta+} \rangle \tag{1.103}
\end{aligned}$$

Le deuxième terme est nul par symétrie, il reste

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{\sqrt{6}} \langle u d u + d u u - 2 u u d | e_3 | u u d + u d u + d u u \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \uparrow \downarrow \uparrow + \downarrow \uparrow \uparrow - 2 \uparrow \uparrow \downarrow | \sigma_{z_3} | \uparrow \uparrow \downarrow + \uparrow \downarrow \uparrow + \downarrow \uparrow \uparrow \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \\
X &= \frac{1}{18} \left[ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2\left(-\frac{1}{3}\right) \right] [1 + 1 - 2(-1)] e^2 \\
X &= \frac{4}{9} e^2 \tag{1.104}
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\beta = 2 \frac{e^2 \left| \frac{2\sqrt{2}}{3} \mu_p \right|^2}{M_\Delta - M_p}} \tag{1.105}$$

# Spectroscopie des hadrons

0

## SU(2)

• Représentation fondamentale  $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

• rotation  $\chi' = U\chi$

• conservation norme  $U^\dagger U = 1$   $U = \exp\left[\frac{1}{2}i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right]$

$\sigma_i$  matrices de Pauli:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$J_i = \sigma_i/2$  générateurs  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$

$\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$   $\sigma_+ u = 0$   $\sigma_+ d = u$

1

## Etats à 2 quarks

• qq

$$\begin{array}{l}
 \text{isotriplet } \text{symétrique} \\
 \text{isosinglet } \text{anti-sym.}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 |1,1\rangle = uu \\
 |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) \\
 |1,-1\rangle = dd \\
 |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du) \text{ orthogonal à } |1,0\rangle
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \text{I}^- \\
 \text{orthogonal à } |1,0\rangle
 \end{array}$$

• q $\bar{q}$

$$\begin{array}{l}
 \text{isotriplet} \\
 \text{isosinglet}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} + \bar{d}u) \quad \pi^+ \\
 |1,0\rangle = \frac{1}{2}(d\bar{d} - u\bar{u} + \bar{d}d - \bar{u}u) \quad \pi^0 \\
 |1,-1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} + \bar{u}d) \quad \pi^- \\
 |0,0\rangle = \frac{1}{2}(-u\bar{u} - d\bar{d} + \bar{u}u + \bar{d}d) \quad \eta
 \end{array}
 \right.$$

$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$

## Etats à 3 quarks

$$\begin{array}{l}
 \text{quadruplet } \text{symétrique}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 |3/2, 3/2\rangle = uuu \\
 |3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu) \\
 |3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd) \\
 |3/2, -3/2\rangle = ddd
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \text{I}^- \\
 \Delta^{++} \\
 \Delta^+ \\
 \Delta^0 \\
 \Delta^-
 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{l}
 3 \otimes 2 \\
 \text{mixed } \text{symétrique } (1 \leftrightarrow 2)
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 |1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)u - 2(uu)d] \quad \Phi_{MS}^p \\
 |1/2, -1/2\rangle = \frac{-1}{\sqrt{6}}[(ud + du)d - 2(dd)u] \quad \Phi_{MS}^n
 \end{array}
 \right.$$

---


$$\begin{array}{l}
 1 \otimes 2 \\
 \text{mixed } \text{anti-sym. } (1 \leftrightarrow 2)
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 |1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(ud - du)u] \quad \Phi_{MA}^p \\
 |1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(ud - du)d] \quad \Phi_{MA}^n
 \end{array}
 \right.$$

---


$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{MS}^p + \Phi_{MA}^p) \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{MS}^n + \Phi_{MA}^n) \quad 3$$

# SU(3)

Représentation fondamentale  $\chi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$

8 générateurs  $\lambda_i/2$  où  $\lambda_i$  matrice de Gell Mann

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4

## Diagrammes de poids

SU(2)

Rep. fondamentale (quark): 2

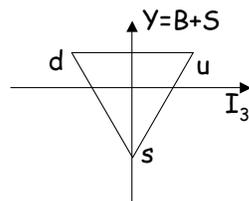
$$\begin{array}{c} \times \quad \times \\ | \quad | \\ \hline d \quad u \end{array} \rightarrow I_3$$

Rep. adjointe (antiquark):  $\bar{2}$

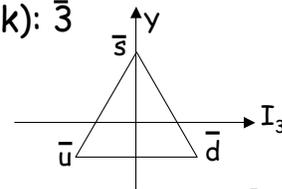
$$\begin{array}{c} \times \quad \times \\ | \quad | \\ \hline -\bar{u} \quad \bar{d} \end{array} \rightarrow I_3$$

SU(3)

rep. fondamentale  
(quark): 3



rep. Conjuguée  
(antiquark):  $\bar{3}$



$2 = \bar{2}!$

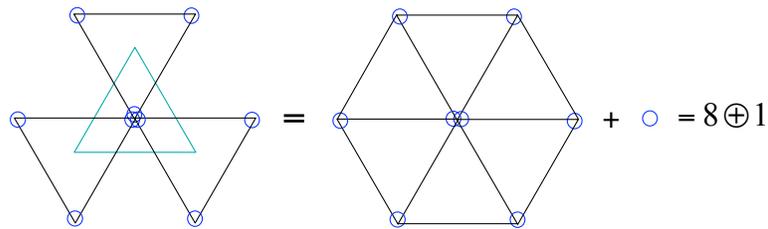
$3 \neq \bar{3}!$

5

# Multiplets $q\bar{q}$ de $SU(3)$

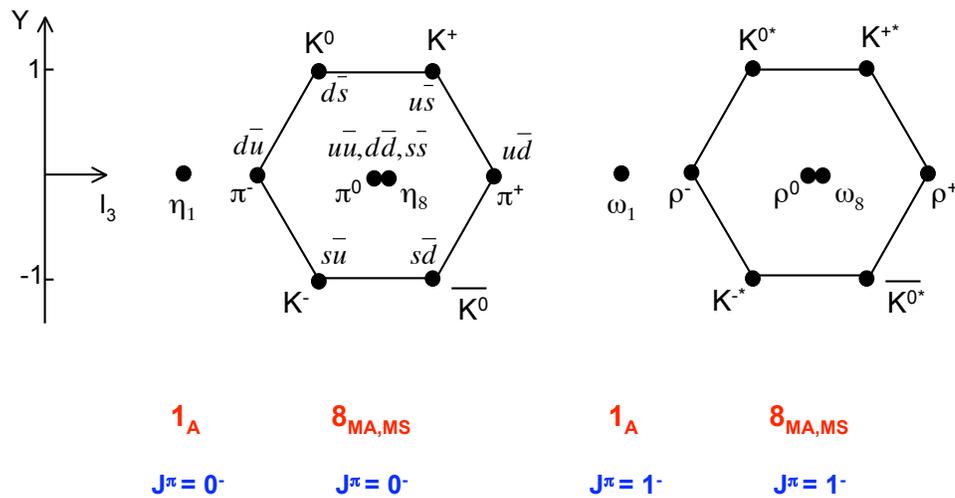
$SU(2)$   $2 \otimes \bar{2} = \begin{array}{c} \circ \text{---} \times \text{---} \circ \\ \times \text{---} \circ \end{array} = 3 \oplus 1$

$SU(3)$   $3 \otimes \bar{3} =$



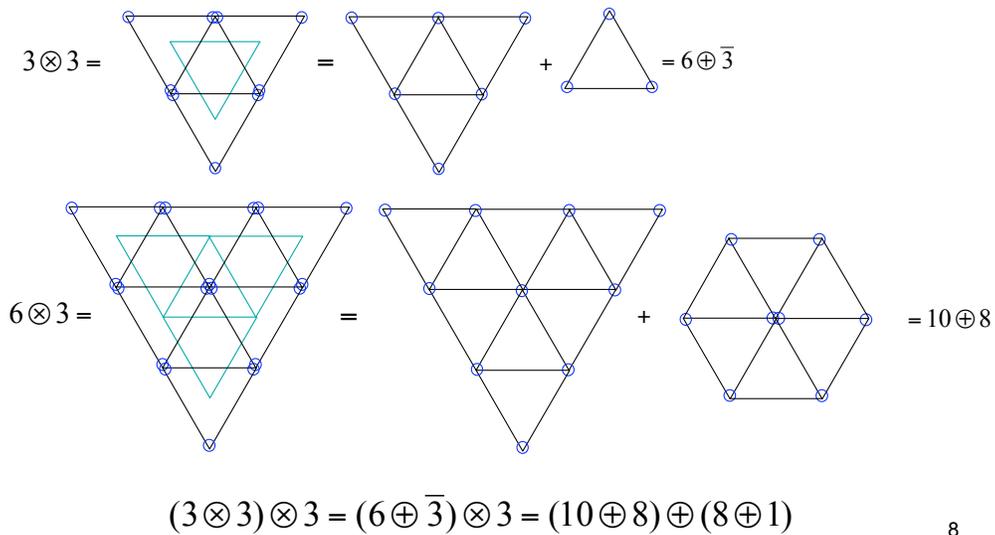
6

# Multiplets $q\bar{q}$ de $SU(3)$

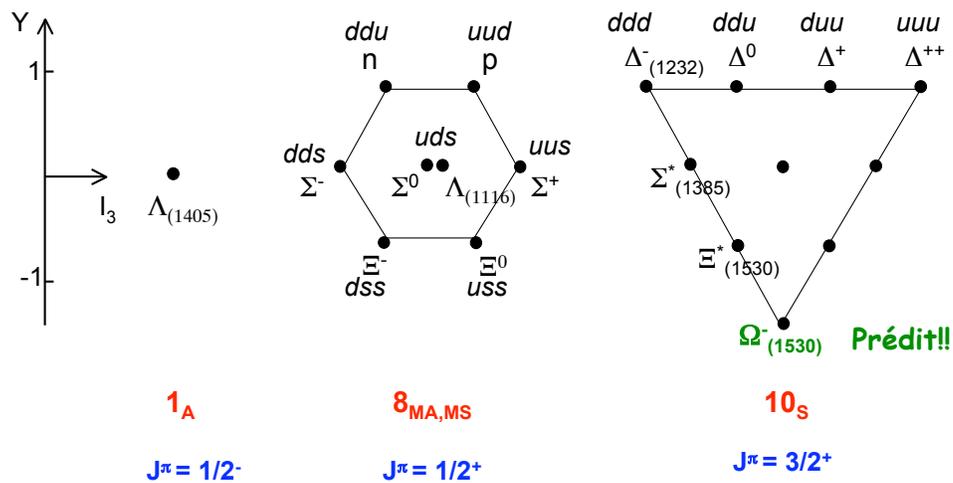


7

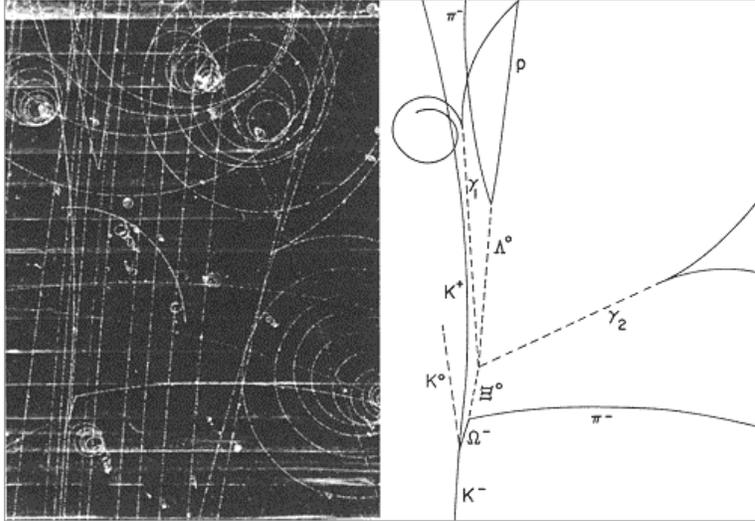
# Multiplets qqq de SU(3)



# Multiplets qqq de SU(3)



# $\Omega^-$



10

## Fonctions d'onde de saveur

### Octet des baryons

	$\Phi_{MS}$	$\Phi_{MA}$
$p$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)u - 2(ud)u]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u$
$n$	$\frac{-1}{\sqrt{6}}[(ud + du)d - 2(dd)u]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d$
$\Sigma^+$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(us + su)u - 2(uu)s]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)u$
$\Sigma^0$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\left[s\left(\frac{du + ud}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{dsu + usd}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(\frac{du + ud}{\sqrt{2}}\right)s\right]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{dsu + usd}{\sqrt{2}}\right) - s\left(\frac{du + ud}{\sqrt{2}}\right)\right]$
$\Sigma^-$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(sd + ds)d - 2(dd)s]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)d$
$\Lambda^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{dsu - usd}{\sqrt{2}} + s\left(\frac{du - ud}{\sqrt{2}}\right)\right]$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\frac{usd - dsu}{\sqrt{2}} + s\left(\frac{du - ud}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(\frac{du - ud}{\sqrt{2}}\right)s\right]$
$\Xi^-$	$\frac{-1}{\sqrt{6}}[(ds + sd)s - 2(ss)d]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)s$
$\Xi^0$	$\frac{-1}{\sqrt{6}}[(us + su)s - 2(ss)u]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)s$

Une phase globale arbitraire puis déterminée par les opérateurs  $I^+, U^+, V^+$  qui permettent de se déplacer dans l'octet

11

$$\Phi_{\text{saveur}} \otimes \chi_{\text{spin}}$$

$\Phi_{\text{saveur}} \backslash \chi_{\text{spin}}$	S	M	A
S	S	M	A
M	M	S,M,A	M

---

56 **S:**  $\Phi_S \chi_S \equiv (10,4)$   
 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{MS} \chi_{MS} + \Phi_{MA} \chi_{MA}) \equiv (8,2)$

---

70 **M<sub>S</sub>:**  $\Phi_S \chi_{MS} \equiv (10,2)$       **M<sub>A</sub>:**  $\Phi_S \chi_{MA} \equiv (10,2)$   
 $\Phi_{MS} \chi_S \equiv (8,4)$        $\Phi_{MA} \chi_S \equiv (8,4)$   
 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\Phi_{MS} \chi_{MS} + \Phi_{MA} \chi_{MA}) \equiv (8,2)$        $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{MS} \chi_{MA} + \Phi_{MA} \chi_{MS}) \equiv (8,2)$   
 $\Phi_A \chi_{MA} \equiv (1,2)$        $\Phi_A \chi_{MS} \equiv (1,2)$

---

20 **A:**  $\Phi_A \chi_S \equiv (1,4)$   
 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{MS} \chi_{MA} - \Phi_{MA} \chi_{MS}) \equiv (8,2)$

---

12

## Etats fondamentaux

$$\underbrace{\Psi_{3q}}_{(A)} = \underbrace{\Psi_{\text{couleur}}}_{(A)} \otimes \underbrace{\Phi_{\text{saveur}}}_{(S)} \otimes \underbrace{\chi_{\text{spin}}}_{(S)} \otimes \underbrace{\varphi_{\text{espace}}}_{(S, \text{parit}\acute{e}+)}$$



---

**S:**  $\Phi_S \chi_S \equiv (10,4)$       Decuplet 3/2<sup>+</sup>  
 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{MS} \chi_{MS} + \Phi_{MA} \chi_{MA}) \equiv (8,2)$       Octet 1/2<sup>+</sup>

---

**Exemples:**

$$\Delta^{++} = u \uparrow u \uparrow u \uparrow$$

$$\Delta^+ = \frac{1}{3}(uud + udu + duu)(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6}(udu + duu - 2uud)(\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow) + \frac{1}{2}(udu - duu)(\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)\right)$$

T	T <sub>z</sub>	S	S <sub>z</sub>
3/2	+3/2	3/2	+3/2
3/2	+1/2	3/2	-1/2
1/2	+1/2	1/2	+1/2

# Fonctions d'onde $q\bar{q}$

Phase globale arbitraire,  
signe relatif déterminé  
par les opérateurs  $I^\pm, U^\pm, V^\pm$ .

**G** parité:

$$G = Ce^{i\pi\frac{\sigma_2}{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{s} \pm \bar{s}u)$	$K^+$	$K^{*+}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{s} \pm \bar{s}d)$	$K^0$	$K^{*0}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{u} \pm \bar{u}s)$	$K^-$	$K^{*-}$
$\frac{-1}{\sqrt{2}}(s\bar{d} \pm \bar{d}s)$	$K^0$	$\overline{K^{*0}}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} \pm \bar{d}u)$	$\pi^+$	$\rho^+$
$\frac{-1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} \pm \bar{u}d)$	$\pi^-$	$\rho^-$
$\frac{1}{2}[(d\bar{d} - u\bar{u}) \pm (\bar{d}d - \bar{u}u)]$	$\pi^0$	$\rho^0$
$\frac{1}{2\sqrt{3}}[(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \pm (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)]$	$\eta_8$	$\omega_8$
$\frac{1}{\sqrt{6}}[(u\bar{u} + d\bar{d} - s\bar{s}) \pm (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)]$	$\eta_1$	$\omega_1$

14

# Mésons dans SU(3)

$$P = (-1)^{L+1}$$

$$C = (-1)^{L+S}$$

L	S	$J^{PC}$		I=1	I=0 ( $n\bar{n}$ )	I=0 ( $s\bar{s}$ )	étrange
0	0	$0^{-+}$	Pseudo - Scalaire	$\pi$	$\eta$	$\eta'$	K
	1	$1^{--}$	Vecteur	$\rho$	$\omega$	$\phi$	$K^*$
1	0	$1^{+-}$	Axial	$b_1$	$h$	$h'$	$K_1$
	1	$0^{++}$	Scalaire	$a_0$	$f_0$	$f_0'$	$K_0^*$
		$1^{++}$	Axial	$a_1$	$f_1$	$f_1'$	$K_1$
		$2^{++}$	Tenseur	$a_2$	$f_2$	$f_2'$	$K_2^*$

$J^{PC}$  interdits  $0^{--}, 1^{-+}, 2^{+-} \Rightarrow$  états exotiques

15

# Au delà du modèle des quarks

## Questions :

- états manquants
- états exotiques
  - ✓ boules de glues  $gg, ggg$
  - ✓ hybrides  $q\bar{q}g$
  - ✓ molécules de mésons  $q\bar{q}q\bar{q}$
  - ✓ pentaquarks  $qqqq\bar{q}$

## Comment identifier les exotiques:

- état qui ne rentrent dans aucun multiplet  
il faut très bien maîtriser le QM  
peut se mélanger avec un état QM de même  $J^{PC}$
- $J^{PC}$  exotiques: méson  $0^{--}, 1^{+-}$
- saveur exotique: baryon  $S=+1$

16

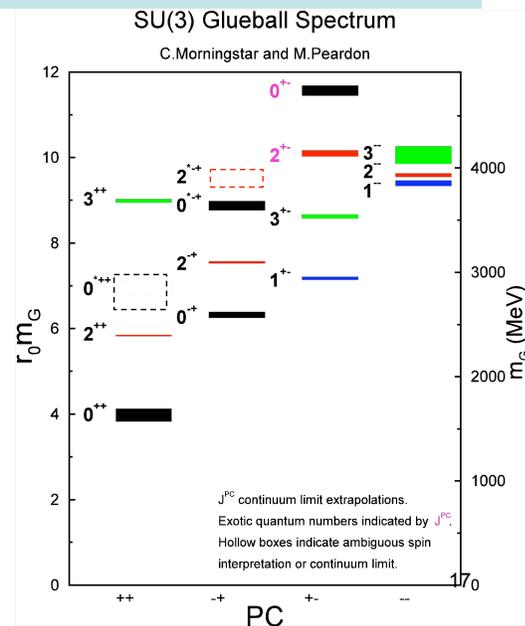
# Les boules de glue

prédiction réseau (quenched)

le + léger  $0^{++} \approx 1.6 \text{ GeV}$

candidat  $f_0(1500)$  ?

1<sup>er</sup>  $J^{PC}$  exotique  $2^{+-}$  à  $4 \text{ GeV}$



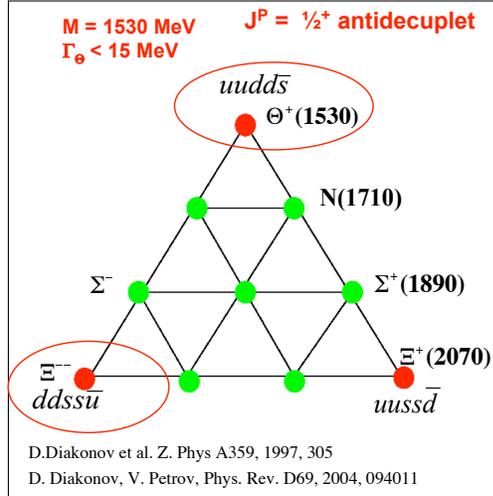
# Les pentaquarks

•Pentaquarks:  $4q+\bar{q}$

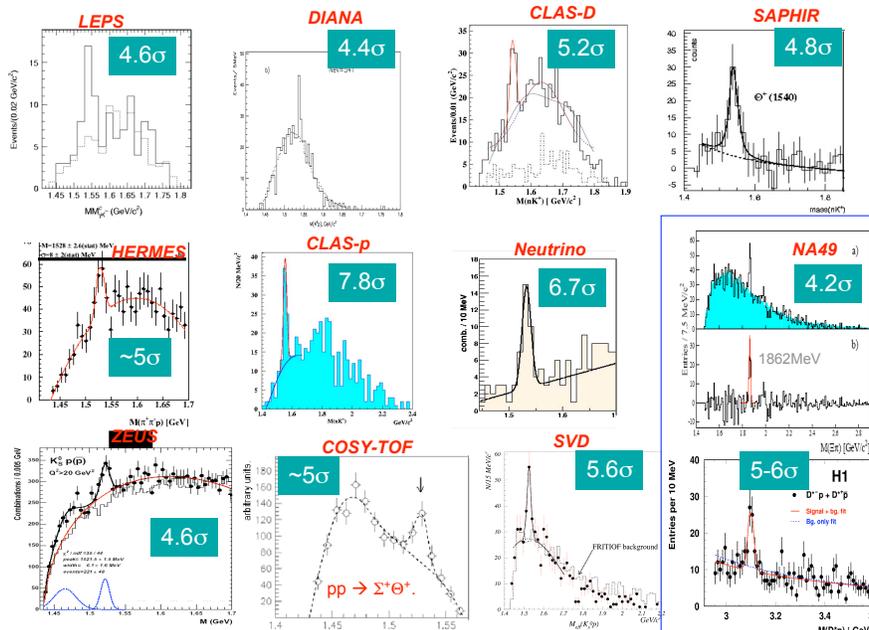
•si  $\bar{q}$  a une saveur différente des  $4q \rightarrow$  nombre quantique de saveur exotique, ex:  $\theta^+=uudd\bar{s} \rightarrow S=+1$

•modèle  $\chi$  Soliton : antidécuplet  $J^P=\frac{1}{2}^+$  avec  $1.5 < m < 2.1 \text{ GeV}$

$\theta^+ \rightarrow K^+n$  ou  $K^0p$



# Les pentaquarks



# Les pentaquarks

- mais beaucoup d'autres expériences ne le voient pas
- masses non compatibles
- section efficaces non compatibles
- # sigma surévalués
- 2 manip dédiées à JLab : rien

⇒ **Le pentaquark est mort**



# Chapitre 2

## Facteurs de forme

Ce cours est dédié à l'étude des facteurs de forme électromagnétiques d'une cible hadronique. Expérimentalement ces observables fondamentales sont accessibles par la mesure de la diffusion élastique d'un lepton chargé. La dépendance des facteurs de forme dans le transfert apporté par cette diffusion nous renseigne sur les distributions de charges et d'aimantation dans le volume de la cible.

### 2.1 Diffusion non relativiste d'une particule de spin 0 sur un potentiel fixe

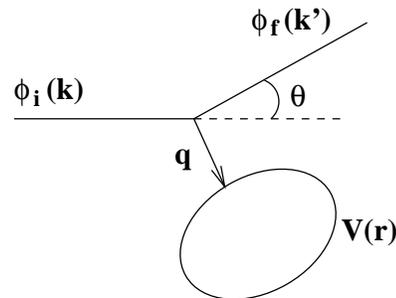
Nous étudions le cas d'école d'une charge électrique ponctuelle et sans spin qui diffuse sur une distribution de charge  $\rho(r)$ .

L'amplitude de transition dans le cadre de la théorie des perturbations non relativiste est donnée par

$$T_{fi} = -i \int d^4r \phi_f^*(r) V(r) \phi_i(r) \quad (2.1)$$

avec les fonctions d'ondes initiale et finale supposées planes  $\phi(r) \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-iEt}$

On se place dans l'approximation de cible statique, correspondant par exemple à un noyau lourd non-perturbé par la diffusion. Le potentiel électromagnétique est donc indépendant du



temps

$$\begin{aligned}
 T_{fi} &= -iV_{fi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t} \\
 T_{fi} &= -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i), \quad V_{fi} = \int d^3r \phi_f^*(\vec{r}) V(r) \phi_i(\vec{r})
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

où nous avons utilisé

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dt = 2\pi\delta(x)} \tag{2.3}$$

La probabilité de transition/unité de temps s'écrit alors

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} \tag{2.4}$$

On considère un temps infini  $T \rightarrow \infty$  car le recul nul de la cible impose  $E_f = E_i$  et  $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ .

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{+T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t}$$

Soit

$$\boxed{W = 2\pi \delta(E_f - E_i) |V_{fi}|^2} \tag{2.5}$$

Cette expression correspond à la règle d'or de Fermi

$$\begin{aligned}
 W(E_f, E_f + dE) &= 2\pi |V_{fi}|^2 \int \rho(E_f) dE_f \delta(E_i - E_f) \\
 W(E_f, E_f + dE) &= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_f)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour obtenir la section efficace il faut sommer sur les états finals dans l'élément  $d^3k'$  et diviser par le flux incident

$$d\sigma \propto \frac{W}{\mathcal{F}} d^3k' \tag{2.7}$$

### Choix de la normalisation des états

Un choix naturel pour normaliser  $\phi$  sur un volume  $V$  est de le prendre homogène à  $\frac{1}{\sqrt{V}}$ . Donc prenons arbitrairement l'onde plane

$$\phi = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \text{ avec } [L] \equiv \text{Longueur} \tag{2.8}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \langle \phi | \phi' \rangle &= N^2 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
 \frac{1}{L^3} \int_V e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d^3r &= \frac{(2\pi)^3}{L^3} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

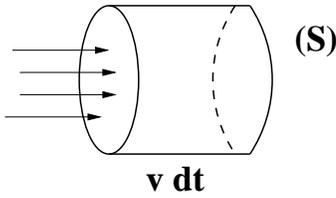
D'où  $N^2 = (2\pi)^3/L^3$ . En utilisant la relation de fermeture

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \int \underbrace{\langle \phi | \phi'' \rangle}_{N^2} d^3 k'' \underbrace{\langle \phi'' | \phi' \rangle}_{N^2} = N^2 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.10)$$

La normalisation de  $d^3 k''$  est donc  $1/N^2$ . L'expression (2.7) de la section efficace devient donc

$$d\sigma = \frac{W}{\mathcal{F}} d^3 k' \frac{L^3}{(2\pi)^3} = \frac{W}{\mathcal{F}} \frac{L^3}{(2\pi)^3} k'^2 dk' d\Omega_{k'} \quad (2.11)$$

Le terme de flux est défini comme le nombre de particules traversant une surface par unité de temps et de surface.



$$\mathcal{F} = \frac{|\phi_i|^2 \times S \times k/E \times dt}{S \times dt}$$

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{1}{L^3} \frac{k}{E}} \quad (2.12)$$

La section efficace s'écrit alors

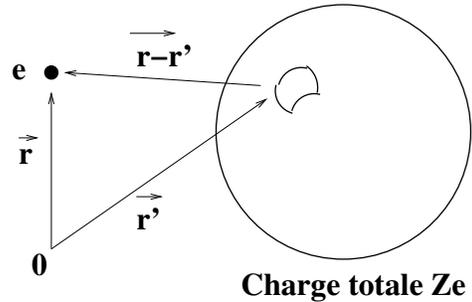
$$\boxed{d\sigma = \frac{L^6}{(2\pi)^3} \frac{E}{k} k'^2 W dk' d\Omega_{k'}} \quad (2.13)$$

Reste à évaluer  $W$  donné par l'expression (2.5), avec

$$V_{fi} = \int d^3 r \phi_f^*(r) V(r) \phi_i(r) \quad (2.14)$$

$V(r)$  est le potentiel coulombien de la distribution de charge, somme de tous les potentiels dus à la charge élémentaire contenue dans l'élément de volume  $d^3 r'$ . En supposant le projectile de charge  $e$

$$V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi} \int \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (2.15)$$



$$V_{fi} = \frac{Ze^2}{4\pi L^3} \int e^{-ik'.r} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik.r} d^3 r d^3 r' \quad (2.16)$$

On réécrit  $\vec{r} = \vec{r}' + (\vec{r} - \vec{r}')$  et on note  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$  le transfert d'impulsion de la diffusion élastique

$$\begin{aligned} V_{fi} &= \frac{Ze^2}{4\pi L^3} \int e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}' + \vec{r} - \vec{r}')} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' d^3(\vec{r} - \vec{r}') \\ V_{fi} &= \frac{Ze^2}{4\pi L^3} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(r') \frac{e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' |\vec{r} - \vec{r}'|^2 d|r - r'| d\cos\theta d\varphi \end{aligned} \quad (2.17)$$

On pose  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  et  $q \equiv |\vec{q}|$ .

$$\begin{aligned} V_{fi} &= 2\pi \frac{Z\alpha}{L^3} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(r') \frac{1}{iq} \left[ e^{iq|\vec{r} - \vec{r}'| \cos\theta} \right]_{\cos\theta=-1}^1 d^3r' d|r - r'| \\ V_{fi} &= 2\pi \frac{Z\alpha}{L^3} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(r') \frac{1}{q} 2 \sin(q|\vec{r} - \vec{r}'|) d^3r' d|r - r'| \end{aligned} \quad (2.18)$$

L'intégrale sur  $|r - r'|$  ne converge pas. Ce problème est relié à la portée infinie de l'interaction électromagnétique. Physiquement, le potentiel  $V(r)$  est **écrané** aux grandes distances par la présence de matière globalement neutre. On modifie donc  $V(r)$  par une fonction convergente

$$V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a}} d^3r' \quad (2.19)$$

où le paramètre  $a$  décrit un rayon d'écrantage, qui pourrait être par exemple le rayon atomique. L'intégrale (2.18) devient alors

$$V_{fi} = \frac{4\pi}{q} \frac{Z\alpha}{L^3} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(\vec{r}') \sin(q|r - r'|) e^{-\frac{|r - r'|}{a}} d^3r' d|r - r'| \quad (2.20)$$

En intégrant deux fois par partie

$$\int_0^{+\infty} \sin(q.x) e^{-\frac{x}{a}} dx = \frac{q}{q^2 + 1/a^2} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \quad (2.21)$$

La limite  $a \rightarrow \infty$  permet de supprimer *a posteriori* la dépendance dans la fonction d'écrantage pour retrouver le potentiel purement coulombien.

Au final  $V_{fi}$  apparaît proportionnelle à la transformée de Fourier de la distribution de charge

$$\begin{aligned} V_{fi} &= 4\pi \frac{Z\alpha}{L^3} \frac{1}{q^2} F(q) \\ \boxed{F(q) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(r') d^3r'} & \end{aligned} \quad (2.22)$$

Donc

$$d\sigma = \frac{L^6}{(2\pi)^3} \frac{E}{k} k'^2 (2\pi) \delta(E_f - E_i) 16\pi^2 \frac{(Z\alpha)^2}{L^6} \frac{1}{q^4} |F(q)|^2 dk' d\Omega_k \quad (2.23)$$

La dépendance dans le choix de normalisation des fonctions d'ondes disparaît, comme attendu. Attention à l'utilisation de la fonction delta

$$\delta(F(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=ai}} \delta(x - ai), \quad f(a_i) = 0 \quad (2.24)$$

Donc

$$\delta(E_f - E_i) = \delta\left(\sqrt{k'^2 + m^2} - \sqrt{k^2 + m^2}\right) = \frac{E}{k} \delta(k - k') \quad (2.25)$$

Au final on obtient

$$d\sigma = \frac{4(Z\alpha)^2}{q^4} E^2 |F(q)|^2 d\Omega_k \quad (2.26)$$

Soit, en utilisant  $q^2 = -4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  dans la limite statique et pour un électron relativiste

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} |F(q)|^2} \quad (2.27)$$

qui est la formule de la **diffusion Rutherford**.

En restant complètement non relativiste, les facteurs  $E/k$  dans le flux et la fonction  $\delta(E_f - E_i)$  deviennent  $m/k$ . D'où

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= 4 \left(\frac{Z\alpha}{q^2}\right)^2 m^2 |F(q)|^2 \\ q^2 &= (\vec{k} - \vec{k}')^2 = -4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{Z\alpha}{4k^4}\right)^2 \frac{m^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} |F(q)|^2, \quad k = mv \end{aligned}$$

qui conduit à la formule classique (voir par exemple le Jackson "Classical Electrodynamics")

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2kv}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} |F(q)|^2} \quad (2.28)$$

## 2.2 Diffusion d'un électron relativiste

La fonction d'onde comprend maintenant un spineur à 4 composantes, solution de l'équation de Dirac.

$$\phi(k) \rightarrow \psi(k) = u e^{ik \cdot r} \quad (2.29)$$

Nous nous plaçons dans le cas où ni le projectile ni la cible ne sont polarisés. Le calcul de la section efficace doit donc comprendre la somme sur les configurations de spin finals et la moyenne sur les configurations de spin initiaux.

L'ajout de spineurs n'affecte pas les intégrales du calcul effectuées pour un spin 0

$$\begin{aligned} V_{fi}^{1/2} &= \int d^3r \psi_f^\dagger(r) V(r) \psi_i(r) \\ V_{fi}^{1/2} &= u_f^\dagger u_i V_{fi}^{(0)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Soit, au niveau de la section efficace :

$$\frac{d\sigma^{1/2}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{spins} \left| u_f^\dagger u_i \right|^2 \frac{d\sigma^0}{d\Omega} \quad (2.31)$$

Par la méthode des traces on trouve (avec la convention de normalisation des  $\phi$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{spins} \left| u_f^\dagger u_i \right|^2 &= \frac{1}{2EE'} [m^2 c^4 + EE'(1 + \cos \theta)] \\ &\simeq \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (Exo) \end{aligned} \quad (2.32)$$

dans la limite statique  $E = E'$  et  $E \gg m$ , vérifiée pour un électron de faisceau accéléré. D'où la formule de la **diffusion Mott**

$$\boxed{\frac{d\sigma^{(1/2)}}{d\Omega} = \left( \frac{Z\alpha}{2E} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} |F(q)|^2} \quad (2.33)$$

Rappel des approximations :

- Statistique : pas de recul de la cible,  $E=E'$ .
  - Approximation de Born : Contribution au 1er ordre seulement du potentiel, équivalent à l'échange d'un seul photon pour les diagrammes de Feynman.
- Ondes planes.

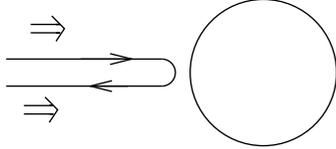
## 2.3 Discussion des sections efficaces de diffusion

### 2.3.1 Pas de structure interne

$$\rho(r) = \delta(r) \rightarrow |F(q)|^2 = 1 \quad (2.34)$$

- Diffusion Rutherford : Divergence à  $\theta = 0$  résolue par l'écrantage à grande distance. Section efficace plate à l'arrière qui a conduit à la découverte du noyau.

- Diffusion Mott :



Le spin empêche de diffuser à  $180^\circ$ . La conservation du moment angulaire total implique un renversement de l'hélicité. Or l'hélicité du projectile est conservée dans la limite de masse nulle ( $E \gg m$ ).

Voir transparent 1.

### 2.3.2 Extension finie du noyau

$$F(q) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (2.35)$$

Supposons une **distribution sphérique**  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ .

$$\begin{aligned} F(q) &= \int e^{i q r \cos \theta} \rho(r) r^2 dr d \cos \theta d \varphi \\ F(q) &= \frac{2\pi}{iq} \int [e^{i q r \cos \theta}]_{-1}^{+1} \rho(r) r dr \\ F(q) &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr) r dr \\ F(q) &= \underbrace{\int_0^\infty 4\pi r^2 \rho(r) dr}_1 - \frac{1}{6} q^2 \underbrace{\int_0^\infty r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr}_{\langle r^2 \rangle} + \mathcal{O}(q^4) \\ F(q) &= 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle + \mathcal{O}(q^4) \end{aligned} \quad (2.36)$$

La pente à l'origine du facteur de forme correspond donc au rayon de charge quadratique moyen qui paramétrise l'extension spatiale de la distribution de charge

$$\boxed{\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF(q)}{dq^2} \right|_{q^2=0}} \quad (2.37)$$

L'hypothèse de distribution sphérique est-elle justifiée ?

Oui : nous ne disposons que du spin  $\frac{1}{2}$  de l'électron incident. Des transitions dipolaires demandent  $\Delta L = 1$ , impossible car viole la parité. Des déformations associées à des  $\Delta L \geq 2$  sont impossibles aussi car pas assez de moment angulaire total disponible dans la réaction.

Le transfert d'impulsion nécessaire pour résoudre la structure du proton est donc

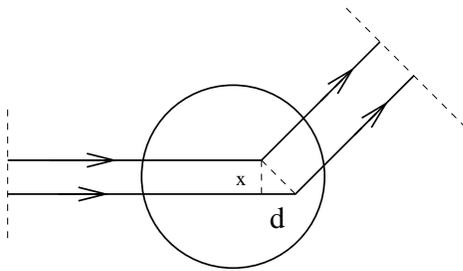
$$[q] \equiv \left[ \frac{\hbar c}{\sqrt{\langle r^2 \rangle}} \right] \equiv \left[ \frac{\hbar c}{\lambda} \right] \quad (2.38)$$

Puisque  $\langle r^2 \rangle \simeq 1$  fm, le transfert d'impulsion doit être de l'ordre de 200 MeV/c, ce qui requiert des faisceaux de quelques 100 MeV.

### 2.3.3 Dépendance de $F(q)$ avec $q^2$

Lorsque  $[q] \gg \left[ \frac{\hbar c}{\sqrt{r^2}} \right]$ , la sonde résout la structure interne et l'on s'attend à ce que les processus inélastiques dominent. Donc  $F(q)$  va décroître avec  $q$  (voir transparent 2).

