

Université Paris Diderot  
Laboratoire Astroparticule et Cosmologie

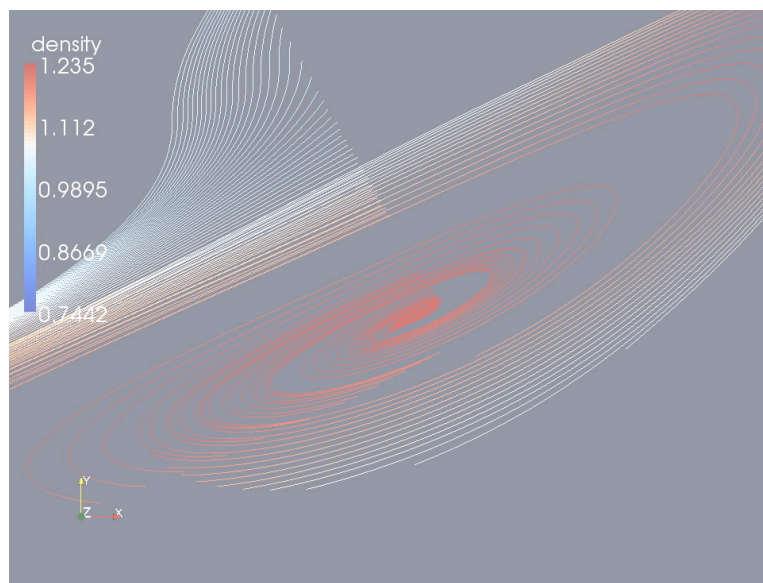
Thèse

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de Docteur,  
spécialité « Astrophysique »

par

Héloïse Méheut

Etude tridimensionnelle des tourbillons  
dans les disques d'accrétion : des  
microquasars à la formation planétaire



Thèse soutenue le 27 Septembre 2010 devant le jury composé de :

Prof.	Rony Keppens	Katholieke Universiteit Leuven	(Rapporteur)
Dr.	Fathi Namouni	Observatoire de Nice	(Rapporteur)
Dr.	Pierre-Yves Longaretti	LAOG	(Examineur)
Prof.	François Ménard	LAOG	(Examineur)
Prof.	Etienne Parizot	APC	(Examineur)
Dr.	Michel Tagger	LPC2E Orléans	(Directeur)
Dr.	Fabien Casse	Université Paris Diderot	(Co-directeur)



# Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Michel Tagger et Fabien Casse qui m'ont encadrée durant ces trois années. Merci Michel pour ton approche enthousiaste et intuitive de la physique, et pour avoir pris le temps de passer par mon bureau à chacun de tes voyages à Paris. Merci aussi Fabien pour tous tes conseils avisés que ce soit sur la physique, le numérique ou le monde de la recherche. Peggy Varnière a aussi beaucoup contribué à ce travail. Merci de m'avoir initiée à la physique de la formation planétaire, mais aussi de ton aide sur les problèmes numériques et bien sur d'avoir supporté pendant trois ans une étudiante dans ton bureau.

Cette thèse ayant nécessité d'importants moyens numériques, elle aurait pris une forme bien différente sans l'aide de Fabrice Dodu, Marc Bétoule et Maude Le Jeune qui ont installé et maintenu le cluster sur lequel la majeure partie des simulations a été réalisée, après avoir pu utiliser les centres nationaux. Merci aussi à Marc et Maude pour leur dynamisme et pour ne pas avoir craint un Abelard.

Un grand merci à l'ensemble de l'équipe ADAMIS qui m'a donné une vision de l'Univers et des ondes qui le traversent bien plus large que celle sur laquelle je me concentrais. Et merci aussi pour les nombreuses discussions autour d'un café à Gilles Fay, Radek Stompor, Jean-François Cardoso ainsi que Jacques Delabrouille et Eric Chassande-Mottin avec qui j'ai pu partager mon intérêt pour la diffusion des sciences. Je n'oublie pas les post-doc Julien Grain et Olivier Rabaste avec qui l'aventure des 24h du Mans roller fut mémorable. Je souhaite aussi beaucoup de bonheur et de réussite à Massimo Granata, Josquin Errard, Antoine Rogier, Guillaume Castex et Mathieu Remazeilles qui m'ont bien aidée durant la période intense de la fin de thèse. Merci aussi aux étudiants du CEA, dont Lionel Prat et Mickael Coriat avec qui j'ai découvert Buenos Aires.

Je tiens à remercier le laboratoire APC pour m'avoir accueillie, en particulier Pierre Bienetruy qui m'a aidé à obtenir une bourse, le service communication avec Jean-Luc Robert pour m'avoir donné plusieurs occasions de vulgariser mon travail de thèse auprès du grand public mais aussi Martine Piochaud, Sabine Tesson et Aurélia Guet qui m'ont aidée, toujours avec le sourire, dans les dédales de l'administration.

Mais mes remerciements vont aussi aux différentes équipes pédagogiques pour m'avoir guidée dans la découverte du métier d'enseignant, à Sylvie Henon, Loïc Lanco, Martine Mouchet, Guillaume Patanchon, Jimmy Le Digabel,

Tristan Beau et Cyril Lachaud.

J'en viens à rendre hommage à l'ensemble du secteur astronomie de l'association Planète Sciences, pour toutes ces soirées merveilleuses sous les étoiles. Ce secteur n'existerait pas sans ses permanents, donc merci Cédric pour ton enthousiasme débordant, Gabriel pour m'avoir appris à partager l'astronomie avec les mains, et Joël pour faire avancer le secteur dans la bonne direction. Merci à l'ensemble du bureau pour m'avoir fait découvrir une autre facette de l'engagement associatif, avec une mention spéciale pour Ivan qui était là depuis le début.

Enfin merci à toute la bande du Forum et en particulier à Claire et Nicolas, pour tous ces moments partagés, ainsi qu'à Manu, Nicolas, Alice et les autres. Un très grand merci aussi à toute ma famille qui m'a encouragée depuis longtemps à poursuivre dans la voie de l'astronomie sans pour autant toujours comprendre ce qui pouvait tellement m'intéresser. Merci aussi pour toutes vos questions qui m'obligeaient à toujours clarifier mes explications et donc mes idées.

Je conclurai en remerciant de tout cœur Marc qui a toujours été là, même s'il dira qu'il ne l'était pas suffisamment.

# Table des matières

Table des matières	<b>v</b>
Introduction	<b>1</b>
<b>I Contexte scientifique et outils</b>	<b>7</b>
<b>1 Physique des disques d'accrétion astrophysiques</b>	<b>9</b>
1.1 Objets accrétants	11
1.1.1 Pourquoi un disque?	11
1.1.2 Les étoiles jeunes	12
1.1.3 L'évolution stellaire en quelques lignes	15
1.1.4 Les binaires-X	15
1.1.5 Comparaison	20
1.2 Les équations de l'hydrodynamique	21
1.2.1 L'équation de Boltzmann	21
1.2.2 L'équation de conservation de la masse	22
1.2.3 L'équation de conservation du moment	23
1.2.4 L'équation de conservation de l'énergie	23
1.2.5 L'équation de fermeture	23
1.3 Modèle de disque à l'équilibre	24
1.3.1 Les équations hydrodynamiques	24
1.3.2 Gaz polytropique	25
1.3.3 Le disque mince	27
1.3.4 Le disque alpha	29
1.3.5 Structure radiale d'un disque en régime permanent	30
1.4 Etude dynamique des disques	31
1.4.1 Temps caractéristiques	31
1.4.2 Stabilité axisymétrique du disque	32
1.4.3 Stabilité verticale	32
1.4.4 Oscillation quasi-périodique	33
1.5 Physique des ondes	35
1.5.1 Pulsation et nombre d'onde	35
1.5.2 Résonances	36
1.5.3 Onde stationnaire et modes	37
<b>2 Outils de simulations numériques hydrodynamiques en astro-physique</b>	<b>41</b>
Introduction	43
2.1 Contexte	43
2.1.1 Caractéristiques des codes hydrodynamiques sur grille	43

2.2	Le code VAC . . . . .	49
2.2.1	Présentation . . . . .	49
2.2.2	La méthode TVD-MUSCL . . . . .	50
2.3	Grille à plusieurs dimensions . . . . .	57
2.4	VAC MPI . . . . .	58
2.5	Une nouvelle méthode pour l'étude des instabilités . . . . .	62
2.5.1	Contenu d'un nouveau module . . . . .	62
2.5.2	Stabilité numérique pour instabilité physique . . . . .	63
2.5.3	Tests de la méthode . . . . .	65
	Bilan . . . . .	67

## II L'instabilité par ondes de Rossby **71**

3	Simulation tridimensionnelle de l'instabilité par ondes de Rossby	<b>73</b>
	Introduction . . . . .	75
3.1	L'instabilité par ondes de Rossby . . . . .	75
3.1.1	Les ondes de Rossby . . . . .	75
3.1.2	L'instabilité par ondes de Rossby . . . . .	78
3.1.3	Intérêts astrophysiques . . . . .	79
3.1.4	Résultats précédents et limites . . . . .	81
3.2	Configuration numérique . . . . .	84
3.2.1	Conditions initiales . . . . .	84
3.2.2	Schéma et grille . . . . .	86
3.2.3	Conditions aux bords de la grille de simulation . . . . .	87
3.2.4	Equilibre et stabilité du disque . . . . .	87
3.3	Résultats des simulations adiabatiques . . . . .	88
3.3.1	Identification de l'instabilité . . . . .	88
3.3.2	Croissance de l'instabilité . . . . .	88
3.3.3	Ecoulement tridimensionnel . . . . .	94
	Discussion et perspectives . . . . .	97
4	Etude analytique tridimensionnelle de l'instabilité par ondes de Rossby	<b>101</b>
	Introduction . . . . .	103
4.1	Stabilité d'un écoulement parallèle cisailé . . . . .	103
4.1.1	Equation de Rayleigh . . . . .	103
4.1.2	Critère de Rayleigh et théorème de Fjørtoft . . . . .	104
4.1.3	Application aux disques . . . . .	105
4.2	Etude de la structure des modes . . . . .	108
4.2.1	Les équations des ondes de Rossby et de densité . . . . .	108
4.2.2	Cas bidimensionnel . . . . .	109
4.3	Onde excitée par les déplacements dans le plan du disque . . . . .	111
4.4	Structure verticale . . . . .	112
4.4.1	Cas sans stratification verticale de $\rho_0$ . . . . .	113
4.4.2	Cas isotherme . . . . .	114
4.4.3	Cas général . . . . .	114
4.5	Comparaison avec les simulations numériques . . . . .	116
4.5.1	Code de tir . . . . .	116
4.5.2	Comparaison . . . . .	117

4.6	Analyse WKB radiale . . . . .	117
	Discussion . . . . .	119
5	Rôle de l'instabilité par ondes de Rossby dans la formation planétaire <b>121</b>	
	Introduction . . . . .	123
5.1	Mécanisme de formation planétaire . . . . .	123
5.1.1	Instabilité gravitationnelle . . . . .	125
5.1.2	Collisions . . . . .	126
5.1.3	Temps caractéristiques . . . . .	126
5.1.4	Rôle de l'instabilité par ondes de Rossby . . . . .	127
5.2	Modélisation des poussières et des grains . . . . .	129
5.2.1	Modélisation bi-fluide . . . . .	129
5.2.2	Force de traînée . . . . .	131
5.2.3	Dérive radiale et sédimentation . . . . .	131
5.3	Preuve de principe . . . . .	133
5.3.1	Concentration de poussières dans les structures tridimensionnelles . . . . .	134
5.3.2	Code bi-fluide . . . . .	134
5.3.3	Résultats numériques . . . . .	135
	Discussion et perspectives . . . . .	137
III	Mode de gauchissement dans les disques d'accrétion des étoiles à neutrons <b>141</b>	
6	Modèle pour les oscillations quasi-périodiques kiloHertz dans les binaires d'étoile à neutrons <b>143</b>	
	Introduction . . . . .	145
6.1	Les principaux modèles précédents . . . . .	146
6.2	Présentation générale du modèle . . . . .	149
6.3	Origine du disque magnétosphérique . . . . .	151
6.3.1	Configuration magnétique . . . . .	151
6.3.2	Rôle de l'instabilité d'interchange . . . . .	152
6.4	Equilibre vertical . . . . .	153
6.4.1	Relation de dispersion . . . . .	153
6.4.2	Rôle de la pression de radiation . . . . .	155
6.5	Application aux QPO kHz . . . . .	158
6.5.1	Fréquence des QPO . . . . .	158
6.5.2	L'interface disque/magnétosphère . . . . .	159
	Bilan . . . . .	162
	Bilan et perspectives <b>165</b>	
	Bilan méthodologique . . . . .	165
	Bilan scientifique . . . . .	165
	Perspectives . . . . .	166
IV	Annexes <b>169</b>	
A	Différents types de codes pour la physique des fluides <b>171</b>	

A.1	Les codes Vlasov . . . . .	171
A.2	Les codes particulières . . . . .	171
A.3	Les codes SPH . . . . .	172
A.4	Les codes sur grille . . . . .	172
A.5	Les codes hybrides . . . . .	173
A.6	Les codes spectraux . . . . .	173
<b>B</b>	<b>Articles publiés</b>	<b>175</b>
<b>C</b>	<b>La banlieue des trous noirs</b>	<b>193</b>
<b>D</b>	<b>Ordres de grandeur et notations</b>	<b>197</b>
D.1	Notations . . . . .	197
D.1.1	Relatives au disque . . . . .	197
D.1.2	Relatives aux ondes . . . . .	197
D.1.3	Relative à la grille de calcul . . . . .	197
D.2	Abréviations . . . . .	198
D.3	Quelques ordres de grandeur utiles . . . . .	198
D.4	Formulaire . . . . .	198
D.4.1	Coordonnées cylindriques . . . . .	198
D.4.2	Grandeurs relatives aux disques . . . . .	199
	<b>Bibliographie</b>	<b>201</b>



# Introduction

Les astres ont historiquement été associés à la stabilité, le ciel paraissait parfaitement cyclique et sans grande évolution au cours du temps. Les changements et instabilités célestes étaient réservés aux humeurs des dieux. Lever les yeux au ciel a, il est vrai, quelque chose de particulièrement rassurant par l'impression de pérennité que tous ces astres peuvent donner. Toute forme d'instabilité a en effet tendance à effrayer, il suffit de voir la réaction que peut avoir un trader<sup>1</sup> à l'annonce de ce mot pour s'en convaincre. Et tout événement inattendu dans le ciel, comme le passage d'une comète ou l'explosion d'une supernovae, pouvait créer des mouvements de panique. Alors que les comètes ont fini par dévoiler leur nature cyclique, les explosions de supernovae sont restées des événements isolés et il est apparu que le ciel n'était finalement pas aussi morne qu'il avait pu sembler. Les étoiles naissent, vivent et meurent, les galaxies aiment à fusionner entre elles, l'Univers est en expansion (ce que même Einstein a eu du mal à appréhender) ...

Cependant cette utilisation courante du mot stabilité (ou instabilité) ne correspond pas toujours à la définition du physicien. Pour le physicien, une instabilité est une situation telle qu'une perturbation, aussi petite soit elle, va perturber l'équilibre des forces, de façon à faire évoluer le système vers un état d'équilibre stable différent de l'état initial. Il est en effet nécessaire en physique de préciser la nature d'un équilibre : stable ou instable, contrairement à l'usage courant qui veut souvent qu'un équilibre soit instable. La figure 1 permettra de mieux comprendre ces subtilités. Ce n'est donc pas l'instabilité mais la non prédictibilité qui est crainte, ces deux notions étant bien distinctes. En effet il est généralement possible de prédire l'évolution d'une instabilité. Dans la mesure où nous sommes maintenant capables de déterminer les grandes lignes de l'évolution des étoiles, leur explosion en supernovae n'est plus crainte mais attendue avec impatience par les physiciens !

Suite aux avancées de l'astrophysique, il est apparu que l'évolution du ciel n'est en effet absolument pas stationnaire, mais que les échelles de temps concernées sont bien souvent très grandes devant l'échelle de temps humaine. Cette différence pose problème au chercheur qui souhaite comprendre ces phénomènes mais qui n'a que la durée de sa carrière<sup>2</sup> pour l'étudier. La découverte des microquasars (Mirabel et al. 1992) comme modèles réduits des galaxies actives (quasars) et évoluant sur des temps un milliard de fois plus courts que leurs grands frères, fût donc une aubaine pour la compréhension

---

1. Les événements économiques qui se sont déroulés pendant la durée de cette thèse le confirment

2. voire la durée de financement de son projet, ou de sa thèse...

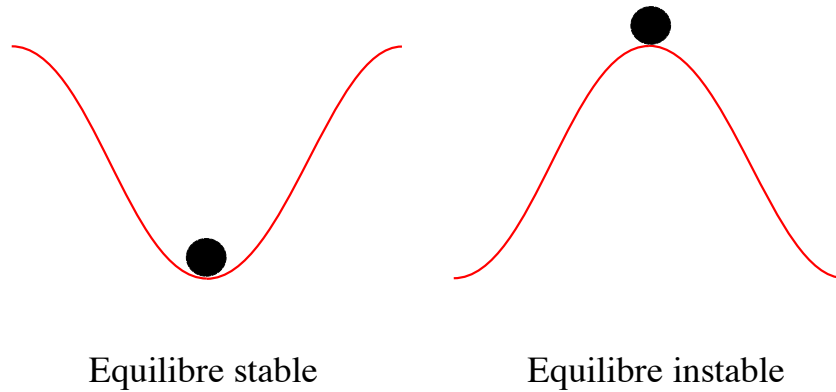


Figure 1 – A gauche la bille est en équilibre stable : la bille reviendra à sa position initiale si elle est soumise à une perturbation. A droite la bille est en équilibre instable : toute perturbation entraînera un déplacement vers un état d'équilibre stable.

de la physique mise en jeu. Et cette physique est particulièrement riche ! Alors que les observations ont montré des jets de matière se déplaçant apparemment plus vite que la lumière, un disque d'où provient ces jets, en rotation autour d'un trou noir, et des phénomènes ayant des temps caractéristiques aussi courts que un millième de seconde, les théoriciens aussi ont apporté leur pierre à l'édifice en proposant des modèles pour tous ces phénomènes faisant intervenir un grand nombre des outils à leur disposition.

Alors que les modèles de jets permettent aujourd'hui d'en avoir une bonne compréhension, ceux-ci doivent toujours faire intervenir des modèles phénoménologiques pour le disque dont la physique interne reste inconnue. Ces disques diffèrent de l'idée que l'on peut s'en faire en voyant un disque compact (CD) puisque ceux-ci sont en rotation *différentielle*. Cela signifie que l'ensemble du disque ne tourne pas à une même vitesse mais que les régions internes effectuent une rotation en un temps plus court que les régions externes. De même Mercure tourne autour du Soleil en 59 jours alors qu'il en faut 365 à la Terre, 5 ans pour la ceinture d'astéroïdes et plus de 29 ans pour Saturne. C'est cette particularité des disques astrophysiques qui est le moteur de plusieurs instabilités pouvant s'y développer.

Plusieurs de ces instabilités font intervenir des tourbillons (appelés ondes de Rossby dans ce cadre) comme l'instabilité par ondes de Rossby ou l'instabilité d'accrétion-éjection. Leur étude tridimensionnelle constituait l'objectif initial de cette thèse. Mais comme tout physicien, nous avons commencé par simplifier le problème, en ne considérant ni les effets magnétiques ni les effets relativistes pour pouvoir dans un premier temps maîtriser la physique des

instabilités d'un 'simple' fluide en trois dimensions C'est donc l'instabilité par ondes de Rossby que nous avons commencé à étudier puisque celle-ci permet toutes ces simplifications. Lors de son étude, la physique de cette instabilité et de ses tourbillons s'est déjà montrée très riche mais aussi très intéressante en elle-même pour l'étude d'encore un autre type d'objets astrophysiques : les disques protoplanétaires dans lesquels se forment les planètes. C'est alors dans cette direction que s'est poursuivie cette thèse.

On voit que les disques sont une forme que l'on retrouve de manière récurrente en astronomie. D'ailleurs, l'un des plus beaux objets facilement observables avec un petit télescope n'est-il pas ce disque d'anneaux entourant la planète Saturne ? Il s'agit en effet du premier disque astrophysique observé puisque c'est Galilée avec sa lunette qui le premier en a fait un schéma. La figure 2 montre une photo prise par la sonde Cassini alors qu'elle était placée de manière à ce que Saturne éclipse le Soleil. Elle permet de mettre en évidence deux composantes de plus à prendre en compte pour l'étude des disques : la réflexion de la lumière sur ce disque ainsi que l'illumination de la partie intérieure au disque (ici Saturne) par celui-ci.

Tous ces ingrédients de la physique de ces objets avaient déjà été proposés et étudiés bien avant le début de cette thèse, mais ils étaient bien souvent étudiés séparément. L'étude des jets ou de la formation des planètes considérait un disque stationnaire et axisymétrique, tandis que l'étude des disques d'accrétion ne prenait pas en compte leur structure verticale ou l'émission de jets. Mais peut-on vraiment ne pas prendre en compte la structure verticale du disque ? Comment étudier conjointement la structure radiale, azimutale et verticale du système ? Une étude analytique est-elle suffisante ? Une approche numérique est-elle nécessaire ? Comment surmonter les difficultés qu'apporte une étude numérique tridimensionnelle ? La structure tridimensionnelle du disque modifie-elle les scénarios de formation des planètes ? Les effets de réflexion de la lumière sur le disque influent-ils sur les instabilités mises en jeu ?

Pour répondre à ces questions, cette thèse est organisée en trois parties :

- La première partie porte sur le contexte astrophysique dans lequel se place cette thèse ainsi que sur les différents outils utilisés.
  - ◊ Le premier chapitre s'attache à décrire les objets astrophysiques étudiés qui présentent des phénomènes d'accrétion et d'éjection, leurs principales caractéristiques observationnelles et les contraintes que celles-ci imposent sur les modèles décrivant ces objets. Différents outils permettant l'étude des disques sont ensuite introduits. Je montre comment on peut retrouver les équations de l'hydrodynamique à partir de la théorie cinétique des gaz et comment à partir de ces équations on peut décrire l'évolution d'un disque. J'introduis aussi la phénoménologie du disque alpha ainsi que les principaux outils de la physique des ondes dans les disques.
  - ◊ Dans un deuxième chapitre, j'introduis les méthodes numériques permettant l'étude des écoulements hydrodynamiques en particulier les méthodes sur grille. Je décris en détail la méthode utilisée dans cette thèse ainsi que les critères qui ont conduit à ce choix de méthode. Dans la dernière partie une nouvelle méthode adaptée aux études tridi-

mensionnelles des instabilités est proposée et testée sur des instabilités hydrodynamiques classiques. Ce chapitre est complété par l'annexe A qui présente d'autres méthodes numériques adaptées à l'étude des fluides.

- La deuxième partie concerne l'étude de l'instabilité par ondes de Rossby en trois dimensions et son application à la formation planétaire.
  - ◊ Le troisième chapitre est consacré à l'étude numérique tridimensionnelle de l'instabilité par ondes de Rossby et aux tourbillons que celle-ci peut créer dans un disque. Il commence par une description de ces ondes, puis du mécanisme d'instabilité et de ses précédentes utilisations en astrophysique. Suit la présentation de la configuration physique et numérique utilisée pour cette étude et les résultats de ces simulations ainsi que les perspectives que ceux-ci ouvrent.
  - ◊ Dans un quatrième chapitre, la question de l'origine des structures tridimensionnelles qui apparaissent dans les simulations est posée. Après une présentation de quelques résultats de la physique d'un écoulement cisailé, une étude analytique de l'instabilité par plusieurs approches montre qu'il s'agit de structures pleinement tridimensionnelles de l'instabilité qui ne peuvent se réduire à un couplage entre des phénomènes bidimensionnels.
  - ◊ Le dernier chapitre de cette partie porte sur la formation planétaire et constitue une application des chapitres précédents. Les scénarios de formation des planètes sont décrits ainsi que la physique spécifique à ces disques. En effet, contrairement aux autres types de disques étudiés dans cette thèse, les disques protoplanétaires sont constitués non seulement de gaz mais aussi de poussière solide, et je décris le couplage entre ces deux composantes. Je donne ensuite une méthode permettant de suivre le comportement des poussières dans les tourbillons tridimensionnels de l'instabilité par ondes de Rossby. Enfin, je présente les premiers résultats que cette méthode a donnés.
  
- Finalement, la dernière partie de cette thèse s'intéresse aux disques autour des étoiles à neutrons et propose un modèle de gauchissement de la partie interne de ces disques pouvant éventuellement expliquer les observations d'oscillations quasi-périodiques d'une fréquence de l'ordre du kiloHertz. Après avoir présenté les principaux modèles précédents et leurs limites, je donne les différents éléments du modèle. Je montre ensuite comment ce modèle de gauchissement peut être appliqué aux observations, les limites de ce modèle et les améliorations que l'on peut proposer.

La thèse se termine par un bilan des savoir-faire développés et des résultats obtenus durant cette thèse et présente les perspectives ouvertes par les uns et les autres.

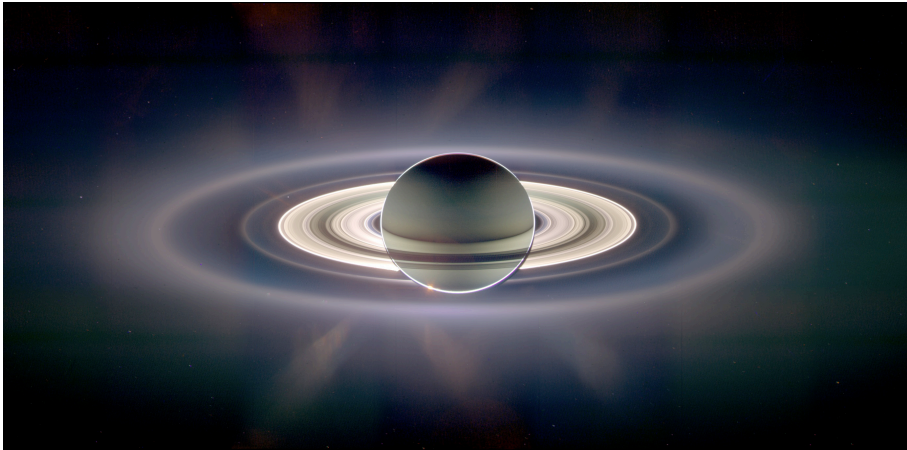


Figure 2 – Les anneaux de Saturne vus par la sonde Cassini alors que la planète éclipse le soleil.



Première partie

Contexte scientifique et outils





# Physique des disques d'accrétion astrophysiques

## SOMMAIRE

1.1	OBJETS ACCRÉTANTS . . . . .	11
1.1.1	Pourquoi un disque? . . . . .	11
1.1.2	Les étoiles jeunes . . . . .	12
1.1.3	L'évolution stellaire en quelques lignes . . . . .	15
1.1.4	Les binaires-X . . . . .	15
1.1.5	Comparaison . . . . .	20
1.2	LES ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE . . . . .	21
1.2.1	L'équation de Boltzmann . . . . .	21
1.2.2	L'équation de conservation de la masse . . . . .	22
1.2.3	L'équation de conservation du moment . . . . .	23
1.2.4	L'équation de conservation de l'énergie . . . . .	23
1.2.5	L'équation de fermeture . . . . .	23
1.3	MODÈLE DE DISQUE À L'ÉQUILIBRE . . . . .	24
1.3.1	Les équations hydrodynamiques . . . . .	24
1.3.2	Gaz polytropique . . . . .	25
1.3.3	Le disque mince . . . . .	27
1.3.4	Le disque alpha . . . . .	29
1.3.5	Structure radiale d'un disque en régime permanent . . . . .	30
1.4	ETUDE DYNAMIQUE DES DISQUES . . . . .	31
1.4.1	Temps caractéristiques . . . . .	31
1.4.2	Stabilité axisymétrique du disque . . . . .	32
1.4.3	Stabilité verticale . . . . .	32
1.4.4	Oscillation quasi-périodique . . . . .	33
1.5	PHYSIQUE DES ONDES . . . . .	35
1.5.1	Pulsation et nombre d'onde . . . . .	35
1.5.2	Résonances . . . . .	36
1.5.3	Onde stationnaire et modes . . . . .	37

Ce chapitre introductif présente les différents types de disques d'accrétion astrophysiques ainsi que les quelques grandes lignes de la physique mise en jeu dans ces objets. Les deux dernières parties concernent plus particulièrement la dynamique de ces disques et les ondes pouvant s'y propager.



## Introduction

Au  $XIX^{eme}$  siècle, les physiciens pensaient que la seule énergie à prendre en compte pour comprendre les objets célestes était l'énergie de gravité, voire éventuellement l'énergie chimique pour expliquer la luminosité des étoiles. Ces énergies se sont rapidement montrées insuffisantes pour expliquer l'âge du Soleil. C'est la révolution scientifique du début du  $XX^{eme}$  siècle avec la découverte de l'énergie nucléaire qui a permis de résoudre cette énigme. Pourtant dans la deuxième partie du  $XX^{eme}$  siècle, c'est de nouveau vers l'énergie gravitationnelle que les astrophysiciens se sont tournés pour expliquer l'origine du rayonnement de certains objets des plus lumineux du ciel, les disques d'accrétion des objets compacts. En notant  $M_*$  et  $R_*$  la masse et le rayon de l'objet compact (ou de l'étoile) et si l'on considère une masse  $m$  accrétée, l'énergie gravitationnelle libérée par l'accrétion peut s'écrire

$$E_{acc} = \frac{GM_*m}{R_*}$$

avec  $G$  la constante de gravitation. On peut comparer cette énergie à l'énergie de masse  $E_m = mc^2$  :

$$\eta = \frac{E_{acc}}{E_m} = \frac{GM_*}{R_*c^2},$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. C'est par conséquent le rapport masse sur rayon qui est important ici. Et comme son nom l'indique, pour un objet compact, ce rapport est très important. Par exemple, pour une étoile à neutrons ayant la masse du soleil et un rayon de 10 kilomètres,  $\eta$  est de l'ordre de 10%, ce que l'on peut comparer à la fusion nucléaire des étoiles pour laquelle cette efficacité n'est que de 0.7%. Les systèmes accrétants sont de magnifiques convertisseurs d'énergie. Une grande partie de cette énergie gravitationnelle libérée sera ré-émise sous forme d'énergie lumineuse. On comprend maintenant pourquoi les disques d'accrétion des objets compacts sont si lumineux et ont attiré l'attention lors de leur découverte.

Ce chapitre porte sur différents phénomènes d'accrétion autour d'un objet compact ou d'une étoile jeune. On vient de voir que les caractéristiques observationnelles vont être différentes d'un système à l'autre mais ils partagent pourtant une physique commune détaillée dans ce chapitre.

## 1.1 Objets accrétants

Les phénomènes d'accrétion sont récurrents en astrophysique, on les retrouve à des échelles différentes mais avec des propriétés communes. Les caractéristiques des objets astrophysiques présentant ces phénomènes d'accrétion et d'éjection qui ont été étudiés dans le cadre de cette thèse, sont résumées dans cette partie.

### 1.1.1 Pourquoi un disque ?

Un disque d'accrétion est constitué de gaz en rotation, le système est régi par la force de gravité qui tend à faire tomber le gaz vers le centre du disque où est

situé l'objet central et par la force centrifuge qui est due à la rotation du gaz et s'oppose à la gravité. Pour qu'il y ait un disque, le gaz doit par conséquent être en rotation, et, par là même, avoir un moment cinétique, défini par

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

non nul. La notation en gras signifie qu'il s'agit d'un vecteur, on a ainsi introduit le vecteur position  $\mathbf{r}$  ainsi que le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$ . La conservation du moment cinétique permet de déterminer le rayon auquel va se placer un élément de fluide. En effet, si cet élément de fluide en rotation circulaire a un moment cinétique initial tel que  $L_0 = mr_0v_0$ , celui-ci va chuter vers l'objet central sous l'effet de la gravité jusqu'à ce que la force centrifuge équilibre cette dernière :

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r} &= \frac{GM_*}{r^2} \\ \rightarrow \frac{L^2}{m^2 r^3} &= \frac{GM_*}{r^2} \\ \rightarrow \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} &= \frac{GM_*}{r^2} \\ \rightarrow r &= \frac{r_0^2 v_0^2}{GM_*} \end{aligned}$$

On s'est ici placé dans un système de coordonnées polaires  $(r, \phi)$ . Chaque élément de fluide se placera alors au rayon correspondant à son moment cinétique initial, l'ensemble formant ainsi un disque. L'origine de ce moment cinétique varie d'un disque d'accrétion à l'autre comme expliqué plus bas.

Apparaît ici l'un des principaux problèmes de la physique des disques d'accrétion : pour qu'il y ait accrétion c'est à dire capture du gaz par l'objet central, il est nécessaire que le gaz perde son moment cinétique, mais la question du comment, si chère aux physiciens, reste sans réponse claire. Je reviendrai sur cette question et ses possibles réponses à plusieurs reprises dans cette thèse.

Les équations précédentes permettent de déterminer la vitesse de rotation du gaz  $v = \sqrt{GM_*/r}$ , appelée vitesse keplerienne et notée  $v_k$ . Ainsi l'énergie mécanique d'un élément de fluide arrivé au bord de l'objet central est  $E_m = \frac{1}{2}mGM_*/R_* - GM_*m/R_* = -\frac{1}{2}E_{acc}$ . La moitié de l'énergie d'accrétion est dissipée pendant la phase d'accrétion.

### 1.1.2 Les étoiles jeunes

Les étoiles se forment dans les nuages de gaz interstellaires où l'instabilité de Jeans permet la contraction d'une partie du nuage sur lui-même sous l'effet de son auto-gravité. Comme on le verra plus loin, une instabilité est un phénomène dont l'amplitude peut croître exponentiellement au cours du temps. Cette contraction du nuage va ainsi continuer jusqu'à atteindre une densité et une température critiques suffisantes pour allumer en son coeur les premières réactions nucléaires produisant ainsi de la lumière. Toute la vie de l'étoile sera alors un jeu d'équilibre entre la gravité qui fait tomber la matière vers le centre et la pression qui a un effet opposé. Pression et rotation ont par

conséquent des effets similaires. Un point à noter ici est qu'il arrive fréquemment que le nuage subisse plusieurs effondrements en parallèle formant ainsi des systèmes multiples d'étoiles. Cependant, un système avec plus de deux étoiles en interaction n'est souvent pas stable et, dans la majeure partie des systèmes, les étoiles seront expulsées jusqu'à formation d'un système binaire stable. Contrairement à notre Soleil, les étoiles vivent donc souvent par deux.

Si le nuage a initialement du moment cinétique, celui-ci doit être évacué pour que la matière puisse tomber vers le centre (Figure 1.2). En la quasi-absence de viscosité cinématique (due à la faible densité), le moment cinétique est conservé et il y a formation d'un disque autour de la proto-étoile, et ce sont les mécanismes de perte du moment cinétique qui peuvent permettre l'accrétion du gaz vers l'objet central. Comme on le verra plus loin (voir le chapitre 5), c'est dans ce disque que se forment les planètes.

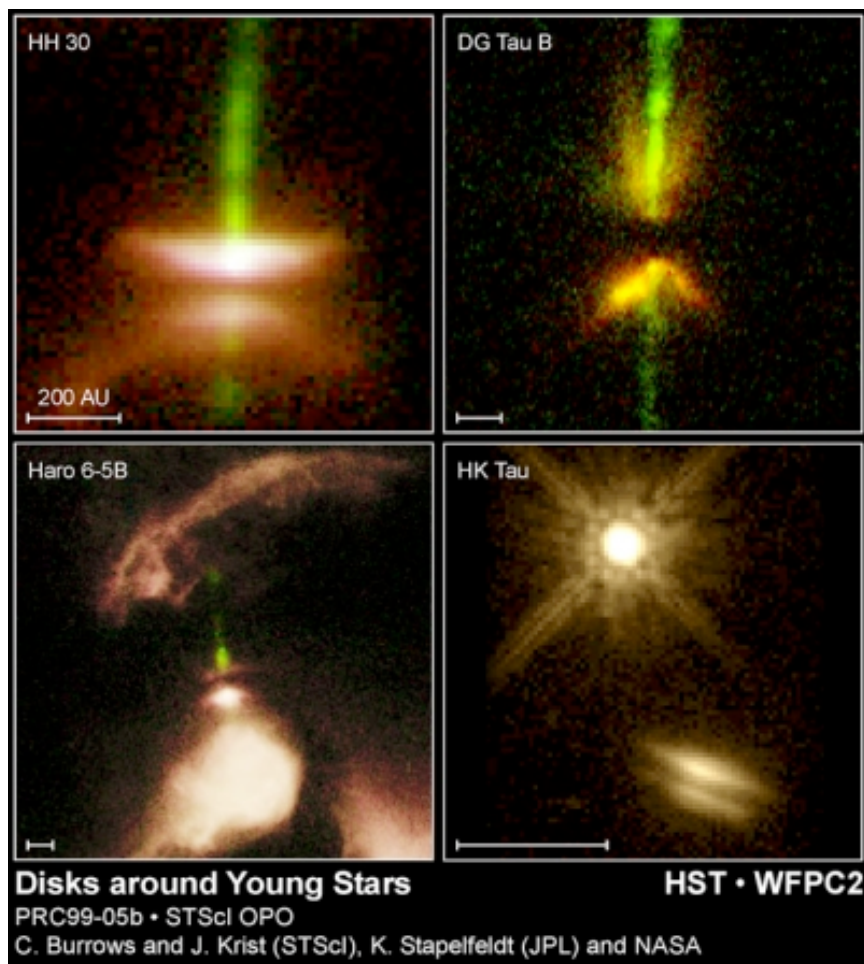


Figure 1.1 – Observations de disques autour des étoiles jeunes. Voir la figure 1.3 pour les jets des étoiles jeunes.

Par ailleurs, on observe des jets émis depuis ces étoiles en formation (voir

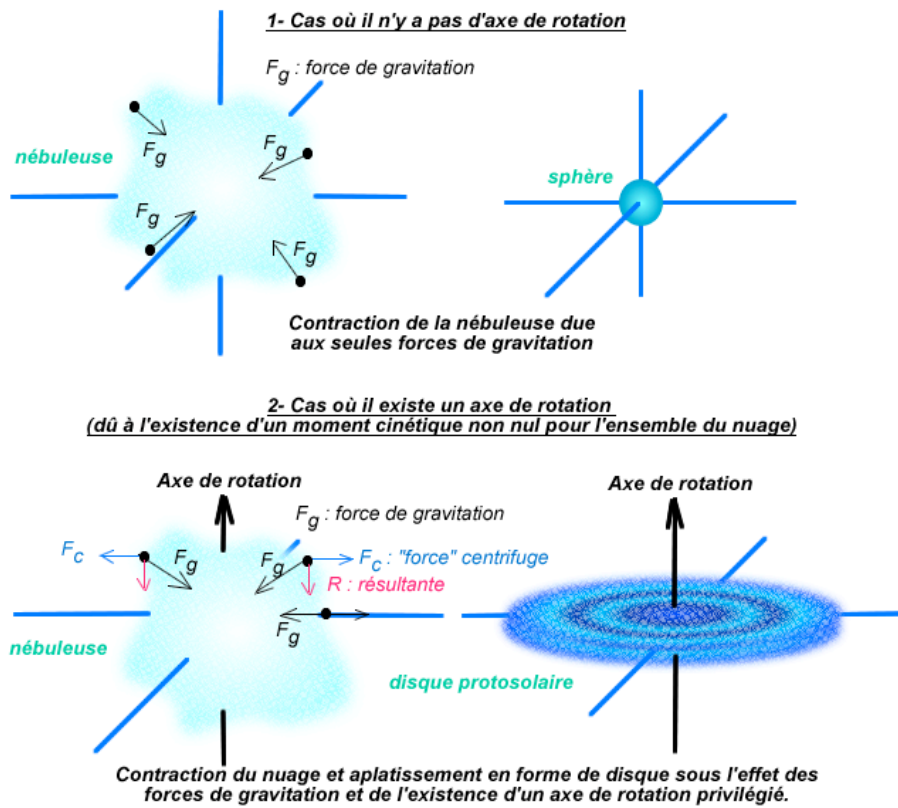


Figure 1.2 – Formation des disques protoplanétaires. (F. Kalfoun)

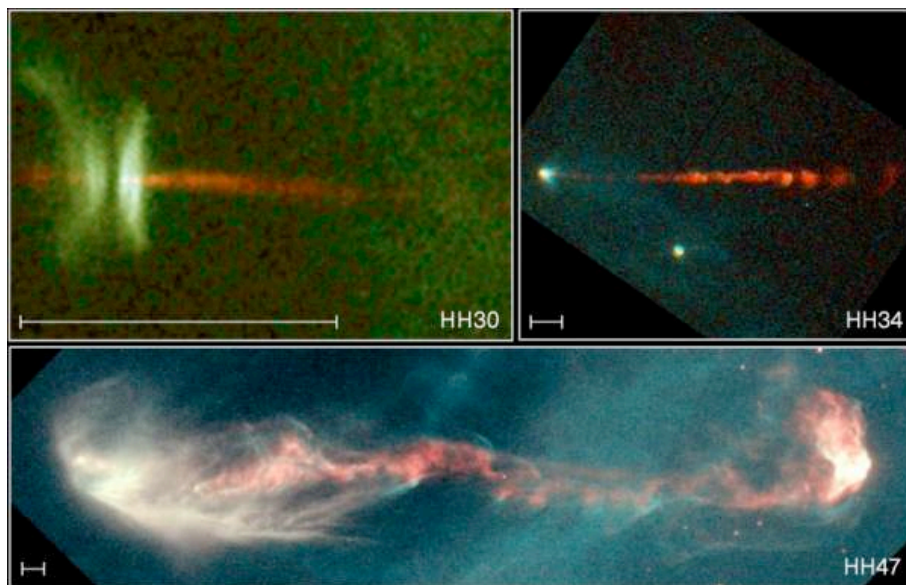


Figure 1.3 – Observations de jets stellaires. (STScI/NASA)

par exemple la figure 1.3) et ceux-ci peuvent participer à l'évacuation du moment cinétique. On distingue deux types de jets issus des étoiles jeunes :

**Les jets moléculaires** Ces jets sont composés de molécules partiellement ionisées et sont observés principalement via l'émission de la molécule CO. Ces jets sont peu collimatés et ils ont des vitesses assez faibles qui vont jusqu'à quelques dizaines de  $km.s^{-1}$ , ce qui correspond à la vitesse de chute libre de la matière. Ils sont observés lors de la phase d'effondrement du nuage de gaz.

**Jets optiques** Ce type de jets est observé dans des phases plus tardives de la formation de l'étoile lorsque le disque est formé. Comme leur nom l'indique, ils sont observés en optique, par les raies d'émissions atomiques de transitions interdites (oxygène, azote, ...). Ces jets optiques ont une composante de faible vitesse (dizaine de  $km.s^{-1}$ ) et une composante rapide de plusieurs centaines de  $km.s^{-1}$ .

Plus d'information sur les jets peut se trouver dans les revues de Bally et al. (2007), Pudritz et al. (2007), J. Ferreira, C. Dougados, & E. Whelan (2007).

### 1.1.3 L'évolution stellaire en quelques lignes

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence comment se forment les étoiles et le mécanisme d'équilibre d'une étoile entre pression et gravité. Mais le carburant des réactions nucléaires n'est pas infini et, après quelques milliards d'années de bons et loyaux services, les réactions nucléaires diminuent et la pression due à ces réactions ne permet plus de contrebalancer la gravité. Le coeur de l'étoile s'effondre alors sur lui-même jusqu'à ce qu'une nouvelle force de pression s'oppose à la gravité. Pour les étoiles peu massives comme le Soleil, la pression de dégénérescence des électrons due au principe d'exclusion de Pauli peut s'opposer à la gravité : l'étoile est alors une naine blanche. Si l'étoile est plus massive, la pression de dégénérescence des électrons n'est pas suffisante et l'étoile continuera à s'effondrer jusqu'à ce que la pression de dégénérescence des neutrons soit suffisante pour s'opposer à la gravité, c'est alors une étoile à neutrons. L'étoile est alors devenue un noyau atomique d'approximativement dix kilomètres de rayon. Finalement, si le coeur stellaire a une masse supérieure à deux masses solaires ( $M_{\odot}$ ), même la pression de dégénérescence des neutrons ne peut pas contrebalancer la gravité et le coeur stellaire se transforme en trou noir. Dans l'état actuel des connaissances, aucune force ne peut s'opposer à la gravité. Cette description très rapide est présentée de manière pédagogique dans le livre de Seguin (2002) et plus détaillé dans celui de Acker (2005).

### 1.1.4 Les binaires-X

Les étoiles vivent souvent en couple et, lorsque l'une des deux évolue en objet compact (étoile à neutrons ou trou noir), il peut alors y avoir formation d'une binaire-X. Il s'agit d'un système double en interaction gravitationnelle composé d'un objet compact et d'une étoile quelconque appelée étoile compagnon. Une vue d'artiste de ces systèmes est présentée sur la figure 1.4. Elle montre aussi le transfert de matière qui s'effectue de l'étoile compagnon vers l'objet compact à l'origine du disque d'accrétion. Avant d'aborder plus en détail les

binaires-X, signalons qu'il existe des systèmes similaires où l'objet compact est une naine blanche ; il s'agit des *variables cataclysmiques* mais celles-ci ne seront pas étudiées dans cette thèse. Le lecteur intéressé pourra trouver plus d'information sur ces objets dans la revue de Warner (1995).

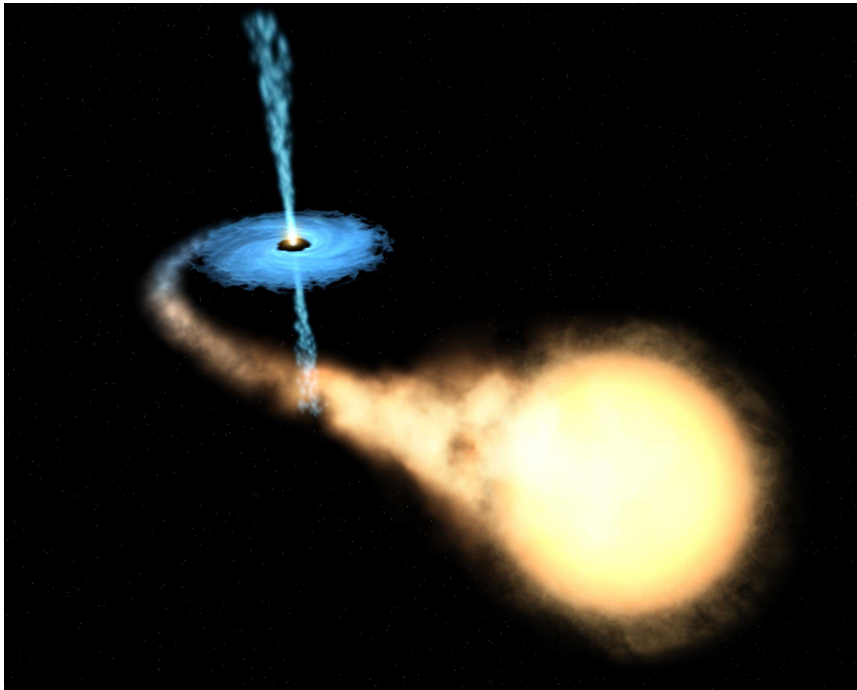


Figure 1.4 – Vue d'artiste d'une binaire X composé d'un objet compact entouré d'un disque d'accrétion présentant un jet et d'un étoile compagnon dont le gaz alimente le disque. (ESA/NASA)

D'un point de vue observationnel, les binaires-X sont classées en fonction de la masse de l'étoile compagnon.

- S'il s'agit d'une étoile massive de plus de dix masses solaires, on parlera de binaire X de forte masse (ou HMXB pour High-Mass X-ray Binary). Ces étoiles massives sont des étoiles jeunes et les HMXB sont généralement situées dans les zones de formation stellaire que sont les bras spiraux de la Galaxie. Le spectre visible du système est alors dominé par l'étoile compagnon.
- Si, a contrario, l'étoile compagnon a une masse inférieure à trois masses solaires, il s'agit d'une binaire X de faible masse (ou LMXB pour Low-Mass X-ray Binary). Ce sont des étoiles évoluées, c'est pourquoi on les trouve plus souvent dans le bulbe galactique. L'émission visible est alors dominée par le disque d'accrétion (Figure 1.5).

Cette différence va avoir un rôle important quant au transfert de masse entre l'étoile compagnon et le disque d'accrétion de l'objet compact. Dans le premier cas, le transfert se fera par le vent de l'étoile dans lequel se situe l'objet compact tandis que, dans le second cas, l'accrétion se fait par l'intermédiaire d'un disque mince.

Les observations permettent plus facilement une distinction en fonction des caractéristiques de l'étoile compagnon qu'en fonction de la nature de l'ob-



jet compact. Cependant, certaines propriétés des étoiles à neutrons peuvent permettre de les identifier facilement, par exemple lorsqu'elles sont observées sous forme de pulsars.

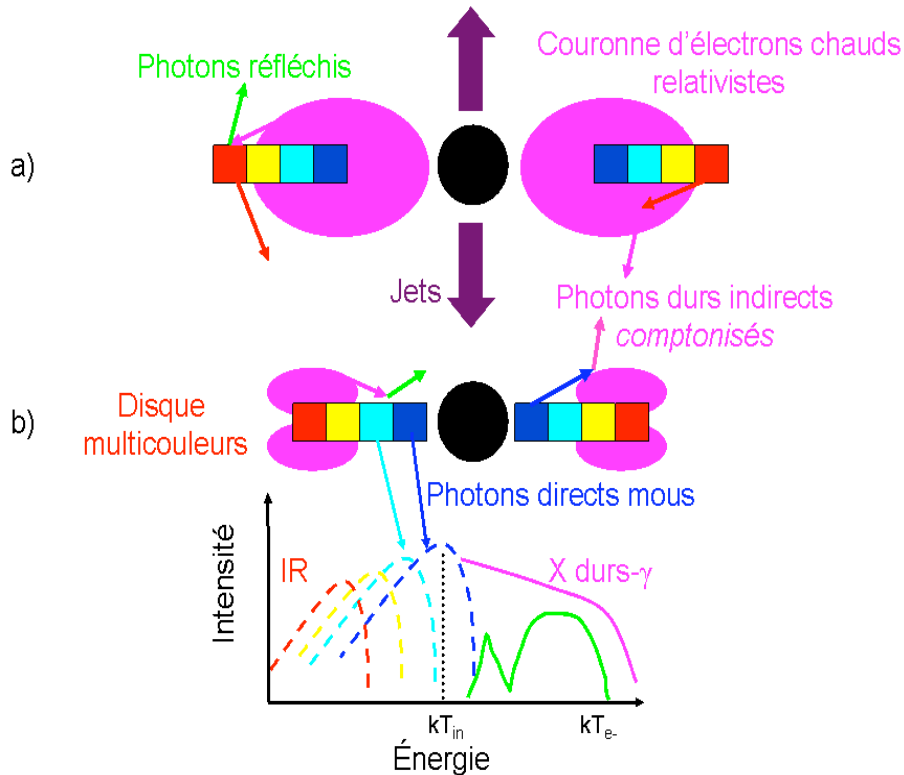


Figure 1.5 – Les états de la source présentés dans la figure précédente sont souvent interprétés comme des géométries différentes du système. Le disque est modélisé comme une suite de corps noirs de températures donc de couleurs différentes. Les lobes de couleur rose représentent la couronne dont il sera question dans les simulations. La partie inférieure de la figure montre le spectre correspondant à l'émission globale de ces différentes régions. (Cadolle Bel 2006)

**Les binaires à étoiles à neutrons** Les étoiles à neutrons sont des résidus d'étoiles composées principalement de neutrons mais aussi de protons, d'électrons et de particules exotiques. Ce sont ces particules chargées qui peuvent expliquer le champ magnétique intense de l'étoile (Figure 1.6) mais l'origine de ce champ magnétique n'est pas encore bien compris. Le champ magnétique est pourtant un composant essentiel des modèles de disques d'étoiles à neutrons et c'est le cas de celui présenté au chapitre 6. L'observation des pulsars, des étoiles à neutrons présentant une émission radio cohérente collimatée dans notre direction, confirme l'existence de ce champ magnétique intense de l'ordre de  $10^{12}$  gauss ou encore  $10^8$  teslas. Blandford (1993), Mészáros (1992), Lai (2006) donnent une revue générale sur les étoiles à neutrons et leurs émissions.

Les binaires X dont l'objet compact est une étoile à neutrons se séparent en deux principales catégories en fonction de leur signature observationnelle (Figure 1.7) :

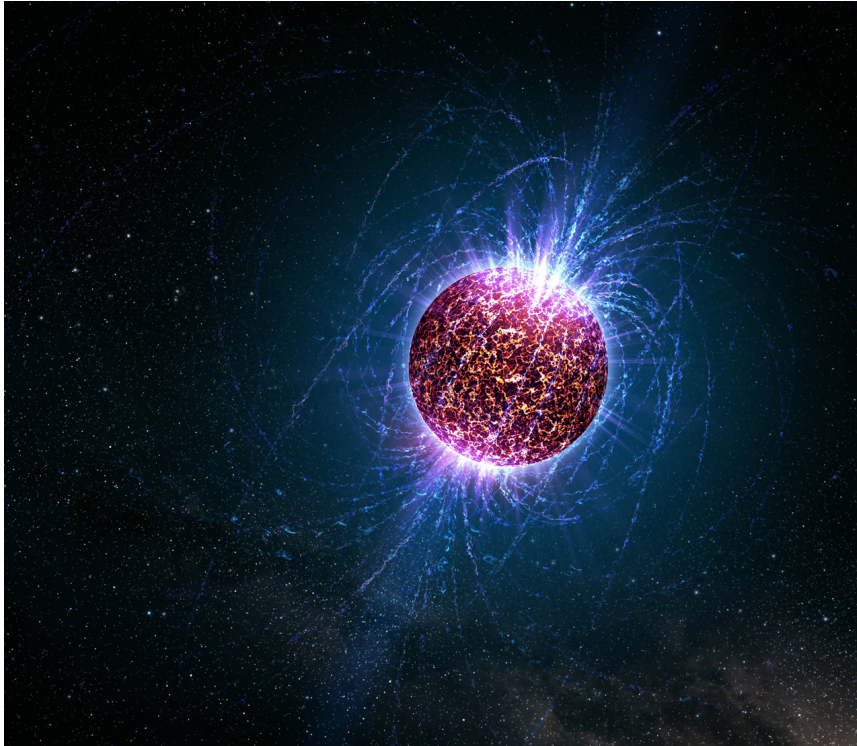


Figure 1.6 – *Vue d'artiste d'une étoile à neutrons avec un champ magnétique dipolaire.*  
(Casey Reed/Penn State University)

- L'évolution temporelle des sources Z permet de former une forme de Z dans un diagramme de dureté X en fonction de l'intensité de la source. Ce cycle dure de quelques heures à quelques jours.
- Les sources atoll forment un C dans un diagramme X-dur X-mou. Ces sources sont moins lumineuses que les sources Z.

Cette distinction repose sur des bases purement observationnelles et n'a trouvé aucune explication théorique à ce jour. Dans les deux cas, le taux d'accrétion supposé est croissant avec la luminosité.

### Les microquasars

Les microquasars ont été découverts en 1992 (Mirabel et al. 1992) et ont été nommés en référence aux quasars qui présentent des caractéristiques semblables mais avec des échelles de temps et de taille un million à un milliard de fois supérieures. Comme on peut le voir sur la figure 1.8, ces deux types de système présentent des jets compacts.

La particularité des microquasars dans la classe des binaires-X est la présence de jets de matière émis depuis la partie centrale du disque à des vitesses proches de celle de la lumière. Cette caractéristique a permis d'observer des jets apparemment super-luminiques dans le microquasar GRS 1915+105 (Mirabel et Rodríguez 1994). Cette aberration optique est due à des effets relativistes et permet de mesurer les paramètres du jet tels que la vitesse ou l'orientation. Le lien entre le disque d'accrétion et les jets a été révélé par des observations conjointes en radio, infrarouge et X (Figure 1.9 et Chaty (1998), Mirabel

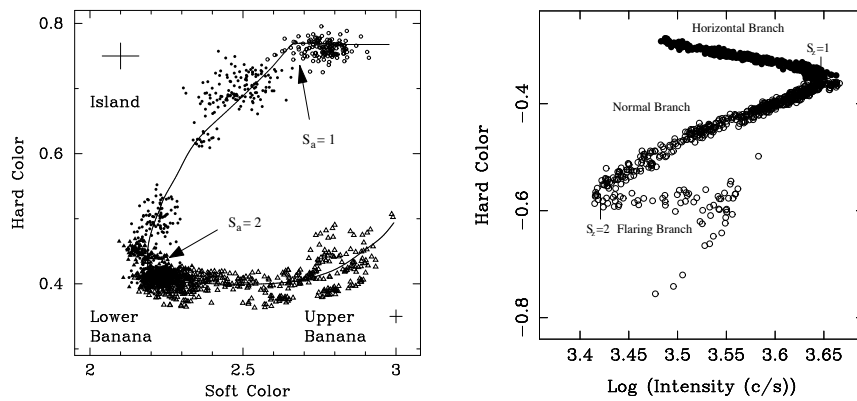


Figure 1.7 – A gauche : Diagramme couleur-couleur de la source atoll 4U-1608-52 (Méndez et al. 1999). A droite : Diagramme dureté X en fonction de l'intensité de la source Z GX-340+0 (Jonker et al. 2000). Les noms des différentes branches sont indiqués, alors que les symboles pleins correspondent à une détection de QPO. La couleur en X est définie comme le rapport du nombre de comptage (3.5 – 6.4/2.0 – 3.5 keV et 9.7 – 16/6.4 – 9.7 keV pour les X mou et dur respectivement) tandis que l'intensité est mesurée dans la bande 2-16 keV.

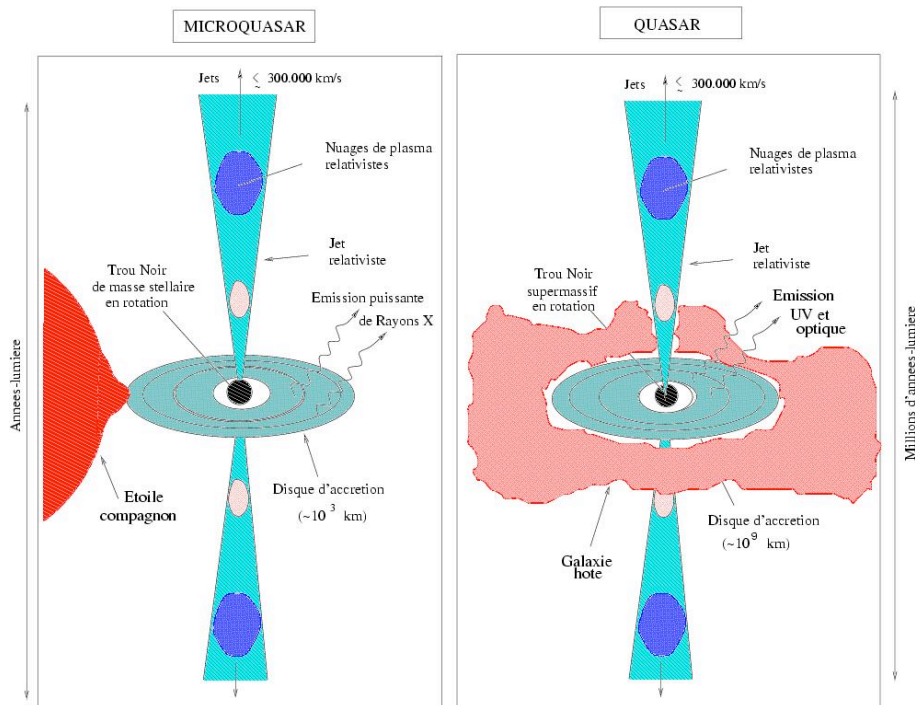


Figure 1.8 – Comparaison entre un microquasar et un quasar.

et al. (1998)). Ces observations montrent un pic dans la courbe de lumière du disque (en X), se poursuivent par une augmentation du flux à la base du jet (observé en infrarouge, IR) puis dans le jet (observé en radio). De plus cette émission de jets est aussi associée à la présence d'oscillations quasi-périodiques dans le disque (voir le paragraphe 1.4.4). En plus de ces éjections relativistes, on observe des jets continus et compacts s'étendant sur des distances bien plus faibles que les éjections relativistes. Le spectre radio plat de ces jets est interprété comme une émission synchrotron en milieu optiquement épais.

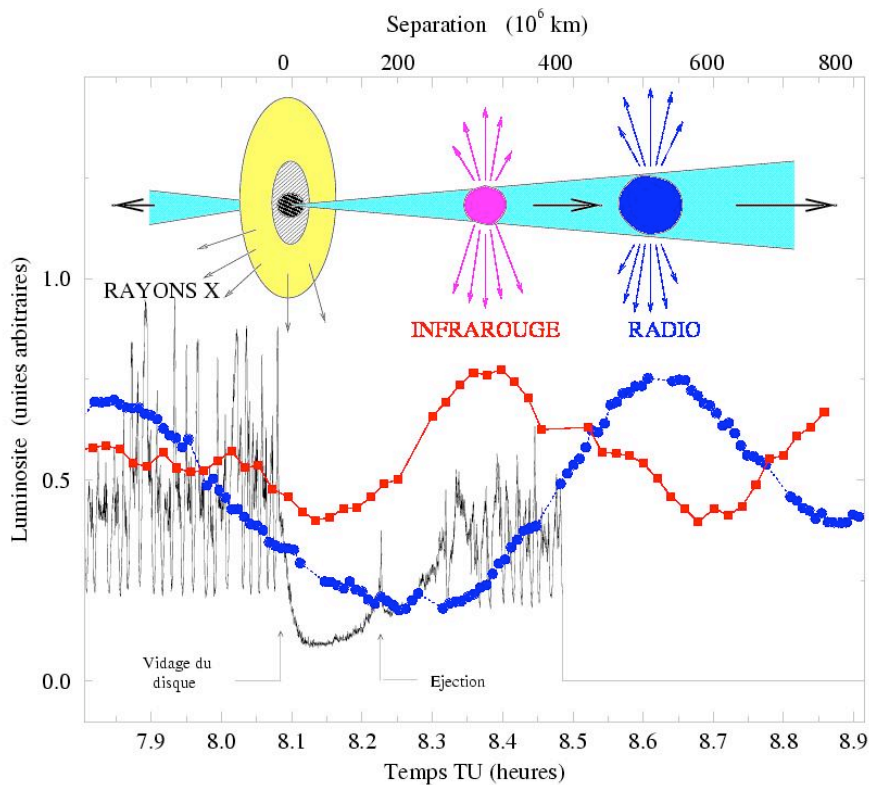


Figure 1.9 – Courbe de lumière en X, IR et radio de GRS 1915+105. (Chaty 1998)

### 1.1.5 Comparaison

	Microquasar	Quasar	Étoile jeune
Rayon interne du disque	$10^4 m$	$10^{12} m$	$10^9 m$
Temps de rotation	$10^{-3} s$	$10^4 s$	$10^4 s$
Rayon externe du disque	$10^6 m$	$10^{16} m$	$> 10^{14} m$
$M_*$	$10^{30} kg$	$10^{38} kg$	$10^{30} kg$
Taille des jets	$10^{16} m$	$10^{22} m$	$10^{15} m$
Vitesse des jets	$< 3 \cdot 10^9 m \cdot s^{-1}$	$< 3 \cdot 10^9 m \cdot s^{-1}$	$< 10^6 m \cdot s^{-1}$
Taux d'accrétion	$10^{13} kg \cdot s^{-1}$	$10^{43} kg \cdot s^{-1}$	$10^{16} kg \cdot s^{-1}$

Ce tableau donne une comparaison des ordres de grandeurs des différents

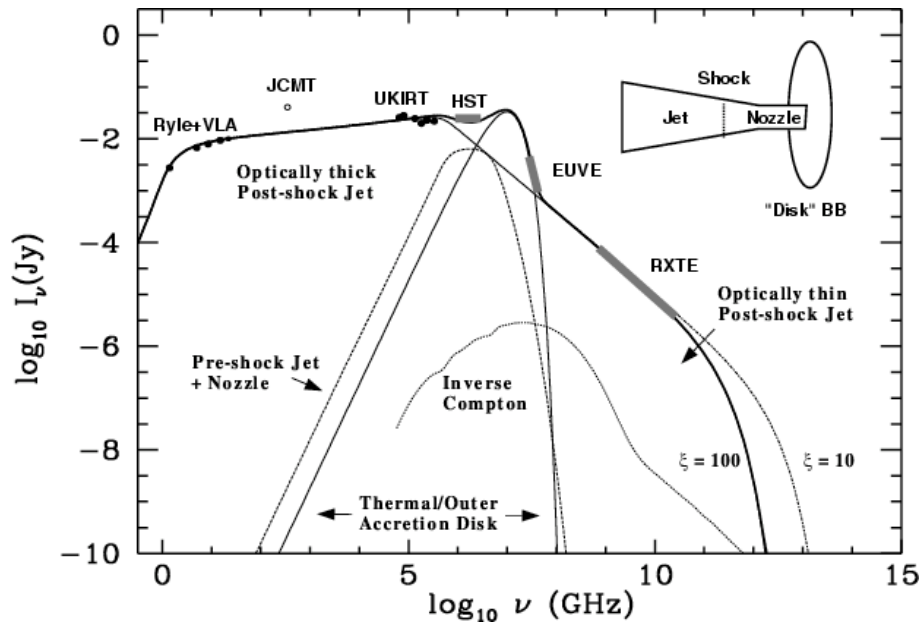


Figure 1.10 – Exemple de spectre radio plat d'un jet de microquasar, ici XTE J1118+480. (Markoff et al. 2001)

systèmes d'accrétion-éjection. Les unités généralement utilisées ne sont pas les mêmes pour ces différents systèmes. C'est pourquoi je prends ici le contre-pied de la plupart des astrophysiciens en utilisant les unités de toutes les autres sciences, les unités du système international (SI). Se référer aux articles de Morfill et Sterzik (1990), Lin et Papaloizou (1996), Kembhavi et Narlikar (1999), Remillard et McClintock (2006), Heng et Tremaine (2010) pour une revue plus détaillée sur ces différents systèmes et les ordres de grandeurs donnés ici.

## 1.2 Les équations de l'hydrodynamique

Pour décrire l'évolution du disque d'accrétion, on applique les méthodes de la physique des fluides et dans un premier temps on néglige l'effet du champ magnétique. Dans certaines régions du disque, le gaz peut en effet être peu ionisé et ainsi ne pas subir l'effet de ce champ. Cette partie a pour but de retrouver les équations d'évolution du gaz dans l'approximation hydrodynamique à partir des équations microscopiques. Toutes ces équations sont des équations de conservation, cela signifie qu'il s'agit d'une traduction mathématique de l'impossibilité de disparition ou d'apparition des quantités étudiées, ou encore que la variation d'une quantité pendant un intervalle de temps est égale à ce qui a été gagné par le système, diminué de ce qui a été perdu par le système.

$$\underbrace{\text{Variation pendant } dt}_{d_t \text{ ou } D_t} = \text{Gain} - \text{Pertes}$$

### 1.2.1 L'équation de Boltzmann

Dans un premier temps, nous allons nous placer dans le cadre de la théorie cinétique des gaz : le gaz est considéré comme un ensemble de particules se déplaçant dans un champ de gravité  $\Phi_G$ . Ces particules sont décrites par une fonction de distribution qui correspond à la densité de particules dans l'espace des phases à six dimensions. En effet l'état dynamique de chaque particule peut se définir par ses trois coordonnées de position et ses trois coordonnées d'impulsion, c'est pourquoi

$$f = f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$$

avec  $\mathbf{r}$  le vecteur position et  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse. La densité en masse de particules s'écrit donc

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \int f d^3 u$$

avec  $m$  la masse des particules. Et la fonction de distribution des vitesses est

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, t) = \int f d^3 r$$

A partir des équations précédentes, la vitesse moyenne des particules est

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{\int \mathbf{u} f d^3 u}{\int f d^3 u}$$

En l'absence de collision on peut appliquer le théorème de Liouville (c'est à dire la conservation du volume dans l'espace des phases) :

$$\frac{Df}{Dt} = \partial_t f + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + d_t \mathbf{u} \cdot d_u f = 0$$

En introduisant  $\mathbf{F}$  la résultante des forces s'appliquant sur les particules, la conservation de l'impulsion donne :

$$\partial_t f + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot d_u f = 0$$

Si le fluide n'est soumis qu'à la gravité alors

$$\partial_t f + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + \nabla \Phi_G \cdot d_u f = 0$$

Je n'ai ici pris en compte qu'un seul type de particules de masse  $m$ . Les mêmes équations peuvent s'écrire pour plusieurs types de particules ayant des masses différentes, à condition qu'il n'y ait pas de réactions (chimiques ou nucléaires) entre elles. On peut ainsi retrouver l'équation de Vlasov.

Mais, dans le cas général, il faut prendre en compte les collisions entre particules. Le volume dans l'espace des phases n'est plus conservé, on introduit alors un opérateur de collisions  $C(f)$  :

$$\partial_t f + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + \nabla \Phi_G \cdot d_u f = C(f)$$

### 1.2.2 L'équation de conservation de la masse

L'expression de cet opérateur de collisions est complexe à calculer, mais quelques unes de ses propriétés générales peuvent être trouvées facilement et suffisent pour retrouver les équations de l'hydrodynamique. Le nombre de particules à une position donnée n'est pas changé par les éventuelles collisions d'où

$$\int C d^3 u = 0$$

Si les collisions sont élastiques, il y a conservation de l'énergie et de l'impulsion :

$$\int m \mathbf{u} C d^3 u = 0$$

$$\int \frac{1}{2} m u^2 C d^3 u = 0$$

Et, en intégrant l'équation de Boltzmann sur l'espace des vitesses on obtient

$$\partial_t \int f d^3 u + \int \nabla \cdot (f \mathbf{u}) d^3 u - \underbrace{\int f \nabla \cdot \mathbf{u} d^3 u}_0 + \nabla \Phi_G \cdot \underbrace{\int d_u f d^3 u}_0 = \underbrace{\int C(f) d^3 u}_0$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Il s'agit du moment d'ordre zéro de l'équation de Boltzmann puisqu'on l'a intégrée directement. Celui-ci donne la conservation de la masse. Mais apparaît un terme en vitesse  $\mathbf{v}$ , pour pouvoir le calculer il faut prolonger le calcul au moment d'ordre supérieur.

### 1.2.3 L'équation de conservation du moment

On va maintenant évaluer le moment d'ordre un de l'équation de Boltzmann, c'est à dire que l'on fait le produit par la vitesse avant d'intégrer l'équation :

$$\partial_t \int f \mathbf{u} d^3 u + \int (\mathbf{u} \cdot \nabla) f \mathbf{u} d^3 u + \int \nabla \Phi_G \cdot d_u f \mathbf{u} d^3 u = \int C \mathbf{u} d^3 u$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + m \nabla \cdot \int \mathbf{u} \mathbf{u} f d^3 u + \rho \nabla \Phi_G = 0$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \langle \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle) = -\rho \nabla \Phi_G$$

Reste ici le terme en  $\langle \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle$  qui n'est pas encore calculé. Pour estimer ce terme il faut prendre en compte le moment d'ordre supérieur.

### 1.2.4 L'équation de conservation de l'énergie

Il s'agit cette fois-ci du moment d'ordre deux de l'équation de Boltzmann :

$$\partial_t \int f u^2 d^3 u + \int (\mathbf{u} \cdot \nabla) f u^2 d^3 u + \int \nabla \Phi_G \cdot d_u f u^2 d^3 u = \int C(f) u^2 d^3 u$$

$$\partial_t (\rho \langle u^2 \rangle) + \nabla \cdot (\rho \langle u^2 \mathbf{u} \rangle) = -\rho \nabla \Phi_G \cdot \mathbf{v}$$

Dans ce cas aussi il manque une description de certains termes, et cela apparaîtra quel que soit l'ordre. Pour pouvoir fermer ce système d'équations, il est nécessaire de faire de nouvelles approximations.

### 1.2.5 L'équation de fermeture

Pour fermer le système d'équation précédent, on commence par introduire la vitesse d'agitation des particules

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

$u$  étant la vitesse de la particule,  $v$  la vitesse moyenne des particules donc la valeur moyenne de cette vitesse d'agitation est nulle :  $\langle U \rangle = 0$ . Cela va nous permettre d'introduire des grandeurs relatives à cette vitesse d'agitation :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, t) &= \frac{m}{Nk} \langle U^2 \rangle && \text{Temperature} \\ \overleftrightarrow{p}(\mathbf{r}, t) &= \rho \langle \mathbf{U}\mathbf{U} \rangle && \text{Tenseur des contraintes} \\ \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \rho \langle U^2 \mathbf{U} \rangle && \text{Flux de chaleur} \end{aligned}$$

$N$  est le nombre de degrés de liberté des particules et  $k$  la constante de Boltzmann. Si le gaz parfait est monoatomique, ce qui est souvent le cas des gaz astrophysiques, les atomes ont trois degrés de liberté pour les trois directions possibles de translation :  $N = 3$ . La température donne ainsi la vitesse moyenne d'agitation thermique, normalisée par le facteur  $m/3k$ .

Le tenseur des contraintes peut se réécrire comme la somme d'un tenseur diagonal et des termes non-diagonaux :

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{p} &= P \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\sigma} \\ P &= \rho k T \end{aligned}$$

où  $\overleftrightarrow{I}$  est le tenseur unité.

Les équations de conservations peuvent alors s'écrire

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho (\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla P - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma} - \rho \nabla \Phi_G \\ (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) e + \nabla \cdot (e \mathbf{v}) + P \nabla \cdot \mathbf{v} + \overleftrightarrow{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{h} = -\rho \nabla \Phi_G \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$

avec  $e = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{N}{2} P$

Le système d'équation est alors fermé en négligeant tout phénomène de transport : le flux de chaleur ainsi que les termes non diagonaux du tenseur des contraintes (viscosité) sont négligés. Mais nous verrons au prochain paragraphe que la turbulence est souvent modélisée par de la viscosité.

## 1.3 Modèle de disque à l'équilibre

Les grandes lignes du modèle 'standard' de disque d'accrétion sont présentées ici. Une présentation plus détaillée peut-être trouvée dans Frank et al. (2002) ou Pringle (1981).

### 1.3.1 Les équations hydrodynamiques

On reprend dans cette partie les équations démontrées dans le paragraphe précédent mais avec une approche thermodynamique. On étudie un fluide de masse volumique  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , avec une vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , de température  $T(\mathbf{r}, t)$  et



de pression  $P(\mathbf{r}, t)$ . On impose la conservation de la masse par l'équation de continuité

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

et la conservation de l'impulsion se traduit par l'équation d'Euler

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f} \quad (1.2)$$

avec  $\mathbf{f} = \mathbf{F}/\rho$  et  $F$  la résultante des forces s'appliquant sur l'élément de fluide. La force de pression  $\mathbf{f}_P = -\nabla P/\rho$  est traitée séparément. On peut citer par exemple la force de gravité  $\mathbf{f}_G$  qui est égale à l'accélération de la pesanteur  $\mathbf{g}$ . La dernière équation est la conservation de l'énergie

$$\partial_t e + \nabla \cdot (e \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (P \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.3)$$

Ici  $e$  est la densité d'énergie. Celle-ci se décompose en densité d'énergie cinétique  $\frac{1}{2} \rho v^2$  et d'énergie thermique ou énergie interne. Cette dernière dépend du nombre de degrés de liberté  $N$  des molécules du gaz. L'énergie interne s'écrit alors  $\frac{N \rho k T}{2 \mu m_H}$  où  $k$  est la constante de Boltzmann,  $\mu$  est la masse moyenne des particules du fluide en unités de masse du proton  $m_H$ . Dans l'équation 1.3 les termes radiatifs et de conduction de la chaleur ont été négligés : l'évolution a été supposée adiabatique. En assimilant le fluide à un gaz parfait, la loi des gaz parfaits permet de réécrire l'énergie en fonction des grandeurs macroscopiques.

On préfère souvent utiliser l'indice adiabatique  $\gamma = 1 + 2/N = 5/3$ . L'équation d'état du gaz et l'énergie s'écrivent alors :

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (1.4)$$

$$e = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{P}{(\gamma - 1)} \quad (1.5)$$

On peut vérifier que l'indice adiabatique correspond au rapport des chaleurs spécifiques. C'est d'ailleurs sous cette forme qu'il est introduit en thermodynamique.

### 1.3.2 Gaz polytropique

Si le gaz est dans un état stationnaire, toutes les dérivées temporelles sont nulles et l'on peut réécrire les équations d'évolution du gaz ainsi :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot (e \mathbf{v} + P \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

En introduisant la conservation de la masse dans la conservation de l'énergie, nous avons

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{(\gamma - 1) \rho} + \frac{P}{\rho} \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

et avec l'équation d'Euler  $\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\frac{1}{2} \mathbf{v}^2) + \mathbf{v} \cdot \nabla P$

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\gamma P}{(\gamma - 1) \rho} \right) &= \mathbf{v} \cdot \nabla P \\ \mathbf{v} \cdot \left( \nabla \frac{\gamma P}{(\gamma - 1) \rho} - \frac{1}{\rho} \nabla P \right) &= 0 \\ \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour une évolution adiabatique,  $P/\rho^\gamma$  est constant le long d'une ligne de courant. Le gaz est aussi isentropique si cette constante est la même sur toutes les lignes de courant. En notant  $S$  l'entropie on a :  $P\rho^{-\gamma} = S$ .

