



N° d'ordre: 1234

## THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Physique

par

Jérémy SCHMITT

# Déconvolution multicanale et détection de sources en utilisant des représentations parcimonieuses: Application au projet Fermi

Soutenue le 7/12/2011 devant la Commission d'examen:

M. Albert BIJAOU  
Mme. Maï NGUYEN-VERGER  
M. Jean-Luc STARCK (Directeur de thèse)  
Mme. Isabelle GRENIER (Co-directrice de thèse)  
M. Gilles FAÏ  
M. Thomas RODET

Rapporteurs:

M. Albert Bijaoui  
Mme. Maï Nguyen



## Résumé

Ce mémoire de thèse présente de nouvelles méthodologies pour l'analyse de données Poissoniennes sur la sphère, dans le cadre de la mission Fermi. Les objectifs principaux de la mission Fermi, l'étude du fond diffus galactique et l'établissement du catalogue de source, sont compliqués par la faiblesse du flux de photons et les effets de l'instrument de mesure. Ce mémoire introduit une nouvelle représentation mutli-échelles des données Poissoniennes sur la sphère, la *Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle sur la Sphère* (MS-VSTS), consistant à combiner une transformée multi-échelles sur la sphère (ondelettes, curvelets), avec une transformée stabilisatrice de variance (VST). Cette méthode est appliquée à la suppression du bruit de Poisson mono et multicanale, à l'interpolation de données manquantes, à l'extraction d'un modèle de fond et à la déconvolution multicanale. Enfin, ce mémoire aborde le problème de la séparation de composantes en utilisant des représentations parcimonieuses (*template fitting*).

**Mots-clefs** : Traitement d'images, représentations parcimonieuses, débruitage, déconvolution, représentations multiéchelle, ondelettes, données multicanales.

---

## MULTICHANNEL DECONVOLUTION AND SOURCE DETECTION USING SPARSE REPRESENTATIONS: APPLICATION TO FERMI PROJECT

### Abstract

This thesis presents new methods for spherical Poisson data analysis for the Fermi mission. Fermi main scientific objectives, the study of diffuse galactic background et the building of the source catalog, are complicated by the weakness of photon flux and the point spread function of the instrument. This thesis proposes a new multi-scale representation for Poisson data on the sphere, the *Multi-Scale Variance Stabilizing Transform on the Sphere* (MS-VSTS), consisting in the combination of a spherical multi-scale transform (wavelets, curvelets) with a variance stabilizing transform (VST). This method is applied to mono- and multichannel Poisson noise removal, missing data interpolation, background extraction and multichannel deconvolution. Finally, this thesis deals with the problem of component separation using sparse representations (*template fitting*).

**Keywords** : Image processing, sparse representations, denoising, deconvolution, multiscale representations, wavelets, multichannel data.





# Remerciements

Je suis très reconnaissant envers Albert Bijaoui et Maï Nguyen-Verger qui ont accepté la charge de rapporteurs pour mon manuscrit de thèse, ainsi que Gilles Fayë et Thomas Rodet qui me font l'honneur de participer à ce jury de thèse.

Je remercie chaleureusement mes co-directeurs de thèse, Jean-Luc Starck et Isabelle Grenier, pour leur disponibilité, leurs conseils, leurs critiques et leurs encouragements.

Je remercie tout particulièrement Jean-Marc Casandjian pour son aide précieuse, ses encouragements, et pour avoir mis à ma disposition les données Fermi réelles et simulées.

Je remercie également Jalal Fadili pour ses nombreux et judicieux conseils.

Je remercie l'ensemble du personnel du Service d'Astrophysique du CEA de Saclay, notamment son directeur Pierre-Olivier Lagage, qui m'ont permis de mener ce travail à terme dans d'excellentes conditions.

Un grand merci à l'ensemble de la collaboration Fermi, en particulier Jennifer Siegal-Gaskins et Seth Digel, avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler.

Je dédie cette thèse à mes parents, mes frères et mes amis pour leur soutien sans faille au cours de ces trois années.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>II</b>	<b>La mission Fermi</b>	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>Présentation de la mission</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Aspects scientifiques</b>	<b>15</b>
2.1	Le rayonnement gamma . . . . .	15
2.2	Les pulsars . . . . .	16
2.3	Les noyaux actifs de galaxies et les blazars . . . . .	16
2.4	Les rayons cosmiques et l'émission interstellaire . . . . .	16
2.5	Les éruptions solaires . . . . .	17
2.6	Les sursauts gamma . . . . .	17
2.7	Les trous noirs galactiques et microquasars . . . . .	18
2.8	Etude de l'Univers primitif . . . . .	18
2.9	Matière noire . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Instruments de mesure</b>	<b>19</b>
3.1	Le LAT . . . . .	19
3.2	Le GBM . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Fermi à l'Irfu</b>	<b>21</b>
4.1	Etude du fond diffus . . . . .	23
4.2	Etablissement du catalogue de sources . . . . .	25
<b>III</b>	<b>L'analyse multi-échelle sur la sphère</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>La transformée en harmoniques sphériques</b>	<b>31</b>
<b>7</b>	<b>Pixélisation sur la sphère</b>	<b>31</b>
7.1	Généralités . . . . .	31