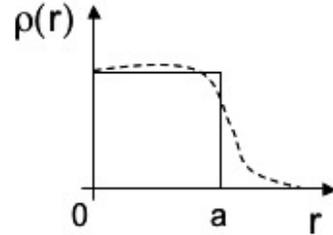
Une autre manière de voir consiste à raisonner sur le déphasage de l'onde électron lors de la diffusion. L'onde incidente diffuse sur un potentiel centré en 0 avec un angle  $\theta$ .



Soit  $d$  la différence de "parcours" des deux contributions représentées : les ondes sont déphasées de  $\delta = 2\pi \frac{d}{\lambda}$ . A faible  $q^2$ ,  $\lambda \gg \sqrt{r^2}$ ,  $\delta \sim 0$  et l'interférence est constructive. A grand  $q^2$  en revanche,  $\delta \neq 0$ , il y a diminution de l'amplitude totale et  $F(q)$  décroît avec  $q^2$ .

En considérant un modèle de sphère uniforme on peut montrer que

$$F(q)_{Sphere} = 3 \frac{\sin(qa) - qa \cos(qa)}{(qa)^3} \quad (2.39)$$



Comparons cette dépendance en  $q$  avec celle des données sur le carbone 12 (voir transparent 3).

- On vérifie bien la décroissance avec  $q^2$ .
- Présence de minima de diffraction comparables à ceux observés en optique.
- L'accord avec les données est meilleur avec une distribution de charge "adoucie", sans discontinuité de la forme. Par exemple

$$\rho(r) = \rho_0 \left( 1 + \alpha \left( \frac{r}{a_0} \right)^2 \right) e^{-\left( \frac{r}{a_0} \right)^2} \quad (2.40)$$

Dans le cas d'un noyau lourd (voir transparent 4), les minima se combent et sont décalés par rapport aux prédictions dans l'approximation de Born. Ceci est dû à la distorsion de l'onde de l'électron par le champ du noyau cible. On ne peut plus décrire la diffusion du lepton chargé avec des ondes planes et l'échange d'un seul photon. Une correction effective, dite approximation d'impulsion effective, consiste à corriger la valeur des impulsions

$$\vec{k} \rightarrow k_e \vec{f} f = \vec{k} \left( 1 + \frac{V_c}{|k|} \right) \quad (2.41)$$

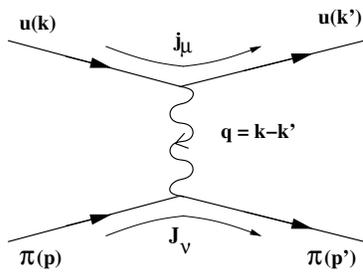
avec le même genre de corrections pour  $\vec{k}'$  et  $\vec{q}$ . L'expression de la section efficace reste la même avec ces impulsions effectives.

Les distributions de charge expérimentales mettent en évidence la saturation de la matière nucléaire (voir transparent 5) c'est-à-dire un volume du noyau proportionnel au nombre de nucléons. D'où la relation

$$\boxed{r_{\text{noyau}} = r_0 A^{1/3} \quad r_0 \approx 1.2(\text{fm})} \quad (2.42)$$

### 2.3.4 Facteur de forme du $\pi$

La diffusion élastique sur une cible hadronique ne peut pas être décrite exactement à partir des degrés de liberté fondamentaux de QCD, les quarks et les gluons. On cherchera donc à exprimer le courant hadronique sous la forme la plus générale possible, construite à partir des variables indépendantes disponibles au vertex et respectant toutes les symétries de l'interaction. Les facteurs devant chaque terme seront les facteurs de forme de la cible.



$$\mathcal{M} = j_\mu \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} J_\nu, \quad j_\mu = -ie \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \quad (2.43)$$

Courant hadronique général

$$J_\nu = (p + p')_\nu F(Q^2) + (p - p')_\nu G(Q^2)$$

La conservation du courant impose

$$\begin{aligned} q^\mu J_\mu &= 0 \\ \underbrace{(M_p^2 - M_{p'}^2)}_0 F(Q^2) - q^2 G(Q^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

D'où  $G(Q^2) = 0$  et

$$\boxed{J_\nu = (p + p')_\nu F(Q^2)} \quad (2.45)$$

On retrouve le cas déjà traité section 2.1 d'une cible sans spin où le facteur de forme vient multiplier le courant d'un boson ponctuel. Dans le cas du méson  $\pi$  la diffusion élastique peut se décrire comme une fluctuation du photon intermédiaire en méson  $\rho$  (compatible avec tous les nombres quantiques). On s'attend alors à un facteur de forme dominé par pôle du  $\rho$

$$F(q^2) = \frac{1}{1 - q^2/M_\rho^2} \quad (2.46)$$

Ce qui est bien vérifié expérimentalement (voir transparents 6, 7, 8).

## 2.4 Description relativiste de la diffusion $ep \rightarrow ep$

$$T_{fi} = -i \int \psi_f^\dagger(x) V(x) \psi_i(x) d^4x \quad (2.47)$$

L'électron libre est décrit par le spineur  $\psi = u(k) e^{-ip \cdot x}$  qui vérifie l'équation de Dirac

$$(\gamma_\mu k^\mu - m) \psi = 0 \quad (2.48)$$

Dans le champ électromagnétique  $A^\mu$  du proton, on obtient une nouvelle équation par la substitution

$$k^\mu \rightarrow k^\mu + eA^\mu \quad (\text{invariance de jauge}) \quad (2.49)$$

L'équation de Dirac devient alors

$$(\gamma_\mu k^\mu - m) \psi = \gamma^0 V \psi \quad (2.50)$$

avec  $\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu$ . (La matrice  $\gamma^0$  devant le potentiel permet de garder une relation de la forme  $(E + \dots)\psi = V\psi$  comme dans l'équation de Schrödinger.

L'équation (2.47) se réécrit alors

$$\begin{aligned} T_{fi} &= ie \int \bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x \\ T_{fi} &= -i \int j_{e\mu} A^\mu d^4x \end{aligned} \quad (2.51)$$

avec  $j_{e\mu} = -e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i$  le courant de l'électron.

En considérant le proton comme la source du champ  $A^\mu$  on peut écrire les équations de Maxwell

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\mu = \square^2 A^\mu = j_p^\mu \quad (2.52)$$

Supposons pour l'instant pour le courant du proton la même expression du courant que pour l'électron

$$j_p^\mu = -e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_i, \quad j_p^\mu = -e \langle \bar{u}_f | \gamma^\mu | u_i \rangle e^{iq \cdot x} \quad (2.53)$$

D'après les deux équations précédentes

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_p^\mu \quad (2.54)$$

et

$$\boxed{T_{fi} = -i \int j_{e\mu} \frac{-1}{q^2} j_p^\mu d^4x} \quad (2.55)$$

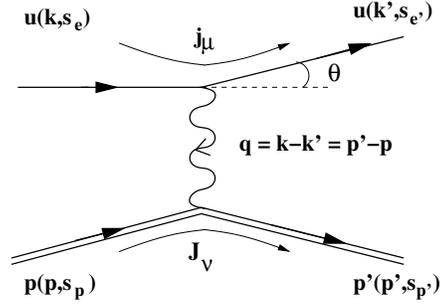
$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^4(k' + p' - k - p) \mathcal{M}$$

avec  $\delta^4()$  = conservation énergie-impulsion issue de l'integration de la dépendance en  $x$  des courants.

On retrouve l'expression de l'amplitude de transition donnée par les règles de Feynman des courants et vertex électromagnétiques

$$-iM^{(ep)} = -j^\mu \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} J^\nu \quad (2.56)$$

Pour une section efficace non polarisée il faut moyenner sur les spins initiaux et sommer sur les spins finals d'où



$$\boxed{|\mathcal{M}^{(e,p)}|^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{s_e, s_e', s_p, s_p'} |\mathcal{M}^{(e,p)}|^2} \quad (2.57)$$

avec

$$j^\mu = ie \bar{u}(k', s_e') \gamma^\mu u(k, s_e) \quad (2.58)$$

et l'écriture la plus générale possible du courant hadronique sous contrainte des symétries de l'interaction

$$J_\mu = -ie \bar{u}(p', s_{p'}) \Gamma_\mu u(p, s_p) \quad (2.59)$$

Avant d'expliciter  $\Gamma_\mu$  examinons l'effet de la normalisation des spineurs sur les termes de la section efficace

$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}} \times |\mathcal{M}^{(e,p)}|^2 \times \underbrace{dQ}_{\text{Espace de phase}} \quad (2.60)$$

D'après l'eq.(2.23), nous savons que le facteur de normalisation des fonctions d'onde disparaît dans l'expression finale de  $d\sigma$ . Cependant ce facteur doit être correctement pris en compte à la fois dans le flux  $\mathcal{F}$  et dans l'espace de phase  $dQ$ .

-Flux :

D'après l'eq.(2.12), le facteur de flux pour 2 particules dans l'état initial de vecteurs vitesse colinéaires  $\vec{k}$  et  $\vec{p}$  est

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{|\psi_i|^2 |\psi_f|^2 \times S \times |\vec{v}_e - \vec{v}_p| dt}{S \times dt} \\ \mathcal{F} &= 2E_e \times 2E_p \times |\vec{v}_e - \vec{v}_p| \quad \left( \frac{1}{L^3} \leftrightarrow 2E \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Donc pour une cible fixe ( $\vec{v}_p = \vec{0}$ ) et un électron relativiste

$$\boxed{\mathcal{F} = 4E_e M_p} \quad (2.62)$$

Exo : Montrer qu'une forme covariante de  $\mathcal{F}$  est  $F = 4\sqrt{(k.p)^2 - m_e^2 M_p^2}$  pour une collision colinéaire.

-Espace de phase :

$$\frac{d^3\vec{p} L^3}{(2\pi)^3} \longrightarrow \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \quad (2.63)$$

$$\boxed{dQ = (2\pi)^4 \delta^4(k' + p' - k - p) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E_{e'}} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \quad (2.64)$$

où la fonction  $\delta$  traduit la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Dans le calcul avec un potentiel statique en début de cours, seule la conservation de E apparaît. En effet, la localisation de la cible dans l'espace brise l'invariance par translation, et donc la conservation de l'impulsion.

Nous avons donc

$$d\sigma = \frac{1}{4E_e M_p} \frac{1}{4} \sum_{\substack{s_e, s_{e'} \\ s_p, s_{p'}}} \left| j^\mu \frac{1}{q^2} J_\mu \right|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k' + p' - k - p) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E_{e'}} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \quad (2.65)$$

### 2.4.1 Courant Hadronique général $J_\mu$

La structure de l'interaction électromagnétique impose un vecteur de lorentz, noté  $v_\mu$ . À partir des quantités cinématiques disponibles au vertex hadronique, les candidats sont :

$$v_\mu = \underbrace{(p + p')}_P{}_\mu, \quad \underbrace{(p' - p)}_q{}_\mu, \quad \gamma_\mu \quad (2.66)$$

$$v_\mu = t_{\mu\nu} w^\nu, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu P^\nu, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu \quad (2.67)$$

À la place des produit de matrices  $\gamma$  on peut utiliser les quantités

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \\ \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

La contraction de  $g_{\mu\nu}$  avec  $P^\nu$  ou  $q^\nu$  renvoie aux termes précédents. D'où seulement deux nouveaux termes indépendants

$$v_\mu = \sigma_{\mu\nu} q^\nu, \quad \sigma_{\mu\nu} P^\nu \quad (2.68)$$

- On montre facilement que toutes les quantités à 3 matrices  $\gamma$  se ramènent à des produits de la forme  $\gamma_5 \gamma_i$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) avec  $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ .
- On peut multiplier tous les vecteurs de Lorentz précédents par une matrice  $\gamma_5$ , ce qui double le nombre de termes généraux de  $J_\mu$  : ( $P_\mu, q_\mu, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} P^\nu, \sigma_{\mu\nu} q^\nu, \gamma_5 P_\mu, \gamma_5 q_\mu \dots$ etc...).

On utilise alors les symétries de l'interaction pour réduire le nombre de termes possibles.

- **Symétrie Parité** : Symétrie fondamentale de QED. Soit  $\mathcal{P}$  l'opérateur parité, réflexion par rapport à l'origine du système de coordonnées. La propriété  $\mathcal{P}^2 = I$  permet d'écrire

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') J_\mu u(p) &= \bar{u}(p') \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P}^{-1} J_\mu \mathcal{P} \mathcal{P} u(p) \\ &= \bar{u}(-\vec{p}') \mathcal{P}^{-1} J_\mu \mathcal{P} u(-\vec{p}) \\ &= \bar{u}(p') \gamma^0 \mathcal{P}^{-1} J_\mu \mathcal{P} \gamma^0 u(p) \end{aligned} \quad (2.69)$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{P}(\bar{u}(p') J_\mu u(p)) = \bar{u}(p') \gamma^0 J^\mu \gamma^0 u(p)} \quad (2.70)$$

où l'on a utilisé le fait que sous  $\mathcal{P}$  les vecteurs changent de signe, d'où l'indice qui passe du bas vers le haut pour le courant hadronique.

Cette relation est vérifiée pour tout le premier groupe de termes de  $J_\mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(q^\mu) &= q_\mu \\ \mathcal{P}(\gamma_\mu) &= \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 = \gamma^\mu \dots \end{aligned} \quad (2.71)$$

En revanche tous les termes comportant une matrice  $\gamma_5$  vont engendrer un changement de signe. Par exemple :

$$\mathcal{P}(\gamma_5 \gamma_\mu) = \gamma^0 \gamma_5 \gamma_\mu \gamma^0 = -\gamma_5 \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 = -\gamma_5 \gamma^\mu \quad (2.72)$$

ces termes ne respectent donc pas la parité. On dit que ce sont des **pseudo-vecteurs** de Lorentz, leur composante énergie change de signe sous  $\mathcal{P}$  alors que leur composante impulsion n'en change pas

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\gamma_5 \gamma^0) &= -\gamma_5 \gamma^0 \\ \mathcal{P}(\gamma_5 \vec{\gamma}) &= +\gamma_5 \vec{\gamma} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Il doivent donc être retirés de l'expression de  $J_\mu$  qui est un vecteur de Lorentz vérifiant

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(J^0) &= +J^0 \\ \mathcal{P}(\vec{J}) &= -\vec{J}\end{aligned}\quad (2.74)$$

Il reste donc :

$$J_\mu = f(P_\mu, q_\mu, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} q^\nu, \sigma_{\mu\nu} P^\nu) \quad (2.75)$$

- **Identité de Gordon** : En utilisant simplement l'équation de Dirac pour  $\bar{u}(p')$  et  $u(p)$  et la relation  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$  on démontre que

$$\bar{u}(p') \sigma_{\mu\nu} P^\nu u(p) = i\bar{u}(p') q_\mu u(p) \quad (2.76)$$

et

$$\boxed{\bar{u}(p') P_\mu u(p) = \bar{u}(p') [-i\sigma_{\mu\nu} q^\nu + 2M_p \gamma_\mu] u(p)} \quad (2.77)$$

Relation connue sous le nom d'identité de Gordon.

- Rq. : En réécrivant l'équation de Gordon on met en évidence l'interaction de l'électron via sa charge + son moment magnétique

$$\underbrace{\bar{u} \gamma_\mu u}_{\text{Courant spin } 1/2} = \bar{u} \frac{1}{2m_e} \left( \underbrace{P_\mu}_{\text{Charge}} + \underbrace{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}_{\sim \vec{\mu} \cdot \vec{B}} \right) u \quad (2.78)$$

Il reste donc seulement trois termes indépendants dans  $J_\mu$

$$J_\mu = a q_\mu + b \gamma_\mu + c \sigma_{\mu\nu} q^\nu \quad (2.79)$$

avec  $a, b, c$  des fonctions de variables complexes.

- **Invariance de jauge** : Une conséquence de l'invariance de jauge de QED est la conservation du courant électromagnétique

$$\boxed{q^\mu J_\mu = 0} \quad (2.80)$$

D'après eq.(2.79) ceci implique directement  $a q^2 = 0$ . Or en diffusion d'électrons relativistes  $q^2 = -4E_e E'_e \sin^2 \frac{\theta}{2} \neq 0$  si  $\theta \neq 0$ . Donc  $a = 0$ .

L'équation de Dirac assure que  $q^\mu \gamma_\mu = 0$  donc pas de contrainte sur  $b$ .

$q^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu$  est toujours nul car  $\sigma_{\mu\nu}$  est anti-symétrique sous l'échange des indices  $\mu \rightarrow \nu$  et  $q^\mu q^\nu$  est symétrique. Donc pas de contrainte sur  $c$ .

Il reste alors

$$J_\mu = b \gamma_\mu + c \sigma_{\mu\nu} q^\nu \quad (2.81)$$

- **Hermiticité** : dernière propriété fondamentale du courant électromagnétique que nous pouvons utiliser

$$\bar{u}(p', s'_p) J_\mu u(p, s_p) = \bar{u}(p', s'_p) J_\mu^\dagger u(p, s_p) \quad (2.82)$$

La contraction du courant avec les deux spineurs étant un nombre, nous pouvons aussi écrire de manière équivalente

$$\bar{u}(p', s'_p) J_\mu u(p, s_p) = [\bar{u}(p, s_p) J_\mu u(p', s'_p)]^* \quad (2.83)$$

Appliqué au terme en  $\gamma_\mu$  nous obtenons :

$$b \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = b^* u^\dagger(p') \gamma_\mu^\dagger \gamma_0^\dagger u(p) \quad (2.84)$$

or  $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ ,  $\gamma_0^2 = I$  et  $\gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu$ . D'où

$$b \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = b^* \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \quad (2.85)$$

$b = b^*$  donc  $b$  est un nombre réel.

Un calcul analogue avec le terme en  $\sigma_{\mu\nu} q^\nu$  conduit à  $c = -c^*$ ,  $c$  est imaginaire pur.

$b$  et  $i c$  peuvent encore être des fonctions d'une variable réelle. Or le seul scalaire disponible au vertex hadronique est

$$(p' - p)^2 = q^2 \quad (p^2 = p'^2 = M^2, p \cdot p' = M^2 - \frac{q^2}{2}) \quad (2.86)$$

Finalement nous pouvons écrire, sans perte de généralité, le courant hadronique électromagnétique comme

$$J_\mu = (-ie) \bar{u}(p') \left[ F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) \frac{i}{2M} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] u(p) \quad (2.87)$$

$F_1$  et  $F_2$  contiennent toute l'information de la structure interne du nucléon en diffusion élastique. Il sont en facteur des termes généraux du courant comme  $F(q)$  était en facteur de  $\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Mott}$  pour une cible sans spin.  $F_1(q^2)$  et  $F_2(q^2)$  sont **les facteurs de forme du nucléon**, dits facteurs de forme de Pauli-Dirac.

Le passage de  $|\vec{q}|$  à  $q^2$  est l'extension logique pour un traitement relativiste avec des quadri-vecteurs.

$F_1$  et  $F_2$  ne se factorisent pas directement devant la section efficace car le courant est plus compliqué et possède 2 termes indépendants (conséquence du spin de l'électron).

De même que pour l'éq.(2.78) la réécriture du courant  $J_\mu$  en utilisant l'identité de Gordon fait plus clairement apparaître les termes d'interaction de la charge et du moment magnétique

$$J_\mu = \frac{-ie}{2Mp} \bar{u}(p') \left[ \underbrace{F_1(q^2)}_{\text{charge } Q} P_\mu + i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \underbrace{(F_1(q^2) + F_2(q^2))}_{\text{moment magn.}\mu} \right] u(p) \quad (2.88)$$

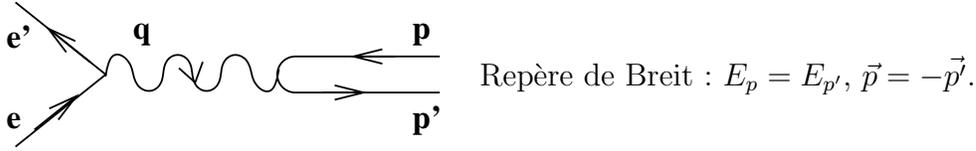
Dans la limite classique,  $q^2 \sim 0$ , le premier terme s'identifie à la charge. Le second terme s'identifie à  $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  avec  $\vec{\mu}$  le moment magnétique du nucléon. On obtient ainsi les normalisations

$$\begin{aligned} F_1(0) &= Q \\ F_2(0) &= \kappa \end{aligned} \quad (2.89)$$

avec  $\mu = (1 + \kappa) \frac{e\hbar}{2M_p}$  et  $\kappa$  moment magnétique anormal.

## 2.4.2 Repère de Breit

Il est intéressant d'écrire  $J_\mu$  dans le repère particulier où le proton rebondi à  $180^\circ$  avec l'impulsion  $\vec{p}' = -\vec{p}$ . Pour se placer dans ce repère il suffit de faire un boost de Lorentz suivant  $\vec{q}$  jusqu'à annuler la composante  $q^0$ .



L'expression (2.87) de  $J_\mu$  peut se réécrire en utilisant l'identité de Gordon :

$$\boxed{J_\mu = (-ie) \bar{u}(p') \left[ \gamma_\mu (F_1 + F_2) - \frac{(p + p')_\mu}{2M_p} F_2 \right] u(p)} \quad (2.90)$$

Exprimons la composante temporelle du courant hadronique

$$\bar{u}(p') J_0 u(p) = (-ie) \bar{u}(p') \left[ \gamma_0 (F_1 + F_2) - \frac{E_p}{M_p} F_2 \right] u(p) \quad (2.91)$$

On montre facilement, dans le repère de Breit

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \gamma_0 u(p) &= \bar{u}(-p) \gamma_0 u(p) = \bar{u}(p) \gamma_0 \gamma_0 u(p) \\ &= \bar{u}(p) u(p) \\ &= 2M_p \delta_{s_p s_{p'}} \end{aligned} \quad (2.92)$$

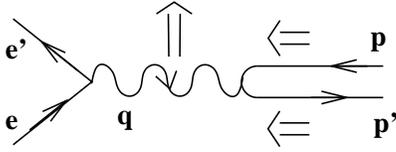
et

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') u(p) &= \bar{u}(p) \gamma_0 u(p) = u^\dagger(p) u(p) \\ &= 2E_p \delta_{s_p s_{p'}} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Nous pouvons alors réécrire eq.(2.91)

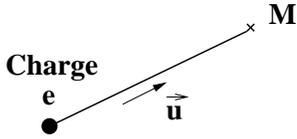
$$\begin{aligned}\bar{u}(p') J_0 u(p) &= (-ie)2M_p \left[ F_1 + F_2 \left(1 - \frac{E_p^2}{M_p^2}\right) \right] \delta_{s_p s_{p'}} \\ \bar{u}(p') J_0 u(p) &= (-ie)2M_p \left[ F_1 + \frac{q^2}{4M_p^2} F_2 \right] \delta_{s_p s_{p'}}\end{aligned}\quad (2.94)$$

où nous avons utilisé  $q^2 = (p' - p)^2 = -4|\vec{p}|^2$  dans le repère de Breit. Cet élément de matrice est non nul si et seulement si le spin du proton ne change pas lors de l'interaction (terme  $\delta_{s_p s_{p'}}$ ). Le photon ayant un spin 1, la conservation du moment angulaire total impose qu'il soit transverse.



L'hélicité du proton change de signe.  
Le spin du proton est transverse donc le **champ électromagnétique est longitudinal.**

Avec les **main**s, la composante longitudinale réfère à la partie électrique du champ



L'interaction Coulombienne est purement longitudinale, suivant  $\vec{u}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{r^2} \vec{u} \quad (2.95)$$

On définit donc le **facteur de forme électrique**

$$G_E = F_1 + \frac{q^2}{4M_p^2} F_2 \quad (2.96)$$

La cinématique de la diffusion d'électrons impose  $q^2 < 0$ , on introduit alors les notations

$$\boxed{Q^2 = -q^2 > 0, \quad \tau = \frac{Q^2}{4M_p^2}} \quad (2.97)$$

D'où

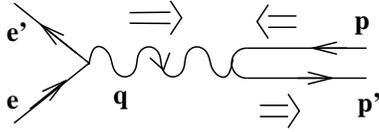
$$\boxed{G_E(Q^2) = F_1(Q^2) - \tau F_2(Q^2)} \quad (2.98)$$

C'est  $G_E(Q^2)$  et non  $F_1(Q^2)$  qui s'interprète comme la transformée de Fourier de la distribution de charge (quoique cette relation soit justifiable à  $Q^2 \ll M_p^2$  seulement, où  $G_E \sim F_1$ ).

Le même exercice avec la partie vecteur du courant implique

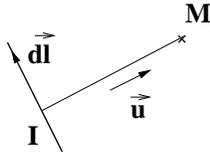
$$\bar{u}(p') \vec{J} u(p) = (-ie) \bar{u}(p') \vec{\gamma} u(p) (F_1 + F_2) \delta_{s_p - s_{p'}} \quad (2.99)$$

qui est non nul cette fois si le spin est renversé (hélicité conservée).



Le spin du photon est nécessairement longitudinal, donc le champ transverse.

**Avec les mains** : la composante transverse du champ réfère à la partie magnétique de l'interaction



Le champ magnétique induit par un courant est transverse, suivant  $d\vec{l} \wedge \vec{u}$

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (2.100)$$

On définit donc le **facteur de forme magnétique**

$$\boxed{G_M(Q^2) = F_1(Q^2) + F_2(Q^2)} \quad (2.101)$$

$G_{E,M}$  sont aussi appelés les **facteurs de forme de Sachs**. D'après eq.(2.89) leur normalisation est

$$\begin{aligned} G_E(0) &= Q && \text{charge du nucléon} \\ G_M(0) &= \mu_N && \text{moment magnétique du nucléon} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Nous verrons que l'utilisation de  $G_{E,M}$  permet de garder cette séparation longitudinale-transverse au niveau de la section efficace.

### 2.4.3 Calcul du taux de transition $|\mathcal{M}^{(e,p)}|^2$

$$\mathcal{M}^{(e,p)} = \frac{1}{4} \sum_{s_e, s_{e'}, s_p, s_{p'}} j^\mu \frac{1}{q^2} J_\mu \quad (2.103)$$

avec

$$\begin{aligned} j^\mu &= (ie) \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \\ J_\mu &= (-ie) \bar{u}(p') \left[ \gamma_\mu (F_1 + F_2) - \frac{(p + p')_\mu}{2Mp} F_2 \right] u(p) \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}^{(e,p)}|^2 &= \frac{1}{q^4} \frac{1}{4} \sum_{s_e, s_{e'}, s_p, s_{p'}} (j^\mu J_\mu) (j^\nu J_\nu)^* \\
|\mathcal{M}^{(e,p)}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.105}$$

NB : 2 indices  $\mu$  et  $\nu$  différents.

Les tenseurs leptonique et hadronique s'écrivent

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_e, s_{e'}} (\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)) (\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k))^* \tag{2.106}$$

et

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_p, s_{p'}} \bar{u}(p') \left[ \gamma_\mu (F_1 + F_2) - \frac{(p + p')_\mu}{2Mp} F_2 \right] u(p) \times (\dots \text{indice } \nu \dots) \tag{2.107}$$

Calcul de  $L^{\mu\nu}$  et  $H^{\mu\nu}$  :

$$\begin{aligned}
[\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k)]^* &\equiv [\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k)]^\dagger \\
&= u^\dagger(k) \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{0\dagger} u(k'), \quad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{0^2} = 1 \\
&= \bar{u}(k) \gamma^\nu u(k'), \quad \gamma^{\nu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0
\end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s_e, s_{e'}} \bar{u}_\alpha(k') \gamma_{\alpha\beta}^\mu \underbrace{u_\beta(k) \bar{u}_\gamma(k)}_{(k+m_e)_{\beta\gamma}} \gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta(k') \\
L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} Tr [(k' + m_e) \gamma^\mu (k + m_e) \gamma^\nu]
\end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\boxed{L^{\mu\nu} = 2 [k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k - k' - m_e^2) g^{\mu\nu}]} \tag{2.110}$$

La même méthode conduit à

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= 2 (F_1 + F_2)^2 [p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - (p' \cdot p - M_p^2) g_{\mu\nu}] \\
&\quad - (F_1 + F_2) F_2 (p + p')_\mu (p + p')_\nu \\
&\quad + \frac{F_2^2}{2M_p^2} (p \cdot p' + M_p^2) (p + p')_\mu (p + p')_\nu
\end{aligned} \tag{2.111}$$

D'où, en négligeant  $m_e^2$  devant les modules des impulsions, et en exprimant les produits scalaires dans le labo

$$L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = 16 M_p^2 E_e E_e' \left[ (F_1^2 + \tau F_2^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau (F_1 + F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \tag{2.112}$$

$$\boxed{L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = 16 M_p^2 E_e E_e' \left[ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]} \tag{2.113}$$

La séparation longitudinale-transverse se traduit par l'absence de termes croisés en  $(G_E G_M)$ .

## 2.4.4 Section efficace de Rosenbluth

En combinant les équations (2.65) et (2.105), la section efficace élastique s'écrit

$$d\sigma = \frac{1}{4E_e M_p} \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(k' + p' - k - p) \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E'_e} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2E'_p}}_{dQ_{lab}} \quad (2.114)$$

$$dQ_{lab} = \frac{1}{8\pi^2} E'_e dE'_e d\Omega_{e'} \frac{d^3\vec{p}'}{2E'_p} \delta^4(k' + p' - k - p) \quad (2.115)$$

La section efficace reste différentielle dans les variables cinématiques mesurées par l'expérience. Les autres variables, non fixées par l'expérience, doivent être intégrées. La situation la plus commune est de détecter l'électron diffusé dans un angle solide  $d\Omega_{e'}$ . Pour absorber les 4 intégrations restantes avec la fonction  $\delta^4(\cdot)$  on utilise l'égalité

$$\int dE'_p 2E'_p \theta(E'_p) \delta(p'^2 - M_p^2) = 1 \quad (2.116)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta(p'^2 - M_p^2) &= \delta(E_p'^2 - \vec{p}'^2 - M_p^2) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{p'^2 - M_p^2}} \left[ \delta\left(E'_p - \sqrt{p'^2 - M_p^2}\right) + \delta\left(E'_p + \sqrt{p'^2 - M_p^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.117)$$

Le terme d'espace de phase peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} dQ_{lab} &= \frac{1}{8\pi^2} E'_e dE'_e d\Omega'_{e'} \int d^3\vec{p}' dE'_p \theta(E'_p) \delta(p'^2 - M_p^2) \delta^4(\cdot) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} E'_e dE'_e d\Omega'_{e'} \delta(p'^2 - M_p^2) \end{aligned} \quad (2.118)$$

or

$$\begin{aligned} p'^2 - M_p^2 &= f(E'_e) = (p + q)^2 - M_p^2 = 2p \cdot q + q^2 \\ &\stackrel{labo}{=} 2M_p(E_e - E'_e) - 4E_e E'_e \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 2M_p A \left( \frac{E_e}{A} - E'_e \right), \quad A = 1 + \frac{2E}{M_p} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} dQ_{lab} &= \frac{1}{8\pi^2} E'_e dE'_e d\Omega'_{e'} \frac{1}{2M_p A} \delta\left(E'_e - \frac{E_e}{A}\right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2 M_p} \frac{E_e}{A^2} \end{aligned}$$

$$dQ_{lab} = \frac{1}{16\pi^2 M_p} \frac{E_e'^2}{A^2} d\Omega_e' \quad (2.120)$$

En regroupant le produit de tenseurs (2.113) et l'espace de phase (2.120) dans l'expression (2.114) de la section efficace

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e'} = \frac{1}{4E_e M_p} \frac{e^4}{q^4} 16M_p^2 E_e E_e' \left[ \dots \cos^2 \frac{\theta}{2} + \dots \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{1}{16\pi^2 M_p} \frac{E_e'^2}{E_e} \quad (2.121)$$

On obtient la formule de Rosenbluth

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e'} = \underbrace{\left( \frac{\alpha}{2E_e} \right)^2}_{\text{Rutherford}} \underbrace{\frac{1}{\sin^4 \theta/2} \frac{E_e'}{E_e}}_{\text{Recul}} \left[ \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2(Q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.122)$$

La dépendance angulaire différente des contributions électrique et magnétique permet de les séparer expérimentalement par des mesures à angles de diffusion et énergie de faisceau variables mais à  $Q^2$  constant. Cette séparation est dite de "Rosenbluth" (voir transparent 9). Dans la limite statique  $E_e' = E_e$  et  $Q^2 \sim 0$ , l'expression (2.122) tend bien vers la formule de la diffusion Mott sur un potentiel statique

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e'} \sim \left( \frac{\alpha}{2E_e} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} G_E^2(Q^2) \quad (2.123)$$

## 2.5 Résultats expérimentaux

### 2.5.1 Rayon quadratique moyen à bas $Q^2$ ( $Q^2 \ll M_p^2$ )

D'après la définition (2.37) de rayon quadratique moyen de la distribution de charge

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dG_E}{dQ^2} \right|_{Q^2=0} \quad (2.124)$$

Expérimentalement on peut utiliser la cinématique inverse, nucléon sur électron "fixe" atomique, qui limite  $Q^2$  à de très faibles valeurs. Ceci est particulièrement avantageux pour le neutron dont on ne possède pas de cible fixe pure et stable. Les "cibles de neutron" les plus utilisées sont les noyaux de deutérium ou d'hélium 3, qui minimisent la contribution des corrections nucléaires nécessaires pour se ramener au cas du neutron libre.

Au fait, pourquoi ne pas prendre  $F_1(Q_2)$  dans la définition de  $\langle r^2 \rangle$  plutôt que  $G_E(Q^2)$  puisque ces deux facteurs de forme doivent être équivalents à bas  $Q^2$  ?

Comparons les deux :

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle^{Sachs} &= -6 \left. \frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0} \\ \langle r^2 \rangle^{Dirac} &= -6 \left. \frac{dF_1(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}\end{aligned}\quad (2.125)$$

Puisque

$$G_E(Q^2) = F_1(Q^2) - \frac{Q^2}{4M_N^2} F_2(Q^2) \quad (2.126)$$

Les deux définitions de rayon de charge sont reliées par

$$\langle r^2 \rangle^{Sachs} = \langle r^2 \rangle^{Dirac} + \underbrace{\frac{3}{2} \kappa_N \frac{(\hbar c)^2}{M_N^2 c^4}}_{\text{terme de Foldy}} \quad (2.127)$$

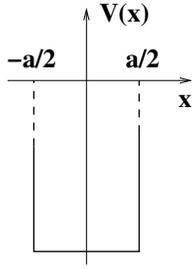
Résultats des mesures :

	$\langle r^2 \rangle^{Sachs}$ ( $fm^2$ )	$\langle r^2 \rangle^{Dirac}$ ( $fm^2$ )	Foldy ( $fm^2$ )	$\mu_N$ ( $\mu_B$ )
Proton	0.875	0.690	0.185	2.79
Neutron	-0.119	0.007	-0.126	-1.91

Voir transparent 10.

Le grand moment magnétique du nucléon amplifie l'effet du terme de Foldy qui contribue pour  $\sim 25\%$  de  $(r_p^2)^{Sachs}$  (l'effet relatif est encore plus grand sur le neutron mais celui-ci a son rayon contraint par la charge globale nulle). Ceci traduit le fait que même à bas ( $Q^2$ ), l'interprétation des facteurs de forme en T.F. des distributions de charges n'est pas sans ambiguïté pour le nucléon.

La situation peut s'illustrer de la manière suivante : on se place à  $Q^2 \ll M_N^2$  de manière à pouvoir négliger le recul de la cible et se ramener au cas d'une distribution de charge statique, pour laquelle nous avons montré que les facteurs de forme sont effectivement les transformées de Fourier des distributions de charges. Cela revient à dire que le nucléon est **localisé** avec une précision bien meilleure que sa taille. Pour illustrer les conséquences de cette localisation en physique quantique plaçons le nucléon dans un puits de potentiel infiniment profond.



Localiser le nucléon revient à réduire  $a \ll \sqrt{\langle r^2 \rangle}$  soit  $a \ll 1 fm$ . Or l'énergie du niveau fondamental dans un tel puits vaut  $E = \pi^2(\hbar c)^2/2M_N c^2 a^2$  et lorsque  $a \lesssim 0.33 fm$ ,  $E \gtrsim 2M_N c^2$ .

On devient donc sensible aux oscillations nucléon $\leftrightarrow$  antinucléon, et localiser le nucléon plus précisément est illusoire. Ce phénomène est appelé "Zitterbewegung" (E. Schrödinger, 1930). Ce raisonnement permet de donner une justification physique au fait que le facteur d'échelle qui apparaît dans le terme de Foldy soit **la longueur d'onde Compton du nucléon**,  $\lambda_c = \frac{\hbar c}{M_N c^2} = 0.21 fm$ .

Cette ambiguïté dans le rayon de charge n'affecte en rien l'importance fondamentale des facteurs de forme. Il faut simplement accepter qu'il existe plusieurs définitions et conserver le même choix pour tous les calculs et applications pour être cohérent.

### 2.5.2 $Q^2$ intermédiaires ( $Q^2 \sim M_N^2$ )

Les résultats expérimentaux mettent en évidence une forme essentiellement dipolaire  $G_D$ , identique pour les facteurs de forme électrique et magnétique

$$\begin{aligned} \text{Proton :} & \quad G_E^p \simeq G_D, \quad G_M^p \simeq \mu_n G_D \\ \text{Neutron :} & \quad \underbrace{G_E^n \simeq \frac{-\mu_n \tau}{1 + \lambda_n \tau} G_D}_{\text{Paramétrisation de Galster}}, \quad G_M^n \simeq \mu_n G_D \end{aligned}$$

avec

$$G_D = \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{0.71}\right)^2} \quad (2.128)$$

Cette dépendance en  $Q^2$  s'interprète physiquement comme la présence d'un pôle effectif double dans la région temps ( $Q^2 = -q^2 < 0$ ). C'est l'effet dominant de tous les pôles "vus" depuis la région espace

$$F(Q^2) = \sum_i \frac{C_i}{1 + \frac{Q^2}{M_i^2}} \quad (2.129)$$

Il n'y a bien sur aucune raison pour que les facteurs de forme du nucléon suivent exactement une forme dipolaire, et nous verrons que les données récentes montrent effectivement une nette déviation.

L'interprétation en terme de transformée de Fourier conduit à une distribution de charge

exponentielle, piquée à l'origine (non dérivable), peu physique.  
 Voir transparents 11 à 13.

## 2.6 Grand $Q^2$ ( $Q^2 \gtrsim M_p^2$ )

La dominance de  $G_M$  à grand transfert limite la précision de la méthode de Rosenbluth. L'extraction de  $G_E$  utilise alors des rapports d'asymétries mesurés avec cible et faisceau polarisés. Une série d'expériences récentes permet d'atteindre par cette méthode une bonne précision sur le rapport  $\frac{G_E^p}{G_M^p}$  à grand  $Q^2$ . Or  $G_M^p$  est déjà connu avec Rosenbluth, ce rapport est donc une mesure de  $G_E^p$ . Une forte déviation par rapport à la forme dipolaire est finalement observée pour les deux facteurs de forme avec une chute plus rapide de  $G_E$  par rapport à  $G_M$ .