Un gaz parfait isotherme peut se modéliser par un gaz polytropique avec un indice  $\Gamma = 1$  :  $P/\rho = kT/\mu m_H = cte$ .  $\Gamma$  est ici différent de l'indice adiabatique puisque  $\gamma = 1$  correspondrait à un gaz avec un nombre de degré de liberté infini. Dans la suite on écrira cependant  $\gamma = 1$  en se rappelant que dans ce cas, il ne s'agit pas du nombre de degrés de liberté mais seulement d'une modélisation d'un système isotherme.

### Onde sonore

Dans ce paragraphe, on cherche à étudier la propagation d'une perturbation dans un fluide à l'équilibre hydrostatique. Cela permet d'introduire pour ce cas d'école une méthode générale pour l'étude des ondes qui sera utilisée par la suite. On note la densité, la pression et la vitesse d'équilibre, respectivement  $\rho_0$ ,  $P_0$  et  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ . Ainsi l'équilibre hydrostatique s'écrit

$$-\frac{1}{\rho_0} \nabla P_0 + \mathbf{f} = 0$$

où  $\mathbf{f}$  comprend toutes les forces sauf celles de pression. En introduisant maintenant de petites perturbations, la pression, la densité et la vitesse s'écrivent :

$$P_0 + p, \rho_0 + \rho, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}.$$

Ces perturbations sont considérées infinitésimales, ce qui permet de linéariser les équations de continuité et d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

où l'équilibre hydrostatique a permis de supprimer les forces d'équilibre. Si l'on considère le gaz polytropique alors

$$P_0 + p = S(\rho_0 + \rho)^\gamma$$

et au premier ordre

$$\nabla p = (dP_0/d\rho_0) \nabla \rho.$$

Ainsi

$$\left. \begin{aligned} \partial_t^2 \rho &= -\rho_0 \nabla \cdot \partial_t \mathbf{v} \\ \partial_t \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{d\rho_0} \nabla \rho \end{aligned} \right\} \partial_t^2 \rho = \frac{dP_0}{d\rho_0} \nabla^2 \rho \quad (1.7)$$

On obtient alors une équation de propagation à une vitesse

$$c_s^2 = \frac{dP_0}{d\rho_0} \stackrel{adiab}{=} S\gamma\rho_0^{\gamma-1} \quad (1.8)$$

$$\stackrel{isoth}{=} S = cte \quad (1.9)$$

que l'on appelle vitesse du son.

### Equation des ondes sonores dans un disque en rotation

On se place dans un repère cylindrique  $(e_r, e_\phi, e_z)$ . Si le fluide à l'équilibre est un disque axisymétrique infiniment fin et en rotation à la vitesse  $\mathbf{v}_0 = r\Omega\mathbf{e}_\phi$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire du fluide, alors les équations s'écrivent au premier ordre :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \Omega \partial_\phi \rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \Omega \partial_\phi \mathbf{v} + v_r \partial_r (r\Omega \mathbf{e}_\phi) + v_z \partial_z (r\Omega \mathbf{e}_\phi) + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_t \rho = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \tilde{\partial}_t \mathbf{v} = -v_r \partial_r (r\Omega \mathbf{e}_\phi) - \frac{1}{\rho_0} \nabla p \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $\tilde{\partial}_t = \partial_t + \Omega \partial_\phi$ . La signification de ce terme est décrite au paragraphe 1.5.2.

#### 1.3.3 Le disque mince

Une étude tridimensionnelle des disques étant complexe il est souvent préférable de s'en tenir à une étude bidimensionnelle. Mais étudier un disque infiniment mince est une approximation qui ne correspond pas aux observations comme on peut le voir avec la figure 1.11. C'est pour cela que l'étude des disques d'accrétion se fait en général dans l'approximation du disque mince. Cela signifie que la hauteur caractéristique  $H$  du disque est petite devant son extension radiale :  $H \ll r$  et que l'on peut négliger tout déplacement vertical.

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\phi \mathbf{e}_\phi$$

Le potentiel gravitationnel peut alors se développer sous la forme

$$\Phi_G(r, z) \simeq \frac{GM_*}{r} \left(1 - \frac{z^2}{2r^2}\right)$$

Et l'on définit la densité de surface

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz$$

Cette approximation du disque mince revient à considérer le disque en quasi-équilibre vertical. Cela se justifie par le fait que l'équilibre vertical s'établit sur un temps caractéristique bien plus faible que le temps visqueux. Cette approche est donc appropriée pour une étude globale du disque et des phénomènes d'accrétion comme celle de Shakura et Sunyaev (1973). En ce qui concerne les études des modes (définis au paragraphe 1.5.3), Goldreich et Lynden-Bell (1965a;b) ont montré que cette approximation était aussi justifiée pour l'étude du mode de Jeans (axisymétrique). Elle est depuis utilisée plus



Figure 1.11 – *Disque protoplanétaire vu par la tranche.*

généralement dans l'étude des ondes (spiraales notamment) car cela simplifie grandement les études analytiques et jusqu'à récemment les puissances de calcul ne permettaient pas des études numériques à trois dimensions. Cependant l'un des principaux résultats de cette thèse montre que cette approximation n'est pas justifiée, a minima pour l'étude de l'instabilité par ondes de Rossby.

#### 1.3.4 Le disque alpha

On s'intéresse ici à un disque mince et les quantités physiques sont alors moyennées sur la hauteur du disque. La prescription du disque alpha a été proposée par Shakura et Sunyaev (1973). Elle permet d'éviter le problème de l'origine des phénomènes de transport du moment angulaire en les paramétrant par une constante sans dimension notée  $\alpha$ . La seule composante non diagonale et non nulle du tenseur des contraintes est  $\sigma_{r\phi}$  que l'on écrit sous la forme d'un tenseur de Reynolds (c'est à dire en ne prenant en compte que les fluctuations de vitesse).

En effet l'ordre de grandeur de la viscosité moléculaire  $\nu$  d'un fluide classique varie beaucoup d'un fluide à l'autre mais même pour un fluide particulièrement visqueux comme la glycérine ( $\nu \approx 7 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ) cela reste très inférieur aux valeurs de viscosité nécessaires pour expliquer les phénomènes d'accrétion ( $\nu \approx 10^{15} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ). En conséquence il faut faire appel à la turbulence pour comprendre le transport de moment angulaire. Mais les études sur la turbulence étant bien plus difficiles que celles sur la viscosité, Boussinesq (1877) introduisit la notion de viscosité turbulente avec un tenseur des contraintes de la forme

$$\sigma_{r\phi} = \mu_{turb} \partial_r v_\phi.$$

Les mouvements turbulents sont modélisés comme des mouvements moléculaires mais avec un libre parcours moyen macroscopique, cette approximation ne s'applique que si les mouvements turbulents sont totalement chaotiques. On modélise ainsi tous les phénomènes de transport par une viscosité, c'est à dire que toute contrainte appliquée sur un élément de fluide s'écrit sous la forme du gradient de vitesse azimutale dans le tenseur des contraintes. Les échelles de distance et de vitesse de la turbulence étant inconnues, on prendra leur valeurs limites. L'échelle de distance maximum étant la hauteur  $H$  du disque et la vitesse turbulente maximum celle du son, car un mouvement turbulent supersonique risque d'être rapidement thermalisé par les chocs. La viscosité cinématique turbulente s'écrit alors avec la prescription alpha

$$\nu = \frac{\mu_{turb}}{\rho} \approx \alpha \frac{c_s^2}{\Omega_K} \approx \alpha c_s H \quad (1.12)$$

où  $\Omega_K$  la vitesse angulaire keplerienne, c'est à dire la vitesse angulaire définie à partir de la vitesse keplerienne (paragraphe 1.1.1).

Il est ici important de noter que la viscosité est introduite en cinétique des gaz comme un coefficient de diffusion. Ceci n'est possible que parce que l'échelle de variation des quantités moyennées est très grande devant le libre parcours moyen des molécules. Cela diffère des mouvements turbulents qui se font sur des échelles qui peuvent aller jusqu'à celle des variations des quantités moyennées. Il faudrait alors ici faire appel à la thermodynamique des systèmes hors-équilibre !

La prescription alpha est très largement utilisée dans l'étude des disques car, jusqu'à présent, aucune alternative n'a été trouvée mais aussi parce qu'elle a permis de nombreuses avancées dans ce domaine. L'ordre de grandeur de  $\alpha$  et la validité de cette approximation sont encore débattus, mais une valeur de  $\alpha$  supérieure à l'unité se traduirait par de la turbulence supersonique donc de la dissipation qui ramènerait à une valeur de  $\alpha$  inférieure ou égale à l'unité. Les régressions sur les données observationnelles donnent habituellement une valeur de alpha de quelques dixièmes pour les systèmes binaires et entre  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$  pour les étoiles jeunes, tandis que les simulations numériques obtiennent des valeurs un ordre de grandeur plus faible (voir King et al. (2007) pour plus de précision).

### 1.3.5 Structure radiale d'un disque en régime permanent

Comme précédemment, le disque est assimilé à un disque mince, axisymétrique et l'on se place en régime permanent. La conservation de la masse sur un anneau de rayon  $r$ , nous donne :

$$\dot{M} = 2\pi r(-v_r)\Sigma$$

où  $\dot{M}$  est le taux d'accrétion (défini positif). Par ailleurs, la composante radiale de la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique sont respectivement

$$v_r \partial_r v_r = (\Omega^2 - \Omega_K^2)r - \frac{1}{\rho} \partial_r P \text{ et}$$

$$-\nu \Sigma \partial_r \Omega = \Sigma(-v_r)\Omega + \frac{D}{r^3}$$

où  $D$  est une constante qui traduit la perte de moment angulaire sur l'objet central. On peut par conséquent la relier à un couple de freinage et donc au paramètre de viscosité  $\nu$ .

Finalement l'équilibre hydrostatique impose

$$\frac{1}{\rho} \partial_z P = \partial_z \left( \frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \approx -\frac{GMz}{r^3} = -\frac{v_K^2 z}{r^2}$$

On introduit ici la vitesse du son  $c_s^2 = \partial_\rho P$ , et en considérant un gradient vertical de densité tel que

$$\partial_z \rho \approx \rho/H,$$

on obtient

$$c_s^2 = \frac{H^2}{r^2} v_K^2$$

Par conséquent dans un disque mince ( $H/r \ll 1$ ), la rotation keplerienne est largement supersonique et le rapport d'aspect du disque  $H/r$  est l'inverse du nombre de Mach azimuthal, c'est à dire du rapport  $v_k/c_s$ . A contrario l'écoulement radial est subsonique avec

$$\sigma_{r\phi} \sim \rho v_r v_\phi \text{ et } \sigma_{r\phi} = \nu \rho \partial_r v_\phi$$

$$\rightarrow v_r \approx \frac{\nu}{r} \approx \alpha \frac{H}{r} c_s.$$

On peut aussi montrer à partir des équations précédentes le lien entre viscosité et taux d'accrétion

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[ 1 - \sqrt{\frac{R_*}{r}} \right]$$

où  $R_*$  est le rayon de l'objet central.

## 1.4 Etude dynamique des disques

### 1.4.1 Temps caractéristiques

Les ingrédients à prendre en compte dans l'étude dynamique des disques vont dépendre de l'échelle caractéristique sur laquelle se fait l'étude du disque et des échelles de temps des différents processus. Un phénomène se déroulant sur un temps caractéristique bien plus élevé ou bien plus faible que l'échelle de temps considérée sera traité comme étant quasi-statique ou sans évolution temporelle. C'est pourquoi il est nécessaire de garder à l'esprit les différents temps caractéristiques dans un disque d'accrétion.

**Temps gravitationnel** Il s'agit du temps caractéristique associé à la force de gravitation. Ce temps correspond au temps de rotation keplerienne.

$$t_K = \frac{2\pi}{\Omega_K} \quad (1.13)$$

avec  $\Omega_K = \sqrt{GM/r^3}$ . C'est aussi l'ordre de grandeur du temps de chute libre sans vitesse initiale sur l'objet central. L'équilibre hydrostatique vertical étant imposé par la gravité, c'est de nouveau le temps keplerien qui joue.

$$\frac{H}{c_s} \simeq \frac{c_s}{\Omega_K c_s} \simeq \Omega_K^{-1} \quad (1.14)$$

**Temps visqueux** Il correspond au temps caractéristique de transport du gaz dans le disque sous l'effet du couple visqueux

$$t_{visc} \simeq \frac{r}{v_r} \simeq \frac{r^2}{\nu} \simeq \frac{r^2}{\alpha H c_s} \quad (1.15)$$

$$\alpha t_{visc} = \left( \frac{r}{H} \right)^2 t_K \quad (1.16)$$

Si l'on ne prend en compte que la viscosité moléculaire, le temps visqueux devient supérieur à la durée de vie du disque.

**Temps thermique** Il s'agit du temps de mise en équilibre thermique vertical d'un anneau du disque. On le définit comme le rapport entre l'énergie thermique du gaz et l'énergie rayonnée qui, à l'équilibre, est égale à la dissipation visqueuse.

$$t_{th} \simeq \frac{\Sigma c_s^2}{\nu \Sigma \Omega_k^2} \simeq \frac{1}{\nu} \left( \frac{c_s}{\Omega_k} \right)^2 \simeq \left( \frac{H}{r} \right)^2 t_{visc} \quad (1.17)$$

On a ici négligé le transport d'énergie thermique par advection.

Pour  $\alpha \sim 1$ , la hiérarchie des temps caractéristiques est alors

$$t_K \leq t_{th} \ll t_{visc} \quad (1.18)$$

J'introduirai dans la partie 5.1 les échelles de temps spécifiques aux disques protoplanétaires.

### 1.4.2 Stabilité axisymétrique du disque

Le critère de Rayleigh permet de vérifier la stabilité radiale du disque : il s'applique à tous les écoulements en rotation différentielle. Pour le comprendre on étudie une particule fluide située à un rayon  $r$  avec un moment angulaire  $\Omega(r)r^2$ . Une perturbation de son rayon  $\delta r$  sera amplifiée si son moment cinétique est supérieure à celui des particules situées en  $r + \delta r$  :  $\Omega(r)r^2 > \Omega(r + \delta r)(r + \delta r)^2$ . L'écoulement est alors instable si

$$\partial_r(r^2\Omega) < 0 \Rightarrow \kappa^2 < 0 \quad (1.19)$$

On a ici introduit la fréquence épicyclique

$$\kappa = (4\Omega^2 + 2r\Omega\Omega')^{1/2}, \quad (1.20)$$

qui correspond à la fréquence d'oscillation radiale d'un élément de fluide (voir la figure 1.12). Cette fréquence joue un rôle important dans la physique des disques.

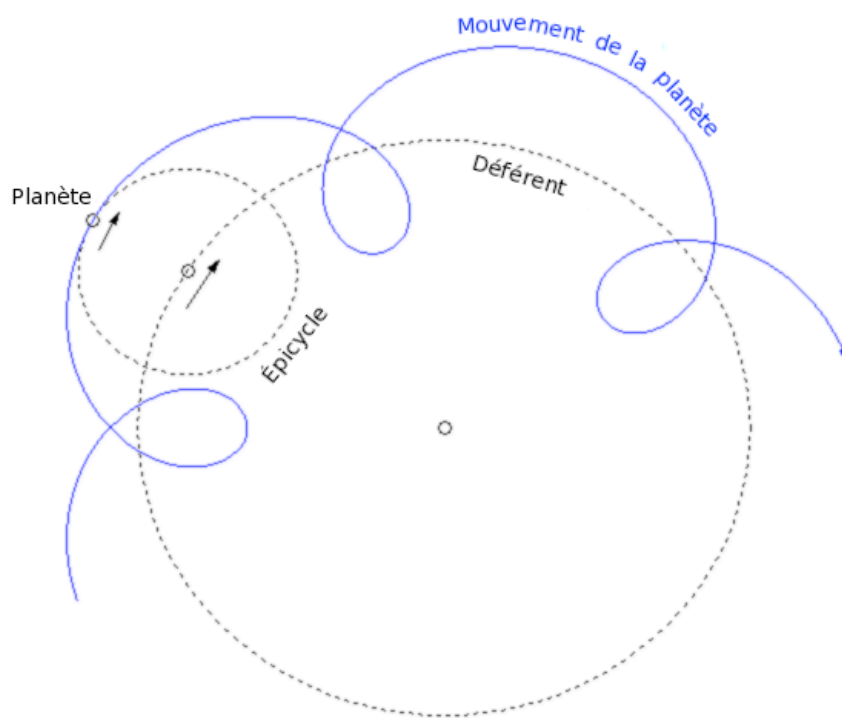


Figure 1.12 – La fréquence épicyclique est la fréquence d'oscillation radiale d'un élément de fluide (en référence aux théories géocentriques).

### 1.4.3 Stabilité verticale

Pour déterminer la condition de stabilité verticale, nous allons maintenant étudier un élément de fluide soumis à la force de gravité et à la poussée d'Archimède (notée  $\Pi$ ) que l'on déplace de  $z$  à  $z + dz$ . On note avec un



exposant  $e$  les quantités relatives à cet élément de fluide et  $r$  pour le reste du fluide. La force de gravité à laquelle est soumis cet élément de fluide est :

$$\begin{aligned} f_G(z + dz) &= -\rho^e(z + dz)g \\ &= -(\rho^e(z) + \partial_z \rho^e dz)g \\ &= -(\rho^e(z) + \frac{1}{\gamma \rho^e(z)} \partial_z \rho^e dz)g \end{aligned}$$

On a ici supposé l'évolution de l'élément de fluide adiabatique. On se place en effet dans un cadre où l'échelle de temps des échanges d'énergie thermique est supérieure à l'échelle de temps dynamique. On ne peut pas faire cette même approximation pour le reste du gaz, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \Pi(z + dz) &= \rho^r(z + dz)g \\ &= (\rho^r(z) + \partial_z \rho^r dz)g \end{aligned}$$

Finalement en notant  $F$  la résultante des forces

$$\begin{aligned} \partial_z F &= \frac{F(z + dz) - F(z)}{dz} \\ &= -\frac{1}{\gamma \rho^e(z)} \partial_z \rho^e g + \partial_z \rho^r g \end{aligned}$$

On introduit alors la fréquence de Brünt-Väisala sous la forme d'un carré :

$$N^2 = -\frac{1}{\rho} \partial_z F = \frac{g}{\rho} \left( \frac{1}{c_s^2} \partial_z \rho - \partial_z \rho \right)$$

où  $c_s$  est la vitesse du son adiabatique ( $c_s^2 = \gamma p / \rho$ ).

En conclusion, l'équilibre vertical est stable si le carré de la fréquence de Brünt-Väisala est positif car dans ce cas un déplacement d'un élément de fluide vers le haut, de l'altitude  $z$  à l'altitude  $z + dz$ , induit une force vers le bas, rétablissant la position initiale. Alors que si  $N^2$  est négatif, le système est en situation instable et des rouleaux de convection verticaux vont se développer. On peut vérifier que si l'équilibre initial est adiabatique, la fréquence de Brünt-Väisala est nulle.

#### 1.4.4 Oscillation quasi-périodique

Une oscillation quasi-périodique (QPO en anglais) se présente comme un pic dans le spectre de puissance d'une source, à une fréquence qui peut varier en fonction de la source et du type de QPO. Ces QPO traduisent la présence au sein de la source de phénomènes physiques ayant la fréquence du QPO comme fréquence propre. La cohérence de l'oscillation est estimée à partir du facteur de qualité du QPO. Celui-ci est défini comme le rapport entre la fréquence de l'oscillation  $\nu$  et la largeur à mi-hauteur du pic :  $\Delta\nu_{1/2}$ . Cette largeur non nulle explique pourquoi l'on parle d'oscillation *quasi*-périodique.

Des QPO ont été observés dans les binaires à trous noirs, à étoiles à neutrons ainsi que dans les noyaux actifs de galaxie. Mais dans ce dernier cas la détection est rendue bien plus difficile par les échelles de temps qui sont jusqu'à un milliard de fois plus élevée (voir le tableau 1.1.5). Les paragraphes suivants présentent les différents types de QPO mais pour une revue plus détaillée on pourra se reporter à la revue de van der Klis (2000).

### QPO des étoiles à neutrons

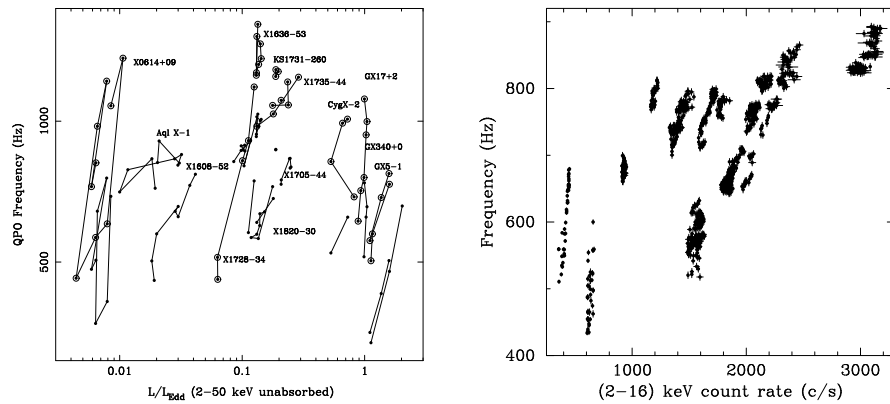


Figure 1.13 – Illustrations du phénomène des lignes parallèles entre sources à gauche (Ford et al. 1999), pour une même source AU 1608-52 à droite (Méndez et al. 1999).

Les plus intrigants des QPO des étoiles à neutrons sont les QPO d'une fréquence de l'ordre du kiloHertz (kHz). Ils se présentent comme deux pics dans le spectre de puissance qui se déplacent ensemble dans une gamme de fréquence allant de 200 à 1200 Hertz. Ces QPO kHz ne sont détectés que lorsque les sources sont dans certaines branches des courbes en Z ou atoll (voir la figure 1.7). Une autre énigme concerne les lignes parallèles que forment ces QPO dans un diagramme fréquence/luminosité comme montré sur la figure 1.13. Le chapitre 6 s'attache à détailler les autres caractéristiques de ces QPO ainsi que les principaux modèles précédents et leurs limites, mais présente aussi un nouveau modèle permettant d'expliquer l'origine du QPO de plus haute fréquence.

Par ailleurs, les sources de type atoll présentent aussi des QPO hectohertz avec une fréquence fixée et qui varie peu d'une source à l'autre. Ces QPO sont souvent associés aux QPO de hautes fréquences des trous noirs (QPO HF).

Finalement des QPO de basses fréquences (inférieures à une centaine de Hertz) sont aussi observés avec des fréquences qui dépendent de l'état de la source. Dans certains modèles ces QPO de basses fréquences (QPO BF) sont liés aux QPO kHz. Mais ces QPO BF sont similaires à ceux des trous noirs, alors que les QPO kHz diffèrent largement des QPO de hautes fréquences des trous noirs.

### QPO des microquasars

Les QPO de plus hautes fréquences dans les microquasars ont une fréquence qui peut aller jusqu'à quelques centaines de Hertz et cette fréquence est fixe. C'est pourquoi on compare ces QPO de haute fréquence aux QPO hectohertz des étoiles à neutrons. Dans certaines sources la fréquence de ces QPO présente une relation 2 : 3 souvent interprétée comme des harmoniques d'une fréquence fondamentale. Ces QPO sont liés aux états spectraux du disque,

(Remillard 2005). L'instabilité par ondes de Rossby discutée dans cette thèse, a été proposée dans sa version magnétohydrodynamique, ainsi que son couplage avec d'autres instabilités, pour expliquer ces QPO (Tagger et Varnière 2006, Meheut et al. 2008, Varniere et al. 2010).

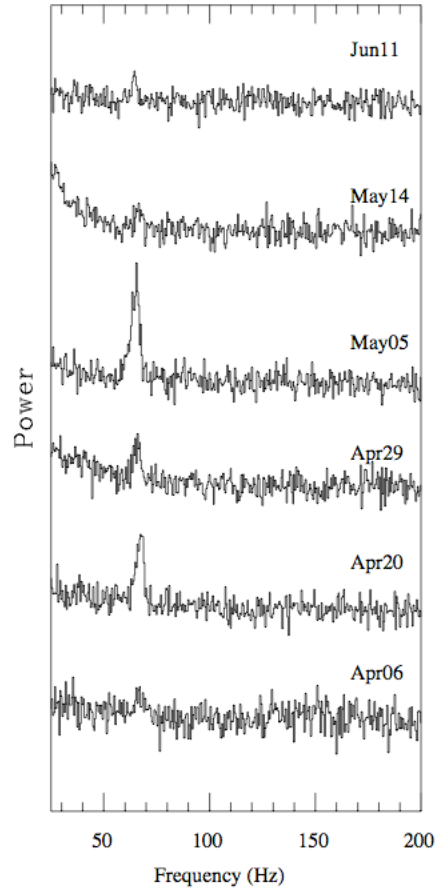


Figure 1.14 – Exemple d'observation de QPO de haute fréquence dans le microquasar GRS 1915+105 (Morgan et al. 1997)

## 1.5 Physique des ondes

### 1.5.1 Pulsation et nombre d'onde

Pour étudier l'évolution d'une perturbation dans le disque il serait utile de pouvoir utiliser les outils habituels de l'étude des ondes, comme par exemple les composantes du vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_r, k_\phi = m/r, k_z)$  où le nombre d'onde orthoradial  $m$  ne prend que des valeurs entières en raison de la périodicité. On note  $\omega$  la pulsation de l'onde, qui est reliée à la fréquence de l'onde  $\nu$  par la relation  $\omega = 2\pi\nu$ . La perturbation peut donc s'écrire sous la forme

$$\xi \propto \exp^{-i\omega t + i(k_r r + m\phi + k_z z)}.$$

La perturbation étant une grandeur physique, c'est bien sûr seulement la partie réelle de cette expression qui correspond à la perturbation physique.

En fonction du problème physique, on peut :

- considérer la pulsation comme un nombre réel, le vecteur d'onde pouvant prendre des valeurs complexes. Cela signifie que l'on a fait une transformée de Fourier temporelle et une transformée de Laplace dans l'espace. Ce cas est adapté pour les problèmes de conditions aux limites, c'est à dire lorsque l'on connaît les conditions à un bord et l'on cherche l'évolution spatiale de l'onde. Si l'une des composantes du vecteur d'onde a une partie imaginaire positive, cela traduit une absorption dans la direction correspondante, tandis qu'une partie imaginaire négative correspond à une amplification.
- A l'inverse, on peut vouloir étudier l'évolution de l'amplitude de l'onde au cours du temps connaissant les conditions initiales (problème de Cauchy). C'est alors  $\omega$  qui peut prendre des valeurs complexes tandis que  $k$  est réel. Dans ce cas, il y a amplification si la partie imaginaire de  $\omega$  est positive, et absorption dans le cas contraire. C'est ce cadre-ci que l'on considérera dans la suite.

Cependant, pour que la notion de longueur d'onde puisse faire sens, il faut que sa valeur ne varie pas trop sur une longueur d'onde et plus précisément que cette variation soit inférieure à la longueur d'onde :

$$\frac{1}{k_r} |\partial_r k_r| < k_r$$

Ce que l'on peut réécrire  $r|k_r| \gg 1$ . C'est dans le cadre de cette approximation proposée par Brillouin, Kramers et Wentzel (WKB<sup>1</sup>) que l'on peut déterminer la relation de dispersion de l'onde. Par exemple la relation de dispersion d'une onde sonore

$$\omega^2 = c_s^2 k_r^2$$

que l'on retrouve à partir de l'équation 1.7 devient pour un disque en rotation (équation 1.11) avec l'approximation WKB,

$$\tilde{\omega}^2 = \kappa^2 + c_s^2 k_r^2 \quad (1.21)$$

où  $\tilde{\omega} = \omega - m\Omega$  (voir 4) est la pulsation dans le repère tournant à la vitesse angulaire  $m\Omega$ .

Dans un disque en rotation différentielle, les ondes sonores (aussi appelées ondes de densité) prennent une forme spirale et c'est ce type d'onde qui est à l'origine des bras spiraux des galaxies. On distingue alors les ondes 'leading' qui se déroulent dans la même direction que la rotation du disque ( $k_r < 0$ ) des ondes 'trailing' ( $k_r > 0$ ), voir la figure 1.15.

## 1.5.2 Résonances

### Corotation

Le paragraphe précédent a mis en évidence la grandeur  $\tilde{\omega}$  qui est la différence entre la pulsation de l'onde et la pulsation de rotation du disque (où l'une de ses harmoniques) dont le carré intervient dans la relation de dispersion des

1. le choix de l'ordre des auteurs varie d'un pays à l'autre...

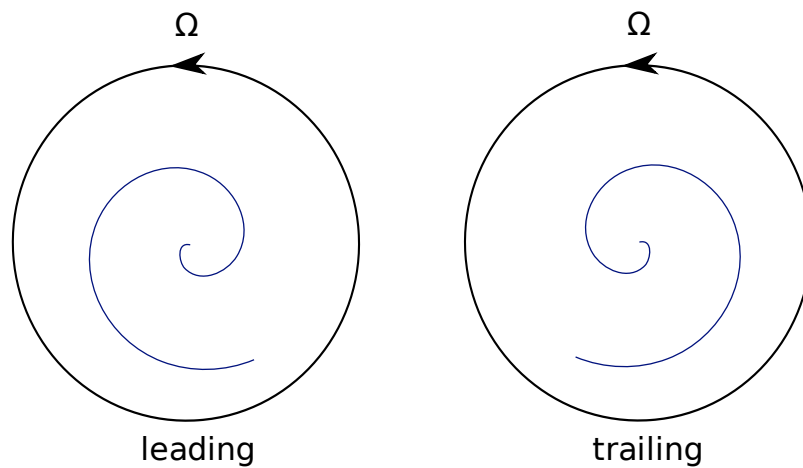


Figure 1.15 – Une onde spirale est 'leading' ou 'trailing' en fonction du sens dans lequel se déroule la spirale par rapport au sens de rotation du disque.

ondes de densité. On voit bien apparaître ici la symétrie par rapport à cette fréquence et l'on définit la corotation d'une onde le rayon où  $\omega = m\Omega$ , la vitesse angulaire étant en général une fonction monotone du rayon, il existe un seul rayon vérifiant cette égalité, noté  $r_c$ .  $\tilde{\omega}$  n'est alors rien d'autre que la pulsation dans le référentiel tournant à la fréquence de corotation. Cette onde se propageant en deçà de  $r_c$  aura une fréquence inférieure à la fréquence de rotation du gaz, et sa présence diminuera l'énergie du gaz, c'est une onde d'énergie négative tandis que au-delà de la corotation, elle aura une fréquence supérieure à la fréquence de rotation du gaz. Elle augmentera alors l'énergie du gaz, c'est par conséquent une onde d'énergie positive (voir la figure 1.16). Souvent le nombre d'onde radial s'annule à la corotation, l'approximation WKB n'est alors plus valable.

### Lindblad

La résonance de Lindblad correspond à la résonance entre la fréquence épicyclique et la pulsation dans le référentiel tournant :  $\tilde{\omega} = \pm\kappa$ . Il existe ainsi une résonance de Lindblad interne en deçà de la corotation et externe au-delà. Si l'on est suffisamment loin de la corotation, on peut utiliser la relation de dispersion WKB et remarquer que les ondes de densités ne peuvent se propager ( $k_r^2 > 0$ ) qu'au-delà de la résonance de Lindblad.

### 1.5.3 Onde stationnaire et modes

Une onde stationnaire ne présente pas de phénomène de propagation : les variables d'espace sont séparées du temps. L'exemple classique d'onde stationnaire est la superposition de deux ondes planes monochromatiques de même

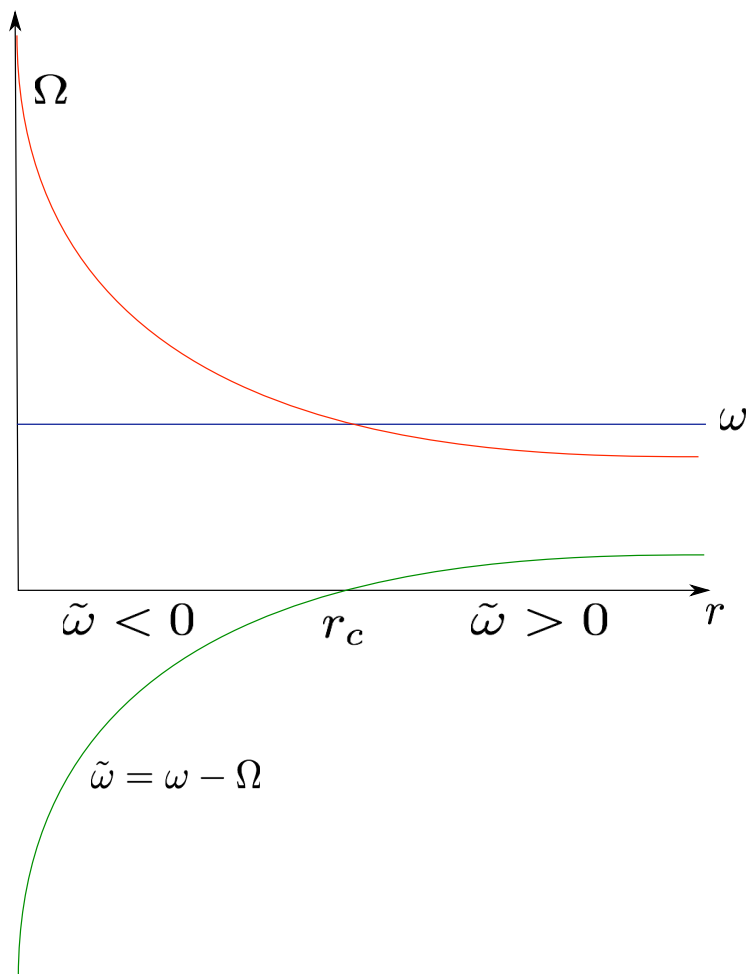


Figure 1.16 – Une onde de pulsation fixée  $\omega$  aura une énergie négative avant la corotation  $r_c$  et positive au delà. On a ici pris l'exemple d'une onde ayant un nombre d'onde azimutale égal à l'unité.

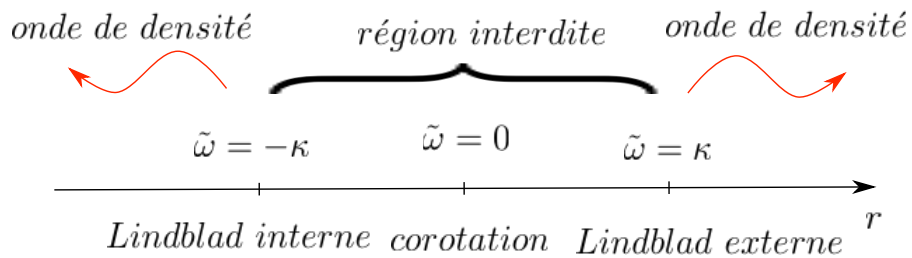


Figure 1.17 – Position des différents rayons de résonance d'une onde de densité dans un disque en rotation différentielle.

fréquence se propageant dans des directions opposées

$$A \sin(\omega t + kx) + A \sin(\omega t - kx) = A \sin(\omega t) \cos(kx).$$

Si l'onde admet deux points de rebroussement<sup>2</sup> (point où l'onde change de sens de propagation) à certains rayons du disque, comme par exemple aux rayons de résonances, cela forme une cavité résonante pour l'onde, sélectionnant ainsi les modes propres associés à cette cavité. Soumis à une perturbation quelconque, le système sélectionnera uniquement ses fréquences propres. Un exemple classique en physique est la cavité laser dont les surfaces conductrices réfléchissent les ondes électromagnétiques sélectionnant ainsi les modes propres. C'est aussi le principe d'un diapason qui ne sélectionne que le 'la' parmi toutes les fréquences de la perturbation initiale.

L'une des particularités de la rotation différentielle est qu'une onde de fréquence donnée a une énergie négative avant sa corotation ( $r < r_c$ ) et positive après ( $r > r_c$ ). Donc si une onde d'énergie négative est partiellement réfléchi à la corotation, l'onde transmise aura une énergie positive ce qui signifie une perte d'énergie pour l'onde lors de la réflexion et donc un gain en valeur absolue (voir la figure 1.18).

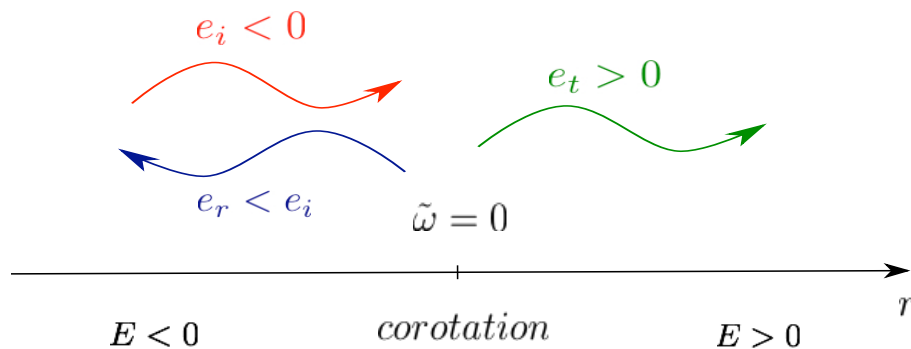


Figure 1.18 – Mécanisme d'amplification d'une onde lors de sa réflexion à la corotation dans un disque en rotation différentielle. L'énergie de l'onde incidente est négative, celle de l'onde transmise est positive et par conservation, l'énergie de l'onde réfléchi est inférieure à celle de l'onde incidente (mais supérieure en valeur absolue). Dès lors l'onde est amplifiée lors de la réflexion à la corotation.

## Bilan

Les phénomènes d'accrétion sont multiples dans l'univers et je n'ai ici décrit que certains d'entre eux. L'étude des disques d'accrétion peut aussi s'appli-

2. turning point en anglais

quer à d'autres objets astrophysiques tels que les variables cataclysmiques, les naines blanches (D. Koester & K. Werner 1995, Kawaler 1997), les disques de débris (Wyatt 2008, Krivov 2010) ou encore les noyaux actifs de galaxies (B. Rocca-Volmerange & H. Sol (2001), et Espaillat et al. (2008) pour la détection de QPO). Le lecteur intéressé pourra consulter les références données ici. Tous ces systèmes permettent d'étudier des phénomènes différents, mais l'on retrouve les mêmes ingrédients, et ce chapitre a permis d'en présenter certains qui seront utilisés dans la suite.

Cependant je me suis ici limitée à la physique des disques non magnétisés (ou non ionisés). Or l'on sait qu'au moins dans certains cas il est nécessaire de prendre en compte l'effet du champ magnétique sur le disque et de se placer dans le cadre de la magnéto-hydrodynamique. Ce sera le cas pour le modèle présenté dans le chapitre 6. Par ailleurs les phénomènes radiatifs n'ont pas non plus été pris en compte ce qui limite l'étude à une thermodynamique simple, les fluides étant généralement considérés comme isothermes ou adiabatiques.



# 2

## Outils de simulations numériques hydrodynamiques en astrophysique

### SOMMAIRE

INTRODUCTION . . . . .	43
2.1 CONTEXTE . . . . .	43
2.1.1 Caractéristiques des codes hydrodynamiques sur grille . . .	43
2.2 LE CODE VAC . . . . .	49
2.2.1 Présentation . . . . .	49
2.2.2 La méthode TVD-MUSCL . . . . .	50
2.3 GRILLE À PLUSIEURS DIMENSIONS . . . . .	57
2.4 VAC MPI . . . . .	58
2.5 UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR L'ÉTUDE DES INSTABILITÉS . . .	62
2.5.1 Contenu d'un nouveau module . . . . .	62
2.5.2 Stabilité numérique pour instabilité physique . . . . .	63
2.5.3 Tests de la méthode . . . . .	65
BILAN . . . . .	67

Les principaux outils de simulation numérique utilisés pendant ma thèse sont présentés ici. Le chapitre commence par une brève introduction des méthodes de code sur grille. Je donne ensuite les principales caractéristiques du Versatile Advection Code (Tóth 1996), en détaillant la méthode TVD-MUSCL que j'ai souvent utilisée avec ce code pour les différentes applications détaillées dans la suite de la thèse. Finalement une nouvelle méthode de calcul des termes sources du code est proposée. Celle-ci a été conçue pour l'étude des instabilités, puisqu'elle permet d'obtenir, comme état initial, un système en équilibre exact à la précision machine.



## Introduction

La physique étant une science expérimentale, elle se fonde sur la confrontation avec l'expérience. Cependant les systèmes astrophysiques n'étant en général pas reproductibles en laboratoire, toute confrontation au 'réel' passe par l'observation. Cela signifie qu'on ne peut pas changer les paramètres en tournant un bouton de l'expérience, même si un grand nombre d'objets peut être observé avec des paramètres différents. Une alternative consiste à mettre en place des "expériences" numériques. Le mot expérience est ici à prendre dans le sens de la méthode expérimentale et non celui de confrontation au réel.

Une difficulté de l'expérience de laboratoire consiste à éliminer les effets physiques non recherchés. A l'inverse, la principale difficulté du numéricien consiste à maîtriser et minimiser les artefacts dus à la méthode de résolution numérique des équations pour comprendre la physique du système étudié. En effet, la simulation numérique est un moyen de résolution des équations ; le numéricien choisit au début de son expérience les phénomènes physiques qu'il veut prendre en compte (gravité, viscosité, rotation, rayonnement, ...). C'est pour cela qu'une connaissance approfondie du code utilisé est nécessaire et que les codes sont testés par comparaison expérimentale.

Cet outil permet aussi de confirmer ou de prolonger les études analytiques qui sont limitées en termes de phénomènes étudiés, de configurations possibles et de domaines de paramètres. Une simulation numérique peut permettre d'étudier simultanément plusieurs phénomènes qui ne sont pas modélisables conjointement de façon analytique. L'étude de la dynamique d'un fluide nécessite la compréhension de phénomènes complexes qui se traduisent dans toute la richesse des équations d'Euler (équations 1.3.1) et qui sont à l'origine des difficultés de l'étude analytique.

## 2.1 Contexte

Il existe un grand nombre de méthodes numériques pour résoudre des problèmes d'hydrodynamique ou de physique des plasmas. Le choix de la méthode va bien sûr dépendre du problème à résoudre. Dans le cadre de ma thèse, j'ai utilisé principalement des méthodes sur grille et ce sont ces méthodes qui sont présentées ici. Une description succincte d'autres méthodes numériques est donnée dans l'annexe A qui comprend aussi une justification du choix des méthodes sur grille pour mon projet de thèse.

### 2.1.1 Caractéristiques des codes hydrodynamiques sur grille

Un code sur grille discretise l'espace physique sur un quadrillage de l'espace, où toutes les grandeurs physiques ne sont en général définies qu'au centre de chaque cellule (voir Figure 2.1). Ces méthodes peuvent s'appliquer à tous les problèmes faisant intervenir des fluides dans l'approximation hydrodynamique, magnétisés ou non. Elle peut permettre d'avoir une bonne approximation de la solution si le maillage de la grille est suffisamment fin par rapport à la taille des

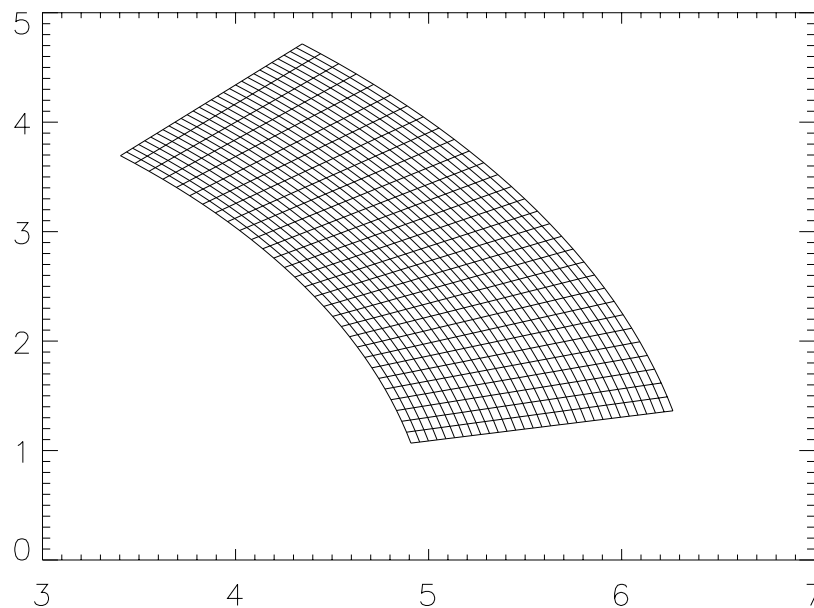


Figure 2.1 – Exemple de pavage de l'espace sur un morceau de disque.

phénomènes physiques modélisés. La grille n'est pas nécessairement uniforme et la résolution peut ainsi varier avec la position. Pour présenter les schémas numériques, on considérera tout de même une grille uniforme. Cette méthode peut devenir très lourde en temps de calcul lorsque le nombre de cellules est élevé. Mais celui-ci peut être limité par l'utilisation de codes effectuant en parallèle les calculs sur un grand nombre de processeurs (voir le paragraphe 2.4), ou de codes à grille adaptative qui ne raffinent la grille que dans les zones nécessitant une plus grande résolution. Un exemple est donné figure 2.2

Avant de rentrer dans le détail des schémas numériques, je définis ici quelques propriétés d'un schéma :

**Consistance** Un schéma numérique est dit consistant si la formulation approchée discrétisée des équations tend vers la formulation continue lorsque la résolution (spatiale et temporelle) tend vers l'infini.

**Stabilité** Un schéma est stable si la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations reste bornée.

**Convergence** Un schéma est convergent si la solution numérique converge vers la solution exacte lorsque la résolution tend vers l'infini. Le théorème de Lax prévoit qu'un schéma consistant et stable est convergent.

**Ordre** On dit qu'un schéma est d'ordre  $n$  si celui-ci revient à faire un développement de Taylor à l'ordre  $n$  des équations à résoudre, cette propriété quantifie la précision du schéma. Les ordres en temps et en espace sont indépendants.

Les valeurs que prennent les grandeurs physiques sur la grille peuvent être vues de plusieurs manières différentes :

- comme la valeur en ce point précis c'est le cas des méthodes de *différences finies* (voir la figure 2.4). Ce sont des schémas simples à mettre

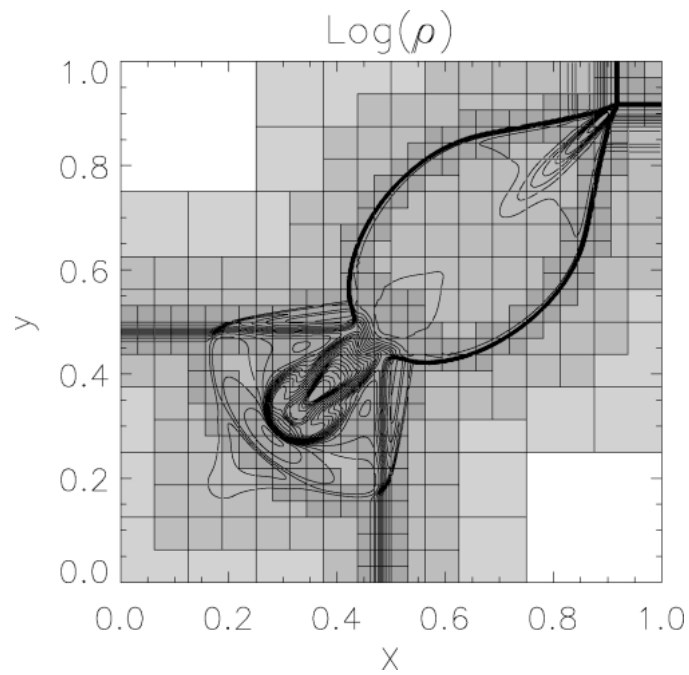


Figure 2.2 – Exemple de grille adaptative dans le cas du test du tube de choc. Les niveaux de gris correspondent à la densité, et l'on voit que le maillage de la grille est bien plus fin sur les structures les plus fines. (Meliani et al. 2007)

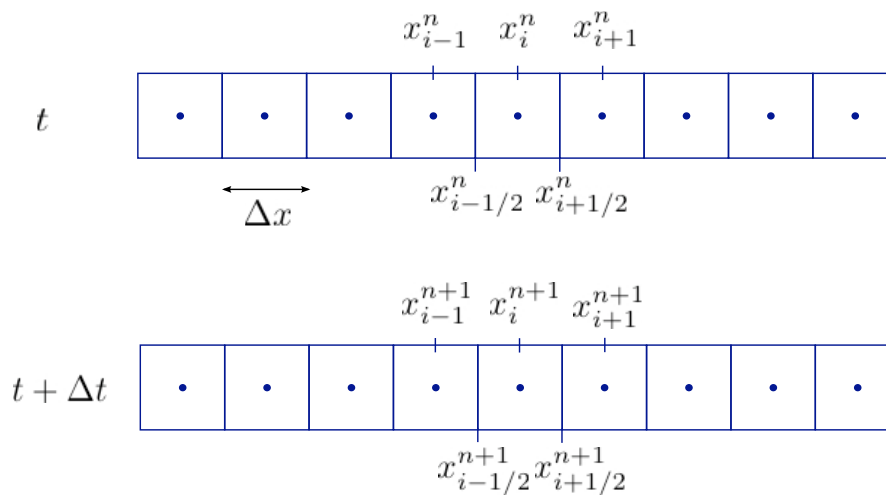


Figure 2.3 – Définition des indices d'espace et de temps pour une grille unidimensionnelle.

en œuvre mais qui peuvent être très diffusifs et ils ne permettent donc pas de bien modéliser des chocs. Par exemple l'équation de conservation de la masse à une dimension

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0$$

peut se discrétiser sous la forme (voir la figure 2.3 pour les définitions des indices) :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{\rho_{i+1}^n v_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n v_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

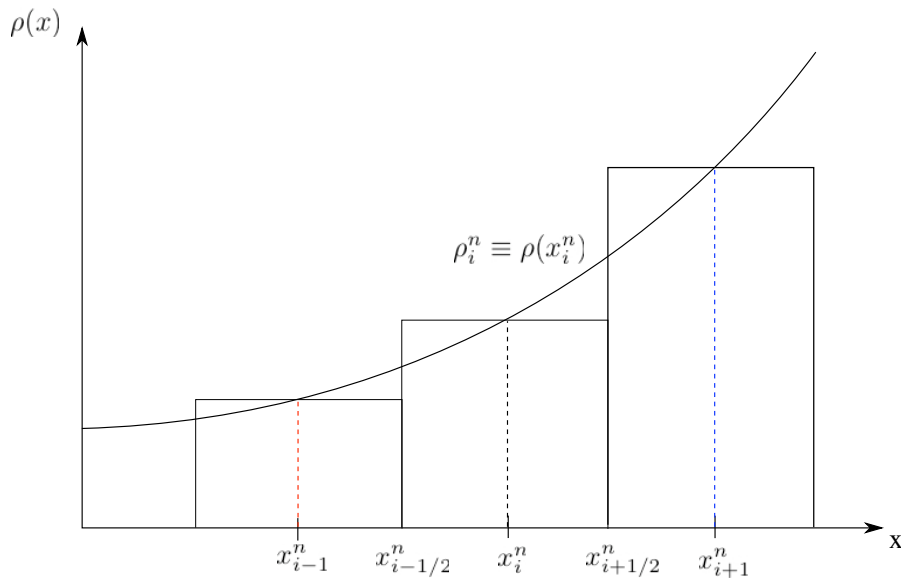


Figure 2.4 – Valeurs des grandeurs dans un schéma aux différences finies comparées à la courbe non discrétisée

On peut estimer l'erreur due à cette discrétisation en effectuant un développement de Taylor à l'ordre deux en temps et en espace

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \Delta t \partial_t \rho + \frac{(\Delta t)^2}{2} \partial_t^2 \rho \\ \rho_{i+1}^n &= \rho_i^n + \Delta x \partial_x \rho + \frac{(\Delta x)^2}{2} \partial_x^2 \rho \\ v_{i+1}^n &= v_i^n + \Delta x \partial_x v + \frac{(\Delta x)^2}{2} \partial_x^2 v \\ \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{\rho_{i+1}^n v_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n v_{i-1}^n}{2\Delta x} &= \partial_t \rho + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^2 \rho + \rho_i^n \partial_x v + v_i^n \partial_x \rho \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2} \rho_i^n \partial_x^2 v + v_i^n \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 \rho \end{aligned}$$

Ce schéma revient ainsi à résoudre l'équation

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho v = -\frac{\Delta t}{2} \partial_t^2 \rho - \frac{\Delta x}{2} \rho \partial_x^2 v - v \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 \rho$$

où apparaît un terme de diffusion supplémentaire par rapport à l'équation d'origine. Mais on voit ici que le coefficient de diffusion est négatif. Par conséquent ce schéma est instable (d'un point de vue physique un coefficient de diffusion négatif signifie une diminution de l'entropie!). Une solution est d'utiliser un schéma 'upwind' :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{\rho_{i+1}^n v_{i+1}^n - \rho_i^n v_i^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } v < 0$$

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{\rho_i^n v_i^n - \rho_{i-1}^n v_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } v > 0$$

Ce qui donne un coefficient de diffusion

$$\eta = v \frac{\Delta x}{2} \left(1 - v \frac{\Delta t}{\Delta x}\right).$$

Ce schéma est stable sous la condition

$$C \equiv v \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.$$

Cette quantité sans dimension est appelée paramètre de Courant ou de Courant-Friedrichs-Lewy souvent notée CFL. Cette limite impose la causalité dans l'espace-temps discrétisé, puisqu'il impose que la vitesse de propagation physique  $v$  soit inférieure à la vitesse limite définie par la grille  $\Delta x / \Delta t$ .

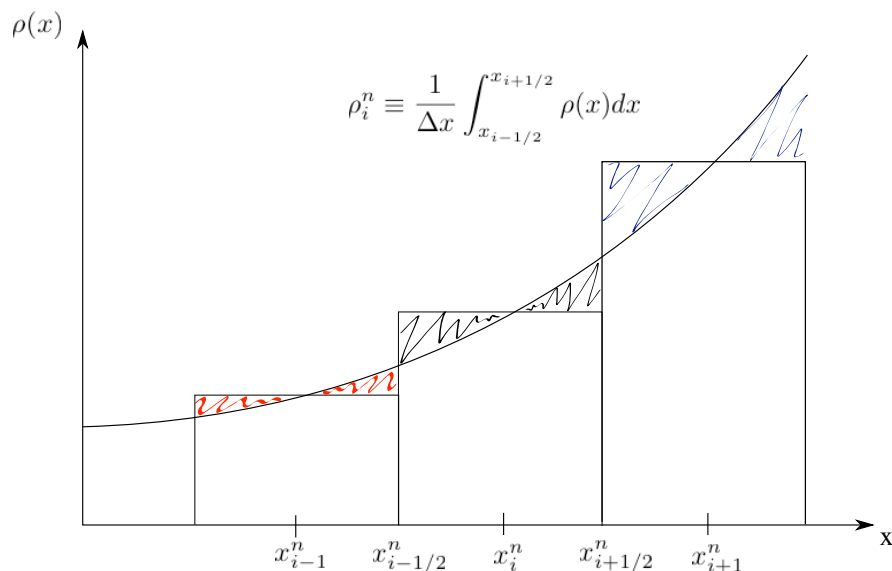


Figure 2.5 – Valeurs des grandeurs dans un schéma aux volumes finis comparées à la courbe non discrétisée

- comme la moyenne sur le volume de la cellule correspondante, ce sont les méthodes de *volumes finis* (voir Figure 2.5). L'équation de conservation de la masse devient

$$\partial_t \int_V \rho dV + \int_V \partial_x(\rho v) dV = 0$$

Ce qui peut se réécrire avec le théorème de Green-Ostrogradski

$$\partial_t \int_V \rho dV + \int_S \rho v dS = 0$$

et lorsque l'on discrétise cette équation sur une grille, on obtient pour un schéma à un pas

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} - \rho_i^n + \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \partial_x(\rho v) dx dt &= 0 \\ \rho_i^{n+1} - \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(x_{i+1/2}) - F(x_{i-1/2})) &= 0 \end{aligned}$$

où  $\rho_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x, t_n) dx$  et  $F(x_{i-1/2}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\rho(x_{i-1/2}, t)) dt$ ,  $f$  est le flux de masse à l'interface entre les cellules  $i-1$  et  $i$  (voir Figure 2.6).

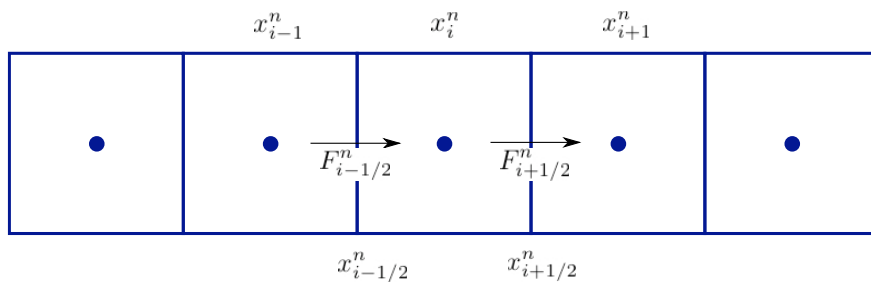


Figure 2.6 – Les flux aux interfaces

Ces méthodes sont très utilisées en physique des fluides car, comme on peut le voir sur l'exemple de l'équation de conservation de la masse, elles sont conservatives par construction. Mais il est nécessaire de calculer les flux aux interfaces des cellules alors que les grandeurs physiques sont centrées, c'est pourquoi il faut utiliser une méthode d'interpolation comme détaillé plus loin. Dans la mesure où les grandeurs sont considérées constantes par morceaux, la méthode est autosimilaire et la distance aux interfaces n'intervient pas, cette caractéristique n'est plus vraie pour la méthode MUSCL décrite dans la suite.

- comme une fonction définie sur le volume  $V$  choisi dans une famille de fonctions sur laquelle on décompose la solution. C'est la méthode des *éléments finis*. Si l'on choisit la famille des fonctions constantes, on retrouve les méthodes de différences finies.



## 2.2 Le code VAC



Le Versatile Advection Code (VAC) a été développé à partir de 1994 par Gábor Tóth qui a été rejoint par Rony Keppens en 1995. L'objectif était d'avoir un code (M)HD qui puisse être utilisé aussi bien pour des problèmes avec des géométries ou de la physique différentes (Tóth 1996). Le code existe maintenant en version parallélisée (MPI), et un code avec grille adaptative a aussi été développé (AMRVAC, van der Holst et Keppens (2007)). Une présentation détaillée du code et son état actuel de développement sont donnés sur la page internet de VAC<sup>1</sup>.

### 2.2.1 Présentation

VAC est un code écrit en fortran 90 qui a pour but de résoudre des équations aux dérivées partielles hyperboliques. De nombreuses méthodes de résolution sont implémentées et il est très souple d'utilisation. Il existe cinq modules de physique pour l'équation d'advection, les équations hydrodynamiques et MHD dans le cas polytropique ou avec équation d'énergie. Des termes sources peuvent être ajoutés à ces équations comme la gravité, la viscosité, ... ou un terme défini par l'utilisateur.

La grille peut être cartésienne, cylindrique ou sphérique à une, deux ou trois dimensions. Il existe plusieurs conditions aux bords pré-définies (fixées, continues, à gradient constant, ...) mais l'utilisateur peut aussi définir les valeurs que prennent les cellules extérieures à la grille (cellules fantômes).

Parmi les schémas numériques implémentés dans VAC, c'est le schéma TVD-MUSCL que j'ai utilisé, c'est donc celui-ci qui est détaillé dans la suite.

La souplesse du code est permise par l'utilisation de LASY (Loop Implementation SYntax, Tóth (1997)) qui permet d'écrire les routines indépendamment des caractéristiques de la grille. Cette syntaxe est ensuite interprétée

---

1. <http://grid.engin.umich.edu/~gtoth/VAC>

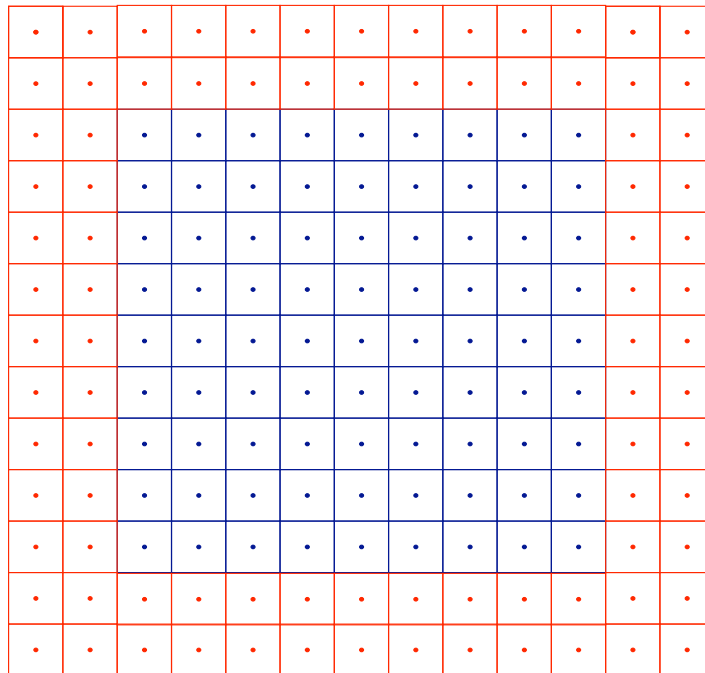


Figure 2.7 – Position des cellules fantômes (en rouge) autour de la grille de calcul (en bleu)

et réécrite en fortran 90 par un préprocesseur Perl en fonction des caractéristiques voulues pour la grille. Cette souplesse se paye par une plus grande complexité dans les fichiers sources.

Finalement les résultats de la simulation peuvent être écrits dans différents formats adaptés aux outils de visualisation comme IDL, OpenDX ou encore Visu.

### 2.2.2 La méthode TVD-MUSCL

Parmi les différentes méthodes implémentées dans VAC, la méthode TVD-MUSCL est l'une des moins dissipatives et c'est celle qui a été utilisée pour les résultats présentés dans la suite de cette thèse. Dans cette partie on écrira les équations de l'hydrodynamique sous forme conservative  $\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0$  où  $\mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{v})$  et  $\mathbf{F} = (\rho \mathbf{v}, \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p)$ . Les éventuels termes de droite seront considérés comme des termes source et ajoutés à la fin du pas de temps.

Comme expliqué dans le paragraphe 2.1.1, les méthodes à volumes finis nécessitent le calcul des flux à l'interface entre les cellules, c'est l'objectif de la méthode de Godunov (Godunov 1959). Dans le schéma de Godunov, on considère des solutions constantes par morceaux et les valeurs aux interfaces sont égales aux valeurs centrées (Figure 2.8).

Le flux aux interfaces est alors la solution d'un problème de Riemann, c'est à dire une discontinuité entre deux régions où toutes les grandeurs sont

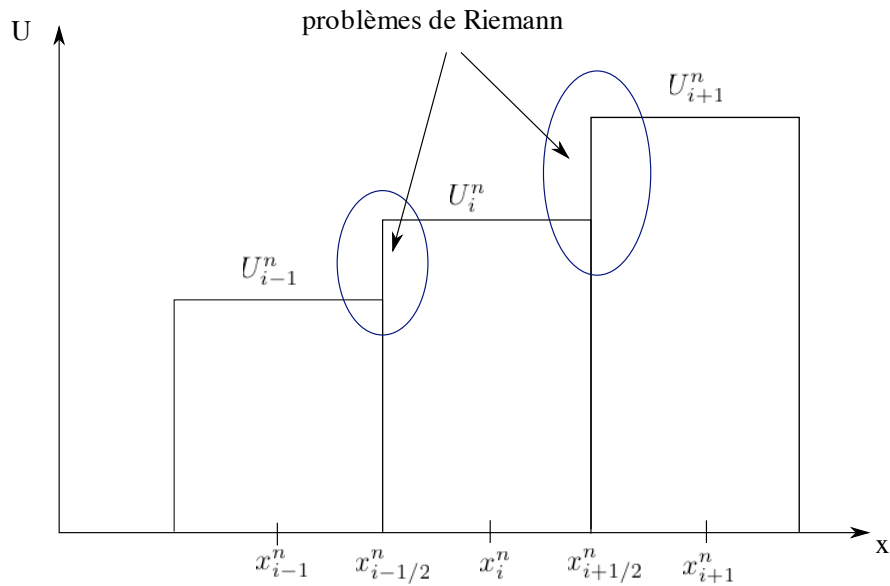


Figure 2.8 – Solution constante par morceaux considérée dans la méthode de Godunov. Les valeurs aux interfaces sont égales aux valeurs centrées.

constantes (le problème de Riemann est présenté sur la figure 2.9). On notera la solution

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^*(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D)$$

La résolution exacte de ce problème est très lourde en temps de calcul, par conséquent on utilise un solveur de Riemann approché linéaire (Toro 1997, LeVeque 1992; 2002).

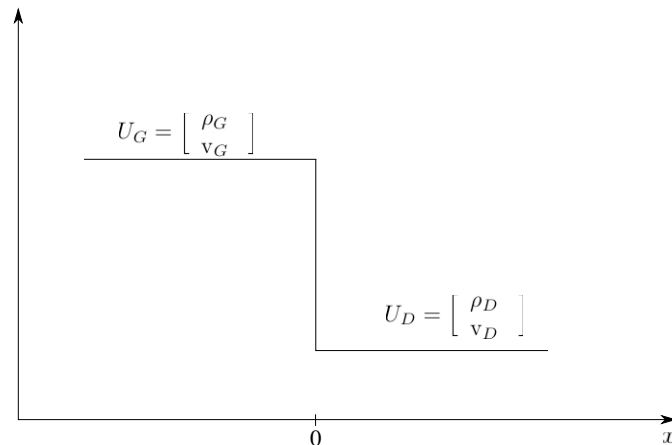


Figure 2.9 – Un problème de Riemann

### Solveur de Riemann linéaire

- La première étape d'un solveur de Riemann approché linéaire consiste à calculer un état de référence  $\mathbf{U}_0$ , soit par moyenne algébrique, soit par la moyenne de Roe (Roe 1981), des vecteurs  $\mathbf{U}_G$  et  $\mathbf{U}_D$ . Ces vecteurs sont définis sur la figure 2.9.

- On définit ensuite la matrice jacobienne à partir de cet état de référence

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}_0)$$

qui est diagonalisable avec des valeurs propres réelles puisqu'on considère un système d'équations strictement hyperbolique. Le système d'équation s'écrit maintenant

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{U} = 0$$

- On diagonalise  $\mathbf{A}$  sous la forme  $\mathbf{L}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}$  où  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ . On a alors dans la nouvelle base un système d'équations de propagation, chaque onde se propageant à la vitesse  $\lambda_i$  le long de la droite caractéristique  $dx_i/dt = \lambda_i$ .
- On peut alors écrire le flux sous la forme

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D) = \frac{\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D}{2} - \mathbf{L}^T |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{R} \frac{\mathbf{U}_G - \mathbf{U}_D}{2}$$

La solution générale du problème de Riemann pour les équations d'Euler à une dimension consiste en deux ondes se propageant en direction opposée à la vitesse du son dans le repère en mouvement avec le fluide.

Ce type de méthode seule est stable mais seulement du premier ordre donc diffusive c'est pourquoi on préfère utiliser des méthodes d'ordre plus élevé.

### Exemple dans le cas unidimensionnel

Le problème de Riemann dans le cas unidimensionnel est donné sur la figure 2.9. Les conditions initiales sont

$$\begin{bmatrix} \rho_G \\ v_G \end{bmatrix} \text{ pour } x < 0, \quad \begin{bmatrix} \rho_D \\ v_D \end{bmatrix} \text{ pour } x > 0 \quad (2.1)$$

On calcule l'état de référence  $\mathbf{U}_0$  comme la moyenne algébrique entre  $\mathbf{U}_G$  et  $\mathbf{U}_D$ . On cherche à résoudre ici les équations de continuité et d'Euler linéarisées (voir le paragraphe 1.3.2) :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \rho_0 \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + \frac{c_s^2}{\rho} \partial_x \rho &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi la matrice jacobienne est

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_s^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est diagonalisable, la matrice diagonale est

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(-c_s, c_s)$$

et la matrice de changement de base  $\mathbf{R}$  est composé des deux vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R} = 1/2 \begin{bmatrix} 1/\rho_0 & -1/c_s \\ 1/\rho_0 & 1/c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_s & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -c_s & c_s \end{bmatrix}$$

On note  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  les vecteurs propres de la matrice jacobienne de valeur propre  $-c_s$  et  $c_s$  respectivement.

On obtient dans la nouvelle base un système d'équations différentielles indépendantes. En notant  $\mathbf{V}$  le vecteur  $\mathbf{U}$  dans la nouvelle base, les éléments de  $\mathbf{V}$  sont appelés variables caractéristiques car ils se propagent indépendamment à la vitesse  $\pm c_s$  le long de la caractéristique  $dx/dt$ . On a  $\mathbf{U}_G = \mathbf{V}_G \mathbf{R}$  et  $\mathbf{U}_D = \mathbf{V}_D \mathbf{R}$  avec

$$\mathbf{V}_G = \begin{bmatrix} \frac{c_s \rho_G + \rho_0 u_G}{2c_s \rho_0} \\ \frac{c_s \rho_G - \rho_0 u_G}{2c_s \rho_0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_D = \begin{bmatrix} \frac{c_s \rho_D + \rho_0 u_D}{2c_s \rho_0} \\ \frac{c_s \rho_D - \rho_0 u_D}{2c_s \rho_0} \end{bmatrix}$$

On a alors une onde qui se propage vers la droite à la vitesse  $c_s$  et une onde qui se propage vers la gauche à la vitesse  $-c_s$ . Ces ondes n'ont pas encore atteint les points situés en  $|x| > c_s t$ , donc les points situés en  $0 < x < c_s t$  ont vu le passage de l'onde progressive tandis que les points situés en  $-c_s t < x < 0$  ont vu le passage de l'onde rétrograde (Figure 2.10).

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_G & x < -c_s t \\ \mathbf{V} &= [V_{D,1}, V_{G,2}] & -c_s t \leq x \leq c_s t \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_D & c_s t < x \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x=0) &= V_{D,1} \mathbf{R}_1 + V_{G,2} \mathbf{R}_2 \\ &= \mathbf{U}_G + (V_{D,1} - V_{G,1}) \mathbf{R}_1 \\ &= \mathbf{U}_D - (V_{D,2} - V_{G,2}) \mathbf{R}_2 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x=0) &= \mathbf{A}(V_{D,1} \mathbf{R}_1 + V_{G,2} \mathbf{R}_2) \\ &= \mathbf{F}_G + (-c_s)(V_{D,1} - V_{G,1}) \mathbf{R}_1 \\ &= \mathbf{F}_D - c_s(V_{D,2} - V_{G,2}) \mathbf{R}_2 \end{aligned}$$

On a ici utilisé le fait que  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  soient les vecteurs propres de la matrice jacobienne de valeurs propres  $-c_s$  et  $c_s$ . A partir des équations précédentes on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x=0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_G + \mathbf{U}_D) + (V_{D,1} - V_{G,1}) \mathbf{R}_1 - (V_{D,2} - V_{G,2}) \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{F}(x=0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D) - |c_s| \left( (V_{D,1} - V_{G,1}) \mathbf{R}_1 + (V_{D,2} - V_{G,2}) \mathbf{R}_2 \right) \end{aligned}$$

Ce flux peut être réécrit sous la forme

$$\mathbf{F}(x=0) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D) - |\mathbf{A}| \frac{\mathbf{U}_G - \mathbf{U}_D}{2}$$

(voir le livre de Toro (1997) pour une démonstration).

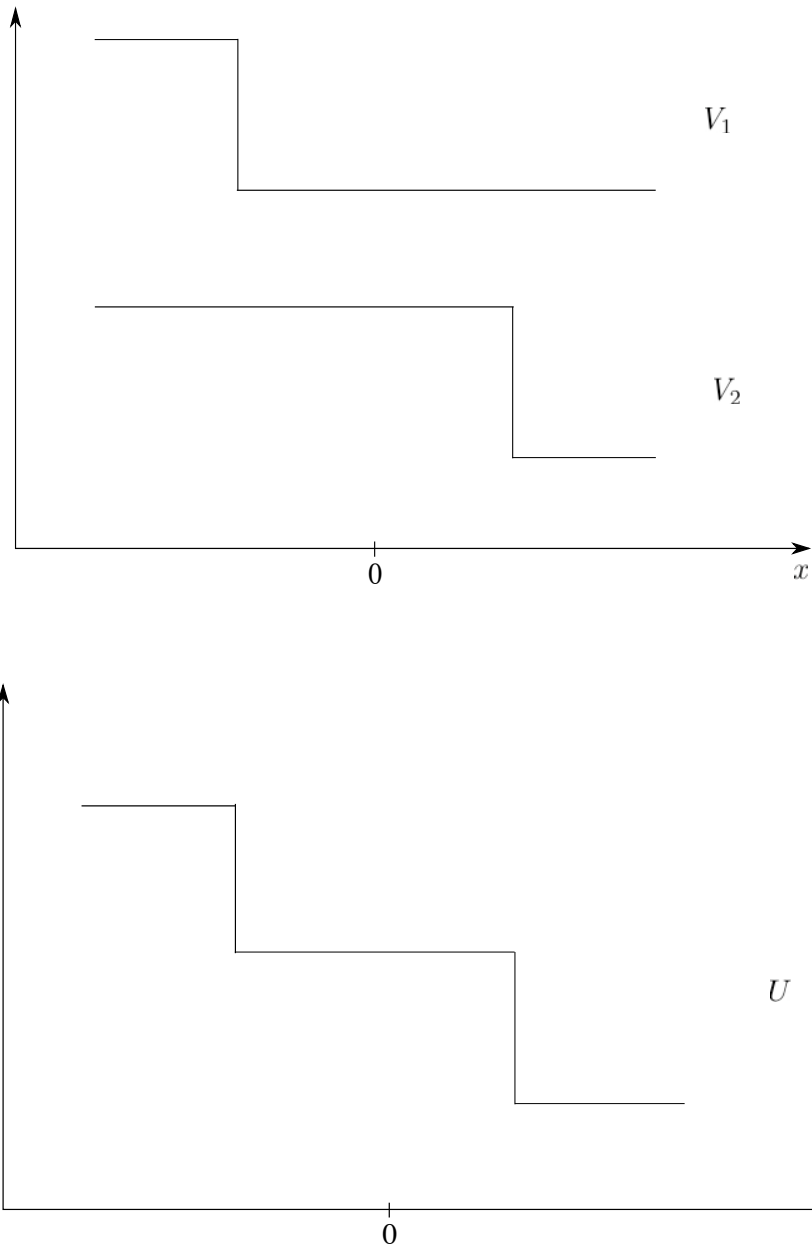


Figure 2.10 – Propagation des ondes dans la base caractéristique et dans la base physique.

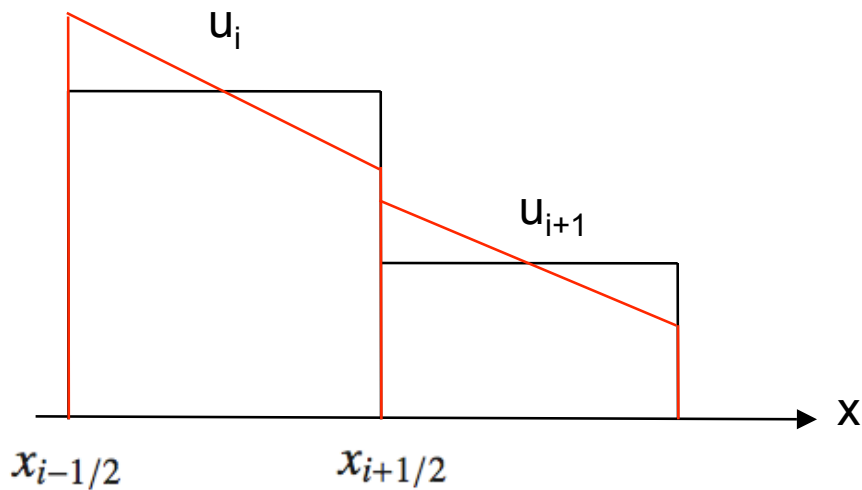


Figure 2.11 – Solution linéaire par morceaux (en rouge) considérée dans la méthode MUSCL. Les valeurs aux interfaces sont calculées à partir de la valeur de la pente choisie. (Figure issue du cours de Teyssier (2008))

### Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws

La méthode MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) permet d'obtenir un schéma d'ordre supérieur en généralisant la méthode de Godunov. La solution est maintenant considérée linéaire par morceaux (Figure 2.11) et non plus constante par morceaux.

La fonction de flux est alors estimée dans un schéma type prédicteur-correcteur. Une étape de prédiction est ajoutée au début de la procédure lors de laquelle les grandeurs sont calculées aux bords des cellules et au demi pas de temps  $\frac{\Delta t}{2}$ , par un développement limité. Ce sont ces valeurs estimées qui sont utilisées pour le solveur de Riemann.