7.2	La pixélisation HEALPix . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Transformée en ondelettes isotrope sur la sphère</b>	<b>35</b>
8.1	Transformée en ondelettes isotrope non-décimée sur la sphère . . . . .	35
<b>9</b>	<b>Ridgelets et Curvelets sur la sphère</b>	<b>38</b>
9.1	Transformée en ridgelets sur la sphère . . . . .	38
9.2	Transformée en curvelets sur la sphère . . . . .	39
<b>10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>
<b>IV</b>	<b>Une représentation multi-échelle sur la sphère adaptée aux données Poissoniennes : la Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle sur la Sphere (MS-VSTS)</b>	<b>43</b>
<b>11</b>	<b>Position du problème</b>	<b>45</b>
<b>12</b>	<b>Débruitage Poissonien sur le plan : la méthode MS-VST</b>	<b>46</b>
12.1	Débruitage de données Gaussiennes sur le plan à l'aide de la transformée en ondelettes . . . . .	46
12.2	Débruitage de données poissoniennes par la méthode MS-VST . . . . .	49
<b>13</b>	<b>Une représentation multi-échelle sur la sphère : la Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle sur la Sphere (MS-VSTS)</b>	<b>57</b>
13.1	MS-VSTS + IUWT . . . . .	57
13.2	MS-VSTS + Curvelets . . . . .	58
<b>14</b>	<b>Application à la suppression du bruit de Poisson</b>	<b>60</b>
14.1	MS-VSTS + IUWT . . . . .	60
14.2	Adaptation du support de multi-résolution . . . . .	61
14.3	MS-VSTS + Curvelets . . . . .	61
14.4	Résultats expérimentaux . . . . .	63
<b>15</b>	<b>Application à l'étude du fond diffus galactique : débruitage et inpainting</b>	<b>63</b>
15.1	Méthode . . . . .	63
15.2	Résultats expérimentaux . . . . .	64

<b>16 Application à la détection de sources : débruitage et extraction du fond diffus galactique</b>	<b>64</b>
16.1 Méthode . . . . .	64
16.2 Résultats expérimentaux . . . . .	65
16.3 Sensibilité aux erreurs de modèle . . . . .	66
<b>17 Extension aux données multicanales</b>	<b>66</b>
17.1 Cas Gaussien . . . . .	66
17.2 Cas Poissonien . . . . .	68
17.3 Expériences . . . . .	70
<b>18 Conclusion</b>	<b>70</b>
<b>V Déconvolution multicanale sur la sphère</b>	<b>82</b>
<b>19 Position du problème</b>	<b>83</b>
<b>20 Déconvolution monocanale</b>	<b>84</b>
20.1 Etat de l'art de la déconvolution monocanale sur le plan . . . . .	85
20.2 Déconvolution monocanale sur la sphère en bruit Poissonien . . . . .	87
<b>21 Déconvolution parcimonieuse multicanale sur la sphère</b>	<b>87</b>
<b>22 Expériences</b>	<b>88</b>
<b>23 Conclusion</b>	<b>88</b>
<b>VI Séparation de composantes</b>	<b>95</b>
<b>24 Template Fitting</b>	<b>96</b>
24.1 Composantes . . . . .	96
24.2 Template Fitting . . . . .	96
<b>25 Amélioration du template fitting à l'aide de la transformée en ondelettes</b>	<b>97</b>
25.1 Principe . . . . .	97
25.2 Résultats . . . . .	98

<b>VII Conclusion</b>	<b>99</b>
<b>Références</b>	<b>102</b>
<b>A Publications</b>	<b>107</b>
A.1 Chapitre de livre . . . . .	107
A.2 Articles de revue à comité de lecture . . . . .	107
A.3 Proceedings . . . . .	107
<b>B Toolbox IDL</b>	<b>108</b>
B.1 Denoising using MS-VSTS + Isotropic Undecimated Wavelet Transform .	108
B.2 Denoising using MS-VSTS + Curvelet Transform . . . . .	110
B.3 Multichannel Denoising using MS-VSTS + Multichannel Wavelet Transform . . . . .	112
B.4 Multichannel Deconvolution using MS-VSTS + Multichannel Wavelet Transform . . . . .	112

Première partie

# Introduction

---

Ce mémoire de thèse a pour l'objet l'étude de nouvelles méthodologies pour l'analyse de données poissonniennes sur la sphère, dans le cadre de l'étude des données Fermi.

Le satellite Fermi, lancé par la NASA en juin 2008, est un télescope spatial puissant dédié à l'étude des rayons gamma de haute énergie dans l'Univers. Il est constitué de deux instruments, le LAT (Large Area Telescope), l'instrument principal, et le GBM (Gamma Burst Monitor), dédié à l'observation des sursauts gamma. Le LAT détecte les photons gamma dans une bande d'énergie comprise entre 20 MeV à 300 GeV. Le LAT est beaucoup plus sensible que son prédécesseur, le télescope EGRET, et on s'attend à ce qu'il observe plusieurs milliers de sources de rayonnement gamma.