À très grand  $Q^2$  on pourrait s'attendre à atteindre un régime où les prédictions de pQCD sont valides et pouvoir tester entre autre des lois de scaling pour le rapport :  $F_2/F_1 \sim 1/Q^2$ . Ce scaling n'est pas encore observé aux transferts de  $5 \text{ GeV}/c^2$  atteint actuellement pour la séparation des deux facteurs de forme et la limite d'instauration de ce scaling n'est pas prédite par QCD. Nous verrons dans le cours 3 sur la diffusion profondément inélastique que des prédictions de QCD perturbative se réalisent pourtant à des transferts comparables voire plus bas. La difficulté supplémentaire de la diffusion élastique est d'imposer un proton dans l'état final qui demande de transmettre le transfert à tous les constituants, ce qui implique plusieurs échanges de gluons et éloigne le domaine de validité de pQCD vers les plus hautes énergies.

Voir transparents 14 à 21.

## 2.7 Exemple de mesure de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , appareillage

On prend l'exemple des spectromètre de haute résolution du hall A à Jefferson Laboratory (Virginie). Le taux de comptage des électrons diffusés élastiquement est donné par

$$N_{\text{exp}} = \mathcal{L} \frac{d\sigma}{d\Omega} \times d\Omega \quad (2.130)$$

avec  $d\Omega$  l'angle solide du détecteur et  $\mathcal{L}$  la luminosité

$$\mathcal{L} = \frac{I}{e} t \frac{\rho \mathcal{N} \ell}{A} \quad (2.131)$$

avec  $I$  courant faisceau (A),  $A$  masse molaire ( $g.mol^{-1}$ ),  $t$  temps de mesure,  $\rho$  densité de cible ( $g.cm^{-3}$ ),  $\mathcal{N}$  nb. d'Avogadro ( $mol^{-1}$ ),  $\ell$  longueur cible (m).

Les mesures sur cible fixe atteignent typiquement :  $\mathcal{L} = 10^{36} - 10^{38} cm^{-2}s^{-1}$  ( $10^{31}$  à  $10^{34}$  pour les collisionneurs).

La cinématique élastique est séparée des autres processus par une optique magnétique du type "QQDQ" (quadruples+dipôle, voir transparent 22).

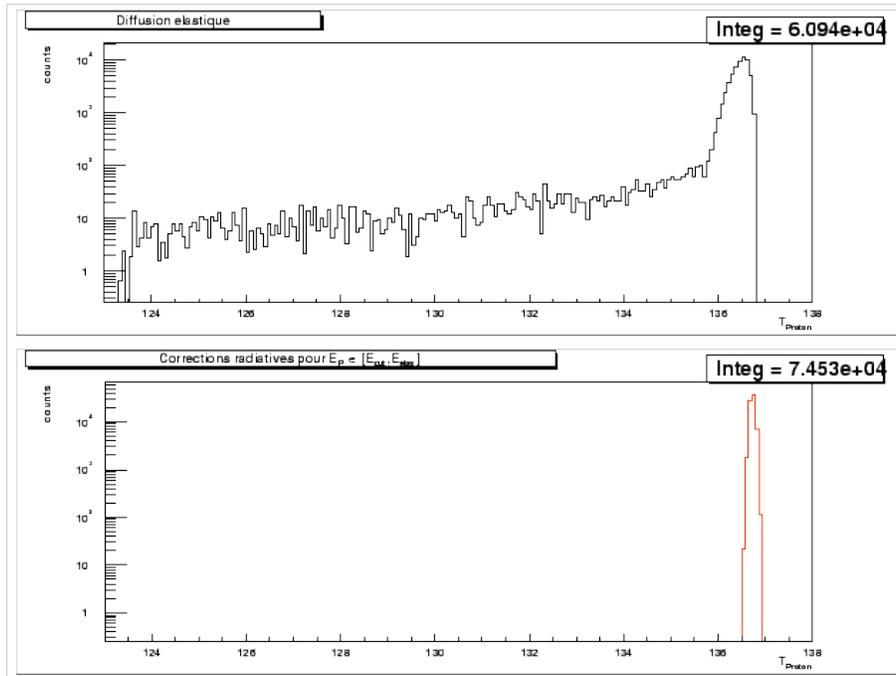


FIG. 2.1 – Illustration de la queue radiative dans la diffusion élastique d'électrons. Spectre expérimental en haut, corrigé en bas.

À  $\theta$  fixé, la distribution prédite de  $E'_e$  est une fonction de Dirac ( $E' = E/(1 + \frac{2E}{M_p} \sin^2 \theta/2)$ ). Un spectre expérimental, illustré figure 2.1, est en premier lieu convolué par la résolution expérimentale. Un élargissement supplémentaire vers les bas  $E'_e$  est introduit par la possibilité de rayonnement de photons par les électrons, qui subissent une accélération durant le processus de diffusion. Cet effet des diagrammes d'ordre supérieur en  $\alpha$  est calculable dans le cadre de QED. Les corrections permettant d'extraire la section efficace à l'ordre en arbre ( $d\sigma/d\Omega_{Born}$ ) sont appelées les corrections radiatives. Elles atteignent typiquement 20% pour la diffusion élastique, leur maîtrise est donc capitale pour des mesures de haute précision.

## 2.8 Les "Facteurs de forme de quarks"

L'idée consiste à interpréter les Facteurs de forme  $G_{E,M}^\gamma$  électromagnétiques du nucléon comme la résultante de toutes les distributions de particules chargées présentes dans le nucléon. Au-delà des quarks de valence  $u$  et  $d$ , les fluctuations quantiques peuvent à priori faire intervenir tous les fermions chargés. Cependant, dans le domaine non perturbatif de QCD,

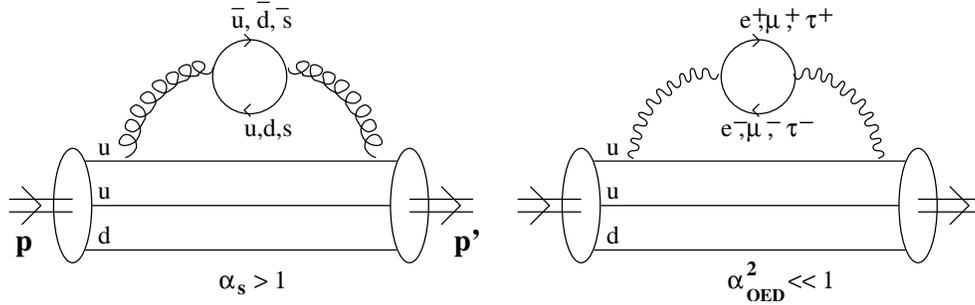


FIG. 2.2 – Particules chargées intervenant dans la structure du nucléon : états de valence et mer de fluctuations quantiques  $q\bar{q}$  ou lepton/antileptons.

l'échange de gluons et les fluctuations  $q\bar{q}$ , dominant. Nous écrivons donc

$$G_{E,M}^{\gamma,P} = \sum_{i=u,d,\dots} Q_i G_{E,M}^{\gamma,q_i} \quad (2.132)$$

(même eq. pour électrique ou magnétique).

Le facteur de pondération  $Q_i$  est nécessairement la charge du quark  $q_i$  associée à la sonde utilisée pour étudier le nucléon. Ici la sonde est électromagnétique,  $Q_i$  est donc la charge électrique du quark  $q_i$ .

En se limitant aux deux premiers saveurs de quarks nous avons

$$G_{E,M}^{\gamma,P} = \frac{2}{3}G_{E,M}^u - \frac{1}{3}G_{E,M}^d \quad (2.133)$$

L'état de valence ( $uud$ ) du proton impose

$$G_E^u(0) = 2, \quad G_E^d(0) = 1 \quad (2.134)$$

$G_{E,M}^u$  représente en fait la contribution "nette" des quark  $u$ , c'est à dire celle des quarks  $u$  moins celle des quarks  $\bar{u}$ . Nous pourrions écrire explicitement  $\frac{2}{3}(G_{E,M}^u - G_{E,M}^{\bar{u}})$ , mais cela ne fait que multiplier le nombre d'inconnues sans espoir de pouvoir séparer  $u$  et  $\bar{u}$  puisque le couplage électromagnétique ne fera toujours intervenir que leur différence.

En revanche nous pouvons utiliser les mesures complémentaires sur le neutron pour séparer  $u$  et  $d$

$$G_{E,M}^{\gamma,n} = \frac{2}{3}G_{E,M}^{u(n)} - \frac{1}{3}G_{E,M}^{d(n)} \quad (2.135)$$

En invoquant la symétrie de charge, rotation d'isospin de  $\pi$  autour de l'axe 2 ( $e^{i\pi\tau_2}$ ), qui échange  $u \leftrightarrow d$

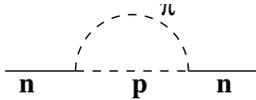
$$\begin{aligned} G_{E,M}^{u(n)} &= G_{E,M}^{d(p)} = G_{E,M}^d \\ G_{E,M}^{d(n)} &= G_{E,M}^{u(p)} = G_{E,M}^u \end{aligned} \quad (2.136)$$

Nous obtenons alors un système  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} G_{E,M}^{\gamma,p} &= \frac{2}{3}G_{E,M}^u - \frac{1}{3}G_{E,M}^d \\ G_{E,M}^{\gamma,n} &= \frac{2}{3}G_{E,M}^d - \frac{1}{3}G_{E,M}^u \end{aligned} \quad (2.137)$$

trivial à inverser.

Nous pouvons ainsi mettre en évidence l'oscillation de charge dans le neutron, positif à petit  $r$ , négatif à grand  $r$  (voir transparents 23, 24). Cette répartition est compatible avec le rayon de charge expérimental mesuré négatif  $\langle r^2 \rangle_n = -0.117 fm^2$ .



L'image intuitive du neutron qui émerge de cette étude est celle d'un "cœur" positif de proton entouré d'un "nuage" de pions négatifs

Nous avons vu que l'interprétation des Facteurs de forme en terme de transformées de Fourier des distributions de charges et d'aimantation était limitée aux très faibles transferts  $Q^2 \ll M_N^2$  et conduisait même pour le nucléon à une définition non unique du rayon de charge (longueur compton  $\lambda c$  comparable à sa "taille").

Une meilleure interprétation consiste à voir les Facteurs de forme comme la "probabilité" que le nucléon reste un nucléon après l'interaction avec la sonde. Par exemple à grand  $Q^2$  la diffusion élastique sélectionne une fonction d'onde très compacte du nucléon. Le fait que les facteurs de forme soient petits à grands  $Q^2$  indique que cette composante compacte ne représente qu'une faible partie de la fonction du nucléon au repos.

La même approche reste valable pour toute diffusion élastique. Voyons donc ce que nous pouvons tirer du courant faible neutre.

## 2.9 La sonde faible du nucléon

### 2.9.1 Diffusion élastique

Une conséquence importante de l'unification électrofaible est l'interférence du courant neutre faible avec tout processus électromagnétique. Estimons l'ordre de grandeur de chaque amplitude dans la diffusion élastique  $ep$  à partir des constantes de couplage et des propagateurs

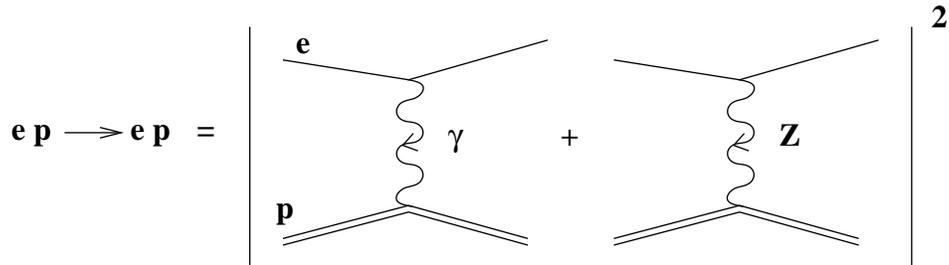


FIG. 2.3 – Interférence des amplitudes électromagnétique et faible dans la diffusion  $ep$

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z|^2 = |\mathcal{M}_\gamma|^2 + 2\Re(\mathcal{M}_\gamma \mathcal{M}_Z^*) + |\mathcal{M}_Z|^2 \\
 &\qquad\qquad\qquad \left(\frac{\alpha}{Q^2}\right)^2 \qquad \left(\frac{\alpha}{Q^2}\right) G_F \qquad G_F^2 \qquad (2.138) \\
 Q^2 = 0.1(GeV/c)^2 & \quad : \quad [1] \qquad [3 \cdot 10^{-3}] \qquad [2.5 \cdot 10^{-6}]
 \end{aligned}$$

On ne peut atteindre la contribution du  $Z$  par une mesure absolue de section efficace (1% de précision expérimentale au mieux, comparé à un effet recherché de  $3 \cdot 10^{-3}$ ...).

On utilise donc une propriété spécifique de l'interaction faible pour l'isoler : **la violation de parité**.

Rq. : A  $Q^2 \ll M_Z^2$ , l'interaction faible se réduit à une interaction de contact de couplage  $G_F$ , la constante de Fermi

$$\frac{g^2}{Q^2 + M_Z^2} \xrightarrow{Q^2 \ll M_Z^2} G_F \qquad (2.139)$$

### 2.9.2 Symétrie de parité

La symétrie parité est définie comme réflexion par rapport à l'origine du repère 0. La physique étant invariante par rotation, la symétrie de parité est équivalente à "l'image dans un miroir".

QED, QCD, la gravité respectent la parité. Cette symétrie est intuitive, le monde vu dans un miroir paraît tout à fait réel. On peut définir différentes classes de quantités physiques suivant leur comportement sous la symétrie  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
\text{vecteurs} : \quad \mathcal{P}(\vec{u}) &= -\vec{u} & (\vec{r}, \vec{p}, \vec{v}, \dots) \\
\text{scalaires} : \quad \mathcal{P}(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= +\vec{u} \cdot \vec{v} & (M, E, \dots) \\
\text{pseudo-vecteurs} : \quad \mathcal{P}(\vec{u} \wedge \vec{v}) &= +\vec{u} \wedge \vec{v} & (\vec{L}, \vec{S}, \vec{B}, \dots) \\
\text{pseudo-scalaires} : \quad \mathcal{P}(\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}) &= -\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} & (h = \vec{s} \cdot \vec{p})
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Tous les processus gouvernés par QED, QCD et la gravité ne donnent au final que des mesures de nombres scalaires. Si l'on mesure une quantité  $A$  pseudo-scalaire, la symétrie de parité impose  $\mathcal{P}(A) = A$  or  $\mathcal{P}(A) = -A$  (pseudo-scalaire) donc  $A = 0$ . Une quantité pseudo-scalaire non nulle nécessite donc une violation de la symétrie parité dans le processus physique étudié.

La violation de parité est mise en évidence expérimentalement par Mme Wu en 1957 via la décroissance d'atome de  $^{60}\text{Co}$  polarisés (voir transparents 25, 26). Cette expérience fut suggérée par T.D. Lee et C. L. Young en 1956 qui soupçonnaient une violation de  $\mathcal{P}$  dans les désintégrations des kaons : deux modes de décroissance sont observés, en 2 et 3 pions, de parité opposée.

### 2.9.3 Expérience de Mme Wu

On introduit un pseudo-vecteur dans l'expérience : la polarisation des atomes de Cobalt. L'opération de parité revient à retourner ce pseudo-vecteur sans rien changer par ailleurs

$$\begin{array}{ccccc}
\vec{r} & & -\vec{r} & & \vec{r} \\
\vec{p} & \xrightarrow{\mathcal{P}} & -\vec{p} & \xrightarrow{180^\circ} & \vec{p} \\
\vec{J} & & \vec{J} & & -\vec{J}
\end{array} \tag{2.141}$$

La physique étant invariante par rotation, la symétrie parité équivaut bien au simple renversement du spin.

La quantité mesurée est le taux de comptage des électrons émis suivant  $\vec{H}$  ou  $-\vec{H}$ . Si une différence est observée, elle est sensible à  $\vec{P}_e \cdot \vec{H}$  qui est une quantité pseudo-scalaire.

Une différence est observée.

La désintégration  $\beta$  viole la parité.

La violation de  $\mathcal{P}$  est maximale, l'électron est toujours émis dans la direction opposée au spin du noyau.

Ces résultats sont à l'origine de la correction de la théorie de Fermi en théorie V-A

$$\underbrace{(-ie)\gamma^\mu}_{\text{électromagnétique}} \longrightarrow \frac{-ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \left( \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \quad (2.142)$$

On se rappelle (eq. 2.71) que  $\gamma^\mu$  se comporte comme un vecteur sous la parité

$$\bar{u} \gamma^\mu u \xrightarrow{P} \bar{u} \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 u \quad (2.143)$$

Le terme axial en  $\gamma_5$  est responsable de la violation de parité

$$\bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 u \xrightarrow{P} -\bar{u} \gamma^0 \gamma_\mu \gamma_5 \gamma^0 u \quad (2.144)$$

La violation de parité est rendue maximale par la combinaison  $\frac{1-\gamma_5}{2}$ , projecteur sur l'état de chiralité gauche. Dans la limite relativiste il équivaut au projecteur sur l'état d'hélicité gauche

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1-\gamma_5}{2}, & P_R &= \frac{1+\gamma_5}{2} \\ P_L^2 &= P_L, P_R^2 = P_R, P_L + P_R = I, P_L \cdot P_R = 0 \end{aligned} \quad (2.145)$$

avec

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \text{ (représentation de Pauli-Dirac)} \quad (2.146)$$

Dans la limite relativiste

$$u = \sqrt{E+m} \begin{vmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \end{vmatrix} \longrightarrow \sqrt{E} \begin{vmatrix} \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi \end{vmatrix}, \quad \hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (2.147)$$

$\sigma \cdot \hat{p}$  est la projection du spin sur l'axe de l'impulsion, appelée aussi **hélicité**,  $h = \frac{1}{2} \sigma \cdot \hat{p} = \pm \frac{1}{2}$ .

On note

$$u \sim \sqrt{E} \begin{vmatrix} \chi \\ 2h \chi \end{vmatrix}, \quad u_R \sim \sqrt{E} \begin{vmatrix} \chi \\ \chi \end{vmatrix}, \quad u_L \sim \sqrt{E} \begin{vmatrix} \chi \\ -\chi \end{vmatrix}, \quad (2.148)$$

On vérifie facilement que

$$\frac{1+\gamma_5}{2} u_R = u_R, \quad \frac{1+\gamma_5}{2} u_L = u_L, \quad \frac{1+\gamma_5}{2} u_L = \frac{1-\gamma_5}{2} u_R = 0 \quad (2.149)$$

Dans la limite ultra-relativiste l'hélicité tend donc vers la chiralité. Le courant faible chargé ne se couple qu'aux particules gauches.

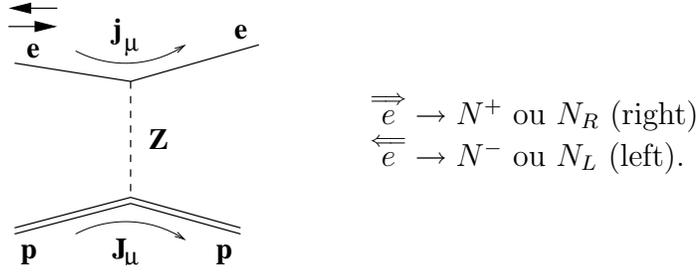
Le courant faible neutre ( $Z^0$ ) se couple aussi avec les particules droites du fait de l'unification électrofaible qui mélange les bosons d'interaction neutres. Ce mélange est paramétré par l'angle de mélange  $\sin^2 \theta_W$ .

$$\text{vertex } (Z^0) : -i \frac{g}{4 \cos \theta_W} \gamma^\mu (c_V + c_A \gamma^5) \quad (2.150)$$

avec  $c_V \neq c_A$  et  $c_V$  fonction de  $\sin^2 \theta_W$ .

### 2.9.4 Asymétrie de violation de parité en diffusion d'e'

On utilise la même stratégie expérimentale que Mme Wu. L'électron incident est polarisé, le renversement de son spin construit l'image par parité du processus étudié.



Le courant faible de  $Z^0$ , qui viole  $\mathcal{P}$ , est extrait via l'asymétrie de violation de parité, quantité pseudo-scalaire

$$A^{PV} = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-} \quad (2.151)$$

Si on reprend l'équation :

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_\gamma|^2 + 2\Re(\mathcal{M}_\gamma \mathcal{M}_Z^*) + |\mathcal{M}_Z|^2 \quad (2.152)$$

Le premier terme non nul au numérateur de  $A^{PV}$  est l'interférence ( $\mathcal{M}_\gamma \mathcal{M}_Z^*$ ) car la parité impose  $\mathcal{M}_\gamma^+ = \mathcal{M}_\gamma^-$ .

Le dénominateur est dominé par  $|\mathcal{M}_\gamma|^2$ .

En négligeant les termes d'ordre supérieur en  $G_F$

$$A^{PV} \sim \frac{\mathcal{M}_\gamma \mathcal{M}_Z^*}{\mathcal{M}_\gamma^2} \quad (2.153)$$

## Expression des courants neutres hadroniques

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} j_{Z\mu} J_Z^\mu \quad G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8M_Z^2 \cos^2 \theta_W} \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} j_{Z\mu} &= \bar{u} [(-1 + 4 \sin^2 \theta_W) \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 u] \\ J_Z^\mu &= \bar{u} \left[ \gamma^\mu F_1^Z + \frac{i}{2M} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2^Z + \gamma^\mu \gamma_5 G_A^e + \frac{q^\mu}{M} \gamma_5 G_p \right] \end{aligned} \quad (2.155)$$

Les facteurs de forme  $F_1^Z$  et  $F_2^Z$  sont les équivalents faibles neutres des facteurs de forme de Pauli-Dirac. Ils sont reliés aux distributions des "charges faibles" dans le nucléon.  $G_A^e$  et  $G_p$  sont les facteurs de forme dits axiaux et pseudo-scalaire, issus de la possibilité supplémentaire du couplage axial du  $Z$  avec le nucléon. Ils sont reliés à la distribution de "charge axiale" dans le nucléon, moins intuitifs mais tout aussi fondamentaux. Comme dans le cas électromagnétique, tous sont des fonctions de  $Q^2$ .

## Formule de $A^{PV}$ pour la diffusion $e - p$ élastique

Seuls les termes "croisés" donnent une contribution à la violation de parité

$$\begin{aligned} &[\text{couplage vectoriel au lepton}] \times [\text{couplage axial au hadron}] \\ &[\text{couplage axial au lepton}] \times [\text{couplage vectoriel au hadron}] \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} A_{ep}^{pv} &= -\frac{G_F Q^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha} [A_E + A_M + A_A] \\ A_E &= \frac{\varepsilon G_E^{\gamma,p} G_E^{Z,p}}{\varepsilon G_E^{\gamma,p^2} + \tau G_M^{\gamma,p^2}} \\ A_M &= \frac{\tau G_M^{\gamma,p} G_M^{Z,p}}{\varepsilon G_E^{\gamma,p^2} + \tau G_M^{\gamma,p^2}} \\ A_A &= -\frac{1}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta_W) \delta \frac{G_M^{\gamma,p} G_A^e}{\varepsilon G_E^{\gamma,p^2} + \tau G_M^{\gamma,p^2}} \end{aligned} \quad (2.156)$$

avec  $\tau = Q^2/4M_p^2$ ,  $\varepsilon = [1 + 2(1 + \tau)tg^2\theta/2]^{-1}$  et  $\delta = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sqrt{\tau(1 + \tau)}$ .

Le facteur  $G_F/(\alpha/Q^2)$  traduit que

$$A^{PV} \propto \frac{M_Z M_\gamma}{|M_\gamma|^2} \quad (2.157)$$

La structure interne de la cible intervient via les facteurs de forme avec au numérateur le produit d'un FF électromagnétique par un FF faible et au dénominateur des FF électromagnétiques au carré.

Le couplage vectoriel au nucléon donne les termes électrique  $A_E$  et magnétique  $A_M$ , de manière similaire à la formule de Rosenbluth pour la section efficace  $ep \rightarrow ep$  avec échange de photon.

Le terme  $A_A$ , provient du couplage axial au nucléon et dépend de  $G_A^e$  seulement (le facteur de forme  $G_P$  n'intervient pas au premier ordre en  $G_F$ ). Ce terme  $A_A$  va de paire avec un couplage vectoriel au lepton d'où le facteur  $(1 - 4 \sin^2 \theta_W)$ , charge vectorielle faible de l'électron. La dépendance en angle, à  $Q^2 = cste$ , des coefficients  $\tau$ ,  $\varepsilon$  et  $\delta$  montre que des mesures aux **angles avants** sont sensibles à  $G_E/G_M$  alors que les **angles arrières** sont sensibles à  $G_M G_A$ . Une séparation "à la Rosenbluth" est donc a priori possible. Expérimentalement le bras de levier en angle est cependant trop réduit pour extraire indépendamment les trois contributions. En pratique on exploite les propriétés complémentaires de cibles différentes telles que le  ${}^2D$  et  ${}^4He$ .

### 2.9.5 L'étrangeté du nucléon

Extraire  $AE$ ,  $AM$ , donne accès à  $G_E^{Z,p}$  et  $G_M^{Z,p}$ . Cette nouvelle information nous permet de poursuivre la décomposition sur une saveur de quark supplémentaire

$$\begin{aligned} G_{E,M}^{\gamma,p} &= \frac{2}{3} G_{E,M}^u - \frac{1}{3} G_{E,M}^d - \frac{1}{3} G_{E,M}^s \\ G_{E,M}^{\gamma,n} &= \frac{2}{3} G_{E,M}^d - \frac{1}{3} G_{E,M}^u - \frac{1}{3} G_{E,M}^s \\ G_{E,M}^{Z,p} &= (1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W) G_{E,M}^u - (1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W) G_{E,M}^d - (1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W) G_{E,M}^s \end{aligned} \quad (2.158)$$

où nous avons supposé que  $G_{E,M}^s$  était identique dans le proton et le neutron et

$$G_{E,M}^{Z,p} = \sum_{i=u,d,s} Q_i^W G_{E,M}^i \quad (2.159)$$

avec  $Q_i^W$  la charge vectorielle faible du quark  $i$ .

Nous sommes passées d'un système 2x2 à un système 3x3 qui permet d'atteindre maintenant la **contribution des quarks étranges** qui était négligée auparavant. Cette contribution est intéressante physiquement car elle ne peut provenir que des fluctuations  $q\bar{q}$  au sein du nucléon. Nous avons donc ici une observable capable de tester de façon non ambiguë notre compréhension de ces fluctuations.

Voir transparents 27 à 29.

## Programme expérimental de mesure $G_{E,M}^s$

Un vaste programme de mesure, engagé depuis une dizaine d'années, se finalise actuellement. Les quantités mesurés sont

- $G_M^s(0) = \mu_s$  : moment magnétique étrange.
- $G_E^s(0) = 0$  pas de "s" dans l'état de valence. La première quantité non triviale est le rayon de charge étrange

$$\langle r_s^2 \rangle = -6 \frac{dG_E^s}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} \quad (2.160)$$

- La dépendance en  $Q^2$  de  $G_{E,M}^s(Q^2)$ . Expérimentalement la zone  $0.1 < Q^2 < 1 (GeV/c)^2$  est explorée.
- Le facteur de forme axial  $G_A$ .  $A^{PV}$  n'est pas très sensible à  $G_A^e$  à cause du facteur  $(1 - 4 \sin^2 \theta_W)$  qui vaut 0.075 (compensation accidentelle). Une valeur de  $G_A^e$  peut tout de même être extraite aux angles arrières. En principe nous pourrions écrire

$$\begin{aligned} G_A^e &= \sum_{i=u,d,s} Q_i^A G_A^i \\ G_A^e &= -G_A^u + G_A^d + G_A^s \end{aligned} \quad (2.161)$$

avec  $Q_i^A$  la charge axiale du quark  $i$ .

Par définition  $G_A^i$  est relié à l'élément de matrice axial

$$\langle N | \bar{q}_i \gamma_\mu \gamma_5 q_i | N \rangle \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} \Delta q_i \quad (2.162)$$

où  $\Delta q_i$  est la contribution du quark  $q_i$  au spin du nucléon.

Encore un fois, le terme  $(1 - 4 \sin^2 \theta_W)$  réduit cette contribution et rend l'effet des diagrammes d'ordre supérieur (corrections radiatives) important. L'interprétation théorique des résultats expérimentaux est complexe.

Une meilleure "selection" de la composante  $G_A$  demande une autre sonde, le neutrino. En courant chargé ou neutre de neutrino  $G_A$  intervient cette fois directement dans la section efficace (il n'y a plus d'interaction électromagnétique possible avec le neutrino donc de raison de faire une asymétrie de violation de  $\mathcal{P}$ ). Le facteur  $(1 - 4 \sin^2 \theta_W)$  est également remplacé par un couplage 1.

## Techniques expérimentales

Exemple de la mesure de  $A^{PV}$  sur le proton à  $Q^2 = 0.1(GeV/c)^2$ .

On détecte l'électron diffusé dans un spectromètre magnétique de haute résolution (isole la cinématique élastique). Ce spectromètre peut être placé entre 6 et 150 degrés.

- Comment définir la cinématique optimale.
- Combien doit-on détecter d' $e^-$  diffusés pour atteindre une précision statistique de 5% sur  $A_{ep}^{PV}$  ?
- Combien de temps de faisceau dois-je demander si l'expérience utilise une cible d'hydrogène liquide de 15 cm de long, un courant faisceau de 100  $\mu A$ , une polarisation du faisceau  $P_e = 75\%$  ?

Réponses : On définit la **figure de mérite** de la mesure :

$$\frac{\delta A_{\text{exp}}}{A_{\text{exp}}} = \frac{1}{P_e A_\varphi \sqrt{N}} \quad (2.163)$$

minimiser l'erreur relative sur  $A_{\text{exp}}$  revient à maximiser  $A_\varphi \times \sqrt{N}$  ou  $A_\varphi^2 \times N$ . La figure de mérite peut donc s'écrire

$$F.O.M. \equiv A_\varphi^2 \times \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.164)$$

La cinématique optimale est celle qui maximise  $F.O.M.$ .

$Q^2$  étant fixé la question est donc de savoir s'il faut se placer à grande énergie et petit angle ou petite énergie et grand angle.

D'après l'expression de  $A_\varphi^{PV}$  on peut estimer  $A_\varphi^{PV}(Q^2 = 0.1)$  quasi indépendante de  $E$  et  $\theta$ . La dépendance principale en  $E$  et  $\theta$  provient de la section efficace

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \frac{E'}{E} (\dots) \quad (2.165)$$

avec  $Q^2 = 4EE' \sin^2 \theta/2$  et  $E' = E/(1 + 2\frac{E}{M} \sin^2 \theta/2)$ .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E^2 \frac{\cos^2 \theta/2}{(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \theta/2)^3} \quad (2.166)$$

Il faut donc se placer à grande  $E$  et petit angle :

$$\theta_{\min} = 6 \text{ deg} \rightarrow E \simeq 3.2 \text{ GeV}$$

pour un transfert fixé  $Q^2 = 0.1 (GeV/c)^2$ .

D'après eq.(2.156) on obtient alors

$$A^{PV}(3.2 \text{ GeV}, 6 \text{ deg}) = -1.6 \text{ ppm}$$

et en supposant  $P_e = 75\%$ ,  $A_{\text{exp}}^{PV} = 1.2 \text{ ppm}$  Atteindre une précision statistique relative de 5% équivaut à

$$\delta A = 1.2 \cdot 10^{-6} \times 0.05 = 6 \cdot 10^{-8} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (2.167)$$

Il faut donc détecter  $N = 2.8 \cdot 10^{14} e^-$  !

$$N = \frac{I \rho \mathcal{N} \ell}{e A} T \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.168)$$

Courant faisceau	$I = 100.10^{-6} A$
Densité cible	$\rho = 0.0708 g cm^{-3}$
Masse molaire	$A = 1 g mol^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N} = 6.022 10^{23}$
Section efficace	$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 45 \mu b = 45.10^{-30} cm^2$
Angle solide	$\Omega = 6.10^{-3} str$

La mesure demande donc  $T = 2.6 10^6 s \sim 30$  jours. Un "bon" accélérateur fourni du faisceau stable avec  $\sim 60\%$  d'efficacité. Il faut donc  $\sim 50$  jours pour faire la mesure!

Voir transparents 30 à 32.

## 2.10 Formulaire

### 2.10.1 Spineurs

4 composantes

$$u(k, s) = \sqrt{E + m} \begin{vmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_s \end{vmatrix} \quad (2.169)$$

$$\bar{u}(k, s) = u^\dagger(k, s) \gamma^0 \quad (2.170)$$

avec

$$\chi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.171)$$

– Equation de Dirac

$$(\not{k} - m)u(k, s) = 0, \quad \not{k} = \gamma^\mu k_\mu \quad (2.172)$$

– Normalisation

$$u^\dagger(k, s) u(k, s') = 2E \delta_{ss'} \quad (2.173)$$

$$\bar{u}(k, s) u(k, s') = 2m \delta_{ss'} \quad (2.174)$$

$$\sum_s u(k, s) \bar{u}(k, s) = \not{k} + m, \quad (\text{Matrice } 4 \times 4) \quad (2.175)$$

## 2.10.2 Matrices $\gamma$

Dimension  $4 \times 4$ , représentation de Pauli-Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.176)$$

Matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.177)$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.178)$$

Relations de commutation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (2.179)$$

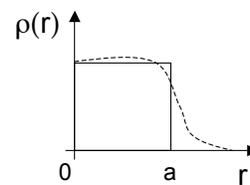
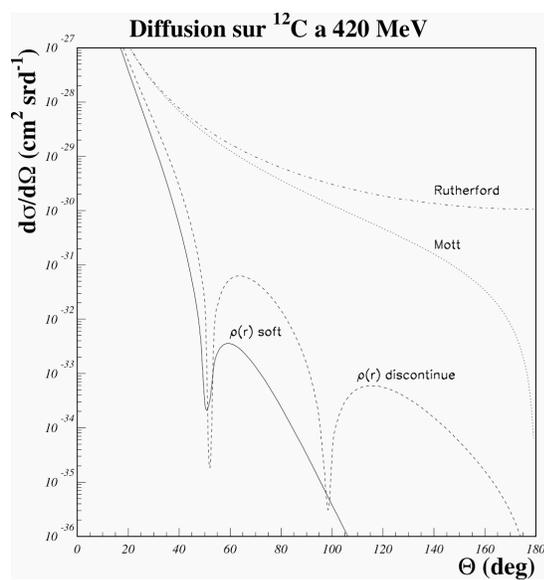
$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (2.180)$$



# Transparents

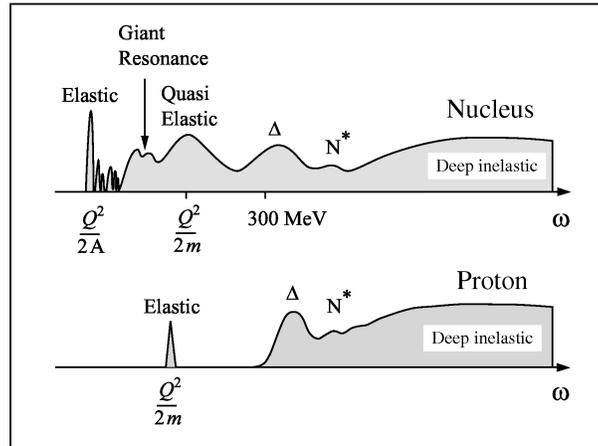
0

## Diffusion spin $1/2$ sur spin 0



1

# Réponse du nucléon en diffusion d'électron

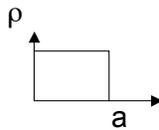


$\omega$ : énergie transférée au système par l'électron

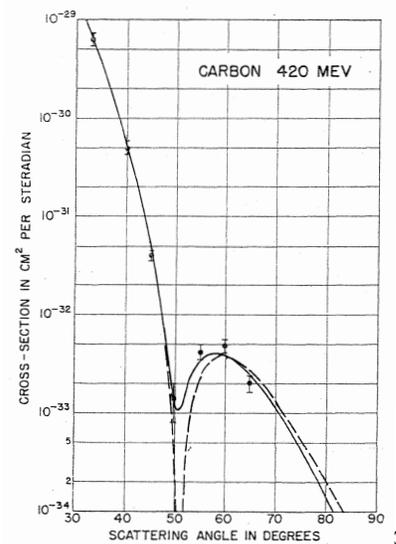
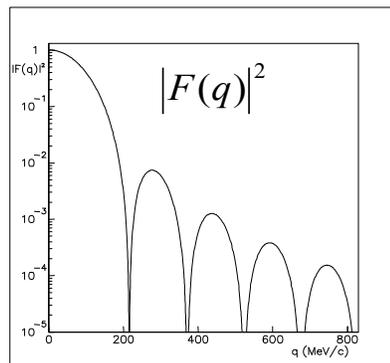
2

# FF d'une sphère uniforme

- Sphère uniforme :  $\rho(r) = \rho_0$  pour  $r < a$   
 $0$  pour  $r > a$

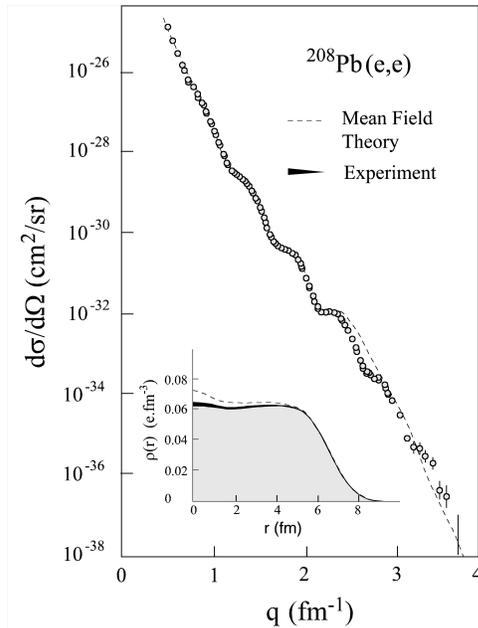


$$\rightarrow F(q) = 3(\sin x - x \cos x) / x^3 \quad (x=qa)$$



3

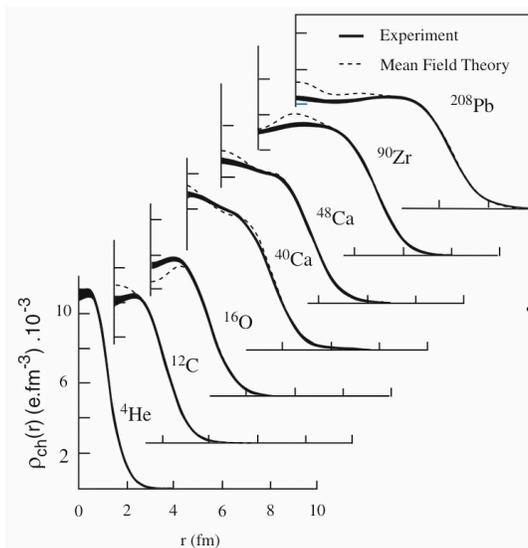
# Plomb



Section efficace  
mesurée sur  
12 ordres de grandeur!