Ce type de schéma est bien d'ordre deux mais il ne préserve pas la monotonie : des oscillations non physiques peuvent apparaître. Le théorème de Godunov précise même que seuls les schémas linéaires du premier ordre préservent la monotonie ! C'est pourquoi les schémas d'ordre supérieur ne sont pas linéaires.

### Total Variation Diminishing

Les schémas de type TVD (Total Variation Diminishing) imposent que la somme des variations sur la grille n'augmente pas au cours du temps :

$$\begin{aligned} \sum_i | \mathbf{U}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{U}_i^{n+1} | &\leq \sum_i | \mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n | \\ \sum_i | \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1} | &\leq \sum_i | \Delta \mathbf{U}_{i+1/2}^n | \end{aligned}$$

Cela signifie que ces schémas préservent la monotonie des fonctions (théorème d'Harten) et qu'un maximum n'augmentera pas alors qu'un minimum ne diminuera pas.

### Prédicteur-correcteur

Dans les schémas prédicteurs-correcteurs chaque pas de temps de durée  $\Delta t$  est précédé d'une étape de prédiction au temps  $t + \Delta t/2$  qui est ensuite corrigée pour obtenir les valeurs à  $t + \Delta t$ . Le code VAC a été utilisé avec l'étape de prédiction de Hancock (van Leer 1984)

$$\mathbf{U}_i^{n+1/2} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{U}_i^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n - \frac{1}{2}\Delta\mathbf{U}_i^n)] \quad (2.2)$$

Un point important à noter ici est l'utilisation de limiteur de pente pour le calcul des grandeurs aux interfaces :  $\mathbf{U}_{i+1/2} = \mathbf{U}_i^n + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{U}_i^n$ . Plusieurs limiteurs sont implémentés dans VAC, *minmod* et *superbee* étant le plus et le moins diffusif (voir Tóth (1996) pour le calcul des limiteurs de pente). Dans les simulations présentées dans la suite de cette thèse, c'est le limiteur de Woodward qui a été utilisé car celui-ci n'est ni trop diffusif, ce qui risquerait de limiter largement la croissance d'une instabilité, ni trop peu diffusif, ce qui pourrait poser des problèmes numériques pour l'étude d'un phénomène de grande ampleur comme une instabilité. Le choix de ce limiteur nous a paru un bon compromis après plusieurs essais avec différents limiteurs.

C'est l'utilisation d'un limiteur de pente qui donne au schéma MUSCL la caractéristique TVD.

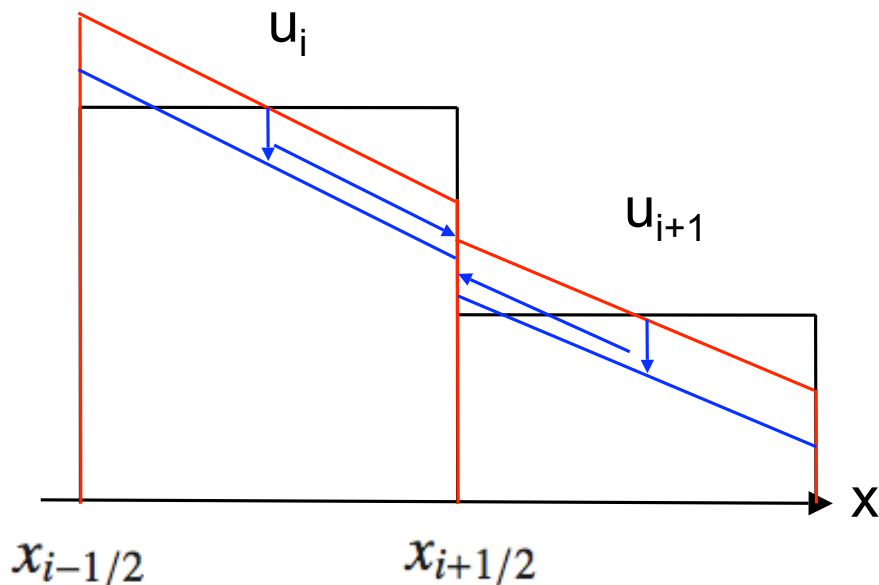


Figure 2.12 – L'étape de prédiction consiste en un calcul de la pente (rouge), puis un calcul des valeurs à  $t + 1/2$  (flèche bleue verticale) puis la même pente est de nouveau appliquée (deuxième flèche bleue) pour obtenir les valeurs aux interfaces à l'étape intermédiaire. (Teyssier 2008)

Par ailleurs, pour améliorer le schéma, l'ordre dans lequel les flux des différentes grandeurs ( $\rho$ ,  $v$ , ...) sont ajoutés varie d'un pas de temps sur l'autre. Cela permet de traiter de manière équivalente toutes les grandeurs et d'éviter d'accumuler les erreurs.



### Résumé du schéma TVD-MUSCL avec prédicteur-correcteur

- Calcul des pentes  $\overline{\Delta \mathbf{U}}_i^n$  à partir du limiteur de pente
- Calcul des valeurs aux interfaces

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^n = \mathbf{U}_i^n + \frac{1}{2} \overline{\Delta \mathbf{U}}_i^n$$

- Calcul des flux aux interfaces  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^n)$
- Étape de prédiction

$$\mathbf{U}_i^{n+1/2} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2}^n)]$$

- Calcul des valeurs aux interfaces après l'étape de prédiction

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+1/2}^G &= \mathbf{U}_i^{n+1/2} + \frac{1}{2} \overline{\Delta \mathbf{U}}_i^n \\ \mathbf{U}_{i+1/2}^D &= \mathbf{U}_i^{n+1/2} - \frac{1}{2} \overline{\Delta \mathbf{U}}_i^n \end{aligned}$$

On a ici gardé les valeurs des pentes initiales.

- On applique finalement le solveur de Riemann avec  $\mathbf{U}_{i+1/2}^{G,L}$  comme conditions initiales.

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}^*(\mathbf{U}_{i+1/2}^G, \mathbf{U}_{i+1/2}^D) - \mathbf{F}^*(\mathbf{U}_{i-1/2}^G, \mathbf{U}_{i-1/2}^D)]$$

## 2.3 Grille à plusieurs dimensions

Toute la méthode présentée précédemment ne prend en compte qu'une grille à une seule dimension, cependant ce sont des simulations tridimensionnelles qui sont présentées dans cette thèse. Pour prendre en compte la multiplicité des dimensions la méthode la plus simple consiste à séparer les dimensions, une cellule à trois dimensions est considérée comme la suite de trois cellules à une dimension sur lesquelles on applique les méthodes classiques. Dans le cas bidimensionnel, on définit alors le flux horizontal  $\mathbf{F}$  et le flux vertical  $\mathbf{G}$ , et l'on ajoute un indice  $j$  qui donne le numéro de la cellule sur l'échelle vertical (voir la figure 2.13) :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j}^{n+1/2} &= \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n] \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{U}_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n+1/2}] \end{aligned}$$

Mais il faut changer d'un pas sur l'autre l'ordre dans lequel les flux sont ajoutés. Dans cette thèse on a choisi de ne pas séparer les dimensions. Cela signifie que les flux dans les trois directions sont calculés ensemble ce qui permet d'avoir une meilleure précision sur ces flux et d'éviter les erreurs de calcul dues à la séparation des dimensions. Ces erreurs numériques peuvent en effet déstabiliser la couronne (définie au paragraphe 3.2.1) qui doit pourtant être stable pour pouvoir étudier correctement le disque (voir le paragraphe 2.5.2). Cette méthode est d'autant plus utile ici que les erreurs sont plus importantes lorsque l'on augmente le nombre de dimensions de la grille.

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^n]$$

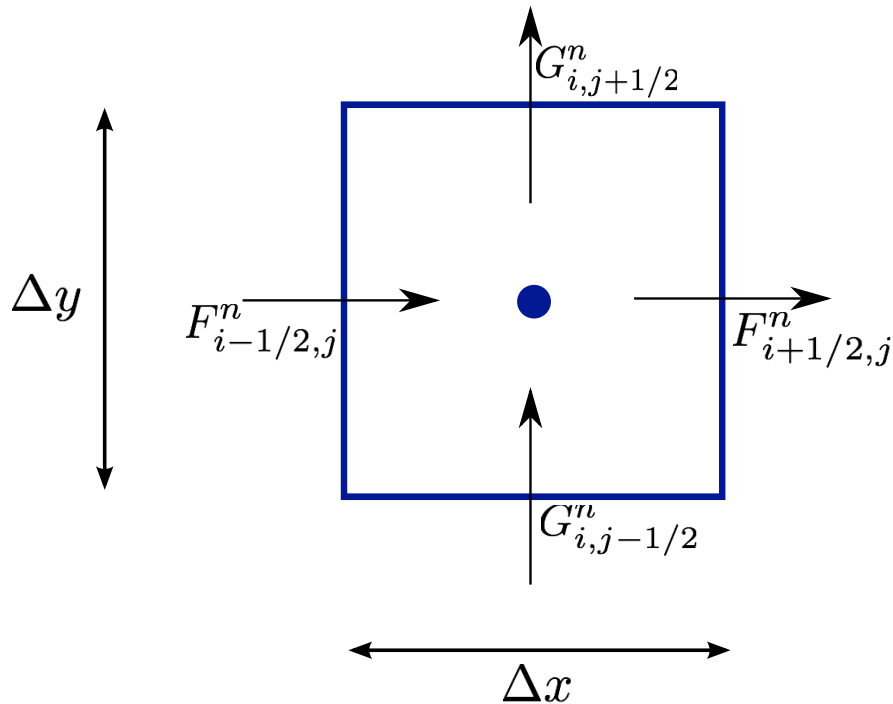


Figure 2.13 – Dans le cas d'une grille bidimensionnelle quatre flux doivent être calculés.

Comme dans le cas unidimensionnel, les termes source sont ajoutés à la fin de chaque pas de temps et ne sont pas séparés sur les différentes dimensions.

## 2.4 VAC MPI

Malgré l'amélioration constante des capacités des processeurs<sup>2</sup>, les simulations numériques lourdes comme celles présentées dans cette thèse nécessitent l'utilisation en parallèle de plusieurs unités de calcul pour effectuer la simulation dans un temps raisonnable. La grille de calcul est distribuée sur l'ensemble des processeurs. Par exemple pour une grille cylindrique, chaque processeur fera les calculs d'une part du gâteau (Figure 2.15). Pour les simulations présentées dans cette thèse, c'est ce type de répartition qui a été choisi. Le disque étant initialement axisymétrique, cela permet d'équilibrer la charge de chaque processeur. Une autre possibilité aurait été de couper le disque en une série d'anneaux concentriques de taille variable en fonction du temps caractéristique dans chaque anneau, mais le temps caractéristique au rayon de corotation variant largement au cours de la croissance de l'instabilité, cette méthode créerait un large déséquilibre de charge entre les processus. La même remarque peut s'appliquer à une coupe faite verticalement. La figure 2.14 montre pourquoi un déséquilibre de charge entre les processus fait perdre en efficacité.

Cette répartition des calculs sur les différents processeurs se fait avec des méthodes appelées MPI (Message Passing Interface) qui créent différents

<sup>2</sup>. et maintenant des cartes graphiques

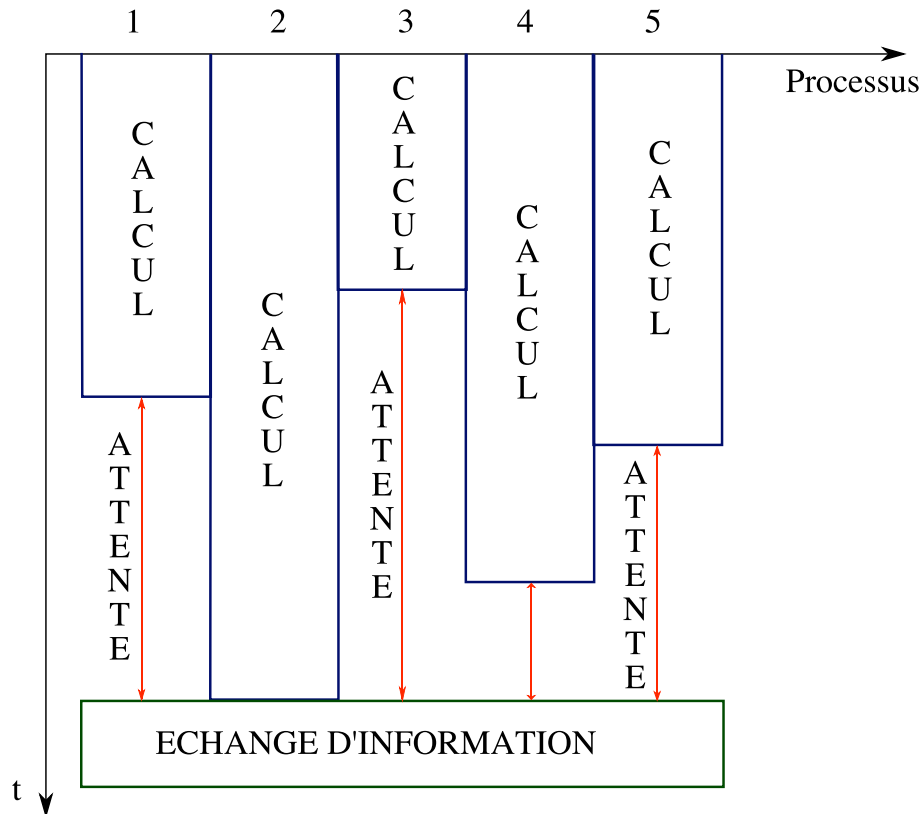


Figure 2.14 – Exemple de répartition déséquilibrée du temps de calcul entre processus : il y a un grand temps d'attente pour certains processus et donc une perte d'efficacité.

processus à répartir entre les processeurs et permettent la communication entre processus. Il s'agit d'une bibliothèque permettant l'échange d'information entre processus. Il peut s'agir de communication dite point à point d'un processus à un autre, l'un est appelé processus émetteur, l'autre processus récepteur. Tous les processus peuvent aussi émettre ensemble une information au processus suivant. Par ailleurs les communications collectives permettent l'échange vers/depuis/entre tous les processus.

Les communications entre processeurs permettront de donner les conditions aux bords pour chaque sous-grille. Cette méthode permet bien sûr de diminuer largement le temps de calcul, mais ce n'est pas parce que l'on utilise  $n$  processeurs que le temps de calcul est divisé par  $n$ . En effet cette méthode augmente d'autant la durée de la simulation qu'il y a de communication entre processeurs. La loi de Gustafson donne l'accélération maximum  $S_p$  due à la parallélisation en fonction du nombre de processeurs  $p$  :

$$S_p = P + f_s(P - 1)$$

où  $f_s$  est la partie non-parallélisable du code (partie séquentielle). La figure 2.17 compare l'accélération due à la parallélisation de VAC à la loi de Gustafson.



Figure 2.15 – Découpage d'une grille cylindrique sur 10 processeurs, chaque couleur correspond à un processeur. Cette répartition permet d'équilibrer la charge de chacun des processus.

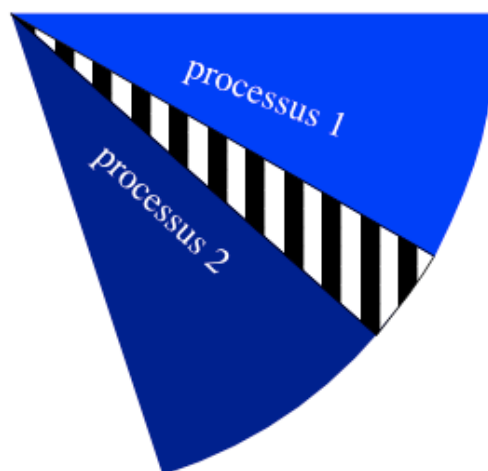


Figure 2.16 – La zone hachurée correspond aux cellules qui servent de cellules fantômes pour le processus voisin.

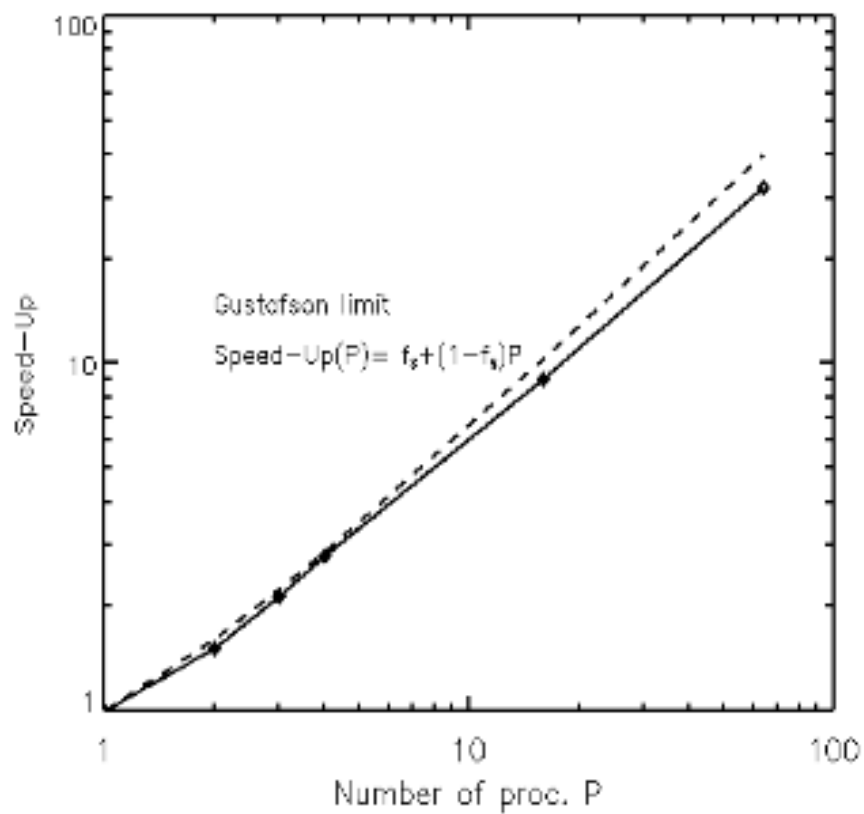


Figure 2.17 – Accélération de VAC en fonction du nombre de processeurs. La courbe continue est la courbe mesurée tandis que les pointillés sont la limite théorique. On voit ici que VAC est particulièrement bien parallélisé. (F.Casse)

La parallélisation se fait de la manière suivante : chaque processeur résout les équations sur une grille locale comprenant des cellules fantômes de part et d'autre. Ces cellules fantômes correspondent aux cellules du bord de la grille connexe. Par ailleurs certaines grandeurs ont besoin d'être comparées sur l'ensemble de la grille comme par exemple la valeur du pas de temps minimum, des routines MPI sont pré-écrites aussi pour ce type d'usage. Au cours de la simulation, le code écrit un fichier par processus, et des scripts permettent la concaténation de ces fichiers en un seul contenant l'ensemble de la simulation.

## 2.5 Une nouvelle méthode pour l'étude des instabilités

L'une des principales difficultés pour l'étude numérique d'une instabilité est d'avoir un schéma particulièrement robuste pouvant permettre la croissance exponentielle de l'instabilité mais pas trop diffusif pour laisser croître les faibles perturbations initiales. Pour l'étude de l'instabilité par ondes de Rossby, il s'est révélé nécessaire de développer une nouvelle méthode numérique utilisée lors du calcul des termes sources imposant l'équilibre des conditions initiales à la précision machine. La difficulté vient de l'interface entre le disque et la couronne puisque toute la structure verticale du disque est modélisée jusque dans la couronne.

### 2.5.1 Contenu d'un nouveau module

Un nouveau module utilisateur de VAC consiste en quatre principales routines :

**Initialisation** où l'on définit les conditions initiales. Pour obtenir un disque tridimensionnel en rotation à l'équilibre, le seul degré de liberté est le choix du profil radial de densité dans le plan médian du disque. Le profil vertical de densité est fixé par l'équilibre hydrostatique vertical. La vitesse azimutale est fixée par l'équilibre radial entre la gravité, la force de pression et la force centrifuge. Les vitesses verticale et radiale sont nulles.

**Conditions aux bords** Le choix des conditions au bord interne du disque peut être critique puisque c'est la zone où le temps caractéristique est le plus court et donc où toute perturbation peut évoluer très rapidement. Plusieurs types de conditions aux bords autres que ceux présents dans la version public de VAC ont été implémentés. Les valeurs dans les cellules fantômes peuvent être calculées de manière à imposer l'équilibre initial tout au long de la simulation, des flux numériques nuls au bord de la grille ou encore des flux uniquement sortant de la zone de simulation. Ce dernier cas est nécessaire pour l'étude de la zone interne des disques de trous noirs.

**Format de sortie** Le format de sortie par défaut a été utilisé.

**Termes sources** L'étude des disques d'accrétion nécessite de prendre en compte la gravité. Le détail du calcul des termes source est précisé dans le paragraphe suivant.

### 2.5.2 Stabilité numérique pour instabilité physique

Les conditions initiales  $\mathbf{U}_i^{ini}$  sont calculées pour être à l'équilibre physique. Les flux calculés aux interfaces avec la méthode TVD-MUSCL à partir de conditions à l'équilibre ne sont pas exactement nuls à cause de l'utilisation du limiteur de pente. Cela introduit de très faibles variations mais celles-ci suffisent à perdre l'équilibre initial nécessaire pour étudier la croissance d'une instabilité à partir de très faibles perturbations. Ce problème des codes de type Godunov pour des équations avec des termes sources a déjà été mis en évidence par Leveque (1998) et Masset (2008). En effet la méthode qui est souvent utilisée (et c'est le cas pour VAC) pour résoudre une équation avec termes sources :  $\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}$  est de faire tout d'abord une étape de résolution sans terme source avec les méthodes classiques (comme TVD-MUSCL)

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad (2.3)$$

puis d'ajouter les termes sources

$$\partial_t \mathbf{U} = \mathbf{S} \quad (2.4)$$

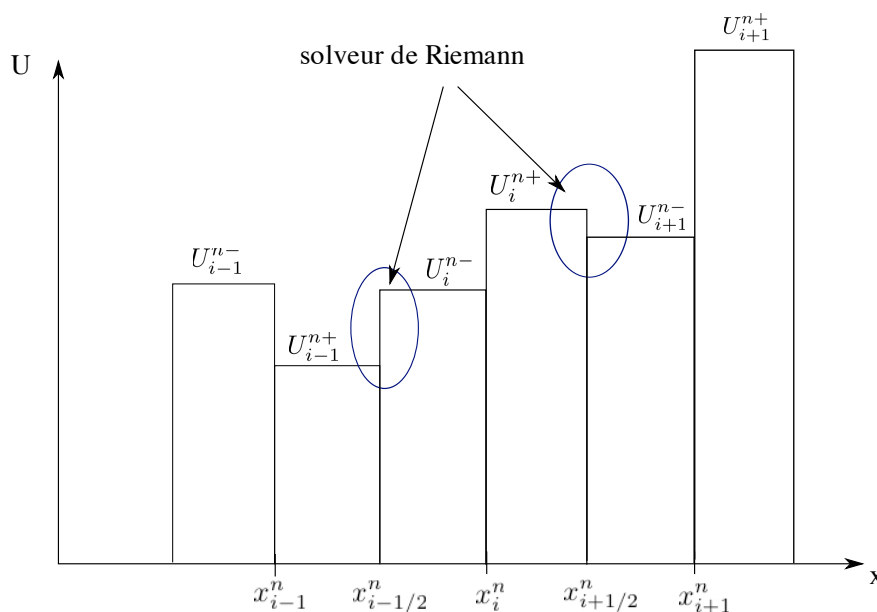


Figure 2.18 – La méthode de Leveque (1998) propose de séparer chaque cellule en deux de manière à inclure le terme source lors de l'utilisation du solveur de Riemann.

Cette méthode donne de bons résultats pour un grand nombre de problèmes mais elle est moins adaptée pour l'étude d'un système proche de l'équilibre où  $\partial_t \mathbf{U} \ll \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) \sim \mathbf{S}$ . En effet dans ce cas la première étape 2.3 modifie les valeurs de  $\mathbf{U}$ , modifications sur lesquelles on applique un limiteur de pente mais qui sont ensuite presque annulées par l'équation 2.4. On voit ici comment un équilibre parfait peut être légèrement perturbé par le limiteur de pente. Il devient nécessaire de prendre en compte et de corriger cet effet pour étudier une instabilité qui se développe à partir de perturbations dans

un disque à l'équilibre, sinon les perturbations de l'instabilité seront noyées dans les erreurs numériques et il ne sera pas possible d'étudier correctement l'instabilité. Une méthode de correction a été proposée par Leveque (1998) : celle-ci propose de séparer chaque cellule en deux sous-cellules dont les valeurs des grandeurs sont choisies pour que leur moyenne soit égale à la valeur correspondant à la cellule unique mais aussi telles que le flux à leur interface compense le terme source (voir Figure 2.18). Ainsi en appliquant le solveur de Riemann comme habituellement mais sur les grandeurs des demi-cellules, le terme source est implicitement pris en compte. Mais cette méthode nécessitant d'être prise en compte lors du développement initial du code, nous avons préféré utiliser un code déjà développé et proposer une nouvelle méthode qui est présentée ici. Cependant cette méthode est moins générale que celle de Leveque (1998) puisqu'elle ne peut s'appliquer que si les conditions initiales ont été choisies pour être en équilibre dans un champ de gravité usuel. Elle est par conséquent difficile à utiliser pour des simulations MHD avec un champ magnétique vertical. La correction apportée corrige les erreurs numériques et éventuellement modifie la gravité pour permettre d'avoir une couronne en équilibre au dessus du disque.

Pour contourner le problème, un premier pas de temps d'initialisation est introduit avant le début de la simulation. Lors de cette itération ce sont les équations sans termes sources qui sont résolues, c'est à dire sans gravité. Le système n'est alors pas à l'équilibre, on obtient de nouvelles valeurs pour chaque cellule  $\mathbf{U}_i^*$ . Le terme source ajouté à chaque grandeur dans chaque cellule est  $\mathbf{U}_i^* - \mathbf{U}_i^{ini}$ . Ce terme source comprend alors non seulement la gravité physique mais aussi un terme s'opposant à la viscosité numérique. Ainsi après ce pas de temps d'initialisation et l'ajout des termes sources, la grille est identique aux conditions initiales.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{ini} &\rightarrow \partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \rightarrow \mathbf{U}^* \\ \mathbf{U}^* &\rightarrow \partial_t \mathbf{U}^* = \mathbf{S} \equiv \frac{\mathbf{U}^{ini} - \mathbf{U}^*}{\Delta t} \rightarrow \mathbf{U}^{ini+1} = \mathbf{U}^{ini} \end{aligned}$$

Après l'initialisation, les termes source sont fixés pour toute la suite de la simulation, c'est alors que l'on peut introduire les perturbations à partir desquelles l'instabilité va se développer. On voit donc ici que la méthode numérique utilisée ne s'applique qu'au calcul des perturbations et non aux quantités d'équilibre initiales.

L'équilibre étant maintenant imposé numériquement, il est important de vérifier avant de mettre en place cette méthode que les conditions initiales sont bien des conditions d'équilibre physique. Pour cela, il faut faire une simulation sans perturbations avec le terme source de la gravité newtonienne et vérifier que le résultat est proche de l'équilibre.

Le second intérêt de la méthode présentée ici est qu'elle permet aussi de gérer une couronne au dessus du disque. La méthode précédente n'est en effet pas nécessaire si la boîte de simulation se limite à l'intérieur du disque, à condition que les perturbations initiales soient de suffisamment grande amplitude. Cependant cette configuration pose des problèmes de conditions aux bords et il est préférable de prendre en compte une couronne au-dessus du disque (voir



le chapitre 3), qui par défaut ne sera pas en équilibre (voir en particulier le paragraphe 3.2.1).

### 2.5.3 Tests de la méthode

#### Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Pour tester la méthode décrite précédemment j'ai effectué des simulations

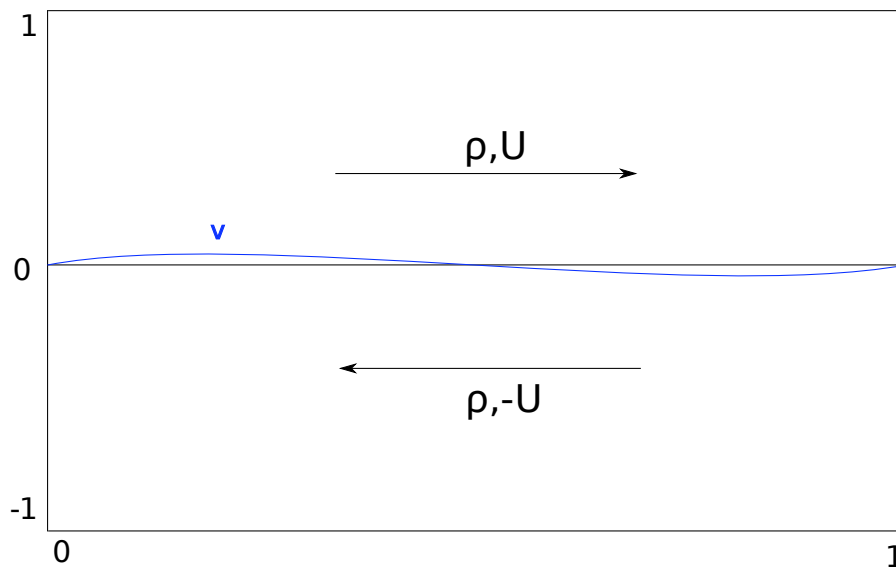


Figure 2.19 – Conditions initiales pour l'instabilité de Kelvin-Helmoltz : les deux fluides ont la même densité mais des vitesses opposées et on ajoute une perturbation sinusoïdale sur la vitesse transverse (en bleu). Dans le test  $U = 0.5$ .

de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz à deux dimensions. J'ai choisi ce test car cette instabilité est proche de celle étudiée dans le cadre de cette thèse. Il est possible de comparer les résultats obtenus lorsque la nouvelle méthode est utilisée ou pas. Dans cette simulation, on considère deux fluides de même masse volumique mais de vitesses opposées de manière à former une couche de cisaillement (Figure 2.19). La résolution de la grille est de  $100 \times 100$ , ce qui donne un rapport d'aspect de deux puisque  $x$  et  $y$  prennent leurs valeurs dans l'intervalle  $[0, 1] \times [-1, 1]$ .

La croissance de l'instabilité est présentée sur la figure 2.20 où l'on peut voir que l'on obtient exactement la même croissance avec ou sans la routine présentée précédemment.

En revanche, le taux de croissance obtenu diffère du taux de croissance théorique : il est bien plus faible. Cela peut s'expliquer par l'épaisseur finie de la couche de transition entre les deux fluides dans la simulation, alors que le taux de croissance théorique est calculé pour une marche verticale de vitesse. Pour

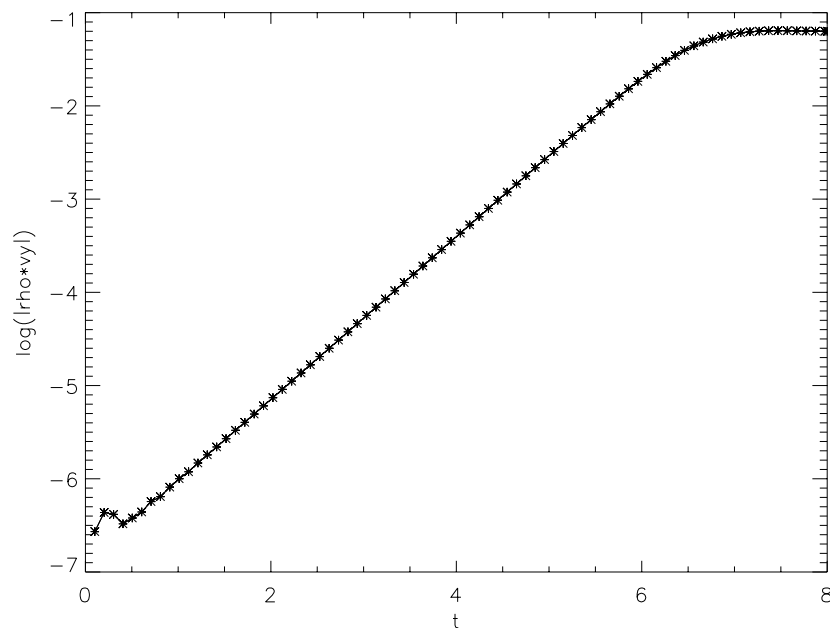


Figure 2.20 – Croissance de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Les points obtenus avec l'utilisation de la routine décrite précédemment et avec le schéma habituel de VAC sont superposés : il n'y a aucune différence.

une couche de cisaillement plus fine, on obtient bien un taux de croissance plus grand mais sans atteindre la valeur théorique.

### Instabilité de Rayleigh-Taylor

Le deuxième test porte sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Le mécanisme de cette instabilité est assez différent de celui de la RWI, mais ce test a pour but de vérifier que l'instabilité se développe correctement en présence d'un terme de gravité (Figure 2.21). Le résultat de simulations de résolution  $200 \times 200$ , avec et sans, cette nouvelle méthode est présenté sur la figure 2.22. On peut voir que les deux simulations sont identiques.

Par ailleurs, lorsque la perturbation initiale est de basse fréquence, l'instabilité de Rayleigh-Taylor croît à partir du bruit numérique de haute fréquence et non à partir de la perturbation imposée. Les deux méthodes donnent alors des résultats différents : la méthode présentée ici supprimant tout bruit numérique sur l'équilibre, l'instabilité croît à partir du bruit numérique sur la perturbation tandis que dans la méthode classique l'instabilité croît à partir du bruit de l'équilibre. D'ailleurs, on peut vérifier que, sans perturbation, l'instabilité se développe tout de même avec la méthode classique et non avec la nouvelle méthode. Pour quantifier cette différence, on a tracé sur la figure 2.23 l'écart relatif de densité entre les deux méthodes. Cette figure montre bien que la nouvelle méthode proposée ici va faire une différence dans les régions présentant des gradients.

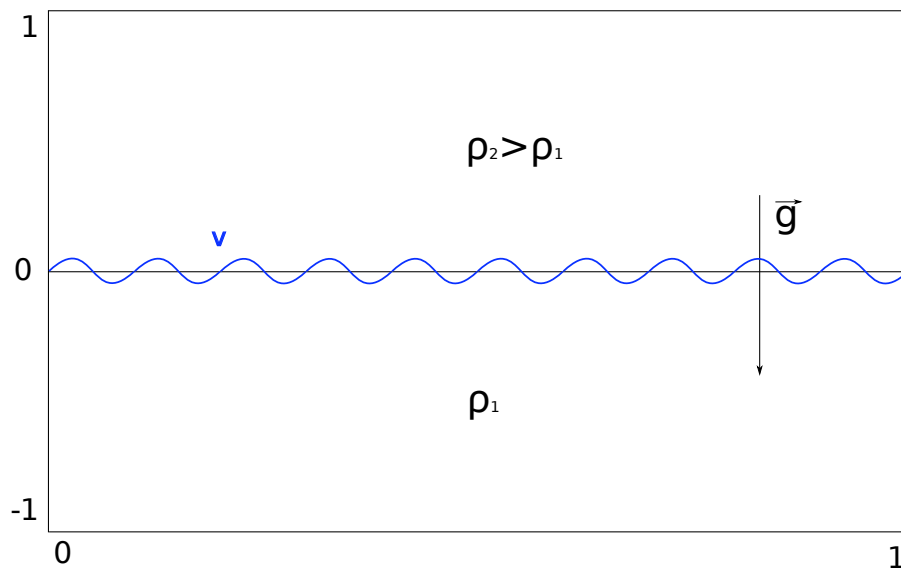


Figure 2.21 – Conditions initiales pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor : les deux fluides ont des densités différentes et une vitesse nulle et on ajoute une perturbation sinusoïdale sur la vitesse verticale (en bleu). Dans le test  $\rho_1 = 1$  et  $\rho_2 = 2$ .

## Bilan

Il existe un grand nombre de méthodes numériques pour résoudre les équations de l'hydrodynamique, mais toutes ne sont pas adaptées à l'étude des instabilités dans les disques d'accrétion. Cette étude nécessite une méthode stable, peu dissipative et pouvant supporter la présence d'un choc. C'est pourquoi pour cette thèse ce sont des méthodes de volumes finis que j'ai utilisées. Le choix de la méthode TVD-MUSCL a été fait après plusieurs tentatives, car celle-ci est peu dissipative. Ce chapitre a permis de présenter en détail cette méthode et les caractéristiques du code.

De nombreuses méthodes ont été tentées pour résoudre les problèmes numériques apparus lors de l'étude de l'instabilité par ondes de Rossby dans un disque tridimensionnel ; la meilleure méthode que nous ayons trouvée a été présentée dans ce chapitre et a permis d'obtenir les résultats numériques de cette thèse. Cependant, comme toute méthode numérique, celle-ci n'est pas parfaite et d'autres développements sont encore nécessaires pour pouvoir aller plus loin dans l'étude présentée dans la suite.

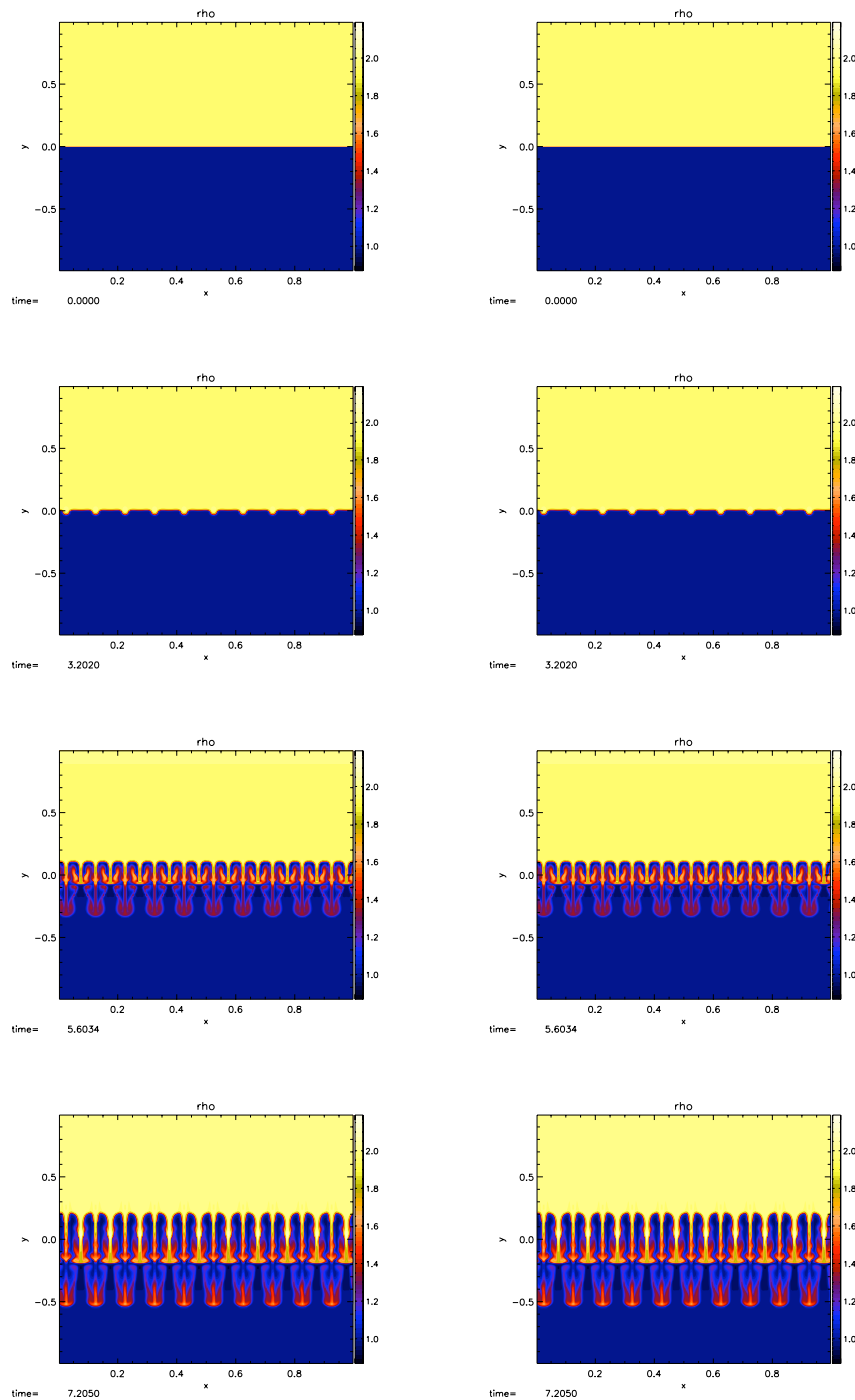


Figure 2.22 – Résultat de la simulation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. A gauche : méthode classique de calcul des termes sources. A droite : nouvelle méthode du paragraphe 2.5.2. Les résultats sont identiques.

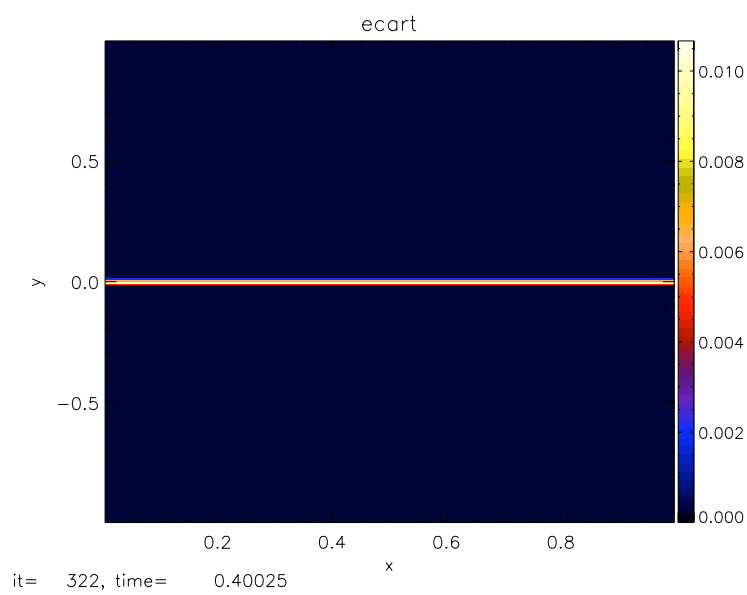


Figure 2.23 – On a tracé sur l'ensemble de la grille de simulation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, la différence relative entre les valeurs de densité obtenu avec la méthode habituelle et avec la méthode présentée ici. Au premier 'snapshot' après 322 itérations, cet écart atteint 1% dans la zone de fort gradient. Cet écart atteint les 100% avant la fin de la simulation.



Deuxième partie

L'instabilité par ondes de Rossby





# Simulation tridimensionnelle de l'instabilité par ondes de Rossby

## SOMMAIRE

INTRODUCTION . . . . .	75
3.1 L'INSTABILITÉ PAR ONDES DE ROSSBY . . . . .	75
3.1.1 Les ondes de Rossby . . . . .	75
3.1.2 L'instabilité par ondes de Rossby . . . . .	78
3.1.3 Intérêts astrophysiques . . . . .	79
3.1.4 Résultats précédents et limites . . . . .	81
3.2 CONFIGURATION NUMÉRIQUE . . . . .	84
3.2.1 Conditions initiales . . . . .	84
3.2.2 Schéma et grille . . . . .	86
3.2.3 Conditions aux bords de la grille de simulation . . . . .	87
3.2.4 Équilibre et stabilité du disque . . . . .	87
3.3 RÉSULTATS DES SIMULATIONS ADIABATIQUES . . . . .	88
3.3.1 Identification de l'instabilité . . . . .	88
3.3.2 Croissance de l'instabilité . . . . .	88
3.3.3 Écoulement tridimensionnel . . . . .	94
DISCUSSION ET PERSPECTIVES . . . . .	97

Ce chapitre présente l'instabilité par ondes de Rossby (RWI) et les simulations numériques tridimensionnelles que j'ai effectuées durant ma thèse. Après avoir introduit les ondes de Rossby et l'instabilité, les conditions initiales de la simulations sont détaillées dans la partie 3.2. Les résultats obtenus sont présentés et discutés dans la dernière partie. L'étude analytique de cette instabilité sera présentée dans le chapitre 4. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans A&A (Meheut et al. 2010) et de présentations à Microquasar and Beyond VII (Meheut et al. 2008) et aux journées de la SF2A (Meheut et al. 2008).



## Introduction

L'un des principaux problèmes de la physique des disques d'accrétion est d'expliquer la perte du moment cinétique du gaz permettant l'accrétion. Comme le transport (diffusif) par collisions n'est pas suffisant pour expliquer la luminosité d'accrétion observée, les astrophysiciens se sont tournés vers des instabilités du gaz qui permettraient le transport de moment cinétique vers l'extérieur du disque. L'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) a permis une grande avancée et peut permettre d'expliquer l'accrétion. Cependant, cette instabilité ne peut se développer que dans un gaz magnétisé, ce qui n'est pas toujours le cas, et ne permet pas d'expliquer d'autres observations comme les QPO ou la présence de jets. C'est pourquoi nous avons cherché à étudier d'autres instabilités plus adaptées pour expliquer ces phénomènes.

Comme un champ magnétique est observé dans ces systèmes, c'est d'abord vers des instabilités MHD comme l'instabilité d'accrétion-éjection (AEI) ou la RWI, que nous nous sommes tournés. Des études poussées de ces instabilités ont été effectuées à deux dimensions (dans le plan du disque), mais si l'on veut relier ces instabilités dans le disque avec la présence d'un jet, cela impose une étude pleinement tridimensionnelle. Cela nécessite une bonne compréhension des phénomènes hydrodynamiques avant d'inclure un champ magnétique. L'instabilité par ondes de Rossby était alors adaptée à cette étude puisqu'elle existe en hydrodynamique, mais aussi en MHD comme expliqué plus loin. C'est dans ce cadre que j'ai commencé ces simulations tridimensionnelles.

L'objectif initial de cette thèse était de réunir les études des disques et des instabilités auxquels ils sont soumis, avec les études de la formation des jets qui utilisent en général une modélisation alpha pour le disque. Ainsi une bonne connaissance des disques pouvait permettre de mieux comprendre la formation des jets. La première étape de cette étude MHD du système composé du disque et du jet à trois dimensions consistait à étudier l'instabilité qui nous intéressait, mais dans le cas hydrodynamique. Finalement cette étude hydrodynamique a déjà apporté de nouveaux résultats intéressants pour la formation des planètes. L'étude du cas MHD a alors été reportée . . .

## 3.1 L'instabilité par ondes de Rossby

### 3.1.1 Les ondes de Rossby

Les ondes de Rossby ont été initialement étudiées en climatologie par Carl-Gustav Rossby pour expliquer certains mouvements dans la circulation atmosphérique. Ce sont des ondes de vortécité qui se propagent dans un gradient de vortécité. Notons ici que, dans le cas atmosphérique, la masse volumique est considérée constante. Ces ondes sont dues à la conservation de la vortécité potentielle totale (je ne rentrerai pas ici dans les détails de la définition de cette grandeur, mais le lecteur intéressé pourra trouver sa définition dans les livres de physique de l'atmosphère comme celui de Potter (2003)). Celle-ci étant la somme de la vortécité relative

$$\zeta = (\nabla \times \mathbf{v}_R)_z$$

où  $v_R$  est la vitesse relative dans le référentiel tournant et du paramètre de Coriolis  $f$ . Dans une atmosphère planétaire

$$f = 2\Omega \sin \theta$$

où  $\theta$  est la latitude et  $\Omega$  la vitesse angulaire de la planète, la vorticité croît de l'équateur vers les pôles. L'onde de Rossby peut donc se propager sur toute la surface de la Terre, mis à part aux pôles où le gradient de vorticité est nul. Les météorologistes distinguent les ondes de Rossby se propageant aux latitudes moyennes dans le 'jet stream', des ondes de Rossby équatoriales ou ondes planétaires. Par ailleurs, des ondes de Rossby ont aussi été observées dans les océans, et l'onde de Rossby la plus connue est probablement la grande tache rouge de Jupiter (voir par exemple Williams (1978)).

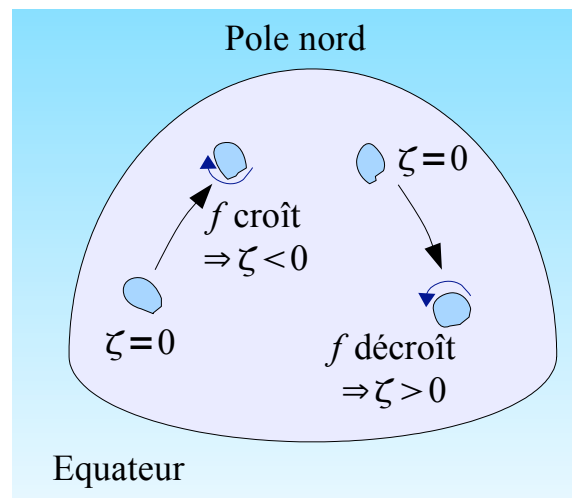


Figure 3.1 – Schéma montrant la conservation de la vorticité potentielle totale sur une surface planétaire. (B. Legras)

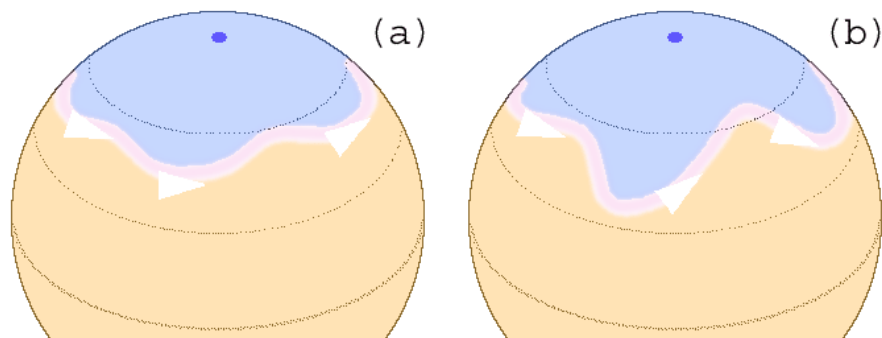


Figure 3.2 – Schéma d'une onde de Rossby dans une atmosphère planétaire.

L'une des principales différences entre le cas atmosphérique et le cas des disques astrophysiques est que, dans le premier cas, l'atmosphère est en rotation solide tandis que les disques sont en rotation différentielle. Cela signifie que chaque rayon a sa propre période de rotation. La relation de dispersion des ondes de Rossby dans un fluide incompressible où les termes en  $1/c_s^2$  disparaissent est :

$$\omega - m\Omega = \tilde{\omega} = \frac{mW'}{k^2 + m^2} \quad (3.1)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde,  $W'$  le gradient de vorticité,  $k$ ,  $m$  les nombres d'onde radial et azimutal. Cette relation est démontrée dans le chapitre 4. On voit ici qu'une onde qui se propage dans un gradient positif de  $W$  doit avoir une pulsation telle que  $\tilde{\omega}$  soit positif, c'est à dire

$$m\Omega(r) < \omega = m\Omega(r_c)$$

où  $r_c$  est le rayon de corotation. Par conséquent, dans un gradient négatif de vitesse angulaire (par exemple dans le cas képlerien) l'onde de Rossby ne peut se propager qu'au-delà de sa corotation dans un gradient positif de vorticité. Inversement, dans un gradient négatif de vortensité, l'onde de Rossby ne peut se propager qu'en deçà de la corotation. Cependant, si le gradient de vorticité induit une force de pression suffisante pour inverser le signe du gradient de vitesse angulaire, alors on peut renverser le raisonnement précédent : dans un gradient positif de vorticité, l'onde de Rossby ne peut se propager qu'en-deçà de sa corotation dans un gradient positif de vorticité (voir les schémas de la figure 3.3).

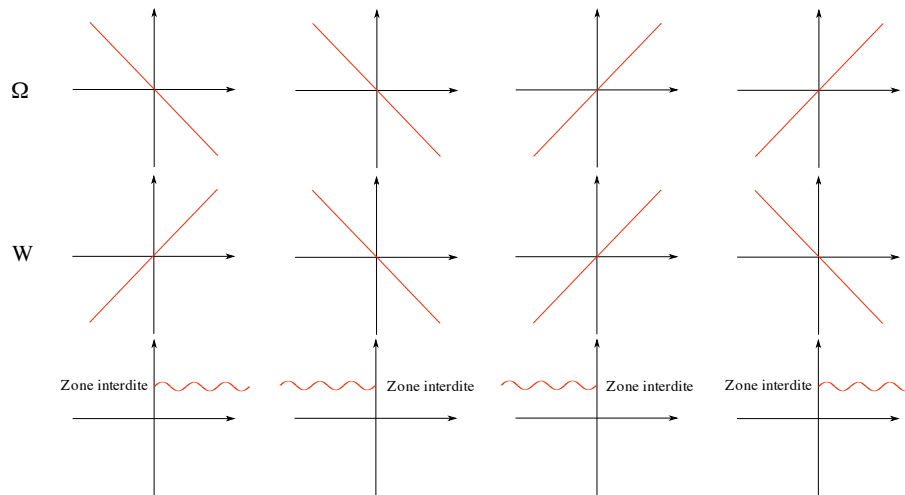


Figure 3.3 – Zone de propagation et zone interdite en fonction du gradient de vorticité et de vitesse angulaire. L'axe vertical est placé à la corotation.

On peut calculer leurs vitesses de phase et de groupe radiales et azimutales à partir de la relation de dispersion 3.1 :

$$\tilde{v}_\phi^p = \frac{\tilde{\omega}}{m} = \frac{W'}{k^2 + m^2} \quad (3.2)$$

$$\tilde{v}_\phi^g = \frac{d\tilde{\omega}}{dm} = -\frac{W'}{k^2 + m^2} - \frac{2m^2W'}{(k^2 + m^2)^2} \quad (3.3)$$

$$\tilde{v}_r^p = \frac{\tilde{\omega}}{k} = \frac{m}{k} \frac{mW'}{k^2 + m^2} \quad (3.4)$$

$$\tilde{v}_r^g = \frac{d\tilde{\omega}}{dk} = \frac{2kmW'}{(k^2 + m^2)^2} \quad (3.5)$$

Ainsi, une onde de Rossby se propage azimuthalement dans le sens opposé à la rotation par rapport à la rotation moyenne dans un gradient positif de

vorticité (et inversement). Concernant la propagation radiale, celle-ci s'annule aux extrema de vorticité qui sont donc des points de rebroussement pour l'onde. L'échange d'information à travers un extremum de vorticité ne peut se faire que par effet tunnel comme nous le verrons au chapitre suivant.

### 3.1.2 L'instabilité par ondes de Rossby

L'instabilité par ondes de Rossby dans les disques astrophysiques en rotation différentielle a été proposée par Lovelace et al. (1999) à la suite des travaux de Lovelace et Hohlfeld (1978). Ils ont montré que l'instabilité peut se développer lorsqu'il y a un extremum de la quantité  $\mathcal{L}$  dans le disque

$$\mathcal{L} = \left( \frac{\Sigma \Omega}{\kappa^2} \frac{P}{\Sigma \gamma} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

où  $\Sigma$  est la densité de surface,  $\Omega$  est la vitesse angulaire,  $\kappa^2 = 4\Omega^2 + 2r\Omega\Omega'$  le carré de la fréquence épicyclique,  $P$  la pression et  $\gamma$  l'indice polytropique. Si le disque est isotherme ou polytropique,  $\mathcal{L}$  est la vorticité spécifique

$$\frac{(\nabla \times v)_z}{\Sigma}$$

appelée vortensité dans ce cadre, faisant apparaître la densité de surface. Cette même quantité est à l'origine de l'instabilité de Papaloizou-Pringle (Papaloizou et Pringle 1985, Goldreich et al. 1986, Papaloizou et Lin 1989), mais dans ce cas, c'est un gradient positif de vortensité qui rend le disque instable, par conséquent, l'instabilité spirale est en général stabilisée par la résonance de corotation sauf si le profil de densité est très anormal.

A la vue de ce critère, l'instabilité par ondes de Rossby peut alors être vue comme une instabilité de Kelvin-Helmoltz dans un disque en rotation différentielle.

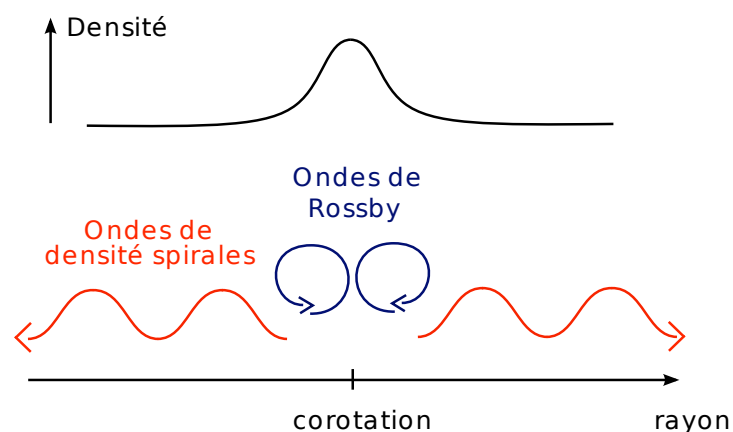


Figure 3.4 – Schéma de l'instabilité par ondes de Rossby.

On peut comprendre ce critère de l'instabilité à l'aide du schéma de la figure 3.4. Si il y a dans le disque un extremum de vortensité, il peut y avoir deux ondes de Rossby ayant leur corotation à l'extremum et se propageant dans

chaque gradient de vortensité (voir aussi le paragraphe 4.2). Tagger (2001) a montré que la rotation différentielle couple ces ondes de Rossby avec des ondes de densité qui se propagent alors à l'extérieur de la corotation en emportant du moment angulaire. Il est ici important de noter que cette instabilité ne peut pas se développer sans rotation différentielle (qui est négligée dans l'approximation du plan  $\beta$ , voir le chapitre 4). ou sans gradient de vortensité (négligé dans l'approximation de la couche de cisaillement<sup>1</sup>). Les études comme celles de Lesur et Ogilvie (2010), Latter et Balbus (2009) ne permettent donc pas la croissance de cette instabilité. Les modes de l'instabilité se développant sur l'ensemble du disque une simulation comprenant l'ensemble des effets de la géométrie cylindrique est par conséquent nécessaire.

J'ai considéré jusqu'à présent le cas d'un disque d'accrétion non-magnétisé mais les disques astrophysiques sont en général magnétisés et la RWI existe aussi dans ce cas-là avec un critère un peu modifié

$$\mathcal{L}_B = (\nabla \times v)_z \frac{\Sigma}{B^2}$$

mais ce sont les même deux possibilités que l'on retrouve :

**minimum de  $\mathcal{L}$**  D'après la relation de dispersion des ondes de Rossby en l'absence d'un gradient de densité (équation 3.1), deux ondes ayant leur corotation au minimum de  $\mathcal{L}$  peuvent se propager : une onde de pulsation  $\omega$  peut se propager avec une énergie positive au delà de la corotation ( $\omega - m\Omega$  ainsi que le gradient de vortensité sont alors positifs) et avec une énergie négative avant la corotation ( $\omega - m\Omega < 0$  ainsi que le gradient de vortensité sont négatifs). C'est l'interaction entre ces deux ondes qui peut permettre à l'instabilité de croître.

**maximum de  $\mathcal{L}$**  Dans ce cas la corotation doit être décalée par rapport à l'extremum de vortensité. Il y a alors deux ondes qui se propagent entre l'extremum et leurs corotations. D'après l'expression de la vitesse de groupe radiale des ondes de Rossby, on a vu que l'extremum de vortensité est un point de rebroussement pour ces ondes. De même les ondes se réfléchissent à leur rayon de corotation, ces deux rayons, extremum et corotation, formant ainsi une cavité dans laquelle peut se former un mode. On peut par conséquent avoir deux modes, un dans chacune des cavités, mais avec des fréquences différentes. Le mécanisme d'interaction entre ces deux modes qui expliquerait la croissance de l'instabilité n'est pas encore bien compris. Et d'ailleurs Tsang et Lai (2009) considèrent que l'instabilité ne peut pas croître dans un maximum de vortensité. Se reporter au chapitre suivant pour une étude plus détaillée.

La version MHD de la RWI est très proche de l'instabilité d'accrétion-éjection (AEI, Tagger et Pellat (1999)), la principale différence est que l'AEI considère des modes globaux, les ondes se réfléchissant sur le bord interne du disque et, à la corotation, cette zone formant ainsi une cavité résonnante. Ici le terme global signifie qu'il est nécessaire de prendre en compte les conditions aux bords. Avec cette définition, la RWI n'est pas une instabilité globale puisque indépendante des conditions aux bords. Cependant, c'est un extremum global, et non localisé de la vortensité qui est nécessaire à sa croissance.

1. shearing sheet en anglais

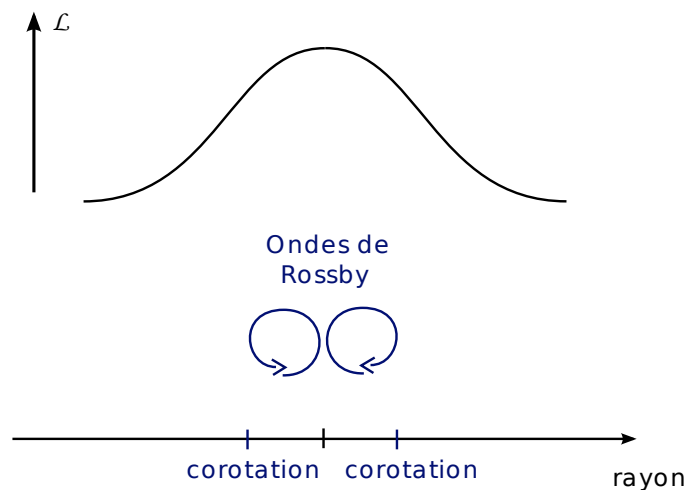


Figure 3.5 – Schéma de la position des ondes de Rossby dans le cas d'un maximum de vortensité.

### 3.1.3 Intérêts astrophysiques

L'instabilité par ondes de Rossby a été proposée à plusieurs reprises pour expliquer des phénomènes se déroulant dans des systèmes très différents. Comme expliqué précédemment, l'instabilité se développe dans un disque d'accrétion si celui-ci présente un extremum de  $1/\mathcal{L}$ . Il y a deux possibilités pour que la quantité  $\frac{(\nabla \times v)_z}{\Sigma}$  ait un extremum.

**Extremum de densité** Un extremum de densité peut se former dans les disques protoplanétaires aux bords de la zone morte<sup>2</sup> comme expliqué dans le chapitre 5, mais aussi à proximité du trou noir central de la Galaxie, SgrA\*. En effet des étoiles jeunes massives ont été observées dans cette région et il a été proposé que du gaz issu du vent de ces étoiles pouvait se circulariser autour du trou noir supermassif formant ainsi un anneau de matière vérifiant les conditions pour la RWI (Tagger et Melia 2006, Falanga et al. 2007). Cette idée a été développée après la découverte de QPO en X et infrarouge lors des éruptions de SgrA\*. Ces QPO avaient une période de l'ordre de 17 à 20 minutes ce qui correspond à la période de rotation à la dernière orbite stable (Figure 3.8 et 3.9). Comme pour les microquasars, la fréquence caractéristique de la RWI peut permettre d'expliquer ces QPO. Cependant, les observations de QPO du centre galactique en X ont été retirés, et celles en infra-rouge demandent encore confirmation. D'ailleurs une collaboration en cours avec Thibaut Paumard et Frédéric Vincent (LESIA) a pour but de coupler les simulations présentées dans ce chapitre avec un code de tracé de rayon (GYOTO) pour comparer les résultats aux futures observations bien résolues du centre galactique que fera par exemple l'instrument *Gravity*. Le résultat d'un premier calcul dans le cas simple axisymétrique et bidimensionnel est donné sur la figure 3.6.

2. dead-zone en anglais



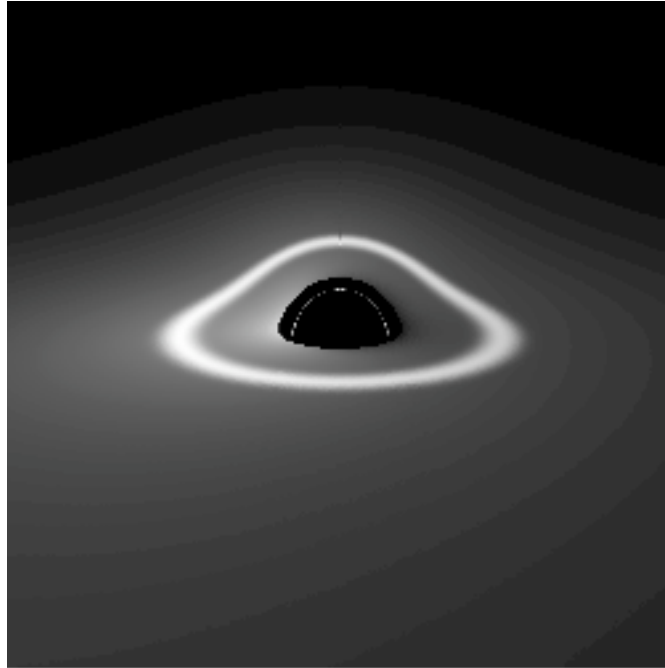


Figure 3.6 – Image obtenue avec le code de tracé de rayon GYOTO (*General relativitY Orbit Tracer of the Observatoire de Paris*) de Frédéric Vincent et Thibaut Paumard pour un disque axisymétrique avec une surdensité (généralisé par le code VAC).

**Extremum de vorticité** A cause d'effets de relativité générale à proximité d'un trou noir, le gaz admet une dernière orbite stable au delà de laquelle il ne peut plus exister d'orbite fermée. Cette dernière orbite stable correspond à l'annulation de la fréquence épicyclique. Ces différents phénomènes peuvent être modélisés en mécanique classique en introduisant un potentiel pseudo-newtonien. Le potentiel pseudo-Newtonien utilisé ici est celui proposé par Paczyński et Wiita (1980) :

$$\Phi_G(r) = -\frac{GM_*}{r - r_g}$$

où  $r_g = 2GM/c^2$  est le rayon de Schwarzschild avec  $G$  la constante de gravitation,  $M_*$  la masse de l'objet compact et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. La figure 3.7 montre que ces effets relativistes créent un maximum de fréquence épicyclique et, par suite, de vortensité.

La RWI a ainsi été proposée pour expliquer les QPO de haute fréquence des microquasars. En effet les simulations numériques bidimensionnelles effectuées en présence d'un champ magnétique ont montré que les modes de nombre d'onde azimutale deux et trois ont un taux de croissance plus élevé que le mode de nombre azimutale un, ce qui correspond bien aux observations des QPO HF où un rapport de fréquence 2 : 3 a été détecté (voir le paragraphe 1.4.4).

#### 3.1.4 Résultats précédents et limites

Jusqu'à présent, dans l'ensemble des études de la RWI, on considérait un disque mince à deux dimensions, les grandeurs étant intégrées sur la hauteur

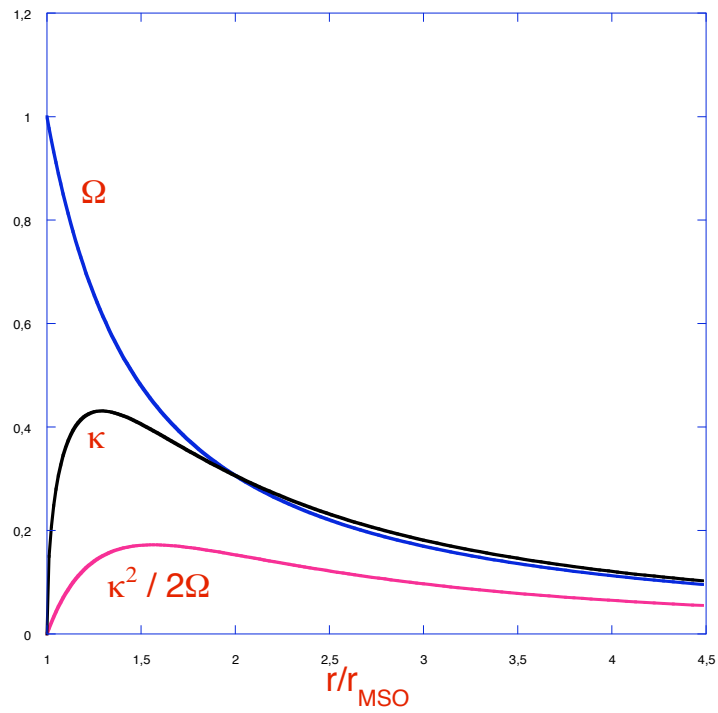


Figure 3.7 – Profils radiaux dans un potentiel pseudo-newtonien de la fréquence keplerienne et épicyclique ainsi que de  $\mathcal{L}$ . (Tagger)

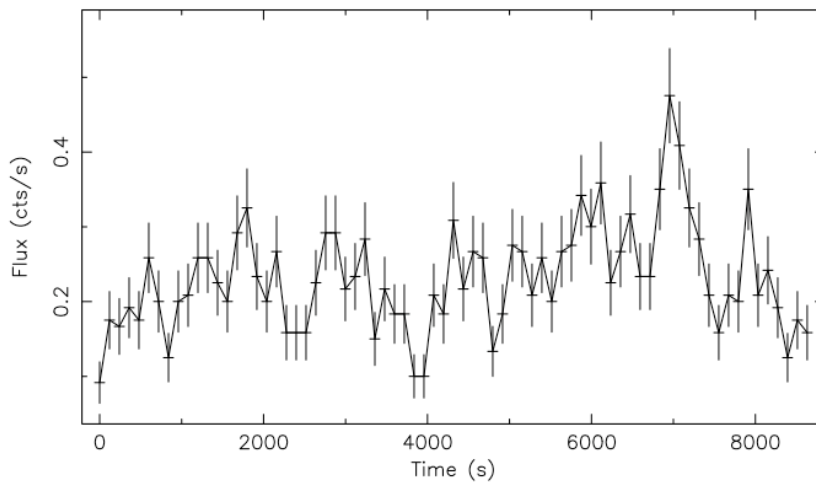


Figure 3.8 – Courbe de lumière en X de SgrA\* présentant des structures temporelles. (Bélanger et al. 2006)

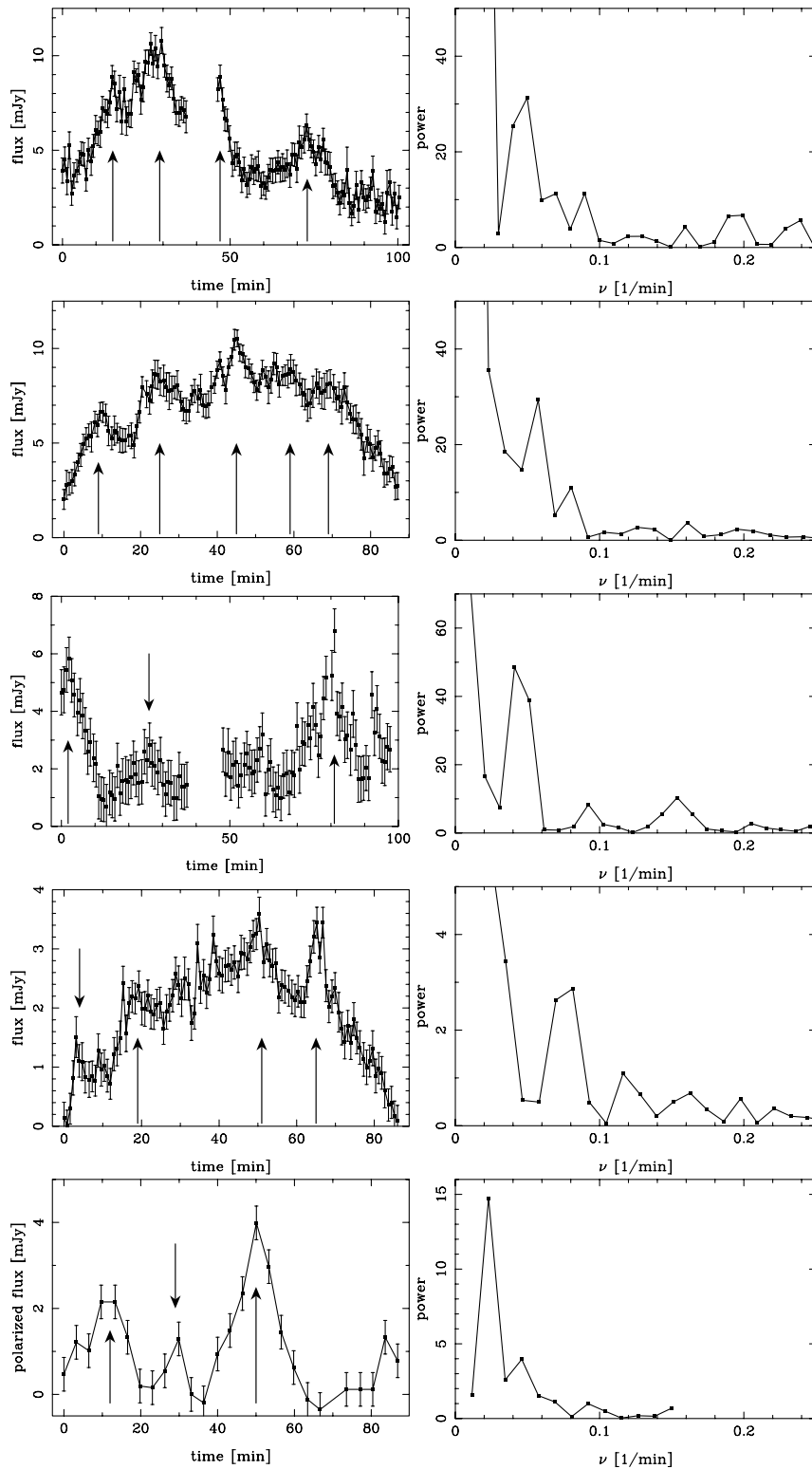


Figure 3.9 – Courbe de lumière et spectre de puissance de SgrA\* en IR montrant des structures temporelles. (Trippe et al. 2007)

du disque. Cela, aussi bien pour les études analytiques (Lovelace et al. 1999, Li et al. 2000) que pour les simulations numériques (Li et al. 2001, Varnière et Tagger 2006). Ces études ont permis d'avoir une bonne compréhension de l'instabilité à deux dimensions dans l'approximation du disque mince (voir chapitre 1) justifiée par des échelles (longueurs d'onde radiale et azimutale) plus grandes que l'épaisseur du disque. Les simulations numériques ont montré que l'instabilité ne se développait que dans un gradient de vortensité suffisamment fort. Cependant, aucune étude n'avait permis d'étudier l'instabilité dans un disque pleinement tridimensionnel laissant ainsi un doute sur l'existence et les caractéristiques de cette instabilité dans un disque réel ; l'approximation de disque mince introduite par Goldreich et Lynden-Bell (1965a;b) ne s'appliquant pas aux perturbations comme les tourbillon de Rossby. De plus, la structure verticale de l'instabilité est importante pour les différentes applications astrophysiques de l'instabilité : la formation de planètes (voir le chapitre 5), le centre galactique où une estimation de la structure verticale a dû être utilisée (Tagger et Melia 2006), ainsi que pour les microquasars où la connaissance de la structure verticale de l'instabilité est nécessaire pour étudier l'émission d'onde d'Alfven verticalement et comprendre le lien avec la formation des jets (dans le cas MHD de la RWI). C'était en effet l'objectif initial de ces simulations.

## 3.2 Configuration numérique

Pour faire une simulation numérique tridimensionnelle de l'instabilité par ondes de Rossby, j'ai considéré un disque non magnétisé avec une équation d'état polytropique, VAC permettant de résoudre les équations de l'hydrodynamique en coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$ .

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) = 0 \quad (3.7)$$

$$\partial_t (\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\mathbf{v}) + \nabla p = \underbrace{-\rho\nabla\Phi_G}_{\text{terme source}} \quad (3.8)$$

$$p = S\rho^\gamma \quad (3.9)$$

où  $S$  est l'entropie considérée comme constante dans l'ensemble du disque. En effet, l'objectif initial était d'étudier la RWI en MHD où la pression joue un rôle secondaire, ce sont les équations d'un fluide isentropique que nous avons choisi de résoudre. Cependant, à la vue des résultats obtenus, il est maintenant prévu de passer à une version plus générale incluant une équation d'énergie.

### 3.2.1 Conditions initiales

La configuration du disque au début de la simulation est choisie pour que le système soit à l'équilibre. L'équilibre radial et vertical laisse un seul degré de liberté, le profil radial de densité. Celui-ci est donc choisi de manière ad hoc pour vérifier le critère d'instabilité de la RWI :

$$\frac{\rho^{ini}(r, z=0)}{\rho_m} = \left(1 + \chi \exp \frac{-(r/r_i - r_B/r_i)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{r/r_i}} \quad (3.10)$$

où  $r_B = 3r_i$  est la position de la surdensité,  $\chi = 0.4$  et  $\sigma = 0.1$  donnent respectivement l'amplitude et la largeur de la surdensité (Figure 3.10). Ces

paramètres sont choisis de manière à obtenir une surdensité suffisamment importante pour la RWI sans que le carré de la fréquence épicyclique  $\kappa^2$  prenne une valeur négative (voir la figure 3.11 et le paragraphe 1.4.2). En effet, la présence de la surdensité crée une force de pression qu'il faut compenser en modifiant la vitesse de rotation. Ces deux effets se combinent pour former un minimum de vortensité suffisant pour déclencher la RWI.  $r_i$  et  $\rho_m$  sont les valeurs du rayon du bord interne de la simulation et la densité à ce rayon. Ces grandeurs, ainsi que la vitesse angulaire au bord interne du disque  $\Omega(r_i)$  sont utilisées pour normaliser les distances, masses et temps apparaissant dans la simulation. Un intérêt de cette normalisation est de pouvoir appliquer les résultats à des systèmes ayant des échelles caractéristiques très différentes.

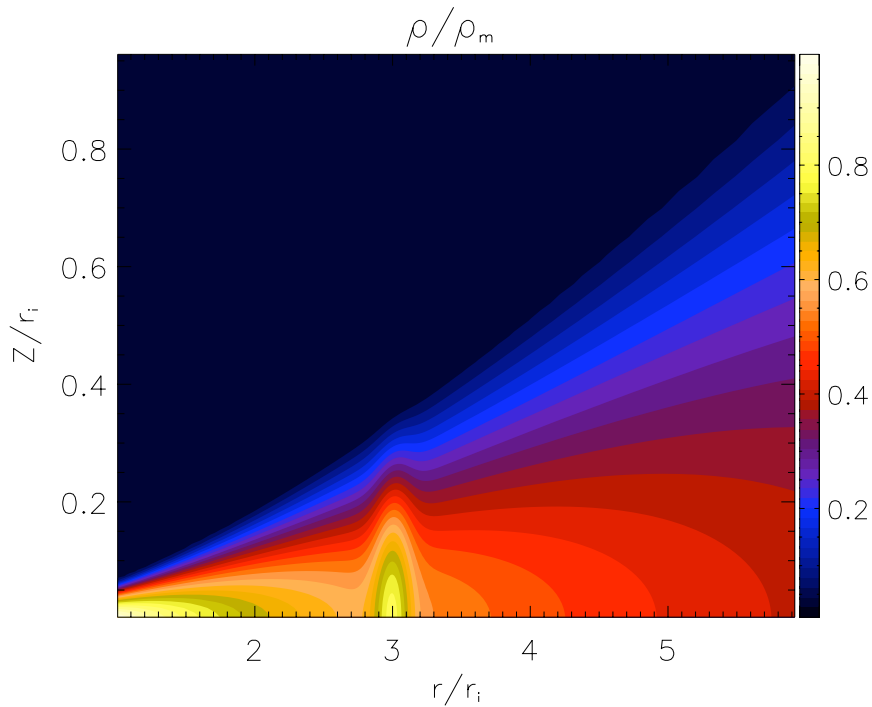


Figure 3.10 – Coupe verticale dans la simulation montrant la densité initiale dans le disque rapportée à la densité au bord interne de la simulation. L'échelle verticale est dilatée par rapport à l'échelle radiale sur cette figure pour que la structure verticale soit visible, le rapport d'échelle est de l'ordre  $H/r \sim 0.1$  avec  $H$  la hauteur du disque.

La densité dans la partie supérieure du disque ( $z > 0$ ) est ensuite imposée par l'équilibre vertical entre gravité et pression.

$$-\partial_z \Phi_G - \frac{1}{\rho} \partial_z p = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{\rho} \partial_z S \rho^\gamma = -\partial_z \Phi_G \quad (3.12)$$

$$S \gamma \rho^{\gamma-2} \partial_z \rho = -\partial_z \Phi_G \quad (3.13)$$

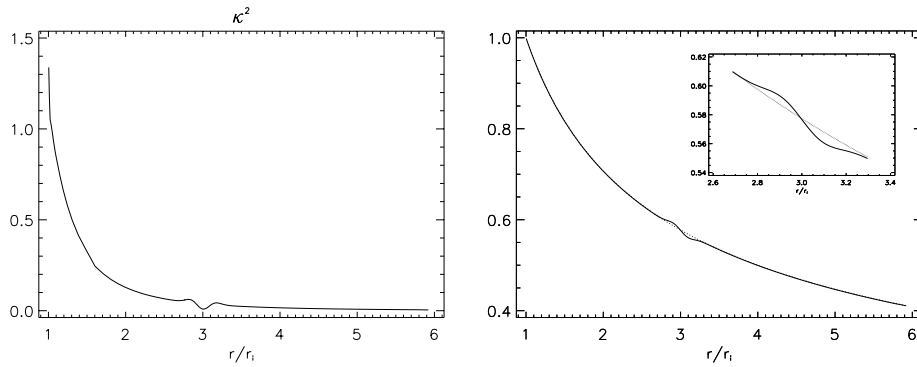


Figure 3.11 – A gauche : Le carré de la fréquence épicyclique intégrée sur la hauteur du disque. On voit que celle-ci ne prend pas de valeurs négatives. A droite : La vitesse azimutale  $v_\phi$  initiale (en trait plein) comparée à la vitesse keplerienne (en pointillés). On peut voir que l'écart dû à la présence de la surdensité est faible (un agrandissement de la zone concernée est donné dans le coin en haut à droite).

$$\begin{array}{l|l}
 \text{si } \gamma \neq 1 & \text{si } \gamma = 1 (\text{isotherme}) \\
 \frac{\gamma}{\gamma-1} \partial_z S \rho^{\gamma-1} = -\nabla_z \Phi_G & S \partial_z \ln \rho = -\partial_z \Phi_G \\
 \rho = \left[ -\frac{\gamma-1}{S\gamma} (\Phi_G + cte) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} & \rho = cte \exp \frac{r_i}{S\sqrt{r^2+z^2}} \\
 \rho = \left[ \rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma S} \left( \frac{r_i}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{r_i}{r} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} & \rho = \rho_0 \exp \left( \frac{1}{S} \left( \frac{r_i}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{r_i}{r} \right) \right)
 \end{array} \quad (3.14)$$

où  $\rho_0 = \rho(r, z = 0)$ . On peut remarquer ici que lorsque  $z \rightarrow \infty$  la densité tend vers zéro (comme on pourrait s'y attendre ...) mais cela pose un problème numérique car le code ne peut pas gérer une densité nulle, et un problème physique car l'approximation hydrodynamique n'est plus valable. On impose alors une valeur minimum à la densité  $\rho_{min} = 10^{-2} \rho_m$  et on appellera par la suite 'couronne' la zone située au dessus du disque où la densité est fixée à  $\rho_{min}$ , par analogie avec les couronnes observées dans les microquasars (voir la figure 1.5). La constante  $S$  est fixé à  $10^{-3}$  dans les unités du code.

Finalement on choisit les profils de vitesse tels qu'il n'y ait pas de vitesse radiale ni verticale, ( $v_r = 0$ ,  $v_z = 0$ ) et que la vitesse azimutale soit fixée par l'équilibre radial entre gravité, pression et force centrifuge (Figure 3.11).

$$-\partial_r \Phi_G - \frac{1}{\rho} \partial_r \rho = \frac{v_\phi^2}{r} \quad (3.15)$$

$$v_\phi = \sqrt{\frac{r^2 r_i}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{r}{r_i} \rho_m^{1-\gamma} \gamma S \rho^{\gamma-2} \partial_r \rho} \quad (3.16)$$

L'ensemble de ces conditions initiales sont axisymétriques, ce n'est que plus tard qu'on introduit des perturbations non-axisymétriques.

### 3.2.2 Schéma et grille

Les équations hydrodynamiques sont résolues avec un schéma TVD-MUSCL (voir 2.2.2) avec un limiteur de pente de Woodward (Colella et Woodward 1984). Il est en effet nécessaire d'avoir un schéma peu dissipatif pour que la croissance et la saturation de l'instabilité ne soient pas (trop) modifiées

par la diffusion numérique. Cependant, la faible dissipation du schéma peut aussi poser problème lorsque l'instabilité est pleinement développée, car celle-ci peut introduire de forts gradients qui ne seront pas toujours correctement gérés par le code. C'est en général ce type de problème qui limite la durée de la simulation.

On utilise une grille cylindrique avec 154 cellules dans la direction radiale et 64 dans la direction verticale et azimutale. La grille n'est pas uniforme sur le disque de manière à avoir une meilleure résolution dans les zones d'intérêt pour l'instabilité. Ainsi les cellules sont plus fines radialement au niveau de la surdensité et verticalement à l'intérieur du disque. Finalement la surdensité est résolue avec environ 60 cellules en  $r$  et environ 40 en  $z$ . La grille s'étend entre  $(r_i, 0, 0)$  et  $(6r_i, 2\pi, r_i)$ , cela permet d'avoir une boîte de simulation suffisamment grande pour que l'instabilité se développe sans être perturbée par les conditions aux bords.

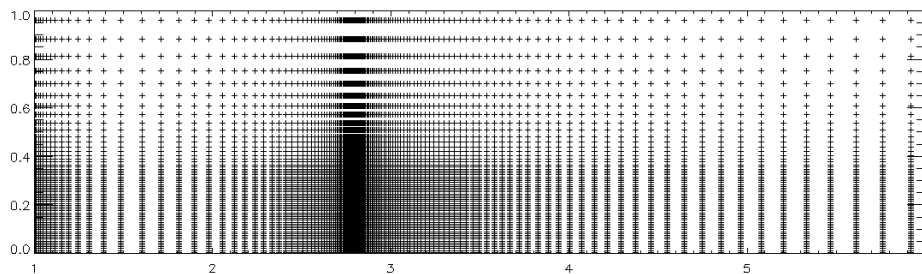


Figure 3.12 – Coupe dans le plan  $(r, \phi = 0, z)$  de la grille de calcul montrant la résolution de la simulation.

### 3.2.3 Conditions aux bords de la grille de simulation

Les conditions aux bords sont fixées par l'ajout de deux cellules à chaque bord de la boîte de simulations (Figure 2.7). Dans ces cellules appelées 'cellules fantômes', les équations ne sont pas résolues mais les valeurs des grandeurs physiques sont choisies de manière à conserver la valeur de ces grandeurs à l'interface entre la grille et les cellules fantômes. Ces conditions au bord ne sont pas parfaitement transparentes car la dérivée n'est pas continue. La grande majorité des simulations présentées ici ne considèrent que la partie supérieure du disque, les conditions au plan médian sont donc symétriques. Cependant une simulation avec l'ensemble du disque a été effectuée pour vérifier cette hypothèse de symétrie.

### 3.2.4 Equilibre et stabilité du disque

Un point critique pour l'étude numérique d'une instabilité est d'avoir initialement un système en équilibre, de manière à ce que toute évolution dans la simulation puisse être attribuée au développement de l'instabilité et non à un déséquilibre initial. Or, les conditions initiales sont choisies pour que le disque soit à l'équilibre, mais ce n'est pas le cas de la couronne. La densité dans la couronne étant supérieure à la densité d'équilibre, celle-ci devrait s'effondrer sur le disque et perturber l'étude de l'instabilité. Pour résoudre ce problème

j'ai utilisé la méthode présentée au paragraphe 2.5.2 après avoir appliqué une méthode de lissage atténuant la rupture de pente entre le disque et la couronne.

$$\rho_{lisse}(z) = \frac{1}{10}(\rho(z - 2dz) + 2\rho(z - dz) + 4\rho(z) + 2\rho(z + dz) + \rho(z + 2dz)) \quad (3.17)$$

Ce n'est qu'après cette initialisation que des perturbations non axisymétriques sont ajoutées dans le disque sur la composante radiale de la vitesse.

$$v_r^{perturb} = v_r + \epsilon \sin\left(2\pi \frac{r/r_i - 1.2}{0.8}\right) [\sin(\phi) + \sin(2\phi) + \sin(3\phi) + \sin(5\phi)] \quad (3.18)$$

L'amplitude des perturbations est donnée par le paramètre  $\epsilon$  qui est de l'ordre de  $10^{-7}$ .

### 3.3 Résultats des simulations adiabatiques

Cette partie présente les résultats d'une simulation de l'évolution temporelle du disque décrit dans la section précédente. Je présente tout d'abord des résultats généraux permettant d'identifier et d'étudier l'instabilité et ensuite les structures qui apparaissent dans le champ de vitesse.

#### 3.3.1 Identification de l'instabilité

Comme jusqu'à présent l'instabilité des ondes de Rossby n'a été étudiée qu'à deux dimensions, pour vérifier dans un premier temps qu'il s'agit bien de cette instabilité dans la simulation tridimensionnelle, nous avons fait une coupe horizontale dans plan médian du disque. Après quelques rotations de la surdensité, on voit apparaître comme attendu les structures de la RWI :

**Densité** Sur les figures 3.14 et 3.13 est tracée la densité dans plan médian du disque. La position de l'anneau de surdensité est toujours visible mais cet anneau a perdu son axisymétrie et présente un côté plus dense ( $\phi/2\pi = 0.7$ ) tandis que des structures spirales apparaissent de part et d'autre de l'anneau.

**Vorticité** Pour identifier les ondes de Rossby, on trace la vorticité  $(\nabla \times v)_z$  du fluide. Comme on peut le voir sur la figure 3.15, l'onde de Rossby est située en  $r = r_B$  à l'extremum de vortensité.

**Compression** Les ondes de densité sont des ondes de compression, on peut par conséquent les identifier en traçant la divergence de la vitesse :  $(\nabla \cdot v)$ . La figure 3.15 montre bien que ces ondes de densité se développant uniquement de part et d'autre de l'onde de Rossby.

On retrouve ainsi à trois dimensions les structures de la RWI à deux dimensions qui sont schématisées sur la figure 3.4.

#### 3.3.2 Croissance de l'instabilité

Les différentes étapes de croissance de l'instabilité peuvent être identifiées sur la figure 3.17. On a tracé l'amplitude des perturbations (maximum du logarithme de la partie non axisymétrique de la densité) en fonction du temps.



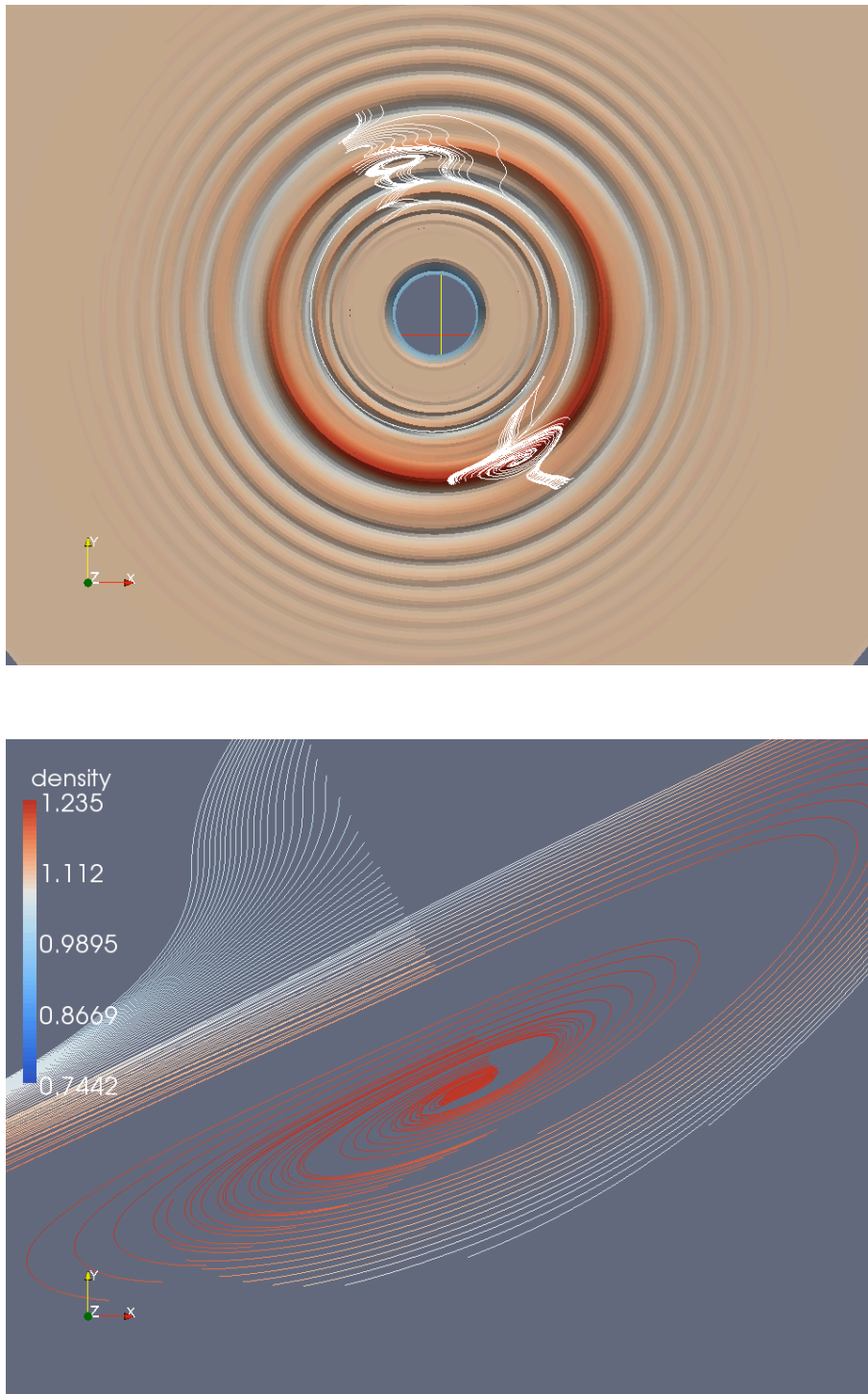


Figure 3.13 – En haut : Vue d'une coupe dans le plan médian du disque, les couleurs correspondent à la densité (comme sur la figure 3.14) et les lignes blanches sont quelques lignes de courant au niveau des extrema de densité. En bas : Agrandissement sur le tourbillon situé en bas sur la figure du dessus ; les lignes de courants sont colorées en fonction de la valeur de densité du gaz.

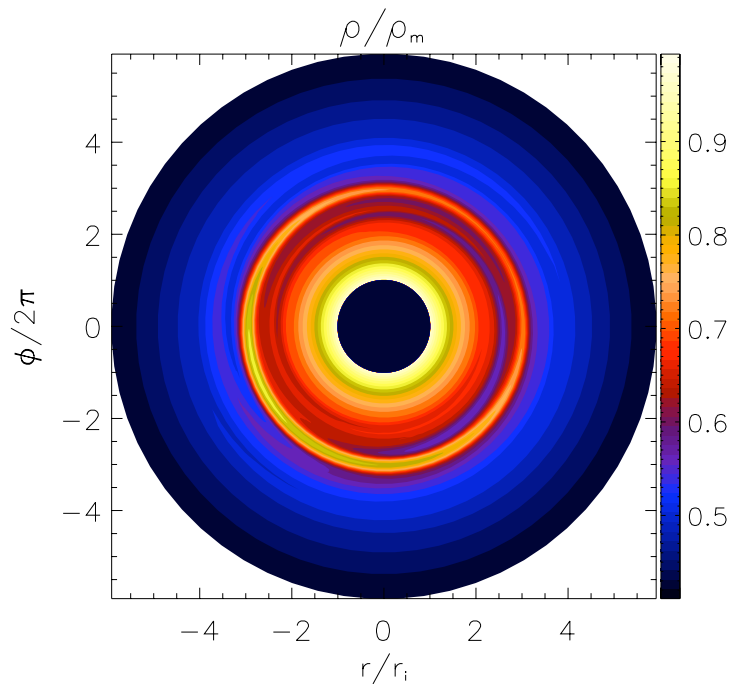


Figure 3.14 – Densité dans le plan médian du disque à  $t = 176/\Omega_K(r_i) \sim 9/\Omega_K(r_B)$ .

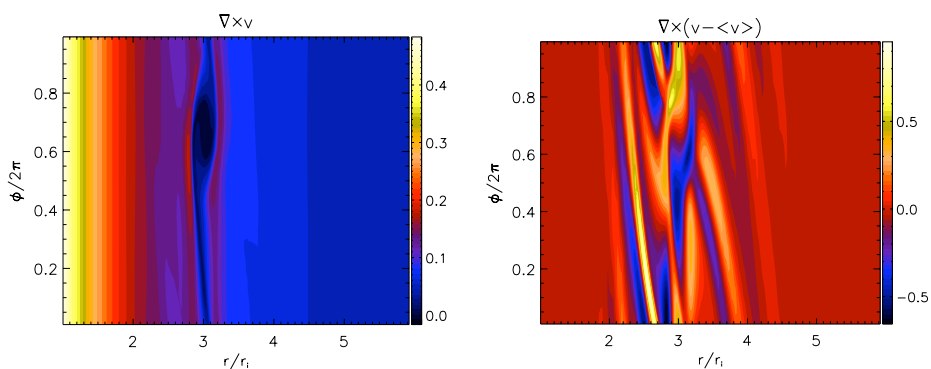


Figure 3.15 – Les figures présentées ici sont des coupes dans le plan médian du disque. La représentation du disque diffère de la figure 3.14 et 3.13 car la direction azimutale est représentée verticalement, mais la figure donne la totalité du disque. Les deux figures montrent respectivement la vorticité du gaz et la vorticité calculée à partir de la composante non-axisymétrique de la vitesse.

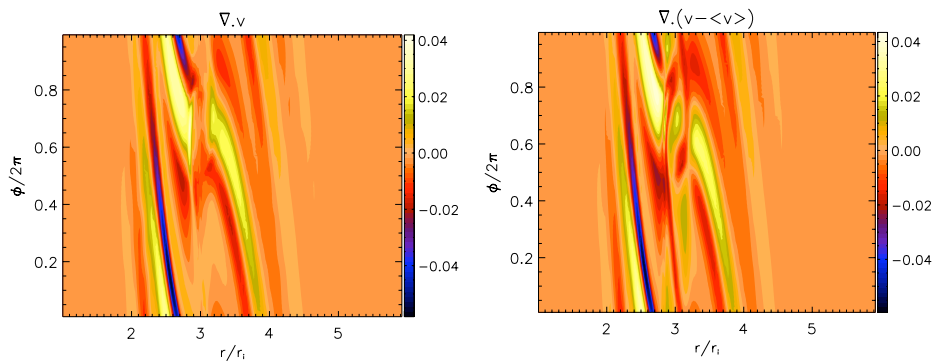


Figure 3.16 – La divergence de la vitesse (à gauche) et de la partie non axisymétrique de la vitesse à droite.

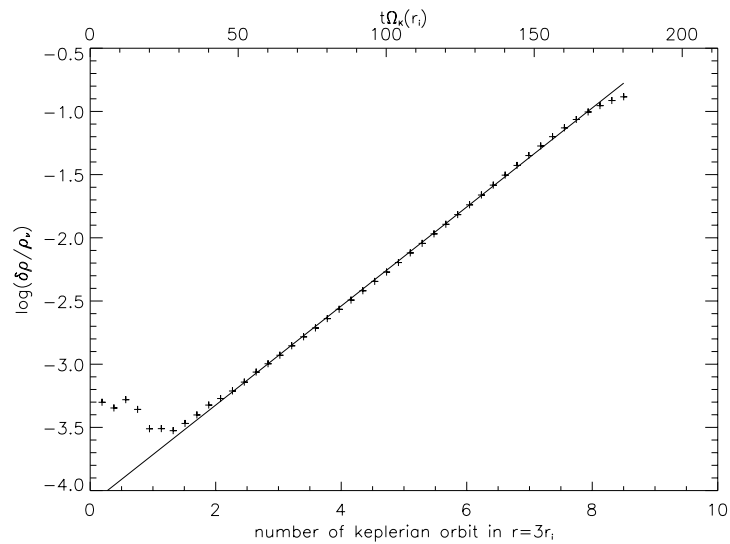


Figure 3.17 – L'amplitude des perturbations de densité en échelle logarithmique est tracée en fonction du temps. L'axe supérieur donne le temps dans les unités du code ( $\Omega_K^{-1}(r_i)$ ) alors que l'échelle du bas donne le temps en nombre de rotations de la surdensité initiale. La régression linéaire donne un taux de croissance de  $\gamma = 0.39$  dans ces unités-ci.

**Sélection des modes** Dans un premier temps l'amplitude des perturbations reste à un niveau bas, les différents modes introduits initialement dans les perturbations sont soit sélectionnés par la RWI et ils commencent à croître, soit dissipés par la dissipation numérique s'il ne sont pas ou peu instables. Cette sélection des modes est bien visible sur la figure 3.18.

**Phase linéaire** L'instabilité entre ensuite dans sa phase de croissance exponentielle appelée phase linéaire car correspondant à la solution des équations linéarisées. La figure 3.17 montre l'amplitude des perturbations sur une échelle logarithmique. La pente de la droite obtenue donne le taux de croissance :  $\gamma = 0.39\Omega_K(r_B)/\Omega_K(r_i)$ . Ce taux de croissance est proche de celui obtenu à deux dimensions dans les études analytiques (Li et al. 2000) ou numérique (Tagger et Melia 2006). La croissance exponentielle parfaite et ce indépendamment des conditions initiales choisies ainsi que la cohérence entre cette simulation et les résultats bidimensionnels permettent de penser que la phase linéaire de l'instabilité est correctement modélisée dans cette simulation.

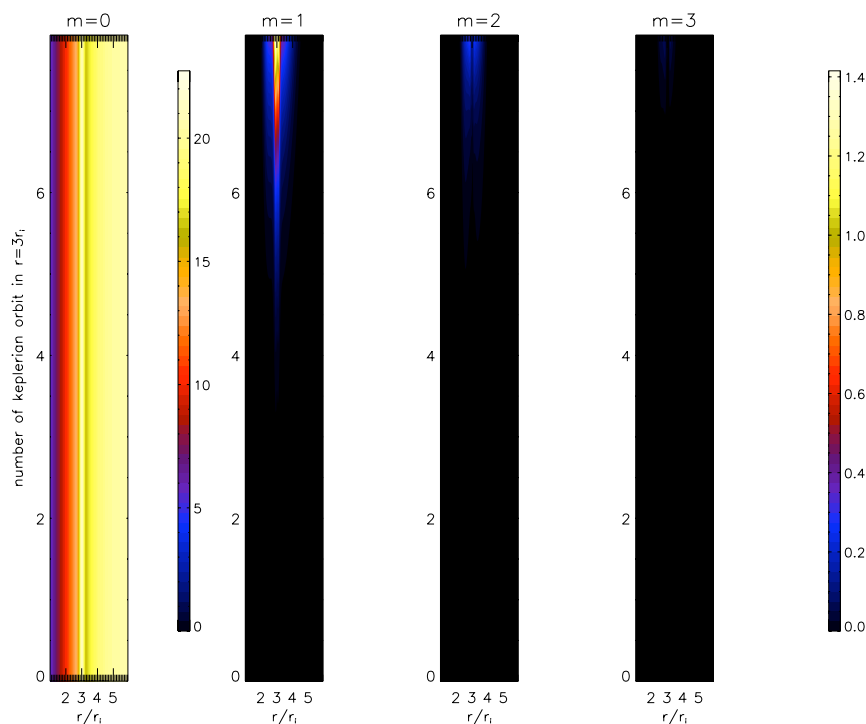


Figure 3.18 – Evolution de l'amplitude des premiers modes azimutaux en fonction du temps. Les modes  $m > 1$  ne commencent à croître qu'après le mode  $m=1$ .

**Saturation** Finalement, après à peu près huit orbites, l'instabilité finit par saturer avec des perturbations de densité de environ 20% de  $\rho_m$ . La saturation s'identifie par l'écart à la croissance exponentielle avec une diminution claire du taux de croissance. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette saturation. Tout d'abord, on peut penser que l'instabilité sature car le critère de l'instabilité n'est plus vérifié. La figure 3.19 montre l'évolution du critère de l'instabilité entre le début de la simulation et la saturation.

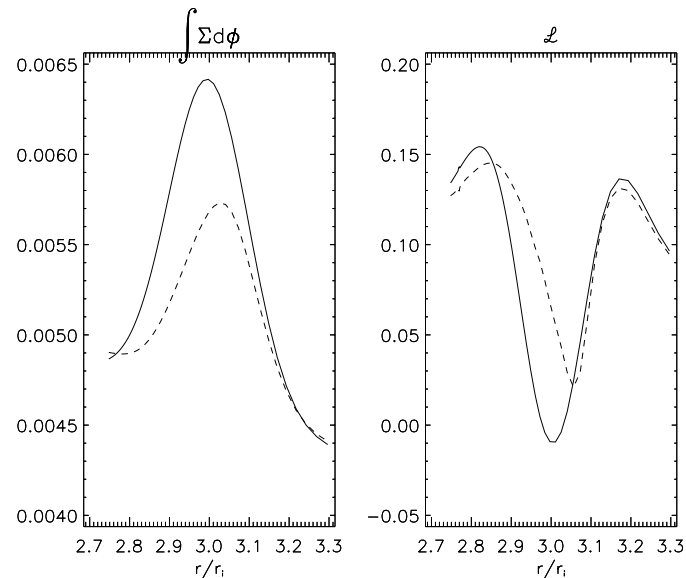


Figure 3.19 – Comparaison de l'amplitude de la surdensité et du critère de la RWI entre le début de la simulation (en trait plein) et au moment de la saturation (en pointillé).

On voit que, bien que la surdensité se soit légèrement atténuée, le critère de l'instabilité est toujours vérifié au moment de la saturation. L'affaiblissement de la surdensité peut être expliqué par l'accrétion qui se produit dans cette région (Figure 3.22). Cependant, comme les simulations bidimensionnelles ont montré que, parfois, avoir un extremum de vortensité ne suffisait pas pour le développement de la RWI mais qu'il faut que cet extremum soit suffisamment marqué, nous avons refait une simulation en prenant comme surdensité initiale le profil de densité obtenu après saturation et moyenné dans la direction azimutale. Cette nouvelle simulation a montré que l'instabilité peut croître de manière tout à fait similaire à partir de ce profil de densité (voir la figure 3.20).

Une autre explication pour la saturation est que l'écoulement est devenu non linéaire. A l'instar du pendule oscillant qui ne se comporte plus de manière linéaire lorsque son amplitude devient trop grande, lorsque l'amplitude d'une instabilité devient importante les effets non linéaires peuvent jouer. Le principe de superposition utilisé pour décrire la croissance des modes indépendamment les uns des autres n'est alors plus valable et il n'y a plus de croissance exponentielle des modes. Des modes non présents initialement peuvent alors apparaître dans le système. Ce type de comportement non linéaire est fréquent en mécanique des fluides puisque l'équation d'Euler n'est pas linéaire. Pour tester la présence de nonlinéarités dans le système, nous avons effectué une analyse des modes de l'instabilité (Figure 3.21). On voit en particulier que des modes qui n'étaient pas initialement présents dans les perturbations apparaissent, ce qui traduit bien la présence de nonlinéarités. Mais la figure 3.18 montre bien que ces modes ne présentent pas de fortes discontinuités dans la structure radiale, ils ne sont donc probablement pas à l'origine de la saturation. En revanche, on voit apparaître des struc-

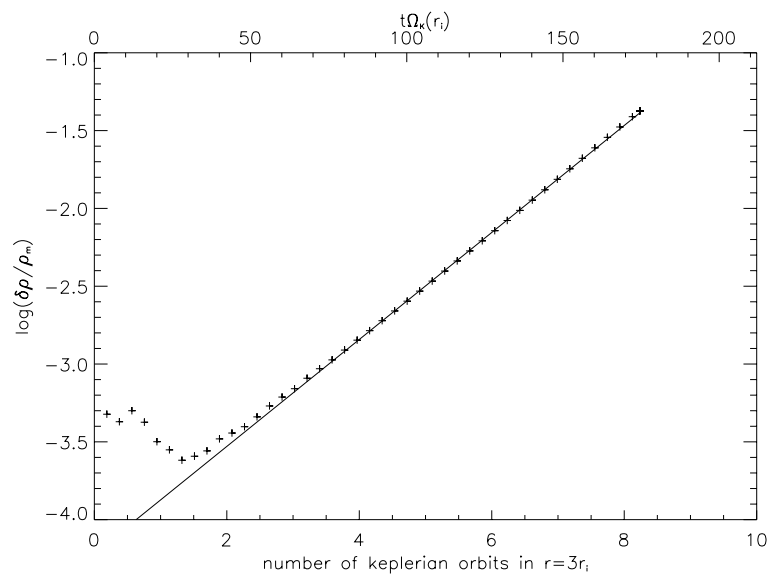


Figure 3.20 – *Figure semblable à la figure 3.17 mais pour la simulation où la condition initiale de densité correspond à la condition finale de la simulation précédente (moyennée en azimut). Le taux de croissance obtenu est légèrement plus faible :  $\gamma = 0.34$  dans les unités physiques.*

tures verticales à petite échelle, dont le flux décroît au dessus du disque (se référer à la figure 4.7 pour un exemple de ce type de structure). Ces structures sont interprétées comme des perturbations sonores se propageant verticalement, et qui déferlent à la surface du disque.

### 3.3.3 Écoulement tridimensionnel

Les résultats du paragraphe précédent ont permis de mettre en évidence et de caractériser l'instabilité à trois dimensions. Cette partie s'intéresse aux écoulements dus à l'instabilité et aux particularités de l'instabilité tridimensionnelle par rapport au cas bidimensionnel.

Les écoulements dans le disque sont dominés par la rotation keplerienne. Pour étudier les particularités dues à la RWI, nous avons soustrait la composante keplerienne de la vitesse. La figure 3.24 montre les lignes de courant dans le plan médian du disque. On voit bien apparaître deux tourbillons, le tourbillon cyclonique tournant dans le même sens que le disque ( $\phi/2\pi \sim 0.2$  au minimum de densité sur la figure 3.14) à l'inverse du tourbillon anticyclonique ( $\phi/2\pi \sim 0.7$  au maximum de densité). Ces deux tourbillons sont attendus pour un mode  $m=1$  car la vorticité est une quantité conservée, un tourbillon ne peut alors pas apparaître seul. Cependant, si l'on trace les lignes de courant sans avoir préalablement retiré le flot moyen, seul le tourbillon anticyclonique apparaît.

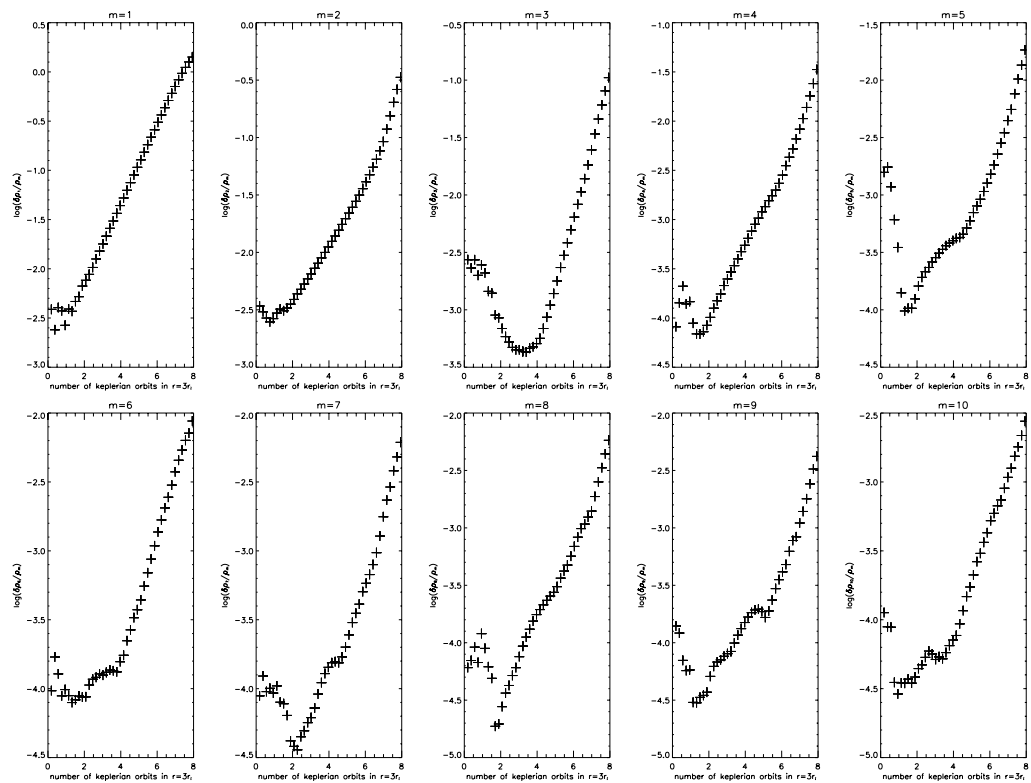


Figure 3.21 – La croissance de l'ensemble des modes jusqu'à un nombre d'onde azimutal de dix.

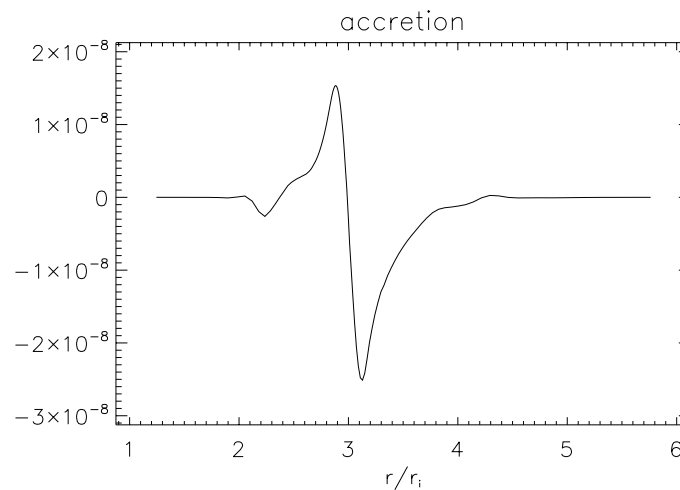


Figure 3.22 – Le taux d'accrétion  $\dot{M} = -r\Sigma v_r$  où  $\Sigma$  est la densité de surface, est donné en masses solaires par an pour le cas d'un disque protoplanétaire, le rayon interne est normalisé à une unité astronomique et la densité à  $\Sigma_m = 1700 \text{ g.cm}^{-2}$ . Il montre une accrétion positive dans la partie interne de la surdensité et négative à l'extérieur. Cela permet d'expliquer l'évolution de la forme de la surdensité. Cette courbe de l'accrétion permet aussi de déterminer précisément la position de la corotation qui correspond à une accrétion nulle.

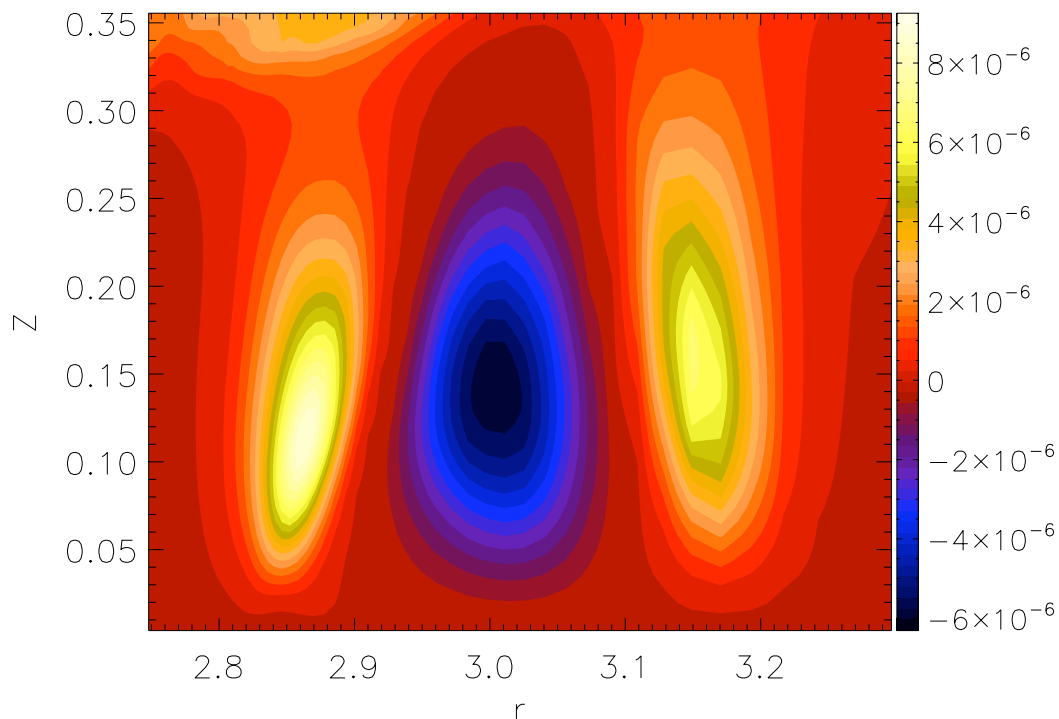


Figure 3.23 – Le flux d'énergie vertical  $\rho v_z$  au dessus du tourbillon est confiné dans l'épaisseur du disque.

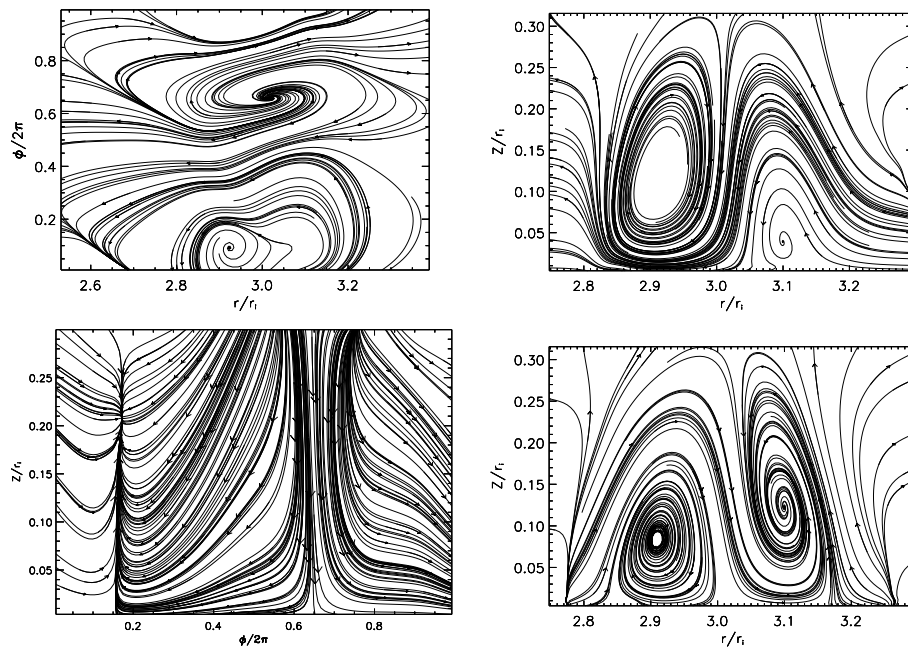


Figure 3.24 – Lignes de courant obtenues à  $t = 176/\Omega_K(r_i)$  dans différentes coupes du disque. En haut à gauche : coupe dans le plan médian du disque ( $r, \phi, z=0$ ) qui fait apparaître les tourbillons. En bas à gauche : coupe ( $r = r_B, \phi, z$ ). A droite : coupes ( $r, \phi/2\pi = 0.64, z$ ) et ( $r, \phi/2\pi = 0.66, z$ ) qui font apparaître ce qui s'apparente à des rouleaux de convection.



Les lignes de courant, rentrantes pour le tourbillon anticyclonique et sortantes pour le cyclonique, indiquent un mouvement vertical par conservation de la masse.

Plusieurs coupes verticales sont tracées sur la figure 3.24, où l'on voit

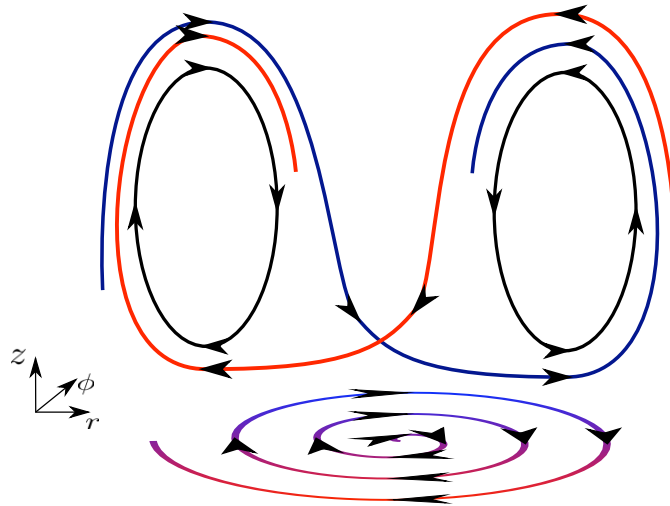


Figure 3.25 – Schéma des lignes de courants présentées sur la figure 3.24. En rouge les ligne de courant dans la partie 'avant' du tourbillon et en bleu pour la partie 'arrière'.

apparaître les mouvements verticaux et en particulier sur les coupes verticales ( $r, \phi \sim 0.7, z$ ) au niveau du tourbillon, des lignes de courants semblables à des rouleaux de convection. Les 'rouleaux de convection' présentés sur la figure 3.24 sont ceux du tourbillon cyclonique mais le même type de structure apparaît dans le tourbillon anticyclonique. Cette structure tridimensionnelle est schématisée sur la figure 3.25, les deux rouleaux s'enroulent en sens inverse avec un mouvement vertical vers le bas au centre ( $r = r_B$ ) et montant à l'extérieur. La coupe ( $r = r_B, \phi, z$ ) de la figure 3.24 confirme bien ce mouvement descendant au centre du tourbillon cyclonique et montant au point X (défini sur la figure 3.26).

Pour vérifier la solidité de ce résultat qui aurait pu être dû aux conditions aux bords, nous avons fait une simulation de la totalité du disque (verticalement), seules les perturbations permettant de briser la symétrie par rapport au plan médian. Le même type de structure apparaît bien qu'un peu plus chahuté. Ce résultat reste aussi valable lorsque l'on choisit des perturbations antisymétriques verticalement. La croissance de l'instabilité est retardée mais ce sont toujours des modes symétriques qui se développent.

La présence de ces rouleaux verticaux ne pouvait pas être prévue à partir des études précédentes bidimensionnelles. Ils sont d'autant plus intrigants que la fréquence de Brünt-Vaïsala (défini au paragraphe 1.4.3) verticale est nulle pour un gaz polytropique. Une simulation numérique isotherme a montré le même type de structures. Une étude plus détaillée de la structure verticale de ces modes est présentée dans le chapitre 4.

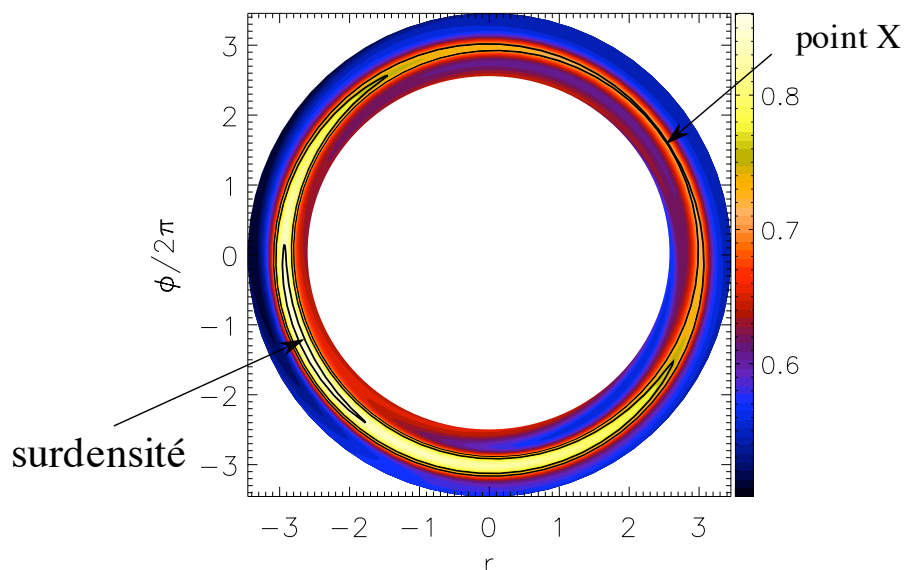


Figure 3.26 – On a ici repris la figure 3.14 en ne faisant apparaître que les rayons proche de la corotation. Quelques lignes d'isodensité sont tracées en noir, ce qui permet de distinguer la position du point X et de la surdensité.

## Discussion et perspectives

Les simulations numériques présentées dans ce chapitre sont les premières simulations pleinement tridimensionnelles de l'instabilité par ondes de Rossby et de tourbillon à grande échelle sur la hauteur du disque, malgré de nombreuses tentatives infructueuses. La raison est que, sans une instabilité comme la RWI ou l'instabilité baroclinique, les tourbillons ne peuvent pas survivre dans un disque en rotation différentielle. Ces simulations ont permis de confirmer les résultats obtenus en deux dimensions comme la croissance linéaire de l'instabilité et la formation de tourbillons sur toute la hauteur du disque. Le point important et inattendu de ces simulations est la présence de rouleaux verticaux de chaque côté du tourbillon qui peuvent jouer un rôle important dans le cadre de la formation de planètes. C'est ce résultat qui est à l'origine du travail présenté dans le chapitre 5.

Ces simulations ont été développées comme une première étape dans le but de faire des simulations tridimensionnelles MHD de disque qui permettent de relier la dynamique du disque avec la formation de jet. Ces mouvements verticaux observés dans ces simulations peuvent aussi jouer un rôle important dans l'optique de la formation de jets. En particulier une instabilité semblable à la RWI en MHD, l'instabilité d'accrétion-éjection (AEI) peut se développer dans des conditions similaires à la RWI (Tagger et Pellat 1999) et expliquer les QPO de basse fréquence des binaires X (Rodriguez et al. 2002, Varnière et al. 2002). Varnière et Tagger (2002) ont montré que les tourbillons de cette

instabilité peuvent émettre des ondes d'Alfvén verticalement le long des lignes de champ et ainsi transférer de l'énergie et du moment angulaire vers le jet. Les rouleaux de convection observés ici pourraient permettre le transfert de masse verticalement par des ondes magnéto-sonores. De même que dans les modèles des structures magnétisées d'accrétion-éjection (Ferreira et Pelletier 1995, Casse et Ferreira 2000b;a, Casse et Keppens 2002) le transfert de masse se ferait alors au point magnéto-sonore et le transfert d'énergie au point d'Alfvén.



# Etude analytique tridimensionnelle de l'instabilité par ondes de Rossby

## SOMMAIRE

INTRODUCTION . . . . .	103
4.1 STABILITÉ D'UN ÉCOULEMENT PARALLÈLE CISAILLÉ . . . . .	103
4.1.1 Equation de Rayleigh . . . . .	103
4.1.2 Critère de Rayleigh et théorème de Fjørtoft . . . . .	104
4.1.3 Application aux disques . . . . .	105
4.2 ÉTUDE DE LA STRUCTURE DES MODES . . . . .	108
4.2.1 Les équations des ondes de Rossby et de densité . . . . .	108
4.2.2 Cas bidimensionnel . . . . .	109
4.3 ONDE EXCITÉE PAR LES DÉPLACEMENTS DANS LE PLAN DU DISQUE	111
4.4 STRUCTURE VERTICALE . . . . .	112
4.4.1 Cas sans stratification verticale de $\rho_0$ . . . . .	113
4.4.2 Cas isotherme . . . . .	114
4.4.3 Cas général . . . . .	114
4.5 COMPARAISON AVEC LES SIMULATIONS NUMÉRIQUES . . . . .	116
4.5.1 Code de tir . . . . .	116
4.5.2 Comparaison . . . . .	117
4.6 ANALYSE WKB RADIALE . . . . .	117
DISCUSSION . . . . .	119

Cette partie présente les bases hydrodynamiques de l'instabilité par ondes de Rossby et propose plusieurs approches analytiques pour l'étude de la structure verticale des modes observée dans les simulations numériques du chapitre 3.



## Introduction

Les simulations du chapitre précédent ont montré des structures verticales couplées aux tourbillons horizontaux. Ces structures n'avaient jamais été étudiées car la plupart des études des disques se placent dans l'approximation du disque mince, en négligeant la structure verticale du disque. Ce chapitre se propose au contraire d'étudier la structure verticale de l'instabilité. Dans un premier temps, je rappelle quelques propriétés des fluides en écoulement parallèle et je reviens sur l'instabilité par ondes de Rossby à deux dimensions. Puis je propose plusieurs approches permettant d'étudier la structure verticale du disque et le lien avec la structure horizontale, en essayant de comparer les résultats obtenus avec la simulation du chapitre précédent. La dernière partie permet de revenir sur les résultats de ces différentes approches qui permettent d'avoir une compréhension bien plus profonde des simulations et de l'instabilité par onde de Rossby dans sa globalité.

### 4.1 Stabilité d'un écoulement parallèle cisailé

Dans cette partie, on démontre des résultats d'hydrodynamique pour l'étude des instabilités dans le cas simplifié d'un fluide incompressible à deux dimensions, et on comparera ensuite au cas des disques en rotation.

#### 4.1.1 Equation de Rayleigh

On se place dans un repère orthonormé  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$  et l'on considère ici un fluide incompressible à l'équilibre avec une vitesse de la forme  $U\mathbf{u}_y$ . L'incompressibilité signifie que la densité est constante et donc l'équation de conservation de la masse peut se simplifier sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

L'équilibre hydrostatique s'écrit donc

$$(U\mathbf{u}_y \cdot \nabla) U\mathbf{u}_y = -\nabla P_0$$

où  $P_0$  est la pression à l'équilibre. Cet écoulement est perturbé et on écrit maintenant la vitesse  $\mathbf{V} = U\mathbf{u}_y + \mathbf{v}$  et la pression  $P_0 + p$ . Le problème étant invariant par translation dans le temps et le long de l'axe  $y$ , on peut chercher la solution sous la forme de modes normaux de pulsation  $\omega$  et de nombre d'onde azimutal  $k_y$ . Les équations d'Euler linéarisées s'écrivent alors

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + v_x \partial_x U\mathbf{u}_y + U \partial_y \mathbf{v} = \nabla p \\ \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0 \\ \begin{cases} -i\omega v_x + ik_y U v_x = -\partial_x p / \rho \\ -i\omega v_y + ik_y v_y U + v_x \partial_x U = -ik_y p / \rho \\ \partial_x v_x + ik_y v_y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -i\tilde{\omega} v_x = -\partial_x p \\ -i\tilde{\omega} v_y + v_x \partial_x U = -ik_y p \\ \partial_x v_x + ik_y v_y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

où  $\tilde{\omega} = \omega - k_y U$

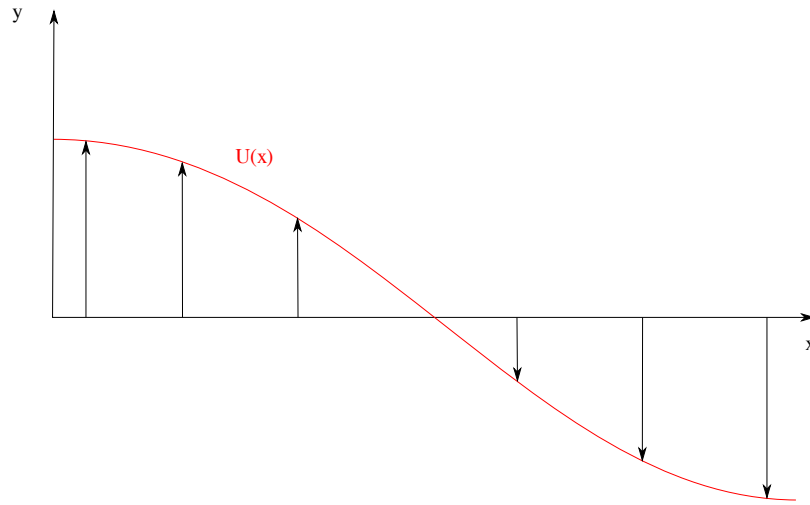


Figure 4.1 – Schéma d'un exemple de configuration initiale de vitesse.

L'écoulement étant incompressible, il est à divergence nulle, on peut par conséquent écrire le vecteur vitesse avec une fonction de courant  $\psi$  :

$$\mathbf{v} = \nabla \times \psi$$

Cela permet d'obtenir l'équation de Orr-Sommerfeld sans viscosité ou équation de Rayleigh (Rayleigh 1879) :

$$\frac{\tilde{\omega}}{k_y} (\partial_x^2 - k_y^2) \psi + \partial_x^2 U \psi = 0$$

#### 4.1.2 Critère de Rayleigh et théorème de Fjørtoft

Nous allons maintenant chercher un critère donnant l'état de stabilité du fluide. Pour cela, on considère comme précédemment une perturbation complexe. En multipliant l'équation précédente par le complexe conjugué  $\psi^*$  et en intégrant par parties sur l'intervalle sur lequel on cherche à vérifier la stabilité  $[x_i, x_e]$ , on obtient :

$$[\psi^* \psi']_{x_i}^{x_e} = \int_{x_i}^{x_e} [|\psi'|^2 + (k_y^2 - \frac{U''}{\tilde{\omega}/k_y}) |\psi|^2] dx$$

où la notation ' traduit la dérivée par rapport à la variable  $x$ . En général la partie intégrée (le membre de gauche) correspond à un flux d'énergie aux bords. Nous le négligerons pour simplifier :  $[\psi^* \psi']_{x_i}^{x_e} = 0$ .

$$\int_{x_i}^{x_e} [|\psi'|^2 + (k_y^2 - \frac{\tilde{\omega}^* / k_y^* U''}{|\tilde{\omega} / k_y|}) |\psi|^2] dx = 0$$

On écrit  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . Pour que cette équation soit vérifiée, il faut de l'équation ci-dessus soit nul il faut que la partie réelle et imaginaire du membre



de gauche soit nulles :

$$\int_{x_i}^{x_e} [|\psi'|^2 + (k_y^2 + \frac{(U - \omega_r/k_y)U''}{|\tilde{\omega}/k_y|})|\psi|^2] dx = 0 \quad (4.1)$$

$$\omega_i \int_{x_i}^{x_e} \frac{U''}{|\tilde{\omega}/k_y|} |\psi|^2 dx = 0 \quad (4.2)$$

On en déduit que pour que le taux de croissance  $\omega_i$  soit non nul il faut que la dérivée seconde de la vitesse  $U''$  change de signe dans l'intervalle  $[x_i, x_e]$  : c'est le théorème du point d'inflexion de Rayleigh (1879). On peut noter que la dérivée première de la vitesse  $U'$  est la vortacité de l'écoulement d'équilibre et donc que le critère de Rayleigh signifie qu'il faut avoir un extremum de vortacité pour avoir une instabilité.

Par ailleurs si le taux de croissance  $\omega_i$  est non nul, alors

$$\int_{x_i}^{x_e} \frac{U''}{|\tilde{\omega}|} |\psi| dr = 0$$

et donc la partie réelle de la pulsation peut prendre n'importe quelle valeur dans l'équation 4.1. On choisit

$$\omega_r = k_y U_{inflexion}$$

et donc pour que la première équation soit nulle il faut nécessairement que

$$(U - U_{infx})U'' < 0$$

c'est à dire que dans un profil décroissant de vitesse, il faut un minimum de vortacité  $U'$  ! C'est le critère de Fjørtoft (1950). Voir la figure 4.2.

#### 4.1.3 Application aux disques

Le calcul précédent du critère de Rayleigh s'applique à un écoulement incompressible et sans rotation. Une généralisation de ce critère est présentée dans Papaloizou et Pringle (1985) pour un écoulement compressible en rotation tandis que le critère présenté dans Lovelace et al. (1999) est une généralisation pour un écoulement compressible et non nécessairement isentrope. Si l'écoulement est compressible, la densité n'est plus constante et l'extremum de vortacité qui apparaît dans le critère de l'instabilité devient un extremum de vortensité. De même dans le cas non-isentrope, le critère de l'instabilité fait intervenir l'entropie.

En ce qui concerne le théorème de Fjørtoft, aucune généralisation au cas des disques d'accrétion n'a été proposée. En effet ce théorème est contradictoire avec la RWI dans le cas d'un maximum de vortensité, on pourrait en conclure que le critère de la RWI est un critère nécessaire mais non suffisant et que la RWI n'existe pas dans le cas d'un maximum de vortensité. C'est en effet ce que proposent Tsang et Lai (2008), Lai et Tsang (2009). Cependant des simulations numériques ont bien montré qu'un maximum de vortensité est instable (Tagger et Varnière 2006). En effet, on a déjà vu que les ondes de

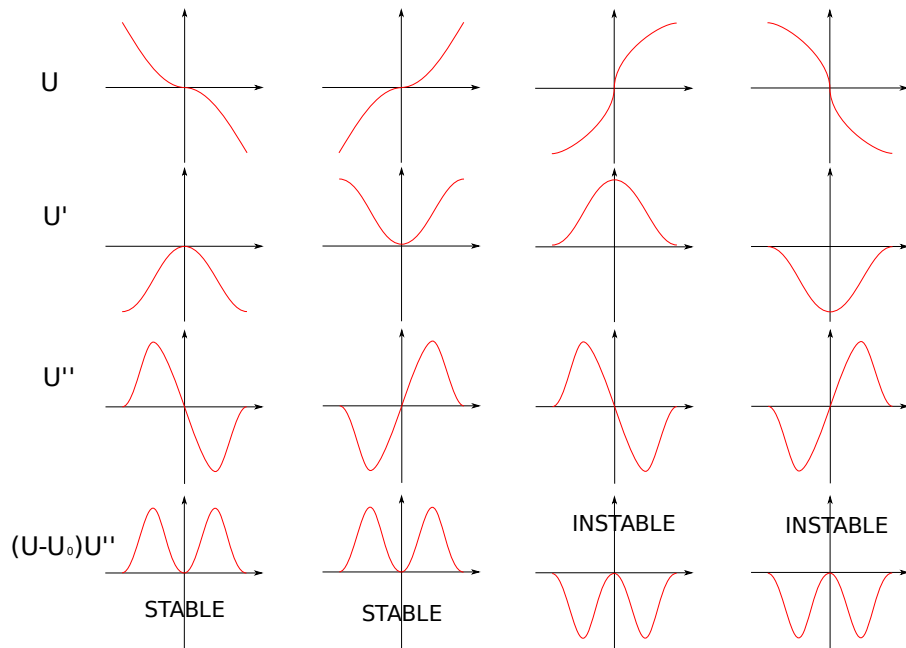


Figure 4.2 – Schéma de différents profils de vitesse  $U$  tels que  $U''$  s'annule, donc ne vérifiant pas le critère de stabilité de Rayleigh. Par contre les deux premiers sont stables vis à vis du critère de Fjørtoft.

Rossby étaient couplées aux ondes de densité et donc il est possible d'avoir un échange d'énergie entre ces deux types d'ondes. Le terme de bord dans l'équation 4.1.2 n'est donc pas nécessairement nul. Celui-ci étant réel, le critère du point d'inflexion de Rayleigh reste valable mais non le théorème de Fjørtoft.

Par ailleurs, en reprenant l'équation 4.1, on a vu que le choix de la partie réelle de la pulsation était arbitraire. Pour comprendre le cas d'un maximum de vortensité, on peut choisir

$$\omega_r = U_{r_c} k_y$$

avec le rayon de corotation  $r_c$  différent du point d'inflexion  $r_{inflex}$ . Comme on peut le voir sur la figure 4.3, il y a alors une région instable. Le mécanisme de croissance de l'instabilité serait donc différent dans le cas d'un minimum de vortensité : il ne s'agit pas de l'échange d'énergie entre deux ondes de Rossby mais de l'échange d'énergie entre une onde de Rossby et une onde de densité. Le mécanisme de croissance n'est plus localisé à l'extremum de vortensité. C'est la raison pour laquelle les études citées précédemment considéraient qu'il ne s'agit pas de la même instabilité dans le cas d'un maximum ou d'un minimum de vortensité.

Lai et Tsang (2009) justifient alors l'impossibilité d'une instabilité dans ce cas-la en réécrivant les équations du fluide sous la forme d'une équation de Schrödinger et en montrant qu'il ne peut pas exister de mode piégé dans un potentiel si peu large (la largeur du potentiel correspond à la zone instable sur

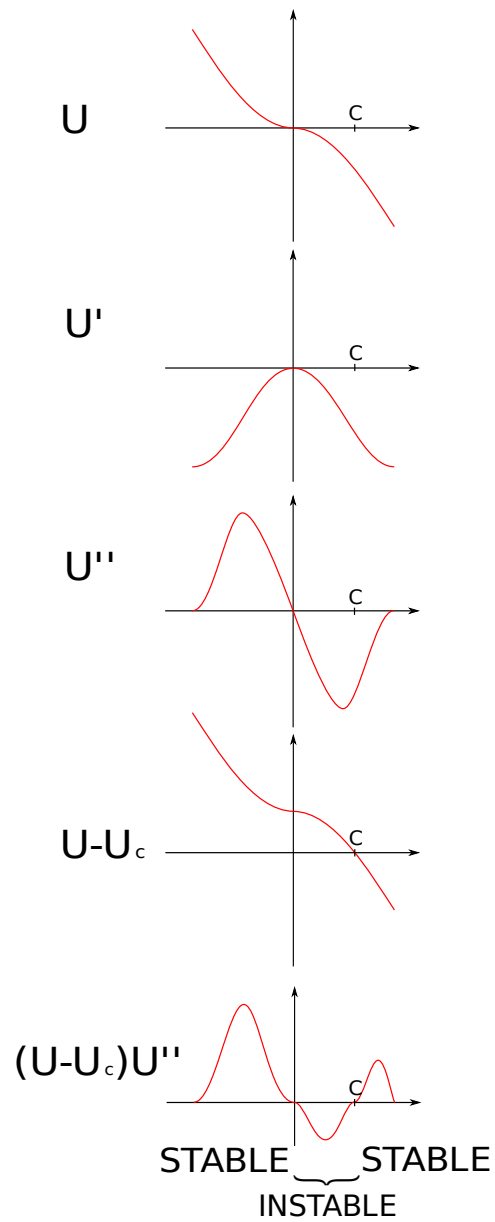


Figure 4.3 – Exemple de profil de vitesse donnant un maximum de vorticité tout en gardant une région instable.

la figure 4.3). Pourtant on montre en mécanique quantique qu'il existe un état lié pour un potentiel delta (fonction de Dirac) de largeur nulle.

## 4.2 Etude de la structure des modes

Pour étudier les modes de la RWI, on va calculer et utiliser la relation de dispersion des différents modes. Dans un premier temps, nous nous plaçons dans l'approximation disque mince sans vitesse verticale et nous nous intéresserons ensuite à la structure verticale.

### 4.2.1 Les équations des ondes de Rossby et de densité

Les équations d'Euler (équations 1.10) s'écrivent en coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$  :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{V} + V_r \partial_r \mathbf{V} + \frac{V_\phi}{r} \partial_\phi \mathbf{V} + V_z \partial_z \mathbf{V} = \mathbf{f} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho} \nabla P \\ \partial_t (\rho_0 + \rho) + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho) \mathbf{V}) = 0 \end{cases}$$

On considère toujours un disque en rotation, la vitesse angulaire est notée  $\Omega$ . Pour étudier la structure en modes de l'instabilité, on écrit la perturbation sous la forme  $e^{-i\omega t + im\phi}$ . Les équations linéarisées peuvent se réécrire

$$\begin{cases} -i\omega v_r + im\Omega v_r - 2\Omega v_\phi = f_r \\ -i\omega v_\phi + im\Omega v_\phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r = f_\phi \\ -i\omega v_z + im\Omega v_z = f_z \\ -i\omega \rho + im\Omega \rho = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) \end{cases} \quad (4.3)$$

On introduit  $s = \ln(r/r_0)$  avec  $r_0$  le rayon caractéristique, cela permet un développement rigoureux pour une analyse locale. On définit aussi la divergence de la vitesse dans le plan du disque

$$D = r^2 \nabla_\perp \cdot \mathbf{v}$$

où  $\nabla_\perp \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} (\partial_r (r v_r) + \partial_\phi v_\phi)$  et la vorticité

$$R = r^2 (\nabla \times \mathbf{v})_z$$

et

$$h = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Finalement  $\tilde{\omega} = \omega - m\Omega$  est la pulsation dans le repère tournant. Les notations en  $R$  et  $D$  permettent d'identifier les ondes de Rossby et les ondes de densité respectivement mais on verra ci-dessous qu'elles sont couplées par le gradient de vorticité. Cette approche a été présentée (Tagger 2001) pour remplacer l'approximation de la couche de cisaillement<sup>1</sup> habituelle, qui ne permet pas de décrire les ondes de Rossby. Le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{cases} -i\tilde{\omega} D - 2\Omega R - 2r\Omega'(v_\phi - imv_r) = r^2 \nabla \cdot \mathbf{f} \\ -i\tilde{\omega} R + \frac{\kappa^2}{2\Omega} D + \left(\frac{\kappa^2}{2\Omega}\right)' r v_r = 0 \\ -i\tilde{\omega} v_z = f_z \\ -i\tilde{\omega} h = -\frac{D}{r_0^2} - \frac{v_r}{\rho_0} \partial_r \rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 v_z) \end{cases}$$

1. shearing sheet en anglais

où la notation ' correspond à la dérivée par rapport à la variable  $s$ . Le gradient de vorticité dans lequel une onde de Rossby peut se propager apparaît sous la forme  $\left(\frac{\kappa^2}{2\Omega}\right)'$ , on notera dans la suite  $W = \frac{\kappa^2}{2\Omega}$ . Comme on peut le voir cette approche appelée 'Rossby Shearing Sheet' ne fait pas intervenir l'approximation WKB.

#### 4.2.2 Cas bidimensionnel

Dans un premier temps, on se place dans l'approximation disque mince et l'on néglige donc tout déplacement vertical. Par ailleurs, on se place aussi maintenant dans l'approximation WKB, et l'on écrit donc la perturbation sous la forme  $e^{-i\omega t + i(k_s s + m\phi)}$ .

En remarquant que  $D = ir(k_s v_r + m v_\phi)$  et  $R = ir(k_s v_\phi - m v_r)$ , on a

$$\begin{cases} q^2 r v_r &= -ik_s D + imR \\ q^2 r v_\phi &= -imD - ik_s R \end{cases}$$

avec  $q^2 = k_s^2 + m^2$ . Et donc les équations 4.2.1 peuvent se réécrire :

$$\begin{cases} -i\tilde{\omega}D &= 2\Omega R + \frac{2\Omega'}{q^2}[-(k_s + i)mD + (m^2 - ik_s)R] + q^2 c_s^2 h \\ -i\tilde{\omega}R &= -WD + i\frac{W'}{q^2}(k_s D - mR) \\ -i\tilde{\omega}h &= -\frac{1}{r_0^2}D - i\frac{\partial_s \rho_0}{r_0^2 q^2}(-k_s D + mR) \end{cases}$$

On voit ici que si le gradient de densité et de vorticité sont nuls, on a  $h$  est proportionnel à  $R$ , ce qui réduit le système à l'ordre deux, et décrivant les ondes de densité. Alors que pour un gradient non nul de vorticité, on a bien un système d'ordre trois, décrivant les ondes de densité et l'onde de Rossby. Et en éliminant la grandeur  $h$  des équations :

$$\begin{cases} R[-i\tilde{\omega}q^2 + iW'm] &= D[-q^2W + iW'k_s] \\ D[-irq^2\tilde{\omega}^2 + 2\Omega'(k_s + i)m\tilde{\omega} + iq^4\frac{c_s^2}{r_0^2}(1 - i\frac{k_s}{q^2})Y] &= R[2q^2\Omega\tilde{\omega} + 2\Omega'(m^2 - ik_s)\tilde{\omega} + mq^2\frac{c_s^2}{r_0^2}Y] \end{cases}$$

On a introduit  $Y = \frac{1}{\rho_0}\partial_s \rho_0$  et on trouve alors la relation de dispersion

$$\begin{aligned} & [W'm - \tilde{\omega}q^2][q^2\tilde{\omega}^2 + 2i(i + k_s)m\Omega'\tilde{\omega} - q^2\frac{c_s^2}{r_0^2}(q^2 - ik_sY)] \\ &= [-q^2W + ik_sW'][2q^2\Omega\tilde{\omega} + 2(m^2 - ik_s)\Omega'\tilde{\omega} + mq^2\frac{c_s^2}{r_0^2}Y] \end{aligned}$$

C'est une relation de dispersion d'ordre trois en  $\tilde{\omega}$  et quatre en  $q^2$ , mais celle-ci peut se simplifier en fonction de la physique en jeu. Je vais donc présenter les deux cas particulier qui correspondent à l'approximation de la couche de cisaillement et celle du plan  $\beta$ , où le gradient de densité est négligé, et je donne ensuite la formule générale.

- Cas  $\Omega' = 0$  : rotation solide, c'est le cas considéré en physique atmosphérique puisque la Terre tourne en rotation solide. Il s'agit de l'approximation du plan  $\beta$ .

$$[W'm - \tilde{\omega}q^2][\tilde{\omega}^2 - q^2\frac{c_s^2}{r_0^2}] = [-q^2W + ik_sW']2\Omega\tilde{\omega}$$

Dans l'approximation WKB,  $k_s^2 \gg 1$ ,  $q^2 \gg 1$  et on obtient donc

$$[mW' - q^2\tilde{\omega}] \times -q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2} = 2\Omega\tilde{\omega} \times -q^2W$$

et en utilisant l'expression de  $W$  en fonction de  $\kappa^2$ , cela donne

$$\tilde{\omega} = \frac{mW'}{\frac{r_0^2}{c_s^2}\kappa^2 + q^2}.$$

Il s'agit de la relation de dispersion des ondes de Rossby atmosphériques. Dans le cas d'un fluide incompressible  $c_s \rightarrow \infty$  et la relation de dispersion s'écrit

$$\tilde{\omega} = \frac{mW'}{k_s^2 + m^2}$$

Cette même relation s'applique si le gradient de vorticité est tel que  $\kappa^2$  puisse être négligé. C'est cette relation de dispersion qui est utilisée dans le chapitre 3.

- Cas  $W' = 0$  : pas de gradient de vorticité. C'est le cas souvent considéré pour l'étude des disques d'accrétion en particulier dans l'approximation de la couche de cisaillement<sup>2</sup>. Dans ce cas on a :

$$[q^2\tilde{\omega}^2 + 2i(i+k)m\Omega'\tilde{\omega} - q^4 \frac{c_s^2}{r_0^2}] = W[2q^2\Omega + 2(m^2 - ik)\Omega']$$

ce qui donne dans l'approximation WKB,  $k_s^2 \gg 1$ ,  $q^2 \gg 1$

$$\begin{aligned} q^2\tilde{\omega}^2 - q^4 \frac{c_s^2}{r_0^2} &= 2q^2\Omega W = q^2\kappa^2 \\ \tilde{\omega}^2 &= \kappa^2 + q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2} \end{aligned}$$

Il s'agit de la relation de dispersion des ondes de densité dans un disque en rotation différentielle. On retrouve ici le critère de Chandrasekar dans le cas où les deux nombres d'onde sont nuls : la partie imaginaire de la pulsation est non nulle uniquement si  $\kappa^2 < 0$ . Par ailleurs on voit que les ondes sonores ne peuvent se propager qu'à l'extérieur des résonances de Lindblad :  $q^2 > 0$  pour  $\tilde{\omega}^2 - \kappa^2 > 0$ .

- Cas général

Dans l'approximation WKB,  $k_s^2 \gg 1$ ,  $q^2 \gg 1$

$$\begin{aligned} [W'm - \tilde{\omega}q^2][q^2\tilde{\omega}^2 - q^4 \frac{c_s^2}{r_0^2}] &= -q^2W(2q^2\Omega\tilde{\omega} + m \frac{c_s^2}{r_0^2}Y) \\ \tilde{\omega}(\frac{r_0^2}{c_s^2}\kappa^2 + q^2 - \frac{r_0^2}{c_s^2}\tilde{\omega}^2) &= m(W' - WY) \end{aligned}$$

A proximité de la corotation si  $\tilde{\omega} \ll \kappa$  et qu'il n'y a pas de gradient de densité, on obtient la relation de dispersion des ondes de Rossby en rotation solide. Donc les ondes de Rossby se propagent dans le gradient de vorticité tandis que les ondes de densité se propagent à l'extérieur des rayons de Lindblad.

---

2. shearing sheet en anglais

### 4.3 Onde excitée par les déplacements dans le plan du disque

Pour comprendre l'origine des rouleaux verticaux du chapitre précédent, nous avons tenté différentes approches.

La première hypothèse qui a été testée suppose que ces rouleaux verticaux sont un mode se propageant verticalement, excité par un mode 'horizontal' de la RWI. Pour tester cette hypothèse, on considère ici les termes de vitesse radiale et azimutale comme des termes sources.

On étudie l'équilibre vertical d'un disque dans un repère cylindrique  $(r, \phi, z)$ . Il n'y a que deux forces verticales, la gravité et la pression, donc à l'équilibre :

$$0 = -\rho_0 z \Omega_K^2 - \partial_z P_e = -\rho_0 g_z - \partial_z P_e$$

où  $\Omega_K$  est la fréquence keplerienne,  $g_z$  l'accélération verticale de la pesanteur. Le gaz est considéré polytropique, avec une équation d'état de la forme  $P_e = S \rho_0^\gamma$ , où  $S$  est l'entropie et  $\gamma$  l'indice adiabatique. Si le disque subit une petite perturbation telle que la densité s'écrit  $\rho_0 + \rho$  et la vitesse verticale  $v_z$ , l'équation d'Euler verticale devient

$$\tilde{\partial}_t v_z = -c_s^2 (\gamma - 1) \frac{\rho}{\rho_0^2} \partial_z \rho_0 - \frac{c_s^2}{\rho_0} \partial_z \rho$$

où l'on a retiré les quantités d'équilibre qui s'annulent.  $c_s$  est la vitesse du son. Après une transformée de Fourier, les quantités perturbées sont écrites sous la forme  $e^{-i\omega t + im\phi}$

$$-i\tilde{\omega} v_z = -c_s^2 (\gamma - 1) \frac{\rho}{\rho_0^2} \partial_z \rho_0 - \frac{c_s^2}{\rho_0} \partial_z \rho$$

avec  $\tilde{\omega} = \omega - m\Omega$ .