4

# Facteurs de Forme des Noyaux



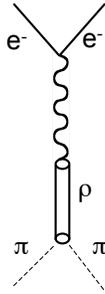
Saturation de la  
densité nucléaire:

$$R_{\text{noyau}} \sim \rho_0 A^{1/3} \sim 1.1 A^{1/3} \text{ (fm)}$$

- Proton :  $r_p = 0.86 \text{ fm}$
- il faut  $\hbar/q < 1 \text{ fm}$   
( $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ )
- $q > 200 \text{ MeV}$
- faisceau de l'ordre du  $\text{GeV}$

5

# Facteur de forme du $\pi$



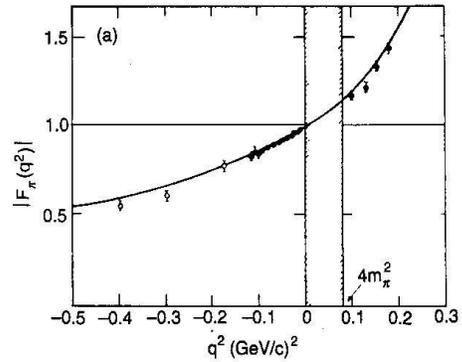
Dominé par le pôle du  $\rho$   
(Vector Meson Dominance, VMD)

$$|F(Q^2)| = \frac{1}{1 + Q^2/M_\rho^2}$$

$$\langle r^2 \rangle = -6 \frac{dF}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0}$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{\sqrt{6}}{M_\rho} = 0.63 \text{ fm}$$

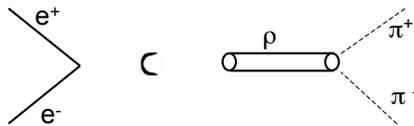
Exp :  $\langle r^2 \rangle = 0.66 \pm 0.02 \text{ fm}$



6

# Région Temps $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$

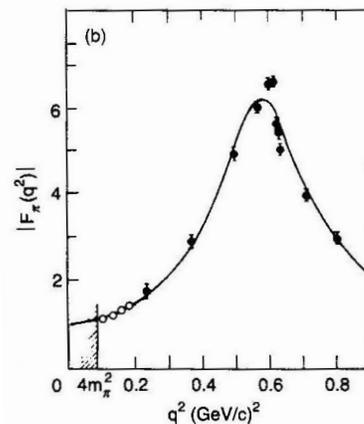
- Même graphe que  $e\pi \rightarrow e\pi$  région temps ( $q^2 > 4m_\pi$ ) au lieu d'espace ( $q^2 < 0$ )
- Pic  $\sim m_\rho^2 = (0.77)^2$



Décroissance du  $\rho$  en  $\pi^+\pi^-$

$$|F(Q^2)| \propto \frac{M_\rho^2}{\sqrt{(q^2 - M_\rho^2)^2 + \Gamma_\rho^2(q^2)M_\rho^2}}$$

→ Distribution de Breit-Wigner

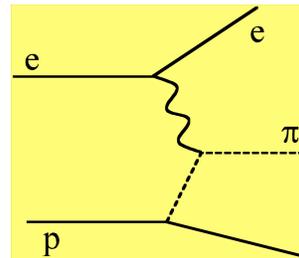


7

# Mesure de $F_\pi(Q^2)$

- A petit  $Q^2$  diffusion de  $\pi$  de haute énergie sur électrons d'une cible hydrogène (cinématique inverse)

- A plus grand  $Q^2$ , analyse de  $ep \rightarrow ep\pi$ .  
Dépend du modèle



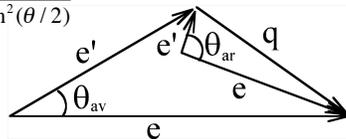
8

# Séparation de Rosenbluth

- Séparation de **Rosenbluth** :  
des mesures au même  $Q^2$  en variant  $\varepsilon(\theta)$

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + 2(1 + \tau)\tan^2(\theta/2)}$$

$$\tau = Q^2 / 4M_p^2$$

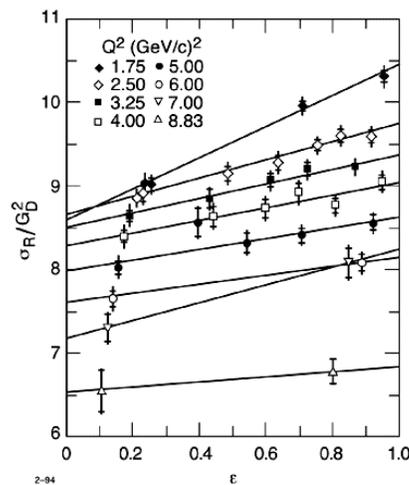


- On construit

$$\sigma_R = \varepsilon(1 + \tau) \frac{E}{E'} \frac{1}{\sigma_{Mott}} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \varepsilon G_E^2 + \tau G_M^2$$

- Énergies différentes  $\rightarrow$  effets syst.

- A grand  $Q^2$ ,  $G_E^2 \ll \tau G_M^2 \rightarrow$  difficile de mesurer  $G_E$



9

# Rayons de charge et magnétisation

$$\langle r_n^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr = -6 dG(Q^2)/dQ^2$$

$$\langle r_M^2 \rangle_p^{1/2} = 0.855 \pm 0.035 \text{ fm} \quad \langle r_M^2 \rangle_n^{1/2} = 0.87 \pm 0.01 \text{ fm}$$

$$\langle r_E^2 \rangle_p^{1/2} = 0.875 \pm 0.007 \text{ fm} \quad \langle r_E^2 \rangle_n = -0.116 \pm 0.002 \text{ fm}^2$$

3 rayons identiques aux erreurs expérimentales près

$$\frac{dG_E^n(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} = \frac{dF_1^n(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} - \frac{F_2^n(0)}{4M^2}$$

Terme de Foldy, ambiguïté dans la définition du rayon de charge

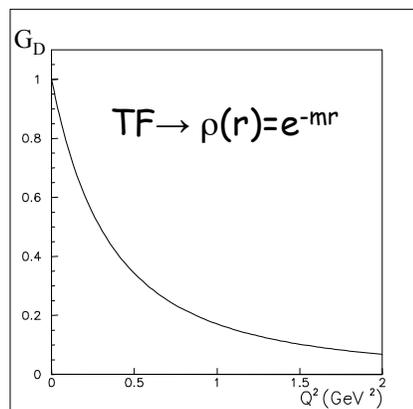
10

# Paramétrisation dipolaire

$$G_D = \frac{1}{(1 + Q^2/M_V^2)^2}, \quad M_V = 0.84 \text{ GeV}$$

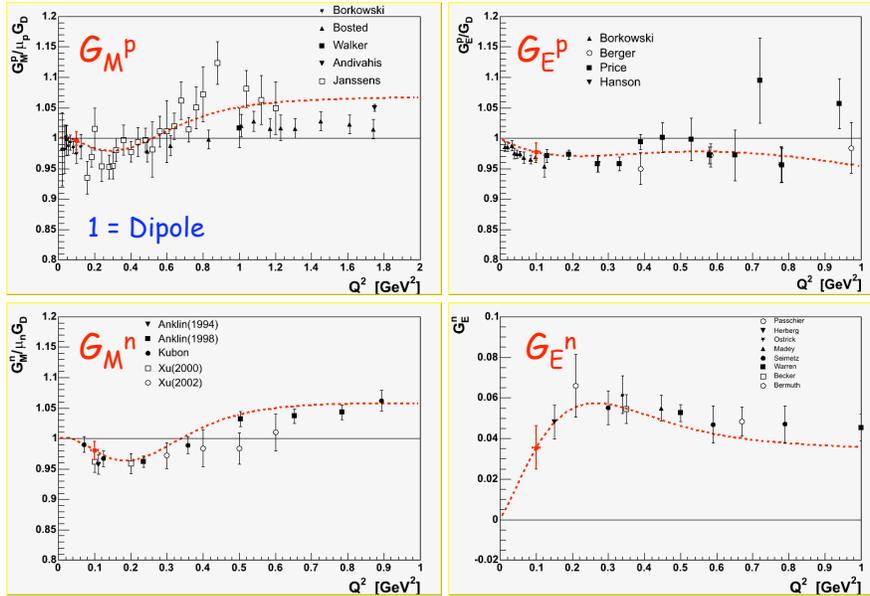
- $G_E^p(Q^2) \approx G_D$
- $G_M^p(Q^2) \approx \mu_p G_D$
- $G_M^n(Q^2) \approx \mu_n G_D$

$$\begin{aligned} \mu_p &= 2.79 \mu_N \\ \mu_n &= -1.91 \mu_N \\ \mu_N &= e\hbar/2M_p \end{aligned}$$

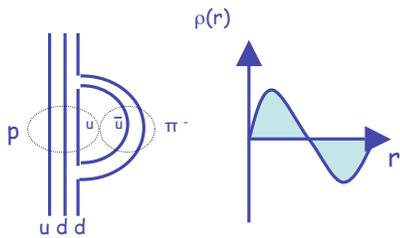


11

# Déviatoin au dipôle



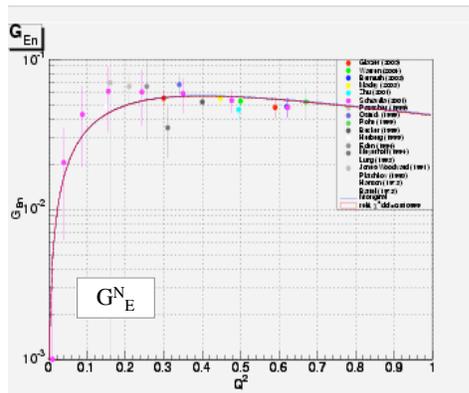
# Que signifie $G_E^n$ ?



$$Q = \int \rho(r) 4\pi r^2 dr = 0$$

$$\langle r^2 \rangle_n = \int r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr < 0$$

Paramétrisation de Galster: 
$$G_E^n = \frac{-\mu_n \tau}{1 + \lambda_n \tau} G_D$$

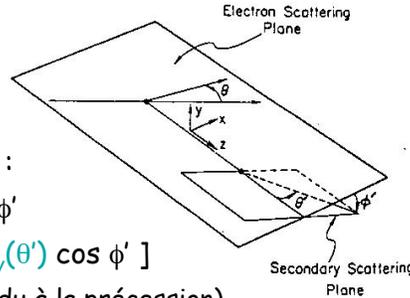


# Diffusion élastique polarisée

• faisceau polarisé, cible non polar  
et **polarimètre de proton de recul**

• proton éjecté → spectro → polarimètre :  
p diffuse dans une cible aux angles  $\theta'$   $\phi'$

$$\sigma = \sigma_0 [1 + P_e P_x A_y(\theta') \sin \phi' + P_e P_z \sin \chi A_y(\theta') \cos \phi']$$



( $\chi$  du à la précession)

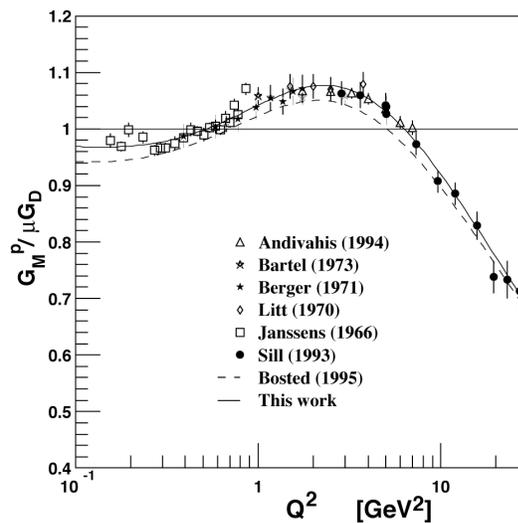
$$P_x = \frac{-\sqrt{\tau} \sqrt{2\varepsilon(1-\varepsilon)} G_E G_M}{\varepsilon G_E^2 + \tau G_M^2}$$

$$P_z = \frac{\tau \sqrt{1-\varepsilon^2} G_M^2}{\varepsilon G_E^2 + \tau G_M^2}$$

$$A(\theta', \phi') = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-} = a \sin \phi' + b \cos \phi'$$

$a/b = P_x/P_z \sin \chi \rightarrow G_E/G_M$  indépendamment de  $P_e$  et  $A_y(\theta')$  14

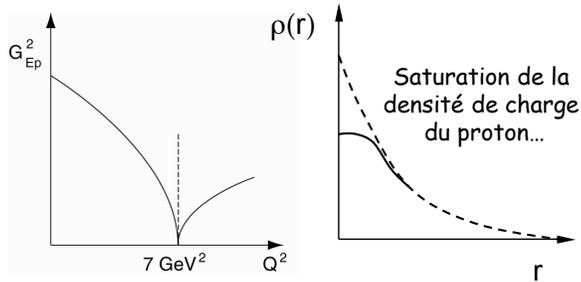
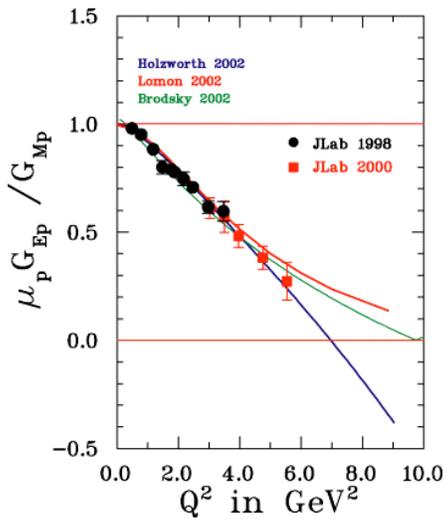
## $G_M^p$ à grand $Q^2$



Extraction par  
Rosenbluth

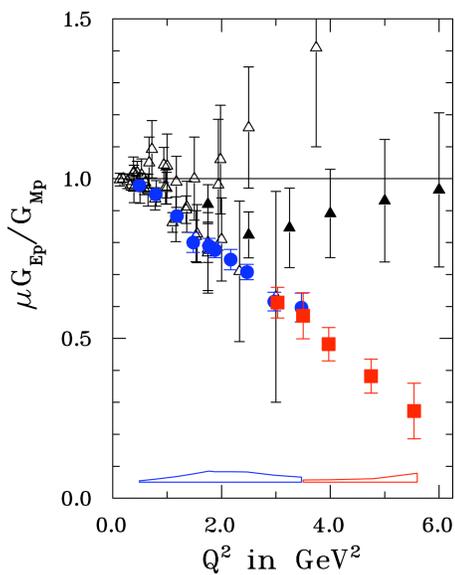
# $G_E^p/G_M^p$ à grand $Q^2$

Faisceau polarisé à JLab →  $G_E^p$  à grand  $Q^2$



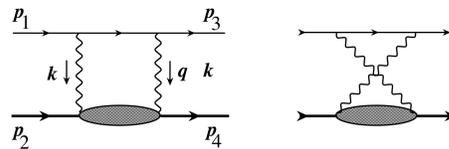
Attention:  
interprétation non relat. à  $Q^2 \gg M^2$  !

# $G_E^p/G_M^p$ à grand $Q^2$



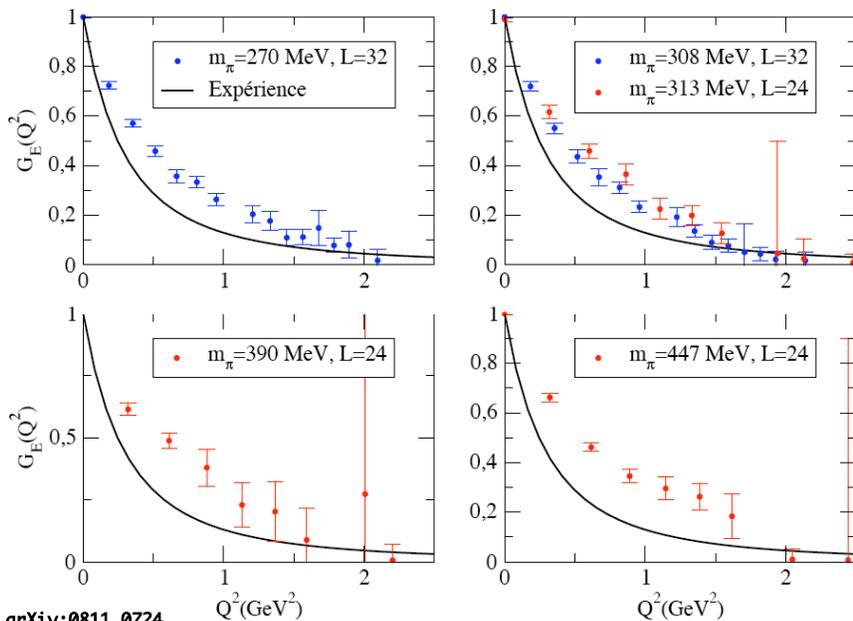
- Désaccord Rosenbluth/Polarisé
- Résultats confirmés

Echange de 2  $\gamma$ :



- Indications théoriques
- Mesures en cours

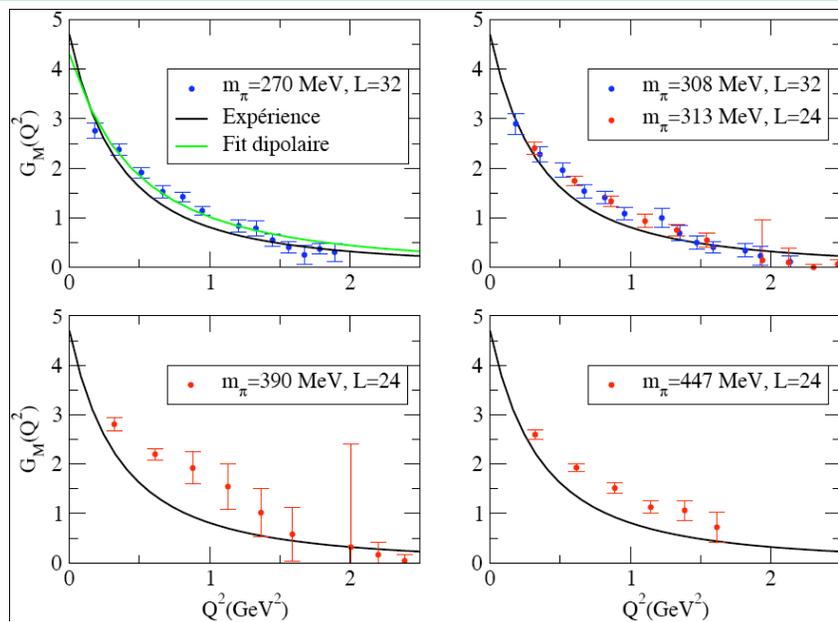
# LQCD



Voir arXiv:0811.0724

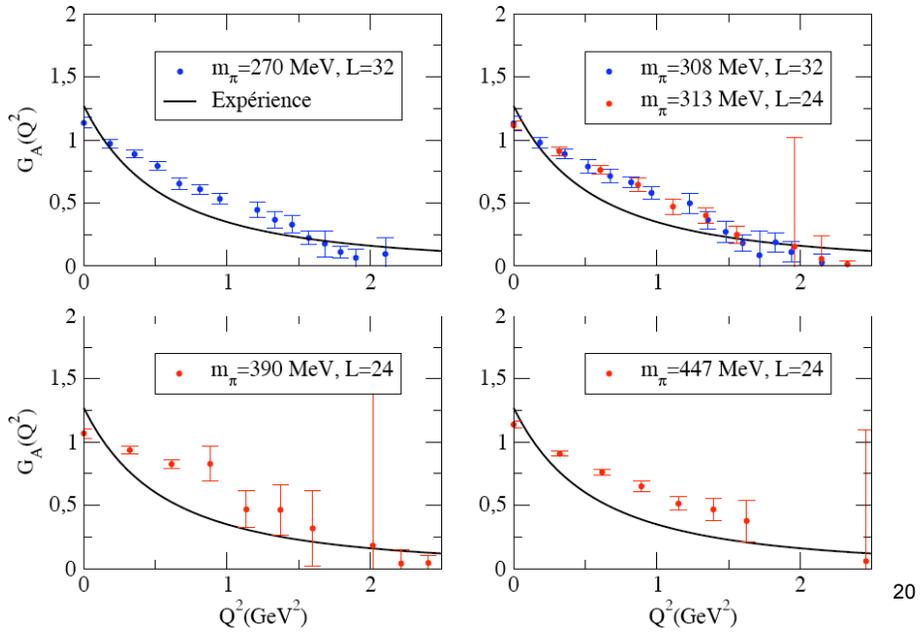
18

# LQCD

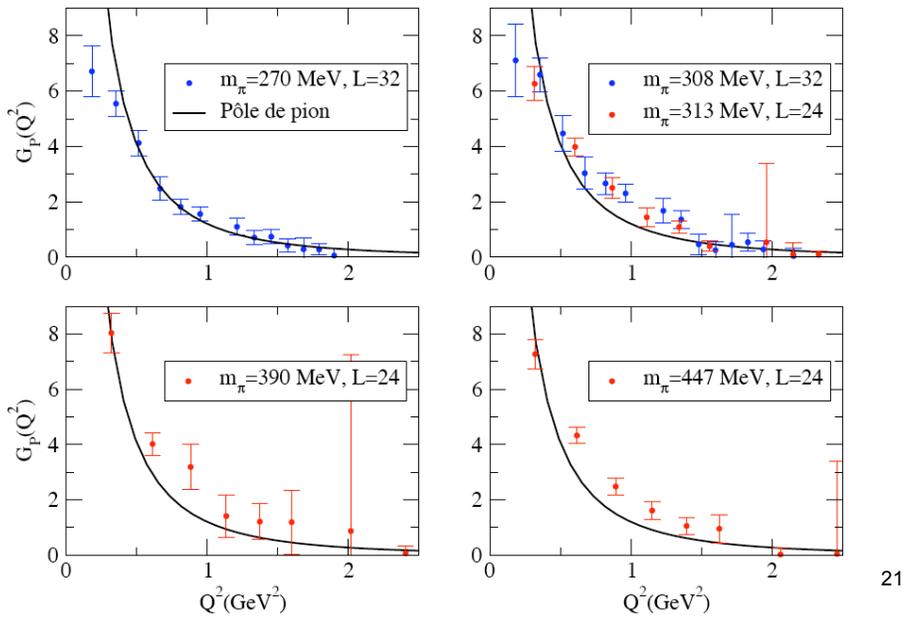


19

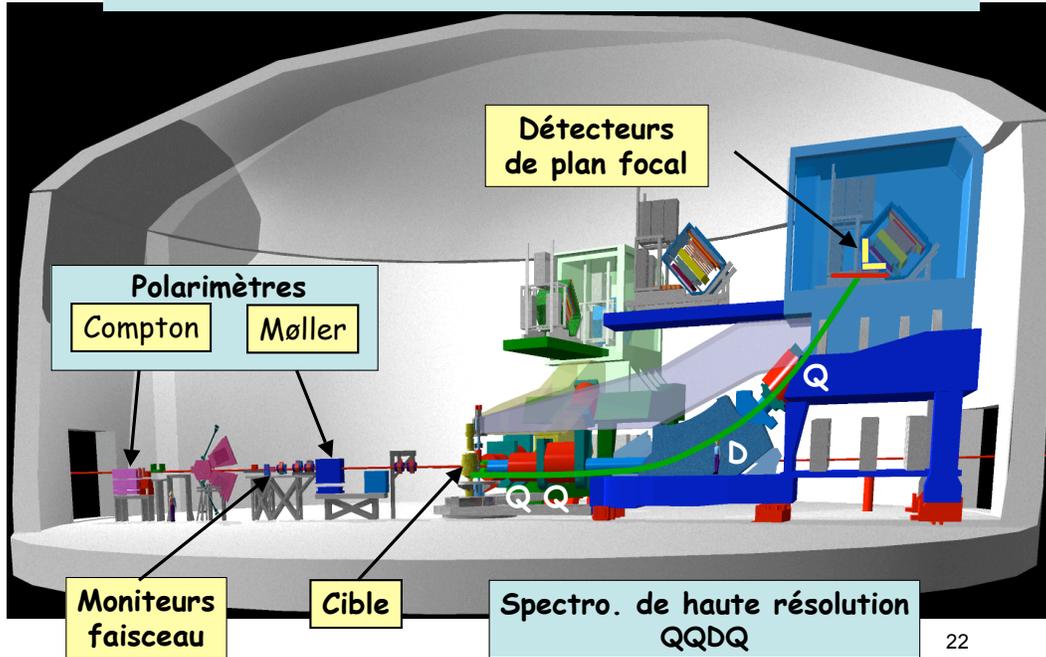
# LQCD



# LQCD

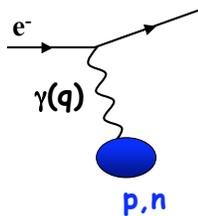


# JLab - Hall A



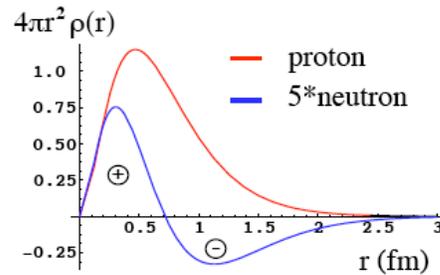
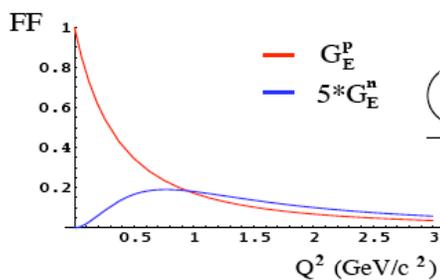
22

# Neutron - Proton



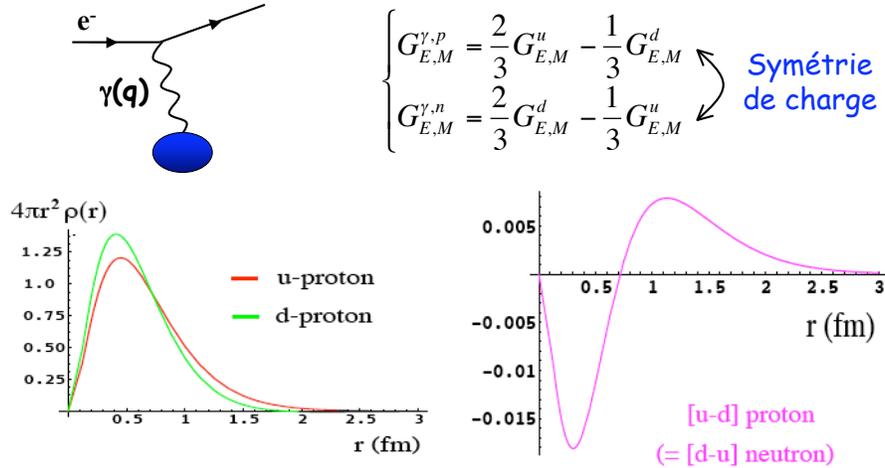
$$G_E^\gamma(Q^2) = Q_N - \frac{1}{6} Q^2 \langle r^2 \rangle + O(Q^4) \quad \text{Charge}$$

$$G_M^\gamma(Q^2) = \mu_N + O(Q^2) \quad \text{Magnetisation}$$



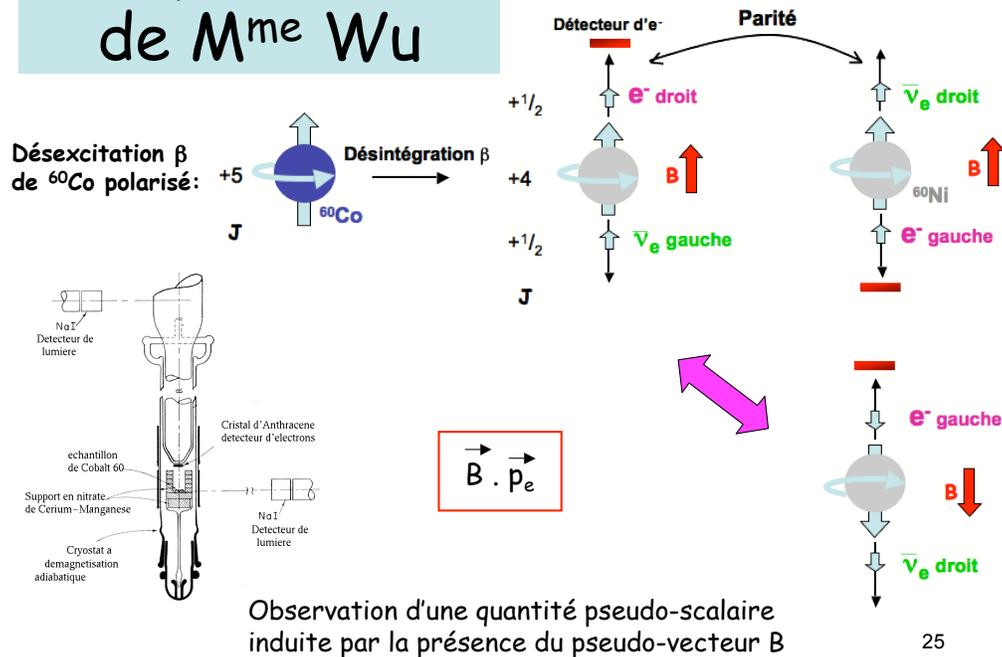
23

# Séparation u-d

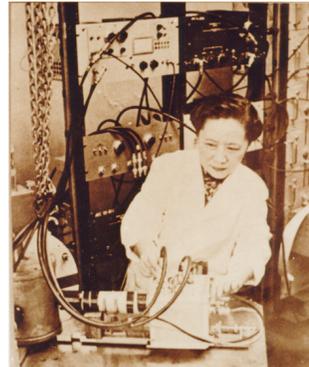
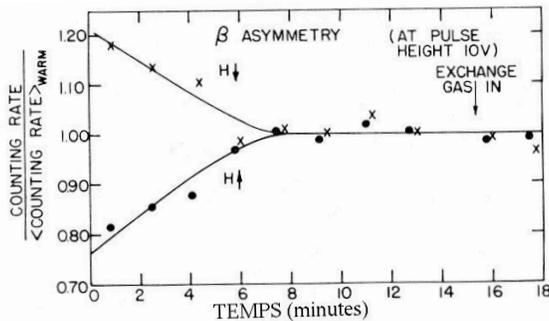


Quarks s ?  $G_E^s(0) = 0$ , pas d'autres contraintes de symétrie...

# Expérience de M<sup>me</sup> Wu



# Expérience de M<sup>me</sup> Wu



Asymétrie > 70% !!  
é gauches favorisés

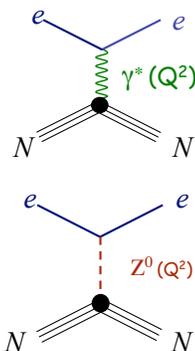
Wu, Ambler, Hudson, Hoppes and Hayward Phys. Rev. 105, 1413 (1957)

26

# Facteurs de forme faibles

$$\bar{N} \left[ \gamma_\mu F_1^{(Z,N)} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M_N} F_2^{(Z,N)} + \gamma_\mu \gamma_5 G_A^{(Z,N)} \right] N$$

Décomposition sur les saveurs :



$$G^\gamma = \sum_{j=u,d,s} Q_j G^j = \frac{2}{3} G^u - \frac{1}{3} G^d - \frac{1}{3} G^s$$

$$G_p^Z = \sum_{j=u,d,s} \left( \frac{1}{2} T_j^3 - Q_j \sin^2 \theta_w \right) G^j \quad \text{Information complémentaire}$$

$$G_p^Z = \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) G^u + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) G^d + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) G^s$$

$$G^{p\gamma}, G^{n\gamma}, G^{pZ} \Rightarrow G^u, G^d, G^s$$

27

# Asymétrie de violation de parité

$$\sigma_{ep \rightarrow ep} \propto \left| \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ + \\ \text{diagram 2} \end{array} \right|^2 \quad M_Z^2 \gg Q^2 \approx 1 \text{ GeV}^2$$

$M_Z$  viole la parité:  $\sigma_{\bar{e}p} \neq \sigma_{ep}$

$$A_{PV} \equiv \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\sigma_+ + \sigma_-} \approx \frac{2\text{Re}(M^\gamma \cdot M^Z)}{|M^\gamma|^2} \approx \frac{Q^2}{(Q^2 + m_{Z^0})^2} \approx 10^{-6} - 10^{-5}!$$

$$A_{PV(N)} = -\frac{G_F Q^2}{4\sqrt{2}\pi\alpha} \frac{\varepsilon G_E^{(\gamma,N)} G_E^{(Z,N)} + \tau G_M^{(\gamma,N)} G_M^{(Z,N)} - (1 - 4\sin^2\theta_W) \varepsilon' G_M^{(\gamma,N)} G_A^e}{\varepsilon (G_E^{(\gamma,N)})^2 + \tau (G_M^{(\gamma,N)})^2}$$

28

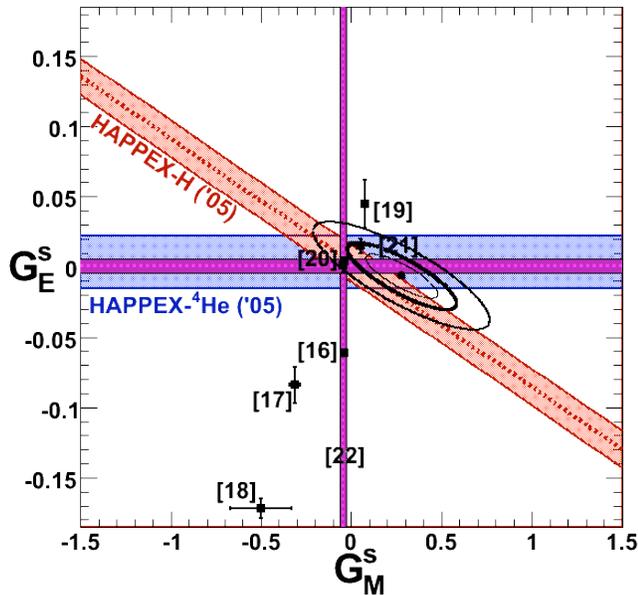
# Contribution des quarks étranges

$$A_{PV(N)} = A_0 + \alpha G_E^S + \beta G_M^S + \xi G_A^e$$

Combinaison de Rosenbluth et cibles pour séparer les contributions

- Proton    angles avant
  - arrière
  - Deutérium    arrière
  - arrière
  - Hélium     $A^{PV} = -\frac{A_0}{2} \left( 2\sin^2\theta_W + \frac{G_E^S}{G_E^{p\gamma} + G_E^{n\gamma}} \right) G_E^S$
- $$\left. \begin{array}{l} G_E^S G_M^S \\ G_M^S G_A^e \\ G_M^S G_A^e \end{array} \right\} \text{ p et d } \neq \text{ combinaisons}$$

## $\langle r_s^2 \rangle$ et $\mu_s$

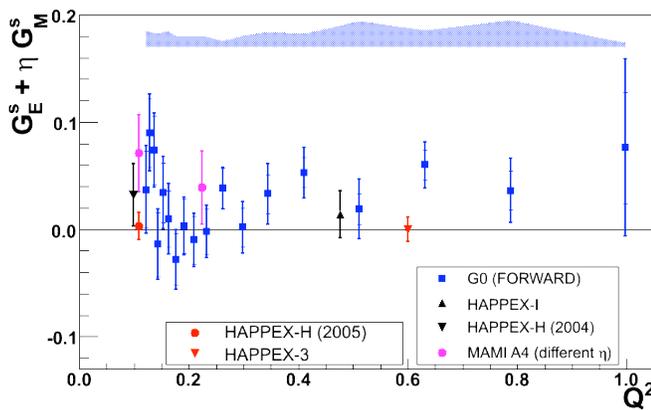


$$\langle r_s^2 \rangle < 1\% \langle r_p^2 \rangle$$

$$\langle \mu_s^2 \rangle < 5\% \langle \mu_p^2 \rangle$$

30

## Facteurs de forme « étranges »



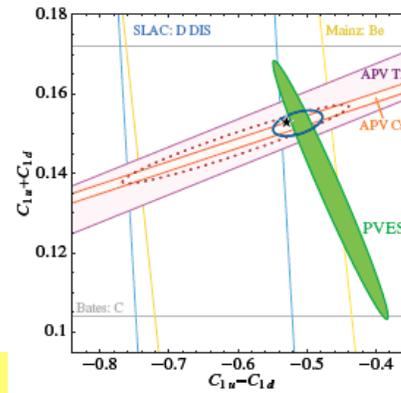
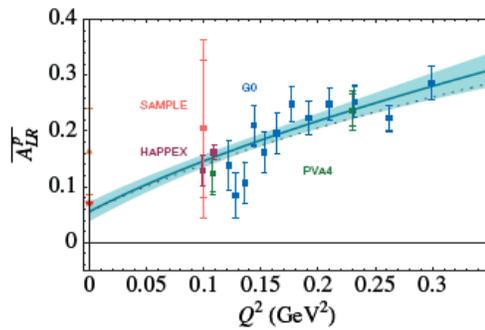
Données proton  
début 2008

- Faible contribution des quarks étranges à bas  $Q^2$
- Séparation complète E/M/A en cours d'analyse.
- Hypothèse d'une contribution à  $Q^2 \sim 0.6 \text{ GeV}^2/c^2$  sera testée en 2009.

31

# Test du Modèle Standard à Basse Energie

Extrapolation vers la charge faible du proton:



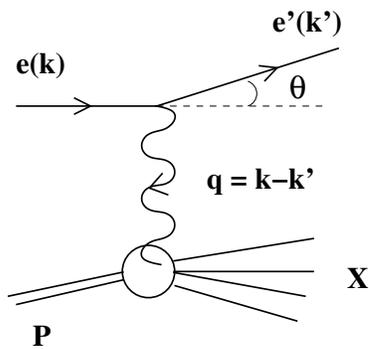
Nouvelles limites sur les couplages électrofaibles à l'échelle du TeV !!



# Chapitre 3

## Diffusion profondément inélastique

$$ep \rightarrow eX$$



Lorsque  $Q^2$  devient grand devant  $M_p^2$ , la probabilité que le nucléon absorbe le transfert d'énergie et d'impulsion et recule en restant un nucléon devient négligeable. Dans le cours précédent ceci se traduisait par une décroissance rapide des facteurs de forme élastiques en fonction de  $Q^2$ . L'objet de ce cours est de décrire le processus dominant à grand  $Q^2$  qui consiste à diffuser sur un constituant élémentaire du proton. Ce constituant éjecté et la partie "spectateur" du proton s'hadronisent pour respecter la neutralité de couleur et forment un état final hadronique complexe noté "X".