De même l'équation de continuité s'écrit :

$$-i\tilde{\omega} \rho = -\partial_z(\rho_0 v_z) - \partial_r(\rho_0 v_r) - im \frac{\rho_0}{r} v_\phi = -\partial_z(\rho_0 v_z) - \mathcal{S}$$

On a introduit  $\mathcal{S} = \partial_r(\rho v_r) + im \frac{\rho_0}{r} v_\phi$  qui est considéré comme un terme source pour le mouvement vertical. Les équations du mouvement radial et azimutal n'introduisent pas de couplage avec la vitesse verticale.

$$-\tilde{\omega}^2 \rho = \partial_z(c_s^2 (\gamma - 1) \frac{\rho}{\rho_0} \partial_z \rho_0 + c_s^2 \partial_z \rho) - i\tilde{\omega} \mathcal{S} \quad (4.4)$$

$$= \partial_z(c_s^2 \rho_0^{1-\gamma} \partial_z(\rho \rho_0^{\gamma-1})) - i\tilde{\omega} \mathcal{S} \quad (4.5)$$

$$-\rho_0^{\gamma-1} \tilde{\omega}^2 |\rho|^2 = \rho_0^{\gamma-1} \rho^* \partial_z(c_s^2 \rho_0^{1-\gamma} \partial_z(\rho \rho_0^{\gamma-1})) - i\tilde{\omega} \rho_0^{\gamma-1} \rho^* \mathcal{S} \quad (4.6)$$

Dans l'approximation WKB vertical ( $k_z \geq 1$ ) l'équation 4.5 sans le terme source donne  $\tilde{\omega}^2 = k_z^2 c_s^2$ , c'est à dire des ondes sonores.

On va maintenant intégrer dans la direction verticale

$$\begin{aligned}
\int_{z_i}^{z_o} -\rho_0^{\gamma-1} \tilde{\omega}^2 |\rho|^2 dz &= \int_{z_i}^{z_o} \rho_0^{\gamma-1} \rho^* \partial_z (c_s^2 \rho_0^{1-\gamma} \partial_z (\rho \rho_0^{\gamma-1})) - i \tilde{\omega} \rho_0^{\gamma-1} \rho^* \mathcal{S} dz \\
&= - \int_{z_i}^{z_o} \partial_z (\rho_0^{\gamma-1} \rho^*) c_s^2 \rho_0^{1-\gamma} \partial_z (\rho \rho_0^{\gamma-1}) dz \\
&\quad + \left[ \rho^* c_s^2 \partial_z (\rho \rho_0^{\gamma-1}) \right]_{z_i}^{z_o} - \int_{z_i}^{z_o} i \tilde{\omega} \rho_0^{\gamma-1} \rho_0^* \mathcal{S} dz \\
&= - \int_{z_i}^{z_o} c_s^2 \rho_0^{1-\gamma} |\partial_z (\rho_0^{\gamma-1} \rho)|^2 dz + \left[ \rho^* c_s^2 \partial_z (\rho \rho_0^{\gamma-1}) \right]_{z_i}^{z_o} \\
&\quad - \int_{z_i}^{z_o} i \tilde{\omega} \rho_0^{\gamma-1} \rho^* \mathcal{S} dz
\end{aligned}$$

On a obtenu une forme hermitienne qui est diagonalisable sur une base complète orthonormée avec des termes diagonaux réels. On va donc projeter sur la base des modes propres verticaux  $\rho = \sum_{n_z=0}^n a_{n_z} \rho^{n_z}$ . Les modes de nombre d'onde vertical non nul apparaissant dans l'analyse WKB, on s'intéresse ici au mode  $n_z = 0$  :

$$\begin{aligned}
|a_0|^2 \int_{z_i}^{z_o} -\rho_0^{\gamma-1} \tilde{\omega}^2 |\rho^0(z)|^2 + c_s^2 \rho_0^{1-\gamma} |\partial_z (\rho_0^{\gamma-1} \rho^0)|^2 dz \\
= |a_0|^2 \left[ \rho^{0*} c_s^2 \partial_z (\rho^0 \rho_0^{\gamma-1}) \right]_{z_i}^{z_o} - a_0^* \int_{z_i}^{z_o} i \tilde{\omega} \rho_0^{\gamma-1} \rho^{0*} \mathcal{S} dz \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Soit  $\bar{N}$  la fréquence fondamentale du mode  $n_z = 0$  (en référence à la fréquence de Brünt-Väisälä), on a par définition de cette fréquence

$$\int_{z_i}^{z_o} -\rho_0^{\gamma-1} \bar{N}^2 |\rho^0(z)|^2 + c_s^2 \rho_0^{1-\gamma} |\partial_z (\rho_0^{\gamma-1} \rho^0)|^2 dz = 0$$

et donc si on introduit  $\bar{N}$  dans l'équation 4.7, on obtient

$$\begin{aligned}
a_0 \int_{z_i}^{z_o} -\rho_0^{\gamma-1} (\tilde{\omega}^2 - \bar{N}^2) |\rho^0(z)|^2 dz &= a_0 \underbrace{\left[ \rho^{0*} c_s^2 \partial_z (\rho^0 \rho_0^{\gamma-1}) \right]_{z_i}^{z_o}}_{cte} \\
&\quad - \int_{z_i}^{z_o} i \tilde{\omega} \rho_0^{\gamma-1} \rho^{0*} \mathcal{S} dz
\end{aligned}$$

Le disque étant symétrique par rapport au plan  $z = 0$ , si on choisit les bornes d'intégration telles que  $z_i = -z_o$ , la constante est nulle. Au rayon où il existe  $z$  tel que  $\tilde{\omega}^2 = \bar{N}^2$ , et à l'angle où le terme source est non nul (au niveau du tourbillon) l'amplitude du mode diverge. On remarque que le taux de croissance finie de l'instabilité va élargir le spectre en fréquence de l'instabilité et donc élargir l'intervalle de rayon sur lequel l'amplitude  $a_0$  diverge.

Dans les simulations du chapitre précédent, le disque est adiabatique, cela signifie que la fréquence de Brünt-Väisälä est nulle, il n'y a donc pas de divergence. . .

#### 4.4 Structure verticale

Dans une deuxième tentative de description analytique des rouleaux verticaux, nous avons considéré la structure verticale du mode RWI. Dans la partie précédente, tous les déplacements dans le plan du disque apparaissaient uniquement



comme un terme source. Dans cette partie, on reprend les équations de la partie 4.2.1 mais on prend en compte les mouvements verticaux. On peut écrire la force verticale  $f_z$  sous les formes suivantes

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{h}{\rho_0} \partial_z \left( \frac{c_s^2 \rho_0}{\gamma} \right) - \frac{1}{\rho_0} \partial_z (c_s^2 \rho_0 h) \\ &= (\gamma - 1) g_z h - c_s^2 \partial_z h \end{aligned}$$

On néglige par la suite la dérivée de vitesse angulaire, de la densité et de la vorticité  $\frac{\kappa^2}{2\Omega}$  par rapport à  $s$  et avec  $q^2 = k_s^2 + m^2$  :

$$-i\tilde{\omega}D - 2\Omega R = q^2 h c_s^2 \quad (4.8)$$

$$-i\tilde{\omega}R + \frac{\kappa^2}{2\Omega} D = 0 \quad (4.9)$$

$$-i\tilde{\omega}v_z = f_z \quad (4.10)$$

$$-i\tilde{\omega}h = -\frac{D}{r_0^2} - \frac{1}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 v_z) \quad (4.11)$$

4.8 et 4.9 donnent

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega}^2 D + \kappa^2 D &= -i\tilde{\omega} q^2 c_s^2 h \\ \Leftrightarrow (\tilde{\omega}^2 - \kappa^2) D &= i\tilde{\omega} q^2 c_s^2 h \end{aligned}$$

en remplaçant D dans 4.11 :

$$\begin{aligned} -i\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2)h &= -i\tilde{\omega} q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2} h - \frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 v_z) \\ \Leftrightarrow -i\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2 - q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2})h &= -\frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 v_z) \\ \Leftrightarrow \tilde{\omega}^2(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2 - q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2})h &= \frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} \partial_z (-i\tilde{\omega} \rho_0 v_z) \\ \Leftrightarrow \tilde{\omega}^2(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2 - q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2})h &= \frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 f_z) \end{aligned}$$

C'est à partir de cette dernière équation et du calcul de  $f_z$  que l'on déterminera la structure des modes.

On va chercher à déterminer cette structure verticale dans différents cas :

- le cas où il n'y a pas de stratification verticale pour comparer au cas bidimensionnel
- le cas isotherme puisque plusieurs études de la RWI ont été faites dans ce cas-là
- et finalement le cas général.

#### 4.4.1 Cas sans stratification verticale de $\rho_0$

Dans ce cas, il n'y a pas de gradient vertical de densité et la force de pression verticale est  $f_z = -\frac{1}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 h c_s^2)$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^2(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2 + q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2})h &= -\frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} \partial_z^2 (\rho_0 h c_s^2) \\ \tilde{\omega}^2 \left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{q^2}{r_0^2(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2)} \right) \rho_0 h c_s^2 &= -\partial_z^2 (\rho_0 h c_s^2) \end{aligned}$$

Le milieu étant infini dans la direction verticale, on peut utiliser l'approximation WKB dans la direction verticale :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^2(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2 + q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2}) &= (\tilde{\omega}^2 - \kappa^2) k_z^2 c_s^2 \\ \frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2 + q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2}}{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2} &= \frac{k_z^2 c_s^2}{\tilde{\omega}^2}\end{aligned}$$

Pour  $k_z$  nul on retrouve bien la relation de dispersion obtenue en deux dimensions dans le cas sans gradient de vorticité.

#### 4.4.2 Cas isotherme

Dans ce cas le coefficient isentropique  $\gamma$  est égal à l'unité et la vitesse du son est constante donc la force verticale de pression est

$$f_z = -c_s^2 \partial_z h = -\partial_z c_s^2 h$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^2(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2 + q^2 \frac{c_s^2}{r_0^2}) h &= -\frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 \partial_z c_s^2 h) \\ &= -\frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} (\rho_0 c_s^2 \partial_z^2 h + c_s^2 \partial_z \rho_0 \partial_z h) \\ &= -(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2) (c_s^2 \partial_z^2 h - g_z \partial_z h) \\ \tilde{\omega}^2 \left( \frac{1}{c_s^2} + \frac{q^2}{r_0^2 (\tilde{\omega}^2 - \kappa^2)} \right) h &= -\partial_z^2 h + \frac{g_z}{c_s^2} \partial_z h\end{aligned}$$

#### 4.4.3 Cas général

On se place dans le cas général sans supposer d'équation d'état pour le gaz. On définit la grandeur notée  $c_s$  ainsi

$$c_s^2(z) = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

L'équilibre hydrostatique est le suivant :

$$\partial_z p_0 = \rho_0 g(z)$$

On considère maintenant que le disque est perturbé sur une échelle de temps courte devant l'échelle de temps des échanges thermiques. La perturbation est donc considérée adiabatique :

$$\begin{aligned}d_t S &= 0 \\ \text{avec } S &= (p_0 \rho_0^{-\gamma})\end{aligned}$$

où  $p_0$ ,  $\rho_0$  sont la pression et la densité totales. En linéarisant cette équation au premier ordre on obtient

$$\begin{aligned}\rho_0^{-\gamma} \partial_t p - \gamma p_0 \rho_0^{-\gamma-1} \partial_t \rho + v_z \partial_z S_0 &= 0 \\ \longrightarrow -i\tilde{\omega} p + i\tilde{\omega} c_s^2 \rho + \rho_0^\gamma v_z \partial_z S_0 &= 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

où  $p$  et  $\rho$  sont les perturbations.

Les équation d'Euler et de continuités linéarisées donnent

$$-i\tilde{\omega}v_z = -\frac{1}{\rho_0}\partial_z p + \frac{\rho}{\rho_0^2}\partial_z p_0 \quad (4.13)$$

$$-i\tilde{\omega}\rho = -\partial_z(\rho_0 v_z) \quad (4.14)$$

En introduisant 4.14 dans 4.12, on obtient

$$-i\tilde{\omega}p = -c_s^2\partial_z(\rho_0 v_z) - \rho_0^\gamma v_z \partial_z S_0 \quad (4.15)$$

Et maintenant on réintroduit 4.14 et 4.15 dans 4.14 :

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega}^2 \rho_0 v_z &= \partial_z c_s^2 \partial_z(\rho_0 v_z) + \partial_z(\rho_0^\gamma v_z \partial_z S_0) - (\partial_z \rho_0) \frac{1}{\rho_0} \partial_z(\rho_0 v_z) \\ &= \partial_z c_s^2 \partial_z(\rho_0 v_z) + [\rho_0^\gamma \partial_z S_0 - \partial_z \rho_0] \partial_z v_z \\ &\quad + v_z \left[ \partial_z(\rho_0^\gamma \partial_z S_0) - \partial_z(\rho_0) \frac{1}{\rho_0} \partial_z(\rho_0) \right] \\ &= \partial_z c_s^2 \partial_z(\rho_0 v_z) - [c_s^2 \partial_z \rho_0] \partial_z v_z \\ &\quad + v_z \left[ \partial_z(\partial_z \rho_0 - c_s^2 \partial_z \rho_0) - \partial_z(\rho_0) \frac{1}{\rho_0} \partial_z(\rho_0) \right] \end{aligned}$$

En utilisant 4.4.3, on obtient

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega}^2 \rho_0 v_z &= \partial_z [c_s^2 \partial_z(\rho_0 v_z)] - [c_s^2 \partial_z \rho_0] \partial_z v_z \\ &\quad + v_z [\rho_0 \partial_z g - \partial_z(c_s^2 \partial_z \rho_0)] \end{aligned}$$

On vérifie facilement qu'il y a toujours une solution où la vitesse verticale est constante. Celle-ci donne  $\tilde{\omega}^2 = -\partial_z g$  qui est une constante dans notre cas ( $z \ll r$ ). Cela correspond alors à une onde de gauchissement.

Pour pouvoir dans la suite comparer cette étude analytique avec les résultats numériques, on définit  $Q = \rho_0 v_z$

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega}^2 Q &= c_s^2 \partial_z^2 Q + \partial_z c_s^2 \partial_z Q - c_s^2 \partial_z \rho_0 \left[ \frac{1}{\rho_0} \partial_z Q - \frac{Q}{\rho_0^2} \partial_z \rho_0 \right] + Q \left[ \partial_z g - \frac{1}{\rho_0} \partial_z(c_s^2 \partial_z \rho_0) \right] \\ &= c_s^2 \partial_z^2 Q + \left[ \partial_z c_s^2 - \frac{c_s^2}{\rho_0} \partial_z \rho_0 \right] \partial_z Q + \left[ \frac{c_s^2}{\rho_0^2} (\partial_z \rho_0)^2 - \frac{1}{\rho_0} \partial_z(c_s^2 \partial_z \rho_0) + \partial_z g \right] Q \end{aligned}$$

D'après les équations d'équilibre on a

$$\begin{aligned} \rho_0 g &= \partial_z p_0 = \frac{1}{\gamma} \partial_z(\rho_0 c_s^2) = \frac{\rho_0}{\gamma} \partial_z c_s^2 + \frac{c_s^2}{\gamma} \partial_z \rho_0 \\ (\gamma - 1) \partial_z g &= \partial_z^2 c_s^2 + \frac{1}{\rho_0} \partial_z(c_s^2 \partial_z \rho_0) - \frac{c_s^2}{\rho_0^2} (\partial_z \rho_0)^2 \end{aligned}$$

ce qui simplifie l'équation précédente :

$$-\tilde{\omega}^2 Q = c_s^2 \partial_z^2 Q + (2\partial_z c_s^2 - \gamma g) \partial_z Q + \left[ \partial_z^2 c_s^2 + (1 - \gamma) \partial_z g \right] Q \quad (4.16)$$

C'est cette équation qui sera utilisée pour comparer aux résultats numériques.

## 4.5 Comparaison avec les simulations numériques

### 4.5.1 Code de tir

Le dernier cas présenté correspond aux simulations présentées dans cette thèse, mais pour pouvoir comparer les études analytique et numérique il faut résoudre l'équation différentielle 4.16. On réécrit cette équation :

$$\begin{aligned}\partial_z^2 Q + a\partial_z Q + [e - \tilde{\omega}^2]Q &= 0 \\ Q &= \rho_0 v_z \\ a &= (2\partial_z c_s^2 - \gamma g) \\ e &= [\partial_z^2 c_s^2 + (1 - \gamma)\partial_z g]\end{aligned}$$

Cette résolution a été faite numériquement à l'aide d'un code de tir<sup>3</sup>. Cette méthode de résolution d'une équation différentielle à une dimension peut s'appliquer lorsque l'on connaît les conditions aux limites recherchées. Le principe est le suivant : la valeur de la fonction est fixée à un bord et l'on choisit une valeur de la pente au bord. L'équation est alors résolue avec une méthode classique pas à pas (comme Runge-Kutta) jusqu'à obtenir la valeur à l'autre bord. Ce schéma est alors réitéré autant de fois que nécessaire en changeant le paramètre de tir par dichotomie pour s'approcher le plus possible de la condition au bord externe attendue.

Pour ce code, le paramètre de tir choisi est la valeur de la fréquence  $\tilde{\omega}^2$ .

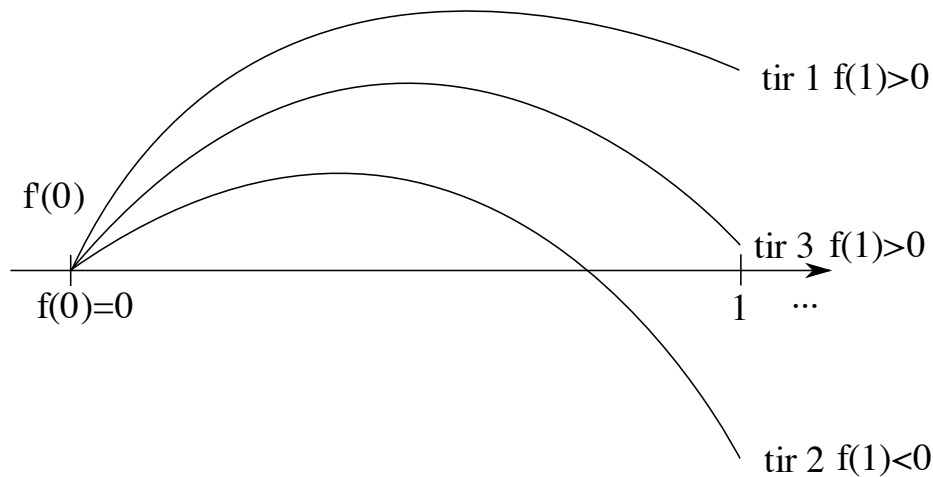


Figure 4.4 – Principe d'un 'shooting code'. Dans le cas présenté sur cette figure c'est la valeur de la pente à l'origine qui est modifiée par dichotomie de manière à atteindre la valeur de la fonction voulue au bord externe (zéro).

3. plus connu sous le nom anglais shooting code

### 4.5.2 Comparaison

Le code de tir permet d'obtenir l'amplitude des modes vérifiant les conditions aux bords ainsi que leur pulsation  $\omega$ . L'objectif étant d'expliquer les simulations, seul le mode  $n_z = 1$  a été étudié. Dans un premier temps nous avons comparé l'amplitude des modes obtenus avec le code de tir et la simulation. La figure 4.5 montre que les deux études donnent des résultats comparables.

Le code de tir donne aussi une pulsation  $\tilde{\omega}^2 = 0.27\Omega(r_i)$ . Si l'on compare avec la simulation on voit que cela ne correspond absolument pas. En effet en prenant  $\omega = \Omega(r_c)$ , on a tracé  $\tilde{\omega}^2 = (\Omega(r_c) - \Omega(r))^2$  en fonction du rayon et l'on peut voir sur la figure 4.6 que la valeur  $0.27\Omega(r_i)$  n'est atteinte que très proche du bord interne. Cette analyse permet donc de conclure que les rouleaux verticaux ne sont pas un mode vertical excité par résonance (Figure 4.6).

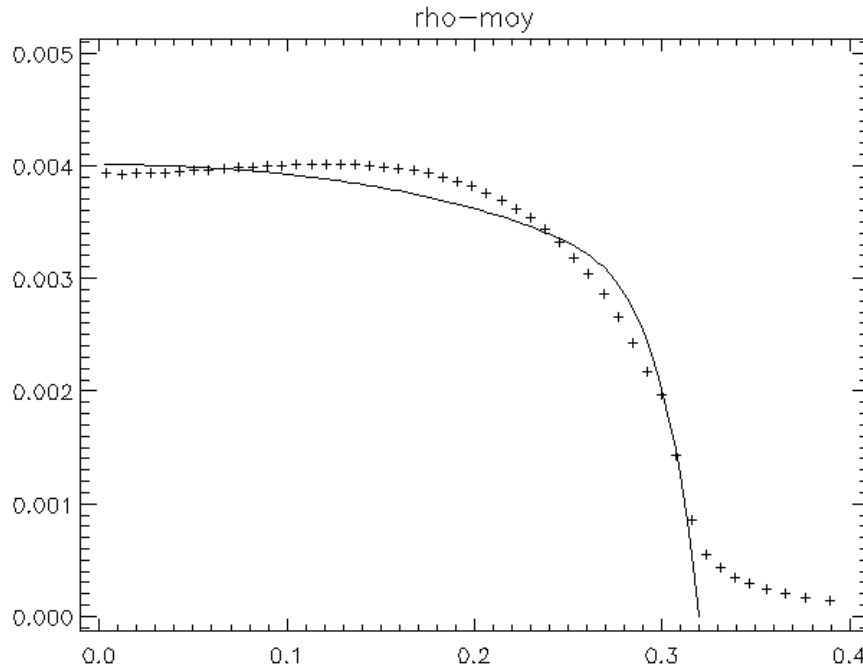


Figure 4.5 – Les croix sont les points obtenus avec la simulation numérique au temps  $t = 136/\Omega_K(r_i)$  et au rayon  $r = 2.8r_i$ . La courbe continue est le résultat du shooting code dans le cas isentropique avec une borne supérieure à  $z_{max} = 0.32$

## 4.6 Analyse WKB radiale

La troisième tentative de description analytique des rouleaux verticaux fut de faire une approximation WKB radiale en considérant que les grandeurs d'équilibre varient peu dans cette direction. A partir des équations 4.3, on trouve

$$\begin{cases} (-\kappa^2 + \tilde{\omega}^2)v_r &= \tilde{\omega}khc_s^2 + \frac{2im}{r}\Omega hc_s^2 + i\tilde{\omega}hc_s^2\partial_r \ln \rho_0 \\ (-\kappa^2 + \tilde{\omega}^2)v_\phi &= -ikWc_s^2h + \frac{m}{r}\tilde{\omega}hc_s^2 + hc_s^2W\partial_r \ln \rho_0 \\ -i\tilde{\omega}v_z &= -S\gamma\partial_z(h\rho_0^{\gamma-1}) \\ -i\tilde{\omega}h &= (-ikv_r - i\frac{m}{r}v_\phi) - \frac{1}{\rho_0}\partial_z(\rho_0v_z) \end{cases}$$

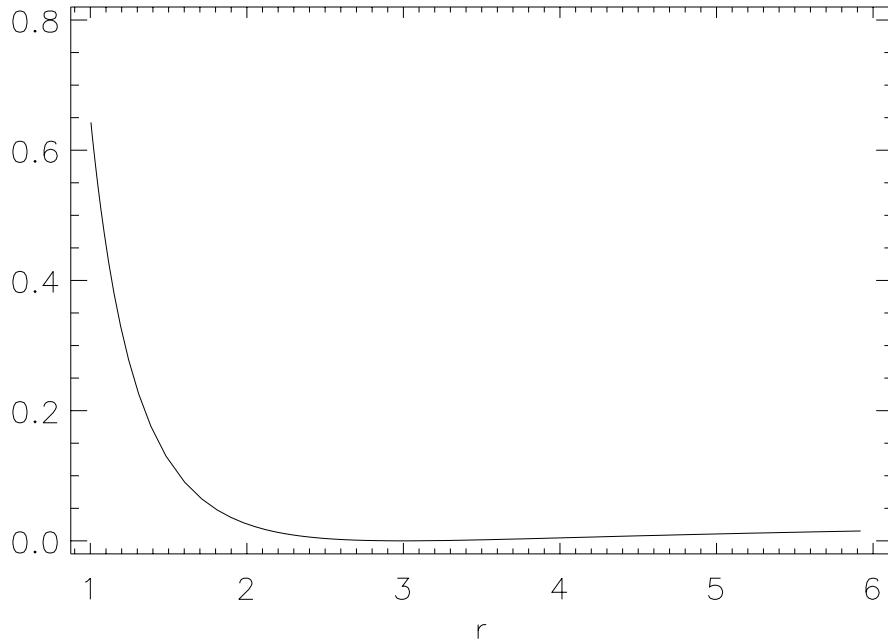


Figure 4.6 – Valeur de  $\tilde{\omega}^2$  en fonction du rayon.

ou encore,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\omega}^2 - \kappa^2)\tilde{\omega}h &= \tilde{\omega}k^2hc_s^2 + 2ik\frac{m}{r}\Omega hc_s^2 + i\tilde{\omega}khc_s^2\partial_r \ln \rho_0 - i\frac{m}{r}kWhc_s^2 \\
 &\quad + \frac{m^2}{r^2}\tilde{\omega}hc_s^2 + \frac{m}{r}hc_s^2W\partial_r \ln \rho_0 - \frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0}\partial_z \left[ \rho_0 \frac{S}{\tilde{\omega}} \gamma \partial_z (h\rho_0^{\gamma-1}) \right] \\
 &= \left( k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{\omega}c_s^2h + ikm2\partial_r\Omega hc_s^2 + \left( i\tilde{\omega}k + \frac{m}{r}W \right) hc_s^2\partial_r \ln \rho_0 \\
 &\quad - \frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} \partial_z \left[ \rho_0 \frac{S}{\tilde{\omega}} \gamma \partial_z (h\rho_0^{\gamma-1}) \right]
 \end{aligned}$$

On se place maintenant à proximité de la corotation qui correspond à l'extremum de densité  $\rho_0$ , donc le gradient de densité  $\partial_r \rho_0$  est nul et de même que celui de vitesse angulaire. L'équation précédente devient :

$$(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2)\tilde{\omega}h = \left( k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{\omega}c_s^2h - \frac{\tilde{\omega}^2 - \kappa^2}{\rho_0} \partial_z \left[ \rho_0 \frac{S}{\tilde{\omega}} \gamma \partial_z (h\rho_0^{\gamma-1}) \right]$$

où encore

$$q^2 = \frac{(\tilde{\omega}^2 - \kappa^2)}{c_s^2} \left[ 1 + \frac{S\gamma}{\rho_0\tilde{\omega}^2h} \partial_z \left[ \rho_0 \partial_z (h\rho_0^{\gamma-1}) \right] \right]$$

A proximité de la corotation  $\tilde{\omega} = 0$ , le deuxième terme du membre de droite de cette équation domine.

A un rayon donné,  $q^2$  est fixé, donc un moyen de vérifier si cette approche est correcte, est de tracer la valeur de la fonction  $\frac{1}{\rho} \partial_z \left[ \rho_0 \partial_z (h\rho_0^{\gamma-1}) \right]$  en fonction de l'altitude à la corotation dans la simulation et de vérifier si l'on obtient une courbe approximativement constante.

La figure 4.7 démontre que cette grandeur n'est absolument pas constante et donc que l'approche WKB radial n'est pas non plus adapté pour cette étude.

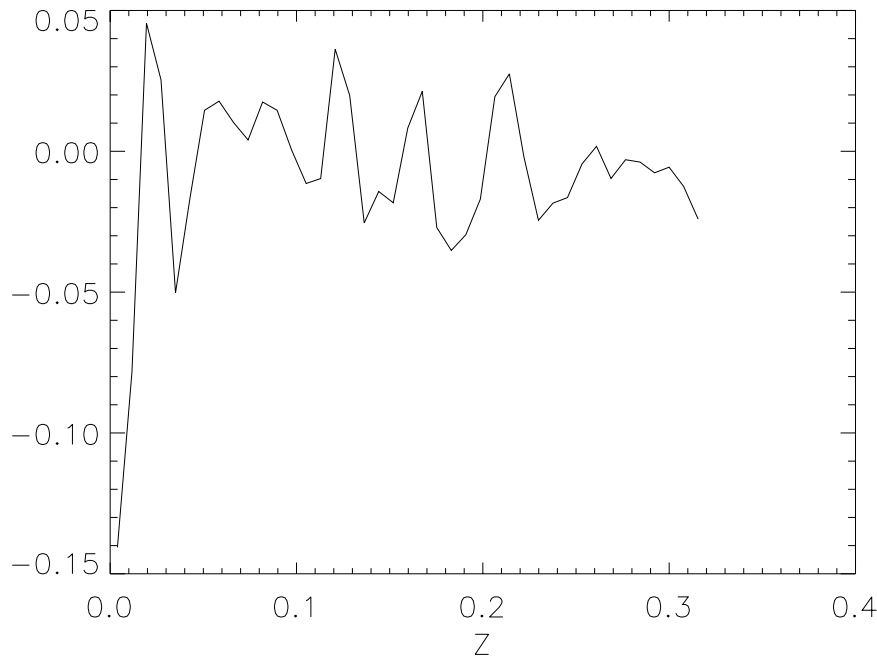


Figure 4.7 –  $\frac{1}{\rho} \partial_z [\rho_0 \partial_z (h \rho_0^{\gamma-1})]$  en fonction de  $z$

## Discussion

Ce chapitre sur l'étude analytique de la RWI a permis de mettre en évidence toute la complexité de l'instabilité tridimensionnelle. Une étude analytique aurait permis de discuter en détail les propriétés du mode, notamment le couplage entre les mouvements horizontaux et verticaux, ainsi que le rôle des rouleaux verticaux dans la croissance du mode et le transport du moment cinétique. En effet, ceux-ci apparaissent dans la région intermédiaire où les ondes de Rossby ne se propagent plus mais où il n'y a pas encore d'onde de densité et peuvent donc servir de relais entre ces deux types d'ondes.

La première approche proposée pour comprendre la structure verticale de l'instabilité fût de considérer qu'il s'agissait d'un mode vertical avec un nombre d'onde vertical nul  $n_z = 0$ . Ce mode correspond à la fréquence de Brünt-Väisälä qui est nulle dans le cas présent puisque le gaz évolue de manière isentropique. Nous avons alors cherché s'il pouvait s'agir de mode vertical à plus haut nombre d'onde mais les fréquences obtenues ne coïncident pas avec la simulation. Finalement en faisant une étude WKB en rayon, nous avons montré que cette approche n'était pas adaptée. Toutes ces approches approximatives se traduisaient par une séparation de la résolution radiale et de la résolution verticale et leur échec montre que la physique de cette instabilité est pleinement tridimensionnelle.

L'étude de l'instabilité par ondes de Rossby doit par conséquent être faite de manière pleinement tridimensionnelle. Cela ne peut pas se faire par une étude purement analytique, une résolution numérique tridimensionnelle des équations de l'hydrodynamique est nécessaire. L'une de ces approches consiste à linéariser les équations avant de les résoudre numériquement ce

qui permet d'étudier la phase linéaire de l'instabilité. La deuxième approche prend en compte l'ensemble des équations hydrodynamiques avec les termes non-linéaires. C'est ce qui a été fait dans l'étude présentée dans le chapitre 3 qui, comme on l'a vu, permet non seulement de bien caractériser la phase linéaire mais aussi de décrire la saturation. Il n'est donc pas nécessaire de développer une méthode numérique linéarisée spécifique.

Une autre méthode d'étude de la structure verticale des disques a été développée pour l'étude des disques galactiques. En effet des structures verticales ont été observées dans certaines galaxies dans les régions de la corotation. Cet épaississement du disque fait ressembler la galaxie à une coque de cacahuète et on les nomme donc galaxies cacahuètes. La figure 4.8 en montre un exemple. Cette structure verticale a été étudiée dans une description cinétique, pour un disque d'étoiles (Combes et Sanders 1981, Combes et al. 1990, Athanassoula 2008).

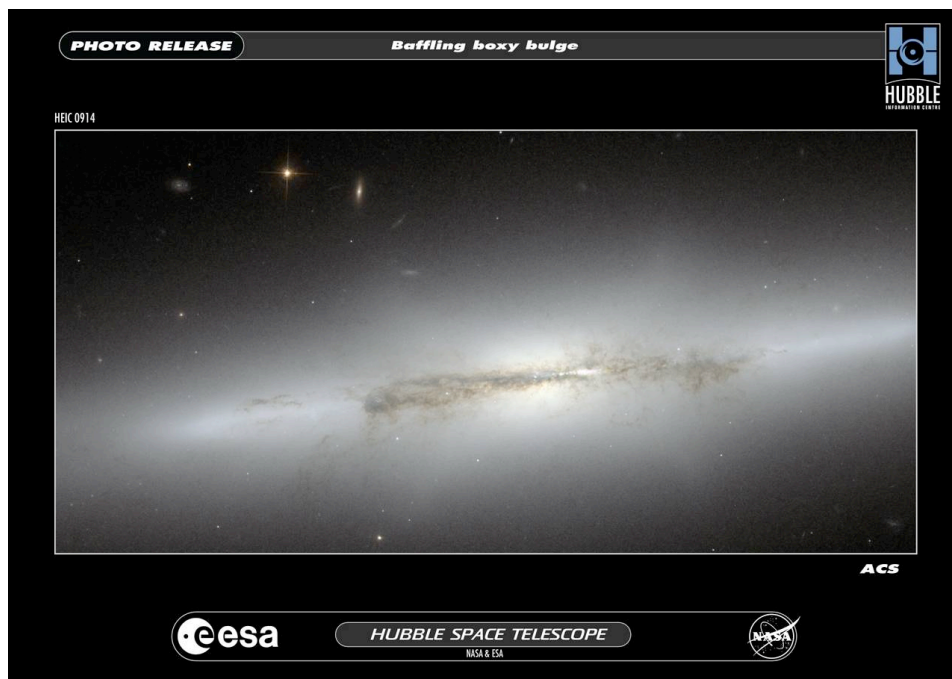


Figure 4.8 – Exemple de galaxie cacahuète. (ESA/NASA)



# Rôle de l'instabilité par ondes de Rossby dans la formation planétaire

## SOMMAIRE

INTRODUCTION . . . . .	123
5.1 MÉCANISME DE FORMATION PLANÉTAIRE . . . . .	123
5.1.1 Instabilité gravitationnelle . . . . .	125
5.1.2 Collisions . . . . .	126
5.1.3 Temps caractéristiques . . . . .	126
5.1.4 Rôle de l'instabilité par ondes de Rossby . . . . .	127
5.2 MODÉLISATION DES POUSSIÈRES ET DES GRAINS . . . . .	129
5.2.1 Modélisation bi-fluide . . . . .	129
5.2.2 Force de traînée . . . . .	131
5.2.3 Dérive radiale et sédimentation . . . . .	131
5.3 PREUVE DE PRINCIPE . . . . .	133
5.3.1 Concentration de poussières dans les structures tridimensionnelles . . . . .	134
5.3.2 Code bi-fluide . . . . .	134
5.3.3 Résultats numériques . . . . .	135
DISCUSSION ET PERSPECTIVES . . . . .	137

Dans ce chapitre, je présente la physique des disques dans le cas particulier des disques protoplanétaires, une de leurs caractéristiques étant la présence de particules solides dont la croissance est à l'origine des planètes. Les scénarios de formation planétaire ne sont pas encore intégralement compris, mais les grandes lignes sont présentées dans la première partie. La deuxième partie porte sur les méthodes utilisées pour modéliser l'interaction entre le gaz et les particules solides de petite taille. La troisième partie concerne le rôle que la RWI peut jouer sur la formation des planétésimaux.



## Introduction

La question de la formation des planètes est un ancien problème qui persiste toujours. La compréhension de ce phénomène a une histoire riche en rebondissements et dernièrement la découverte de nombreuses planètes extra-solaires a permis d'apporter de nouvelles contraintes sur les différents scénarios.

Descartes déjà avait proposé un mécanisme de formation des planètes au sein de tourbillons géants qui se développeraient dans l'éther (Descartes 1644). Cette idée a rapidement été considérée comme 'loufoque' et les tourbillons ont disparu des théories de formation planétaire jusqu'à la fin du  $XX^{me}$  siècle. Les premières théories modernes ont fait intervenir soit un événement catastrophique comme une comète (Buffon (1749), Jeans, ...) soit une évolution lente au sein d'une nébuleuse aplatie (Kant 1755, Laplace 1796). Cette idée permettait d'expliquer la disposition des planètes dans un plan autour du Soleil (l'écliptique). C'est cette dernière famille de théories qui a été confirmée par les observations de disques autour des étoiles jeunes et dont les principales idées sont toujours utilisées.

## 5.1 Mécanisme de formation planétaire

La formation des planètes s'effectue en plusieurs étapes pour passer de poussières de l'ordre du micromètre que l'on trouve dans le gaz interstellaire à des planètes de la taille de la Terre ou de Jupiter. Cette évolution est probablement similaire pour les différents types de planètes et ce n'est que dans la phase finale qu'une distinction se fait entre planètes telluriques (comme la Terre, Mercure, Venus ou Mars) et planètes gazeuses (comme Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune).

**Des poussières aux grains** Lors de la formation du disque d'accrétion autour de la proto-étoile (voir le paragraphe 1.1.2), la poussière n'est pas soumise à la force de pression du gaz et tombe donc sous l'effet de la gravité sur le plan médian du disque. Lors de cette chute, les plus grosses particules de poussières tombent plus vite et agglomèrent les plus petites particules qu'elles croisent sur leur chemin. C'est par cette agglomération que les poussières peuvent croître jusqu'à une taille de l'ordre du centimètre.

**Des grains aux planétésimaux** La croissance ultérieure des grains pour atteindre le kilomètre de rayon n'est pas encore bien comprise. Plusieurs scénarios ont été proposés dont principalement la croissance par instabilité gravitationnelle ou la croissance par collision. Ces deux scénarios seront développés dans la section suivante. C'est lors de cette phase que la RWI peut jouer un rôle important.

**Des planétésimaux aux protoplanètes** Cette phase de la formation des planètes a été la plus étudiée depuis les trente dernières années. Lorsque le disque est constitué de planétésimaux, celui-ci est froid. Cela signifie que la vitesse d'agitation des planétésimaux est faible. Lors d'une collision inélastique, la vitesse relative des deux planétésimaux peut être suffisamment faible pour qu'ils restent en interaction gravitationnelle et finissent

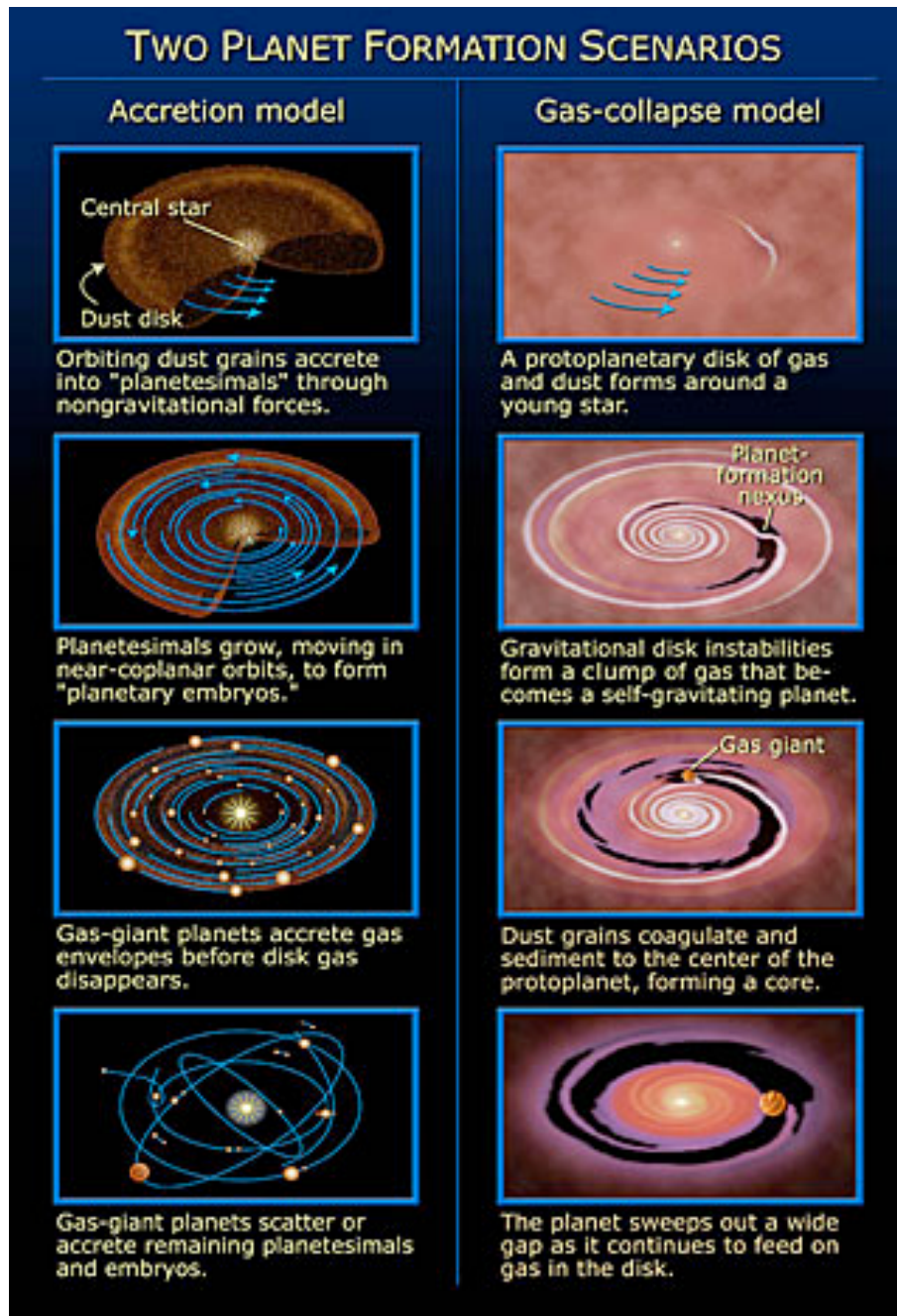


Figure 5.1 – Les deux modèles de formation planétaire (NASA/ESA, A. Feild)

par coalescer. Ces collisions initient alors un effet boule de neige : plus les planétésimaux sont massifs plus ils vont attirer les plus petits par effet gravitationnel. On peut alors atteindre des tailles de l'ordre du millier de kilomètres. Cet effet se poursuivra jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de planétésimaux à proximité de la protoplanète.

**Et finalement, des planètes telluriques** La dernière étape de formation des planètes telluriques est la plus violente. Les protoplanètes ayant vidé leur entourage, le seul moyen de continuer à accumuler de la matière est de faire intervenir des collisions entre ces protoplanètes. Celles-ci sont suffisamment massives pour interagir gravitationnellement ce qui modifie leur excentricité jusqu'à collision. Cela permet aux protoplanètes d'accréter les fragments formés suite à la collision.

**Le cas des planètes gazeuses** Deux mécanismes s'opposent pour la formation des planètes gazeuses : elles se sont soit formées par effondrement gravitationnel (Boss 1997) dans le disque de gaz avant d'accréter des planétésimaux, soit à l'inverse, elles se sont formées comme les planètes telluriques mais elles ont ensuite capturé du gaz du disque pour former une atmosphère.

Dans les deux paragraphes suivants, je reviens sur les deux mécanismes considérés pour la formation des planétésimaux, une présentation plus détaillée peut être trouvée dans Youdin (2008), Cassen (2006).

### 5.1.1 Instabilité gravitationnelle

La majeure partie des objets astrophysiques comme les structures cosmologiques ou les étoiles s'est formée par instabilité gravitationnelle. Par conséquent cette instabilité a été naturellement proposée dans le cas de la formation de planètes. J'ai déjà évoqué le cas de la formation des planètes gazeuses mais cette instabilité est parfois aussi invoquée pour la croissance des grains en planétésimaux (Safronov 1969, Goldreich et Ward 1973). L'instabilité se développe lorsque le critère de Toomre est vérifié (Shu 1992)

$$Q_T \equiv \frac{v_p \kappa}{\pi G \Sigma} < 1 \quad (5.1)$$

où  $v_p$  est la vitesse d'agitation des grains,  $G$  la constante de gravitation et  $\Sigma$  la densité de surface. On voit que la pression ( $v_p$ ) et la force de rappel épicyclique ( $\kappa$ ) sont stabilisantes, alors que la masse ( $\Sigma$ ) est déstabilisante. La longueur d'onde la plus instable étant

$$\lambda_T = \frac{2\pi^2 G \Sigma}{\Omega^2}$$

Par ailleurs l'instabilité est renforcée par la friction entre les particules et le gaz. Cependant la présence de turbulence dans le disque empêche la décantation et donc la concentration des grains dans le plan médian, le critère de l'instabilité n'est donc probablement pas vérifié. A l'inverse Youdin et Goodman (2005) ainsi que Johansen et al. (2007) ont montré que l'instabilité de 'streaming' peut permettre la concentration des grains dans le plan médian et l'on verra plus loin que c'est aussi le cas des tourbillons de l'instabilité de Rossby.

### 5.1.2 Collisions

Un mécanisme de croissance des grains plus fréquemment invoqué, propose que les collisions permettent l'agrégation des grains. La principale difficulté posée par ce mécanisme est d'éviter la destruction des grains lors de ces collisions mais de permettre leur collage. Pour cela il est nécessaire qu'une large fraction de l'énergie cinétique soit dissipée lors de la collision. Ces conditions nécessitent entre autres des vitesses d'agitation faibles et semblent trop difficiles à réunir pour expliquer la formation des planétésimaux uniquement par collisions. La question de la formation de ces planétésimaux reste par conséquent toujours ouverte.

### 5.1.3 Temps caractéristiques

Le problème de la formation des planétésimaux est un problème d'échelle de temps entre les différents phénomènes qui rentrent en ligne de compte. Les principales échelles de temps sont donc résumées ici (voir Youdin (2008) et Rein et al. (2010) pour plus de détails).

#### Echelles de temps d'évolution du disque

- L'âge des disques présentant des planétésimaux montre que ceux-ci doivent se former en un temps de l'ordre du million d'années.
- L'une des échelles de temps les plus contraignantes est celle due à la migration des grains par friction avec le gaz. En effet pour des grains de l'ordre du mètre à distance de l'objet central d'une unité astronomique, cette migration vers l'étoile peut se faire en une centaine d'années (Weidenschilling 1977). Il faut donc trouver un moyen pour dépasser cette barrière du mètre. La présence de tourbillons empêchant cette migration peut être une solution.

#### Echelles de temps des processus physiques

**Temps de rotation** Il s'agit du temps pris par les particules pour effectuer une orbite autour de l'étoile :

$$\tau_K = 2\pi\Omega_K^{-1}$$

Dans le cas d'une rotation keplerienne, ce temps est égal au temps épicyclique c'est à dire au temps d'oscillation radiale.

**Temps de collision** Temps moyen entre deux collisions :

$$\tau_c = (\sigma v_p \rho_p)^{-1}$$

où  $\sigma$  est la section efficace de collision et  $\rho_p$  le nombre de particules par unité de volume. Pour des particules de la taille du mètre, cela donne un temps de collision de quelques temps de rotation.

**Temps d'arrêt** Il s'agit du temps caractéristique  $\tau_f$  sur lequel jouent les forces de friction avec le gaz :

$$\mathbf{F}_t = m_p / \tau_f (\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_p)$$

où  $m_p$  est la masse des particules,  $\mathbf{v}_g$  et  $\mathbf{v}_p$  sont les vitesses du gaz et des particules.

#### 5.1.4 Rôle de l'instabilité par ondes de Rossby

La présence de tourbillons dans les études analytiques et numériques des disques d'accrétion a été cherchée activement car ceux-ci peuvent aider à résoudre certains des problèmes actuels de la formation de planètes. Dans un tourbillon anticyclonique (tournant en sens inverse du disque), le cisaillement local induit une force sur la poussière vers le centre du tourbillon (Barge et Sommeria 1995, Tanga et al. 1996, Bracco et al. 1999, Johansen et al. 2004) permettant ainsi la concentration de celle-ci. Par ailleurs Klahr et Bodenheimer (2003) ont proposé que le centre du tourbillon soit moins turbulent (comme l'oeil d'un cyclone) et limite la fragmentation des grains.

Cependant un tourbillon dans un disque en rotation différentielle est déchiré par celle-ci et ne devrait pas survivre plus d'une orbite, à moins qu'une instabilité soit à l'origine du tourbillon et le régénère en permanence. L'instabilité baroclinique globale (Klahr et Bodenheimer 2003, Klahr 2004) et sous critique (Lesur et Papaloizou 2009) qui se développe en présence d'un gradient radial d'entropie mais aussi l'instabilité magnéto-rotationnelle (Fromang et Nelson 2005) ont été proposées pour cette application. La principale limite de ces instabilités est qu'elles ne permettent pas en général d'obtenir un tourbillon stable sur une durée suffisante. Une revue des études sur les tourbillons dans les disques d'accrétion est donnée dans Heng et Kenyon (2010).

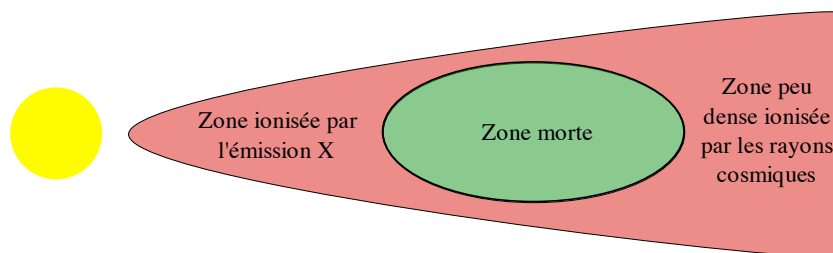


Figure 5.2 – Schéma d'une coupe verticale de la zone morte : les zones rouges sont ionisées tandis que la zone verte est neutre.

C'est ainsi que l'instabilité par onde de Rossby présentée au chapitre 3 a été utilisée dans le cadre de la formation de planètes. Varnière et Tagger (2006) ont montré que les conditions pour que la RWI se développe étaient vérifiées au bord de la zone morte<sup>1</sup> des disques protoplanétaires. On appelle zone morte la région du disque qui n'est ionisée ni par les collisions, ni par le vent de l'étoile ou les cosmiques (Figure 5.2), et sur laquelle le champ magnétique n'a alors pas d'effet. L'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI), généralement invoquée pour expliquer l'accrétion dans les disques ne peut par conséquent pas agir dans cette zone. Il y a cependant accrétion de part et d'autre de la zone morte et le gaz s'accumule alors à son bord externe formant une surdensité et donc un extremum de vortensité. Inaba et Barge (2006) et Lyra et al. (2009) ont montré que des particules sont effectivement piégées suite à cette instabilité.

1. dead-zone en anglais

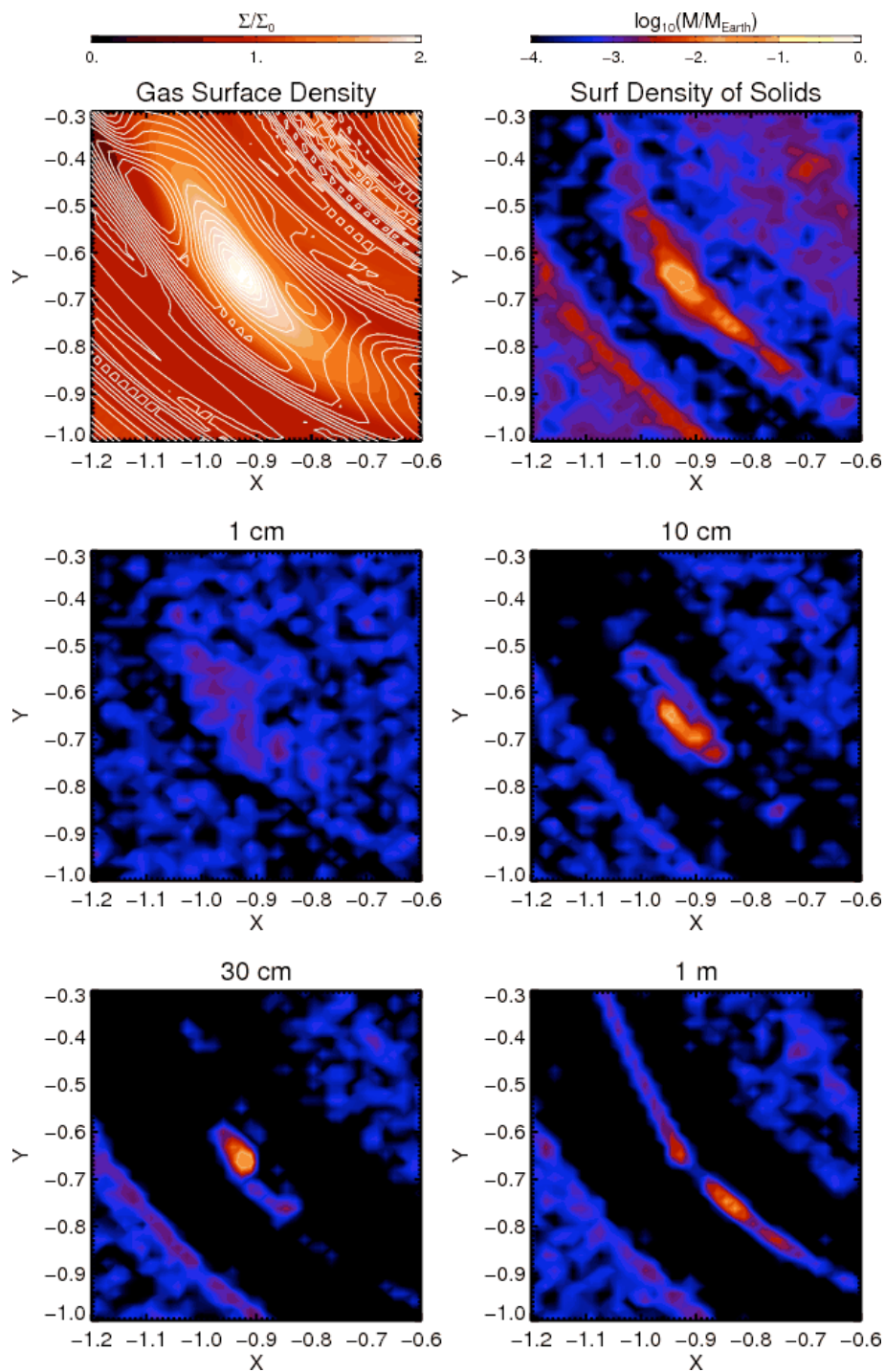


Figure 5.3 – Simulation numérique de la RWI avec gaz et les poussières montrant la concentration des poussières dans le tourbillon. Les différentes figures correspondent à la densité gaz sur laquelle est superposée quelques lignes de courant, la densité totale de solide, et la densité pour les différentes tailles de grains. (Lyra et al. 2009)



Mais, jusqu'à présent, toutes les études de la RWI s'étaient limitées au cas bidimensionnel dans l'approximation du disque mince (Goldreich et Lynden-Bell 1965b), les autres études de tourbillons tridimensionnels n'ont pas permis d'obtenir un tourbillon stable à trois dimensions. Shen et al. (2006) ont trouvé dans leurs simulations que les perturbations tridimensionnelles détruisent le tourbillon pourtant stable à deux dimensions, alors que Barranco et Marcus (2005) n'obtiennent que des tourbillons à l'extérieur du plan médian du disque ce qui limite leur intérêt dans le cas présent. La destruction des tourbillons tridimensionnels pourrait être le fait de l'instabilité elliptique (Kerswell 2002, Lesur et Papaloizou 2009). Celle-ci est due à une résonance entre la fréquence de rotation dans le tourbillon et la fréquence épicyclique locale du gaz (résonance équivalente à celle de Lindblad). Mais pour que le tourbillon soit instable vis à vis de l'instabilité elliptique, il est nécessaire que les lignes de courants dans le tourbillon soient fermées ce qui n'est pas le cas dans nos simulations. C'est probablement la raison pour laquelle cette instabilité n'apparaît pas dans celles-ci. Par ailleurs, cette instabilité apparaissant aux petites échelles, il est possible que la résolution de mes simulations ne soit pas suffisante pour capturer l'instabilité elliptique, et ce indépendamment de la forme des lignes de courant.

Les simulations présentées précédemment sont les premières simulations pleinement tridimensionnelles produisant un tourbillon tridimensionnel stable. Ces simulations ont montré une structure verticale complexe ne pouvant se réduire à une étude de type disque mince et pouvant largement modifier la concentration des grains dans un tourbillon. Pour toutes ces raisons, il est apparu intéressant d'ajouter au flot de gaz des particules solides pour suivre leur éventuelle concentration dans ces structures tridimensionnelles de tourbillons. Cependant cet ajout de particules n'est pas trivial, il faut tout d'abord modéliser correctement le couplage entre le gaz et les particules puis résoudre numériquement les équations d'évolution des particules solides.

## 5.2 Modélisation des poussières et des grains

Le chapitre 2 présentait des méthodes numériques pour suivre l'évolution d'un fluide, mais dans le cas de poussières ou de grains solides ces méthodes ne peuvent pas s'appliquer directement. Les codes les plus adaptés pour suivre le mouvement des grains sont les codes de type particulaire où l'on suit chaque particule (voir annexe A). Mais cette méthode est bien trop coûteuse en temps de calcul pour être utilisée dans des simulations globales du disque, c'est pourquoi les poussières sont souvent considérées comme un fluide sans pression, ce qui permet de réinvestir les méthodes bien connues de l'hydrodynamique. On parle alors de code bi-fluide.

### 5.2.1 Modélisation bi-fluide

Pour distinguer les quantités relatives au gaz et à la poussière, on utilisera respectivement les indices  $g$  et  $p$  dans la suite. Les équations d'évolution couplée dans l'approximation bi-fluide sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_g + \nabla(\rho_g \mathbf{v}_g) = 0 \\ \partial_t \mathbf{v}_g + (\mathbf{v}_g \cdot \nabla) \mathbf{v}_g = -\frac{1}{\rho_g} \nabla p - \nabla \Phi_G - \frac{\rho_p}{\rho_g} \mathbf{f}_t \\ \partial_t \rho_p + \nabla(\rho_p \mathbf{v}_p) = 0 \\ \partial_t \mathbf{v}_p + (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p = -\nabla \Phi_G + \mathbf{f}_t \\ \Phi_G = \Phi_{ag} + \Phi_* \\ \nabla^2 \Phi_{ag} = 4\pi G(\rho_g + \rho_p) \end{array} \right.$$

$\Phi_{ag}$  est le potentiel d'auto-gravité négligé dans la suite et  $\mathbf{f}_t$  la force de traînée due à la friction entre le gaz et les particules.

### Nombres sans dimension

Si le gaz est principalement constitué d'hydrogène, le libre parcours moyen des molécules du gaz est donné par

$$\lambda = \frac{m_H^2}{\pi \rho_g r_H^2}$$

On note  $a$  le rayon des poussières et  $\nu$  le coefficient de viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{\pi}} c_s \lambda \sim \frac{1}{2} c_s \lambda$$

On considère ici l'écoulement autour des poussières. Ainsi la longueur caractéristique est le diamètre des poussières ( $L = 2a$ ) et la vitesse caractéristique est la différence de vitesse entre le gaz et les poussières  $\Delta v$ . A partir de ces grandeurs, on peut définir des nombres sans dimensions caractérisant l'écoulement.

**Nombre de Knudsen**  $Kn$  Il donne le rapport entre le temps hydrodynamique et le temps de collision, ou encore entre le libre parcours moyen et la longueur caractéristique de l'écoulement.

$$Kn = \lambda/L = \lambda/2a$$

**Nombre de Mach**  $Ma$  C'est le rapport entre la vitesse des particules relativement au gaz et la vitesse du son

$$Ma = |\Delta v|/c_s$$

**Nombre de Reynolds**  $Re$  Il s'agit du rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité

$$Re = \frac{LV}{\nu} = \frac{2a|\Delta v|}{\nu} \sim \frac{4aMa}{\lambda}$$

avec  $V$  la vitesse caractéristique de l'écoulement.

**Nombre de Stokes** Ce nombre compare le temps d'arrêt des particules dans le fluide (défini précédemment) au temps dynamique du disque

$$S = \tau_f \Omega_K$$

Si le nombre de Stokes est très inférieur à 1 les particules suivent très bien le gaz tandis que pour un nombre de Stokes très grand devant l'unité, les particules auront une trajectoire keplerienne. Hersant (2009) a montré que la modélisation des poussières par un fluide sans pression n'est valable que pour des nombres de Stokes inférieurs à 0.5.

### 5.2.2 Force de traînée

Le calcul de la force de traînée dépend du régime de l'écoulement. On distingue le régime d'Epstein (1924) où le libre parcours moyen du gaz est supérieur au rayon des particules.

$$f_t^{Ep} = \frac{4}{3} c_s \pi a^2 \Delta v \frac{\rho_g}{\rho_p}$$

Ce que l'on peut aussi écrire sous la forme du temps d'arrêt

$$\tau_f^{Ep} = \frac{\rho_d a}{\rho_g c_s}$$

où  $\rho_d$  est la densité interne des particules.

Dans le cas contraire, lorsque les particules sont plus grandes que le libre parcours moyen, on peut faire les approximations de l'hydrodynamique. Si de plus le mouvement du gaz par rapport à la poussière est subsonique, il s'agit du régime de Stokes :

$$f_t^{St} = 6\pi\nu\rho_g\Delta v$$

ce qui correspond à un temps d'arrêt

$$\tau_f^{St} = \frac{\rho_d a}{\rho_g c_s} \frac{4a}{9\lambda}$$

Pour des particules ayant un déplacement subsonique dans le gaz, la transition entre les deux régimes se produit donc vers  $\lambda/a$  de l'ordre 4/9.

Finalement, en régime turbulent, pour un nombre de Reynolds  $Re \gg 1$ , la force de traînée est quadratique en vitesse :

$$f_t^{quad} = \frac{1}{2} \rho_g \Delta v^2 C_d A$$

où  $C_d$  est le coefficient de traînée qui dépend aussi de la différence de vitesse, de la taille de la particule et de la viscosité du gaz mais pour une sphère en régime permanent  $C_d \sim 0.47$ .  $A$  est la section de la sphère. Le temps d'arrêt est alors

$$\tau_f^{quad} = 8\rho_g / (3\rho_d C_d \Delta v)$$

### 5.2.3 Dérive radiale et sédimentation

#### Dérive radiale

Le gaz étant soumis à une force de pression qui s'oppose à la gravité dans un profil décroissant de densité, sa rotation sera légèrement sous-képlérienne contrairement aux particules qui ne subissent pas de force de pression. La force de traînée du gaz fait par conséquent perdre du moment cinétique aux particules qui dérivent alors vers le centre du disque. La vitesse azimutale du gaz est

$$v_{\phi g}^2 = (r\Omega_K)^2 + \frac{r}{\rho_g} \partial_r P$$

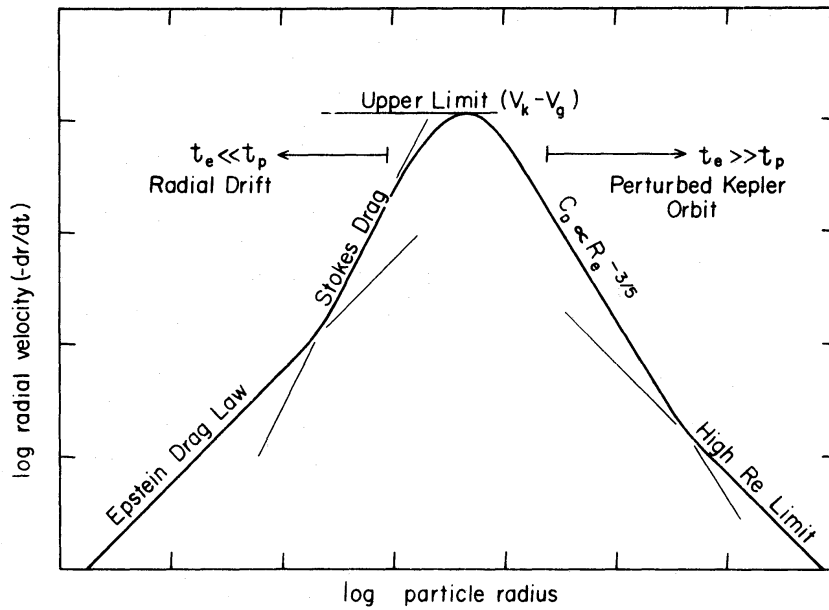


Figure 5.4 – La vitesse de dérive radiale dépend de la force de traînée et par conséquent de la taille des particules. Le maximum est atteint pour des particules de la taille du mètre. Sur cette figure la notation  $t_e$  correspond au temps d'arrêt et  $t_p$  la période orbitale. Schéma issu de Weidenschilling (1977).

L'écart à la vitesse keplerienne s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta v_{\phi g} = v_{\phi g} - v_k &\simeq -\frac{r}{2\rho_g \Omega_K} \partial_r P = \frac{c_s^2}{2v_K} \frac{\partial \ln P}{\partial \ln r} \\ &\sim -56 \text{ m.s}^{-1} \sim 0.012 \text{ UA.an}^{-1} \end{aligned}$$

On a ici négligé la force de traînée des particules sur le gaz, ce qui est valable pour une densité de particules bien plus faible que la densité de gaz et on a considéré que la force de pression est faible devant la force de gravité. L'écart à la rotation keplerienne dépend finalement uniquement du gradient de pression et de la vitesse du son.

On peut estimer la dérive des particules sous la forme :

$$\begin{cases} v_{\phi p}^2 = (r\Omega_K)^2 + \frac{r}{\tau_f} v_{rp} \\ r^2 \partial_t v_{\phi p} + 2v_r v_{\phi p} / r = -\frac{r}{\tau_f} (v_{\phi p} - v_{\phi g}) \\ \Delta v_r = -\frac{2S}{1+S^2} \delta v_{\phi g} \\ \Delta v_\phi = \frac{S^2}{1+S^2} \delta v_{\phi g} \end{cases}$$

On retrouve alors ce qui est montré sur le schéma 5.4, la vitesse de dérive est maximum pour un nombre de Stokes de l'ordre de l'unité et égale à  $\delta v_{\phi g}$ .

Pour un gradient négatif de pression, les particules auront une vitesse de dérive négative. Si  $S = 1$ , une particule dérivera d'un rayon de 1 UA jusqu'au centre en une centaine d'années.

Dans le cas d'un tourbillon, le gradient de pression est dirigé vers l'extérieur d'un tourbillon cyclonique et vers l'intérieur d'un tourbillon anticyclonique.

C'est pour cette raison que les tourbillons anticycloniques ont été proposés pour concentrer les grains en leur coeur (Barge et Sommeria 1995). C'est sur ce même principe que les feuilles de thé se concentrent au centre de la tasse lorsque l'on mélange son thé !

### Sédimentation

L'équation du mouvement vertical des particules est

$$\partial_t^2 z + \frac{1}{\tau_f} (\partial_t z - v_{zg}) + \Omega_K^2 z = 0$$

s'il n'y a pas de mouvement vertical du gaz, c'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti de temps caractéristique  $\tau_f$ . Le régime critique est atteint pour  $\tau_f = 1/(2\Omega_K)$ . La figure 5.5 compare les temps de dérive et de sédimentation des particules. On voit que le temps de sédimentation des particule de la taille du micromètre est de l'ordre de la durée de vie du disque (de l'ordre du million d'années).

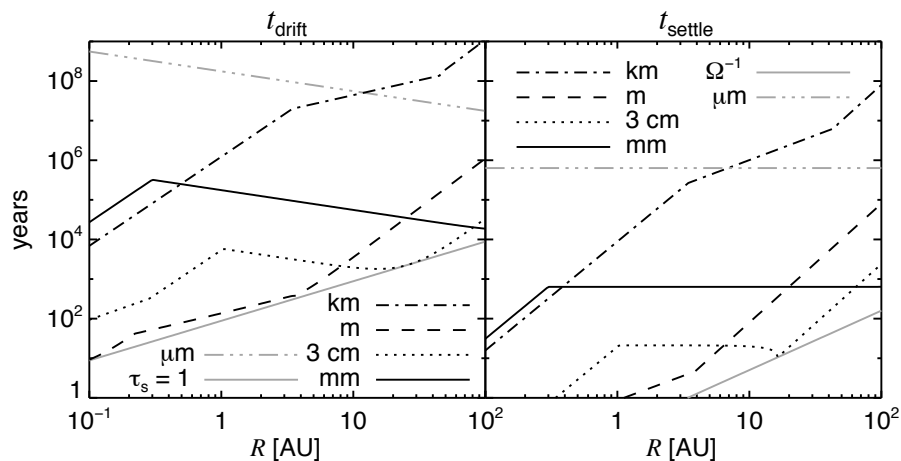


Figure 5.5 – Temps caractéristique de dérive (à gauche) et de sédimentation (à droite) pour des particules de différentes tailles. (Youdin 2008)

La vitesse verticale du gaz apparaît comme un terme de forçage de cet oscillateur. Si on reprend les simulations présentées au chapitre 3 on avait une vitesse verticale de l'ordre de  $10^{-1}c_s$ , et la longueur caractéristique de la turbulence était la hauteur du disque. La turbulence domine donc complètement la sédimentation.

## 5.3 Preuve de principe

La simulation numérique couplée du gaz et des particules étant complexe, une première méthode très simple a été développée en collaboration avec Peggy Varnière pour vérifier si cette structure tridimensionnelle de tourbillons permettait effectivement de concentrer des particules solides.

### 5.3.1 Concentration de poussières dans les structures tridimensionnelles

A partir de tous les éléments décrits précédemment, on peut s'attendre à ce que

**les poussières de plus petite taille** soient totalement couplées au gaz. Elles vont suivre le gaz sur l'ensemble des rouleaux verticaux. Ces petites particules seront en conséquence concentrées au centre du tourbillon anticyclonique de la même manière que le gaz sans même l'effet différentiel.

**les poussières de taille intermédiaire** soient partiellement couplées au gaz. Elles vont alors être concentrées dans le tourbillon anticyclonique comme le gaz. Mais elles vont aussi subir l'effet différentiel de concentration des poussières dans les tourbillons anticycloniques présentés précédemment. Et finalement, elles devraient suivre le gaz dans son mouvement descendant mais avoir plus de difficultés à le suivre dans son mouvement ascendant à cause de la gravité qui, pour les particules solides, n'est pas contrebalancée par les forces de pression.

**les grosses poussières** soient découplées du gaz. Elles vont sédimenter sous l'effet de la gravité, mais elles ne seront pas ou peu concentrées.

Le schéma 5.6 résume ces différents comportements.

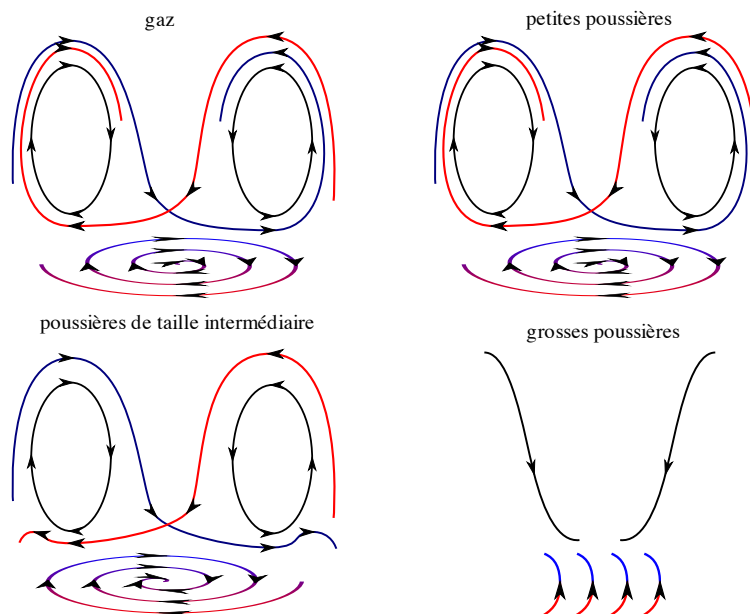


Figure 5.6 – Comportement de poussières de différentes tailles dans les rouleaux verticaux du gaz.

### 5.3.2 Code bi-fluide

Pour étudier la concentration des particules dans les tourbillons de Rossby obtenus dans les simulations tridimensionnelles, nous avons ajouté un module au code VAC qui calcule à chaque pas de temps la force de traînée du gaz sur

les particules. Le code suit ainsi l'évolution conjointe du gaz et des particules. Cette force est calculée dans le régime d'Epstein pour une taille de poussières à choisir en début de simulation (nous avons choisi des tailles allant de  $10\mu m$  à  $1cm$ ). Les conditions initiales de la simulation sont :

- pour le gaz : les conditions finales de la simulation avec du gaz uniquement. Cela permet un gain de temps important puisque le module bi-fluide n'est pas parallélisé
- pour les particules : celles-ci ont initialement une vitesse purement keplerienne et sont réparties de manière à ce que la densité de particules soit cent fois plus faible que la densité du gaz (moyennée en azimut). Les conditions initiales sont dès lors axisymétriques pour les particules.

Pour les particules l'intégration temporelle se fait par une méthode de Runge-Kutta d'ordre deux.

Cette méthode pose des problèmes importants car les particules de la couronne tombent très rapidement verticalement atteignant des densités très basses que le code peut difficilement gérer. C'est au bord interne de la simulation où le temps caractéristique est le plus court que ce problème apparaît en premier. Cette méthode n'ayant pour but que de faire une preuve de principe du mécanisme de concentration des poussières, des corrections non physiques peuvent être effectuées sur les bords de la simulation loin des tourbillons. Les instabilités numériques au bord interne sont alors gommées 'à la main' régulièrement au cours de la simulation.

### 5.3.3 Résultats numériques

Les premières simulations ont permis de démontrer que les tourbillons de Rossby concentrent les particules en leur centre. La densité de particules dans le plan médian du disque est présentée sur la figure 5.7 pour différentes tailles de particules.

Cette figure donne la concentration de la poussière après un temps de  $1/\Omega_k(r_c)$ , ce qui correspond à approximativement un vingtième d'orbite. Ces simulations ont montré que les particules atteignent des concentrations qui peuvent aller jusqu'à ( $\sim 17\%$ ) en seulement une orbite. Les tourbillons tridimensionnels concentrent ainsi bien les particules et permettent d'augmenter le rapport de la densité de particules sur la densité du gaz,  $\rho_p/\rho_g$ .

Le deuxième point que l'on peut remarquer sur cette figure est la différence de comportement des particules en fonction de leur taille.

- Les plus petites particules sont bien plus sensibles aux bras spiraux qu'aux tourbillons, il y a peu de concentration dans les tourbillons.
- Les particules de tailles intermédiaires sont celles qui atteignent les concentrations les plus élevées. Contrairement au gaz ces particules se concentrent dans les deux tourbillons. Dans le tourbillon anticyclonique ( $\phi/2\pi \sim 0.7$ ) il y a un double effet de concentration comme expliqué précédemment. On voit que la concentration se fait à gauche dans la partie avant du tourbillon (en rouge sur la figure 5.6) et à droite dans la partie arrière (en bleu sur la figure) comme attendu. Mais les poussières sont aussi concentrées dans le tourbillon cyclonique ( $\phi/2\pi \sim 0.2$ ). En effet le tourbillon cyclonique a des lignes de courant rentrantes vers le centre du tourbillon puis montantes, les poussières suivent ainsi le gaz

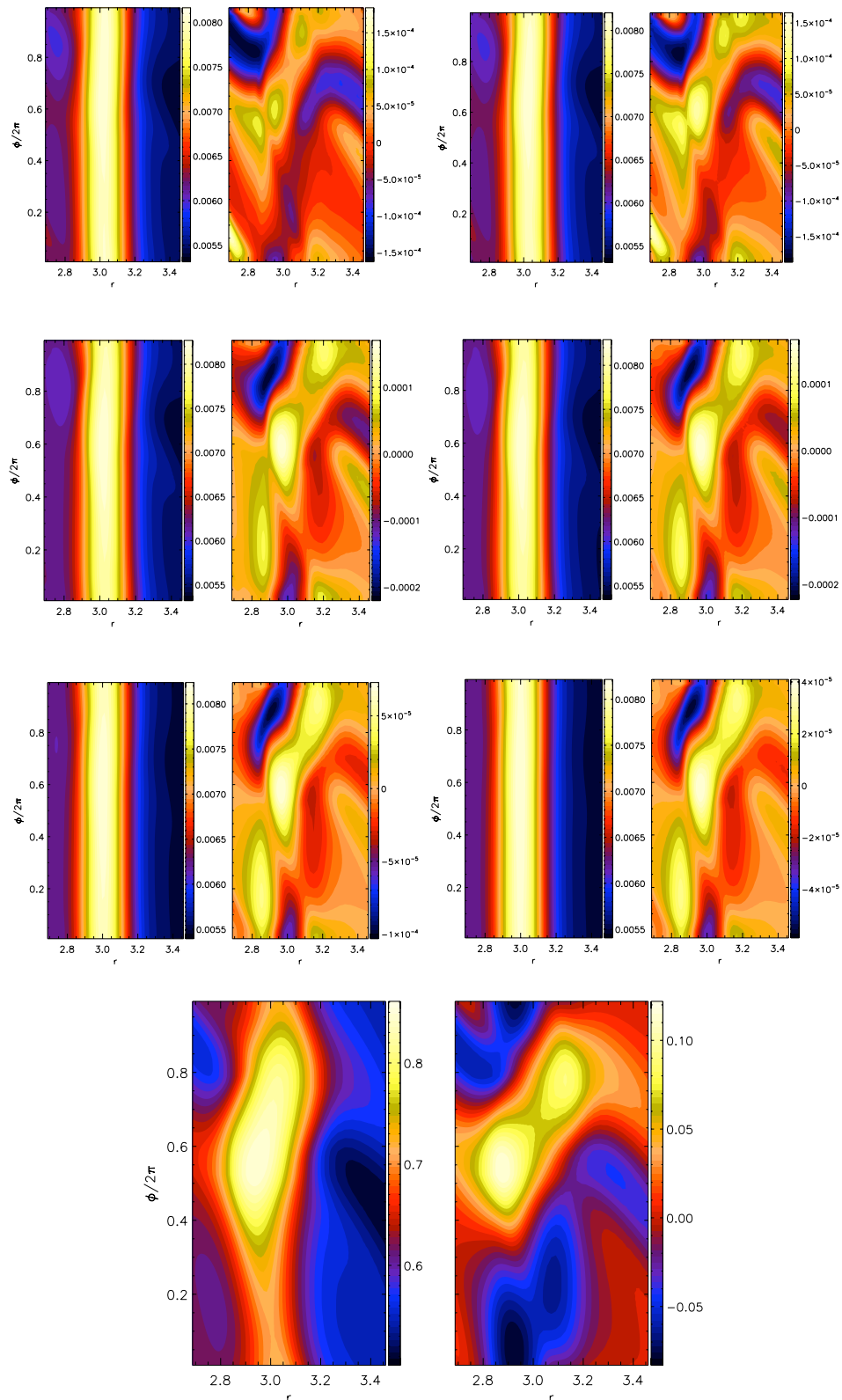


Figure 5.7 – On a tracé ici pour différentes tailles de poussières, la densité au niveau de la corotation (à gauche) et la partie non-axisymétrique de cette densité (à droite). Il s'agit de coupes dans le plan  $(r, \phi, z = 0)$ . Les six figures correspondent à des poussières de 10  $\mu\text{m}$ , 100  $\mu\text{m}$ , 500  $\mu\text{m}$ , 1 mm, 5 mm, 1 cm. La dernière figure correspond au cas du gaz pour comparaison.



vers le centre mais ensuite ne peuvent pas monter à cause de la gravité (Figure 5.8).

- Finalement les plus grosses poussières sont moins concentrées mais contrairement aux petites particules, c'est dans les tourbillons que le maximum de concentration se situe et non dans les bras spiraux.

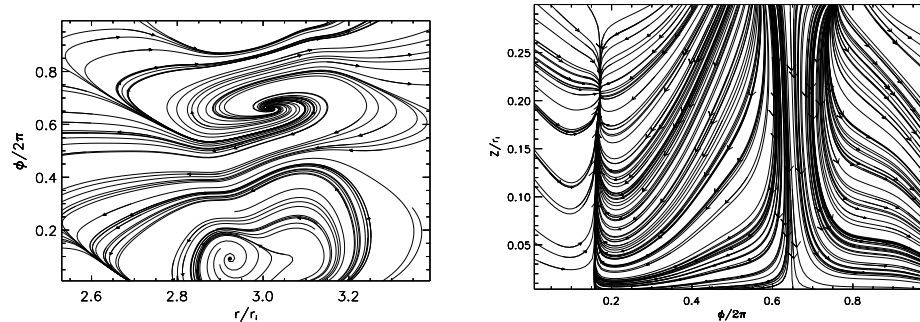


Figure 5.8 – Lignes de courant obtenues à  $t = 176/\Omega_K(r_i)$  dans différentes coupes du disque. A gauche : coupe dans le plan médian du disque ( $r, \phi, z=0$ ) qui fait apparaître les tourbillons. A droite : coupe ( $r = r_B, \phi, z$ ). On a ici reproduit une partie de la figure 3.24.

En ce qui concerne la structure verticale des particules, la figure 5.9 montre des coupes en ( $r = r_B, z, \phi$ ) de la densité. Comme on pouvait s'y attendre plus les particules sont massives plus la gravité a tendance à les ramener dans le plan médian du disque. Par ailleurs les plus petites particules ont une concentration azimutale plus importante. La même remarque s'applique à la concentration radiale (Figure 5.10).

## Discussion et perspectives

Ce chapitre est un développement inattendu de cette thèse. Ce sont les résultats du chapitre 3 qui nous ont poussés à appliquer ces simulations à la formation de planètes. La première partie du chapitre a permis de présenter les principales idées de la formation des planètes et le cadre général dans lequel se place cette étude. La suite portait sur la modélisation des poussières et la méthode numérique choisie pour calculer leur évolution. Finalement les premiers résultats obtenus avec cette méthode ont permis de confirmer la concentration effective de la poussière de manière tridimensionnelle dans les tourbillons de Rossby.

Comme cela a été expliqué dans cette partie, la méthode numérique de modélisation des particules n'est pas suffisamment rigoureuse du fait du traitement du bord interne du disque. L'utilisation d'un solveur de Riemann pour les particules serait plus cohérente avec la modélisation du gaz. Le solveur implémenté dans VAC ne peut pas s'appliquer au fluide de particules car celui-ci n'a pas de pression, les vecteurs propres de ce système d'équations sont par conséquent différents. Leveque (2004) a proposé un solveur de Riemann pour ce type de fluide et l'une des perspectives de ce travail serait d'ajouter ce solveur de Riemann dans VAC ou même mieux dans AMRVAC. En effet pour l'étude des particules un code avec grille adaptative serait plus adapté,

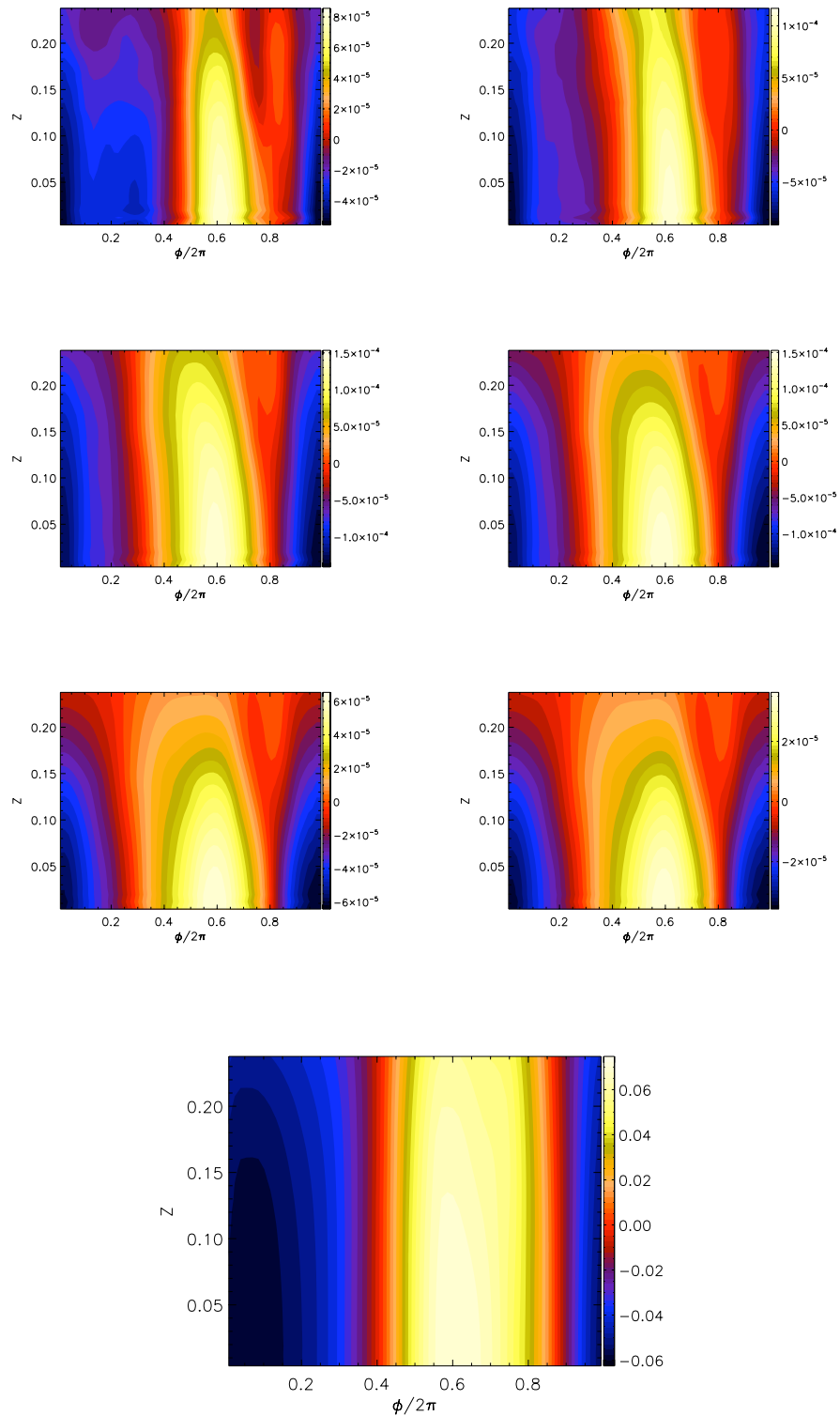


Figure 5.9 – On a tracé ici pour différentes tailles de poussières, la partie non-axisymétrique de la densité au rayon de corotation ( $r = r_B, \Phi, z$ ). Les six figures correspondent à des poussières de  $10\mu\text{m}$ ,  $100\mu\text{m}$ ,  $500\mu\text{m}$ ,  $1\text{mm}$ ,  $5\text{mm}$ ,  $1\text{cm}$ . La dernière figure correspond au cas du gaz pour comparaison.

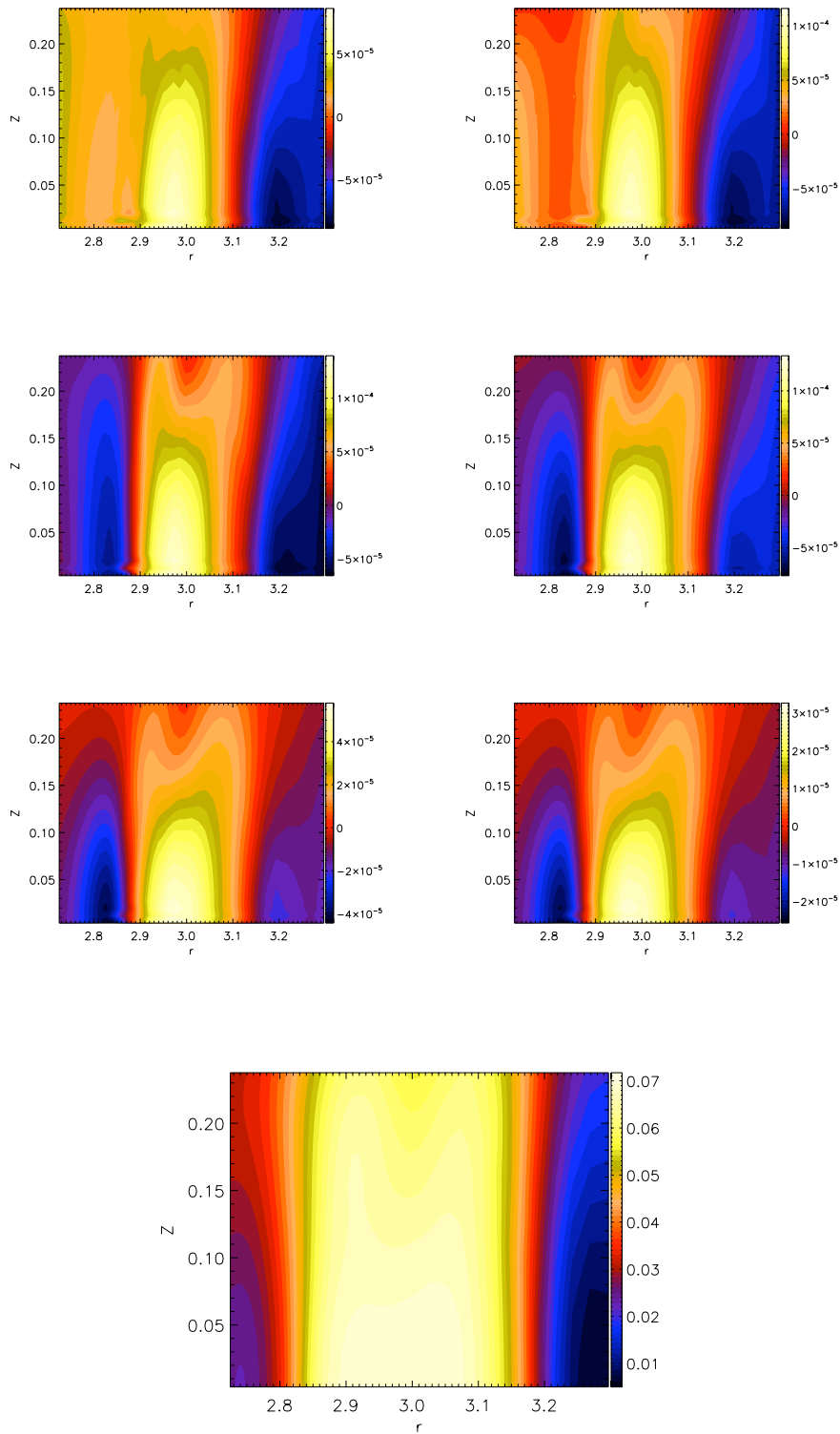


Figure 5.10 – On a tracé ici pour différentes tailles de poussières, la partie non-axisymétrique de la densité en  $\phi = 0.66$  (au centre du tourbillon). Les six figures correspondent à des poussières de  $10\mu\text{m}$ ,  $100\mu\text{m}$ ,  $500\mu\text{m}$ ,  $1\text{mm}$ ,  $5\text{mm}$ ,  $1\text{cm}$ . La dernière figure correspond au cas du gaz pour comparaison.

il permettrait d'avoir une bien meilleure résolution dans les tourbillons. Par ailleurs l'étude présentée ici a été faite dans le régime d'Epstein, pour pouvoir modéliser des grains de plus grandes tailles, il faut généraliser l'étude au régime de Stokes.

Troisième partie

Mode de gauchissement dans les  
disques d'accrétion des étoiles à  
neutrons



# Modèle pour les oscillations quasi-périodiques kiloHertz dans les binaires d'étoile à neutrons

SOMMAIRE	
INTRODUCTION . . . . .	145
6.1 LES PRINCIPAUX MODÈLES PRÉCÉDENTS . . . . .	146
6.2 PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU MODÈLE . . . . .	149
6.3 ORIGINE DU DISQUE MAGNÉTOSPHÉRIQUE . . . . .	151
6.3.1 Configuration magnétique . . . . .	151
6.3.2 Rôle de l'instabilité d'interchange . . . . .	152
6.4 EQUILIBRE VERTICAL . . . . .	153
6.4.1 Relation de dispersion . . . . .	153
6.4.2 Rôle de la pression de radiation . . . . .	155
6.5 APPLICATION AUX QPO kHz . . . . .	158
6.5.1 Fréquence des QPO . . . . .	158
6.5.2 L'interface disque/magnétosphère . . . . .	159
BILAN . . . . .	162

Ce chapitre présente un modèle de gauchissement des disques d'accrétion et son application aux QPO kiloHertz des binaires à étoiles à neutrons. Après avoir détaillé quelques caractéristiques de ces QPO, les principaux modèles antérieurs sont présentés dans la première partie. Les différents éléments du modèle sont introduits dans la partie 6.2 avant d'être développés. Ce chapitre se termine par les éventuels signaux observationnels de ce gauchissement et le lien avec les QPO kHz. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans MNRAS (Meheut et Tagger 2009) et de présentations au COSPAR, à l'IAU et à la SF2A (Méheut et Tagger 2008).





## Introduction

L'une des particularités des binaires X à étoile à neutrons présentées au chapitre 1, est la présence dans leur spectre de puissance de QPO doubles à des fréquences<sup>1</sup> de l'ordre du kHz. Un exemple de spectre présentant ces QPO doubles est présenté sur la figure 6.1. Ce phénomène a été observé pour la première fois en 1996 par le satellite RXTE et a depuis été l'objet de nombreuses publications aussi bien d'un point de vue observationnel que théorique. Si ces QPO ont été particulièrement étudiés, c'est parce qu'une fréquence si élevée, signifie qu'il s'agit d'un phénomène se déroulant très proche de l'étoile à neutrons. Ces QPO pourraient donc nous renseigner sur les étoiles à neutrons elles-mêmes en particulier en ce qui concerne leur équation d'état mais aussi permettre de vérifier des prédictions de la relativité générale. Des études ont aussi porté sur le comportement surprenant des ces QPO doubles dont les fréquences évoluent sur une large gamme alors que l'écart de fréquence entre les deux QPO varie peu. Cet écart reste proche de la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons (comme on peut le voir la figure 6.2).

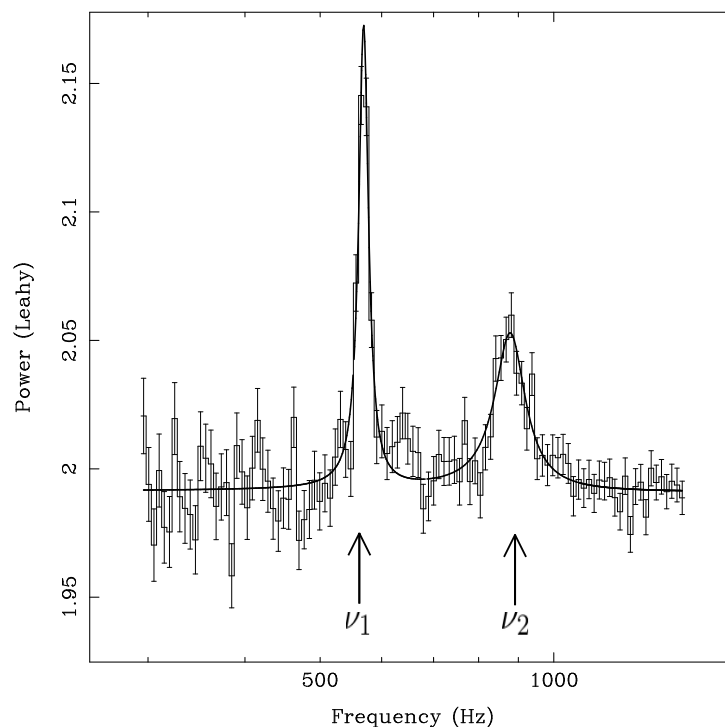


Figure 6.1 – Exemple d'observation de QPO double dans 4U 1608-52. (Mendez et al. 1998)

1. Dans ce chapitre, on va chercher à comparer un modèle à des observations de QPO, c'est pourquoi on utilisera des fréquences et non des pulsations comme dans les autres chapitres.

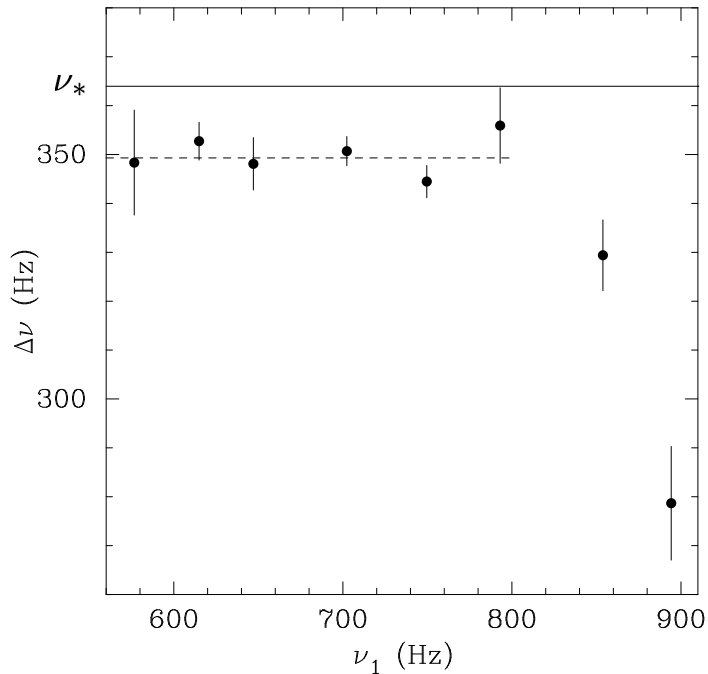


Figure 6.2 – Ecart en fréquence entre les deux QPO en fonction de la plus basse des deux fréquences dans le système 4U 1728-34. On voit que la différence de fréquence est proche mais différente de la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons ( $\nu_*$ ). (Méndez et van der Klis 1999)

Il arrive que la luminosité de l'étoile à neutrons augmente très rapidement avant de décroître lentement (Figure 6.3), ce phénomène est interprété comme un embrasement thermonucléaire de l'étoile à neutrons (voir l'article de revue de Lewin et al. (1995) pour plus de détails). On considère en général que la fréquence caractéristique qui apparaît dans le spectre de puissance de ces 'bursts' est la fréquence de rotation de l'étoile. C'est donc via ces bursts qu'on a pu identifier le lien entre la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons et la différence de fréquence entre les deux QPO kHz.

## 6.1 Les principaux modèles précédents

Lors des premières observations, la différence de fréquence entre les deux QPO paraissait constante, avec une valeur de quelques pourcents inférieurs à la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons. C'est dans ce cadre que les modèles dits de battements ont été proposés initialement ('beat-frequency model' voir Lamb et al. (1985) et Miller et al. (1998)). Dans ce type de modèle, le QPO de plus haute fréquence ( $\nu_2$ ) est dû à la rotation keplerienne au bord interne du disque d'accrétion tandis qu'un phénomène de battement entre cette fréquence keplerienne et la fréquence de rotation de l'étoile à

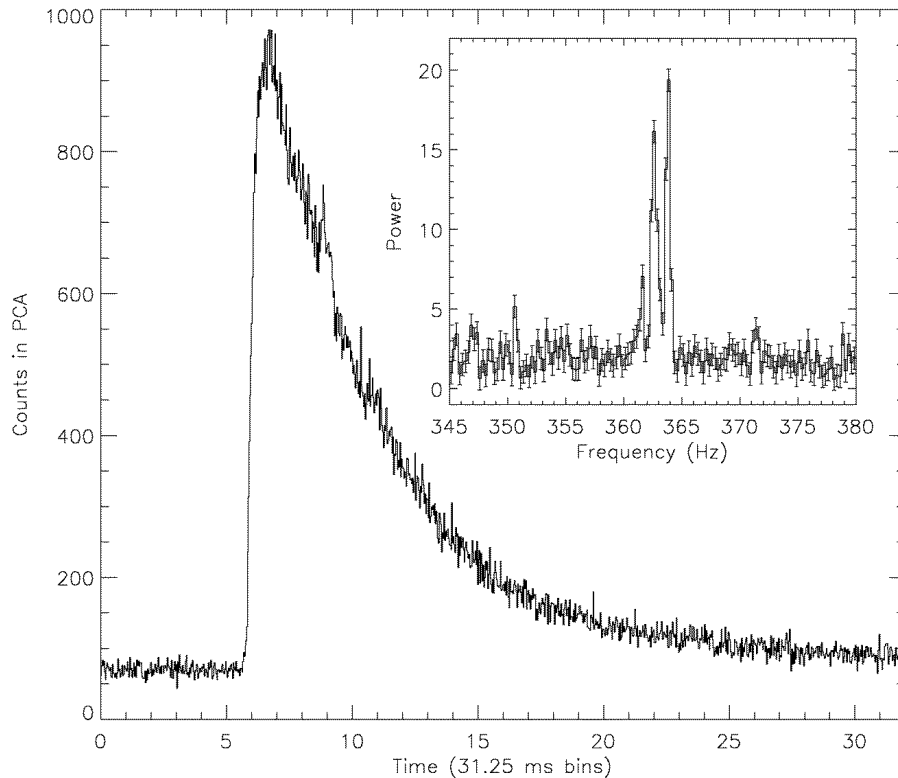


Figure 6.3 – Profil d'un burst de 4U 1728-34 et son spectre de puissance (en encadré) présentant une oscillation. (Strohmayer et al. 1996)

neutrons  $\nu_*$  est à l'origine du QPO de plus basse fréquence  $\nu_1 = \nu_2 - \nu_*$ . Ce type de modèle fut mis en difficulté lorsqu'il est apparu que la différence de fréquence  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$  décroît aux plus hautes fréquences comme le montre la figure 6.2 ; un phénomène de battement se déroulant par définition à fréquence constante. De plus ce modèle n'est pas compatible avec les nouvelles interprétations des données observationnelles par Méndez et Belloni (2007) présentées sur la figure 6.5 qui montrent un simple rapprochement numérique entre  $\nu_*$  et  $\Delta\nu$ .

Par la suite un autre type de modèle a été proposé, basé sur les fréquences de précession qui apparaissent dans le cadre de la relativité générale ('relativistic precession models', voir par exemple Stella et Vietri (1998), Stella et Vietri (1999)). Dans ce modèle la fréquence  $\nu_2$  est de nouveau associée à la rotation du disque, alors que  $\nu_1$  est la fréquence de précession du périastre de particules orbitant autour de l'étoile à neutrons en rotation (Figure 6.4). C'est le même type de précession qui, appliquée au cas de la planète Mercure, a permis une première confrontation expérimentale de la relativité générale (Einstein 1915). Ce modèle a l'avantage d'expliquer aussi l'un des QPO de basse fréquence par un autre type de précession prévue par la relativité générale (Lense et Thirring 1918). Cependant il ne permet pas d'expliquer le lien entre la différence de fréquence des deux QPO ( $\Delta\nu$ ) et la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons.

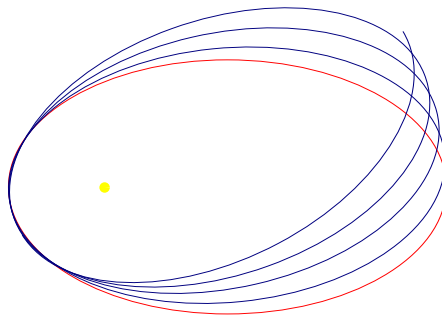


Figure 6.4 – Schéma de la précession du périastre. En rouge une orbite sans précession et en bleu une orbite avec précession.

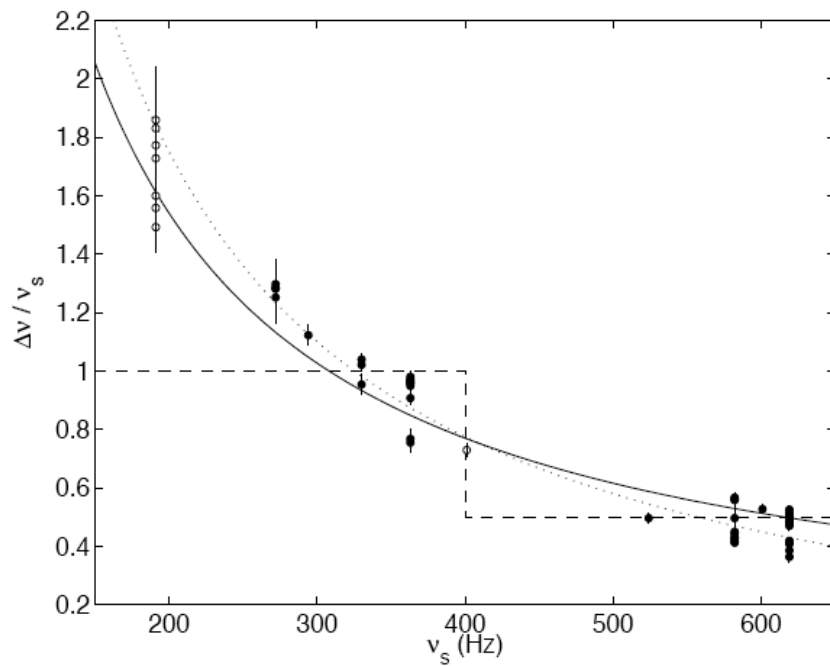


Figure 6.5 – Ecart de fréquence entre les deux QPO normalisé par la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons  $\nu_*$  en fonction de  $\nu_S$  après traitement par Méndez et Belloni (2007) en particulier sur les points marqués par des cercles vides.

## 6.2 Présentation générale du modèle

Le modèle de QPO kHz que je présente ici émane de deux remarques portant sur les modèles précédents. Tout d'abord dans ces modèles, la fréquence que l'on peut considérer comme étant la plus fondamentale est la fréquence de rotation keplerienne et celle-ci est attribuée à la fréquence  $\nu_2$ . Cependant comme on a pu le voir sur la figure 6.1, le QPO de plus basse fréquence  $\nu_1$  est souvent bien plus piqué, ce qui se traduit par un facteur de qualité élevé. Le facteur de qualité est défini ainsi

$$Q = \frac{\delta\nu}{\nu_{QPO}}$$

ou  $\delta\nu$  est la largeur à mi-hauteur du pic (Barret et al. 2005). Cela signifie que le phénomène lié à ce QPO émet de manière plus cohérente. On peut par conséquent s'attendre à ce qu'il soit associé au phénomène le plus fondamental. C'est pourquoi ce nouveau modèle inverse l'interprétation habituelle des QPO et l'on considère la fréquence  $\nu_1$  comme étant la fréquence de rotation au bord interne du disque keplerien.

La deuxième remarque porte sur le lien entre la différence de fréquence des QPO et la fréquence de rotation de l'étoile. Puisqu'il y a un rapprochement numérique entre la différence de fréquence  $\Delta\nu$  et la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons et si l'émission des deux QPO provient du disque képlerien, cela signifie que ce disque 'connaît' la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons. Pourtant la matière du disque est issue de l'étoile compagnon de la binaire et n'est a priori pas liée à l'étoile à neutrons. Si l'on veut expliquer la valeur de  $\Delta\nu$  il faut donc introduire un lien entre l'étoile à neutrons (ou sa magnétosphère en rotation solide avec celle-ci) et le disque. C'est pour cela que nous avons considéré de la matière issue du disque keplerien et ayant traversé les lignes de champs de l'étoile par un mécanisme d'interchange, ce gaz est alors en rotation solide à l'intérieur de la magnétosphère. Bien que la vitesse de rotation du gaz soit trop faible pour s'opposer à la gravité, celui-ci ne s'effondre pas sur l'étoile car les lignes de champ magnétique s'opposent à l'accrétion directe de la matière sur la surface de l'étoile à neutrons. C'est ce gaz que j'appellerai disque magnétosphérique par la suite (voir le schéma de la figure 6.7). Le problème inverse se pose maintenant : comment cette matière connaît-elle la fréquence de rotation du disque képlerien ? Cette fois-ci il n'est pas nécessaire qu'il y ait échange d'information pour que le disque magnétosphérique connaisse la fréquence de rotation du disque képlerien puisqu'il s'agit d'une fréquence fondamentale pour ce système soumis à la force de gravité.

Le modèle de gauchissement présenté dans ce chapitre pourrait permettre d'expliquer le QPO de plus haute fréquence  $\nu_2$ , mais on suppose ici que le QPO de plus basse fréquence  $\nu_1$  correspond à la fréquence keplerienne. Ce modèle ne propose pas d'explication pour cette fréquence.  $\nu_2$  est alors interprétée comme la fréquence d'oscillation verticale du disque magnétosphérique notée  $\nu_v$ . Si le disque n'était pas soumis aux forces magnétiques, celle-ci serait égale à la fréquence keplerienne, et apparaîtrait donc dans notre référentiel comme

$$\nu_{osc} = \nu_v + \nu_* = \nu_K + \nu_*$$

après décalage Doppler dû à la rotation de la magnétosphère. Bien sûr d'autres facteurs peuvent intervenir et modifier l'équation précédente, et l'on s'attend à obtenir la différence de fréquence

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \nu_{osc} - \nu_K$$

proche mais différente de la fréquence de rotation de l'étoile  $\nu_*$ .

L'étude du gauchissement dans les disques fait l'objet d'une large littérature en particulier pour les disques galactiques (par exemple Binney (1992), Pringle (1996), Masset et Tagger (1996)), puisque de nombreuses galaxies présentent un gauchissement ; un exemple est donné sur la figure 6.6. La fréquence d'oscillation du gauchissement peut être soit réelle, c'est alors une onde qui se propage dans le disque ; soit imaginaire pure, il s'agit alors d'une instabilité croissant exponentiellement avec le temps. Mais dans ce dernier cas, la partie réelle de la fréquence d'oscillation  $\nu_v$  étant nulle, on devrait observer un QPO de plus haute fréquence  $\nu_2 = \nu_v + \nu_*$  à une fréquence égale à la fréquence de rotation de l'étoile. Le phénomène qui produit un effet de l'amplitude d'un QPO peut difficilement être expliqué par une onde et il faut donc introduire un dernier élément dans ce modèle qui permette à cette onde de devenir une instabilité, c'est à dire qui ajoute un terme imaginaire à la fréquence d'oscillation. Comme expliqué plus bas, c'est l'illumination du disque magnétosphérique par le bord interne du disque képlerien qui est à l'origine de cette instabilité.

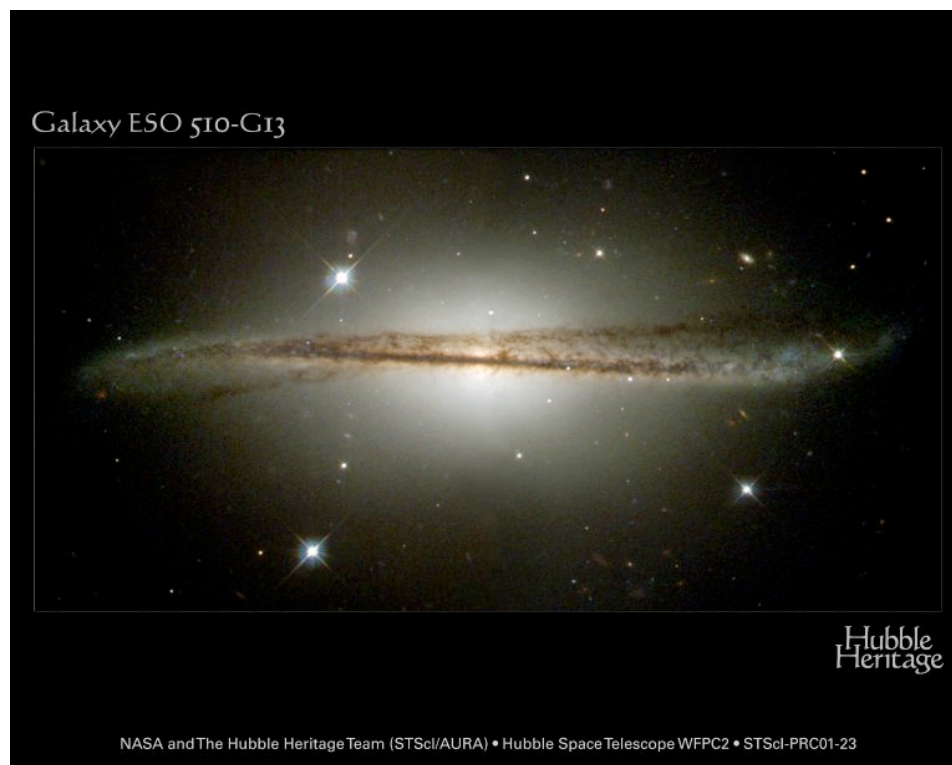


Figure 6.6 – Exemple de disque voilée : la galaxie ESO 510-13. (NASA & The Hubble Heritage Team (STScI/AURA))

Le modèle de gauchissement présenté ici diffère de ceux de Ferreira et Ogilvie (2009) et Ogilvie et Dubus (2001) car ceux-ci considèrent un disque

en rotation différentielle alors qu'ici c'est un disque en rotation solide qui est déformé. De plus par différence avec les simulations de Romanova et al. (2003), nous considérerons que l'axe du disque est aligné avec celui du dipôle magnétique.

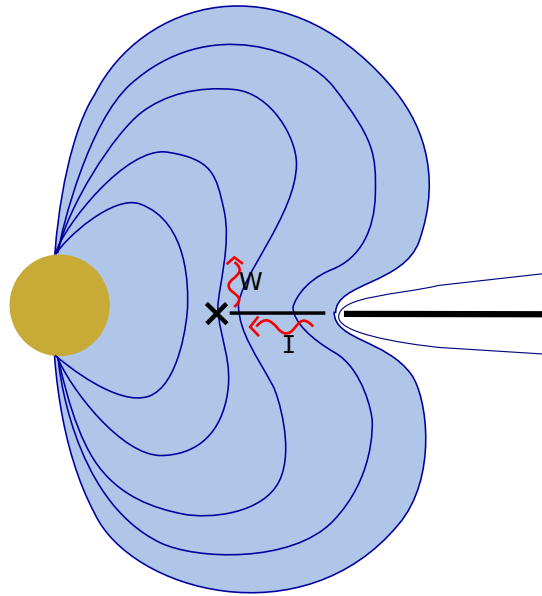


Figure 6.7 – Schéma de la géométrie magnétique choisi pour le modèle présenté dans ce chapitre. En noir (épais) le disque képlérien courbe les lignes de champs. Ce qui permet de former un disque magnétosphérique par l'instabilité d'interchange (*I*). La croix marque la position du point selle. L'accrétion le long des lignes de champ est permise par l'instabilité de gauchissement (*W*).

## 6.3 Origine du disque magnétosphérique

### 6.3.1 Configuration magnétique

La géométrie magnétique du système est présentée sur la figure 6.7. Le champ magnétique de l'étoile à neutrons est considéré comme dipolaire, l'axe de rotation de l'étoile est aligné avec l'axe du dipôle et perpendiculaire au plan du disque. Les lignes de champs sont courbées par le disque képlérien magnétisé qui repousse les lignes de champ et inverse donc leur concavité. La physique de l'interaction entre un disque magnétisé et une magnétosphère est encore mal connue (voir Romanova et al. (2003), Bessolaz et al. (2008) pour le cas des étoiles TTauri) et si l'existence d'une couche limite n'est pas remise en question (Ghosh et Lamb 1979), reste tout de même la question de son étendue. Comme d'autres auteurs (Spruit et Taam 1990, Lepeltier et Aly 1996), et contrairement à Ghosh et Lamb (1979) nous avons considéré une couche limite mince.

Il existe donc un rayon noté  $r_s$  sur le plan du disque où les lignes de champ changent de concavité : celles-ci sont tournées vers l'intérieur en-deça de  $r_s$  et

vers l'extérieur au-delà de  $r_s$ . Donc juste au dessus du plan médian du disque (où  $B_r = 0$ ),  $B_r$  prend des valeurs négatives si  $r < r_s$  et positives si  $r > r_s$  et  $\partial_z B_r$  change de signe en  $r_s$ . Si l'on considère qu'il n'y a pas de courant au dessus du disque  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  et donc  $\partial_r B_z$  change aussi de signe à ce rayon. On obtient finalement  $\partial_z^2 |B| < 0$  et  $\partial_r^2 |B| > 0$ , il s'agit donc d'un point selle magnétique (Figure 6.8). Ce point est marqué par une croix sur la figure 6.7.

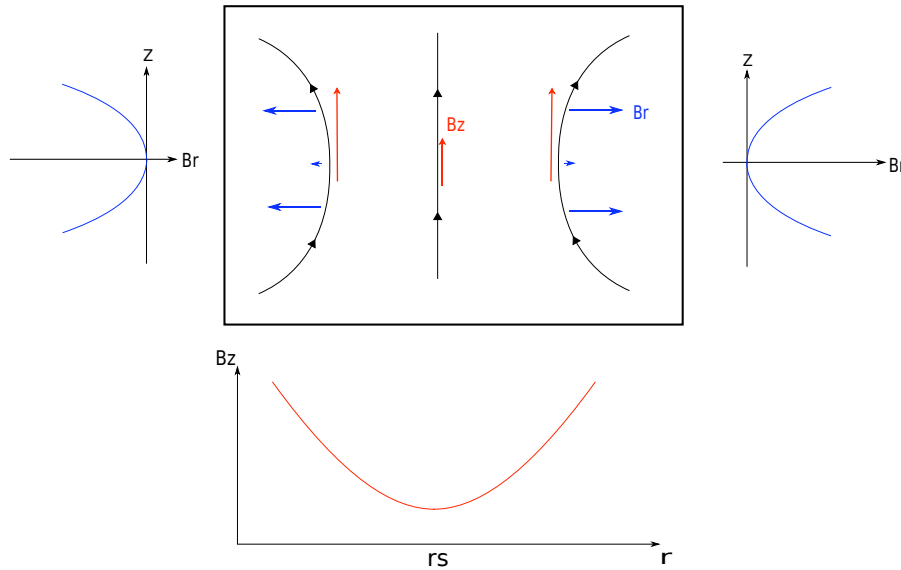


Figure 6.8 – Le point selle magnétique

### 6.3.2 Rôle de l'instabilité d'interchange

Pour étudier la stabilité globale du disque d'accrétion, il faut vérifier non seulement la stabilité vis à vis de mouvements radiaux mais aussi verticaux. On s'intéresse dans un premier temps aux déplacements radiaux, ceux-ci pouvant être amplifiés par l'instabilité d'interchange. Cette instabilité apparaît lorsqu'un champ magnétique s'oppose à la chute du plasma sous l'effet de la gravité radiale. Elle se traduit par l'inversion de la position radiale de tubes de flux ce qui peut libérer de l'énergie gravitationnelle si ce mouvement se traduit par un flux net de masse vers le centre. Donc si la masse par unité de flux magnétique croît radialement, cette instabilité permet le déplacement du plasma à l'intérieur de la magnétosphère formant ainsi un disque magnétosphérique.

Une généralisation de ce critère d'instabilité a été proposée par Lepeltier et Aly (1996) qui prennent en compte la tension magnétique des lignes de champ. Ainsi le disque est stable si

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Sigma}{|B_z|} \right) \leq \frac{r|B_z|}{2\pi G M_* \Lambda} \quad (6.1)$$

où  $\Sigma$  est la densité de surface du disque considéré comme infiniment fin,  $G$  la constante de gravitation,  $M_*$  la masse de l'étoile à neutrons et  $\Lambda$  un



paramètre décrivant la géométrie des lignes de champs. Le terme de droite apparaît lorsque que l'on considère des lignes de champs fixées sur l'étoile à neutrons, alors soumises à des contraintes de torsion lors du déplacement des tubes de flux. On a  $\Lambda \simeq 1$  sur les lignes fermées les plus courtes et  $\Lambda$  tendant vers l'infini sur les lignes de champs ouvertes du disque keplerien. Cet effet appelé 'line-tying' est donc stabilisant et peut prendre le pas sur le gain d'énergie gravitationnelle là où le disque est le plus ténu.

Même lorsque l'effet stabilisant du line-tying est négligé dans l'équation 6.1, il apparaît que l'instabilité d'interchange ne peut pas déplacer de plasma au delà du point selle alors qu'on est à la limite de stabilité. Ainsi le disque magnétosphérique est limité radialement à un rayon  $r_i \geq r_S$  où s'accumule le gaz.

## 6.4 Equilibre vertical

En ce qui concerne les mouvement verticaux, nous nous sommes reportés à l'analyse de Spruit et Taam (1990) qui se sont intéressés à l'équilibre vertical du disque d'accrétion et ont montré l'existence d'une instabilité pouvant déformer le disque en lui donnant une forme de roue voilée (Figure 6.6). Ce gauchissement pouvait permettre d'expliquer l'accrétion magnétosphérique, c'est à dire l'accrétion de la matière le long des lignes de champs avant de tomber sur l'étoile au niveau du pôle.

### 6.4.1 Relation de dispersion

Le travail de Spruit et Taam (1990) a été repris par Lepeltier et Aly (1996) et Agapitou et al. (1997) qui y ont ajouté la rotation du disque; le calcul de la relation de dispersion présentée ici reproduit leur approche. Dans un premier temps on étudie le disque infiniment fin à l'équilibre dans un champ poloïdal  $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$  dans un repère cylindrique  $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z)$ .

On considère un élément de fluide dont le mouvement de rotation plan est perturbé par un déplacement vertical. Le déplacement lagrangien s'écrit  $\xi = (0, 0, \xi_z)$ , le champ magnétique perturbé est alors

$$\mathbf{B}' = (B'_r, B'_\phi, B'_z) = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}) = \left( -\xi_z \frac{\partial B_r}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_r \xi_z)}{\partial r} \right) \quad (6.2)$$

La force de Lorentz verticale (en unités cgs)

$$F_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_r^2}{\partial z} + B_r \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

devient après perturbation

$$F'_z = -\frac{\partial B_r B'_r}{\partial z} + B'_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + B_r \frac{\partial B'_z}{\partial r} \sim -\frac{\partial B_r B'_r}{\partial z} + B'_r \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (6.3)$$

Comme précédemment on intègre verticalement

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'_z dz = -2B_r^+ B_r^+ - 2\xi_z B_r^+ \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

où  $B^+$  est le champ à la surface du disque. L'équation du mouvement vertical perturbé intégrée sur  $z$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\Sigma \frac{D^2 \xi_z}{Dt^2} &= -\Sigma \frac{\partial \Phi_G}{\partial z} + \int_{-\infty}^{\infty} F'_z dz \\ &= -\Sigma \left( \frac{\partial^2 \Phi_G}{\partial z^2} \right)_{z=0} \xi_z + 2B_r'^+ B_r^+ - 2\xi_z B_r^+ \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ &= -\Sigma \frac{GM_*}{r^3} \xi_z + 2B_r'^+ B_r^+ - 2\xi_z B_r^+ \frac{\partial B_z}{\partial r}\end{aligned}\quad (6.4)$$

Ici  $\Sigma$  est la densité de surface du disque,  $\Phi_G$  est le potentiel gravitationnel créé par l'étoile à neutrons considérée comme sphérique de masse  $M_*$  et  $\Omega$  est la vitesse angulaire du disque. On a ici négligé la force de pression cinétique radiale devant les autres forces. Pour calculer le terme en  $B_r'^+$ , on introduit le potentiel magnétique perturbé  $\Phi'_M$ . L'expression de ce potentiel est déterminé par analogie avec le potentiel gravitationnel dans l'approximation WKB (voir Agapitou et al. (1997), Tagger et al. (1990)).

$$\begin{aligned}B_r'^+ &= \left( \frac{\partial \Phi'_M}{\partial r} \right)_{z=0} \\ \Phi'_M &= -\frac{B'_z}{|k|} = \frac{-ik B_r^+ \xi_z}{|k|}\end{aligned}$$

On a ici écrit  $\xi_z$  sous la forme  $e^{i(kr+m\phi)-2\pi i\nu t}$  où  $k$  est le nombre d'onde radial et  $m$  le nombre d'onde azimutal défini positif. A partir de l'équation 6.4, on trouve la relation de dispersion :

$$\tilde{\nu}^2 = (\nu_\nu - m\nu_*)^2 = \nu_K^2 + \frac{2B_r^+}{\Sigma} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{2(B_r^+)^2}{\Sigma} |k| \quad (6.5)$$

Cette relation de dispersion permet de mettre en évidence les différentes forces prises en compte : dans le terme de droite les trois termes correspondent respectivement à la force de gravité centrale, la force de tension magnétique en  $\frac{\partial B_z}{\partial r}$  ainsi que la force de pression magnétique en  $B_r^2$ .

On peut réécrire cette équation en utilisant l'équilibre radial

$$\Sigma \frac{\partial \Phi_G}{\partial r} - 4\pi^2 \nu_*^2 r \Sigma - 2B_r^+ B_z = 0$$

celle-ci faisant intervenir la force de Lorentz, la force centrifuge et la force de gravité.

Cela donne en utilisant aussi la relation entre la fréquence keplerienne et le potentiel de gravité :

$$\frac{B_r^+}{\Sigma} = \frac{4\pi^2 r (\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z}$$

En remplaçant dans 6.5, on obtient

$$(\nu_\nu - m\nu_*)^2 = \nu_K^2 + \frac{r(\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} + 8\pi^2 r^2 (\nu_K^2 - \nu_*^2)^2 \frac{\Sigma}{B_z^2} |k| \quad (6.6)$$

Sous cette nouvelle forme la densité de surface n'apparaît plus que dans le dernier terme du membre de droite qui est donc négligeable pour une densité de surface suffisamment faible. La relation de dispersion ne dépend alors plus que de la géométrie magnétique.

La condition de stabilité s'écrit  $\tilde{\nu}^2 > 0$ , c'est à dire

$$\frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\nu_K^2}{\nu_K^2 - \nu_*^2} > 0$$

Comme la fréquence keplerienne est deux à quatre fois plus élevée que la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons, le deuxième terme de l'équation précédente est fortement stabilisant. L'instabilité proposée par Spruit et Taam (1990) pour expliquer l'accrétion magnétosphérique ne se déclenche donc que pour des rayons inférieurs à celui du point selle où  $\frac{\partial B_z}{\partial r}$  est nul. Mais comme on a montré précédemment que le disque magnétosphérique est confiné à l'extérieur du point selle, il n'y a pas de gaz qui peut être accrété, et donc il manque encore un élément à ce scénario. . .

#### 6.4.2 Rôle de la pression de radiation

Cette brique manquante est à chercher du côté des disques de noyaux actifs de galaxie pour lesquels Pringle (1996) a développé un modèle de gauchissement. Dans ce modèle la pression de radiation due à la partie centrale de la galaxie, agit sur les parties externes en les déformant. Dans le cas qui nous intéresse, la déformation du disque magnétosphérique est due à l'illumination par la surface de l'étoile à neutrons ainsi que par les parties internes du disque keplerien. En particulier on s'attend à une forte luminosité de la couche limite dans laquelle le gaz en rotation keplerienne est ralenti jusqu'à tourner en rotation solide dans la magnétosphère de l'étoile. La deuxième différence par rapport au cas de Pringle réside dans la vitesse angulaire du gaz qui est ici fixe et égale à celle de l'étoile à neutrons.

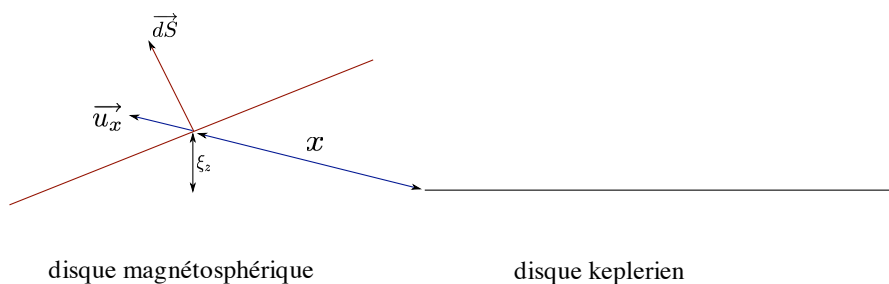


Figure 6.9 – Définitions des notations utilisées dans le calcul suivant.

La force de pression de radiation s'écrit

$$dF = \frac{2}{3c} dL$$

où  $dL$  est la luminosité émise par l'élément de surface  $dS$  de la couche limite considérée axisymétrique et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

$$\begin{aligned} dL &= \frac{L}{4\pi x^2} |\mathbf{u}_x \cdot d\mathbf{S}| \\ \frac{dF_z}{dS} &= \frac{L}{4\pi x^2} \frac{2}{3c} \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}}{dS \cdot x} \\ &= \frac{L}{6\pi c x^3} (-\partial_r \xi_z, -\frac{1}{r} \partial_\theta \xi_z, 1) \cdot (-x, 0, \xi_z) \\ &= \frac{L}{6\pi c x^2} (\xi_z/x + \partial_r \xi_z) \end{aligned}$$

Ici  $x$  est la distance entre le disque magnétosphérique et l'élément de surface  $dS$  et  $c$  la vitesse de la lumière. On a ici considéré que la force de pression de radiation est dominée par les photons issus de la zone de la couche limite la plus proche de l'élément de disque magnétosphérique considéré (Figure 6.9).

Si on ajoute la pression de radiation dans la relation de dispersion 6.6, on obtient alors

$$(\nu_\nu - m\nu_*)^2 = \nu_K^2 + 2 \frac{r(\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z} \partial_r B_z + \frac{B_r^2}{2\pi^2 \Sigma} |k| - \frac{L}{6\pi c x^3 \Sigma} - i \frac{L}{6\pi c x^2 \Sigma} k$$

On voit que la pression de radiation ajoute un terme négatif et un terme imaginaire à  $\tilde{\nu}^2$ , elle est donc déstabilisante.

### L'onde prograde

On considère ici une onde se propageant dans le même sens que la rotation du disque donc on prend la racine positive de la relation précédente :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &= \nu_\nu - m\nu_* \\ &= \left[ \nu_K^2 + 2 \frac{r(\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z} \partial_r B_z + \frac{B_r^2}{2\pi^2 \Sigma} |k| - \frac{L}{6\pi c x^3 \Sigma} - i \frac{L}{6\pi c x^2 \Sigma} k \right]^{1/2} \quad (6.7) \\ &= \sqrt{R + iI} \end{aligned}$$

avec  $R$  et  $I$  les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{\nu}^2$ . Pour pouvoir étudier l'effet de la pression de radiation on considère celle-ci comme une perturbation, ce qui donne au premier ordre :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &\simeq \sqrt{R} + i \frac{I}{2\sqrt{R}} \\ v_g &= \frac{1}{2\sqrt{R}} \partial_k R = \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{B_r^2}{2\pi^2 \Sigma} \text{sgn}(k) \\ \gamma &= \frac{I}{2\sqrt{R}} = -\frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{Lk}{6\pi c x^2 \Sigma} \end{aligned}$$

où  $v_g$  est la vitesse de groupe de l'onde et  $\gamma$  son taux de croissance. Ce sont donc les ondes de nombre d'onde radial négatif qui sont amplifiées (onde 'leading'), et l'onde se propage vers l'intérieur du disque avec une vitesse de groupe faible car proportionnelle à la densité de surface. Un exemple d'ondes leading et trailing est donné sur la figure 6.10.

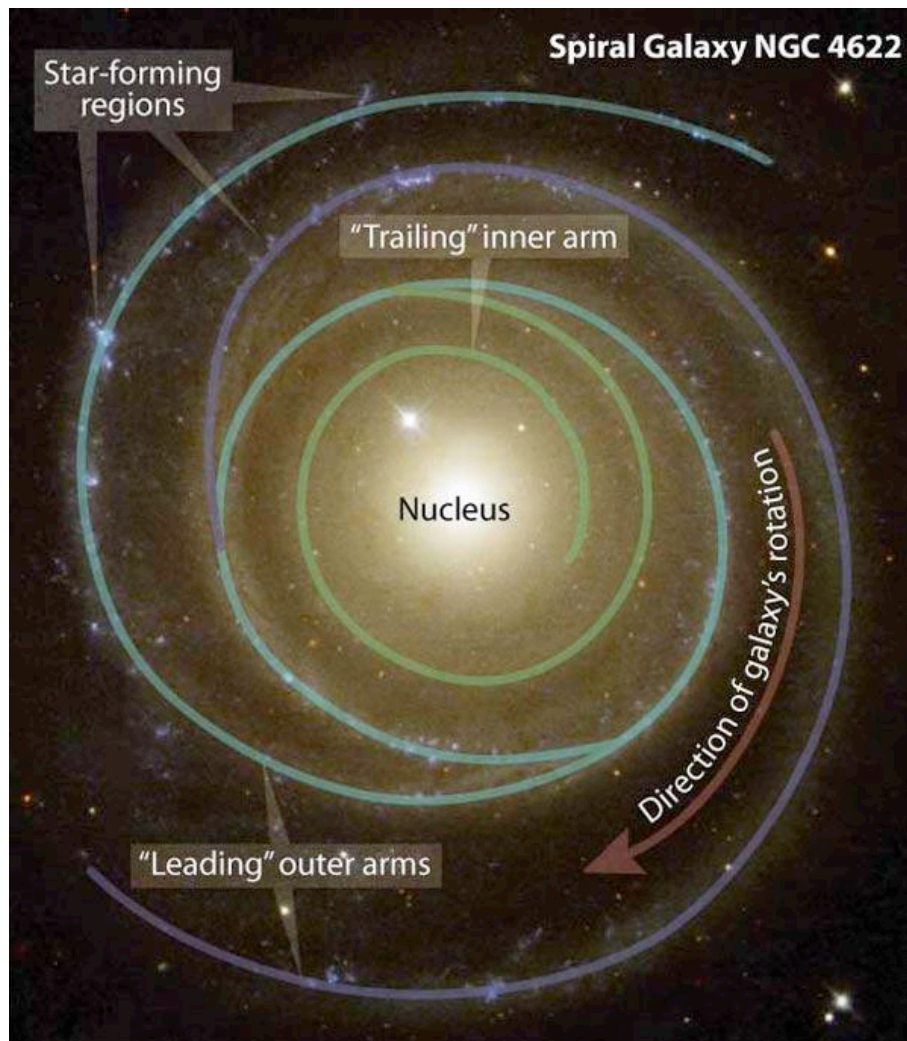


Figure 6.10 – Image de la galaxie NGC 4622 prise par Hubble et montrant les deux types d'ondes spirales : 'trailing' pour le bras intérieur qui se déroule dans le sens inverse du sens de rotation et 'leading' pour les deux bras extérieurs qui se déroulent dans le même sens que la rotation. (Z Levay/STScI)

### L'onde rétrograde

Par le même raisonnement, on trouve pour l'onde rétrograde un taux de croissance positif pour les nombres d'onde radiaux positifs (onde 'trailing'), et une onde qui se propage aussi vers l'intérieur du disque avec le même taux de croissance. Cependant par analogie avec les AGN où les observations ne montrent que des ondes leading, on peut penser que les ondes rétrogrades ne sont pas dominantes.

On retrouve comme Pringle que ce sont les ondes de plus grand nombre d'onde radial qui ont un taux de croissance le plus élevé, et comme pour les AGN (Ogilvie et Dubus 2001) on peut supposer que les effets non linéaires et dissipatifs coupent les hautes fréquences ne laissant observables que les faibles nombres d'onde. On choisira donc pour la suite les nombres d'onde les plus faibles :  $k \sim 1/x$ , ce qui signifie que la partie réelle et imaginaire de la pression de radiation dans l'équation de dispersion 6.6 prennent les mêmes valeurs.

## 6.5 Application aux QPO kHz

### 6.5.1 Fréquence des QPO

Dans le but d'appliquer le modèle précédent de gauchissement au QPO kHz, j'ai estimé la fréquence de l'instabilité à partir de l'équation 6.5. Cela nécessite dans un premier temps de connaître la configuration magnétique du système. Pour cela nous avons repris la modélisation de Lepeltier et Aly (1996). On considère une étoile à neutrons entourée d'un disque képlerien et d'un disque magnétosphérique. Le champ magnétique s'écrit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{B}_K + \mathbf{B}_M$$

où  $\mathbf{B}_*$  est le champ magnétique de l'étoile considéré comme dipolaire, alors que  $\mathbf{B}_K$  et  $\mathbf{B}_M$  sont dus aux courants dans les disques képlerien et magnétosphérique respectivement. Le diamagnétisme du disque képlerien est paramétré par  $\lambda$  :  $\lambda = 1$  si le disque repousse totalement les lignes de champs et  $\lambda < 1$  pour un disque partiellement diamagnétique. La famille de solutions proposée par Lepeltier et Aly (1996) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_* &= \mathbf{B}_1((1 - \lambda)\mu_1, \infty) \\ \mathbf{B}_K &= \mathbf{B}_1(\lambda\mu_1, r_M) \\ \mathbf{B}_M &= \mathbf{B}_3(j, r_M) \end{aligned}$$

où  $r_M$  est le rayon interne du disque képlerien,  $j$  est le courant azimuthal du disque magnétosphérique,  $\mu_1$  le moment magnétique du disque.  $\mathbf{B}_{1,3}$  sont calculés à partir de leurs fonctions de flux magnétique  $f_{1,3}$ . Une fonction de flux magnétique est définie telle que le champ magnétique suive les isosurfaces de cette fonction :  $\mathbf{B} \cdot \nabla f = 0$ . Dans le cas axisymétrique les lignes de champ sont donc les isocontours de  $f$  et le champ magnétique peut se réécrire

$$\mathbf{B}(r, z) = \frac{1}{r} \nabla f \times \mathbf{u}_\phi + B_\phi \mathbf{u}_\phi$$

On utilise ici des unités sans dimensions puisque c'est la géométrie et non la valeur du champ magnétique qui nous intéresse.

$$f_1(\mu, d) = \frac{2\mu}{\pi r} \left( \frac{r^2 X^2 - d^2 \cos^2 \theta}{d^2 X} + \sin^2 \theta \arctan X \right)$$

avec  $X = \left\{ \frac{1}{2} \left( \left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right)^2 + 4 \frac{d^2}{r^2} \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}}$ , et

$$f_3(j, d) = r \sin \theta \int_0^\infty g(k) J_1(kr \sin \theta) e^{-kr \cos \theta} dk$$

où  $J_1$  est la première fonction de Bessel au premier ordre et

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_0^d \left( \frac{\sin(ks)}{ks} - \cos(ks) \right) \frac{G(s)}{s} ds \\ G(s) &= \frac{4}{r_i^2} \int_0^s \frac{t^2 j(t)}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \\ j(r_i < r < r_M) &= j_0 \frac{4r_i r_M}{(r_M - r_i)^2} \frac{(r_M - r)(r - r_i)}{r^2} \end{aligned}$$

où  $r_i$  est le rayon interne du disque magnétosphérique. La géométrie magnétique obtenue est présentée dans la figure 6.11. Les lignes de champs sont obtenues en traçant les isocontours de la fonction de flux.

La fréquence de l'instabilité est ensuite estimée en négligeant l'effet de l'illumination et le dernier terme du membre de droite de l'équation 6.5 qui est proportionnel à la densité de surface. Pour l'onde prograde on obtient :

$$\nu_v = m\nu_* + \left[ \nu_K^2 + 2 \frac{r(\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z} \partial_r B_z \right]^{1/2}$$

La figure 6.12 présente les résultats obtenus avec des choix d'unités tels que  $r_M = 1$ ,  $GM_* = 1$ , et un disque magnétosphérique qui s'étend entre  $r_i = 0.8$  et  $r_M$ . On a tracé  $\Delta\nu/\nu_* = \nu_v - \nu_K$  en fonction de  $\nu_*/\nu_K$ , avec  $\nu_K = 1$  dans ces unités. Cette courbe est à comparer à celle de Méndez et Belloni (2007) présentée sur la figure 6.5.

Sur cette figure on peut voir que l'évolution générale est correcte mais les valeurs numériques de la différence de fréquence entre les QPO  $\Delta\nu$  ne sont pas cohérentes avec les observations. Deux raisons peuvent être proposées pour répondre à ce problème. Tout d'abord notre calcul surévalue cette différence en ne prenant pas en compte le terme luminosité qui pourtant est du même ordre de grandeur que le taux de croissance comme expliqué dans le paragraphe 6.4.2. Ensuite, l'interface entre le disque képlerien et la magnétosphère est mal contraint.

### 6.5.2 L'interface disque/magnétosphère

Pour essayer de comprendre comment cette interface peut jouer un rôle dans le calcul des fréquences des QPO, nous avons modifié les paramètres du modèle. On considère une couche limite plus large avec un disque képlerien non parfaitement diamagnétique qui peut donc être traversé par des lignes de champs

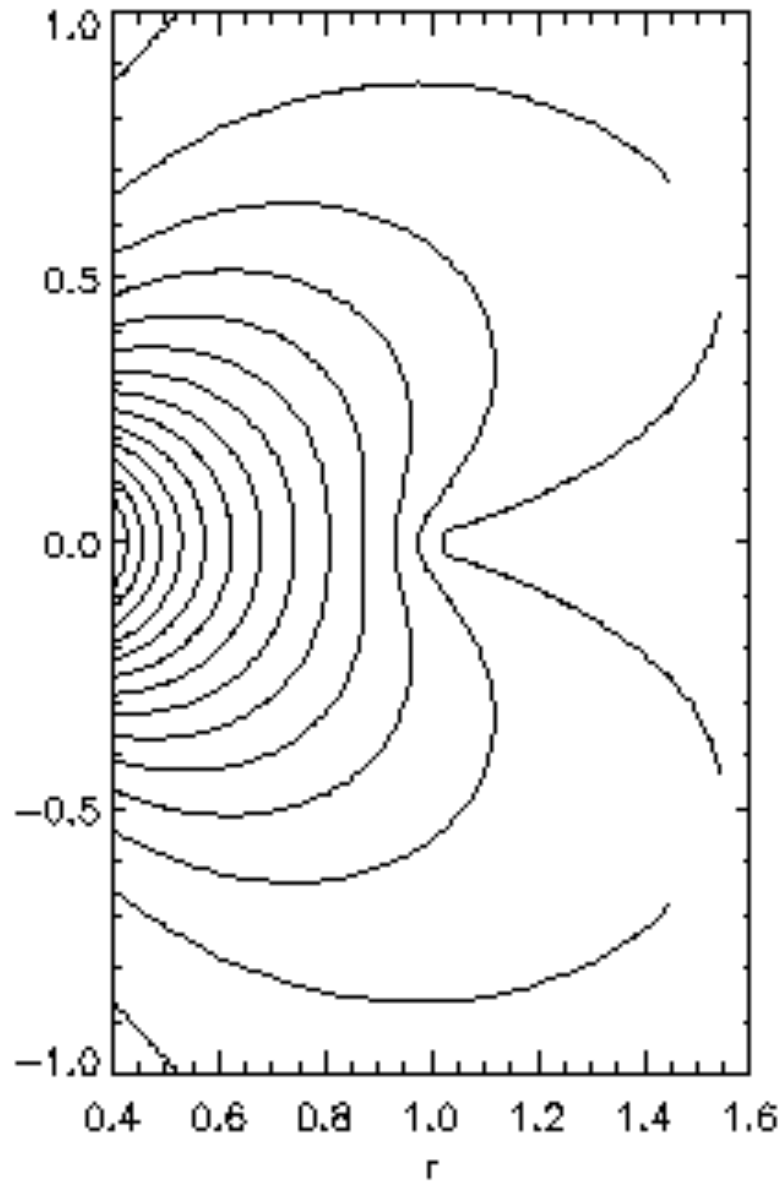


Figure 6.11 – Configuration magnétique obtenue à partir du calcul de Lepeltier et Aly (1996) avec  $\mu_1 = 10$ ,  $j_0 = -10$ ,  $r_i = 0.8$ ,  $r_M = 1.$ ,  $\lambda = 0.8$ .



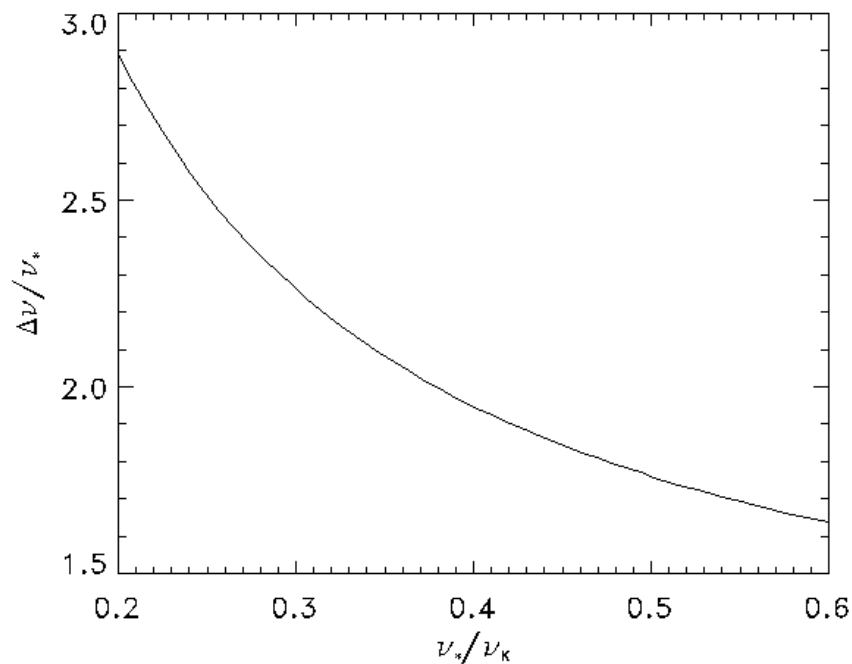


Figure 6.12 – Courbe de  $\Delta\nu/\nu_*$  en fonction de  $\nu_*/\nu_\kappa$  avec  $\lambda = 1$

de l'étoile à neutrons. Cette configuration paraît difficilement concevable avec les valeurs courantes de résistivité du disque, cependant c'est un moyen pour modéliser un disque képlérien ayant un champ magnétique propre avec des lignes de champs ouvertes à l'infini ne posant pas le problème de la résistivité du disque. Ce choix de paramètres modifie la géométrie du champ magnétique et par conséquent la position du point selle. Sur la figure 6.13, le champ magnétique vertical est tracé en fonction du rayon pour trois valeurs du paramètre de diamagnétisme  $\lambda$ . Comme on pouvait s'y attendre, le point selle prend une position d'autant plus centrale que  $\lambda$  augmente, et cela modifie la valeur de  $\Delta\nu$  (voir la figure 6.14).

On voit qu'avec un disque ayant son propre champ magnétique, on obtient des valeurs plus proches des données observationnelles. Cependant nous n'avons pas cherché à optimiser les valeurs des paramètres du modèle pour nous rapprocher des observations sachant qu'une partie de la physique du modèle n'est pas prise en compte dans ces estimations.

Pour avoir un meilleur modèle de l'interaction du disque avec la magnétosphère, des simulations numériques tridimensionnelles seraient nécessaires. Les simulations de Romanova et al. (2002), Romanova et al. (2003) et Bessolaz et al. (2008) donnent un premier aperçu pour le cas des étoiles jeunes. Leurs simulations axisymétriques des colonnes d'accrétion confirment une chute de la densité au rayon magnétosphérique (voir la figure 6.15).

Cependant, dans ces simulations, la pénétration du gaz dans la magnétosphère est due à la dissipation numérique et non à l'instabilité d'interchange

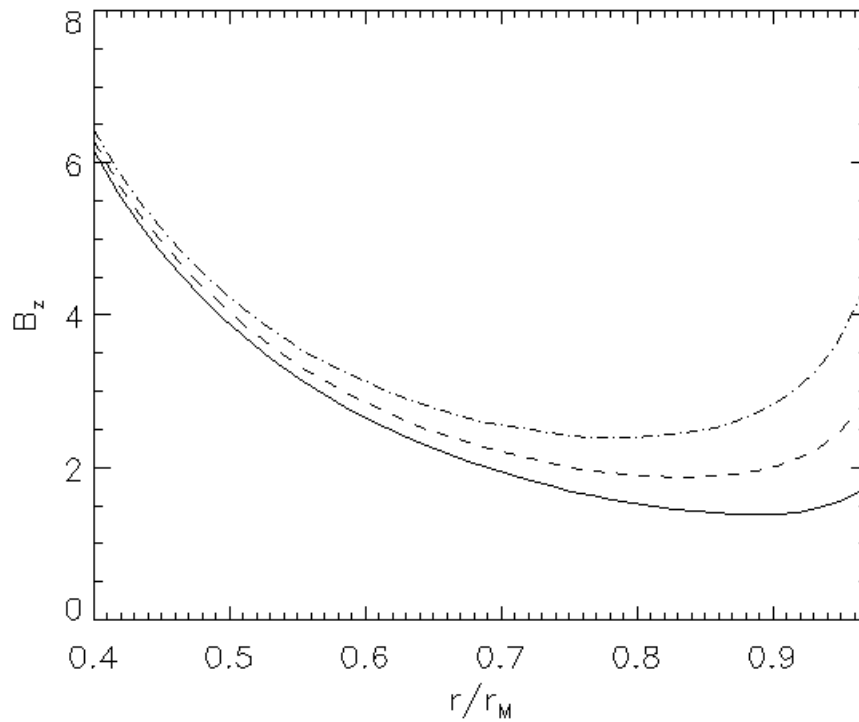


Figure 6.13 – Composante verticale du champ magnétique en fonction du rayon pour  $\lambda = 0.3$  (ligne continue), 0.6 (tirets), 1. (point-tiret). On voit que le rayon du point selle diminue lorsque  $\lambda$  augmente.

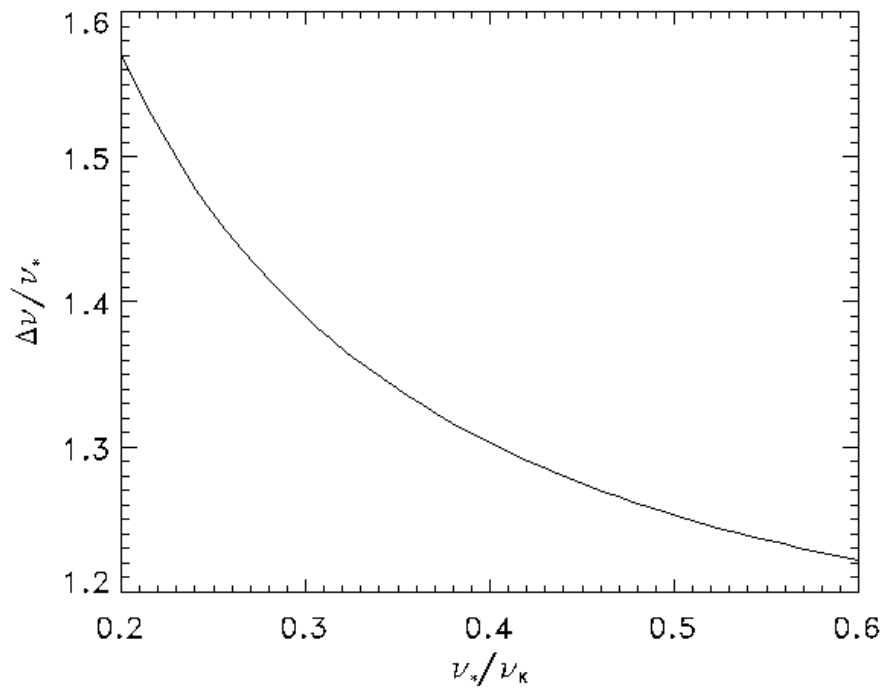


Figure 6.14 – Courbe de  $\Delta\nu/\nu_K$  en fonction de  $\nu_*/\nu_K$  avec cette fois ci  $\lambda = .88$ .

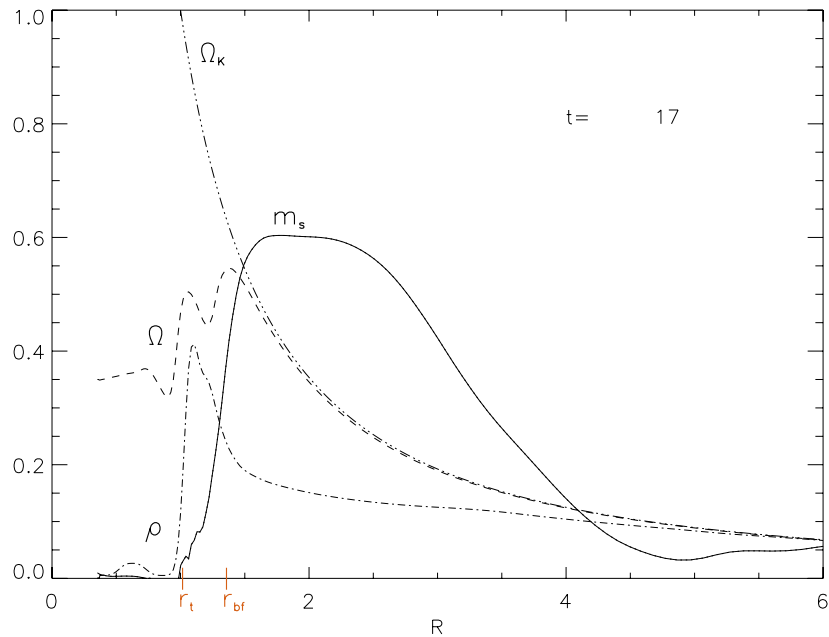


Figure 6.15 – Distribution radiale de la densité, des vitesses angulaires et Keplerienne et du nombre de Mach obtenus dans la simulation de Bessolaz et al. (2008).

qui ne peut être modélisée de manière axisymétrique. De plus, le mouvement vertical n'est pas déclenché par l'instabilité de gauchissement comme dans notre modèle mais par le gradient vertical de pression. Dans le cas des disques d'étoiles à neutrons, l'accrétion polaire ne peut pas être initiée par la pression car le gaz est froid.

## Bilan

Le modèle que nous avons développé propose un mécanisme permettant l'accrétion du gaz sur l'étoile à neutrons ; ce mécanisme étant dû à la combinaison de deux instabilités ; l'instabilité d'interchange permettant le déplacement radial du gaz dans la magnétosphère et l'instabilité de gauchissement permettant d'éjecter le gaz verticalement le long des lignes de champs. De plus, nous avons montré que ce mécanisme peut aussi expliquer la présence de QPO kHz. Un calcul précis de la valeur de la fréquence de ces QPO ne peut pas être effectué dans l'état actuel de nos connaissances sur l'interface entre le disque et la magnétosphère, mais une première estimation de la fréquence des QPO peut être obtenue. Nous avons montré que les effets négligés dans le calcul auront tendance à rapprocher ces estimations des valeurs observées.