### 3.1 Cinématique

La masse invariante du système  $\gamma^* + p$  est donnée par

$$W^2 = (p + q)^2 = M_p^2 + 2p \cdot q - Q^2 \quad (3.1)$$

avec la notation habituelle

$$Q^2 = -q^2 \simeq 4EE' \sin^2 \frac{\theta_{lab}}{2}, \quad (M_p \ll E, E') \quad (3.2)$$

On introduit la variable

$$\boxed{\nu = \frac{p \cdot q}{M_p}} \quad (\nu = E - E', \text{ dans le labo sur cible fixe}) \quad (3.3)$$

En diffusion élastique  $W^2 = M_p^2$  donc  $\nu = Q_{elas}^2/2M_p$ .  $Q^2$  est alors la seule variable indépendante.

En diffusion inélastique cette contrainte n'existe plus,  $\nu$  et  $Q^2$  deviennent les **2 variables indépendantes** du problème. Dans la suite on utilisera aussi un couple équivalent de deux autres variables sans dimension

$$\boxed{x = \frac{Q^2}{2M_p\nu}, \quad y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}} \quad (3.4)$$

L'équation (3.1) se réécrit alors

$$\begin{aligned} W^2 &= M_p^2 + 2M_p\nu - Q^2 \\ &= M_p^2 + 2M_p\nu(1-x) > M_p^2 \text{ en inélastique} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ce qui implique

$$\boxed{0 < x < 1} \quad (3.6)$$

Dans le labo  $y = (E - E')/E$ , fraction d'énergie perdue par le lepton incident. Cette variable est donc contrainte au même intervalle que  $x$

$$\boxed{0 < y < 1} \quad (3.7)$$

## 3.2 Tenseur hadronique général

La fragmentation du proton en hadrons empêche de considérer l'écriture d'un courant hadronique général comme pour la diffusion élastique. On cherche donc à écrire le **tenseur** hadronique le plus général possible qui va contenir une sommation sur tous les états finals possibles que nous ne savons pas décrire. Ceci signifie que l'on considère des **réactions inclusives**, avec seulement le lepton diffusé détecté dans l'appareillage.

De façon formelle, le tenseur hadronique s'écrit

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &\equiv \sum_N \frac{1}{2} \sum_{s_{lepton}} \int \prod_{n=1}^N \left( \frac{d^3 p'_n}{2E'_n (2\pi)^3} \right) \sum_{s_n} \langle p, s | J_\mu^\dagger | X \rangle \\ &\quad \times \langle X | J_\nu | p, s \rangle (2\pi)^4 \delta^4 \left( p + q - \sum_n p'_n \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

où la sommation sur  $N$  correspond à la sommation sur tous les états finals possibles à plusieurs particules. La section efficace s'obtient simplement à partir des tenseurs leptonique et hadronique

$$\boxed{d\sigma_{inel} = \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} \frac{d^3 k'}{2E'(2\pi)^3}} \quad (3.9)$$

$L_{\mu\nu}^e$  est le tenseur leptonique déjà rencontré pour la diffusion élastique.

$W^{\mu\nu}$  est construit à partir de tous les tenseurs qui peuvent être formés avec les vecteurs de lorentz du vertex quark-photon :  $p^\mu$  et  $q^\mu$ . Les  $\gamma^\mu$  n'interviennent pas puisque la somme sur les spins a déjà été faite.

Le tenseur hadronique le plus général s'écrit donc

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \quad (3.10)$$

Seuls les tenseurs **symétriques** dans l'échange  $\mu \leftrightarrow \nu$  contribuent à la contraction avec les termes tous symétriques de  $L_{\mu\nu}^e = 2 [k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k \cdot k' - m^2) g^{\mu\nu}]$

Les  $W_i$  sont les analogues des facteurs de forme pour la diffusion profondément inélastique. Elles sont nommées "fonctions de structure" et dépendent de deux variables indépendantes  $\nu$  et  $Q^2$

$$\boxed{W_i = W_i(\nu, Q^2)} \quad (3.11)$$

La conservation du courant au vertex hadronique se traduit au niveau du tenseur par

$$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0 \quad (3.12)$$

Ceci implique les relations suivantes entre les  $W_i$

$$\begin{aligned} W_5 &= -\frac{p \cdot q}{q^2} W_2 \\ W_4 &= \left(\frac{p \cdot q}{q^2}\right)^2 W_2 + \frac{M^2}{q^2} W_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

D'où le tenseur hadronique

$$\boxed{W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) + \frac{W_2}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu\right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu\right)} \quad (3.14)$$

La contraction avec le tenseur leptonique donne l'expression covariante

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} &= 4 W_1 (k \cdot k') + 2 \frac{W_2}{M^2} [2(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2 k \cdot k'] \\ L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} \Big|_{labo} &= 4EE' \left\{ W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Soit

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \theta/2} \left\{ W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}} \quad (3.16)$$

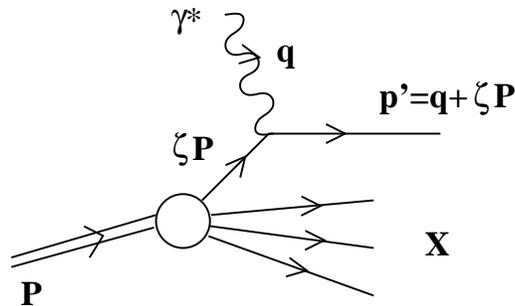
### 3.3 Fait expérimental de l'invariance d'échelle

La première machine capable d'explorer les cinématiques de diffusion profondément inélastiques est l'accélérateur linéaire de Stanford (SLAC). Les expérimentateurs observent des taux de comptage qui décroissent avec  $Q^2$  bien moins rapidement qu'attendu. De plus, si l'on fixe par la cinématique une valeur unique de  $x$ , la section efficace ne dépend plus de  $Q^2$  contrairement à ce qui serait autorisé par les deux degrés de liberté des processus inélastiques (voir transparents 1,2).

Pourquoi n'observe-t-on pas de décroissance rapide avec  $Q^2$  comme pour les facteurs de forme ? La perte de dépendance en  $Q^2$ , résolution spatiale du photon virtuel, indique un **régime d'invariance d'échelle**. L'hypothèse logique est qu'à partir d'une certaine résolution, la sonde électromagnétique "discerne" dans le nucléon des constituants ponctuels, dont la réponse ne dépend plus de l'échelle d'énergie.

### 3.4 Le modèle des Partons

Développé initialement par Feynman, il suppose que la diffusion est la **somme incohérente** des diffusions sur des **partons ponctuels quasi-libres**. Le processus élémentaire impliqué est



On se place dans la limite  $M, m_q \ll Q^2, \nu$ . Dans cette limite, la même quantité  $\xi$  désigne la fraction d'énergie ou de 3-impulsion du proton portée par le parton.

$$\text{nucléon : } P^2 = M^2$$

$$\text{parton : } p'^2 = m_q^2 = (q + \xi P)^2 = q^2 + \xi^2 M^2 + 2\xi(P \cdot q) \sim 0$$

soit  $q^2 + 2\xi(P \cdot q) \sim 0$  et

$$\xi = \frac{Q^2}{2M_p\nu} \equiv x \quad (3.17)$$

La variable  $x$  apparaît donc comme la **fraction d'impulsion portée par le parton** dans la limite  $Q^2 \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty$ .

Si l'on considère au contraire le parton comme initialement au repos dans le labo, le processus élémentaire de diffusion élastique sur le parton conduit à  $Q^2 = 2m_q\nu$  ce qui implique  $x = m_q/M$ .  $x$  devient alors la fraction de masse du nucléon portée par ce parton libre hypothétique, initialement au repos.

Le régime

$$Q^2 \rightarrow \infty, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad x = Q^2/2M\nu \text{ fini} \quad (3.18)$$

est le **régime de Bjorken** (1967). Nous allons voir qu'il conduit à l'invariance d'échelle des fonctions de structure, qui ne dépendent plus que de  $x$ .

Le modèle des partons conduit à

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } k \text{ and } k' \text{ lines, } q \text{ wavy line, } P \text{ and } X \text{ lines} \\ \text{Diagram 2: } k \text{ and } k' \text{ lines, } q \text{ wavy line, } P \text{ and } X \text{ lines, } i \text{ line} \end{array} \right| = \sum_{i=1}^{N_{\text{partons}}} \int dx e_i^2 f_i(x)$$

avec  $e_i$  la charge électrique du parton  $i$  en unités de charge  $e$  et  $f_i(x)$  la probabilité que le parton  $i$  porte une fraction  $x$  de l'impulsion du proton, normalisée selon

$$\sum_{i'} \int x f_{i'}(x) dx = 1 \quad (3.19)$$

où l'indice  $i'$  court sur tous les partons, même non chargés.

### 3.4.1 Factorisation

Une **hypothèse** supplémentaire dite de **factorisation** est inhérente au modèle des partons. Les partons ne sont pas observés dans l'état final, un processus complexe d'hadronisation

est à l'oeuvre pour former des hadrons neutres de couleur. L'idée de la factorisation est de "découper" la diffusion inélastique en deux étapes indépendantes :

- La diffusion sur le parton dont le temps caractéristique est donné par l'énergie transférée

$$\boxed{t_q \sim \hbar/\nu} \quad (3.20)$$

- L'hadronisation de l'état final de masse  $W$  dont le temps propre est donné par  $\hbar/W$ , soit dans le repère du labo

$$t_h \sim \gamma \hbar/W = \frac{\hbar\nu}{W^2} \quad (3.21)$$

or, d'après eq.(3.5),  $W^2$  est de l'ordre de  $2M\nu$  donc

$$\boxed{t_h \sim \frac{\hbar}{M} \gg t_q} \quad (3.22)$$

L'hadronisation se déroule donc sur une échelle de temps beaucoup plus longue que la diffusion sur un parton. C'est pourquoi il est supposé que les caractéristiques de cette diffusion restent "factorisées" dans le comportement de la section efficace finale.

### 3.4.2 Distributions d'impulsions

Interprétons à présent les fonctions de structure à partir des expressions des sections efficaces "prototypes" déjà rencontrées :

$e\mu \rightarrow e\mu$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{E'}{\sin^4 \theta/2} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (3.23)$$

Pour comparer à la diffusion inélastique, on fait réapparaître l'élément  $dE'$  avec la contrainte élastique  $Q^2 = 2m\nu$

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2m} \right) \quad (3.24)$$

$ep \rightarrow ep$  :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left\{ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right) \quad (3.25)$$

$ep \rightarrow eX$  :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left\{ W_2(\nu, Q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, Q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (3.26)$$

Dans le cadre du modèle des partons, cette dernière expression se réécrit à l'aide de l'eq.(3.24) comme

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \sum_{i=1}^{N_{parton}} \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \int_0^1 e_i^2 f_i(x) \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2(Mx)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2Mx} \right) \quad (3.27)$$

D'où, en identifiant

$$\begin{aligned} 2W_1(x) &= \sum_i \int_0^1 e_i^2 f_i(x) \frac{Q^2}{2(Mx)^2} \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2Mx} \right) dx \\ W_2(x) &= \sum_i \int_0^1 e_i^2 f_i(x) \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2Mx} \right) dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

On utilise les propriétés de la fonction  $\delta$  pour se ramener à des variables sans dimension

$$\delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2Mx} \right) = \delta \left[ \frac{\nu}{x} \left( x - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) \right] = \frac{x}{\nu} \delta \left( x - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) \quad (3.29)$$

et on construit les **fonctions de structure** sans dimension  $F_{1,2}$  à partir des  $W_{1,2}$

$$\begin{aligned} F_1(x) &\equiv M W_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i \int_0^1 e_i^2 f_i(x) \frac{Q^2}{2M\nu} \frac{1}{x} \delta \left( x - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) dx \\ F_2(x) &\equiv \nu W_2(x) = \sum_i \int_0^1 e_i^2 f_i(x) x \delta \left( x - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

Soit

$$\boxed{F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x)} \quad (3.31)$$

$$\boxed{F_2(x) = \sum_i x e_i^2 f_i(x)} \quad (3.32)$$

On obtient ainsi la **relation de Callan-Gross** (1968)

$$\boxed{F_2(x) = 2x F_1(x)} \quad (3.33)$$

bien vérifiée expérimentalement (voir transparent 3), prouve que les diffusions ont lieu sur des constituants ponctuels de spin 1/2! (si spin=0, alors  $F_1 = 0$ ).

L'hypothèse de diffusion incohérente sur des partons ponctuels conduit bien à des fonctions de structure dépendantes de  $x$  seulement, en accord avec la propriété de scaling observée expérimentalement.

### 3.5 Phénoménologie des fonctions de structure

D'après eq.(3.26),  $F_2$  est dominante aux angles avants, là où le taux de comptage des expériences sur cible fixe est le plus grand.

Les partons du modèle sont identifiés aux quarks et gluons dans le proton : 3 quarks de valence + mer de gluons + mer  $q\bar{q}$ .

Proton :

$$\frac{1}{x} F_2^{ep}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)]$$

on néglige la contribution des saveurs plus lourdes c,b,t,...

Neutron : Le même genre d'équation peut s'écrire, introduisant 6 nouvelles inconnues. Cependant la symétrie de charge (rotation d'isospin qui permet de transformer  $p \rightarrow n$ ) conduit à

$$\begin{aligned} u^p(x) &= d^n(x) = u(x) \\ d^p(x) &= u^n(x) = d(x) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$s^p(x) = s^n(x) = s(x) \quad (3.35)$$

On suppose de plus que toutes les contributions des quarks de la mer sont semblables (approximatif pour  $s(x)$ , sans doute bon pour  $u(x)$  et  $d(x)$ ).

$$\begin{aligned} u_s(x) &= \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x) = S(x) \\ u(x) &= u_v(x) + u_s(x) \quad (\text{valence+sea}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\bar{u}(x) = u_s(x) \quad (3.37)$$

De plus la spectroscopie nous impose les nombres quantiques de valence

$$\int_0^1 u(x) - \bar{u}(x) dx = 2, \quad \int_0^1 d(x) - \bar{d}(x) dx = 1, \quad \int_0^1 s(x) - \bar{s}(x) dx = 0 \quad (3.38)$$

Au final

$$\begin{aligned} \frac{F_2^{ep}}{x} &= \frac{1}{9} [4u_v(x) + d_v(x)] + \frac{4}{3} S(x) \\ \frac{F_2^{en}}{x} &= \frac{1}{9} [4d_v(x) + u_v(x)] + \frac{4}{3} S(x) \end{aligned} \quad (3.39)$$

La différence permet d'évaluer la contribution des quarks de valence

$$\boxed{\frac{1}{x} (F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)) = \frac{1}{3} [u_v(x) + d_v(x)]} \quad (3.40)$$

Image intuitive des distributions d'impulsion : la contribution des quarks de valence forme un dirac centré sur  $x = 1/3$  (répartition équitable de l'impulsion entre les 3 quarks de valence). Ce dirac est élargi par la dynamique des quarks confinés dans le nucléon, les échanges de gluons. La contribution des partons de la mer, générée par le rayonnement de gluons, montre un spectre piqué à petit  $x$  car l'impulsion est alors partagée entre beaucoup de partons.

Les données de  $(F_2^{ep} - F_2^{en})$  et  $F_2^{en}/F_2^{ep}$  confirment cette image. Les quarks de valence ont une distribution piquée autour de  $1/3$ . Les quarks de la mer sont beaucoup plus "lents" avec une distribution piquée à 0.

Voir transparents 4 à 6.

**Et les gluons ?** De charge nulle, il ne couplent pas au photon et donc n'apparaissent pas dans les équations précédentes. Cependant leur contribution totale dans l'impulsion peut se déduire de la règle de somme

$$\int_0^1 dx x [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = 1 - \varepsilon_g \quad (3.41)$$

avec  $\varepsilon_g \equiv P_g/P$  la fraction d'impulsion portée par les gluons.

Expérimentalement

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx F_2^{ep} &\simeq \frac{4}{9} \varepsilon_u + \frac{1}{9} \varepsilon_d = 0.18 \\ \int_0^1 dx F_2^{en} &\simeq \frac{1}{9} \varepsilon_u + \frac{4}{9} \varepsilon_d = 0.12 \end{aligned} \quad (3.42)$$

D'où

$$\boxed{\varepsilon_u = 0.36, \quad \varepsilon_d = 0.18, \quad \varepsilon_g = 0.46} \quad (3.43)$$

Les gluons portent presque la moitié de l'impulsion du nucléon.

Effet EMC :

Les fonctions de structure mesurées dans les noyaux diffèrent de celles du nucléon

$$F_2^N \neq F_2^d \sim \frac{1}{2} (F_2^p + F_2^n) \quad (3.44)$$

Les distributions de partons dans le nucléon sont-elles modifiées par le milieu nucléaire ? Deux processus peuvent-être invoqués :

- À  $x \ll 1 \implies Q^2 \ll \nu$ .

La masse du photon virtuel devient négligeable devant son énergie. De ce point de vue on se rapproche des propriétés d'un photon réel. La fluctuation possible du photon en

une paire  $q\bar{q}$  va avoir un temps de vie caractéristique

$$\tau \sim \gamma \hbar \frac{1}{\sqrt{Q^2}} = \frac{\nu}{Q^2} \gg 1 \quad (3.45)$$

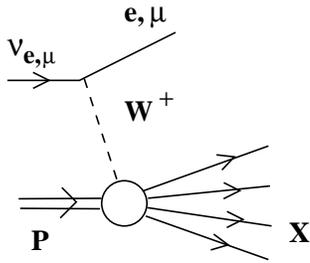
La paire  $q\bar{q}$  va donc pouvoir, dans un noyau, interagir avec plusieurs nucléons ce qui explique la chute du rapport  $F_2^A/F_2^d$  à petits  $x$ . Le  $\gamma^*$  est en partie absorbé dans les noyaux par ce phénomène dit de "shadowing".

- À  $x \sim 1$  :

Dans un noyau la limite absolue pour  $x$  n'est plus 1 mais  $A$ . Ceci explique la remontée à grand  $x$  de  $F_2^A/F_2^d$ .

Voir transparent 7.

### 3.6 Diffusion Profondément Inélastique de neutrinos



On utilise la même approche générale de construction du tenseur hadronique. Comme pour la diffusion élastique, le courant faible permet d'atteindre des combinaisons complémentaires de saveurs de quarks.

La structure V-A du courant faible conduit à la présence d'un terme anti-symétrique dans les tenseurs leptonique et hadronique

$$\begin{aligned} L_W^{\mu\nu} &= L_\gamma^{\mu\nu} \pm i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \\ W_W^{\mu\nu} &= W_\gamma^{\mu\nu} + i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha P_\beta \frac{W_3^\nu}{M^2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Le terme anti-symétrique dans le tenseur leptonique provient du produit croisé  $V \times A$  et change donc de signe entre le neutrino et l'antineutrino.  $W_3^\nu(x)$  est une nouvelle fonction de structure qui va apporter des informations supplémentaires sur les contributions des quarks et des anti-quarks.

Les fonctions  $W_1^\nu$  et  $W_2^\nu$  vont être analogues aux précédentes  $W_1$  et  $W_2$  mais avec la charge faible des quarks remplaçant  $e_i$ . On obtient

$$\frac{d^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{dE'd\Omega} = \frac{G_F^2 E'^2}{2\pi^2} \left[ 2W_1^\nu \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2^\nu \cos^2 \frac{\theta}{2} \pm W_3^\nu \frac{E + E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

ou, de manière équivalente

$$\boxed{\frac{d^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{dx dy} = \frac{G_F^2 s}{2\pi} \left[ xy^2 F_1^\nu + (1-y)F_2^\nu \pm y(1-\frac{y}{2})x F_3^\nu \right]} \quad (3.47)$$

avec  $s = (k+p)^2 \simeq 2ME$ ,

$$F_1^\nu = MW_1^\nu, \quad F_2^\nu = \nu W_2^\nu, \quad F_3^\nu = \nu W_3^\nu \quad (3.48)$$

et les jacobiens

$$dE' d\Omega = \frac{\pi}{EE'} dQ^2 d\nu = \frac{2ME}{E'} \pi y dx dy \quad (3.49)$$

On utilise la même description partonique que précédemment

$$\frac{d\sigma}{dx dy}(\nu N \rightarrow \ell X) = \sum_{i=1}^{N_{partons}} \times$$

$$\frac{d\sigma}{dx dy}(\nu N \rightarrow \ell X) = \sum_i f_i(x) \left. \frac{d\sigma_i}{dy} \right|_{\hat{s}=sx} \quad (3.50)$$

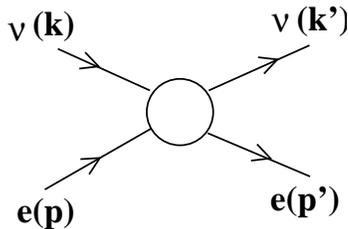
avec

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = \left. \frac{E - E'}{E} \right|_{labo} \quad \text{et} \quad 1-y = \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} \simeq \left. \frac{1 + \cos \theta^*}{2} \right|_{CM} \quad (3.51)$$

dans la limite des masses négligeables.

Le contenu des fonctions de structure est obtenu de même en identifiant les termes du tenseur général avec ceux du processus élémentaire  $\nu q_i \rightarrow \ell q'_i$ .

Diffusion prototype  $\nu - e'$



$$s = (k+p)^2$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} |M|^2$$

$$\frac{d\sigma^{\nu,e^-}}{d\Omega} = \frac{G_F^2 s}{4\pi^2}$$

Soit, en utilisant eq.(3.51)

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\nu,e^-}}{dy} = \frac{d\sigma^{\bar{\nu},e^+}}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi}} \quad (3.52)$$

Rq : En intégrant sur  $d\Omega$  on obtient

$$\sigma^{\nu, e^-} = \frac{G_F^2 s}{\pi} = \frac{2G_F^2 M E}{\pi} \quad (3.53)$$

à haute énergie la section efficace est linéaire en  $E$ . Ce comportement va changer quand l'effet du propagateur du boson  $W$  devient non négligeable ( $Q^2 \simeq M_Z^2$ ).

Diffusion prototype  $\bar{\nu} - e$

On utilise la propriété de substitution des diagrammes de Feynman

$$M(\bar{\nu}, e^-) = M(\nu, e^-) \Big|_{\substack{k \rightarrow -k' \\ k' \rightarrow -k}} \quad (3.54)$$

Dans cette substitution

$$s = (k + p)^2 \rightarrow (p - k')^2 = t \quad (3.55)$$

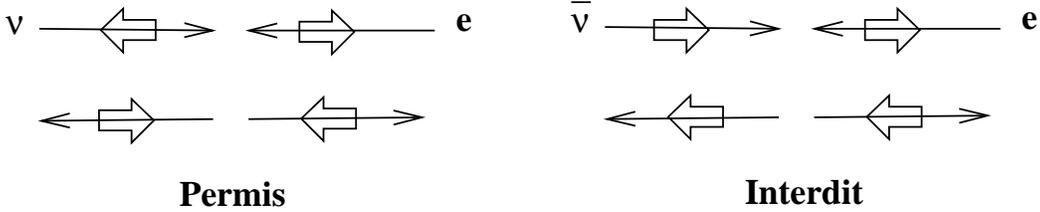
$$4E_{CM}^2 \rightarrow 2E_{CM}^2 (1 + \cos \theta^*) \quad (3.56)$$

Donc

$$M(\bar{\nu}, e^-) = M(\nu, e^-) \times \frac{1 + \cos \theta^*}{2} = M(\nu, e^-)(1 - y) \quad (3.57)$$

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\bar{\nu}, e^-}}{dy} = \frac{d\sigma^{\nu, e^+}}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} (1 - y)^2} \quad (3.58)$$

Rq. : diffusion à  $180^\circ$  dans le centre de masse



La diffusion  $\bar{\nu}, e^-$  est dans un état  $J = 1$  qui interdit la diffusion à  $180^\circ$ . D'où la dépendance angulaire supplémentaire en  $(1 + \cos \theta^*)/2$ .

Si on remplace maintenant le  $e^-$  par les partons de spin  $1/2$  du modèle des partons, la section efficace élémentaire s'écrit

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{G_F^2 x s}{\pi} [q(x) + \bar{q}(x)(1 - y)^2] \quad (3.59)$$

à identifier avec l'expression (3.47) que l'on peut réécrire, en utilisant  $2xF_1^\nu = F_2^\nu$

$$\frac{d^2\sigma^\nu}{dx dy} = \frac{G_F^2 s}{4\pi} [(F_2^\nu + xF_3^\nu) + (F_2^\nu - xF_3^\nu)(1 - y)^2] \quad (3.60)$$

On obtient

$$\boxed{F_2^{\nu}(x) = 2x [q(x) + \bar{q}(x)]} \quad (3.61)$$

et

$$\boxed{x F_3^{\nu}(x) = 2x [q(x) - \bar{q}(x)]} \quad (3.62)$$

Attention, le courant chargé ne peut pas coupler sur toutes les saveurs de quarks

$$\begin{array}{ll} \nu_{\mu} d \rightarrow \mu^{-} u & \nu_{\mu} u \\ \nu_{\mu} \bar{u} \rightarrow \mu^{-} \bar{d} & \text{sont permis, } \nu_{\mu} \bar{d} \text{ sont interdits} \\ \nu_{\mu} s \rightarrow \mu^{-} c & \nu_{\mu} \bar{s} \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} F_2^{\nu p}(x) &= 2x [d(x) + \bar{u}(x) + s(x)] \\ F_2^{\nu n}(x) &= 2x [d^n(x) + \bar{u}^n(x) + s(x)] = 2x [u(x) + \bar{d}(x) + s(x)] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Soit, pour une cible isoscalaire comme le deuton

$$F_2^{\nu D}(x) = 2x [u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x) + 2s(x)] \quad (3.64)$$

Rappel :

$$F_2^{eD}(x) = x \left\{ \frac{5}{9} [u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [s(x) + \bar{s}(x)] \right\} \quad (3.65)$$

Donc

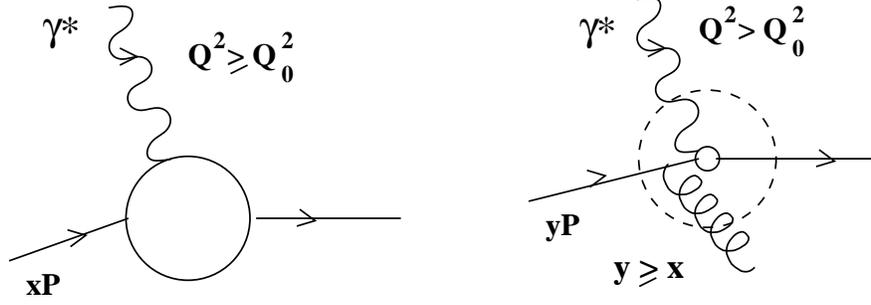
$$\boxed{F_2^{\nu D}(x) \sim \frac{18}{5} F_2^{eD}(x)} \quad (3.66)$$

Preuve expérimentale de l'**universalité** des distributions de partons et confirmation de la **charge fractionnaire** des quarks.

Voir transparent 8.

### 3.7 Evolution en $Q^2$

Invariance d'échelle : à suffisamment grand  $Q^2 \gtrsim Q_0^2$ , le photon "voit" les partons ponctuels dans le nucléon. Si ces partons sont libres, l'invariance d'échelle s'instaure pour tout  $Q^2 > Q_0^2$ . Mais QCD prédit qu'en augmentant la résolution le parton apparaît lui-même comme "habillé" d'un nuage de partons. Le premier diagramme de correction est le rayonnement d'un gluon.



Avec  $Q^2$  croissant, la sonde  $\gamma^*$  va pouvoir résoudre de plus en plus de partons qui se partagent l'impulsion en des fractions de plus en plus faibles. On s'attend donc à ce que ce processus augmente la probabilité de trouver un parton à petit  $x = cste$  lorsque  $Q^2$  augmente. Les fonctions de structure doivent donc briser l'invariance d'échelle : plus on regarde à petit  $x$ , plus elles doivent augmenter avec  $Q^2$  au lieu de rester constantes.

Voir transparent 9.

Cette évolution est prédite par QCD sous la forme d'une équation intégral-différentielle

$$\frac{d}{d \log Q^2} q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) P_{qq}(x/y) \quad (3.67)$$

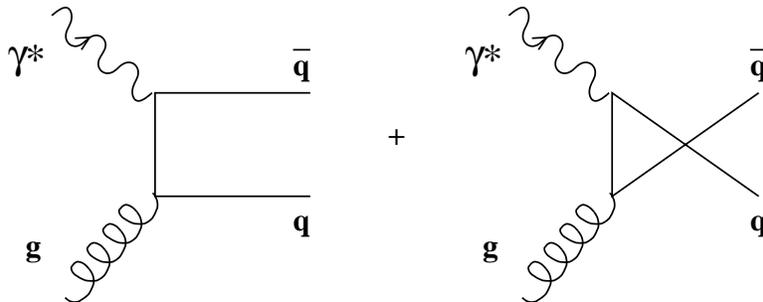
équation dite "DGLAP" pour Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli, Parisi.

Avec

$$P_{qq}(z = \frac{x}{y}) = \frac{(1+z)^2}{1-z} \quad (3.68)$$

la probabilité qu'un quark d'impulsion  $xP$  "proviene" d'un quark d'impulsion  $yP$ .

Un traitement complet de l'évolution nécessite d'inclure d'autres corrections comme le processus de fusion photon-gluons(PGF).



$$\left. \frac{d q(x, Q^2)}{d \log Q^2} \right|_{PGF} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} g(y, Q^2) P_{qg}(x/y) = \frac{d \bar{q}(x, Q^2)}{d \log Q^2} \quad (3.69)$$

Les gluons ne contribuent pas à l'évolution de la partie "valence"

$$\frac{d}{d \log Q^2} (q - \bar{q}) = 0 \quad (3.70)$$

Finalement

$$\boxed{\frac{d q_i(x, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q_i(y, Q^2) P_{qq}(x/y) + g(y, Q^2) P_{qg}(x/y)]} \quad (3.71)$$

Les fonctions de structures sont mesurées précisément en cible fixe et en collisionneur, permettant de couvrir une grande gamme en  $Q^2$ . Cette équation d'évolution, à travers un fit global de toutes les données, permet alors d'extraire  $g(x)$ .

La règle de somme

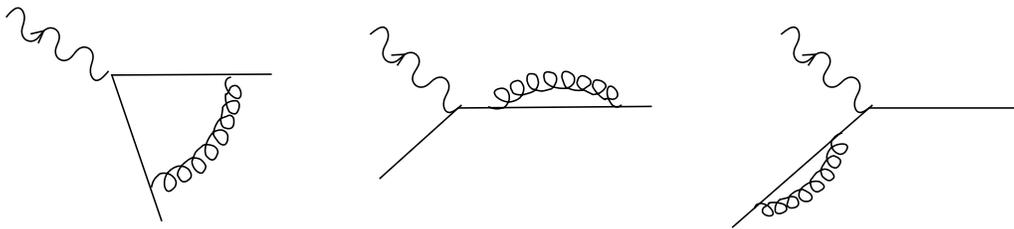
$$\sum_i \int_0^1 x q_i(x) + \sum_j \int_0^1 x \bar{q}_j(x) + \int_0^1 x g(x) dx = 1 \quad (3.72)$$

est vérifiée à 3% près!

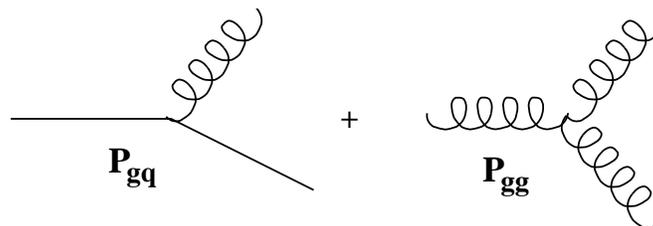
Expérimentalement, le rayonnement de gluon se manifeste par la production de hadrons (issus des jets du quark diffusé et du gluon rayonné) avec une impulsion transverse non-nulle par rapport à la direction du photon virtuel.

Rq :

Dans un calcul complet la divergence infra-rouge de  $P_{qq}$  en  $1/1-z$  est compensée par la prise en compte des diagrammes de gluons virtuels



Les distributions de gluons elles-mêmes présentent une évolution à travers les graphes

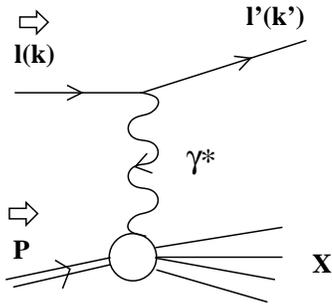


Voir transparent 10.

Au final les équations d'évolution couplées des distributions de quarks et de gluons peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante

$$\frac{d}{d \log Q^2} \begin{pmatrix} q(x, Q^2) \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ g \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

### 3.8 Diffusion Profondément Inélastique Polarisée



On impose un état de spin particulier au lepton initial et à la cible ce qui fait apparaître un terme antisymétrique supplémentaire.

$$\overleftrightarrow{L}_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} - i \lambda \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^\alpha k'^\beta \quad (3.74)$$

$$\overleftrightarrow{W}_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} + i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha}{p \cdot q} \left[ s^\beta g_1 + \left( s^\beta - \frac{s \cdot q}{p \cdot q} p^\beta \right) g_2 \right] \quad (3.75)$$

avec  $\lambda$  hélicité du lepton,  $s^\alpha$  tri-vecteur de spin de la cible,  $g_1(x)$  et  $g_2(x)$  nouvelles fonctions de structure polarisées.

La seule contribution non nulle des termes de spin provient de la contraction des 2 termes anti-symétriques. Il faut donc polariser à la fois le faisceau et la cible.

Le faisceau est polarisé longitudinalement, la cible peut être polarisée longitudinalement ou transversalement. On mesure alors les asymétries

$$A_{\parallel} = \frac{\sigma^{\rightarrow\leftarrow} - \sigma^{\rightarrow\rightarrow}}{\sigma^{\rightarrow\leftarrow} + \sigma^{\rightarrow\rightarrow}} \quad (3.76)$$

et

$$A_{\perp} = \frac{\sigma(\phi) - \sigma(\phi + \pi)}{\sigma(\phi) + \sigma(\phi + \pi)} \quad (3.77)$$

avec  $\phi$  l'angle azimutal de diffusion du lepton par rapport à la direction définie par la polarisation transverse.

Polarisation faisceau et asymétries :

Un faisceau de leptons contient un paquet de  $N_\ell$  particules qui se répartissent dans les deux états de polarisations

$$N_\ell = \overleftarrow{N}_\ell + \overrightarrow{N}_\ell \quad (3.78)$$

On définit les sections efficaces polarisées et non polarisées

$$\begin{aligned} \sigma_{unpol} &= \frac{1}{2}(\sigma^{\rightarrow\leftarrow} + \sigma^{\rightarrow\rightarrow}) & \sigma^{\rightarrow\rightarrow} &= \sigma_{unpol} + \sigma_{pol} \\ \sigma_{pol} &= \frac{1}{2}(\sigma^{\rightarrow\rightarrow} - \sigma^{\rightarrow\leftarrow}) & \sigma^{\rightarrow\leftarrow} &= \sigma_{unpol} - \sigma_{pol} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

Alors

$$\left(\overrightarrow{N}_\ell + \overleftarrow{N}_\ell\right) \sigma_{\text{exp}}^{\rightarrow\rightarrow} = \left(\overrightarrow{N}_\ell + \overleftarrow{N}_\ell\right) \sigma_{unpol} + \left(\overrightarrow{N}_\ell - \overleftarrow{N}_\ell\right) \sigma_{pol} \quad (3.79)$$

$$\sigma_{\text{exp}}^{\rightarrow\rightarrow} = \sigma_{unpol} + P \sigma_{pol} \quad (3.80)$$

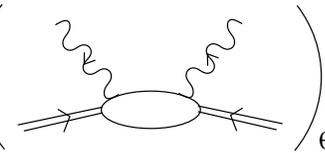
$$P = \frac{\overrightarrow{N}_\ell - \overleftarrow{N}_\ell}{\overrightarrow{N}_\ell + \overleftarrow{N}_\ell} \quad (3.81)$$

$$A_{\parallel} = \frac{\sigma^{\rightarrow\leftarrow} - \sigma^{\rightarrow\rightarrow}}{\sigma^{\rightarrow\leftarrow} + \sigma^{\rightarrow\rightarrow}} = P \frac{\sigma_{pol}}{\sigma_{unpol}} \quad (3.82)$$

avec  $P$  la polarisation du faisceau.

Asymétries  $\gamma^* - N$  et lepton- $N$  :

Le théorème optique relie la section efficace totale d'absorption du photon virtuel  $\sigma_{tot}^{\gamma^*}$  à l'amplitude de diffusion Compton à l'avant

$$\text{Im} \left( \text{Diagram} \right)_{\theta \rightarrow 0} = \frac{|\mathbf{p}|}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}^{\gamma^*}$$


On peut ainsi définir 4 amplitudes indépendantes  $M_{\gamma N \gamma' N'}$  où chacun des indices représente la projection du spin de la particule correspondante

$$\begin{aligned} \sigma_{3/2}^T &= \sigma_0 M_{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}} = \sigma_0 (F_1 + g_1 - \gamma^2 g_2) \\ \sigma_{1/2}^T &= \sigma_0 M_{1, \frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}} = \sigma_0 (F_1 - g_1 + \gamma^2 g_2) \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\sigma^{TL} = \sigma_0 M_{1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}} = \sigma_0 \gamma (g_1 + g_2) \quad (3.84)$$

$$\sigma^L = \sigma_0 M_{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}} = \sigma_0 \left[ (1 + \gamma^2) \frac{F_2}{2x} - F_1 \right] \quad (3.85)$$

avec  $\sigma_0 = \frac{4\pi^2\alpha}{M\kappa}$  et  $\kappa = \nu + Q^2/2M$  décrivant le flux de photons virtuels et  $\gamma^2 = \frac{Q^2}{\nu^2} = 2M\frac{x}{\nu} \ll 1$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{3/2}^T &\equiv \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \circ \\ \circ \end{array} \\ \sigma_{1/2}^T &\equiv \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \circ \\ \circ \end{array} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{On retrouve le fait que la moyenne sur les spins} \\ (\sigma_{3/2}^T + \sigma_{1/2}^T)/2 \text{ ne dépend que des fonctions de} \\ \text{structure non polarisées.} \end{array}$$

On définit alors les asymétries  $\gamma^* - N$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sigma_{1/2}^T - \sigma_{3/2}^T}{\sigma_{1/2}^T + \sigma_{3/2}^T} = \frac{g_1 - \gamma^2 g_2}{F_1} \sim \frac{g_1}{F_1} \\ A_2 &= \frac{\sigma^{TL}}{\sigma^T} = \gamma \frac{g_1 + g_2}{F_1} \end{aligned} \quad (3.86)$$

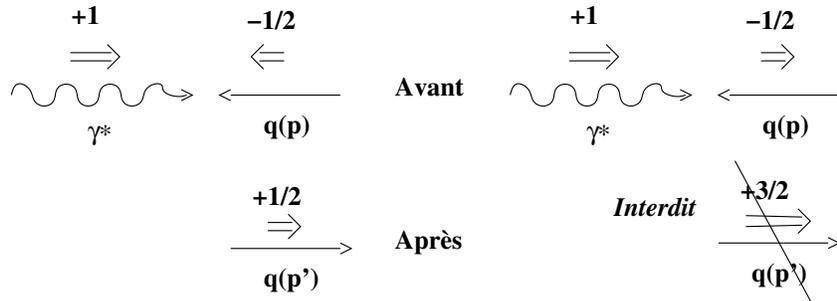
Reliées aux asymétries expérimentales lepton-nucléon par

$$\begin{aligned} A_{\parallel} &= D(A_1 + \eta A_2) \\ A_{\perp} &= d(A_2 - \xi A_1) \end{aligned} \quad (3.87)$$

où  $\eta \ll 1$  et  $\xi \ll 1$  sont des facteurs cinématiques  $D \sim y = \nu/E$  est le facteur de dépolarisation du photon virtuel qui traduit le fait qu'une fraction seulement de la polarisation du lepton est transférée au photon virtuel.