Pour compléter ces résultats, ce travail devrait se poursuivre par des simulations numériques améliorées du champ magnétique du système à partir des résultats de Lepeltier et Aly (1996), ou en passant à trois dimensions les simulations axisymétriques de Bessolaz et al. (2008) permettant ainsi de prendre en compte l'instabilité d'interchange. Par ailleurs il serait intéressant de pouvoir ajouter les effets non-linéaires et visqueux, comme cela a été fait pour

l'étude des ondes de gauchissement des AGN. Ceux-ci pourraient permettre d'expliquer la préférence de l'onde prograde par rapport à l'onde rétrograde. Finalement, ce gauchissement devrait avoir une signature observationnelle détectable. La modulation due aux effets d'ombres et de réflexion devrait être modélisée et comparée aux observations.

# Bilan et perspectives

## Bilan méthodologique

L'ordonnement de cette thèse ne correspond pas à l'ordre chronologique dans lequel ont été faites les différentes parties, mais à un ordre permettant de comprendre la physique et les enjeux du travail présenté.

Le premier article publié durant ma thèse concernait en effet les QPO kHz des étoiles à neutrons. Ce projet fut particulièrement formateur puisqu'il m'a appris à problématiser une situation astrophysique. Cela se traduit souvent par faire le choix des effets qui seront pris en compte et des effets qui seront négligés. Ce fût aussi un plaisir d'avoir un nouvel exemple de l'unité de la physique puisque j'ai pu découvrir que les méthodes développées pour la mécanique quantique (comme WKB) étaient très utiles dans un domaine bien différent : la MHD.

Je poursuivais en même temps les simulations numériques sur l'instabilité par ondes de Rossby et des tourbillons tridimensionnels qui m'ont fait découvrir toute la subtilité de ce type de méthodes et la nécessité de bien maîtriser ses outils. C'est alors qu'il m'est apparu que la notion du temps dans l'expérience de la recherche n'a rien à voir avec le temps des équations de la physique classique : il est tout sauf linéaire et régulier. Ces simulations numériques m'ont aussi permis de proposer une nouvelle méthode numérique d'étude des instabilités tridimensionnelles.

Les résultats inattendus mais très intéressants de ces simulations nous ont poussés à effectuer une étude analytique de cette instabilité puisque celle-ci n'avait jamais été faite à trois dimensions. La rotation différentielle du disque a alors montré toute une physique particulièrement riche au point que nos outils analytiques se sont montrés insuffisants pour la décrire. Et c'est à cette occasion qu'un détour dans le plan complexe s'est révélé être, non pas un seul outil mathématique, mais une nécessité de la physique.

Et alors que j'avais découvert les disques d'accrétion par une spécialité astroparticule dans un master de physique des particules, les tourbillons tridimensionnels m'ont emmenée jusqu'à l'étude de la formation des planètes. J'ai donc appris qu'il fallait toujours rester curieux à l'égard des thématiques de recherches différentes qui peuvent se révéler bien plus proches de son sujet que l'on aurait pu l'imaginer.

## Bilan scientifique

L'étude des tourbillons dans les disques d'accrétion que j'ai entrepris dans cette thèse a permis de modifier la vision qu'on pouvait se faire de ces objets en particulier dans leur structure tridimensionnelle. J'ai tout d'abord montré que ces tourbillons peuvent apparaître et survivre dans un disque tridimensionnel

en rotation différentielle. Alors que l'on croyait que ces tourbillons reproduisaient dans la structure verticale leur structure du plan médian du disque, il est apparu qu'ils ont une véritable structure pleinement tridimensionnelle qui ne peut pas se réduire à une structure bidimensionnelle qui serait couplée à une propagation verticale. De plus nous avons montré que cette structure ne pouvait pas s'étudier analytiquement par les méthodes classiques du type WKB et que des simulations numériques sont nécessaires. Nous avons aussi montré que du fait de cette structure tridimensionnelle et parce qu'ils survivent suffisamment longtemps, les tourbillons peuvent concentrer des poussières solides en leur coeur et ainsi accélérer le processus de formation planétaire.

Par ailleurs un modèle théorique pour les oscillations quasi-périodiques des binaires à étoiles à neutrons a été proposé. Celui-ci s'appuie sur le gauchissement de la partie interne du disque amplifié par l'illumination par les parties externes. La comparaison avec les observations montre une évolution globale correcte.

## Perspectives

Les résultats présentés dans cette thèse ouvrent de nombreuses perspectives pour de prochains travaux de recherche. En ce qui concerne les études analytiques, d'un côté le modèle analytique de QPO kHz proposé est limité par la modélisation de l'interface disque magnétosphère et devrait être poursuivie par une étude numérique pleinement tridimensionnelle de ce type de système. Plusieurs étapes sont encore nécessaires avant de pouvoir obtenir ces simulations, mais une fois obtenues, elles permettront de grandes avancées sur la compréhension non seulement des binaires à étoiles à neutrons mais aussi des étoiles jeunes. D'un autre côté, l'étude de l'instabilité par ondes de Rossby pourrait se poursuivre par une approche analytique en deux dimensions (puisque le cas 3D paraît difficilement faisable) mais dans des conditions plus proches de celles utilisées dans la simulation présentée dans cette thèse puisque cela n'a pas été fait. Le code de tir développé dans cette thèse pour l'étude tridimensionnelle pourrait alors être réinvesti. Dans les deux cas, les études analytiques doivent être couplées à des études numériques.

Par ailleurs, pour une étude plus complète de la RWI, il serait utile d'effectuer des simulations avec une équation d'énergie de manière à avoir un profil de température plus raisonnable. Les profils de température constants ou décroissants avec l'altitude ne sont pas satisfaisants puisqu'on s'attend à ce que la couronne située au dessus du disque soit plus chaude que celui-ci. Ce changement de structure verticale du disque risque de modifier largement la structure de l'instabilité. Et finalement, pour pouvoir appliquer la RWI à l'étude des QPO dans les microquasars, il faut prendre en compte le champ magnétique et effectuer des simulations magnétohydrodynamiques tridimensionnelles avec toutes les complications que cela entraîne. En effet, il n'existe pas de configuration de disque avec un champ magnétique vertical qui soit stable. L'étude d'une instabilité dans ces conditions est un défi !

Concernant l'application des tourbillons à la formation des planètes, les

résultats obtenus ne sont qu'un premier pas vers une simulation complète à deux fluides, voire éventuellement une simulation couplant VAC et un code particulaire suivant l'évolution des particules individuelles. Mais pour pouvoir ainsi suivre des particules de très petite taille, il serait préférable d'effectuer dans un premier temps une simulation sur grille adaptative de manière à avoir une forte résolution au centre des tourbillons. L'utilisation de AMRVAC sera donc nécessaire.

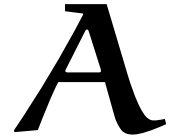




Quatrième partie

Annexes





# Differents types de codes pour la physique des fluides

Cette annexe a pour but de présenter succinctement différentes méthodes numériques utilisées pour modéliser des fluides. Seules les principales caractéristiques de ces méthodes sont mentionnées dans le but de les comparer avec la méthode utilisée dans cette thèse et d'expliquer son choix pour les applications présentées précédemment. J'ai en effet eu l'occasion de tester des codes très différents lors de l'école "Supercomputing and numerical techniques in Astrophysics fluid flow modelling" à Evora et du module "Description fluide et cinétique des plasmas" de l'Observatoire de Paris.

## A.1 Les codes Vlasov

La matière à l'état de plasma est composée de protons et d'électrons qui ne sont pas liés dans un atome neutre, et le mouvement de ces particules peut être décrit par les équations de la physique des plasmas cinétiques. Dans un code cinétique, les grandeurs physiques sont décrites par des fonctions de distributions dans l'espace des phases à six dimensions et c'est l'équation de Vlasov couplée aux équations de Maxwell que l'on résout. Ces codes seraient bien trop lourds en temps de calcul pour décrire tout un fluide, mais ils permettent l'étude des plasmas qui ne sont pas dans les conditions de validité de la MHD, comme les plasmas non-collisionnels. Les codes Vlasov décrivent la plupart des effets plasmas Ils permettent de mettre en évidence des phénomènes cinétiques qui n'existent pas en MHD dont l'effet Landau est un exemple.

## A.2 Les codes particulaires

Ce type de code appelé aussi codes PIC (particles in cell) décrit le mouvement de particules ou de 'super-particules' composées d'un grand nombre de particules. Ils permettent de prendre en compte les corrélations entre particules (avec quelques difficultés cependant) qui sont éliminées dans l'équation de Vlasov. Par comparaison avec les méthodes sur grille ils simplifient la résolution de l'équation d'advection.

### A.3 Les codes SPH

Les méthodes SPH (*Smooth Particles Hydrodynamics*) considèrent un ensemble de superparticules dont les propriétés physiques sont les moyennes sur les particules proches. Alors que les méthodes cinétiques et hybrides sont réservées à l'étude des plasmas non collisionnels, les codes SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) sont davantage utilisés pour l'étude des fluides non magnétisés malgré plusieurs tentatives pour prendre en compte le champ magnétique. Ce type de code permet d'alléger la charge de calcul mais ils sont très dissipatifs et par conséquent souvent mal adaptés à l'étude d'instabilités. De plus Rein et al. (2010) ont montré que les codes utilisant des super-particules composées d'un grand nombre de particules ne convenaient que si les interactions entre particules n'ont pas besoin d'être décrites précisément. Ils considèrent donc que ces codes sont adaptés aux milieux non-collisionnels ou fortement collisionnels mais pas aux disques protoplanétaires qui sont dans un état intermédiaire.

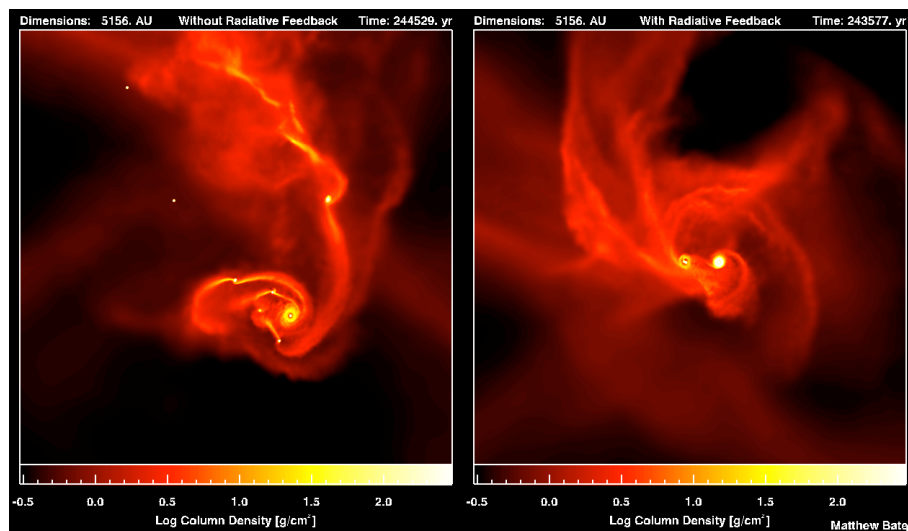


Figure A.1 – Simulations SPH de la formation d'un cluster d'étoiles avec et sans transfert radiatif. (M. Bate)

### A.4 Les codes sur grille

Dans ce cas le plasma est assimilé à un fluide et ce sont les équations MHD qui sont résolues par le code. Les méthodes de résolution sur grille de ces équations sont détaillées dans le paragraphe suivant. Dans certains cas le fluide est composé de plusieurs populations qui sont décrites par des équations séparées, on parle alors de code multifluides. J'ai utilisé cette approche pour étudier l'évolution conjointe du gaz et des poussières dans un disque protoplanétaire (chapitre 5).

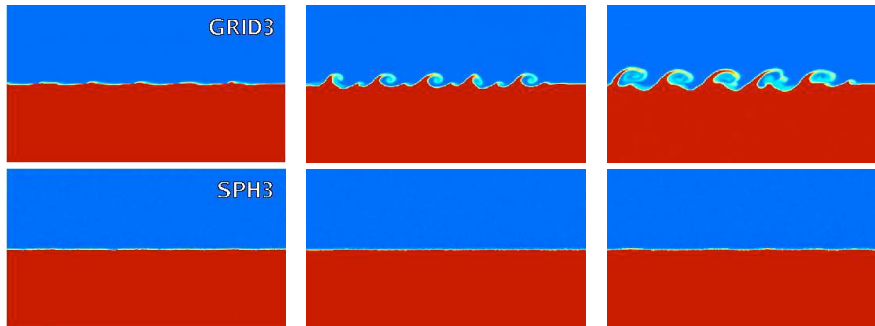


Figure A.2 – Comparaison entre une simulation SPH et une simulation sur grille de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. (Agertz et al. 2007)

## A.5 Les codes hybrides

Les codes hybrides utilisent les deux méthodes précédentes : les protons sont considérés comme des particules et leurs trajectoires sont calculées comme dans un code particulaire tandis que les électrons sont assimilés à un fluide, et les grandeurs physiques associées aux électrons sont calculées sur grille.

## A.6 Les codes spectraux

On peut aussi utiliser une méthode spectrale qui consiste à projeter les solutions sur une base orthogonale de fonctions. Il s'agit d'un cas particulier des codes sur grille. Cette méthode a l'avantage d'être très peu dissipative, mais les temps de calculs peuvent être très longs puisque le temps de calcul est en  $n^2$  où  $n$  est la dimension de la base, alors que les codes sur grille sont en  $n$  ( $n$  est alors la dimension de la grille). Le temps de calcul peut être réduit par l'utilisation des transformées rapides par exemple dans le cas de la base de Fourier. Les chocs sont mieux traités que dans les méthodes aux différences finies mais il reste toujours des oscillations proches des forts gradients (phénomène de Gibbs).



# B

## Articles publiés

Cette annexe reproduit les deux articles qui ont été publiés durant ma thèse dans des journaux à comité de lecture. Le premier article porte sur le modèle de gauchissement des disques autour des étoiles à neutrons et son application aux QPO kHz, cela correspond donc au chapitre 6 de cette thèse. Il a été publié dans la revue 'Monthly Notices of the Royal Astronomical Society' (Meheut et Tagger 2009). Le deuxième article porte sur les simulations numériques de l'instabilité par ondes de Rossby qui ont été présentées dans le chapitre 3. Il a été publié dans 'Astronomy and Astrophysics' (Meheut et al. 2010).

# Warping modes in discs around accreting neutron stars

H. Meheut<sup>1★</sup> and M. Tagger<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*AstroParticules et Cosmologie (APC), UMR 7164, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, F75205 Paris, Cedex 13, France*

<sup>2</sup>*Laboratoire de Physique et Chimie de l'Environnement et de l'Espace (LPC2E), CNRS, 3A avenue de la Recherche Scientifique, 45071 Orléans, Cedex 2, France*

Accepted 2009 June 25. Received 2009 June 25; in original form 2009 March 9

## ABSTRACT

The origin and stability of a thin sheet of plasma in the magnetosphere of an accreting neutron star are investigated. First, the radial extension of such a magnetospheric disc is explored. Then a mechanism for magnetospheric accretion is proposed, reconsidering the bending wave explored by Agapitou, Papaloizou & Terquem, that was found to be stable in ideal magnetohydrodynamics. We show that this warping becomes unstable and can reach high amplitudes, in a variant of Pringle's radiation-driven model for the warping of active galactic nucleus accretion discs. Finally, we discuss how this mechanism might give a clue to explain the observed X-ray kilohertz quasi-periodic oscillation of neutron star binaries.

**Key words:** accretion, accretion discs – instabilities – MHD – stars: neutron.

## 1 INTRODUCTION

Neutron star binaries are at the centre of numerous investigations since they are the laboratory of extreme physics, combining high magnetic fields and strong gravity. These effects dominate the interface between the star magnetosphere and the accretion disc, with which the present work is concerned. Although many works have been dedicated to descriptions of this interface, a fully consistent model is still not available. In the pioneering work of Ghosh & Lamb (1979), a strong anomalous resistivity was assumed in the disc; this allows magnetic field lines anchored in the neutron star and rotating with it to thread the disc over an extended transition region, while the gas remains in differential rotation. More recent works have rather considered a weaker resistivity, resulting in a sharp transition between the disc and the magnetosphere.

In subsequent work Spruit & Taam (1990) showed that an interchange instability, at the disc/magnetosphere interface, could allow the gas to penetrate from the Keplerian disc into the magnetosphere, and they studied its subsequent fate. In particular they showed that, depending on the configuration of the magnetosphere, the gas could reach a radius where its vertical motion (along the field lines) could in turn become unstable to a warping mode, leading to magnetospheric accretion. However, Lepeltier & Aly (1996) later found that the gas could form a stable magnetospheric disc, supported against gravity by the magnetic field in a structure very similar to the 'helmets' of stable cold gas suspended on magnetic field lines, commonly observed in the solar chromosphere. Furthermore, they found that the interchange mode was strongly stabilized by line tying, i.e. the fact that, since magnetospheric field lines are tied to the surface of the neutron star, they need to be bent somewhere between the surface and the disc to accommodate interchange motion in the

disc; the required energy is large and is expected to stabilize the mode in most realistic magnetic configurations.

Numerical works (Romanova et al. 2002, 2003; Bessolaz et al. 2008) have addressed this question, but they are still dominated by a relatively strong dissipation. Thus, although they can address the extremely complex case where the rotation axis of the disc, the spin axis of the neutron star and its dipolar magnetic moment are misaligned, and do show the possibility of magnetospheric accretion, this dissipation can be considered as modelling the effect of these instabilities, but they cannot study the instabilities themselves.

In these works the emphasis was on possible instabilities of purely magnetohydrodynamics (MHD) origin, for which instability criteria were derived. In this case, when the modes are unstable their frequency is purely imaginary; they have a zero real frequency [ $\text{Re}(\nu_{\text{osc}}) = 0$ ] in the gas frame, and would always be observed Doppler shifted to rotate at the neutron star rotation frequency  $\nu_*$ .

In the present work we reconsider warp oscillations that are stable in the pure MHD context, but become unstable by a different process of radiative origin.

We first present in Section 2 the general set-up and geometry we consider, and we show how gas can enter the neutron star magnetosphere to form a disc. In Section 3 we show that the bending mode considered by Agapitou, Papaloizou & Terquem (1997) is stable in the configuration considered here but that radiative forcing can make it unstable, in a variation of the mechanism developed by Pringle (1996) to explain the warping of the external part of active galactic nucleus (AGN) accretion discs. We also discuss how this instability, since it gives the gas strong vertical oscillations, might provide the transition from radial accretion (in the Keplerian disc, followed by the interchange mode at its inner edge) to magnetospheric accretion along magnetic field lines, on to the neutron star.

We note here that our approach is different from that of Ogilvie & Dubus (2001) and Ferreira & Ogilvie (2008), who consider warps of the differentially rotating disc (not the magnetospheric disc we

★E-mail: hmeheut@apc.univ-paris7.fr

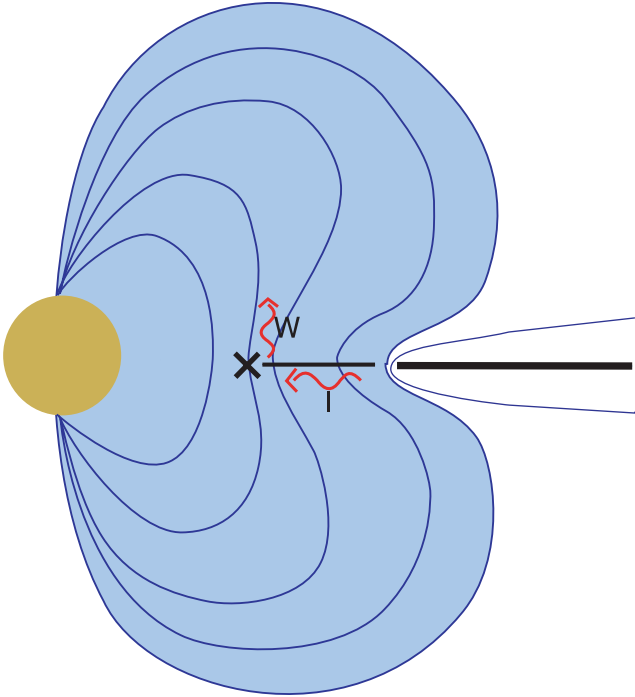


consider here), excited by various mechanisms. It is also different from the warps observed in numerical MHD simulations (Romanova et al. 2003) when the stellar magnetic field and the disc plane are misaligned.

## 2 MAGNETOSPHERIC DISC

### 2.1 Magnetic geometry

Let us first describe the geometry we consider, as shown in Fig. 1: the Keplerian accretion disc presses on the dipole magnetic field of the neutron star, so that a fraction of the magnetospheric field lines is pinched and has a concavity looking outward. There is necessarily a boundary layer (see Ghosh & Lamb 1979) where plasma from the accretion disc is picked up by magnetospheric field lines, rapidly slowing down from the Keplerian rotation frequency (typically of the order of 1 kHz) to the neutron star spin frequency (typically a few times slower). As previous authors (Spruit & Taam 1990; Lepeltier & Aly 1996), and contrary to Ghosh & Lamb (1979), we assume that this boundary layer is very thin. For this and a general discussion of the physics of the interaction between the disc and the stellar dipole field we will refer to the recent works of Romanova et al. (2003) and Bessolaz et al. (2008), where the emphasis was on T Tauri stars but where the general setup is similar.



**Figure 1.** Schematic representation of the model. The blue region is the neutron star magnetosphere, pinched by the Keplerian accretion disc. The magnetospheric disc inside the magnetosphere is supported against gravity by magnetic tension, while the Keplerian disc is a usual, centrifugally supported, accretion disc. The arrows schematise the physical process involved in the model: as the gas reaches the inner edge of the Keplerian disc it is picked up by magnetospheric field lines and slows down to the neutron star spin frequency  $\nu_*$ . Supported against gravity by magnetic tension, it is subject to the interchange instability which transports it inward toward the magnetic saddle point (marked by an X in the figure) where the concavity of the field lines changes. Radiation from the Keplerian disc and the stellar surface then makes it unstable to a warp wave, which can trigger magnetospheric accretion vertically along the field lines.

A strong toroidal current must reside in this boundary layer, marking the transition from field lines anchored on the neutron star to ones anchored in the disc, and the radial Lorentz force from this current must, at equilibrium, balance self-consistently gravity and centrifugal force in the transition from neutron star to Keplerian rotation frequency. It is important to note here that a large fraction of the luminosity from the system is emitted in this boundary layer, where the gas is rapidly slowed down from the Keplerian frequency at the inner edge of the disc to the neutron star rotation frequency, and at the surface of the neutron star.

In the resulting geometry there must thus be within the magnetosphere, as shown in Fig. 1, a radius where the concavity of the field lines changes from inward to outward. Using cylindrical coordinates  $(r, \phi, z)$ , it is easy to show that at this radius and in the disc mid-plane, the vertical component of the magnetic field  $B_z$  starts increasing with radius: indeed, following a field line upward from the mid-plane (where  $B_r = 0$ ), one sees that  $B_r$  is negative on a field line within this radius, and positive outside this radius: thus  $\partial B_r / \partial z$  changes sign at this radius and so does  $\partial B_z / \partial r$ , since outside the mid-plane we assume to be in vacuum with no currents, giving  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ . We call this region, marked by an X in Fig. 1, the magnetic saddle, since one easily shows that  $\partial^2 |B| / \partial z^2$  is negative while  $\partial^2 |B| / \partial r^2$  is positive; we call the corresponding radius  $r_{\text{saddle}}$ . We do not expect that force-free currents, which could exist if the magnetosphere is filled by a low-density plasma, would change this geometrical property.

### 2.2 Interchange instability

Spruit & Taam (1990), Lepeltier & Aly (1996) and Agapitou et al. (1997) have studied the MHD equilibrium and stability of the magnetospheric disc formed of plasma trapped in this configuration. One instability involves essentially radial motion, and the other one vertical motion. The first one is an interchange instability, classical in plasmas supported by magnetic fields against gravity: it interchanges flux tubes and the plasma they contain, and thus releases gravitational energy, if more plasma moves radially in than out, i.e. if initially the mass per unit magnetic flux increases outward. Spruit & Taam (1990) showed that this could allow plasma from the accretion disc to penetrate in the magnetosphere, and this gas forms what we call the magnetospheric disc, suspended against gravity mostly by the magnetic field; Lepeltier & Aly (1996) derived the stability condition of the interchange mode in the magnetospheric disc as (in our notations)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Sigma}{|B_z|} \right) \leq \frac{r |B_z|}{2\pi G M \Lambda}, \quad (1)$$

where  $\Sigma$  is the surface density in the disc (assumed infinitely thin),  $M$  is the mass of the neutron star and  $\Lambda$  is a parameter describing the geometry of the field line.

In this equation the left-hand side is the radial derivative of the mass per unit of magnetic flux, as expected from the physics of the interchange instability. The right-hand side describes the stabilizing effect of line tying, i.e. the fact that the field lines are anchored on the star: this implies that, although the instability involves motion essentially transverse to the field lines, some torsion must be applied to them as they are exchanged at the disc but not at the star surface. The energy this requires decreases or cancels the gravitational energy released in the interchange, stabilizing it.  $\Lambda$  is infinite on open field lines, is large on the outermost magnetospheric field lines, because they are long and can be twisted easily, and becomes  $\sim 1$  and strongly stabilizing on the innermost field lines. The

presence of  $\Sigma$  in the left-hand side implies that the stabilizing effect is extremely strong if the surface density of the magnetospheric disc is low, i.e. the release of gravitational energy cannot compete with the necessary magnetic energy.

Even without line tying one can show that the interchange, near marginal stability, cannot transport the gas inward from the magnetic saddle, which is also the radius where  $\Lambda$  decreases sharply. We thus conclude that the interchange instability results in penetration of the gas from the Keplerian disc, forming a tenuous disc where line tying is not yet efficient and accumulating gas where it becomes strong and quenches the instability. The exact radius where this happens cannot be farther in than the magnetic saddle, and depends very strongly on details of the Keplerian disc/magnetosphere interaction, which could be obtained only from a self-consistent computation such as the ones of Bessolaz et al. (2008), in three (rather than 2.5) dimensions in order to show the interchange mode.

This (a sudden drop in density at the magnetospheric radius, and a local density maximum inside the magnetosphere) is indeed observed in the simulations of Bessolaz et al. (2008), and shown in their fig. 4. However, there the penetration of the gas within the magnetosphere is due to dissipation and can thus only roughly represent the action of the interchange mode, whose development is prevented by the assumed axisymmetry. The quenching of radial transport, resulting from line tying stabilization of the interchange mode, is thus not taken into account.

### 3 WARPING INSTABILITY

#### 3.1 Bending wave

What happens beyond this was tentatively described by Spruit & Taam (1990) as resulting from the vertical MHD instability, which causes a warp of the magnetospheric disc and gives the gas some vertical motion: it can thus be expected to trigger magnetospheric accretion, vertically along the field lines. However, Lepeltier & Aly (1996) and Agapitou et al. (1997) refined the theory of this instability, taking into account rotation. We follow their simple approach (an aligned rotator), where the disc is infinitely thin and the neutron star magnetic axis is aligned with its spin, so that the unperturbed system is axisymmetric and the magnetic field purely poloidal:  $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$ .

Using a WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) approximation for the radial structure of the bending wave, Agapitou et al. (1997) find its dispersion relation:

$$(\nu_v - m\nu_*)^2 = \nu_K^2 + \frac{B_r^+}{2\pi^2\Sigma} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{2(B_r^+)^2}{4\pi^2\Sigma} |k|, \quad (2)$$

where  $\nu_v$  is the frequency of the wave,  $\nu_*$  is the neutron star spin frequency,  $\nu_K$  the vertical epicyclic frequency (equal to the Keplerian rotation frequency),  $B_r^+$  is the radial magnetic field at the disc surface,  $\Sigma$  the disc surface density and  $k$  and  $m$  are the radial and azimuthal wavenumbers of the perturbation  $\xi_z \sim \exp[i(kr + m\phi) - 2i\pi\nu t]$ .

In this equation, the right-hand side terms are given by the vertical restoring forces applied to the disc when it is displaced from its equilibrium position: the gravitational force appears through the epicyclic frequency, and the Lorentz force through the last two terms which correspond, respectively, to magnetic tension and magnetic pressure.

Furthermore, in equation (2),  $B_r^+$  is due to the azimuthal current in the disc, and this current in turn is responsible for the radial

support of the gas, suspended in the gravitational field by magnetic tension: the radial equilibrium is maintained by the balance of the vertically integrated gravity, centrifugal and Lorentz forces:

$$\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} - 4\pi^2 \nu_*^2 r \Sigma - 2B_r^+ B_z = 0, \quad (3)$$

where  $\Phi$  is the gravitational potential of the neutron star, linked with the Keplerian frequency, so that one finally gets (Agapitou et al. 1997)

$$\frac{B_r^+}{\Sigma} = \frac{4\pi^2 r (\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z}. \quad (4)$$

Thus equation (2) can be rewritten as

$$(\nu_v - m\nu_*)^2 = \nu_K^2 + \frac{r(\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} + 8\pi^2 r^2 (\nu_K^2 - \nu_*^2)^2 \frac{\Sigma}{B_z^2} |k|. \quad (5)$$

The surface density of the disc thus disappears from the second term in the right-hand side, which now depends only on the magnetic configuration. The third term, on the other hand, can in a first approach be neglected if the surface density of the gas is low enough.

In this approach one gets the stability criterion, for the MHD warp wave, from the condition that the right-hand side of equation (5) be positive:

$$\frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\nu_K^2}{\nu_K^2 - \nu_*^2} > 0. \quad (6)$$

Since observations show that at the inner edge of the Keplerian disc  $\nu_K$  is typically two to four times higher than  $\nu_*$ , and is even higher in the magnetosphere, the second term is strongly stabilizing so that the vertical mode becomes active only at a significant distance inward from the magnetic saddle (where  $\partial B_z / \partial r = 0$ ). This leaves a radial gap where the interchange can no more cause the gas to move in, and the vertical instability cannot yet cause it to move up along the field lines: the conventional MHD instabilities thus still leave a missing link between radial and magnetospheric accretion.

Romanova et al. (2002) and Bessolaz et al. (2008) find in their simulations that funnel flows can be initiated by the vertical pressure gradient in the gas. We note however that in this region of a neutron star magnetosphere (in contrast with the protostellar case with which these works are more concerned) the gas should be submitted to very rapid cooling, whereas in the absence of differential rotation, and assuming that the interchange mode is stabilized by line tying, there is no known source of turbulence to heat it, so that the formation of a pressure-driven funnel flow may be difficult.

In the present work we thus return to Spruit's original idea and present a model that could provide an alternative trigger for magnetospheric accretion. For this we will consider an additional mechanism that can make the warp unstable. Interestingly, this mechanism relies on the intense radiation field in the vicinity of an accreting neutron star.

#### 3.2 When the wave becomes an instability

We now turn to the radiative mechanism that can make the bending wave unstable, permitting it to reach high amplitudes. For this we use a variant of the model presented by Pringle (1996) to explain the warp observed in the outer region of the accretion disc of AGN. In that case radiation coming from the *inner* region of the disc and

pressing on the surface of the *outer* disc region was shown to make the warp wave unstable. Here on the other hand we are interested in an instability of the innermost (magnetospheric) region of the disc, and radiation can be assumed to come both from the surface of the neutron star and from the inner region of the Keplerian disc, immediately outside the magnetospheric disc. We find that both can result in warp instability, and we present here a derivation only for illumination from the Keplerian disc (i.e. from outside) since illumination from the stellar surface (i.e. from inside) is essentially the case studied by Pringle – with the difference that our disc is in solid rather than Keplerian rotation, at the stellar spin frequency  $\nu_*$ .

We assume for simplicity that the radiative flux is axisymmetric and comes from a transition ring at the magnetospheric radius; integrating over angles we find that the luminosity  $dL$  pressing on a surface  $dS$  of the magnetospheric disc is, in the same polar grid as before,

$$dL = \frac{L}{4\pi x^2} |\mathbf{u}_x \cdot d\mathbf{S}|, \quad (7)$$

where  $x$  is the radial distance between the surface element  $dS$  and the magnetospheric radius. Then the pressure force is

$$\begin{aligned} dF &= \frac{2}{3c} dL, \\ \frac{dF_z}{dS} &= \frac{L}{4\pi x^2} \frac{2}{3c} \frac{dS}{dS} \cdot \frac{\mathbf{x}}{x} \\ &= \frac{L}{6\pi c x^3} \left( -\partial_r \xi_z, -\frac{1}{r} \partial_\theta \xi_z, 1 \right) (-x, 0, \xi_z) \\ &= \frac{L}{6\pi c x^2} (\xi_z/x + \partial_r \xi_z), \end{aligned}$$

where  $c$  is the velocity of light and  $\xi_z$  the vertical displacement of the surface element. Adding this force in the equations of motion we get the dispersion relation, modified from equation (5):

$$\begin{aligned} (\nu_v - m\nu_*)^2 &= \nu_K^2 + 2 \frac{r(\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z} \partial_r B_z + \frac{B_r^2}{2\pi^2 \Sigma} |k| \\ &\quad - \frac{L}{6\pi c x^3 \Sigma} - i \frac{L}{6\pi c x^2 \Sigma} k. \end{aligned} \quad (8)$$

Taking for definiteness  $m$  positive, let us first consider the root

$$\begin{aligned} \nu_v - m\nu_* &= \left[ \nu_K^2 + 2 \frac{r(\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z} \partial_r B_z + \frac{B_r^2}{2\pi^2 \Sigma} |k| \right. \\ &\quad \left. - \frac{L}{6\pi c x^3 \Sigma} - i \frac{L}{6\pi c x^2 \Sigma} k \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

To lowest order, the wavefrequency will be close to

$$\nu_v \approx m\nu_* + \nu_K.$$

Treating the luminosity contributions as perturbations in order to identify the trend of their consequences, one finds easily that

- (i) waves with negative  $k$ , i.e. *leading* waves are amplified by radiation (as in Pringle's mechanism);
- (ii) these waves propagate radially inward, from the Keplerian disc/magnetospheric disc interface toward the magnetic saddle;
- (iii) their radial group velocity is proportional to  $\Sigma$ , i.e. they propagate very slowly if the surface density of the magnetospheric disc is weak. This leaves them ample time to be amplified from small perturbations at the disc/magnetosphere interface.

As in Pringle's mechanism, waves with a large radial wavenumber have stronger linear amplification, but we expect that, as in AGN

discs, non-linear and viscous effects (see Ogilvie & Dubus 2001 and references therein) will select the dominant mode. We note that in AGN the dominant observed mode has  $m = 1$  and a small  $k$  (small winding angle), but there as in neutron star binaries modes of smaller wavelength might result in a weaker modulation and be more difficult to observe.

Taking  $k \sim 1/x$  as the smallest possible wavelength, we note that the real and imaginary contributions due to the radiation field are of the same order in equation (8). This implies that a luminosity sufficient to induce strong amplification will also significantly decrease the real part of the frequency.

### 3.3 The retrograde wave

The dispersion relation, equation (8), also admits a retrograde wave obtained by taking the negative square root in the right-hand side:

$$\begin{aligned} \nu_v - m\nu_* &= - \left[ \nu_K^2 + 2 \frac{r(\nu_K^2 - \nu_*^2)}{B_z} \partial_r B_z + \frac{B_r^2}{2\pi^2 \Sigma} |k| \right. \\ &\quad \left. - \frac{L}{6\pi c x^3 \Sigma} - i \frac{L}{6\pi c x^2 \Sigma} k \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Examination of this relation shows that this wave would have the same characteristics as the 'direct' one we have discussed: leading waves with negative  $k$  are amplified and propagate inward with the same growth rate and group velocity. However, we note that a retrograde wave would also be possible in Pringle's model for AGN, but does not seem to appear in observations. We believe that this might be due to the very low level, at these frequencies, of the thermal noise from which the unstable wave has to grow. We will thus ignore the retrograde wave in our discussion.

## 4 TOWARDS A MECHANISM FOR KILOHERTZ QUASI-PERIODIC OSCILLATIONS?

If the radiation field is sufficient to make the warp wave strongly unstable, one should expect this to have observable consequences since it would result in the presence of a tilted surface, rotating at a frequency in the kilohertz range in the immediate vicinity of the most emissive regions of the star–disc system. Both obscuration of emissive regions and reflection of the luminosity should result in a strong modulation of the X-ray signal at that frequency, i.e. in a quasi-periodic oscillation (QPO). In this section we explore the possibility that the radiation-driven warp could explain one of the twin kilohertz QPOs observed in low-mass X-ray binaries (LMXB) that host a neutron star (van der Klis 2006). We find that, although this could solve some questions raised by models of these QPOs, it results in frequencies that do not correspond to the observed ones. This estimate is however still limited by the available models of the disc–magnetosphere interface. We will finally discuss possible properties of the disc–magnetosphere interface, not included in these models, that could produce warp frequencies in better agreement with the observed QPOs.

### 4.1 Observations

The frequencies  $\nu_1$  and  $\nu_2$  of the lower and upper kilohertz QPO can change by a factor of 2 in a given source but their separation  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$  varies little and was initially observed to stay close to the frequency of the burst oscillations, believed to be the neutron star spin frequency  $\nu_*$ . However,  $\Delta\nu$  is observed to decrease by a significant fraction when  $\nu_1$  and  $\nu_2$  reach their highest values. Until recently it was generally thought that  $\Delta\nu$  stayed close to either the

burst oscillation frequency or its half, but after a new examination of the data Méndez & Belloni (2007) have shown that the link between the two quantities is not so direct, as we will discuss below.

#### 4.2 A new approach

Numerous models have been proposed to explain the different types of QPO in LMXB. For the neutron star binaries kilohertz QPO, two main classes of models can be distinguished: those based on a beat frequency and those based on relativistic precession motion (Lamb et al. 1985; Miller, Lamb & Psaltis 1998; Stella & Vietri 1998; Stella & Vietri 1999).

We note here that a pre-supposition of both of these models, that  $\nu_2$  corresponds to the Keplerian rotation frequency at the inner disc edge, has remained widespread without further justification.

In these interpretations of the kilohertz QPO, two points stand out. The first one is that in these models the most ‘fundamental’ mode is the one associated with the Keplerian rotation frequency at the inner disc edge, at frequency  $\nu_2$ . We would thus expect the higher kilohertz QPO, to have a higher coherence, and thus a higher  $Q$  factor (where  $Q = \nu/\text{FWHM}$ , and FWHM is the frequency width at half-maximum) than the lower one at frequency  $\nu_1$ . However, the opposite is observed, i.e. the lower kilohertz QPO can have an extremely high  $Q$ , much higher than the other QPO (see e.g. Barret et al. 2005).

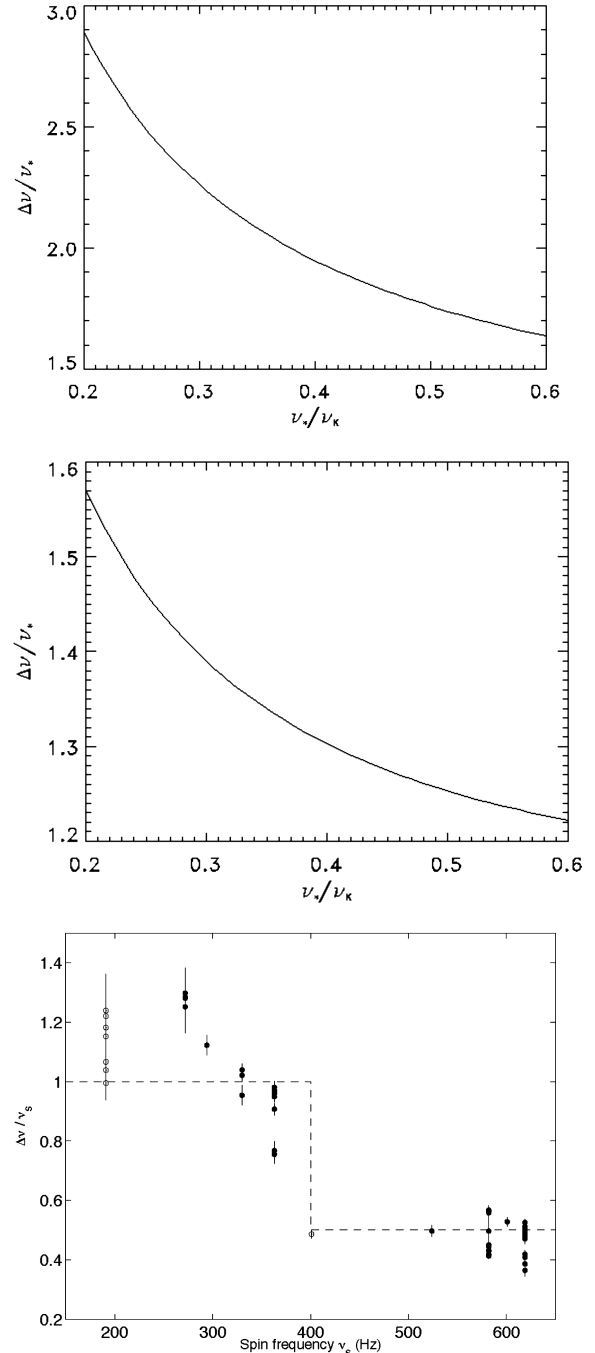
The second point we wish to address has been emphasized by van der Klis (2000): although the beat frequency model fails to explain the variations of  $\Delta\nu$ , the proximity between  $\Delta\nu$  and  $\nu_*$  would indicate that somehow the gas disc seems to ‘know’ about the neutron star spin frequency. This would be very difficult to explain, since any direct connection (e.g. by magnetic field lines) between the disc and the neutron star or its magnetosphere would mechanically imply a constant  $\Delta\nu$ .

In the present work we consider the gas that has entered the magnetosphere, and thus rotates at  $\nu_*$  (and will presumably end up accreted along magnetospheric field lines). Mirroring the previous argument, it would be difficult for this gas to know about the Keplerian rotation frequency in the disc. However, this gas feels the same gravity field that corresponds to the Keplerian rotation, although magnetic support allows it to rotate solidly at the stellar frequency. This gravity field also defines the vertical epicyclic frequency of the magnetospheric gas, so that according to equation (9) the warp frequency  $\nu_w$  should be close to  $\nu_K + \nu_*$  for an  $m = 1$  mode. Thus assuming that the lower kilohertz QPO (rather than the higher one as in other models) appears at the rotation frequency at the inner disc edge, one could expect the warp to appear as a higher frequency QPO with a frequency difference close to  $\nu_*$ .

However, additional terms appear in equation (9), and can substantially change the warp frequency. The main unknown quantities that can affect the frequency difference  $\Delta\nu$  are

- (i) the effect of the second term, due to the gradient of  $B_z$ , in the right-hand side of equation (9);
- (ii) the distance between the magnetospheric radius, where we assume that the QPO at frequency  $\nu_1$  originates, and the radius where the frequency of the warp must be computed.

This should be obtained from a self-consistent computation of the magnetospheric disc equilibrium, in three dimensions and with low enough dissipation to show the interchange instability and its consequences on the accretion of the gas. This is far beyond present theoretical or numerical possibilities. Lepeltier & Aly (1996) have studied simple exact models of such equilibrium configurations, in



**Figure 2.** The upper plot shows the dimensionless quantity  $\nu_w(r_0 = 0.8r_M) - \nu_K(r_M)/\nu_* = \Delta\nu/\nu_*$  in our model, when  $\nu_*/\nu_K(r_M)$  varies.  $\Delta\nu$  is the frequency difference between the two kilohertz QPO,  $\nu_*$  is the neutron star spin frequency and  $\nu_K(r_M)$  is the rotation frequency at the inner edge of the Keplerian disc. The lower plot is the observational data as plotted by Méndez & Belloni (2007). The shape of the curves is similar, although the numerical values differ, as explained in the text.

the case of a partially diamagnetic Keplerian disc. They found a class of stable equilibria that we can use to estimate representative values of the magnetic terms of the dispersion relation. We present in Appendix A detailed calculations of these terms, which let us calculate the resulting warp frequencies using equation (9).

Fig. 2(a) shows the resulting evolution of  $\Delta\nu$  as a function of  $\nu_*$  in one of these models. The free parameters are the neutron

star mass, spin and magnetic moment, the position  $r_M$  and  $r_i$  of the inner edges of the Keplerian and magnetospheric disc and finally the radius  $r_0$  of the magnetospheric disc where the frequency of the wave is computed. We have chosen the units such as  $r_M = 1$ ,  $GM = 1$  where  $G$  is the gravitational constant and  $M$  the neutron star mass. The magnetospheric disc extends between  $r_i = 0.8$  and  $r_M = 1$ , and the frequency of the wave is computed at  $r_0 = 0.8$ , the location of the magnetic saddle.

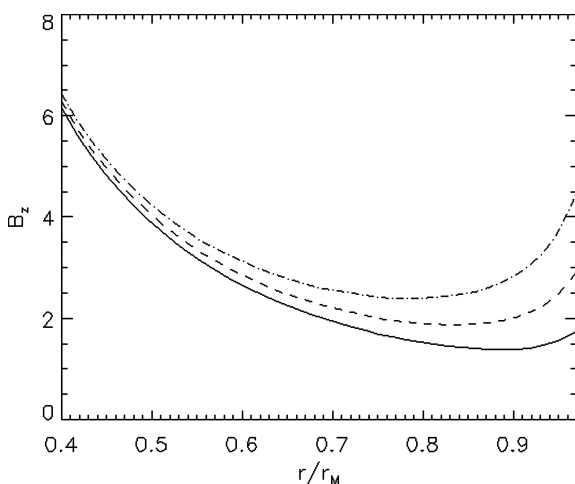
The general trend is that, as observed when comparing different sources,  $\Delta\nu$  decreases when  $\nu_*$  increases, although the ratio between them is higher than observed, but this depends both on the radii chosen and on the choice we have made in the class of equilibria of Lepeltier & Aly (1996).

### 4.3 The disc/magnetosphere interface

Fig. 2(b) shows the same plot as Fig. 2(a) using a different model, where the saddle is closer (at  $r_0 = 0.88$ ) and the disc is not fully diamagnetic, so that it is threaded by a fair amount of the neutron star magnetic flux.  $\Delta\nu$  is decreased but still remains larger than  $\nu_*$ . Obviously at this stage these results do not permit to consider the radiatively driven warp as an explanation for the observed QPO. There are however two effects that could reduce  $\Delta\nu$  to values compatible with the observations.

The first effect is the role of the luminosity, in equation (9). It contributes both to the growth rate and to the real part of the frequency, in a ratio equal to  $kx$ . Let us thus consider a luminosity high enough to make the warp strongly unstable, with a growth rate of the order of the rotation frequency: its effect on the warp frequency, for a large-scale warp ( $kx \sim 1$ ) will thus be to decrease  $\Delta\nu$  by a similar amount, bringing it to a better possible agreement with the observations – in particular the fact that  $\Delta\nu$  decreases at high luminosity.

The second effect can be understood by considering the radial profile of  $B_z$ , as shown in Fig. 3 with different sets of parameters:  $B_z$  first decreases outward (at low radius the dipole field of the neutron star is weakly affected by the disc), then has a minimum (the magnetic saddle) and increases toward the magnetospheric radius: this is due to the fact that in the basic model the disc is fully diamagnetic, rejecting the neutron star magnetic field: one thus has a strong current ring at the magnetospheric radius, explaining



**Figure 3.** Vertical component of the magnetic field in the plane of the disc in function of radius. The straight, dash and dotted–dash lines correspond to different values of the diamagnetic parameter, respectively,  $\lambda = 0.3, 0.6, 1$ .

the sharp rise of  $B_z$  which strongly increases the warp frequency, according to equation (9). When the diamagnetism (the parameter  $\lambda$  of Lepeltier & Aly 1996) is reduced, a part of the stellar field threads the disc, reducing the ring current and the rise of  $B_z$  – and finally  $\Delta\nu$ , as in Fig. 2(b).

Such a reduction of the diamagnetism is probably unrealistic, since the stellar field lines rotating at  $\nu_*$  in the disc would involve an extremely strong, and probably unrealistic, turbulent resistivity. However, the model does not include a magnetic field originating in the disc itself, with magnetic field lines open to infinity rather than tied to the star. We believe that the inclusion of this magnetic contribution would also reduce the ring current without requiring resistivity, and might result in a warp frequency in better agreement with the observed QPO frequency.

## 5 CONCLUSION

In this work we have explored a variant of the radiation-driven instability, found by Pringle (1996) to explain the warps observed in the outer region of AGN discs. In this variant radiation from the inner region of a neutron star accretion disc destabilizes the gas that has entered the stellar magnetosphere and formed a magnetospheric disc. The mechanism is similar, but can be expected to be even more effective as the radiating region and the destabilized one are in very close contact.

The resulting warp wave can be expected to play an important role in the chain that permits the gas, first accreted in a conventional manner in the Keplerian disc, to enter the magnetosphere by the interchange instability as found by Spruit & Taam (1990), to form a stable magnetospheric disc as shown by Lepeltier & Aly (1996) and eventually to accrete on to the neutron star by flowing along its magnetic field lines. More specifically, we have discussed how the warp could provide a crucial missing link between the interchange and magnetospheric accretion.

We have finally discussed how this warp, forming a non-axisymmetric feature in the most strongly emitting region of the star–disc system, should produce a strong modulation of the luminosity by reflexion and obscuration of the accretion power. This could produce a QPO in the kilohertz range but, at the present stage of models of the magnetosphere/accretion disc interface, its frequency is not adequate to reproduce the observed QPO frequency.

On the other hand, the warp would be well adapted to explain some other properties of the kilohertz QPOs, such as the variation of the frequency with the luminosity. This will be an incentive for further work that will aim at perfecting the models of the magnetosphere/accretion disc interface, in order to explore possibilities that could result in warp frequencies in better agreement with QPO observations.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors gratefully acknowledge very helpful discussions with D. Barret, M. van der Klis, F. Casse and P. Varniere.

## REFERENCES

- Agapitou V., Papaloizou J., Terquem C., 1997, MNRAS, 631, 645
- Barret D., Kluźniak W., Olive J. F., Paltani S., Skinner G. K., 2005, MNRAS, 1288, 1294
- Bessolaz N., Zanni C., Ferreira J., Keppens R., Bouvier J., 2008, A&A, 478, 155
- Ferreira B. T., Ogilvie G. I., 2008, MNRAS, 392, 428

- Ghosh P., Lamb F. K., 1979, ApJ, 234, 296  
 Lamb F. K., Shibasaki N., Alpar M. A., Shaham J., 1985, Nat, 317, 681  
 Lepeltier T., Aly J. J., 1996, A&A, 645, 665  
 Méndez M., Belloni T., 2007, MNRAS, 381, 790  
 Miller M. C., Lamb F. K., Psaltis D., 1998, ApJ, 508, 791  
 Ogilvie G. I., Dubus G., 2001, MNRAS, 320, 485  
 Pringle J. E., 1996, MNRAS, 281, 357  
 Romanova M. M., Ustyugova G. V., Koldoba A. V., Lovelace R. V. E., 2002, ApJ, 578, 420  
 Romanova M. M., Ustyugova G. V., Koldoba A. V., Wick J. V., Lovelace R. V. E., 2003, ApJ, 616, L151  
 Spruit H. C., Taam R. E., 1990, A&A, 475, 493  
 Stella L., Vietri M., 1998, ApJ, 492, L59  
 Stella L., Vietri M., 1999, Phys. Rev. Lett., 82, 17  
 van der Klis M., 2000, ARA&A, 717, 760  
 van der Klis M., 2006, in Lewin W. H. G., van der Klis M., eds, Compact Stellar X-Ray Sources. Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 39

## APPENDIX A: MAGNETIC CONFIGURATION

We present here the model used for the calculation of the magnetic terms of the dispersion relation, equation (8), using the equilibria of Lepeltier & Aly (1996) which describe a neutron star surrounded by a Keplerian disc and a magnetospheric disc. They show that the magnetic field can be written as

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{B}_K + \mathbf{B}_M,$$

where the right-hand side contains contributions from, respectively, the stellar dipole field, currents in the Keplerian disc and in the magnetospheric disc. Introducing a parameter  $\lambda$  measuring the diamagnetism of the Keplerian disc, which excludes totally ( $\lambda = 1$ ) or partially ( $\lambda < 1$ ) the magnetic field from the neutron star, they find a family of equilibria where these contributions can be written as

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B}_1[(1 - \lambda)\mu_1, \infty], \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{B}_K = \mathbf{B}_1(\lambda\mu_1, r_M), \quad (\text{A2})$$

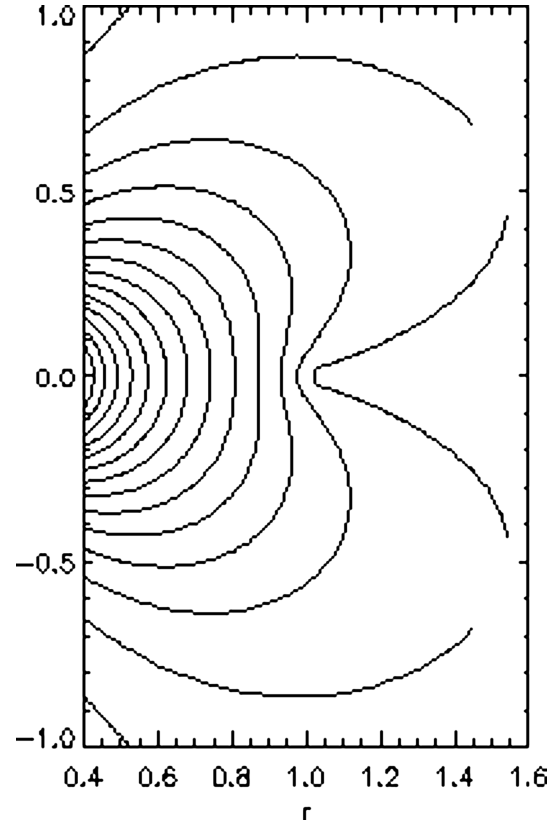
$$\mathbf{B}_D = \mathbf{B}_3(j, r_M), \quad (\text{A3})$$

where  $r_M$  is the inner radius of the Keplerian disc and  $j$  the azimuthal current in the magnetospheric disc.  $\mathbf{B}_1(\mu, r_M)$  and  $\mathbf{B}_3(j, r_M)$  can be derived from the azimuthal magnetic potentials  $\mathbf{A} = f\mathbf{u}_\phi$  with (in a dimensional units, convenient since for us only the magnetic geometry is important rather than the amplitude of the field)

$$f_1(\mu, d) = \frac{2\mu}{\pi r} \left( \frac{r^2 X^2 - d^2 \cos^2 \theta}{d^2 X} + \sin^2 \theta \arctan X \right), \quad (\text{A4})$$

where  $X = \{1/2 [(1 - d^2/r^2)^2 + 4(d^2/r^2) \cos^2 \theta]^{1/2} - 1/2 (1 - d^2/r^2)\}^{1/2}$ , and

$$f_3(j, d) = r \sin \theta \int_0^\infty g(k) J_1(kr \sin \theta) e^{-kr \cos \theta} dk, \quad (\text{A5})$$



**Figure A1.** The disc-magnetosphere configuration computed in the appendix.

where  $J_1$  is the Bessel function of first kind and order 1, and

$$g(k) = \int_0^d \left[ \frac{\sin(ks)}{ks} - \cos(ks) \right] \frac{G(s)}{s} ds, \quad (\text{A6})$$

$$G(s) = \frac{4}{r_i^2} \int_0^s \frac{t^2 j(t)}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt, \quad (\text{A7})$$

$$j(r_i < r < r_M) = j_0 \frac{4r_i r_M}{(r_M - r_i)^2} \frac{(r_M - r)(r - r_i)}{r^2} \quad (\text{A8})$$

and  $c$  is the speed of light. For our examples shown in Fig. 2 we have chosen  $\mu_1 = 10$ ,  $j_0 = -10$ ,  $r_i = 0.8$ ,  $r_M = 1$  and, respectively,  $\lambda = 0.8$  and  $0.265$ . Fig. A1 gives the shape of the corresponding magnetic field lines for  $\lambda = 0.8$ .

This paper has been typeset from a  $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$  file prepared by the author.

# Rossby wave instability and three-dimensional vortices in accretion disks

H. Meheut<sup>1</sup>, F. Casse<sup>1</sup>, P. Varniere<sup>1</sup>, and M. Tagger<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup> AstroParticule et Cosmologie (APC), Université Paris Diderot, 10 rue A. Domon et L. Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France  
e-mail: hmeheut@apc.univ-paris7.fr

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique et Chimie de l'Environnement et de l'Espace (Université d'Orléans/CNRS), Orléans, France

Received 6 January 2010 / Accepted 31 March 2010

## ABSTRACT

**Context.** The formation of vortices in accretion disks is of high interest in various astrophysical contexts, in particular for planet formation or in the disks of compact objects. But despite numerous attempts it has thus far not been possible to produce strong vortices in fully three-dimensional simulations of disks.

**Aims.** The aim of this paper is to present the first 3D simulation of a strong vortex, established across the vertically stratified structure of a disk by the Rossby wave instability.

**Methods.** Using the ersatile advection code (VAC), we set up a fully 3D cylindrical stratified disk potentially prone to the Rossby wave instability.

**Results.** The simulation confirms the basic expectations obtained from previous 2D analytic and numerical works. The simulation exhibits a strong vortex that grows rapidly and saturates at a finite amplitude. On the other hand the third dimension shows unexpected additional behaviors that could be of strong importance in the astrophysical roles that these vortices can play.

**Key words.** Accretion, accretion disks – protoplanetary disks – hydrodynamics – instabilities – methods: numerical

## 1. Introduction

Vortices have been actively searched for in accretion disk theory and numerical simulations because of their multiple astrophysical interests. In particular for protoplanetary disks, vortices have been invoked (Barge & Sommeria 1995) to shorten time scale for the growth of grains to planetesimals to a level that be feasible. The streaming of the gas inside a vortex could speed up this growth by concentrating dust grains in its center, by what is sometimes called the “tea leaf” effect, whereby tea leaves accumulate in the center of a cup when it is stirred. This mechanism has been studied numerically (Johansen et al. 2004; Lyra et al. 2008, 2009) but only for the 2D case of an infinitely thin disk. We note that an alternative mechanism for trapping the dust grains based on high pressure region was proposed by Johansen et al. (2007).

On the other hand, despite multiple attempts to generate realistic vortices in fully cylindrical 3D numerical simulations of disks, even the most advanced ones (Barranco & Marcus 2005) have only found off-midplane vortices. This may be explained (Tagger 2001) by the fact that due to both differential rotation and differential vorticity (which is absent in the shearing box model used in many simulations) vortices are very rapidly sheared away and could survive only by being continuously regenerated.

We present the first 3D numerical simulations of the Rossby wave instability (RWI), which is precisely a mechanism to do this: in certain conditions this instability generates Rossby vortices that grow exponentially with time. The existence of this instability in protoplanetary disks was first mentioned in Lovelace et al. (1999), and it has been suggested later (Varnière & Tagger 2006) that at the edges of the “dead zone” of protoplanetary

disks, where the gas is not ionized and thus should not be turbulent, the conditions are such that the RWI can grow; it should thus both help accretion to proceed across the dead zone and help planets to grow there. The simulations we present confirm the basic properties of the instability, but they show new features in its 3D structure, whose effects on accretion and the growth of planetesimals will need to be understood.

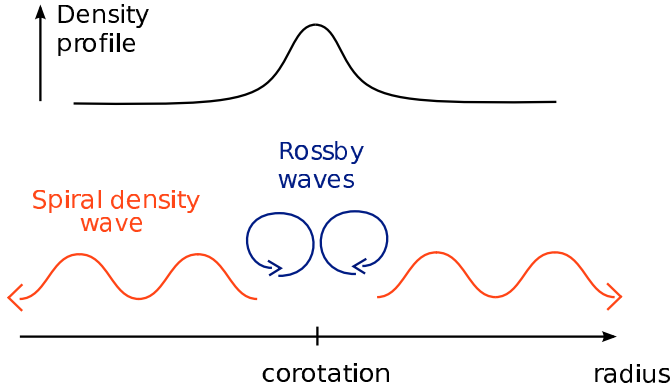
The paper is organized as follows: after recalling the basic properties of the RWI we will present the physical setup, then the numerical one. Section 4 will present the results, and Sect. 5 a discussion and conclusion.

## 2. The Rossby wave instability

The RWI has been found and discussed in different contexts of differentially rotating disks. A discussion of this history has been given by Varnière & Tagger (2006), and we will not repeat it here. It can exist in galactic disks (Lovelace & Hohlfield 1978; Sellwood & Kahn 1991) as well as in accretion disks (Papaloizou & Pringle 1985; Lovelace et al. 1999; see also Li et al. 2000, 2001). It can be seen as the form that the Kelvin-Helmoltz instability takes in differentially rotating disks, and it has a similar instability criterion: an extremum in the quantity  $\mathcal{L}$  related to the vorticity of the equilibrium flow. In an unmagnetized thin disk this quantity can be written as (Li et al. 2000)

$$\mathcal{L} = \frac{\Sigma \Omega}{2\kappa^2 \Sigma \gamma} = \frac{\Sigma}{2(\nabla \times \mathbf{v})_z \Sigma \gamma}, \quad (1)$$

where  $\Sigma$  is the surface density,  $\mathbf{v}$  is the velocity of the fluid,  $\gamma$  the adiabatic index,  $\Omega$  the rotation frequency and  $\kappa^2 = 4\Omega + 2\Omega\Omega'$  the epicyclic frequency squared (so that  $\kappa^2/2\Omega$  is the vorticity). Here the prime notes a radial derivative.



**Fig. 1.** Schematic view of the Rossby wave instability. Rossby waves are generated in the region of the density extremum, and density waves are emitted away from this region due to differential vorticity, which couples these two waves. The Rossby waves have their corotation radius at the density maximum.

Two possibilities that can result in an extremum in  $\mathcal{L}$  have been investigated: the first one occurs near the marginally stable orbit around a compact object, where relativistic effects create a maximum of  $\kappa^2/2\Omega$ . The growth rate of the RWI is strongly increased by a poloidal magnetic field threading the disk (Tagger & Varnière 2006), but decreased by a toroidal one (Yu & Li 2009). This has been proposed as an explanation for the high-frequency quasi-periodic oscillation (QPO) of microquasars (Tagger & Varnière 2006; Lai & Tsang 2009; Tsang & Lai 2009).

The second possibility is to have an extremum of the surface density. The model of Varnière & Tagger (2006) for protoplanetary disks relies on the assumption that extrema of  $\Sigma$  should occur at the edges of the dead zone of these disks, so that the RWI should be unstable there. Tagger & Melia (2006) and Falanga et al. (2007) have also used the RWI in an explanation for the quasi-periodicity that may have been observed during the flares of SgrA\*.

The RWI has been studied both analytically (Lovelace et al. 1999; Li et al. 2000) and numerically (Li et al. 2001; Varnière & Tagger 2006). It is formed by Rossby waves trapped in the extremum of  $\mathcal{L}$ , as shown in Fig. 1. In the  $\beta$ -plane approximation differential rotation is neglected and the dispersion relation of Rossby waves is given by

$$\omega = \frac{m\alpha}{k^2 + m^2}, \quad (2)$$

where  $k$  is the adimensional radial wavenumber,  $m$  the azimuthal wavenumber, and  $\alpha$  the vorticity gradient. In an accretion disk, differential vorticity and differential rotation couple them to spiral waves, emitted on both sides of the extremum region. The wave dispersion relation calculated from the equations obtained by Lovelace et al. (1999) and Tagger (2001) is

$$\tilde{\omega} = \frac{c_s^2 m \alpha}{c_s^2 (k^2 + m^2) + r^2 \kappa^2}, \quad (3)$$

where  $\tilde{\omega} = \omega - m\Omega$ ,  $c_s$  is the sound speed and  $r$  the radius.

Rossby waves have their corotation radius (where their phase velocity equals the rotation velocity of the gas) at that extremum. The standing wave pattern they form appears as a vortex located in the region of the extremum, and grows exponentially. The waves have a positive energy flux and angular momentum beyond that radius and a negative energy flux inside it, so that (as will be checked in the simulation) the pattern can grow as

it causes the gas inside the corotation to lose angular momentum and accrete, while the gas beyond the corotation gains that angular momentum and moves outward.

As a result the instability tends to destroy the extremum of  $\mathcal{L}$ , as seen for instance in Tagger & Melia (2006). In the context of the mechanism proposed by Varnière & Tagger (2006) for protoplanetary disks, we expect the instability to saturate at the amplitude where this is balanced by the continuous regeneration of the density extremum by the gas accreting from the outer disk and piling up at the edge of the dead zone (and reversely at the inner edge of the dead zone).

However, these studies have all been done in the approximation of an infinitely thin disk because of the complexity of a full 3D analytical study, or of the numerical resources needed for 3D simulations. Such a study is however highly desirable, both to consider the full complexity of the gas (and grains) flow, and to validate the thin disk approximation: this approximation was introduced (and its limits defined) by Goldreich & Lynden-Bell (1965a,b), but this does not apply as such to Rossby perturbations. We will see below that indeed 3D effects add significant and potentially important qualitative differences.

### 3. Gaseous accretion disk

#### 3.1. Hydrodynamic equations

We work in cylindrical coordinates  $(r, \phi, z)$  with the 3D Euler equation

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) = 0 \quad (4)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho \mathbf{v}) + \nabla p = -\rho \nabla \Phi_G, \quad (5)$$

where  $\rho$  is the mass density of the fluid, and  $\mathbf{v}$  its velocity, and  $p$  the pressure.  $\Phi_G = -GM_*/(r^2 + z^2)^{1/2}$  is the gravity potential of the central object with  $G$  the gravitational constant and  $M_*$  the mass of the central object. We consider a barotropic flow, i.e. the entropy  $S$  is constant in the entire system

$$p = S\rho^\gamma, \quad (6)$$

with the adiabatic index  $\gamma = 5/3$ . The sound speed is given by  $c_s^2 = \gamma p/\rho = S\gamma\rho^{\gamma-1}$  and the temperature by  $T = p/\rho = S\rho^{\gamma-1}$ .

#### 3.2. Initial conditions

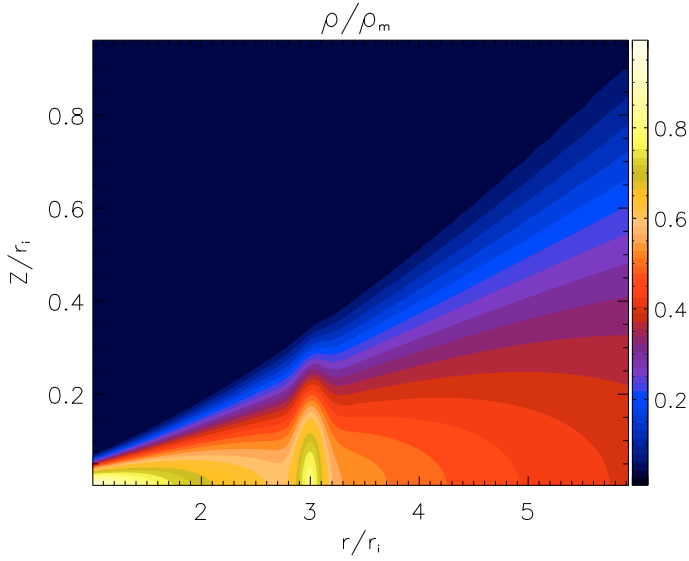
We choose as initial equilibrium a density profile decreasing radially as  $r^{-1/2}$ , to which is added a density bump

$$\frac{\rho^{\text{ini}}(r, z=0)}{\rho_m} = \left(1 + \chi \exp\left(\frac{(r/r_i - r_B/r_i)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{r/r_i}}. \quad (7)$$

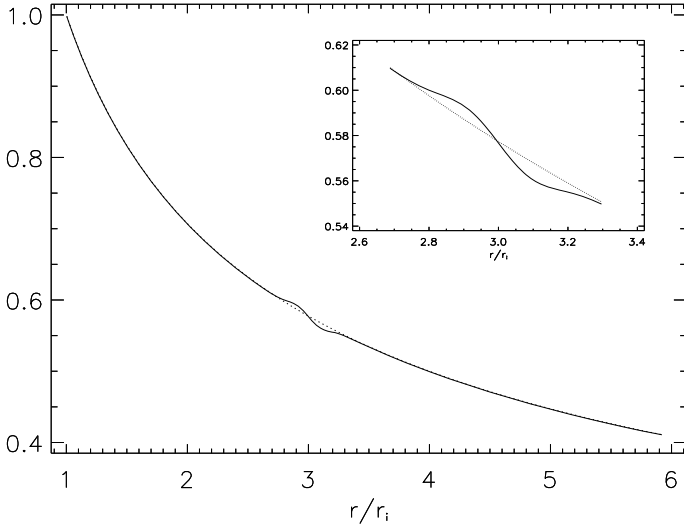
The density is normalized by  $\rho_m$ , the midplane density at the inner boundary of the simulation  $r_i$ , and  $r_B$  is the position of the bump. For the parameters  $\chi$  and  $\sigma$ , which control the amplitude and the width of the density bump, we take the values  $\chi = 0.4$  and  $\sigma = 0.1$  respectively, which gives a bump similar to that obtained by Varnière & Tagger (2006) in their simulation of the dead zone. These values allow the instability to grow relatively fast, decreasing the numerical load, while the effect of the pressure gradient on the equilibrium rotation velocity leaves us a margin with respect to the Rayleigh criterion  $\kappa^2 > 0$  (see Fig. 4).

The bump is centered at  $r_B = 3r_i$ , far enough from the inner edge of the disk to avoid a strong effect of the boundary





**Fig. 2.** Isocontours of the initial density, with a bump at  $r_B = 3r_i$ . The density is normalized to the density in the midplane at the inner edge.



**Fig. 3.** The initial azimuthal velocity of the midplane gas (continuous line) is compared to Keplerian rotation (dots). A zoom on the bump region is shown in the upper right corner.

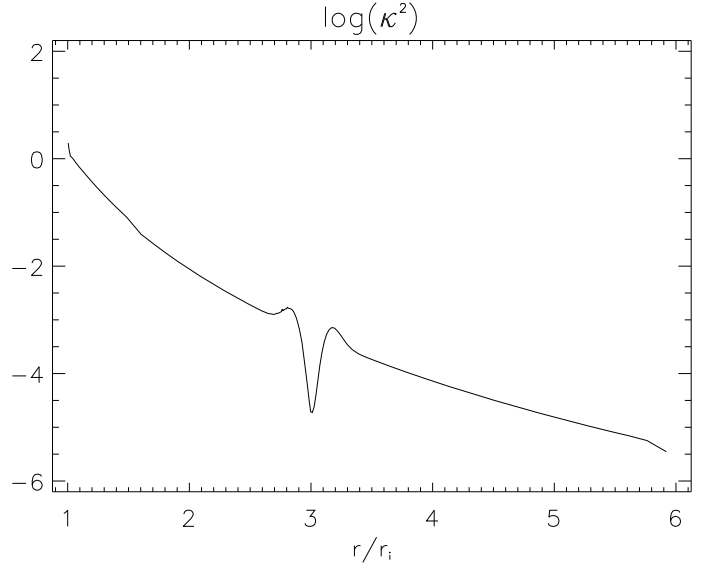
condition there. The vertical density profile is initially at hydrostatic equilibrium, giving an aspect ratio of the order of  $10^{-1}$ ,

$$\rho^{\text{ini}}(r, z) = \rho(r, z=0) \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma S \rho(r, z=0)^{\gamma-1}} \left( \frac{r_i}{r} - \frac{r_i}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (8)$$

with and  $S = 10^{-3} r_i^2 \Omega_K(r_i)^2 \rho_m^{1-\gamma}$ . Finally, we initially use a “floor” density  $\rho_{\text{min}} = 10^{-2} \rho_m$  to avoid getting too low densities in the corona. Figure 2 shows the resulting isodensity contours in a vertical cut of the disk.

The initial velocity field is purely toroidal,  $v_r^{\text{ini}} = v_z^{\text{ini}} = 0$  and  $v_\phi^{\text{ini}}$  was chosen for the disk to be in radial equilibrium in a Newtonian potential

$$v_\phi^{\text{ini}} = \sqrt{\frac{r^2 GM_* r_i}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{r \rho_m}{\rho r_i} \nabla_r p}. \quad (9)$$



**Fig. 4.** Plot of the logarithm of the square of the epicyclic frequency  $\kappa^2$  (averaged over  $z$ ) as a function of the radius.

Figure 3 shows the deviation of the disk azimuthal velocity from a pure Keplerian rotation. The pressure term in the last equation induces only a weak variation.

## 4. Numerical setup

### 4.1. Numerical code and scheme

The numerical simulations presented here use the versatile advection code (VAC) developed by Tóth (1996). In the version we use the code solves the 3D hydrodynamics equations for an isentropic flow. We use VAC with the total variation diminishing monotonic upstream-centered scheme for conservation laws (TVD-MUSCL), a Roe Riemann solver, a Hancock predictor step and a Woodward limiter (Colella & Woodward 1984). The TVD-MUSCL scheme detailed in Tóth & Odstrčil (1996) is one of the less dissipative schemes included in the VAC code, which is useful to observe the full development of the instability and properly characterize its saturation.

### 4.2. Grid and numerical resolution

The grid is cylindrical  $(r, \phi, z)$  with a resolution of  $154 \times 68 \times 68$ , including two ghosts cells at each boundary to impose the boundary conditions. The grid is non-uniform with a stretching factor of 20 in the radial direction, and 10 in the vertical one.

This achieves a higher resolution in the regions of physical or numerical interest. The mesh extends from  $(r_i, 0, 0)$  to  $(6r_i, r_i, 2\pi)$  where  $r$  and  $z$  have been normalized by the disk inner edge radius  $r_i$ . The radial and vertical extensions are large enough for the different waves of the RWI to develop without unwanted effects from the boundary conditions.

The minimum value of the mass density is fixed to  $10^{-6} \rho_m$ . With the initial conditions presented before this configuration gives a bump with approximately 60 cells radially and 40 vertically.

### 4.3. Boundary conditions

The boundary conditions are imposed using the two ghost cells added at each boundary of the mesh, allowing us to compute the

derivatives in all the cells. Because the simulation is restricted to a small part of the disk, we have chosen continuous boundary conditions in the radial direction, meaning that the values of the physical quantities are copied from the first cell of the computational domain in the ghost zones. This boundary condition is thus partially transparent. In the azimuthal direction the boundary condition is periodic. Only the upper part of the disk is simulated because the vortices we are interested in are even in  $z$ . In Sect. 5.2 we discuss a test run without this condition, which confirms the validity of this choice.

#### 4.4. Disk equilibrium and stability

As mentioned in Sect. 3.2 we start the simulation with a low but finite density in the corona. On the other hand, we needed to start from a true disk equilibrium to avoid a rapid relaxation that would dominate the evolution of the system. The main difficulty was the constant density we chose to start from in the corona and the transition to the power law vertical profile in the disk; this introduced a jump in the vertical derivative of the density. We thus applied a smoothing over  $n_{\text{smooth}}$  vertical grid points (with  $n_{\text{smooth}} = 4$  here) to this density profile to enforce a smooth transition. All this means that we are not at exact hydrostatic equilibrium in the gravity field. A different but related difficulty arose from the discretization of the grid and the use of slope limiters, which introduced residual spurious forces for each cell, but a zero mean value on the whole grid. Although they are small (at the level of roundoff error), they are systematic (i.e. always act in the same direction) and become important in low-density regions, especially at the disk-corona transition.

We thus chose to slightly modify the gravitational potential, so that the initial pressure profile given in Sect. 3.2 is really at equilibrium. We applied the following procedure: a first time-step was done to calculate the difference between the physical and numerical equilibrium. This allowed us to compute the source term  $\rho \nabla \Phi_G$  in the Euler equations that enforced numerical equilibrium: this source term should be equal to the gravity term if we were in exact equilibrium, and the difference arises from these spurious forces. We enforced equilibrium by subsequently considering this constant modified source term. We will a posteriori check that this does not substantially affect our result. Moreover we checked that with the whole simulation box inside the disk (without corona) this modified source term is not needed, but wave reflection at the upper boundary makes it impossible to properly study the physics of the instability.

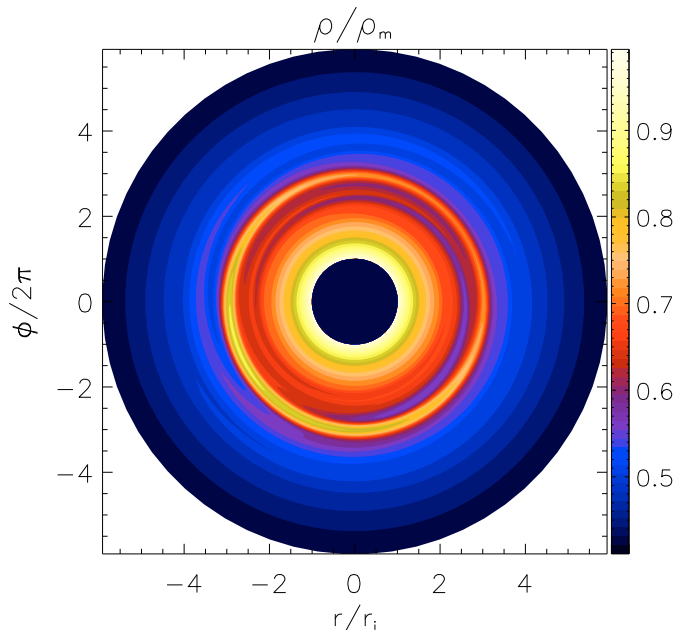
After several time-steps we added low level perturbations to these initial conditions to provide seeds for the unstable modes that can develop if the disk is unstable. We found it more convenient to do this with perturbations with low azimuthal wavenumber, because (as confirmed in the simulation) they are the only ones expected to be unstable. We thus applied an initial radial velocity perturbation

$$v_{rp} = v_r + \epsilon \sin\left(\frac{2\pi(r-1.2)}{.8}\right) [\sin(\phi) + \sin(2\phi) + \sin(3\phi) + \sin(5\phi)] \quad (10)$$

with the amplitude of the perturbation  $\epsilon$  of the order of  $10^{-7}$ .

## 5. Results

In this section we describe the results obtained with this simulation. We first describe the general properties of the instability, which allow us to identify it and to study its structure and



**Fig. 5.** Plot of the normalized density in the midplane of the disk at  $t = 176/\Omega_K(r_i)$ . One can identify the position of the crescent-shaped vortex at the bump radius ( $r = 3r_i$ ) and the spiral arms on both side of the bump region.

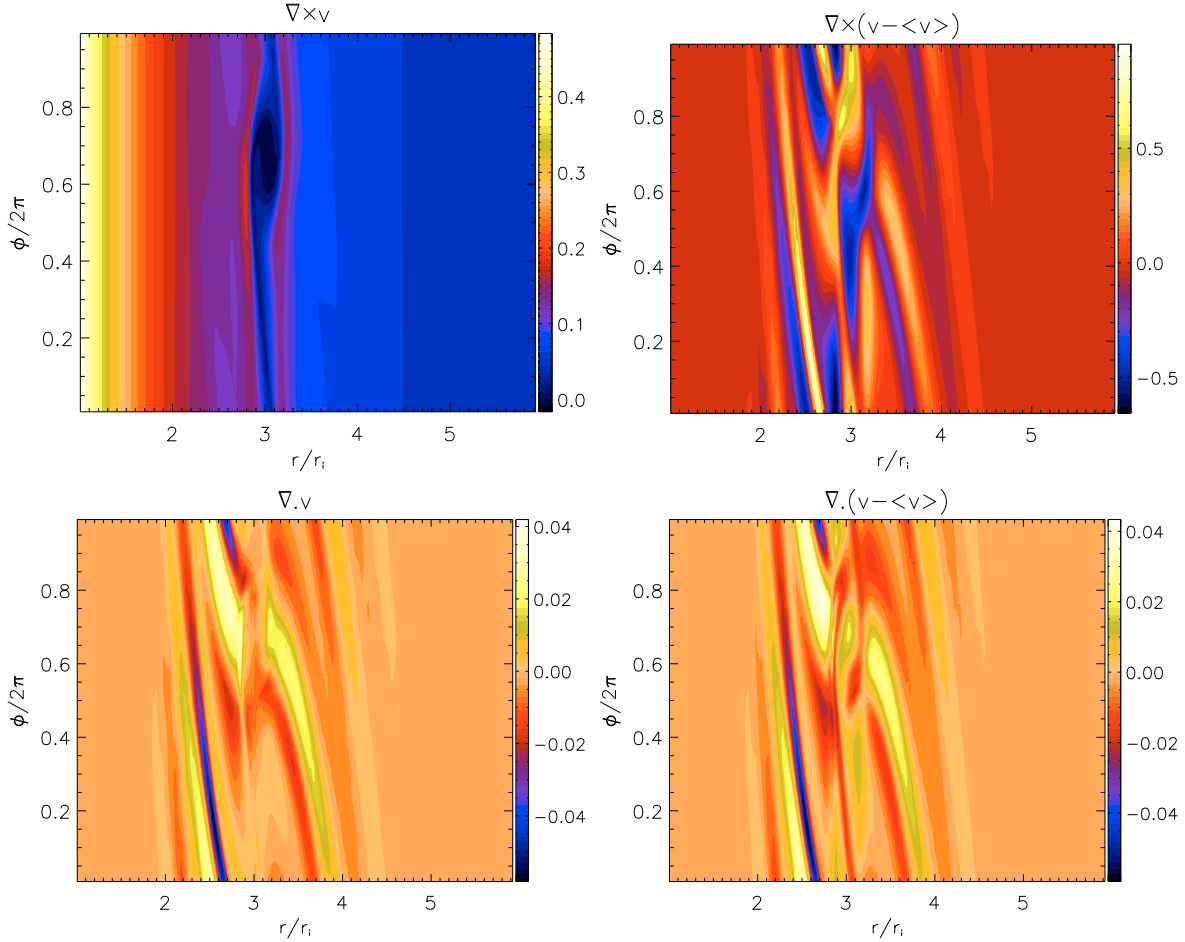
evolution. We then focus on the velocity stream to understand the flow pattern induced by the instability in the disk.

#### 5.1. General study of the instability

Because the instability was only studied in 2D, we will first base the discussion on what we obtain in the midplane of the 3D simulation. As expected the simulation shows a coherent perturbed pattern forming in the region of the density bump after a few rotation times. Figure 5 shows the normalized density in the midplane. The non-axisymmetric pattern corresponds to the RWI, extending spiral arms on both sides of the bump.

As explained in Sect. 2, the structure of the instability is formed by Rossby waves on both sides of the extremum of  $\mathcal{L}$  (here, the density bump at  $r = 3r_i$ ), resulting in a standing vortex there, and spiral density waves emitted on both sides of that region. We can visualize this by plotting the curl and divergence of the flow, showing respectively its rotational (Rossby waves) and compressional (density waves) parts. Figure 6 shows that the expected patterns do indeed appear.

The different stages of the development of the instability can be seen Fig. 7, which presents the amplitude of the density perturbation on a logarithmic scale as a function of time. After a short stage where the non-pertinent perturbations decrease, the unstable mode enters the linear stage, i.e. the perturbation grows exponentially. We find a growth rate of  $.39\Omega_K(r = r_i)/\Omega_K(r = 3r_i)$ . This is comparable with the growth rates obtained from 2D theory (Li et al. 2000) or numerical simulation (Tagger & Melia 2006). The different physical and numerical setups (including the equation of state and the boundary conditions) prevent a more detailed comparison. The local dispersion equation (Eq. (3)) does not allow us to estimate the growth rate of the global modes. This would anyway be possible only with a fully 3D linear computation, which would require an extensive effort. The perfect exponential growth we obtain in the present non-linear simulation over four decades in amplitude, its coherence



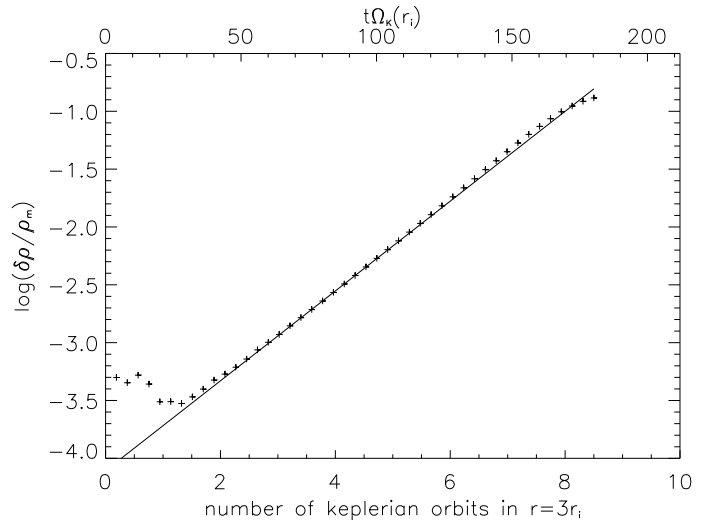
**Fig. 6.** The compressional and rotational parts of the total flow (*left*) and its non-axisymmetric part (*right*) at  $t = 176/\Omega_K(r_i)$ , showing the two waves that form the instability. *Top*: the amplitude of  $(\nabla \times \mathbf{v})_z$  traces the vorticity, i.e. the Rossby vortex centered at the extremum of density. *Bottom*: the amplitude of  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  traces the compressional waves (spiral density waves) that develop away from that region. In these figures, the whole disk is represented with the azimuthal coordinate on the vertical axis and the radius on the horizontal one. Note that although the top-right panel shows both a cyclonic and an anticyclonic vortex (as expected for an  $m = 1$  mode), once combined with the bulk flow only the anticyclonic vortex appears in the top-left panel.

with the 2D results, and its independence from initial conditions show that we do capture here the linear phase of the instability properly. This stage lasts about 10 Keplerian orbits at the bump radius, and finally the instability reaches saturation. The entire progression of the instability is thus captured in this simulation.

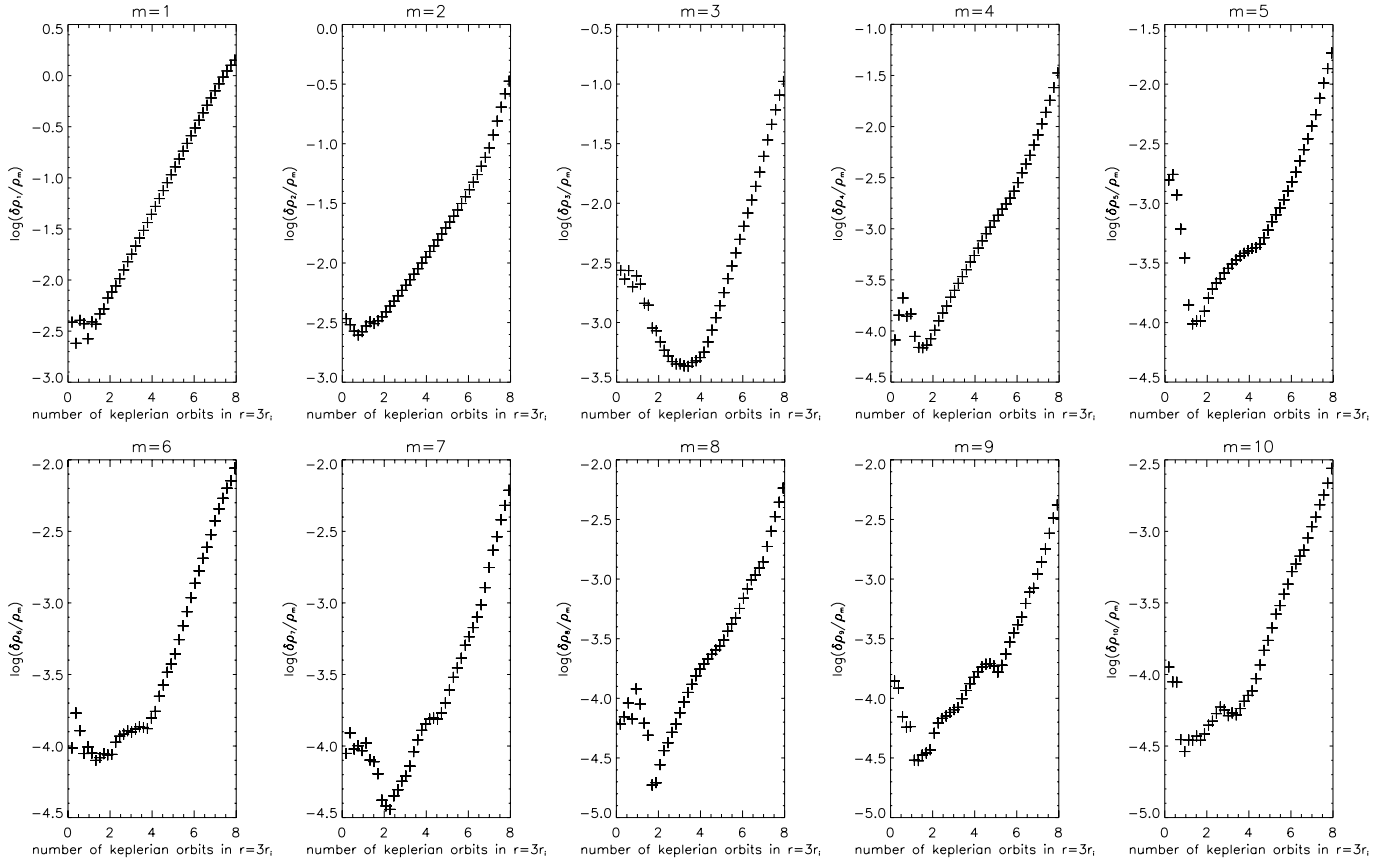
Figure 9 shows that the saturation is not due to the flattening of the initial density bump and thus of the extremum of  $\mathcal{L}$ , as in the 2D simulations of Tagger & Melia (2006), so that non-linearities must be suspected. In order to check this we ran a new simulation, taking as initial radial density profile the average one at the end of the present simulation (but again with only weak velocity perturbation, as at its startup), and observed the RWI growing again.

The azimuthal density profile at the bump radius is shown in Fig. 10. It reveals a departure from a pure sinusoid, corresponding to the presence of  $m > 1$  modes, whose growth are shown in Fig. 8. Because they do not show the exponential growth of the  $m = 1$  but do show modes that are not present in the initial perturbation, we analyze them as non-linearly generated harmonics of that mode. Figure 12 shows that their effect remains relatively weak, so that the saturation of the mode cannot be ascribed to them.

On the other hand, as shown in Fig. 13, small-scale structures appear in the vertical flow, and become stronger when the mode approaches saturation. They cascade to the smallest scale of the



**Fig. 7.** Instability growth: the maximum value of the non-axisymmetric part of the density is plotted as a function of time with a logarithmic scale for the vertical axis. We added here a second time axis (lower) that shows the number of Keplerian orbits at the bump radius to estimate the growth rate in the same units as Li et al. (2000). The equation of the continuous line is  $-4.1 + 0.39t\Omega_K(r_i)/\Omega_K(3r_i)$ . The graph thus shows the linear stage and the saturation after about 10 Keplerian times at  $r = 3r_i$ .

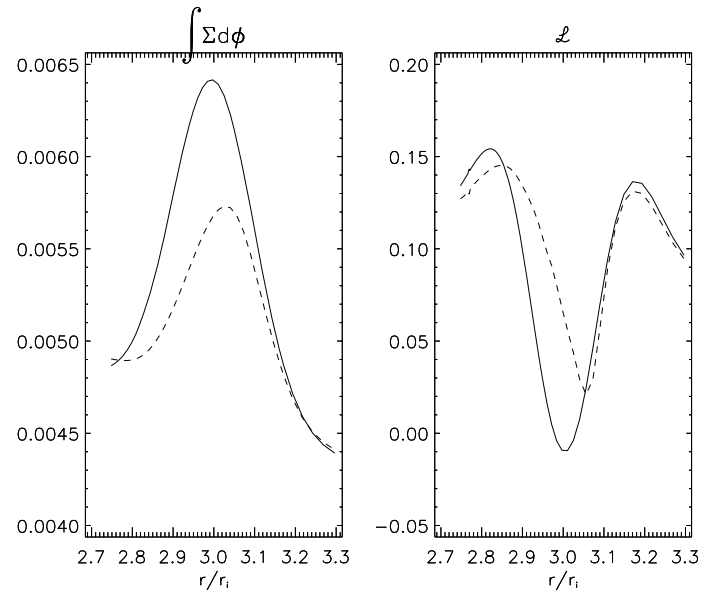


**Fig. 8.** The evolution of the amplitude of the ten first azimuthal modes in the same coordinates as Fig. 7. The amplitude of each mode is calculated with an azimuthal Fourier transform,  $\rho_i$  being the amplitude of the  $i$ th mode. The development of modes that were not present in the initial perturbation proves the existence of non-linearities.

simulation, making us believe that dissipation in these structures is the main cause of the saturation we observe. Assessing their role will require both improved numerics, to deal with these structures, and physical understanding because one can expect that vertically propagating sound waves generated within the disk will be subject to wavebreaking when they reach the low-density, low-sound speed corona. This will be considered in future work.

The flattening of the bump (Fig. 9) is explained by the accretion rate, shown in Fig. 11: it is positive inward from the density extremum and negative beyond it. This is expected from a mode with its corotation at that radius which grows by exchanging angular momentum between the inner and outer region. As in 2D simulations, the transition between positive and negative accretion is so sharp that it is actually the best diagnostic of the corotation radius and thus of the mode frequency.

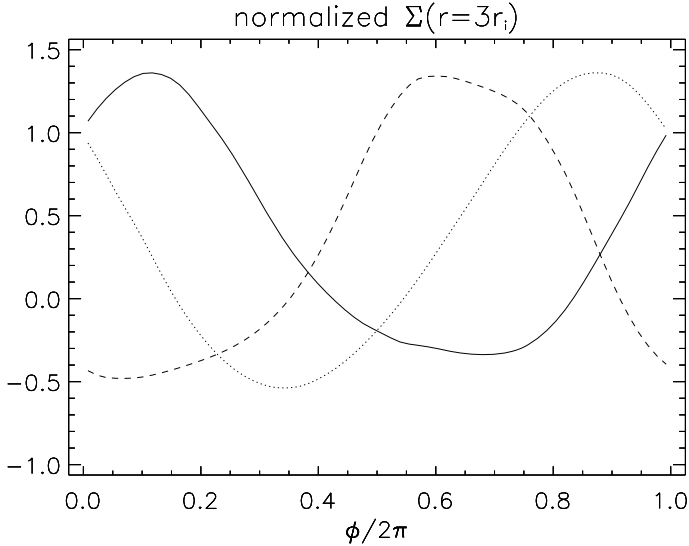
Finally, considering the possibility of other unstable modes, we show in Fig. 12 the time evolution of the azimuthal Fourier components,  $m = 0$  to 3. Although perturbations do appear at  $m = 2$  and 3, that they evolve together with the  $m = 1$  indicates that they are probably harmonics of that mode and not independently growing ones. The most linearly unstable  $m$  depends on the local conditions. We ran 2D simulations with the same density profile and found in that case a dominant  $m = 2$ . We will see below that the 3D simulation does show new features in the structure of the mode, which seem to contribute to its linear growth. They might be at the origin of this difference.



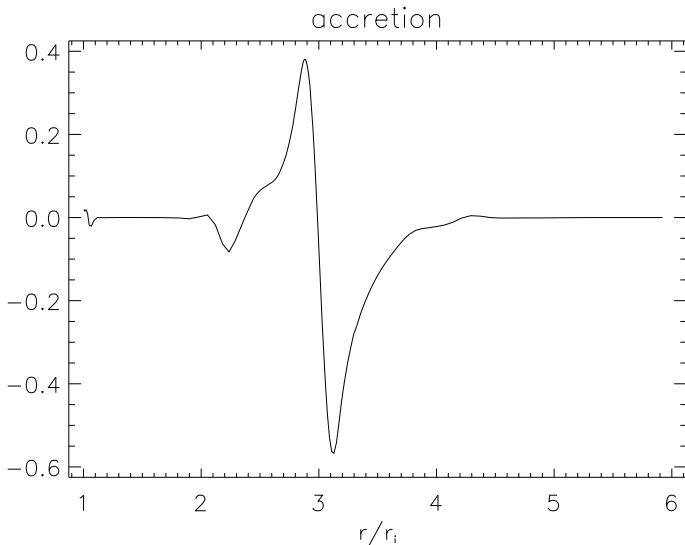
**Fig. 9.** Comparison between the density integrated over  $z$  and  $\phi$  (left) and of the RWI criterion  $\mathcal{L}$  (right) at  $t = 0$  in solid line and  $t = 176/\Omega_K(r_i)$  in dashed line. One can see that the extremum of  $\mathcal{L}$  at  $r = 3r_i$  has decreased but not disappeared when the instability saturates.

## 5.2. Study of the velocity stream

In this section we consider the flow pattern generated by the instability. Because the stream in the  $(r, \phi)$  plane is dominated by



**Fig. 10.** The azimuthal surface density profile at  $r = 3r_i$  at different times with the same normalization. The line is at  $t = 32/\Omega_K(r_i)$ , the departure from the sinusoid comes from the initial perturbations that is a sum of sinus. The dots is at  $t = 104/\Omega_K(r_i)$ , the profile is closer to a sinusoid, the instability is in the linear phase, the nonpertinent modes ( $m > 1$ ) are negligible. The dashed line is at  $t = 176/\Omega_K(r_i)$ , the departure from a sinusoid is believed to be a direct consequence of nonlinearities.



**Fig. 11.** The accretion rate defined as  $-\int r\rho v_r dz d\phi / \int r\rho_m c_s dz d\phi$  as a function of radius at the end of the linear phase ( $t = 176/\Omega_K(r_i)$ ).

Keplerian rotation, we consider the non-axisymmetric part of the velocity, i.e. we study the disk in a sheared frame rotating as the mean flow at each radius. Figure 13 does show in this plane the expected vortex structure, with both a cyclonic and anticyclonic feature, because the  $m = 1$  structure generates both. As seen in Fig. 5 however, when combined with the Keplerian flow only the anticyclonic component appears, forming a crescent-shaped feature, while the cyclonic one is at the  $x$ -point where the tips of the crescent join.

On the other hand Fig. 13 also shows unexpected new features: first, the plot in the  $(\phi, z)$  plane shows a downdraft at the center of the anticyclonic vortex, and a updraft at the center of the cyclonic one. Also, plots in the  $(r, z)$  plane show that strong convection rolls form on both sides of the vortex, in the

anticlockwise direction for the outer one and clockwise direction for the inner one. Streamlines at the outer edges of these horizontal and vertical vortices connect them smoothly in a manner reminiscent of orbits near separatrices in hamiltonian dynamics. The main streamlines are schematized in Fig. 14.

We checked the robustness of these convection rolls by performing numerical simulations with the entire vertical structure of the disk and without assuming a vertical symmetry, all the other parameters kept unchanged. The vertical symmetry was broken by the initial perturbation added on the radial velocity, but resulted in similar flow patterns. Furthermore, when we applied only antisymmetric initial perturbations, we found that this delayed the development of the instability without changing its vertical structure. We conclude that the delay is due to the difficulty for antisymmetric initial perturbations to seed the unstable mode and that the convection rolls are part of the linear structure of the instability. To confirm this diagnostic, we also checked that the maximal vertical velocity involved in these convection rolls follows the linear growth of the instability as in Fig. 7.

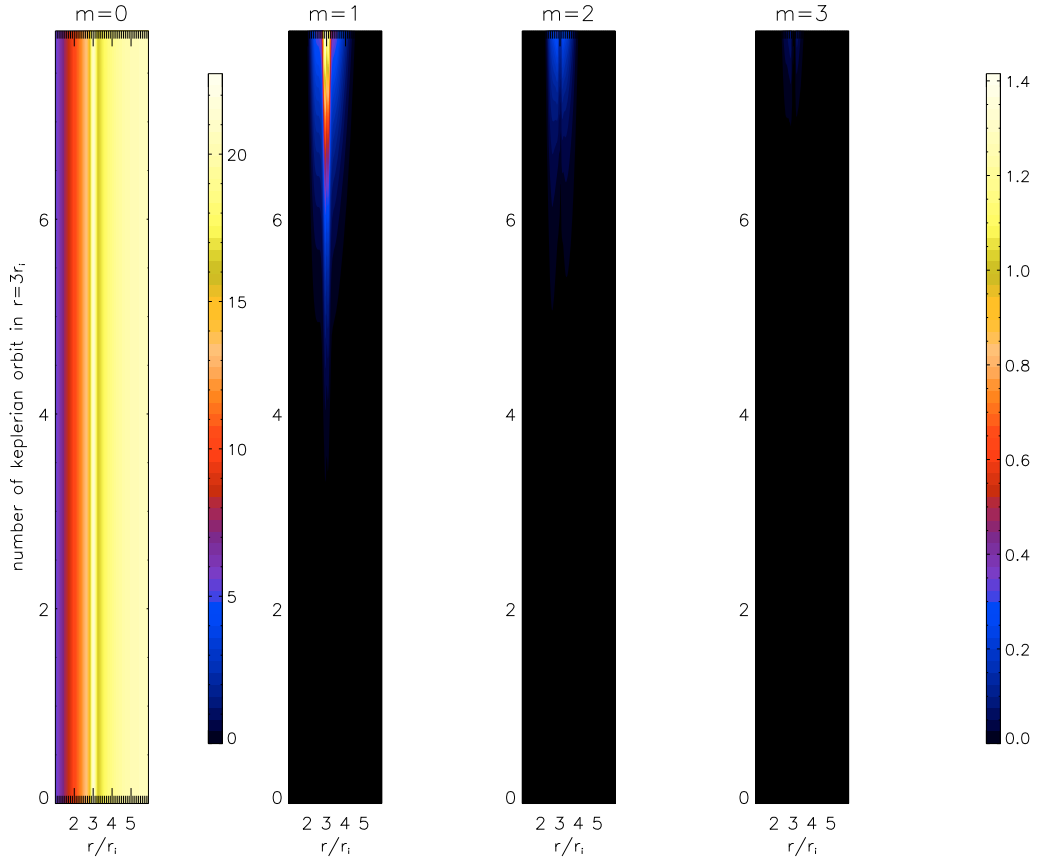
This strong vertical structure of the instability and of the vortex pattern could not be expected from the 2D results. We believe that the vertical vortices are resonantly excited where the local Doppler-shifted frequency,  $\omega - m\Omega(r)$ , is equal to the mean vertical oscillation frequency. The relation between this and the Brünt-Väisälä frequency, depending on the equation of state of the gas, will be discussed elsewhere. This would thus be the equivalent, in a fluid disk, of the “peanuts” structure found in observations and numerical simulations of barred spiral galaxies (Combes & Sanders 1981; Combes et al. 1990; Athanassoula 2008). This is believed (although an explanation based on the firehose instability has also been proposed) to result from the resonant excitation of the vertical motion of stars where  $\omega - m\Omega(r)$  equals their vertical frequency of motion.

## 6. Discussion and outlook

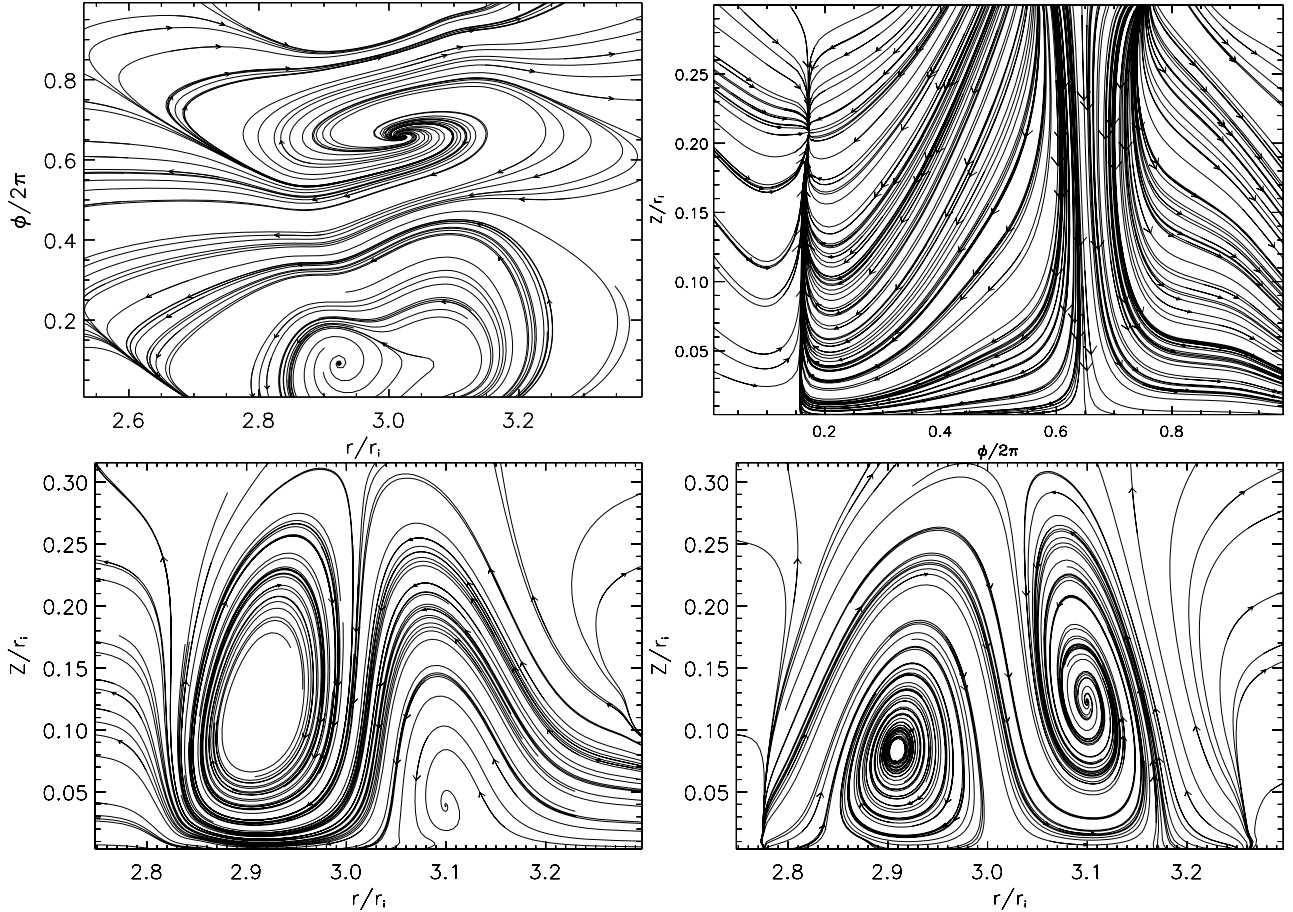
We presented here the first fully three-dimensional, cylindrical numerical simulation showing a strong and persistent vortex in a differentially rotating disk. Its growth results from the Rossby wave instability, which has been invoked in various astrophysical contexts like in protoplanetary disks or in the accretion disk of compact objects.

The simulation essentially confirms the main properties of the instability, which forms a vortex extending across the vertically stratified structure of the disk. The vortex is localized at the extremum of vortensity and very efficiently acts to destroy this extremum, by permitting an exchange of angular momentum between regions located on either side of it. In our simulation we found no sign of the elliptical instability (Kerswell 2002; Lesur & Papaloizou 2009) which has been claimed to destroy vortices. We note however that these works were done in the shearing sheet approximation, which neglects the equilibrium vorticity gradient and thus can consider local small-scale modes, whereas the RWI is a large-scale global instability. The same remark applies to the work of Latter & Balbus (2009) and Lesur & Papaloizou (2010).

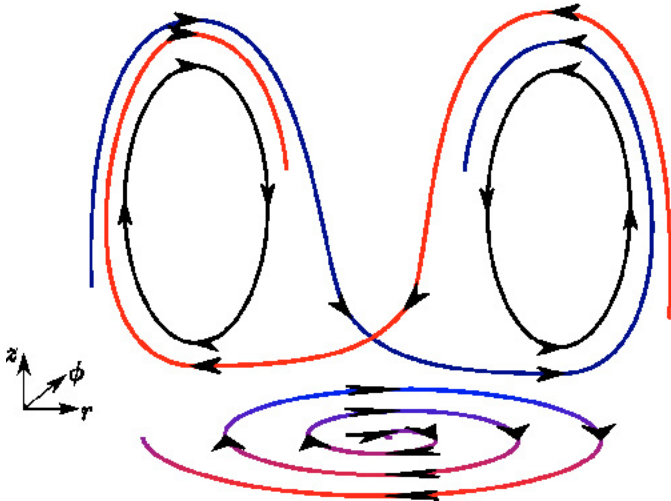
The most important new result found in our 3D simulation is the occurrence of strong vertical convection rolls, excited on both sides of the horizontal vortex. Figure 13 shows that the vertical velocity in these rolls is comparable to the radial velocity involved in the Rossby vortex, while their growth shows that they are an inherent part of the structure of the mode, tightly connecting the horizontal and vertical circulations.



**Fig. 12.** Temporal evolutions of the first four azimuthal modes. A different color bar is used for  $m = 0$  which is approximately ten times stronger than the others.



**Fig. 13.** Top: velocity streamlines in a frame rotating with the disk in the midplane of the disk (left) and in the vertical plane at  $r = 3r_i$  (right). Bottom: velocity streamlines in a vertical frame at  $\phi/2\pi = 0.64$  (left) and  $0.66$  (right).



**Fig. 14.** Schematic view of the circulation, showing the horizontal and vertical vortices in a sheared frame rotating at the local mean angular velocity.

Future work should allow us to assess the importance of this convection in the astrophysical contexts where the RWI may act. In particular we expect them to play a very important role in the concentration of dust grains in protoplanetary disks, in addition to the mechanism of [Barge & Sommeria \(1995\)](#), which will accumulate them at the center of the horizontal vortex. Indeed [Fig. 13](#) also shows that in the midplane of the disk, the flow lines rapidly spiral inward in the cyclonic vortex and outward in the anticyclonic one. This coincides with the updraft at the cyclonic vortex and downdraft at the anticyclonic one. We note that dust grains will thus be rapidly transported with the gas, at low  $z$ , toward the center of the cyclonic vortex, but that their weight should make it very difficult for them to be dragged in the updraft. The 3D structure of the vortex presented here will then have a direct impact on the accumulation of grains that will happen on an even lower timescale than in a 2D vortex. We also note however that counter to both intuition and the effect discussed by [Barge & Sommeria \(1995\)](#), this would tend to accumulate the grains at the cyclonic rather than anticyclonic vortex.

In order to explore this mechanism, which could be of primordial importance for the growth of planetesimals and planet formation, work should proceed in two directions: performing simulations using varied density profiles, including that expected at the edge of the dead zone of protoplanetary disks ([Varnière & Tagger 2006](#)), and following the motion and growth of dust grains in the resulting vertical flows. An analytical description of the vertical structure observed in the simulation is also needed.

Another direction for future work concerns the initial goal of this work, which was to analyze the 3D structure of MHD instabilities in magnetized disks.

In accretion disks threaded by a vertical magnetic field, it has been shown that an accretion-ejection instability (AEI) can occur ([Tagger & Pellat 1999](#)) and explain the low-frequency quasi-periodic oscillation of X-ray binaries ([Rodríguez et al. 2002](#); [Varnière et al. 2002](#)). The instability grows by coupling magnetically-driven spiral density waves and a Rossby vortex.

It has also been shown ([Varnière & Tagger 2002](#)) that this vortex can re-emit vertically, as Alfvén waves propagating to the corona along magnetic field lines, a substantial fraction of the accretion energy and angular momentum; it was also suggested that this could be a source for accretion-driven winds and jets. In this context we can expect that the convection rolls observed here would be replaced by resonantly excited slow magnetosonic waves. Because the main action of these waves is to move gas along magnetic field lines we can expect them to provide mass-load to the resulting jet, much as in MHD steady-state models of jets ([Ferreira & Pelletier 1995](#); [Casse & Ferreira 2000](#)) mass-loading occurs at the slow magnetosonic point and acceleration occurs in the region of the Alfvénic point. In order to study this prospect a fully 3D simulation that can handle both the geometry (a disk threaded by open poloidal magnetic field lines) and the magnitude (on the order of equipartition with the gas pressure) of the relevant magnetic field needs to be developed.

*Acknowledgements.* This work was granted access to the HPC resources of IDRIS under the allocation 2009-i2009042125 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif).

## References

- Athanassoula, E. 2008, in IAU Symp. 245, ed. M. Bureau, E. Athanassoula, & B. Barbuy, 93
- Barge, P., & Sommeria, J. 1995, *A&A*, 295, L1
- Barranco, J. A., & Marcus, P. S. 2005, *ApJ*, 623, 1157
- Casse, F., & Ferreira, J. 2000, *A&A*, 353, 1115
- Colella, P., & Woodward, P. R. 1984, *J. Comput. Phys.*, 54, 174
- Combes, F., & Sanders, R. H. 1981, *A&A*, 96, 164
- Combes, F., Debbasch, F., Friedli, D., & Pfenniger, D. 1990, *A&A*, 233, 82
- Falanga, M., Melia, F., Tagger, M., Goldwurm, A., & Bélanger, G. 2007, *ApJ*, 662, L15
- Ferreira, J., & Pelletier, G. 1995, *A&A*, 295, 807
- Goldreich, P., & Lynden-Bell, D. 1965a, *MNRAS*, 130, 97
- Goldreich, P., & Lynden-Bell, D. 1965b, *MNRAS*, 130, 125
- Johansen, A., Andersen, A. C., & Brandenburg, A. 2004, *A&A*, 417, 361
- Johansen, A., Oishi, J. S., Low, M.-M. M., et al. 2007, *Nature*, 448, 1022
- Kerswell, R. R. 2002, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34, 83
- Lai, D., & Tsang, D. 2009, *MNRAS*, 393, 979
- Latter, H. N., & Balbus, S. A. 2009, *MNRAS*, 399, 1058
- Lesur, G., & Papaloizou, J. C. B. 2009, *A&A*, 498, 1
- Lesur, G., & Papaloizou, J. C. B. 2010, *A&A*, 513, A60
- Li, H., Colgate, S. A., Wendroff, B., & Liska, R. 2001, *ApJ*, 551, 874
- Li, H., Finn, J. M., Lovelace, R. V. E., & Colgate, S. A. 2000, *ApJ*, 533, 1023
- Lovelace, R. V. E., & Hohlfield, R. G. 1978, *ApJ*, 221, 51
- Lovelace, R. V. E., Li, H., Colgate, S. A., & Nelson, A. F. 1999, *ApJ*, 513, 805
- Lyra, W., Johansen, A., Klahr, H., & Piskunov, N. 2008, *A&A*, 491, L41
- Lyra, W., Johansen, A., Zsom, A., Klahr, H., & Piskunov, N. 2009, *A&A*, 497, 869
- Papaloizou, J. C. B., & Pringle, J. E. 1985, *MNRAS*, 213, 799
- Rodríguez, J., Varnière, P., Tagger, M., & Durouchoux, P. 2002, *A&A*, 387, 487
- Sellwood, J. A., & Kahn, F. D. 1991, *MNRAS*, 250, 278
- Tagger, M. 2001, *A&A*, 380, 750
- Tagger, M., & Melia, F. 2006, *ApJ*, 636, L33
- Tagger, M., & Pellat, R. 1999, *A&A*, 349, 1003
- Tagger, M., & Varnière, P. 2006, *ApJ*, 652, 1457
- Tóth, G. 1996, *Astrophys. Lett. Comm.*, 34, 245
- Tóth, G., & Odstrčil, D. 1996, *J. Comput. Phys.*, 128, 82
- Tsang, D., & Lai, D. 2009, *MNRAS*, 400, 470
- Varnière, P., & Tagger, M. 2002, *A&A*, 394, 329
- Varnière, P., & Tagger, M. 2006, *A&A*, 446, L13
- Varnière, P., Rodríguez, J., & Tagger, M. 2002, *A&A*, 387, 497
- Yu, C., & Li, H. 2009, *ApJ*, 702, 75





## La banlieue des trous noirs

Cette annexe reproduit un texte de vulgarisation sur les disques d'accrétion et les jets que j'ai écrit, en collaboration avec le comité de rédaction, pour le *Passeport pour les deux infinis* (Robert et al. 2010). Il s'agit d'un livret à destination des lycéens et étudiants qui propose une approche conjointe de l'astrophysique et de la physique des particules en mettant en avant les questions que ces domaines posent dans la recherche contemporaine.

Mes activités de vulgarisation et de diffusion de la culture scientifique durant ma thèse ayant été très enrichissantes, c'est avec plaisir que j'ajoute cette annexe. Le reste de cette thèse étant, je le crains, difficilement accessible pour un public non-averti, ce texte permettra aux non-physiciens de comprendre les enjeux de l'étude des disques d'accrétion. Le lecteur intéressé pourra aussi lire les autres thèmes abordés dans ce livre et comprendre par la pratique certaines notions abordées avec le livre de Planète Sciences (2009).



Figure C.1 – Les deux pages de garde du livret, celui-ci se lisant dans les deux sens

# BANLIEUE DES TROUS NOIRS

**Pour en savoir plus sur un trou noir, astre inaccessible à l'observation puisque son horizon le déconnecte de notre Univers, les recherches se concentrent sur les phénomènes très spectaculaires qu'il peut parfois susciter dans son proche environnement.**

## Vue d'artiste d'un disque d'accrétion

Disque d'accrétion autour d'un trou noir qui capture les couches externes de son étoile compagne avec éjection de deux jets de matière perpendiculairement au plan du disque.



On observe ainsi les «binaires à trou noir», des systèmes de deux étoiles dont l'une a évolué jusqu'au stade où son cœur s'est effondré pour former un trou noir. Dans un tel couple, le trou noir est parfois en mesure de capturer les couches externes de son étoile compagne. À la manière de l'eau s'écoulant au fond d'un lavabo, de la matière tombe alors en spirale vers le trou noir ceinturant l'horizon de ce dernier d'un anneau mince, le disque d'accrétion. Compte tenu de la taille typique de l'horizon des trous noirs issus de l'évolution stellaire (rayon : 10-30 km), les disques d'accrétion dont ils peuvent ainsi se nimbent se développent sur une étendue comparable à celle de la grande banlieue d'une ville comme Paris.

À l'instar des anneaux de Saturne, un disque d'accrétion ne tourne pas d'une manière rigide : la vitesse de rotation d'une cellule de matière proche du centre est plus élevée que celle d'une cellule périphérique. Se déplaçant ainsi l'une à côté de l'autre à des vitesses différentes, ces cellules sont le siège de violents phénomènes de friction. C'est en particulier le cas des zones les plus internes du disque qui du coup sont portées à des températures très élevées (jusqu'à  $10^7$  K). À l'instar d'une étoile, le disque d'accrétion se comporte peu ou prou comme un corps noir, mais sa température est telle qu'il brille d'un éclat formidable, rayonné surtout dans le domaine des rayons X. Un trou noir d'une masse de  $3 M_{\odot}$  peut ainsi rayonner jusqu'à  $10^5$



$L_{\odot}$ , soit une quantité d'énergie comparable à celle que les étoiles les plus brillantes relâchent dans le domaine visible et l'ultraviolet.

Un processus émissif similaire, mais beaucoup plus lumineux, est à l'œuvre dans les noyaux actifs de galaxie. Il met en jeu les trous noirs ultra massifs qui sont tapis au centre même de la plupart des galaxies. Dans certaines conditions bien particulières, de tels trous noirs sont en mesure d'attirer des quantités importantes de matière interstellaire. Il se forme ainsi des disques d'accrétion dont les tailles et les quantités d'énergie rayonnées sont en proportion de la masse des trous noirs impliqués. C'est ainsi que par accrétion, un trou noir d'une masse de  $10^9 M_{\odot}$  est en mesure de rayonner jusqu'à  $10^{11} L_{\odot}$ , autant d'énergie que toutes les étoiles de sa galaxie hôte !

Dans la plupart des cas, le processus d'accrétion par un trou noir s'accompagne d'éjection de matière à des vitesses relativistes au sein de jets émis de part et d'autre du disque, le long d'un axe perpendiculaire à ce dernier. Les jets que produisent les trous noirs stellaires en système binaire peuvent s'étendre sur plusieurs années-lumière, ceux qu'éjectent les trous noirs ultra massifs se développent même sur des milliers d'années-lumière. Signe le plus manifeste de la présence d'un trou noir, les jets relativistes restent cependant très énigmatiques. Pourquoi ces jets sont-ils si fins sur toute leur longueur ? Les processus d'éjection se nourrissent-ils de l'accrétion ?

Jet émis par le noyau de la galaxie M87



# D

## Ordres de grandeur et notations

### D.1 Notations

#### D.1.1 Relatives au disque

$\alpha$	Coefficient de viscosité
$\mathbf{B}$	champ magnétique
$c_s$	Vitesse du son
$G$	Constante de gravitation
$H$	Hauteur du disque
$\mathcal{L}$	Vortensité
$\kappa$	Fréquence épicyclique
$M_*$	Masse de l'objet central
$\dot{M}$	Taux d'accrétion
$P$	Pression
$\Phi_G$	Potentiel gravitationnel
$\rho$	Densité
$\rho_0$	Densité d'équilibre
$\tilde{\rho}$	Densité perturbée
$\Sigma$	Densité de surface
$S$	Entropie
$\nu$	Viscosité cinématique (ou fréquence des QPO kHz)
$\tilde{\omega}$	$\omega - m\Omega$
$W'$	Gradient de vortacité
$\Omega$	Vitesse angulaire de rotation du gaz
$\Omega_K$	Vitesse angulaire de rotation képlérienne
$v_p$	L'indice $p$ se rapporte aux particules solides

#### D.1.2 Relatives aux ondes

$k_r$	Nombre d'onde radial
$m$	Nombre d'onde azimuthal
$N$	Fréquence de Brünt-Vaisala
$q$	$k^2 + m^2$
$\omega$	Pulsation de l'onde

#### D.1.3 Relative à la grille de calcul

$x_i$	Valeur de $x$ au $i^{eme}$ point de la grille
$x_{i+1/2}$	Valeur de $x$ à l'interface entre les cellules $i$ et $i + 1$
$x^n$	Valeur de $x$ à la $n^{eme}$ itération
$x^{n+1/2}$	Valeur de $x$ au temps intermédiaire entre les itérations $n$ et $n + 1$

## D.2 Abréviations

AEI	Instabilité d'accrétion-éjection
AGN	Noyau actif de galaxie
AMR	Adaptive Mesh Refinement
BF	Basse Fréquence
CFL	Courant-Fridrichs-Lewy
HF	Haute Fréquence
HMXB	Binaire X de forte masse
LMXB	Binaire X de faible masse
MHD	Magnétohydrodynamique
MPI	Message Passing Interface
MUSCL	'Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws'
MRI	Instabilité magnéto-rotationnelle
QPO	Oscillation quasi-périodique
RWI	Instabilité par ondes de Rossby
TVD	'Total Variation Diminishing'
VAC	Versatile Advection Code
WKB	Wentzel, Kramers, Brillouin

## D.3 Quelques ordres de grandeur utiles

$M_{\odot}$	Masse du soleil	=	$2 \cdot 10^{33} g$	=	$10^{30} kg$
$R_{\odot}$	Rayon du soleil	=	$7 \cdot 10^{10} cm$	=	$7 \cdot 10^8 m$
UA	Unité Astronomique	=	$1.5 \cdot 10^{13} cm$	=	$1.5 \cdot 10^{11} m$
G	Constante de gravitation	=	$6.6 \cdot 10^{-8} dyne cm^2 g^{-2}$	=	$6.6 \cdot 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$
c	vitesse de la lumière dans le vide	=	$3 \cdot 10^{10} cms^{-1}$	=	$3 \cdot 10^8 m s^{-1}$
a.l.	Année Lumière	=	$10^{14} cm$	=	$10^{16} m$
yr	année	=		=	$10^7 s$

## D.4 Formulaire

### D.4.1 Coordonnées cylindriques

- Divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \partial_r (r A_r) + \frac{1}{r} \partial_{\phi} A_{\phi} + \partial_z (A_z)$$

- Gradient

$$\nabla f = \partial_r f \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \partial_{\phi} f \mathbf{u}_{\phi} + \partial_z f \mathbf{u}_z$$

- Rotationnel

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{r} \partial_{\phi} A_z - \partial_z A_z \right) \mathbf{u}_r \\ &\quad + (\partial_z A_r - \partial_r A_z) \mathbf{u}_{\phi} \\ &\quad + \left( \frac{1}{r} \partial_r (r A_{\phi}) - \frac{1}{r} \partial_{\phi} A_r \right) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

- L'équation d'Euler

$$\partial_t \mathbf{v} + v_r \partial_r \mathbf{v} + \frac{v_{\phi}}{r} \partial_{\phi} \mathbf{v} + v_z \partial_z \mathbf{v} = \mathbf{f}$$

## D.4.2 Grandeurs relatives aux disques

- Fréquence épicyclique

$$\kappa^2 = 4\Omega^2 + 2r\Omega\partial_r\Omega = \frac{2\Omega}{r}\partial_r(r^2\Omega)$$

- Fréquence avec décalage Doppler

$$\tilde{\omega} = \omega - m\Omega$$

- Corotation

$$\omega = m\Omega \rightarrow \tilde{\omega} = 0$$

- Résonance de Linblad

$$\tilde{\omega}^2 = \kappa^2$$





# Bibliographie

- A. Acker. *Astronomie-Astrophysique, Introduction*. Dunod, 2005.
- V. Agapitou, J. C. B. Papaloizou, et C. Terquem. Bending instabilities in magnetized accretion disks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 292 :631–+, Décembre 1997.
- O. Agertz, B. Moore, J. Stadel, D. Potter, F. Miniati, J. Read, L. Mayer, A. Gawryszczak, A. Kravtsov, Å. Nordlund, F. Pearce, V. Quilis, D. Rudd, V. Springel, J. Stone, E. Tasker, R. Teyssier, J. Wadsley, et R. Walder. Fundamental differences between SPH and grid methods. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 380 :963–978, Septembre 2007.
- E. Athanassoula. Boxy/peanut and discy bulges : formation, evolution and properties. Dans M. Bureau, E. Athanassoula, & B. Barbuy, éditeur, *IAU Symposium*, volume 245 de *IAU Symposium*, pages 93–102, Juillet 2008.
- B. Rocca-Volmerange & H. Sol, éditeur. *Active galactic nuclei in their cosmic environment : JENAM 99*, volume 1 de *EAS Publications Series*, 2001.
- J. Bally, B. Reipurth, et C. J. Davis. Observations of Jets and Outflows from Young Stars. *Protostars and Planets V*, pages 215–230, 2007.
- P. Barge et J. Sommeria. Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices? *Astronomy and Astrophysics*, 295 :L1–L4, Mars 1995.
- J. A. Barranco et P. S. Marcus. Three-dimensional Vortices in Stratified Protoplanetary Disks. *Astrophysical Journal*, 623 :1157–1170, Avril 2005.
- D. Barret, W. Kluźniak, J. F. Olive, S. Paltani, et G. K. Skinner. On the high coherence of kHz quasi-periodic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 357 :1288–1294, Mars 2005.
- G. Bélanger, R. Terrier, O. C. de Jager, A. Goldwurm, et F. Melia. Periodic Modulations in an X-ray Flare from Sagittarius A\*. *Journal of Physics Conference Series*, 54 :420–426, Décembre 2006.
- N. Bessolaz, C. Zanni, J. Ferreira, R. Keppens, et J. Bouvier. Accretion funnels onto weakly magnetized young stars. *Astronomy and Astrophysics*, 478 : 155–162, Janvier 2008.
- J. Binney. WARPS. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30 : 51–74, 1992.
- R. D. Blandford. Pulsars and physics. Dans J. M. Shull & H. A. Thronson, éditeur, *Pulsars as Physics Laboratories*, pages 177–192, 1993.

- A. P. Boss. Giant planet formation by gravitational instability. *Science*, 276 : 1836–1839, 1997.
- J. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentées par divers savants à l'Académie des Sciences*, XXIII(1) :1–680, 1877.
- A. Bracco, P. H. Chavanis, A. Provenzale, et E. A. Spiegel. Particle aggregation in a turbulent Keplerian flow. *Physics of Fluids*, 11 :2280–2287, Août 1999.
- G.L. Buffon. *L'histoire naturelle*. Imprimerie Royale, 1749.
- M. Cadolle Bel. *Étude des émissions à haute énergie des trous noirs stellaires accrétants*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 2006.
- F. Casse et J. Ferreira. Magnetized accretion-ejection structures. IV. Magnetically-driven jets from resistive, viscous, Keplerian discs. *Astronomy and Astrophysics*, 353 :1115–1128, Janvier 2000a.
- F. Casse et J. Ferreira. Magnetized accretion-ejection structures. V. Effects of entropy generation inside the disc. *Astronomy and Astrophysics*, 361 : 1178–1190, Septembre 2000b.
- F. Casse et R. Keppens. Magnetized Accretion-Ejection Structures : 2.5-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Continuous Ideal Jet Launching from Resistive Accretion Disks. *Astrophysical Journal*, 581 : 988–1001, Décembre 2002.
- P. Cassen. Protostellar Disks and Planet Formation. Dans D. Queloz, S. Udry, M. Mayor, W. Benz, P. Cassen, T. Guillot, et A. Quirrenbach, éditeurs, *Saas-Fee Advanced Course 31 : Extrasolar planets*, pages 369–448, 2006.
- S. Chaty. *Étude multi-longueur d'onde du microquasar GRS 1915+105 et de sources binaires de haute énergie de la Galaxie*. PhD thesis, Université Paris Diderot, 1998.
- P. Colella et P. R. Woodward. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. *Journal of Computational Physics*, 54 :174–201, Septembre 1984.
- F. Combes, F. Debbasch, D. Friedli, et D. Pfenniger. Box and peanut shapes generated by stellar bars. *Astronomy and Astrophysics*, 233 :82–95, Juillet 1990.
- F. Combes et R. H. Sanders. Formation and properties of persisting stellar bars. *Astronomy and Astrophysics*, 96 :164–173, Mars 1981.
- D. Koester & K. Werner, éditeur. *White Dwarfs*, volume 443 de *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 1995.
- R. Descartes. *Principia Philosophiae*. Descartes, R., 1644.
- A. Einstein. Erklärung der Perihelionbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, vol. 47, No.2, pp. 831–839, 1915, 47 :831–839, 1915.

- P. S. Epstein. On the Resistance Experienced by Spheres in their Motion through Gases. *Physical Review*, 23 :710–733, Juin 1924.
- C. Espaillat, J. Bregman, P. Hughes, et E. Lloyd-Davies. Wavelet Analysis of AGN X-Ray Time Series : A QPO in 3C 273? *Astrophysical Journal*, 679 : 182–193, Mai 2008.
- M. Falanga, F. Melia, M. Tagger, A. Goldwurm, et G. Bélanger. General Relativistic Flux Modulations from Disk Instabilities in Sagittarius A\*. *Astrophysical Journal Letter*, 662 :L15–L18, Juin 2007.
- B. T. Ferreira et G. I. Ogilvie. Warp and eccentricity propagation in discs around black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 392 :428–438, Janvier 2009.
- J. Ferreira et G. Pelletier. Magnetized accretion-ejection structures. III. Stellar and extragalactic jets as weakly dissipative disk outflows. *Astronomy and Astrophysics*, 295 :807–+, Mars 1995.
- R. Fjørtoft. Application of integral theorems in deriving criteria for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. *Geofysiske Publikasjoner*, 17 : 1–52, 1950.
- E. C. Ford, M. van der Klis, M. Méndez, J. van Paradijs, et P. Kaaret. Measurement of Hard Lags and Coherences in the X-Ray Flux of Accreting Neutron Stars and Comparison with Accreting Black Holes. *Astrophysical Journal Letter*, 512 :L31–L34, Février 1999.
- J. Frank, A. King, et D. J. Raine. *Accretion Power in Astrophysics : Third Edition*. Cambridge University Press, Février 2002.
- S. Fromang et R. P. Nelson. On the accumulation of solid bodies in global turbulent protoplanetary disc models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364 :L81–L85, Novembre 2005.
- P. Ghosh et F. K. Lamb. Accretion by rotating magnetic neutron stars. III - Accretion torques and period changes in pulsating X-ray sources. *Astrophysical Journal*, 234 :296–316, Novembre 1979.
- S. K. Godunov. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sbornik*, 47 :271–306, 1959.
- P. Goldreich, J. Goodman, et R. Narayan. The stability of accretion tori. I - Long-wavelength modes of slender tori. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 221 :339–364, Juillet 1986.
- P. Goldreich et D. Lynden-Bell. I. Gravitational stability of uniformly rotating disks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 130 :97–+, 1965a.
- P. Goldreich et D. Lynden-Bell. II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 130 :125–+, 1965b.

- P. Goldreich et W. R. Ward. The Formation of Planetesimals. *Astrophysical Journal*, 183 :1051–1062, Août 1973.
- K. Heng et S. J. Kenyon. Vortices as Nurseries for Planetesimal Formation in Protoplanetary Discs. *ArXiv e-prints*, Mai 2010.
- K. Heng et S. Tremaine. Long-lived planetesimal discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401 :867–889, Janvier 2010.
- F. Hersant. On the pressure of collisionless particle fluids. The case of solids settling in disks. *Astronomy and Astrophysics*, 502 :385–389, Juillet 2009.
- S. Inaba et P. Barge. Dusty Vortices in Protoplanetary Disks. *Astrophysical Journal*, 649 :415–427, Septembre 2006.
- J. Ferreira, C. Dougados, & E. Whelan, éditeur. *Jets from Young Stars I : Models and Constraints*, volume 723 de *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Septembre 2007.
- A. Johansen, A. C. Andersen, et A. Brandenburg. Simulations of dust-trapping vortices in protoplanetary discs. *Astronomy and Astrophysics*, 417 :361–374, Avril 2004.
- A. Johansen, J. S. Oishi, M.-M. M. Low, H. Klahr, T. Henning, et A. Youdin. Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks. *Nature*, 448 :1022–1025, Août 2007.
- P. G. Jonker, M. van der Klis, R. Wijnands, J. Homan, J. van Paradijs, M. Méndez, E. C. Ford, E. Kuulkers, et F. K. Lamb. The Power Spectral Properties of the Z Source GX 340+0. *Astrophysical Journal*, 537 :374–386, Juillet 2000.
- E. Kant. *Theorie des Himmels*. Petersen, 1755.
- S. D. Kawaler. White dwarf stars. Dans S. D. Kawaler, I. Novikov, & G. Srinivasan, éditeur, *Stellar Remnants*, pages 1–95, 1997.
- A. K. Kembhavi et J. V. Narlikar. *Quasars and active galactic nuclei : an introduction*. Cambridge University Press, Avril 1999.
- R. R. Kerswell. Elliptical instability. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34 :83–113, 2002.
- A. R. King, J. E. Pringle, et M. Livio. Accretion disc viscosity : how big is alpha? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 376 :1740–1746, Avril 2007.
- H. Klahr. The Global Baroclinic Instability in Accretion Disks. II. Local Linear Analysis. *Astrophysical Journal*, 606 :1070–1082, Mai 2004.
- H. H. Klahr et P. Bodenheimer. Turbulence in Accretion Disks : Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability. *Astrophysical Journal*, 582 :869–892, Janvier 2003.
- A. V. Krivov. Debris disks : seeing dust, thinking of planetesimals and planets. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 10 :383–414, Mai 2010.

- D. Lai. Matter and Radiation in Strong Magnetic Fields of Neutron Stars. *Journal of Physics Conference Series*, 31 :68–75, Mars 2006.
- D. Lai et D. Tsang. Corotational instability of inertial-acoustic modes in black hole accretion discs and quasi-periodic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 393 :979–991, Mars 2009.
- F. K. Lamb, N. Shibasaki, M. A. Alpar, et J. Shaham. Quasi-periodic oscillations in bright galactic-bulge X-ray sources. *Nature*, 317 :681–687, Octobre 1985.
- P.-S. Laplace. *Exposition du système du monde*. Laplace, P.-S., 1796.
- H. N. Latter et S. A. Balbus. Inertial waves near corotation in three-dimensional hydrodynamical discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 399 :1058–1073s, Octobre 2009.
- J. Lense et H. Thirring. Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19 :156–+, 1918.
- T. Lepeltier et J. J. Aly. Stability of an axisymmetric massive current sheet supported by a potential magnetic field. *Astronomy and Astrophysics*, 306 :645–+, Février 1996.
- G. Lesur et G. I. Ogilvie. On the angular momentum transport due to vertical convection in accretion discs. *ArXiv e-prints*, Février 2010.
- G. Lesur et J. C. B. Papaloizou. The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models. *ArXiv e-prints*, Novembre 2009.
- R. Leveque. Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods : The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm. *Journal of Computational Physics*, 146 :346–365, Octobre 1998.
- Randall, J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Birkhäuser, 1992.
- Randall, J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press, 2002.
- R.J. Leveque. The dynamics of pressureless dust clouds and delta waves. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 1(2) :315–327, 2004.
- W. H. G. Lewin, J. van Paradijs, et E. P. J. van den Heuvel. X-ray binaries. *Cambridge Astrophysics Series*, 26, 1995.
- H. Li, S. A. Colgate, B. Wendroff, et R. Liska. Rossby Wave Instability of Thin Accretion Disks. III. Nonlinear Simulations. *Astrophysical Journal*, 551 :874–896, Avril 2001.
- H. Li, J. M. Finn, R. V. E. Lovelace, et S. A. Colgate. Rossby Wave Instability of Thin Accretion Disks. II. Detailed Linear Theory. *Astrophysical Journal*, 533 :1023–1034, Avril 2000.

- D. N. C. Lin et J. C. B. Papaloizou. Theory of Accretion Disks II : Application to Observed Systems. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 34 : 703–748, 1996.
- R. V. E. Lovelace et R. G. Hohlfeld. Negative mass instability of flat galaxies. *Astrophysical Journal*, 221 :51–61, Avril 1978.
- R. V. E. Lovelace, H. Li, S. A. Colgate, et A. F. Nelson. Rossby Wave Instability of Keplerian Accretion Disks. *Astrophysical Journal*, 513 :805–810, Mars 1999.
- W. Lyra, A. Johansen, A. Zsom, H. Klahr, et N. Piskunov. Planet formation bursts at the borders of the dead zone in 2D numerical simulations of circumstellar disks. *Astronomy and Astrophysics*, 497 :869–888, Avril 2009.
- S. Markoff, H. Falcke, et R. Fender. A jet model for the broadband spectrum of XTE J1118+480. Synchrotron emission from radio to X-rays in the Low/Hard spectral state. *Astronomy and Astrophysics*, 372 :L25–L28, Juin 2001.
- F. Masset et M. Tagger. Propagation of WARPS in moderately thick disks. *Astronomy and Astrophysics*, 307 :21–+, Mars 1996.
- F. S. Masset. Protoplanet–protoplanetary Disk Interaction with a Godunov method. Dans N. V. Pogorelov, E. Audit, & G. P. Zank, éditeur, *Numerical Modeling of Space Plasma Flows*, volume 385 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 121–+, Avril 2008.
- H. Meheut, F. Casse, P. Varniere, et M. Tagger. 3D numerical simulations of the Rossby wave instability. Dans *Microquasars and Beyond*, 2008.
- H. Meheut, F. Casse, P. Varniere, et M. Tagger. 3d numerical simulations of the rossby wave instability. *Proceedings of the VII Microquasar Workshop : Microquasars and Beyond. September 1 - 5, 2008. Foca, Izmir, Turkey. Published online at <http://pos.sissa.it/cgi-bin/reader/conf.cgi?confid=62>, p.97, 2008. URL <http://adsduo.cfa.harvard.edu/abs/2008mqw.confE..97M>.*
- H. Meheut, F. Casse, P. Varniere, et M. Tagger. Rossby wave instability and three-dimensional vortices in accretion disks. *Astronomy and Astrophysics*, 516 :A31+, Juin 2010.
- H. Méheut et M. Tagger. A model for the khz qpo in neutron star binaries. *SF2A-2008 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics Eds. : C. Charbonnel, F. Combes and R. Samadi. Available online at <http://proc.sf2a.asso.fr>, p.421, 2008. URL <http://adsduo.cfa.harvard.edu/abs/2008sf2a.conf..421M>.*
- H. Meheut et M. Tagger. Warping modes in discs around accreting neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 399, Issue 2, pp. 794–800.*, 2009. URL <http://adsduo.cfa.harvard.edu/abs/2009MNRAS.399..794M>.

- Z. Meliani, R. Keppens, F. Casse, et D. Giannios. AMRVAC and relativistic hydrodynamic simulations for gamma-ray burst afterglow phases. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 376 :1189–1200, Avril 2007.
- M. Méndez et T. Belloni. Is there a link between the neutron-star spin and the frequency of the kilohertz quasi-periodic oscillations? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 381 :790–796, Octobre 2007.
- M. Méndez et M. van der Klis. Precise Measurements of the Kilohertz Quasi-periodic Oscillations in 4U 1728-34. *Astrophysical Journal Letter*, 517 : L51–L54, Mai 1999.
- M. Méndez, M. van der Klis, E. C. Ford, R. Wijnands, et J. van Paradijs. Dependence of the Frequency of the Kilohertz Quasi-periodic Oscillation on X-Ray Count Rate and Colors in 4U 1608-52. *Astrophysical Journal Letter*, 511 :L49–L52, Janvier 1999.
- M. Mendez, M. van der Klis, R. Wijnands, E. C. Ford, J. van Paradijs, et B. A. Vaughan. Kilohertz Quasi-periodic Oscillation Peak Separation Is Not Constant in the Atoll Source 4U 1608-52. *Astrophysical Journal Letter*, 505 :L23+, Septembre 1998.
- P. Mészáros, éditeur. *High-energy radiation from magnetized neutron stars*. University of Chicago Press, 1992.
- M. C. Miller, F. K. Lamb, et D. Psaltis. Sonic-Point Model of Kilohertz Quasi-periodic Brightness Oscillations in Low-Mass X-Ray Binaries. *Astrophysical Journal*, 508 :791–830, Décembre 1998.
- I. F. Mirabel, V. Dhawan, S. Chaty, L. F. Rodríguez, J. Martí, C. R. Robinson, J. Swank, et T. Geballe. Accretion instabilities and jet formation in GRS 1915+105. *Astronomy and Astrophysics*, 330 :L9–L12, Février 1998.
- I. F. Mirabel et L. F. Rodríguez. A superluminal source in the Galaxy. *Nature*, 371 :46–48, Septembre 1994.
- I. F. Mirabel, L. F. Rodríguez, B. Cordier, J. Paul, et F. Lebrun. A double-sided radio jet from the compact Galactic Centre annihilator 1E140.7 - 2942. *Nature*, 358 :215–217, Juillet 1992.
- G. E. Morfill et M. Sterzik. Protoplanetary disks : Observations and physical processes. Dans B. Battrick, éditeur, *ESA Special Publication*, volume 315 de *ESA Special Publication*, pages 219–227, Novembre 1990.
- E. H. Morgan, R. A. Remillard, et J. Greiner. RXTE Observations of QPOs in the Black Hole Candidate GRS 1915+105. *Astrophysical Journal*, 482 : 993–+, Juin 1997.
- G. I. Ogilvie et G. Dubus. Precessing warped accretion discs in X-ray binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 320 :485–503, Février 2001.
- B. Paczyński et P. J. Wiita. Thick accretion disks and supercritical luminosities. *Astronomy and Astrophysics*, 88 :23–31, Août 1980.

- J. C. B. Papaloizou et D. N. C. Lin. Nonaxisymmetric instabilities in thin self-gravitating rings and disks. *Astrophysical Journal*, 344 :645–668, Septembre 1989.
- J. C. B. Papaloizou et J. E. Pringle. The dynamical stability of differentially rotating discs. II. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 213 : 799–820, Avril 1985.
- Planète Sciences, éditeur. *Pas à pas dans l'univers : 15 Expériences d'astronomie pour tous*. Vuibert, 2009.
- B.R. Potter, T.D. Colman. *Handbook of weather, climate, and water : dynamics, climate, physical meteorology, weather systems, and measurements*. Wiley-Interscience, 2003.
- J. E. Pringle. Accretion discs in astrophysics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 19 :137–162, 1981.
- J. E. Pringle. Self-induced warping of accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 281 :357–361, Juillet 1996.
- R. E. Pudritz, R. Ouyed, C. Fendt, et A. Brandenburg. Disk Winds, Jets, and Outflows : Theoretical and Computational Foundations. *Protostars and Planets V*, pages 277–294, 2007.
- J.W. Rayleigh. On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions. *Proc. London Math. Soc.*, s1-11(1) :57–72, 1879. URL <http://plms.oxfordjournals.org>.
- H. Rein, G. Lesur, et Z. M. Leinhardt. The Validity of the Super-Particle Approximation during Planetesimal Formation. *ArXiv e-prints*, Décembre 2010.
- R. A. Remillard. X-ray spectral states and high-frequency QPOs in black hole binaries. *Astronomische Nachrichten*, 326 :804–807, Novembre 2005.
- R. A. Remillard et J. E. McClintock. X-Ray Properties of Black-Hole Binaries. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 44 :49–92, Septembre 2006.
- J.L. Robert, J. Paul, et ..., éditeurs. *Passeport pour les deux infinis*. Dunod, 2010.
- J. Rodriguez, P. Varnière, M. Tagger, et P. Durouchoux. Accretion-ejection instability and QPO in black hole binaries I. Observations. *Astronomy and Astrophysics*, 387 :487–496, Mai 2002.
- P. L. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–+, Octobre 1981.
- M. M. Romanova, G. V. Ustyugova, A. V. Koldoba, et R. V. E. Lovelace. Magnetohydrodynamic Simulations of Disk-Magnetized Star Interactions in the Quiescent Regime : Funnel Flows and Angular Momentum Transport. *Astrophysical Journal*, 578 :420–438, Octobre 2002.



- M. M. Romanova, G. V. Ustyugova, A. V. Koldoba, J. V. Wick, et R. V. E. Lovelace. Three-dimensional Simulations of Disk Accretion to an Inclined Dipole. I. Magnetospheric Flows at Different  $\Theta$ . *Astrophysical Journal*, 595 : 1009–1031, Octobre 2003.
- V. S. Safronov. *Evolutsiia doplanetnogo oblaka*. Safronov, V. S., 1969.
- B. Seguin, M. Villeneuve. *Astronomie et Astrophysique*. De Boeck, 2002.
- N. I. Shakura et R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, 24 :337–355, 1973.
- Y. Shen, J. M. Stone, et T. A. Gardiner. Three-dimensional Compressible Hydrodynamic Simulations of Vortices in Disks. *Astrophysical Journal*, 653 : 513–524, Décembre 2006.
- F. H. Shu. *Physics of Astrophysics, Vol. II*. University Science Books, 1992.
- H. C. Spruit et R. E. Taam. Mass transport in a neutron star magnetosphere. *Astronomy and Astrophysics*, 229 :475–493, Mars 1990.
- L. Stella et M. Vietri. Lense-Thirring Precession and Quasi-periodic Oscillations in Low-Mass X-Ray Binaries. *Astrophysical Journal Letter*, 492 :L59+, Janvier 1998.
- L. Stella et M. Vietri. kHz Quasiperiodic Oscillations in Low-Mass X-Ray Binaries as Probes of General Relativity in the Strong-Field Regime. *Physical Review Letters*, 82 :17–20, Janvier 1999.
- T. E. Strohmayer, W. Zhang, J. H. Swank, A. Smale, L. Titarchuk, C. Day, et U. Lee. Millisecond X-Ray Variability from an Accreting Neutron Star System. *Astrophysical Journal Letter*, 469 :L9+, Septembre 1996.
- M. Tagger. On Rossby waves and vortices with differential rotation. *Astronomy and Astrophysics*, 380 :750–757, Décembre 2001.
- M. Tagger, R. N. Henriksen, J. F. Sygnet, et R. Pellat. Spiral waves and instability in magnetized astrophysical disks. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 353, April 20, 1990, p. 654-657., 1990. URL <http://adsduo.cfa.harvard.edu/abs/1990ApJ...353..654T>.
- M. Tagger et F. Melia. A Possible Rossby Wave Instability Origin for the Flares in Sagittarius A\*. *Astrophysical Journal Letter*, 636 :L33–L36, Janvier 2006.
- M. Tagger et R. Pellat. An accretion-ejection instability in magnetized disks. *Astronomy and Astrophysics*, 349 :1003–1016, Septembre 1999.
- M. Tagger et P. Varnière. Accretion-Ejection Instability, MHD Rossby Wave Instability, Diskoseismology, and the High-Frequency QPOs of Microquasars. *Astrophysical Journal*, 652 :1457–1465, Décembre 2006.
- P. Tanga, A. Babiano, B. Dubrulle, et A. Provenzale. Forming Planetesimals in Vortices. *Icarus*, 121 :158–170, Mai 1996.

- R. Teyssier. Numerical solutions for hyperbolic systems of conservation laws : from godunov method to numerical solutions for hyperbolic systems of conservation laws : from godunov method to adaptive mesh refinement. Dans *Supercomputing and numerical techniques in astrophysical fluid flow modelling school, Evora, Porgugal, février 2008*.
- E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1997.
- D. Tóth, G. Odstrčil. Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems. *J. Comput. Phys.*, 128(1) :82–100, 1996. ISSN 0021-9991.
- G. Tóth. A General Code for Modeling MHD Flows on Parallel Computers : Versatile Advection Code. *Astrophysical Letters Communications*, 34 :245–+, 1996.
- G. Tóth. The LASY Preprocessor and Its Application to General Multidimensional Codes. *Journal of Computational Physics*, 138 :981–990, Décembre 1997.
- S. Trippe, T. Paumard, T. Ott, S. Gillessen, F. Eisenhauer, F. Martins, et R. Genzel. A polarized infrared flare from Sagittarius A\* and the signatures of orbiting plasma hotspots. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 375 :764–772, Mars 2007.
- D. Tsang et D. Lai. Super-reflection in fluid discs : corotation amplifier, corotation resonance, Rossby waves and overstable modes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387 :446–462, Juin 2008.
- D. Tsang et D. Lai. Corotational instability of inertial-acoustic modes in black hole accretion discs : non-barotropic flows. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400 :470–479, Novembre 2009.
- B. van der Holst et R. Keppens. Hybrid block-AMR in cartesian and curvilinear coordinates : MHD applications. *Journal of Computational Physics*, 226 : 925–946, Septembre 2007.
- M. van der Klis. Millisecond Oscillations in X-ray Binaries. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 38 :717–760, 2000.
- B. van Leer. On the relation between the upwind-differencing schemes of godunov, engquist–osher and roe. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 5(1) :1–20, 1984. URL <http://link.aip.org/link/?SCE/5/1/1>.
- P. Varnière, J. Rodriguez, et M. Tagger. Accretion-ejection instability and QPO in black-hole binaries. II. Relativistic effects. *Astronomy and Astrophysics*, 387 :497–506, Mai 2002.
- P. Varniere, J. Rodriguez, et M. Tagger. Microquasars classification from a disk instability perspective. *Astronomy and Astrophysics (submitted)*, 2010.

- P. Varnière et M. Tagger. Accretion-Ejection Instability in magnetized disks : Feeding the corona with Alfvén waves. *Astronomy and Astrophysics*, 394 : 329–338, Octobre 2002.
- P. Varnière et M. Tagger. Reviving Dead Zones in accretion disks by Rossby vortices at their boundaries. *Astronomy and Astrophysics*, 446 :L13–L16, Février 2006.
- B. Warner. *Cataclysmic variable stars*. Cambridge University Press, 1995.
- S. J. Weidenschilling. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 180 :57–70, Juillet 1977.
- G. P. Williams. Planetary circulations. I - Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence. *Journal of Atmospheric Sciences*, 35 :1399–1426, Août 1978.
- M. C. Wyatt. Evolution of Debris Disks. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 46 :339–383, Septembre 2008.
- A. Youdin. From Grains to Planetesimals : Les Houches Lecture. *ArXiv e-prints*, Juillet 2008.
- A. N. Youdin et J. Goodman. Streaming Instabilities in Protoplanetary Disks. *Astrophysical Journal*, 620 :459–469, Février 2005.

**Titre** Etude tridimensionnelle des tourbillons dans les disques d'accrétion : des microquasars à la formation planétaire

**Résumé** La physique des disques d'accrétion concerne plusieurs domaines de l'astrophysique, de la formation des planètes à l'astrophysique des hautes énergies. La présence de tourbillons anticycloniques pourrait expliquer de nombreux phénomènes : certaines oscillations quasi-périodiques des binaires X (contenant un objet compact : trou noir, étoile à neutrons ou naine blanche), mais aussi la croissance des planétésimaux dans les disques protoplanétaires.

Cette thèse présente la première étude tridimensionnelle de tels tourbillons, dus à l'instabilité par ondes de Rossby. La simulation numérique permet de mettre en évidence la structure pleinement tridimensionnelle, inattendue, de ces tourbillons. On propose ensuite une étude analytique de l'origine des structures tourbillonnaires observées dans les simulations. Par la suite on cherche à comprendre l'impact de ces structures sur les mécanismes de formation des planètes. En effet la présence de tourbillons peut permettre la concentration des grains solides et ainsi accélérer le processus de croissance des planétésimaux.

Finalement, une nouvelle explication au problème de l'origine des oscillations quasi-périodiques kiloHertz des binaires à étoiles à neutrons est aussi proposée. Celle-ci s'appuyant non seulement sur la magnétohydrodynamique mais aussi sur les effets de pression de radiation.

**Mots-clés** Disque d'accrétion, tourbillon, instabilité par ondes de Rossby, formation de planètes, oscillation quasi-périodique, simulation numérique

**Title** Three dimensional study of accretion discs vortices : from compact objects to planet formation

**Abstract** The physics of accretion discs concerns various astrophysical domains from planet formation to high-energy astrophysics. Existence of anticyclonic vortices may explain numerous phenomena such as quasi-periodic oscillations observed in X-rays binaries (with a compact object : black hole, neutron stars or white dwarfs) but also the growth of planetesimals in protoplanetary discs. This thesis present the first three dimensional study of such vortices, due to the Rossby wave instability. The numerical simulations allows to demonstrate the unexpected fully three dimensional structure of the vortices. We then propose an analytical study of these vortical structures observed in the simulations. We then try to understand the consequences of these structures on the planet formation mechanisms. These vortices may allow the concentration of solid grains that ends in the growth of planetesimals. Finally we also propose a new explanation for the origin of kiloHertz quasi-periodic oscillations of neutron star binaries. This is based both on magnetohydrodynamics and radiation pressure.

**Keywords** Accretion discs, vortices, Rossby wave instability, planet formation, quasi-periodic oscillation, numerical simulations