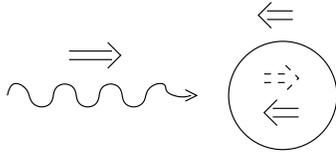
Image intuitive de  $g_1(x)$  :

On se place dans le repère de Breit où les impulsions des quarks initial et final vérifient  $\vec{p}' = -\vec{p}$



Le photon transverse de projection de spin +1 ne "voit" donc que les quarks de projection de spin  $-1/2$ .

En raisonnant maintenant sur la polarisation du nucléon cible



$$\sigma_{1/2} \propto q \uparrow (x)$$

Seuls les partons dont le spin est **aligné** avec celui du nucléon participent à la réaction.

Pour  $F_1(x)$  on avait

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 [q \uparrow (x) + q \downarrow (x) + \bar{q} \uparrow (x) + \bar{q} \downarrow (x)] \quad (3.88)$$

et par analogie

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 \left[ \underbrace{q \uparrow (x) - q \downarrow (x)}_{\Delta q} + \underbrace{\bar{q} \uparrow (x) - \bar{q} \downarrow (x)}_{\Delta \bar{q}} \right] \quad (3.89)$$

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 [\Delta q(x) + \Delta \bar{q}(x)] \quad (3.90)$$

Avec  $\Delta q_i(x)$  la fraction de spin du nucléon portée par les quarks de saveur  $i$  et de fraction d'impulsion  $x$ . Dans le modèle des partons,  $\gamma \rightarrow 0$  et  $g_2(x) = 0$ .

Règles de somme : Dans le cadre de QCD on peut montrer en utilisant "l'operator product expansion" (OPE) que

$$\Gamma_1^p = \int_0^1 g_1(x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{9} a_u + \frac{1}{9} a_d + \frac{1}{9} a_s \right] + \text{corrections QCD} \quad (3.91)$$

où

$$a_q \simeq \int \Delta q(x) + \Delta \bar{q}(x) dx \quad (3.92)$$

s'interprète comme la contribution totale du spin des quarks de saveur  $q$  au spin du nucléon.

Par symétrie de charge

$$\Gamma_1^n = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{9} a_d + \frac{1}{9} a_u + \frac{1}{9} a_s \right] \quad (3.93)$$

D'autre part

$$a_3 = a_u - a_d = \frac{g_A}{g_V} = 1.2573 \pm 0.0028 \quad (3.94)$$

la constante de désintégration faible du neutron. On obtient alors la **règle de somme de Bjorken**

$$\boxed{\Gamma_1^p - \Gamma_1^n = \frac{1}{6}(a_u - a_d) = \frac{1}{6} \frac{g_A}{g_V}} \quad (3.95)$$

bien vérifiée expérimentalement.

En supposant la symétrie  $SU(3)$  exacte, une nouvelle combinaison des  $a_q$  (combinaison "octet") peut être reliée aux constantes de désintégration des hyperons

$$a_8 = a_u + a_d - 2a_s \simeq 0.6 \quad (3.96)$$

Si on suppose de plus  $a_s = 0$  on peut déterminer tous les  $a_q$  et en particulier prédire

$$\boxed{\Gamma_1^{p,n} = \frac{5}{36} a_8 \pm \frac{1}{12} \frac{g_A}{g_V} + \theta(\alpha_s(Q^2))} \quad (3.97)$$

relation connue sous le nom de **règle de somme d'Ellis-Jaffe**.

L'expérience EMC a montré que cette règle de somme n'est pas satisfaite.

Crise du spin :

On décompose le spin du nucléon sur ces constituants

$$\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} \Delta\Sigma}_{\text{Quarks}} + \underbrace{\Delta G}_{\text{Gluons}} + \underbrace{L_q + L_g}_{\text{Moment orbital}} \quad (3.98)$$

avec  $\Delta\Sigma = a_0 = \Delta u + \Delta d + \Delta s$

Modèle naïf de quark :

- 1 quark anti-aligné sur le spin du nucléon, 2 quarks alignés, conduisant à  $\Delta\Sigma = 1$
- En incluant les corrections relativistes :

$$\Delta\Sigma = 0.75, \quad L_q = 0.125 \quad (3.99)$$

- En utilisant  $SU(3)$  et supposant  $a_s = 0$

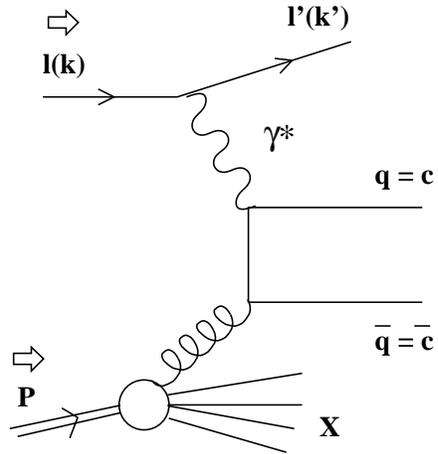
$$\Delta\Sigma = a_0 = a_8 \simeq 0.6 \quad (3.100)$$

~accord qualitatif

- Les mesures violent la règle de somme d'Ellis-Jaffe. On laisse donc  $a_s$  libre et utilise  $a_3 = g_A/g_V$  et  $a_8 \sim 0.6$  pour résoudre le système

$$\Delta\Sigma = 0.2, \quad \Delta_s = -10\% \quad (3.101)$$

Les quarks contribuent moins que prévu au spin du nucléon. Des campagnes de mesures en cours visent à atteindre  $\Delta G$  en regardant par exemple des processus de fusion photon-gluon.







# Invariance d'échelle

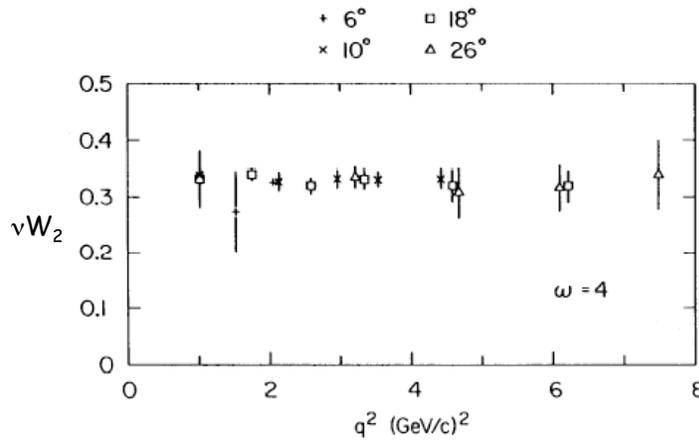


Fig. 13. An early observation of scaling:  $\nu W_2$  for the proton as a function of  $q^2$  for  $W > 2$  GeV, at  $\omega = 4$ .

2

# Relation de Callan-Gross

$$F_2(x) = 2 \times F_1(x)$$

Partons ponctuels  
de spin 1/2

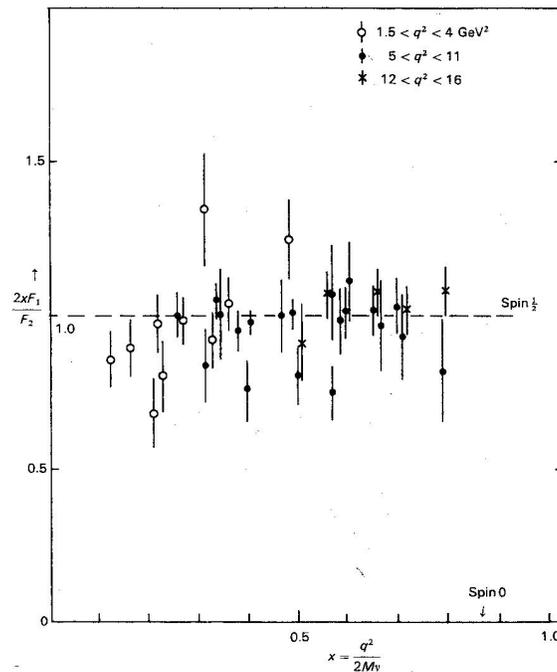
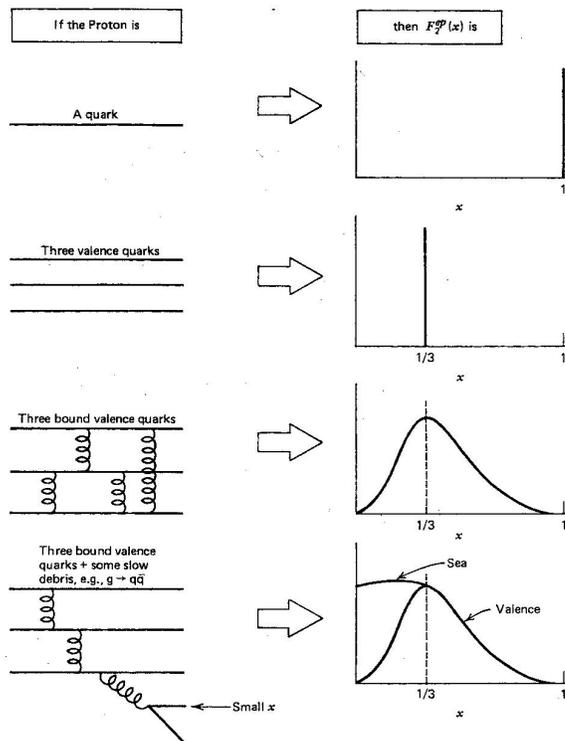


Figure 8.10 The ratio  $2xF_1/F_2$  measured in SLAC electron-nucleon scattering experiments. For spin- $\frac{1}{2}$  partons, with  $g = 2$ , a ratio of unity is expected in the limit of large  $q^2$ —the Callan-Gross relation. (Data compiled from published SLAC data.)

# Image Intuitive



## $F_2(ep) - F_2(en)$

Contribution des quarks de valence

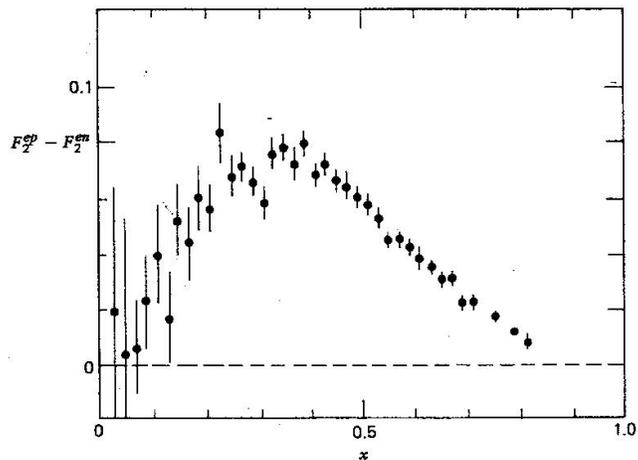


Fig. 9.8 The difference  $F_2^{ep} - F_2^{en}$  as a function of  $x$ , as measured in deep inelastic scattering. Data are from the Stanford Linear Accelerator.

# $F_2(ep) / F_2(en)$

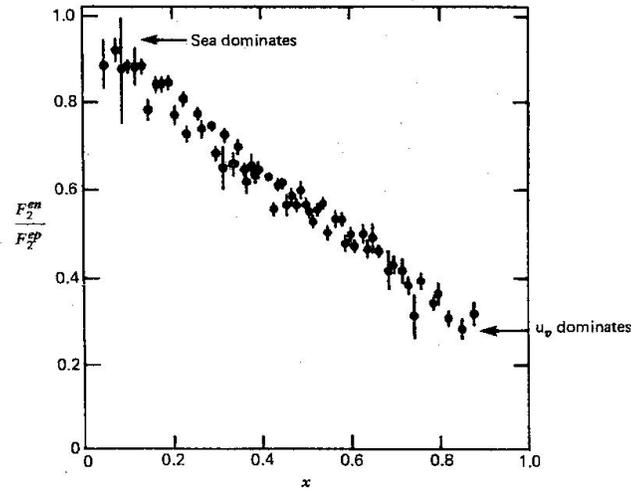
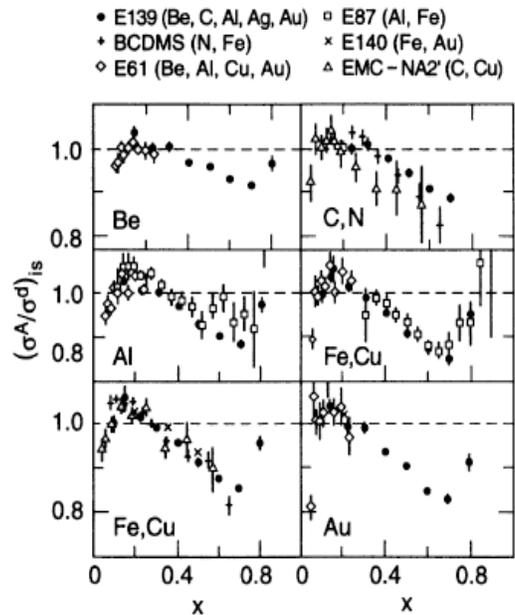


Fig. 9.6 The ratio  $F_2^{en}/F_2^{ep}$  as a function of  $x$ , measured in deep inelastic scattering. Data are from the Stanford Linear Accelerator.

6

# Effet "EMC"

Modification des fonctions de structure par le milieu nucléaire



7

# $F_2(e), F_2(\nu)$

Universalité des distributions de partons  
Charge fractionnaire des quarks

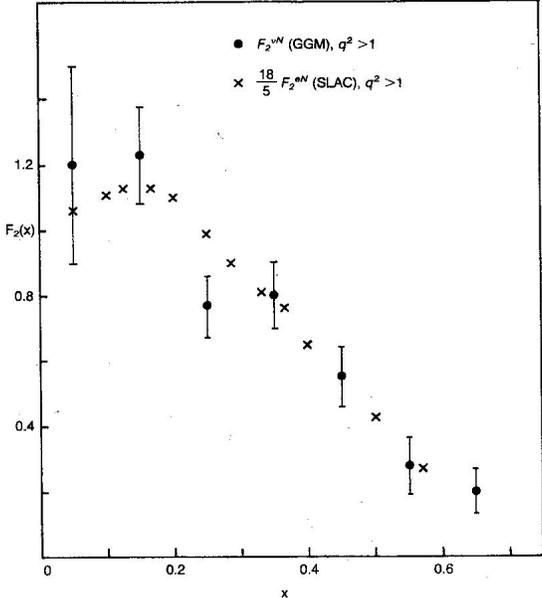
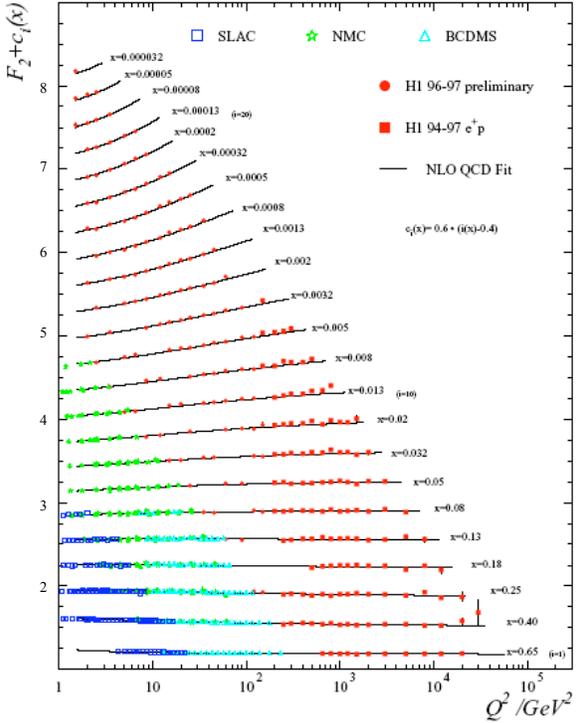


Figure 8.12 (a) First comparison of  $F_2^{\nu N}$  measured in neutrino-nucleon scattering in the Gargamelle heavy-liquid bubble chamber in a PS neutrino beam at CERN, with SLAC data on  $F_2^e N$  from electron-nucleon scattering, in the same region of  $q^2$ . The two sets of data agree when the electron points are multiplied by the factor  $\frac{18}{5}$ , which is the reciprocal of the mean squared charge of  $u$ - and  $d$ -quarks in the nucleon. This is a confirmation of the fractional charge assignments for the quarks. Note that the total area under the curve, measuring the total momentum fraction in the nucleon carried by quarks, is about 0.5. The remaining mass is ascribed to gluon constituents, which are the postulated carriers of the interquark color field.

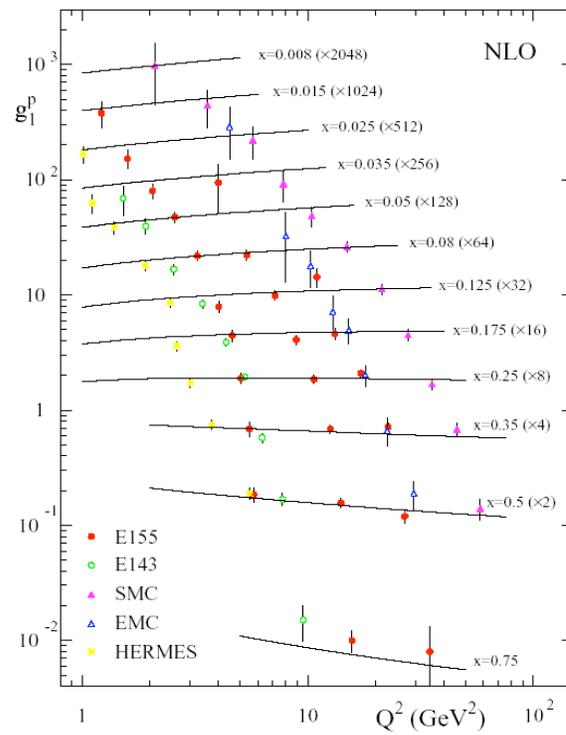
# $F_2^p$

Evolution en  $Q^2$

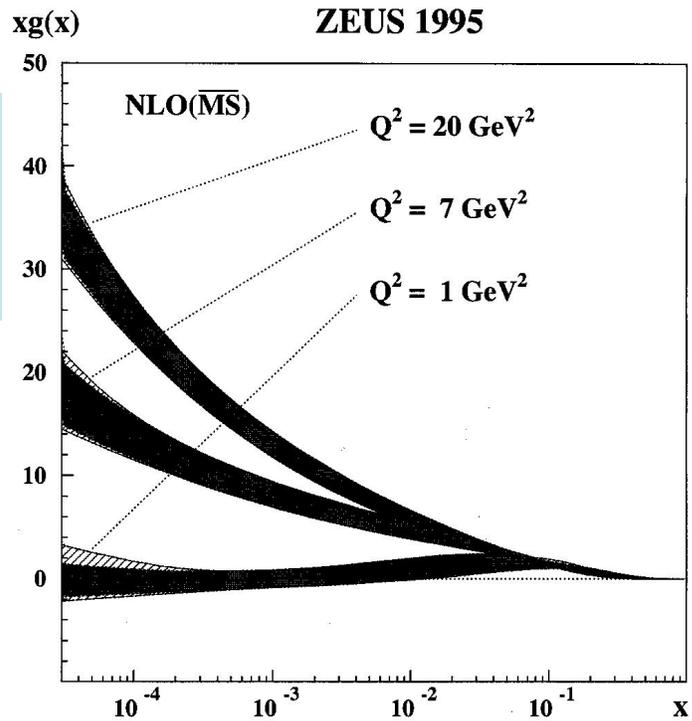


$$g_p^1$$

Evolution en  $Q^2$



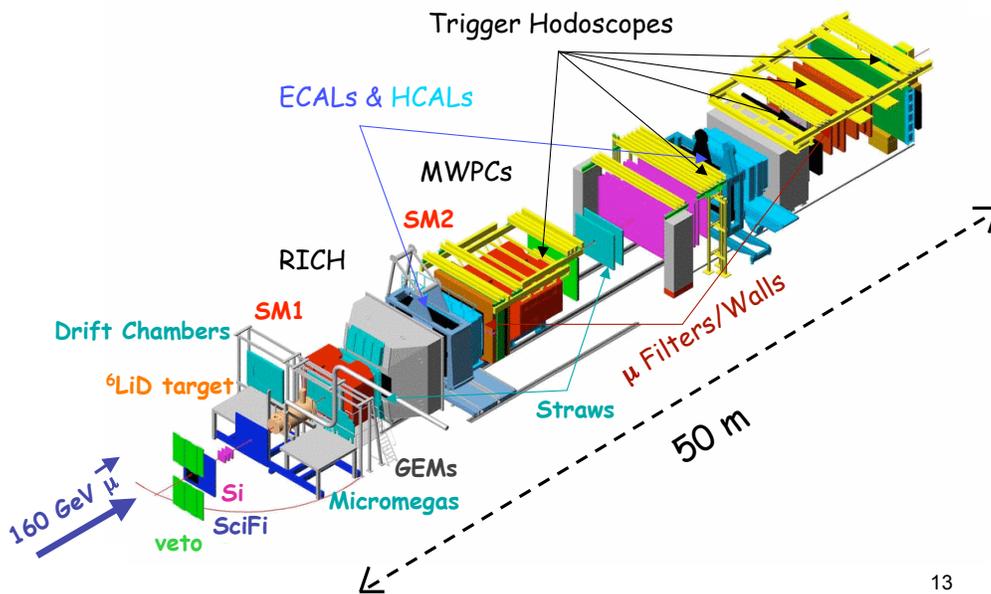
Evolution  
en  $Q^2$  de  
 $G(x)$



$\mu$  polarisés longitudinalement 160 GeV/c  
 $2 \cdot 10^8 \mu$ / spill (4.8s / 16.8s)  
 $P_B = -80\%$   
 Cible de deutons polarisés longitudinaux ou transverses :  
 ${}^6\text{LiD}$   $P_T \sim 50\%$   
 Luminosité:  $\sim 5 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

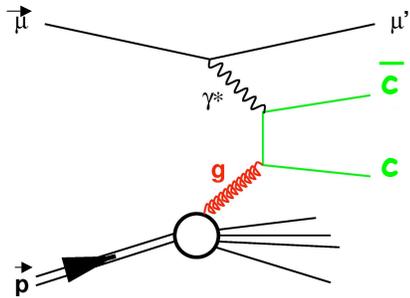


## Spectromètre COMPASS



# ΔG/G par le charme ouvert

Fusion Photon-Gluon :  $\gamma g \rightarrow c\bar{c}$



**CHARME:**  $c \rightarrow D^0 \rightarrow K\pi$

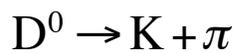
$\sigma \sim 100 \text{ nb}$ , BR = 4%

Bruit de fond combinatoire

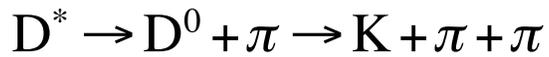
Statistique limitée

Expérience difficile.

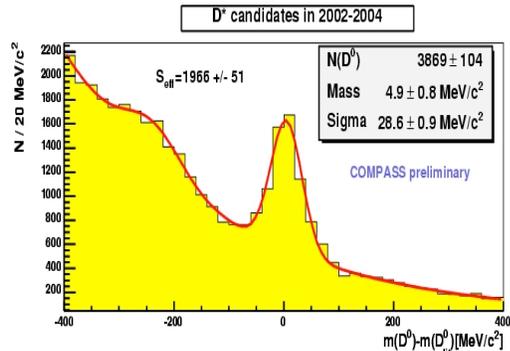
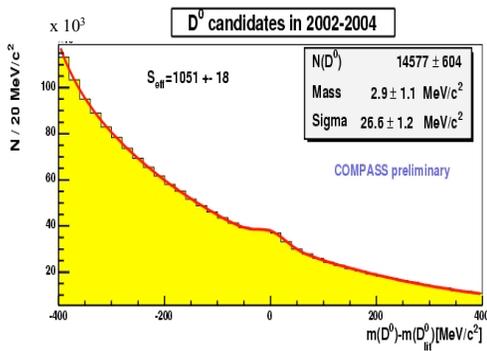
# ΔG/G par le charme ouvert



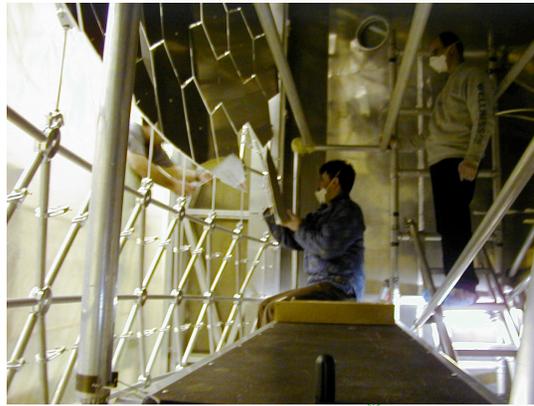
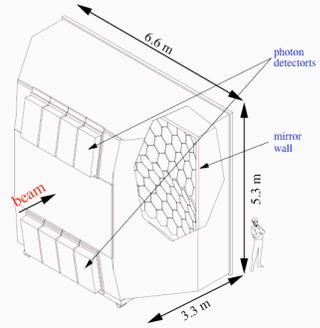
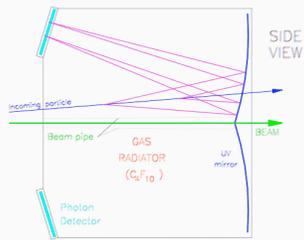
untagged



tagged



# Détecteur RICH



$e^-$  (3 GeV/c) - HV = 2050 V



$p$  (3 GeV/c) - HV = 2050 V





# Chapitre 4

## Modèle du nucléon : le "M.I.T. Bag"

### 4.1 Philosophie du modèle

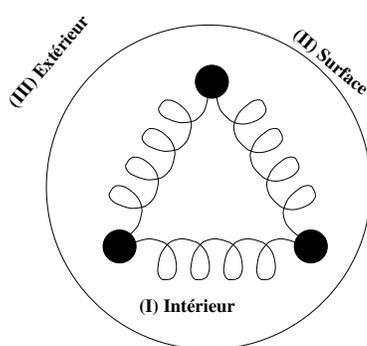
Le modèle du sac permet de décrire le nucléon comme un système de quarks :

– **Relativistes** :

Utilisation d'un formalisme covariant. Prédiction de masses absolues, intégrant la dynamique des constituants internes, alors qu'une approche non-relativiste prédira des différences de masses.

– **Confinés** :

Propriété de QCD non perturbative "mise à la main" dans le modèle par la définition d'une surface fermée, le sac, qui contient les quarks.



I/ La région **intérieure** contient des quarks quasi-libres, correspondant au régime perturbatif de *QCD*.

II/ La **surface** :

- Donne les conditions aux limites
- Assure le confinement
- Impose des états singlets de couleur.

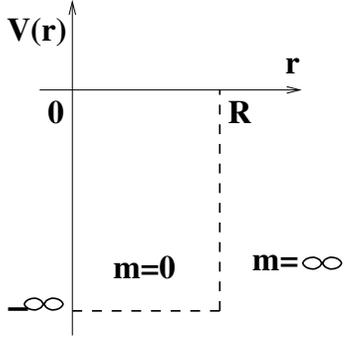
Les prédictions de ce modèle portent sur la spectroscopie des hadrons,  $\langle r^2 \rangle$ ,  $\mu$ , les facteurs de forme, ...

Quelques références utiles :

- M.E. Rose, relativistic Electron Theory, ED. Wiley
- Cours A.W. Thomas, Advances in Nuclear Physics, Vol. 13, 1983

## 4.2 Modèle de Bogolioubov

On traite ici le cas d'école de particules de Dirac sans masse et libres dans un puit de potentiel sphérique de profondeur  $\infty$  :



La profondeur infinie du puit équivaut à prendre  $m \rightarrow \infty$  à l'extérieur

A l'intérieur du puit l'équation de Dirac s'écrit

$$H\Psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (4.1)$$

avec

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \gamma^0 \quad (4.2)$$

### 4.2.1 Les bons nombres quantiques des fonctions d'onde

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) e^{-iEt}$$

De manière analogue au traitement non relativiste de la composition des moments angulaires

$$\left| \ell \frac{1}{2}; j\mu \right\rangle = \sum_m C_{\ell 1/2 j}^{(\mu-m) m \mu} \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle \left| \ell, \mu - m \right\rangle \quad (4.3)$$

où les états sont caractérisés par les valeurs propres de  $J^2$ ,  $J_z$  et  $L$ , nous cherchons les opérateurs qui commutent avec  $H$  et fourniront les constantes du mouvement qui caractérisent la fonction d'onde

$$\left[ H, \vec{j} \right] = 0 \quad \left| \begin{array}{l} j^2 \Psi = j(j+1) \Psi \\ j_z \Psi = \mu \Psi \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\left[ H, s^2 \right] = 0 \quad s^2 \Psi = s(s+1) \Psi = \frac{3}{4} \Psi \quad (4.5)$$

n'apporte pas d'info supplémentaire. En écrivant  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{\nabla}$  on obtient

$$[H, \ell] = i(\vec{\alpha} \times \vec{p}) \neq 0 \quad (4.6)$$

De même,  $[H, \ell^2] \neq 0$ .

Le "bon" opérateur à considérer, qui commute avec l'hamiltonien, est une généralisation relativiste de  $K = \vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} + 1$

$$\boxed{K = \beta(\vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} + 1)}, \quad \text{Matrice } 4 \times 4 \quad (4.7)$$

On montre que

$$[H, K] = [\vec{j}, K] = 0 \quad (4.8)$$

La valeur propre de l'opérateur  $K$  est donc un bon nombre quantique.

(Voir M.E. Rose, Relativistic Electron Theory, Ed. Wiley, sections 12 et 26)

Valeurs propres de  $K$  :

$$K = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} + 1 & 0 \\ 0 & -(\vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} + 1) \end{pmatrix} \quad \text{On note } K\Psi = -\kappa\Psi \quad (4.9)$$

Considérons le spineur à deux composantes  $\phi$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} = \underbrace{\left( \vec{\ell} + \frac{\vec{\sigma}}{2} \right)^2}_{\vec{j}^2} - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2$$

Donc

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} + 1)\phi = \underbrace{\left[ j(j+1) - \ell(\ell+1) + \frac{1}{4} \right]}_{-\kappa} \phi$$

Soit

$$\begin{cases} j = \ell - \frac{1}{2} & ; & \kappa = \ell \\ j = \ell + \frac{1}{2} & ; & \kappa = -\ell - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = j + \frac{1}{2} \\ \kappa = -(j + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (4.10)$$

La connaissance de  $\kappa$  seul spécifie  $j$  et  $\ell$  :

$$\begin{aligned} s_{1/2} & : j = 0 + 1/2 & \kappa = -1 \\ p_{1/2} & : j = 1 - 1/2 & \kappa = +1 \\ p_{3/2} & : j = 1 + 1/2 & \kappa = -2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\kappa$  fixe donc la parité de la fonction d'onde.

En notant les grandes et petites composantes du spineur

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi^u \\ \Psi^\ell \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

On obtient d'après eq.(4.9)

$$\begin{cases} \left( \vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} + 1 \right) \Psi^u &= -\kappa \Psi^u \\ \left( \vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} + 1 \right) \Psi^\ell &= \kappa \Psi^\ell \end{cases} \quad (4.13)$$

## 4.2.2 Résoudre l'équation de Dirac en coordonnées polaires

La symétrie sphérique du problème conduit à passer en coordonnées sphériques (équivalent relativiste du potentiel central-atome d'hydrogène). D'après eq.(4.13) nous pouvons écrire sans perte de généralité

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_\kappa^\mu(\vec{r}) = \begin{vmatrix} g(\vec{r}) \chi_\kappa^\mu \\ i f(\vec{r}) \chi_{-\kappa}^\mu \end{vmatrix} \quad (4.14)$$

La fonction d'onde est déterminée par ses deux indices

$\mu$  : projection de  $j$

$\kappa$  : fournit  $j$ ,  $\ell$  et la parité de  $\Psi$ .

$f(r)$  et  $g(r)$  sont des fonctions radiales dont l'expression dépend de la valeur de  $\kappa$ . La phase  $i$  est introduite afin que les deux fonctions  $f$  et  $g$  soient purement réelles.

Notons la propriété utile

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \chi_\kappa^\mu = -\chi_{-\kappa}^\mu, \text{ avec } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (4.15)$$

Démo :  $(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})^2 = 1$  et  $\vec{\sigma} \cdot \hat{r}$  est un pseudoscalaire d'où le facteur  $(-1)$  et non  $(+1)$  entre les deux états de parité opposées  $\chi_\kappa^\mu$  et  $\chi_{-\kappa}^\mu$ .

Donc

$$\Psi_\kappa^\mu(\vec{r}) = \begin{vmatrix} g(\vec{r}) \chi_\kappa^\mu \\ -i \vec{\sigma} \cdot \hat{r} f(\vec{r}) \chi_\kappa^\mu \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

Pour résoudre l'équation de Dirac (4.1) il faut exprimer  $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$  en coordonnées polaires

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -i \hbar \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + i \hbar \frac{1}{r} (\vec{\alpha} \cdot \hat{r}) (\beta K - 1) \quad (4.17)$$

Démo

$$\begin{aligned} \vec{p} &= -i \hbar \vec{\nabla} \text{ et } \vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\hat{r}}{r} \times \vec{\ell} \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{p} &= -i \hbar \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hbar}{r} \vec{\alpha} \cdot (\hat{r} \times \vec{\ell}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

or

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \vec{\sigma} \cdot \vec{A} \vec{\alpha} \cdot \vec{B} = -\gamma_5 \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\alpha} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (4.19)$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot (\hat{r} \times \vec{\ell}) &= -i \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} = i \vec{\alpha} \cdot \hat{r} (\beta K - 1) \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{p} &= -i \hbar \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + i \hbar \frac{1}{r} (\vec{\alpha} \cdot \hat{r}) (\beta K - 1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Autre relation utile :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{B} \quad (4.21)$$

Nous pouvons réécrire l'équation de Dirac

$$H\Psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \Psi = E \Psi \quad (4.22)$$

en utilisant l'expression (4.16) pour les spineurs et (4.17) pour  $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$  avec  $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) e^{-iEt}$ . Il en résulte un système de deux équations différentielles couplées

$$\begin{aligned} (E - m)g &= -\left(\frac{df}{dr} + \frac{f}{r}\right) + \frac{\kappa f}{r} \\ (E + m)f &= \left(\frac{dg}{dr} + \frac{g}{r}\right) + \frac{\kappa g}{r} \end{aligned} \quad (4.23)$$

qui se réécrivent

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} &= \frac{\kappa - 1}{r} f - (E - m)g \\ \frac{dg}{dr} &= -\frac{\kappa + 1}{r} g + (E + m)f \end{aligned} \quad (4.24)$$

Par la suite nous ne considérerons que les états  $L = 0$ . Cette simplification garde la possibilité de décrire les états fondamentaux, avec les quarks dans l'état  $s_{1/2}$ . Les spineurs de l'équation (4.16) deviennent alors de simples spineurs de Pauli, notés  $\chi_{1/2}^\mu$ . De plus les états  $s_{1/2}$  correspondent à  $\kappa = -1$ . La deuxième équation du système (4.24) se réduit donc à

$$f = \frac{1}{E + m} \frac{dg}{dr} \quad (4.25)$$

Nous posons  $g = u/r$  et reportons (4.25) dans la première équation du système

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + (E^2 - m^2)u = 0 \quad (4.26)$$

Intérieur du puit ( $m = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + E^2 u &= 0 \\ u(r) &= A \sin(Er) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Extérieur du puit ( $m \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} - (m^2 - E^2) u &= 0 \\ u(r) &= A \sin(Er) e^{-\sqrt{m^2 - E^2}(r-R)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

À l'intérieur du puit la solution en  $B \cos(Er)$  est rejetée car singulière en  $r = 0$ . À l'extérieur du puit  $g(r) \propto e^{-mr}/r$ , ce qui conduit à un confinement à la Yukawa quand  $m \rightarrow \infty$ .

### 4.2.3 Condition aux limites

Le confinement dans le puit de potentiel implique des conditions aux limites qui vont sélectionner les modes propres des quarks dans le "nucléon".

$u$  et donc  $g$  sont continues en  $r = R$ , si on demande aussi la continuité pour  $f$

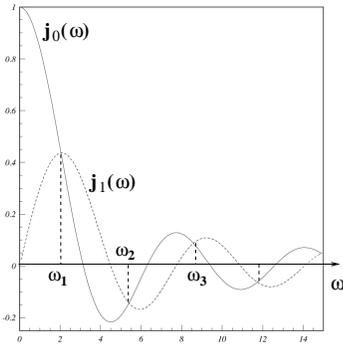
$$\left(1 - \frac{E}{E+m}\right) \cos(ER) + \frac{\sqrt{1 - (E/m)^2}}{1 + E/m} \sin(ER) = \frac{\sin(ER)}{ER} \left(1 - \frac{E}{E+m}\right)$$

Soit, quand  $m \rightarrow \infty$

$$\frac{\sin(ER)}{ER} = \frac{\sin(ER)/ER - \cos(ER)}{ER}$$

$j_0(ER) = j_1(ER)$

(4.29)



Cette équation possède une infinité de solutions. On pose

$$E_{n,\kappa} = \frac{\omega_{n,\kappa}}{R} \quad (4.30)$$

avec  $n =$  nombre quantique principal.  
 $\omega_{1,-1} = 2.04, \omega_{2,-1} = 5.40, \dots$

La solution générale  $\kappa = -1$  à l'intérieur du puit se déduit facilement de (4.27)

$$\Psi_{n,\kappa=-1}^\mu(r) = \frac{N_{n,-1}}{\sqrt{4\pi}} \begin{vmatrix} j_0\left(\frac{\omega r}{R}\right) \chi_{1/2}^\mu \\ +i \vec{\sigma} \cdot \hat{r} j_1\left(\frac{\omega r}{R}\right) \chi_{1/2}^\mu \end{vmatrix}$$

(4.31)

Le coefficient de normalisation est simplement déduit de

$$\int d^3r \Psi^\dagger \Psi = 1 \implies N_{n,-1}^2 = \frac{\omega^3}{2R^3(\omega - 1) \sin^2 \omega} \quad (4.32)$$

Calculons la densité locale de quarks

$$J_0 = \Psi^\dagger \Psi = \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi$$

$$J_0(r) \propto \left[ j_0^2\left(\frac{\omega r}{R}\right) + j_1^2\left(\frac{\omega r}{R}\right) \right] \theta(R - r) \quad (4.33)$$

avec

$$\begin{cases} \theta(R-r) = 1, & r \leq R \\ \theta(R-r) = 0, & r > R \end{cases} \quad \text{fonction de Heaviside} \quad (4.34)$$

En conséquence la densité n'est pas nulle à la surface ( $J^0(R) \neq 0$ ) comme on aurait pu l'attendre en non-relativiste. Ceci est inhérent à l'équation de Dirac.

Le modèle reste valable si le **flux** à travers la surface est nul. Nous verrons dans la section 4.3 sur le MIT Bag que ceci équivaut à

$$\boxed{\bar{\Psi}\Psi|_{r=R} = 0} \quad (4.35)$$

Ce qui se vérifie directement à partir de eq.(4.31)

$$\bar{\Psi}\Psi|_{r=R} = [j_0(\omega), i\vec{\sigma}\cdot\hat{r}j_1(\omega)] \times \begin{vmatrix} j_0(\omega) \\ i\vec{\sigma}\cdot\hat{r}j_1(\omega) \end{vmatrix} = j_0^2(\omega) - j_1^2(\omega) = 0 \quad (4.36)$$

d'après la condition aux limites (4.29).

#### 4.2.4 Prédiction

L'approche relativiste permet d'exprimer la masse du nucléon comme la somme des énergies des 3 quarks dans l'état  $1s$  du sac au repos

$$M_N = \frac{3\omega_{1,-1}}{R}, \quad \omega_{1,-1} = 2.04, \quad M_N \sim 938 \text{ MeV} \quad (4.37)$$

Soit  $R = 1.3 \text{ fm}$ .

En mettant un quark dans l'état  $2s_{1/2}$ , on obtient la résonance Ropper

$$\frac{M_{Ropper}}{M_N} = \frac{2\omega_{1,-1} + \omega_{2,-1}}{3\omega_{1,-1}} = \frac{4.08 + 5.40}{6.12} = 1.55 \quad (4.38)$$

En bon accord avec l'expérience qui donne 1.56...

Mais nous allons voir que le modèle de Bogolioubov n'est pas satisfaisant et que ce résultat n'est qu'une coïncidence heureuse.

### 4.3 Le modèle du MIT Bag

Même point de départ : les quarks sont confinés dans un sac de volume  $V$ . Le confinement est assuré par les conditions aux limites de la surface  $S$ .

A l'intérieur on **suppose** un traitement perturbatif de l'interaction forte. En première approximation les quarks sont libres.

En pratique les calculs sont faisables avec  $S$  sphérique et statique. Le développement en puissance de la constante de couplage est limité à l'ordre 1 avec l'échange d'un gluon.

### 4.3.1 Formalisme Lagrangien

Prenons comme point de départ le Lagrangien des quarks libres à l'intérieur du sac

$$\mathcal{L}_0 = [\bar{\Psi}(\vec{r}) i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(\vec{r})] \theta_B(r) \quad (4.39)$$

avec

$$\begin{aligned} \theta_B(r) &= 1 & r \in \text{sac} \\ &= 0 & r \notin \text{sac} \end{aligned}$$

N.B. : On se restreint par la suite aux seuls états  $j=1/2$  qui ont la particularité de ne dépendre que de  $|\vec{r}|$ , pas de  $\theta$  et  $\varphi$ .

L'expression (4.39) n'est pas satisfaisante car les équations d'Euler-Lagrange qui en sont issues ne sont pas hermitiques. Ecrivons par exemple l'équation pour les variations par rapport à  $\bar{\Psi}(r)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0 \quad (4.40)$$

qui donne directement l'équation de Dirac à l'intérieur du sac

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(r) \theta_B(r) = 0 \quad (4.41)$$

Cependant la même équation pour les variations par rapport à  $\Psi(r)$  donnera un terme supplémentaire du fait de la condition de surface

$$i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \theta_B(r), \quad \text{avec } \partial_\mu \theta_B(r) = n_\mu \delta S(r) \quad (4.42)$$

$n_\mu$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $S$ ,  $\delta S(r)$  est la fonction  $\delta$  de surface.

Démo : dans le cas sphérique statique

$$\partial_\mu \theta_B(r) = \frac{\partial}{\partial r_i} \theta \left( \sum r_i^2 - R^2 \right) \quad (4.43)$$

$$= \frac{2r_i}{2R} \delta(|\vec{r}| - R) = \hat{r} \delta(|\vec{r}| - R) \quad (4.44)$$

Pour conserver l'hermiticité des équations du mouvement il faut adopter une forme symétrisée du Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{i}{2} [\bar{\Psi}(r) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(r) - \partial_\mu \bar{\Psi}(r) \gamma^\mu \Psi(r)] \theta_B(r) \\ &= \frac{i}{2} [\bar{\Psi}(r) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi(r)] \theta_B(r) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Le courant de quark garde son expression habituelle

$$J^\mu(r) = i \bar{\Psi}(r) \gamma^\mu \Psi(r) \quad (4.46)$$

### 4.3.2 Conditions aux limites

A nouveau le confinement s'exprime par l'absence de flux à travers la surface

$$n_\mu J^\mu(R) = \bar{\Psi}(R) \vec{\gamma} \cdot \vec{n} \Psi(R) = 0 \quad (4.47)$$

$n_\mu$  est toujours le vecteur unitaire normal à la surface et

$$n_\mu n^\mu = -1 \quad (4.48)$$

remarquons que d'après eq.(4.48)

$$(-i \gamma \cdot n)^2 = -n^2 = 1 \quad (4.49)$$

Les valeurs propres de l'opérateur  $i \gamma \cdot n$  sont donc  $\pm 1$ . On choisit

$$i \gamma \cdot n \Psi(R) = \Psi(R) \quad (4.50)$$

Ce qui implique

$$\bar{\Psi}(R) i \gamma \cdot n = -\bar{\Psi}(R) \quad (4.51)$$

En insérant ces deux équations dans eq.(4.47) et en utilisant (4.50) et (4.51)

$$\begin{aligned} n_\mu J^\mu(R) &= \bar{\Psi}(R) \gamma \cdot n \Psi(R) \\ &= -i \bar{\Psi} \Psi \\ &= +i \bar{\Psi} \Psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Nous retrouvons la condition énoncée en (4.35) qui reproduit les conditions aux limites du modèle de Bogolioubov.

Les équations (4.50) sont appelées les **conditions aux limites linéaires du modèle du sac**.

### 4.3.3 Conservation Energie-Impulsion

Pour l'instant nous n'avons fait que réécrire différemment le modèle de Bogolioubov. Cependant le formalisme Lagrangien va permettre de montrer l'incomplétude de ce modèle. A partir du Lagrangien (4.45) nous dérivons le tenseur énergie-impulsion

$$T_{Dirac}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \partial^\nu \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} \partial^\nu \bar{\Psi} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_0 \quad (4.53)$$

Rappel :

$$E = \int d^3x T^{00}(x), \quad P^i = \int T^{0i}(x) d^3x \quad (4.54)$$

On obtient

$$T_{Dirac}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[ \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \Psi \right] \theta_B \quad (4.55)$$

A l'intérieur du sac l'équation de Dirac assure

$$\partial_\mu T_{Dirac}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.56)$$

l'énergie-impulsion est conservée.

Mais à nouveau la fonction  $\theta_B$  engendre un terme de surface supplémentaire

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu}|_{r=R} &= \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \Psi n_\mu \delta(S) \\ &= -\frac{1}{2} \partial^\nu (\bar{\Psi} \Psi) \delta(S), \quad \text{d'après (4.50)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} n_\nu \partial^\nu (\bar{\Psi} \Psi)}_{P_{Dirac} \neq 0} n^\nu \delta(S), \quad \text{d'après (4.48)} \end{aligned} \quad (4.57)$$

L'énergie-impulsion n'est pas conservée !

Ce résultat donne un nouvel éclairage sur l'expression (4.37)

$$M_N^{Bogolioubov} = 3E = \frac{3\omega}{R} \quad (4.58)$$

La dépendance en  $1/R$  est naturelle puisque c'est la **seule** échelle du modèle et que  $M \equiv E \equiv 1/L$ .

Cependant, sans la contrainte de la masse expérimentale  $M_N = 938 MeV$ , le minimum d'énergie est à  $R \rightarrow \infty$ . Le terme de surface n'a plus lieu d'être et l'énergie-impulsion est conservée...mais il n'y a plus de sac !

Pour rétablir la conservation de  $T^{\mu\nu}$  nous devons ajouter un terme phénoménologique de densité d'énergie  $-B\theta_B$  dans le Lagrangien. L'hypothèse du "MIT Bag" est que le paramètre

$B$  sera commun à tous les hadrons et s'interprète par le fait que créer une "bulle" (un sac) de volume  $V$  dans le vide de QCD coûte une énergie  $BV$ . Ce coût énergétique va compenser la "pression de Dirac"  $P_{Dirac}$  de l'équation (4.57) exercée par le champs de quark sur la paroi du sac.

L'équation (4.55) devient donc

$$T_{Bag}^{\mu\nu} = [T_{Dirac}^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} B] \theta_B \quad (4.59)$$

$$\partial_\mu T_{Bag}^{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu T_{Dirac}^{\mu\nu}}_0 + P_{Dirac} n^\nu \delta(S) + B n^\nu \delta(S) = 0 \quad (4.60)$$

On obtient ainsi la **condition aux limites non-linéaire du sac**

$$\boxed{B = -P_{Dirac} = -\frac{1}{2} n \cdot \partial(\bar{\Psi}\Psi), \quad (r = R)} \quad (4.61)$$

#### 4.3.4 Equations du sac pour des quarks libres, sans masse

$$\begin{cases} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(r) = 0, & \forall r \in \text{sac} \quad (\text{Dirac}) \\ i \gamma \cdot n \Psi(r) = \Psi(r), & r = R \quad (\text{Condition linéaire, flux sortant nul}) \\ B = -\frac{1}{2} n \cdot \partial(\bar{\Psi}\Psi), & r = R \quad (\text{Condition non-linéaire, conservation de } E, \vec{p}) \end{cases} \quad (4.62)$$

Ces équations sont les équations d'Euler-Lagrange du Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Bag} = & \left[ \frac{i}{2} \bar{\Psi}(r) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi(r) - B \right] \theta_B(r) \\ & - \frac{1}{2} [\bar{\Psi}(r) \Psi(r)] \delta(S) \end{aligned} \quad (4.63)$$

#### 4.3.5 Prédiction

L'énergie totale du sac s'écrit

$$M(R) = \int_V d^3r T^{00}(r) = \sum_{q_i} E_{q_i} + B \times V \quad (4.64)$$

L'énergie des quarks s'obtient comme pour le modèle de Bogolioubov

$$E_{q_i} = \frac{\omega_{q_i}}{R} \quad (4.65)$$

$$M(R) = \sum_{q_i} \frac{\omega_{q_i}}{R} + \frac{4}{3} \pi R^3 B \quad (4.66)$$

Cette fois le rayon du sac s'obtient naturellement en minimisant  $M(R)$  (on peut montrer que cette minimisation  $\partial M(R)/\partial R = 0$  équivaut à la condition non-linéaire (4.61)).

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(R)}{\partial R} &= 0 = -\sum_{q_i} \frac{\omega_{q_i}}{R^2} + 4\pi R^2 B \\ R^4 &= \sum_{q_i} \omega_{q_i} / 4\pi B \end{aligned}$$

$$M(R) = \frac{4}{3} \frac{\sum \omega_{q_i}}{R} = \frac{4}{3} \left( \sum_{q_i} \omega_{q_i} \right)^{3/4} (4\pi B)^{1/4} \quad (4.67)$$

Si on prend  $M(R) \sim (M_N + M_\Delta)/2$

$$R = 1.46 fm, \quad B^{1/4} \sim 113 MeV \quad B \sim 21 MeV/fm^3 \quad (4.68)$$

et d'après (4.38)

$$M_{Ropper}/M_N = (1.55)^{3/4} = 1.39 \quad (4.69)$$

Jusqu'à présent les quarks sont sans masse et libres à l'intérieur du sac. Sous ces conditions la formule (4.67) est donc valide pour tous les baryons ou mésons, qui sont dégénérés en masse... pas très satisfaisant.

### 4.3.6 Quarks de masse non nulle

L'idée est de garder  $m_u \sim m_d \sim 0$  et de poser  $m_s \neq 0$  dans l'espoir de lever la dégénérescence entre hadrons non-étranges et étranges.  $m_s$  sera un **paramètre supplémentaire** du modèle.

L'introduction d'une masse aux quarks ne remet pas en cause le principe de calcul des fonctions d'onde des sections (4.2.2) et (4.2.3). Le lagrangien (4.63) est simplement complété par un terme de masse

$$\mathcal{L}_0 = \left[ \frac{i}{2} \bar{\Psi}_q(r) \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi_q(r) - B - m_q \bar{\Psi}_q(r) \Psi_q \right] \theta_B - \frac{1}{2} \bar{\Psi}_q(r) \Psi_q(r) \delta(S) \quad (4.70)$$

où l'indice  $q$  désigne la saveur de quark :  $q = u, d, s$ .

L'équation du mouvement correspond alors à celle de Dirac pour un quark de masse  $m$

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m_q) \Psi_q(r) = 0, \quad r < R \quad (4.71)$$

Les conditions aux limites restent inchangées

$$\begin{aligned} i \gamma \cdot n \Psi(R) &= \bar{\Psi}(R) \\ B &= -\frac{1}{2} n \cdot \partial (\bar{\Psi} \Psi) \end{aligned}$$

Les solutions pour  $\kappa = -1$  ( $s_{1/2}$ ) prennent une dépendance en  $m_q$

$$\boxed{\Psi_{n,\kappa=-1}^\mu(\vec{r}) = \frac{N'(\omega)}{\sqrt{4\pi}} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{E}} j_0\left(\frac{\omega r}{R}\right) \chi_{1/2} \\ \sqrt{\frac{E-m}{E}} i \vec{\sigma} \cdot \hat{r} j_1\left(\frac{\omega r}{R}\right) \chi_{1/2} \end{vmatrix}} \quad (4.72)$$

avec

$$E = \frac{1}{R} \sqrt{\omega^2 + (mR)^2} \quad (4.73)$$

$$N^{-2}(\omega) = R^3 j_0^2(\omega) \frac{2E(E - 1/R) + mR}{E(E - m)} \quad (4.74)$$

En appliquant la condition aux limites linéaire (4.50) on obtient

$$tg \omega = \omega / \left[ 1 - mR - \sqrt{\omega^2 + (mR)^2} \right] \quad (4.75)$$

Cette équation équivaut bien à (4.29) pour  $m \rightarrow 0$  avec  $\omega_{1,-1} = 2,04$ .

Pour  $m \rightarrow \infty$ ,  $\omega_{1,-1} = \pi$ .

Nous verrons section (4.3.12) que le meilleur fit des paramètres du modèle sur les données correspond à

$$m_s \sim 300 \text{ MeV}, \quad m_s R = 1.5, \quad \omega_{1,-1} = 2.5 \quad (4.76)$$

Soit, d'après (4.73)

$$ER = 2.92, \quad R \sim 1 \text{ fm} \quad (4.77)$$

La différence de masse du hadron engendrée par un quark étrange est donc

$$\frac{2.92 - 2.04}{R} \sim 175 \text{ MeV} \quad (4.78)$$

en bon accord avec la différence de masse expérimentale

$$M_{\Lambda} - M_{N} = 1116 - 938 \text{ MeV} = 178 \text{ MeV} \quad (4.79)$$

(*uds*)      *uud*

### 4.3.7 Structure hyperfine

A cette étape de la construction du modèle, tous les hadrons de même contenu en saveur sont encore dégénérés en masse. En particulier nous retrouvons le même problème de dégénérescence des multiplets  $J^\pi = 1/2^+$  et  $3/2^+$  pour les baryons,  $J^\pi = 0^-$  et  $1^-$  pour les mésons déjà rencontrés dans le cours de spectroscopie.

Nous avons alors supposé que la dégénérescence était levée par l'interaction spin-spin. Nous allons inclure cette interaction dans le modèle du sac en la dérivant à partir de l'échange d'un gluon dont les contributions sont illustrées figure 4.1

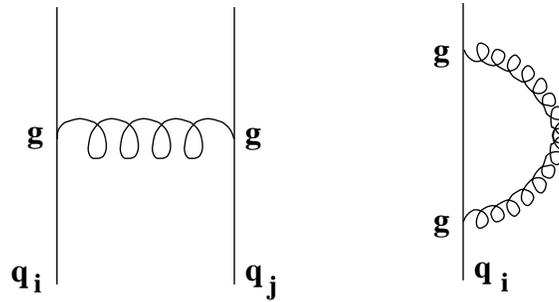


FIG. 4.1 – Processus d'échange de gluons entre deux quarks (gauche) ou avec un seul quark (diagramme de "self-energy" à droite).

Le traitement perturbatif des quarks à l'intérieur du sac avec un développement en puissance de la constante de couplage  $\alpha_s = g^2/4\pi$  tronqué à l'ordre 1 est une **hypothèse** du modèle. Il est supposé que les effets non perturbatifs (interaction gluon-gluon, fluctuations  $q\bar{q}, \dots$ ) sont inclus dans la définition des conditions aux limites et la valeur des paramètres effectifs.

Les effets "hyperfins" attendus sont bien plus importants que ceux de l'atome dans le cadre QED puisque la différence de masse  $M_\Lambda - M_N \sim 200 \text{ MeV}$  atteint  $\sim 20\%$  de la masse totale.

### 4.3.8 Lagrangien avec quarks massifs et gluons

Le lagrangien du modèle, basé sur le Lagrangien de QCD + des termes de surface s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Bag}^0 = & \left[ \frac{i}{2} \bar{\Psi}_{q\alpha} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi_{q\alpha} - m_q \bar{\Psi}_{q\alpha} \Psi_{q\alpha} \right. \\ & + g \bar{\Psi}_{q\alpha} \gamma^\mu \lambda_{\alpha\beta}^a \Psi_{q\beta} A_\mu^a \quad (\text{couplage q-gluon}) \\ & \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - B \right] \theta_B \quad (\text{tenseur champ de couleur}) \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$- \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{q\alpha} \Psi_{q\alpha} \delta(S) \quad (4.81)$$

La dépendance en  $\vec{r}$  de tous les champs est implicite.

Explicitons une fois pour toutes les indices du terme de couplage  $q - g$  :

$\mu, \nu$  : indices de Lorentz

$q$  : saveur du quark,  $q = u, d, s$ .  $\Psi_q$  dépend de  $m_q$ .

$a$  : indice du champ de gluon associé aux 8 générateurs de  $SU(3)_{\text{couleur}}$  (représentation adjointe de  $SU(3)$ )  $a = 1, 2, \dots, 8$ .

$\alpha, \beta$  : indice de couleur  $\alpha, \beta = \text{red, blue, green}$  (représentation fondamentale de  $SU(3)_{\text{couleur}}$ ).

Dans notre cas la fonction d'onde ne dépend pas de l'indice de couleur, la sommation sur  $\alpha$  et  $\beta$  fait simplement apparaître le "facteur de couleur" dans le couplage  $q - g$  via les coefficients de la matrice  $3 \times 3$ ,  $\lambda^a$ .

Enfin  $F_{\mu\nu}^a$  est le tenseur du champ de couleur défini par

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.82)$$

De manière analogue à l'électromagnétisme on définit des champs électrique et magnétique de couleur

$$\begin{cases} F_{0i}^a = E_i^a = -E^{ai} \\ F_{ij}^a = \varepsilon_{ijk} B^k \\ F_{\mu\mu}^a = 0 \text{ (anti-symétrique)} \end{cases} \quad (4.83)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

avec  $\nu$  indice de colonne et  $\mu$  indice de ligne.

Les équations de Maxwell associées sont

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_q^a &= J_q^{a0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_q^a = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_q^a &= \vec{J}_q^a \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_q^a = 0\end{aligned}\tag{4.85}$$

et s'exprime sous la forme covariante

$$\boxed{D_\nu F^{a\mu\nu} = J^{a\mu}}\tag{4.86}$$

avec  $D_\nu x_\mu^a = \partial_\nu x_\mu^a - f_{abc} x_{b\mu} x_{c\nu}$  la dérivée covariante.

### 4.3.9 Conditions aux limites

La dérivation des équations d'Euler-Lagrange (4.40) pour des variations par rapport à  $\bar{\Psi}$  et  $A_\mu$  donne immédiatement :

-Les équations du mouvement pour les champs de quarks et de gluons à l'intérieur du sac (termes en facteur de  $\theta_B$ ).

-Les conditions aux limites (termes en facteur de  $\delta(S)$ )

On obtient les conditions aux limites suivantes

$$i\gamma \cdot n \Psi = \Psi \quad (\text{identique à (4.50)})$$

$$\boxed{n_\nu F^{a\mu\nu} = 0 \quad (n_\nu \text{ normal à la surface})}\tag{4.87}$$

Cette dernière condition se traduit par les équations suivantes pour les champs de couleur à la surface du sac

$$\vec{n} \cdot \vec{E}^a = 0\tag{4.88}$$

$$n^0 \cdot \vec{E}^a + \vec{n} \times \vec{B}^a = \vec{0}\tag{4.89}$$

Dans le cas d'une surface statique  $n^0 = 0$ .

Le champ de couleur est le résultat de toutes les sources de couleur dans le sac (quarks)

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_q \vec{n} \cdot \vec{E}_q^a &= 0 \\ \sum_q \vec{n} \times \vec{B}_q^a &= \vec{0}\end{aligned}}\tag{4.90}$$

En toute rigueur les gluons sont eux-mêmes sources de couleur mais les diagrammes correspondants sont d'ordre supérieur à 1 en  $\alpha_c$ .

L'application du théorème de Gauss à la surface du sac amène la conclusion importante

$$\oint \vec{E}^a \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E}^a \cdot \vec{n} dS = Q_{tot}^a \quad (4.91)$$

Soit

$$\boxed{Q_{tot}^a = 0 \quad \forall a} \quad (4.92)$$

**Le sac est un singlet de couleur !**

### 4.3.10 Contribution $\Delta E_g$ de l'échange d'un gluon à l'énergie du sac

Cette contribution peut se calculer à partir du Lagrangien (4.80). Les deux termes de [couplage q-g] et [tenseur du champ de couleur] donnent l'énergie potentielle du champ de couleur. En considérant

$$L = \int d^3x \mathcal{L}_{Bag}^0(x) \equiv T - V \quad (4.93)$$

On obtient donc  $-\Delta E_g$

$$\begin{aligned} -\Delta E_g &= \sum_{a=1}^8 \int d^3x \left[ g \bar{\Psi} \gamma^\mu \lambda^a \Psi A_\mu^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right] \\ \Delta E_g &= \sum_{a=1}^8 -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.94)$$

Soit d'après (4.84), le résultat d'électrostatique classique

$$\boxed{\Delta E_g = \sum_{a=1}^8 \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}^{a2} - \vec{B}^{a2}} \quad (4.95)$$

L'énergie totale du sac (4.66) devient

$$\boxed{M(R) = \sum_q E_q + \frac{4\pi}{3} R^3 B + \Delta E_g} \quad (4.96)$$

On décompose  $\Delta E_g$  en une contribution électrique + magnétique

$$\begin{aligned} \Delta E_g &= \Delta E_g^E + \Delta E_g^M \\ \Delta E_g^E &= \sum_{a=1}^8 \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a \\ \Delta E_g^M &= -\sum_{a=1}^8 \frac{1}{2} \int d^3x \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a \end{aligned} \quad (4.97)$$

Avant de pousser plus loin le calcul des champs  $\vec{E}^a$  et  $\vec{B}^a$  remarquons que la partie "self-energy" des quarks (fig.4.1) équivaut à renormaliser la masse des quarks. Elle est donc à priori déjà incluse dans la définition des paramètres du modèle et doit être retranchée de l'expression (4.97). L'énergie magnétique devient donc

$$\boxed{\Delta E_g = - \sum_{a=1}^8 \frac{1}{2} \sum_{i<j} \int d^3x \vec{B}_{q_i}^a \cdot \vec{B}_{q_j}^a} \quad (4.98)$$

Cette restriction est possible car chaque composante vérifie la condition aux limites (4.90).

Pour la contribution électrique le théorème de Gauss impose des états singlets de couleur et la condition (4.90) n'est réalisée que pour la somme sur tous les quarks

$$\sum_q \lambda_q^a = 0 \quad (4.99)$$

La séparation des 2 processus illustrés ci-dessus n'est donc pas possible. Cependant, pour une sphère uniformément chargée,  $\vec{E}_q^a$  est nécessairement radial

$$\vec{E}_q^a(r) \sim \hat{r} \int_0^r J_q^{a0}(r) d^3r = \hat{r} \int_0^r \Psi_q^a \lambda^a \Psi_q(r) d^3r \quad (4.100)$$

Supposons les 3 quarks de même masse et de mêmes distributions radiales, la relation (4.99) se factorise et

$$\vec{E}^a = \sum_q \vec{E}_q^a \alpha \sum_q \lambda_q^a = \vec{0} \quad (4.101)$$

d'où

$$\boxed{\Delta E_g^E = 0} \quad (4.102)$$

Dans le cas des quarks de masses différentes ou dans des orbitales différentes on peut montrer que  $\Delta E_g^E$  reste très faible, de l'ordre de 5 MeV. Nous restreignons donc l'étude à la contribution magnétique.  $\vec{B}_q^a$  s'obtient en intégrant (4.85)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_q^a = \vec{J}_q^a \quad (4.103)$$

avec

$$\vec{J}_q^a = g \Psi_q^\dagger \vec{\alpha} \lambda_q^a \Psi_q \quad (4.104)$$

Nous pouvons réécrire cette expression en faisant apparaître explicitement la dépendance en spin. D'après les solutions (4.31) de l'équation de Dirac en coordonnées polaires

$$\vec{J}_q^a = \frac{gN^2}{4\pi} [j_0 + i \vec{\sigma} \cdot \hat{r} j_1]_q \vec{\alpha} \lambda_q^a \begin{bmatrix} j_0 \\ -i \vec{\sigma} \cdot \hat{r} j_1 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Soit d'après la définition (4.2) des matrices  $\alpha$

$$\vec{J}_q^a = i g \frac{N^2}{4\pi} j_0 j_1 [(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \vec{\sigma} - \vec{\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \hat{r})] \quad (4.106)$$

Or

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (4.107)$$

Donc

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \vec{\sigma} = \sum_j \sigma_j \hat{r}_j \sigma_i = 1 + i \hat{r} \times \vec{\sigma} \quad (4.108)$$

et

$$\boxed{\vec{J}_q^a = -\frac{N^2}{4\pi} j_0 j_1 g 2 \hat{r} \times \vec{\sigma}} \quad (4.109)$$

Après intégration de  $\vec{B}_q^a$ , non détaillée ici, on obtient

$$\boxed{\Delta E_g^M = -\frac{3\alpha_c}{R} \sum_{a=1}^8 \sum_{i<j} \vec{\sigma}_{q_i} \lambda_{q_i}^a \cdot \vec{\sigma}_{q_j} \lambda_{q_j}^a M(m_{q_i}, m_{q_j}, R)} \quad (4.110)$$

où  $\alpha_c = \frac{g^2}{4\pi}$  et  $M()$  est une fonction des masses de quarks et du rayon  $R$  du sac.

En combinant la condition singlet de couleur (4.99) avec la propriété des matrices  $SU(3)$

$$\sum_a (\lambda_q^a)^2 = 16/3 \quad (4.111)$$

On obtient immédiatement

$$\sum_a \sum_{i<j} \lambda_{q_i}^a \lambda_{q_j}^a |\Psi\rangle = -\lambda \frac{8}{3} |\Psi\rangle \quad (4.112)$$

avec  $\lambda = 1$  lorsque  $|\Psi\rangle$  désigne un baryon et  $\lambda = 2$  pour les mésons.

La contribution de l'échange d'un gluon se réécrit donc

$$\boxed{\Delta E_g^M = \frac{\lambda \alpha_c}{R} \sum_{i<j} M'(m_{q_i}, m_{q_j}, R) \vec{\sigma}_{q_i} \cdot \vec{\sigma}_{q_j}} \quad (4.113)$$

Exemple : levée de dégénérescence  $\Lambda(uds) \leftrightarrow \Sigma^{+,0,-}(uus, uds, dds)$ .

D'après le cours de spectroscopie  $\Lambda$  et  $\Sigma$  font partie de l'octet  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ . Les fonctions d'onde (saveur  $\otimes$  spin) doivent être symétriques et s'écrivent

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{Ms} \chi_{Ms} + \Phi_{MA} \chi_{MA}) \quad (4.114)$$

Hypothèse pour lever la dégénérescence de masse :

Les quarks  $u$  et  $d$  sont dans un état  $s = 0$  pour le  $\Lambda$  et  $s = 1$  pour les  $\Sigma$ . D'où

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_d|_{\Lambda} &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(\vec{\sigma}_u + \vec{\sigma}_d)^2}_0 - \vec{\sigma}_u^2 - \vec{\sigma}_d^2 \right] \quad \text{avec } \vec{\sigma} = 2 \vec{s} \\ &= +2 \left( -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = -3 \\ \vec{\sigma}_s \cdot (\vec{\sigma}_u + \vec{\sigma}_d)|_{\Lambda} &= 0\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_d|_{\Sigma} &= +1 \\ \vec{\sigma}_s \cdot (\vec{\sigma}_u + \vec{\sigma}_d)|_{\Sigma} &= -4\end{aligned} \tag{4.115}$$

En conséquence

$$\Delta E_g^M|_{\Lambda} = -3 \alpha_c M'(0, 0, R) \tag{4.116}$$

$$\Delta E_g^M|_{\Sigma} = +1 \alpha_c M'(0, 0, R) - 4M'(0, ms, R) \tag{4.117}$$

or avec  $ms > 0$ ,  $M'(0, 0, R) > M'(0, ms, R)$  donc  $M_{\Sigma} > M_{\Lambda}$ .

L'interaction spin-spin générée par le champ de couleur a donc un signe opposé à l'électromagnétisme, inhérent aux propriétés de  $SU(3)_{couleur}$ .

Les multiplets de bas spin sont prédits les plus bas en masse, ce qui est observé.

### 4.3.11 Corrections à la formule de masse

La formule (4.96) de l'énergie totale du sac inclue un terme  $\Delta E_{cm}$  de mouvement du centre de masse qui doit être soustrait pour extraire la masse du hadron au repos

$$\begin{aligned}E_{bag}^2 &= \vec{P}_{cm}^2 + M_{bag}^2, \quad E_{bag} \equiv M(R) \text{ de l'eq.(4.96)} \\ M_{bag} &\simeq E_{Bag} - \underbrace{\frac{\vec{P}_{cm}^2}{2E_{Bag}}}_{\Delta E_{cm}}\end{aligned}$$

$$\vec{P}_{cm}^2 = \left\langle \left( \sum_i \vec{P}_{q_i} \right)^2 \right\rangle \simeq \sum_i \left( \vec{P}_{q_i}^2 \right) \tag{4.118}$$

D'après (4.67), dans le cas simple des quarks sans masses et libres

$$\Delta E_{cm} = \frac{\omega^2/R^2}{\frac{8}{3}\omega/R} = \frac{3}{8} \frac{\omega}{R} \tag{4.119}$$

Une autre correction provient des fluctuations du vide à l'intérieur de la cavité du sac. Les conditions aux limites imposées au champ de couleur créent un terme correctif de pression analogue à l'effet Casimir pour l'électromagnétisme. Ce terme n'est pas facilement calculable et est donc paramétrisé en  $-Z_0/R$  ( $1/R$  étant la seule échelle d'énergie du problème).

### 4.3.12 Prédiction

Au total, la masse des hadrons est décrite par

$$M(R) = \sum_i E_{q_i} + \frac{4}{3}\pi R^3 B + \Delta E_g^M - Z/R \quad (4.120)$$

où  $Z$  contient à la fois les effets du mouvement du centre de masse et de fluctuations du vide.

$R$  est déterminé par la condition de stabilité

$$\frac{\partial M(R)}{\partial R} = 0 \quad (4.121)$$

Il reste ainsi 4 paramètres ajustables :  $m_s$ ,  $B$ ,  $\alpha_c$  et  $Z$ .

On peut choisir 4 hadrons (dont au moins un étrange) pour fixer ces paramètres sur l'expérience. Le reste du spètre hadronique est prédit.

Les résultats du fit sont illustrés (transparents 1 et 2) et donnent une très bonne description.

La connaissance des fonctions d'onde des quarks dans la sac permet de prédire de nombreuses observables. Par exemple  $\langle r^2 \rangle = \int d^3r r^2 \Psi^\dagger \Psi$ .

	Exp	MIT Bag
$\sqrt{\langle r_p^2 \rangle}$	$0.87 \text{ fm}$	$0.73 \text{ fm}$
$\langle r_n^2 \rangle$	$-0.12 \text{ fm}^2$	$0$



# Transparents

0

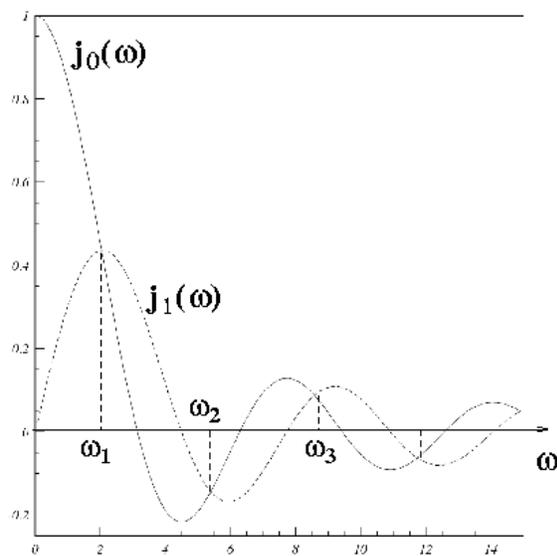
## Modèle de Bogolioubov

Conditions  
aux limites

$$\omega_1 = 2.04$$

$$\omega_2 = 5.40$$

...



1

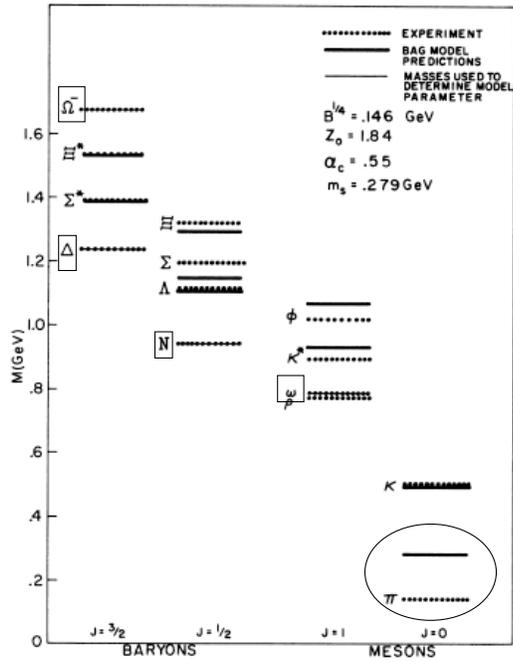
# Fit des masses de hadrons

Paramètres  $B$ ,  $\alpha_c$ ,  $Z$  et  $m_s$   
fixés par les masses de  
 $N$ ,  $\Delta$ ,  $\Omega$  et  $\omega$

..... masses mesurées

—— masses prédites

Très bon accord, sauf pour le  $\pi$



# Chapitre 5

## Introduction à la symétrie chirale et sa brisure

### 5.1 Les symétries de QCD

La symétrie **locale**  $SU(3)_{couleur}$ , conduit à la théorie de jauge non-abélienne de l'interaction forte.

Symétries **globales** :

- Multiplets des hadrons conséquence de l'invariance sous les rotations du groupe  $SU(3)$  saveur ( $u, d, s$ )...
- Conservation de chaque saveur de quark par l'interaction forte  $\rightarrow$  symétrie de groupe  $U(1)$  pour chaque saveur.

Ce cours porte sur une symétrie supplémentaire du lagrangien de QCD, qui correspond à l'invariance sous les transformations indépendantes des champs "gauches" et "droits" des quarks.

Cette symétrie est une symétrie exacte du Lagrangien dans la limite de masse nulle des quarks. Son exploitation fournit un cadre théorique pour l'étude de **QCD à basse énergie** ( $E \ll 1 GeV$ ).

On se limitera aux saveurs  $u, d, s$ . Les effets des paires virtuelles  $b\bar{b}, c\bar{c}, t\bar{t}$  sont négligés.

$$\begin{array}{ll} m_u = 1 - 4 MeV & m_c = 1.15 - 1.35 GeV \\ m_d = 4 - 8 MeV & \ll 1 GeV \lesssim m_b = 4 - 5 GeV \\ m_s = 80 - 130 MeV & m_t = 175 GeV \end{array} \quad (5.1)$$

Cette séparation des masses se manifeste d'une façon particulière dans le spectre des

hadrons les plus légers :

Octet des mésons pseudo-scalaires	$J^\pi = 0^-$	$m_\pi \sim 135 - 140 \text{ MeV}$
Octet des mésons vecteurs	$J^\pi = 1^-$	$m_\rho \sim 770 \text{ MeV} \sim 1 \text{ GeV}$
Octet des baryons	$J^\pi = 1/2^+$	$m_N \sim 1 \text{ GeV}$

⇒ Pourquoi les pions sont-ils si légers ?

Le nucléon est 10 fois plus lourd que les mésons alors que les états de valence ne diffèrent que par un quark de saveur  $u$  ou  $d$ , de masse nue négligeable. Il existe donc une contrainte importante dans la **dynamique** de l'interaction forte qui force un tel écart.

## 5.2 Quarks gauches (L) et droits (R)

On note  $q_R = P_R q$  et  $q_L = P_L q$  les projections sur les états gauche ou droit avec les définitions

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}$$

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

Les propriétés standards des projecteurs

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0$$

se démontrent à partir de

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \gamma_5^\dagger = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$\gamma_5^2 = I \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$$

$P_R$  et  $P_L$  étant orthogonaux on a

$$q = q_R + q_L \quad (5.3)$$

Rq :

–

$$q_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} q, \quad \bar{q}_{R,L} = \bar{q} \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \quad (5.4)$$

– Les états droit et gauche n'ont pas de transformation triviale sous parité

$$q(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} \gamma_0 q(-\vec{x}, t)$$

$$P_R \gamma_0 q(-\vec{x}, t) = \gamma_0 P_L q(-\vec{x}, t) \neq \pm q_R(-\vec{x}, t)$$

- Dans la **limite ultra-relativiste**  $P_{R(L)}$  projète sur les états d'hélicité positive (négative). Dans cette limite donc **chiralité**  $\Leftrightarrow$  **hélicité**

$$u(\vec{p}, h^\pm) = \sqrt{E+M} \begin{vmatrix} \chi^\pm \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+M} \chi^\pm \end{vmatrix} \xrightarrow{E \gg M} \sqrt{E} \begin{vmatrix} \chi^\pm \\ \pm \chi^\pm \end{vmatrix} = u_\pm(\vec{p}) \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} P_R u_+ = u_+, & P_R u_- = 0 \\ P_L u_- = u_-, & P_L u_+ = 0 \end{cases}$$

### 5.3 Le Lagrangien de QCD

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f (i \not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu} \quad (m_f \ll 1 \text{ GeV}) \quad (5.6)$$

-f : indice de saveur

-Pour chaque saveur  $f$ ,  $q_f$  est un triplet de couleur ( $q_f^{red}$ ,  $q_f^{blue}$ ,  $q_f^{green}$ ).

-Invariance **locale** sous les transformations de jauge

$$q_f \longrightarrow q'_f = \exp \left[ -i \sum_{a=1}^8 \theta_a(x) \frac{\lambda_a^c}{2} \right] q_f(x) \quad (5.7)$$

Les matrices  $\lambda_a^c$  sont ici les générateurs du groupe  $SU(3)_{couleur}$  (matrices de Gell-Mann) et

$$D_\mu q_f = \partial_\mu q_f - i g \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a^c}{2} A_{\mu,a} q_f \quad (5.8)$$

est la dérivée covariante, **indépendante de la saveur**.

### 5.4 Transformations chirales

Les transformations chirales prennent l'expression générale des transformations unitaires globales suivantes

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \longrightarrow U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \underbrace{\exp \left( -i \sum_{a=1}^8 \theta_a^L \frac{\lambda_a}{2} \right)}_{SU(3)_L} \underbrace{\exp(-i\theta^L)}_{U(1)_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

...idem pour le champ R

Attention : ici l'indice  $a$  court sur les générateurs  $\lambda_a$  de  $SU(3)_{saveur}$ .

Ces **transformations** sont **globales**, les angles  $\theta$  ne dépendent pas de  $x$ .

L'effet des transformations chirales sur les termes du Lagrangien  $\mathcal{L}_{QCD}^0$  se calcule facilement en utilisant les propriétés suivantes

$$\bar{q}\Gamma_i q = \begin{cases} \bar{q}_R \Gamma_1 q_R + \bar{q}_L \Gamma_1 q_L & \text{pour } \Gamma_1 \in \{\gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5\} \\ \bar{q}_R \Gamma_2 q_L + \bar{q}_L \Gamma_2 q_R & \text{pour } \Gamma_2 \in \{1, \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\} \end{cases} \quad (5.10)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD}^0 &= \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{R,f} i \not{D} q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i \not{D} q_{L,f} \\ &\quad - m_f (\bar{q}_{R,f} q_{L,f} + \bar{q}_{L,f} q_{R,f}) \\ &\quad - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G_a^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Les gluons ne sont pas sensibles aux transformations chirales.

$\not{D}$  est indépendante de la saveur, espace dans lequel opèrent les transformations chirales. Donc

$$\begin{aligned} \bar{q}_L i \not{D} q_L &\xrightarrow{U_L} i \bar{q}'_L \not{D} q'_L = i \bar{q}_L U_L^\dagger \not{D} U_L q_L \\ &= i \bar{q}_L \underbrace{U_L^\dagger U_L}_I \not{D} q_L \\ &= i \bar{q}_L \not{D} q_L \end{aligned} \quad (5.12)$$

Seuls les termes de **masse**, qui font intervenir des produits croisés  $\bar{q}_R q_L$  ou  $\bar{q}_L q_R$  sont sensibles aux transformations chirales.

**Dans la limite  $m_{q_f} \rightarrow 0$ , dite limite chirale,  $\mathcal{L}_{QCD}^0$  est donc invariant sous les transformations globales indépendantes des champs gauches et droits.**

## 5.5 Courants et charges

A chaque transformation infinitésimale  $\delta_q$  des champs de quark on associe un courant

$$\boxed{J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \delta q} \quad (5.13)$$

et une charge

$$Q(t) = \int d^3x J_0(t, \vec{x}) \quad (5.14)$$

Les variations  $\delta_q$  des champs de quark s'écrivent à partir de l'éq.(5.9)

$$\begin{cases} U(1)_{L,R} q_{L,R}^i \longrightarrow q_{L,R}^i - i \theta^{L,R} q_{L,R}^i & i : \text{indice de saveur} \\ SU(3) q_{L,R}^i \longrightarrow q_{L,R}^i - i \theta_a^{L,R} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} q_{L,R}^j & a = 1 \dots 8 \end{cases} \quad (5.15)$$

Les courants associés sont alors

$$\begin{aligned} J_{\mu L,R} &= \bar{q}_{L,R} \gamma_\mu q_{L,R} \\ J_{\mu L,R}^a &= \bar{q}_{L,R} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q_{L,R} \end{aligned} \quad (5.16)$$

En pratique on utilise plutôt les combinaisons linéaires

$$\begin{cases} V_\mu = J_{\mu L} + J_{\mu R} = \bar{q} \gamma_\mu q \\ A_\mu = J_{\mu R} - J_{\mu L} = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q \\ V_\mu^a = J_{\mu L}^a + J_{\mu R}^a = \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q \\ A_\mu^a = J_{\mu R}^a - J_{\mu L}^a = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q \end{cases} \quad (5.17)$$

qui se transforment sous parité comme des vecteurs ou des vecteurs axiaux

$$\begin{cases} V_\mu^a(\vec{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} V_\mu^a(-\vec{x}, t) \\ A_\mu^a(\vec{x}, t) \longrightarrow -A_\mu^a(-\vec{x}, t) \end{cases} \quad (5.18)$$

les charges associées s'écrivent directement (en utilisant  $\gamma_0^2 = I$ )

$$\begin{cases} Q_V = \int d^3x q^\dagger(x) q(x) \longrightarrow \text{nombre baryonique} \\ Q_A = \int d^3x q^\dagger(x) \gamma_5 q(x) \\ Q_V^a = \int d^3x q^\dagger(x) \frac{\lambda^a}{2} q(x) \\ Q_A^a = \int d^3x q^\dagger(x) \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q(x) \end{cases} \quad (5.19)$$

Rq :

–  $\gamma_5$  agit dans l'espace des indices de Dirac alors que  $\lambda^a$  agit dans l'espace des indices des saveurs.  $\gamma_5 \lambda^a$  est donc égale à  $\lambda^a \gamma_5$ .

– La sommation sur les saveurs de quarks est implicite dans les courants et les charges

$$V_\mu^a = \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q \equiv \sum_f \bar{q}_f \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q_f \quad (5.20)$$

Dans la limite chirale  $m_q \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{L}_{QCD}^0$  est invariant sous toutes les transformations donc les 18 courants  $V_\mu$ ,  $A_\mu$ ,  $V_\mu^a$  et  $A_\mu^a$  sont *a priori* conservés ( $\partial^\mu J_\mu = 0$ ).

Il s'en suit que les charges associées sont indépendantes du temps

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \int d^3x \partial^0 J_0(x) = \int d^3x \partial^\mu J_\mu(x) = 0 \quad (5.21)$$

(on utilise  $\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \int_{S \rightarrow \infty} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ ).

Or  $dQ/dt = i[H, Q]$  donc la charge est une constante du mouvement  $[H, Q] = 0$ .

Ceci est effectivement vérifié par les courants à l'exception de  $A_\mu$  qui est brisé par la quantification de la théorie. On parle **d'anomalie axiale**

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{3g^2}{32\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_a^{\mu\nu} G_a^{\rho\sigma} \neq 0 \quad (5.22)$$

La symétrie de  $\mathcal{L}_{QCD}^0$  est donc a priori  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V$

A partir des relations d'anticommutation à temps égal des champs de quarks

$$\begin{aligned} \{q_{\alpha,a}(\vec{x}, t), q_{\beta,b}^\dagger(\vec{y}, t)\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{q_{\alpha,a}(\vec{x}, t), q_{\beta,b}(\vec{y}, t)\} &= 0 \\ \{q_{\alpha,a}^\dagger(\vec{x}, t), q_{\beta,b}^\dagger(\vec{y}, t)\} &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec  $\alpha, \beta$  indices de Dirac et  $a, b$  indices de saveur.

On obtient la relation utile

$$\left[ \int d^3x q^\dagger(x, t) \Gamma q(x, t), q^\dagger(y, t) \Lambda q(y, t) \right] = q^\dagger(y, t) [\Gamma, \Lambda] q(y, t) \quad (5.24)$$

avec  $\Gamma, \Lambda$  matrices de Dirac/saveur.

Démo :

$$\begin{aligned} &\left[ \int d^3x q^\dagger(x) \Gamma q(x), q^\dagger(y) \Lambda q(y) \right] \\ &= \int d^3x q_\alpha^\dagger(x) \Gamma_{\alpha\beta} q_\beta(x) q_\gamma^\dagger(y) \Lambda_{\gamma\delta} q_\delta(y) - q_\gamma^\dagger(y) \Lambda_{\gamma\delta} q_\delta(y) q_\alpha^\dagger(x) \Gamma_{\alpha\beta} q_\beta(x) \\ &= q_\alpha^\dagger(x) (\Gamma \Lambda)_{\alpha\delta} q_\delta(x) - \int q_\alpha^\dagger(x) \Gamma_{\alpha\beta} q_\gamma^\dagger(y) q_\beta(x) \Lambda_{\gamma\delta} q_\delta(y) \\ &\quad - q_\gamma^\dagger(y) (\Lambda \Gamma)_{\gamma\beta} q_\beta(y) + \int q_\gamma^\dagger(y) \Lambda_{\gamma\delta} q_\alpha^\dagger(x) q_\delta(y) \Gamma_{\alpha\beta} q_\beta(x) \\ &= q(x)^\dagger [\Gamma, \Lambda] q(x) \end{aligned}$$

Cette relation permet de démontrer les commutateurs de l'**algèbre des courants**

$$\begin{aligned}
[Q_V^a(t), V_\mu^b(t, \vec{x})] &= i f^{abc} V_\mu^c(t, \vec{x}) \\
[Q_V^a(t), A_\mu^b(t, \vec{x})] &= i f^{abc} A_\mu^c(t, \vec{x}) \\
[Q_A^a(t), V_\mu^b(t, \vec{x})] &= i f^{abc} A_\mu^c(t, \vec{x}) \\
[Q_A^a(t), A_\mu^b(t, \vec{x})] &= i f^{abc} V_\mu^c(t, \vec{x})
\end{aligned} \tag{5.25}$$

où  $f^{abc}$  désigne les constantes de structure du groupe  $SU(3)$  ( $\varepsilon^{abc}$  dans le cas de  $SU(2)$ )

$$\left[ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2}$$

Les charges gènèrent les transformations des champs

$$\begin{aligned}
[Q_V^a(t), q(t, \vec{x})] &= \int d^3y q^\dagger(y) \frac{\lambda^a}{2} q(y) q(x) - q(x) q^\dagger(y) \frac{\lambda^a}{2} q(y) \\
&= \int d^3y q^\dagger(y) \frac{\lambda^a}{2} q(y) q(x) - q^\dagger(y) \frac{\lambda^a}{2} q(y) q(x) \\
&\quad + \int d^3y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \frac{\lambda^a}{2} q(y) \\
&= \frac{\lambda^a}{2} q(x) \propto \delta q
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Et de manière analogue

$$[Q_A^a(t), q(t, \vec{x})] = \frac{\lambda^a}{2} \gamma_5 q(x) \tag{5.27}$$

On peut construire de même une **algèbre des charges**

$$\begin{aligned}
[Q_L^a(t), Q_L^b(t)] &= i f^{abc} Q_L^c \\
[Q_R^a(t), Q_R^b(t)] &= i f^{abc} Q_R^c \\
[Q_L^a(t), Q_R^b(t)] &= 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

La charge baryonique commute avec les charges vectorielle et axiale :

$$[Q_V^a(t), Q_V(t)] = [Q_A^a(t), Q_V(t)] = 0 \tag{5.29}$$

## 5.6 Brisure explicite

La masse finie des quarks u,d,s représente un terme de brisure explicite de la symétrie chirale qui contribue à la divergence des courants.

Le terme de masse du Lagrangien s'écrit en fonction de la matrice  $M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \\ 0 & m_s \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q} M q = -(\bar{q}_R M q_L + \bar{q}_L M q_R) \quad (5.30)$$

Sous les transformations chirales ce terme varie de la quantité

$$\delta \mathcal{L}_M = -i \left[ \sum_{a=1}^8 \theta_R^a \left( \bar{q}_R \frac{\lambda^a}{2} M q_L - \bar{q}_L M \frac{\lambda^a}{2} q_R \right) + \theta_L (\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M q_R) \right] + (R \longleftrightarrow L)$$

La divergence des courants prend alors un terme supplémentaire, proportionnel à la masse des quarks

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \theta} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu V^\mu &= 0 \\ \partial_\mu A^\mu &= 2i \bar{q} M \gamma_5 q + \text{anomalie} \\ \partial^\mu V_\mu^a &= i \bar{q} \left[ M, \frac{\lambda^a}{2} \right] q \\ \partial^\mu A_\mu^a &= i \left( \bar{q}_L \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, M \right\} q_R - \bar{q}_R \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, M \right\} q_L \right) = i \bar{q} \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, M \right\} \gamma_5 q \end{aligned} \quad (5.32)$$

- Chaque courant de saveur est conservé individuellement ( $\bar{u}, \gamma_\mu u, \bar{d} \gamma_\mu d, \dots$ ) quelque soit la masse de quarks. Ceci reflète l'indépendance du couplage fort à la saveur.  $V_\mu$ , somme des courants individuels est conservé.
- Si  $m_u = m_d = m_s \neq 0$ , les 8 courants vectoriels sont conservés car  $[\lambda^a, I] = 0$ . Un tel scénario est à l'origine de la symétrie  $SU(3)_{\text{saveur}}$  proposée par Gell-Mann et Ne'eman.

## 5.7 Spectre des hadrons

Quelles sont les conséquences de la symétrie chirale sur le spectre des hadrons ?

Prenons par exemple un état  $|i, +\rangle$  de parité positive, état propre de l'hamiltonien

$$H_{QCD} |i, +\rangle = E_i |i, +\rangle \quad (5.33)$$

$$P |i, +\rangle = + |i, +\rangle \quad (5.34)$$

Considérons l'état

$$|\phi\rangle = Q_A^a |i, +\rangle \quad (5.35)$$

$$H_{QCD} |\phi\rangle = H_{QCD} Q_A^a |i, +\rangle = Q_A^a H_{QCD} |i, +\rangle$$

$$H_{QCD} |\phi\rangle = E_i |\phi\rangle \quad (5.36)$$

Donc  $|\phi\rangle$  est l'état propre de  $H_{QCD}$  avec la même énergie  $E_i$ .

$$\begin{aligned} P|\phi\rangle &= \underbrace{P Q_A^a P^{-1}}_{-Q_A^a} \underbrace{P|i,+\rangle}_{|i,+\rangle} \\ &= -|\phi\rangle \end{aligned} \quad (5.37)$$

En considérant l'octet  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$  des baryons, on s'attend donc à observer un multiplet dégénéré en masse et de parité opposée. Un tel multiplet n'est pas observé... What's wrong?

Nous avons implicitement supposé que la symétrie axiale était une symétrie du vide; c'est-à-dire que  $Q_A^a |0\rangle = 0$

Une manière de le voir est de définir les états de parité + et - par des opérateurs de création

$$|i,+\rangle = a_i^\dagger |0\rangle \quad (5.38)$$

$$|j,-\rangle = b_j^\dagger |0\rangle \quad (5.39)$$

et par analogie avec eq.(5.27)

$$[Q_A^a, q_i(x)] = i \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} \gamma_5 q_j(x) \quad (5.40)$$

$$[Q_A^a, a_i^\dagger] = i \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} b_j^\dagger \quad (5.41)$$

alors

$$\begin{aligned} Q_A^a |i,+\rangle &= Q_A^a a_i^\dagger |0\rangle \\ &= \underbrace{[Q_A^a, a_i^\dagger] |0\rangle}_{\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} |j,-\rangle} + \underbrace{a_i^\dagger Q_A^a |0\rangle}_{0?} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Si  $Q_A^a |0\rangle \neq 0$ , le spectre des hadrons n'est pas dégénéré en états de parité opposée.

Théorème de Coleman : (*Journal of Mathematical Physics*, 7 (1966), 787)

**"Une symétrie continue du vide est une symétrie du hamiltonien"**

Mais la réciproque n'est pas vraie : si  $[H, Q] = 0$  et  $\partial^\mu J_\mu = 0$  alors  $Q|0\rangle$  n'est pas forcément nul.

$$\boxed{Q_A^a |0\rangle = 0 : \text{spectre dégénéré, réalisation de Wigner.}}$$

$$\boxed{Q_A^a |0\rangle \neq 0 : \text{réalisation de Goldstone.}}$$

## 5.8 Mécanisme de Goldstone

On part d'une valeur moyenne dans le vide non nulle pour le commutateur de la charge axiale avec un champ  $\phi$

$$Q_A^a(\vec{x}, t) |0\rangle \neq 0, \quad v = \langle 0 | [Q_A^a(\vec{x}, t), \phi(0)] |0\rangle \neq 0 \quad (5.43)$$

$$v = \int d^3x \langle 0 | [A_0^a(\vec{x}, t), \phi(0)] |0\rangle \quad (5.44)$$

En insérant la relation de fermeture sur une base complète d'états  $|n\rangle$

$$\sum_n \int \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} |n\rangle \langle n| = I \quad (5.45)$$

dans les deux termes du commutateur

$$\begin{aligned} v &= \sum_n \int \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \int d^3x (e^{-i(E_n t - \vec{p}_n \cdot \vec{x})}) \underbrace{\langle 0 | A_0^a(0) |n\rangle \langle n | \phi(0) |0\rangle}_{C_n} \\ &\quad - e^{i(E_n t - \vec{p}_n \cdot \vec{x})} \underbrace{\langle 0 | \phi(0) |n\rangle \langle n | A_0^a(0) |0\rangle}_{C_n^*} \\ v &= \sum_n \int \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 (2E_n)} (2\pi)^3 \delta^3 \vec{p}_n (c_n e^{-iE_n t} - c_n^* e^{iE_n t}) \\ v &= \sum_n \Big|_{p_n=0} \frac{1}{2E_n} (c_n e^{-iE_n t} - c_n^* e^{iE_n t}) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Donc  $v \neq 0$  implique que les seuls états  $|n\rangle$  qui contribuent vérifient

$$\vec{p}_n = \vec{0}, \text{ et } \langle 0 | A_0^a |n\rangle \neq 0 \text{ et } \langle 0 | \phi(0) |n\rangle \neq 0 \quad (5.47)$$

Puisque  $Q_A^a$  est indépendante du temps

$$\frac{dv}{dt} = \sum_n \Big|_{p_n=0} \frac{-i}{2} (c_n e^{-iE_n t} + c_n^* e^{iE_n t}) = 0 \quad (5.48)$$

Les seuls états qui peuvent contribuer vérifient donc

$$\boxed{\vec{p}_n = \vec{0}, \quad E_n \longrightarrow 0} \quad (5.49)$$

et possèdent les **nombre quantiques de  $Q_A^a$** . Ce sont des **bosons pseudo-scalaires de masse nulle**.

La brisure spontanée des 8 charges axiales  $Q_A^a$  au niveau du vide fait ainsi apparaître 8 **bosons de Goldstone**. La symétrie  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V$  est brisée spontanément en  $SU(3)_V \otimes U(1)_V$ . Les 8 bosons de Goldstone associés sont identifiés à l'octet des mésons pseudo-scalaires.

Voilà pourquoi les  $\pi$  sont si légers!! Ce sont les bosons de Goldstone de la brisure de la symétrie axiale. Dans la limite chirale ils ont une masse nulle.

L'état physique des pions possède une masse non nulle du fait de la brisure explicite du terme de masse des quarks  $u$  et  $d$ .

## 5.9 Relation de Gell-Mann-Oakes-Renner

C'est un exemple simple de ce qu'on appelle les théorèmes de pions mous. Il dérive directement de l'interprétation précédente des mésons pseudo-scalaires comme bosons de Goldstone de la brisure spontanée de la symétrie chirale.

Les "pions mous" au sens des mésons pseudo-scalaires de basse énergie, sont les états qui contribuent à  $Q_A^a |0\rangle \neq 0$ .

D'après eq.(5.47) nous avons

$$\langle 0 | A_0^a(0) | \pi^b(k) \rangle \neq 0, \quad \pi^b(k) : \text{ boson de Goldstone} \quad (5.50)$$

En gardant l'isospin comme symétrie

$$\langle 0 | A_0^a(0) | \pi^b(k) \rangle \propto \delta_{ab} \quad (5.51)$$

On reprend alors l'expression (5.46) en choisissant la normalisation  $\langle 0 | \phi(0) | \pi^b(k) \rangle = 1$  et en faisant tendre  $E_n$  vers 0. Alors

$$v = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} (2\pi)^3 \delta^3 \vec{k} (\langle 0 | A_0^a(0) | \pi^b(k) \rangle - \langle 0 | A_0^a(0) | \pi^b(k) \rangle^*)$$

Donc  $v$  est imaginaire pur. On note  $v = i f_\pi$ , soit

$$\langle 0 | A_0^a(0) | \pi^b(k) \rangle = i k_0 f_\pi \delta_{ab}$$

et par covariance on obtient

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu^a(0) | \pi^b(k) \rangle &= i k_\mu f_\pi \delta_{ab} \\ \langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^b(k) \rangle &= i k_\mu f_\pi e^{-ikx} \delta_{ab} \end{aligned} \quad (5.52)$$

La conservation du courant axial est donnée par

$$\begin{aligned}\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi^b(k) \rangle &= k^2 f_\pi e^{-ikx} \delta_{ab} \\ &= m_\pi^2 f_\pi e^{-ikx} \delta_{ab}\end{aligned}\quad (5.53)$$

Le courant est donc conservé si

- $f_\pi = 0$  : alors  $\langle 0 | A_0^a | \pi^b(k) \rangle = 0$ , c'est le cas d'une réalisation de Wigner,  $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$  est une symétrie du spectre, ce qui ne correspond pas aux observations.
- $m_\pi = 0$  : réalisation de Goldstone.  $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$  est une symétrie du lagrangien uniquement, brisée au niveau du vide. Le  $\pi$  est le boson de Goldstone associé.

La constante  $f_\pi$  est mesurée dans les désintégrations de  $\pi$  en deux leptons  $\pi^\pm \rightarrow \ell^\pm \nu_\ell^{(-)}$  avec  $\ell = (e, \mu)$ . Pour cette raison on la nomme constante de désintégration du pion. L'expérience donne  $f_\pi = 93 MeV$ .

Si l'on revient sur la brisure explicite du courant axial par le terme de masse du Lagrangien eq.(5.32)

$$\partial^\mu A_\mu^a = i \bar{q} \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, M_q \right\} \gamma_5 q \sim i m_q \bar{q} \lambda^a \gamma_5 q \quad (5.54)$$

on voit déjà apparaître une **relation entre  $m_q$  et  $m_\pi^2$** . C'est l'intérêt de la relation de Gell-Mann-Oakes-Renner démontrée ci-dessous.

Les calculs sont faits dans le cadre  $SU(2) \otimes SU(2)$  car les relations de commutation entre les générateurs  $\tau$  de  $SU(2)$  sont plus simples qu'avec les  $\lambda^a$  de  $SU(3)$ . Les résultats généraux de  $SU(3)$  sont donnés à la fin.

On considère l'élément de matrice dans le vide du "σ-commutateur"

$$\langle 0 | [\dot{Q}_A^a(t), Q_A^b(t)] | 0 \rangle \quad (5.55)$$

On rappelle que

$$\begin{aligned}Q_A^b(t) &= \int d^3x q^\dagger(x) \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} q(x) \\ \dot{Q}_A^a(t) &= \frac{dQ_A^a(t)}{dt} = \int d^3x \partial^0 A_0^a\end{aligned}\quad (5.56)$$

or

$$\begin{aligned}\int d^3x \partial^\mu A_\mu^a &= \int d^3x \partial^0 A_0^a + \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a \\ &= \int d^3x \partial^0 A_0^a + \underbrace{\int_{S \rightarrow \infty} \vec{A}^a \cdot d\vec{S}}_0\end{aligned}\quad (5.57)$$

donc, d'après eq.(5.54)

$$\dot{Q}_A^a(t) = i m_q \int d^3x \bar{q}(x) \tau^a \gamma_5 q(x) \quad (5.58)$$

En utilisant la relation (5.24) on obtient immédiatement

$$[\dot{Q}_A^a(t), Q_A^b(t)] = i m_q \int d^3x q^\dagger(x) \left[ \gamma_0 \gamma_5 \tau^a, \gamma_5 \frac{\tau^b}{2} \right] q(x) \quad (5.59)$$

or

$$\begin{aligned} [\gamma_0 \gamma_5 \tau^a, \gamma_5 \tau^b] &= \gamma_0 \gamma_5 \tau^a \gamma_5 \tau^b - \gamma_5 \tau^b \gamma_0 \gamma_5 \tau^a \\ &= \gamma_0 [\tau^a \tau^b + \tau^b \tau^a] = \gamma_0 \{ \tau^a, \tau^b \} \\ &= 2 \gamma_0 \delta_{ab} \end{aligned} \quad (5.60)$$

d'où

$$\langle 0 | [\dot{Q}_A^a(t), Q_A^b(t)] | 0 \rangle = i m_q \delta_{ab} \langle 0 | \int d^3x \bar{q}(x) q(x) | 0 \rangle \quad (5.61)$$

Nous savons déjà qu'en insérant une relation de fermeture dans les deux produits du commutateur seuls les bosons de Goldstone vont contribuer

$$\sum_{\pi} \langle 0 | \dot{Q}_A^a(t) | \pi^c(k) \rangle \langle \pi^c(k) | Q_A^b(t) | 0 \rangle \quad (5.62)$$

Les autres états "X" dont l'énergie ne s'annule pas à la limite chirale ( $m_q \rightarrow 0$ ) donnent des contributions d'ordre supérieur en  $m_q$

$$\sum_X \langle 0 | \dot{Q}_A^a(t) | X \rangle \langle X | Q_A^b(t) | 0 \rangle \quad (5.63)$$

D'après l'équation du mouvement

$$\dot{Q} = i [H, Q] \quad (5.64)$$

$$\langle X | Q_A(t) | 0 \rangle = -i \frac{\langle X | \dot{Q}_A(t) | 0 \rangle}{E_X} \quad (5.65)$$

et la conservation approchée du courant axial montre que  $\dot{Q}_A$  est d'ordre  $m_q$  (eq.5.58). Donc la contribution des états autres que les bosons de Goldstone est d'ordre  $m_q^2$  et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\dot{Q}_A^a(t), Q_A^b(t)] | 0 \rangle &= \sum_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \langle 0 | \dot{Q}_A^a | \pi^c(k) \rangle \langle \pi^c(k) | Q_A^b | 0 \rangle \\ &\quad - \langle 0 | Q_A^b | \pi^c(k) \rangle \langle \pi^c(k) | \dot{Q}_A^a | 0 \rangle + \theta(m_q^2) \end{aligned} \quad (5.66)$$

On utilise alors l'équation du mouvement

$$\langle 0 | \dot{Q}_A^a | \pi^c(k) \rangle = -i k_0 \langle 0 | Q_A^a | \pi^c(k) \rangle \quad (5.67)$$

et la définition 5.52 de  $f_\pi$

$$\begin{aligned} \langle 0 | Q_A^a | \pi^c(k) \rangle &= -i \delta_{ac} k_0 f_\pi \int d^3x e^{-ikx} \\ &= -i \delta_{ac} f_\pi k_0 e^{-ik_0 t} (2\pi)^3 \delta(\vec{k}) \end{aligned} \quad (5.68)$$

On obtient

$$\langle 0 | [\dot{Q}_A^a, Q_A^b] | 0 \rangle = -i \delta_{ab} (2\pi)^3 \delta(\vec{0}) f_\pi^2 m_\pi^2 + \theta(m_q^2) \quad (5.69)$$

et, d'après eq.(5.61)

$$\langle 0 | [\dot{Q}_A^a, Q_A^b] | 0 \rangle = i m_q \delta_{ab} \langle 0 | \int d^3x \bar{q}(x) q(x) | 0 \rangle \quad (5.70)$$

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{0}) f_\pi^2 m_\pi^2 = -m_q (2\pi)^3 \delta(\vec{0}) \langle 0 | \bar{q}(0) q(0) | 0 \rangle + \theta(m_q^2) \quad (5.71)$$

D'où la **relation de Gell-Mann-Oakes-Renner**

$$\boxed{f_\pi^2 m_\pi^2 = -m_q \langle 0 | \bar{q}(0) q(0) | 0 \rangle + \theta(m_q^2)} \quad (5.72)$$

où  $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle$  est le condensat de quarks, paramètre d'ordre de la brisure spontanée de la symétrie chirale.

Dans la démonstration précédente, les champs  $\pi^c(k)$  désignent de manière générale un boson de Goldstone de la brisure de  $SU(2)_A$ .

Nous admettons que la relation de Gell-Mann-Oakes-Renner reste valable dans  $SU(3)$  et utilisons les combinaisons des courants qui ont les mêmes nombres quantiques que les mésons de l'octet pseudo-scalaire

$$\begin{aligned} A_\mu^1 \pm i A_\mu^2 &\longrightarrow \pi^\pm : u\bar{d}, d\bar{u} \\ A_\mu^3 &\longrightarrow \pi^0 : \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}} \\ A_\mu^4 \pm i A_\mu^5 &\longrightarrow K^\pm : u\bar{s}, s\bar{u} \\ A_\mu^6 \pm i A_\mu^7 &\longrightarrow K^0, \bar{K}^0 : d\bar{s}, s\bar{d} \\ A_\mu^8 &\longrightarrow \eta : \frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}} \end{aligned} \quad (5.73)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
f_\pi^2 m_{\pi^0} &= m_u \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle + m_d \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle \\
f_\pi^2 m_{\pi^\pm} &= \frac{1}{2} (m_u + m_d) \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle \\
f_K^2 m_k^2 &= \frac{1}{2} (m_{q_i} + m_s) \langle 0 | \bar{q}_i q_i + \bar{s}s | 0 \rangle \\
f_\eta^2 m_\eta^2 &= \frac{1}{3} m_u \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle + \frac{1}{3} m_d \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle + \frac{4}{3} m_s \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{5.74}$$

avec  $q_i = u$  pour  $K$ ,  $d$  pour  $K^0$ .

Puisque  $SU(3)_V$  n'est pas brisée spontanément on suppose que

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \tag{5.75}$$

$$f_\pi \sim f_K \sim f_\eta \tag{5.76}$$

De plus on garde la symétrie d'isospin  $m_u \sim m_d$  mais  $m_s$  peut être plus grande.

Les relations précédentes deviennent

$$\begin{aligned}
m_\pi^2 &= \frac{1}{f_\pi^2} 2m_u \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \\
m_K^2 &= \frac{1}{f_\pi^2} (m_u + m_s) \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \\
m_\eta^2 &= \frac{1}{f_\pi^2} \frac{2m_u + 4m_s}{3} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{5.77}$$

On retrouve alors la **formule d'Okubo**

$$\boxed{3m_\eta^2 + m_\pi^2 = 4m_K^2} \tag{5.78}$$

vérifiée à 6% près expérimentalement. Le rapport des expressions (5.77) permet également une prédiction du rapport des masses de quarks nus, seule approche de cette quantité indépendante de tout modèle

$$\boxed{\frac{m_u}{m_s} \sim \frac{m_d}{m_s} = \frac{m_\pi^2}{2m_K^2 - m_\pi^2} \sim \frac{1}{25}} \tag{5.79}$$

Un modèle simple permet de prendre en compte une brisure d'isospin ( $m_u \neq m_d$ ) en décrivant la différence de masse entre mésons neutres et chargés par une même contribution électromagnétique  $\Delta m_\gamma$

$$\begin{aligned}
m_{\pi^0}^2 &= \frac{(m_u + m_d)}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \\
m_{\pi^+}^2 &= m_{\pi^0}^2 + \Delta m_\gamma^2 \\
m_{K^0}^2 &= \frac{(m_d + m_s)}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \\
m_{K^+}^2 &= \frac{(m_u + m_s)}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle + \Delta m_\gamma^2
\end{aligned} \tag{5.80}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\frac{m_u}{m_d} = \frac{2m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2}{m_{\pi^+}^2 - m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2} \sim 0.6} \quad (5.81)$$

On retrouve une violation importante de  $SU(3)$  et même  $SU(2)$ . Cependant les écarts en masse des hadrons sont nettement plus faibles qu'au niveau des quarks ( $m_{\pi^0}/m_{\pi^+} \sim 0.96$ ).

La grandeur importante est la comparaison entre l'échelle de masse des quarks (qq MeV pour  $u$  et  $d$ ) et l'échelle de la brisure de symétrie (100 MeV - 1 GeV).

Si  $m_u$  et  $m_d$  restent petites, alors leur différence de masse relative ne joue pas.

## 5.10 Interaction Forte effective à basse énergie

Nous allons maintenant montrer que, à basse énergie, la brisure spontanée de symétrie axiale empêche les bosons de Goldstone d'interagir entre eux!

Cette propriété remarquable est à la base de la théorie des perturbations chirales qui permet un traitement perturbatif de l'interaction forte effective à basse E, en puissance de l'impulsion.

L'argumentation repose sur les propriétés de l'amplitude de probabilité pour la création de pions à partir du vide. La conservation du courant axial impose

$$P_\mu \langle \pi^a(p_1) \pi^b(p_2) \dots | A_c^\mu | 0 \rangle = 0 \quad (5.82)$$

où  $P_\mu = P_{1\mu} + P_{2\mu} + \dots$  est le quadri-moment de l'état final.

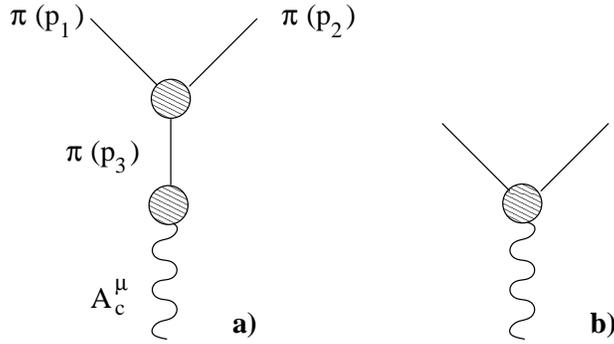
Nous savons déjà que pour un seul pion l'amplitude est linéaire dans l'impulsion

$$\langle 0 | A_a^\mu | \pi^b(p) \rangle = i f_\pi \delta_{ab} p^\mu \quad (5.83)$$

et vérifie la loi de conservation dans la limite chirale  $p^2 = m_\pi^2 \rightarrow 0$ .

Cependant, l'amplitude pour la création de plusieurs particules peut contenir des singularités dues à l'échange de pions.

Les graphes ci-dessous montrent différentes contributions à la production de deux pions



Nous désignons par  $g(p_1, p_2, p_3)$  la fonction du vertex à trois pions. Dans le graphe de gauche (a), la ligne interne correspond à la propagation d'un pion intermédiaire. L'amplitude associée s'écrit

$$\langle \pi^a(p_1) \pi^b(p_2) | A_c^\mu | 0 \rangle = i p_3^\mu f_\pi \frac{1}{p_3^2 + i \varepsilon} g(p_1, p_2, p_3) \quad (5.84)$$

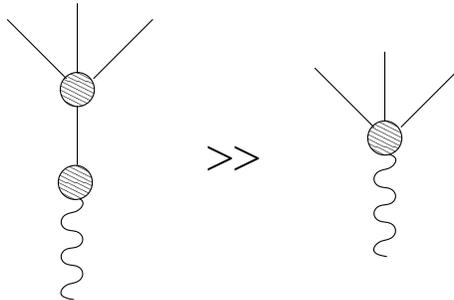
Il apparaît un pôle dû à la propagation d'un pion de masse nulle. Dans la limite des impulsions nulles ce graphe sera donc dominant par rapport à b) qui ne possède pas de pôle.

La conservation du courant axial s'écrit alors

$$p_3^\mu \langle \pi^a(p_1) \pi^b(p_2) | A_c^\mu | 0 \rangle = i f_\pi g(0, 0, 0) + \theta(p_3) \quad (5.85)$$

d'où  $g(0, 0, 0) = 0$ , il n'y a pas de vertex à trois pions quand  $p \rightarrow 0$

En fait les vertex à trois pions sont déjà interdits par la parité et la G-parité (voir cours 1). Cependant le même raisonnement tient pour la production de trois pions, dominée par le diagramme contenant un pôle et un vertex à quatre pions



et conduit à  $g(0, 0, 0) = 0$ . Autrement dit, la brisure spontanée de symétrie axiale empêche la diffusion élastique de pions dont l'impulsion tend vers 0!

Les bosons de Goldstone d'impulsion nulle n'interagissent pas entre eux

Ceci est en contraste marquant avec l'interaction entre quarks et gluons qui devient de plus en plus importante à basse énergie.

La symétrie chirale permet un traitement perturbatif des interactions entre bosons de Goldstone à basse énergie ( $E < f_\pi$ ) dans un domaine où QCD est non-perturbative.

**NB** : Ces bosons sont les seuls états hadroniques prédits par QCD indépendamment de tout modèle!!