Les objectifs scientifiques principaux de la mission Fermi, l'étude du fond diffus galactique et l'établissement du catalogue de sources de rayonnement gamma, sont compliqués par la faiblesse du flux de photons et par l'effet de l'instrument de mesure. Les cartes de photons sphériques obtenues par le LAT sont dégradées par les fluctuations du nombre de photons détectés. De telles cartes de photons sont modélisées par des réalisations d'un processus de Poisson non homogène. La dégradation due aux fluctuations du nombre de photons est alors appelée bruit de Poisson. De plus, il faut tenir compte de l'effet de la fonction d'étalement du point (PSF) de l'instrument, qui dépend fortement de l'énergie : de 3.5 à 100 MeV à moins de 0.1 à 10 GeV.

Ce mémoire de thèse présente une nouvelle représentation multi-échelle de données Poissonniennes sur la sphère, la *Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle sur la Sphère* (MS-VSTS). Cette méthode consiste à combiner une transformée multi-échelles sur la sphère (ondelettes, curvelets) avec une transformée stabilisatrice de variance (VST) en racine carrée, de façon à obtenir une représentation multi-échelles des données dans laquelle le bruit se comporte non plus comme un bruit de Poisson mais comme un bruit Gaussien de variance connue. Le bruit peut alors être supprimé facilement en utilisant les méthodes classique de débruitage Gaussien.

La Partie II présente la mission Fermi et ses aspects scientifiques principaux. La Partie III présente l'état de l'art des transformées multi-échelles sur la sphère (ondelettes, ridgelets, curvelets). La Partie IV introduit la MS-VSTS en combinant les transformées multi-échelles sur la sphères vues dans le chapitre précédent avec une transformée stabilisatrice de variance. Cette décomposition multi-échelles des données Poissonniennes est appliquée à la suppression du bruit de Poisson, à l'interpolation de données manquantes ainsi qu'à l'extraction du flux galactique. Enfin, la méthode MS-VSTS est étendue aux données multicanales, à l'aide d'une transformée en ondelettes sphérique 2D-1D. La Partie V applique à la MS-VSTS à la déconvolution multicanale, de façon à supprimer l'effet de la PSF de l'instrument de mesure dans chaque bande d'énergie. Enfin, la Partie VI présente des avancées dans le problème de la séparation des composantes des données Fermi.

## Deuxième partie

# La mission Fermi

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation de la mission</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Aspects scientifiques</b>	<b>15</b>
2.1	Le rayonnement gamma . . . . .	15
2.2	Les pulsars . . . . .	16
2.3	Les noyaux actifs de galaxies et les blazars . . . . .	16
2.4	Les rayons cosmiques et l'émission interstellaire . . . . .	16
2.5	Les éruptions solaires . . . . .	17
2.6	Les sursauts gamma . . . . .	17
2.7	Les trous noirs galactiques et microquasars . . . . .	18
2.8	Etude de l'Univers primitif . . . . .	18
2.9	Matière noire . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Instruments de mesure</b>	<b>19</b>
3.1	Le LAT . . . . .	19
3.2	Le GBM . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Fermi à l'Irfu</b>	<b>21</b>
4.1	Etude du fond diffus . . . . .	23
4.1.1	Origine du fond diffus . . . . .	23
4.1.2	Caractéristique spatiale des émissions . . . . .	24
4.1.3	Caractéristique spectrale des émissions . . . . .	24
4.1.4	Corrélation avec d'autres émissions . . . . .	25
4.1.5	Qualité des modélisations . . . . .	25
4.2	Etablissement du catalogue de sources . . . . .	25
4.2.1	Filtrage . . . . .	26
4.2.2	Détection et extraction de sources . . . . .	26

---



# 1 Présentation de la mission

GLAST (Gamma-Ray Large Area Space Telescope), rebaptisé "Fermi Gamma-Ray Space Telescope" en l'honneur du professeur Enrico Fermi (1901–1954), est un satellite international lancé par la NASA le 11 juin 2008 et destiné à l'étude du rayonnement gamma dans la bande d'énergie comprise entre 20 MeV et 300 GeV [8], afin d'étudier les astres les plus énergétiques de l'Univers : trous noirs, sursauts gamma, étoiles à neutrons, restes de supernova et sources de rayons cosmiques. Il apportera également des informations importantes en cosmologie, sur la matière noire et le milieu interstellaire. Il vient prendre la suite de la mission CGRO-EGRET, qui était opérationnelle entre 1991 et 1999 et a permis de cataloguer une multitude de sources de rayons gamma d'origines diverses (trous noirs, pulsars, quasars, étoiles binaires, etc) et d'observer des sursauts gamma. L'instrument principal, le LAT, possède une meilleure résolution angulaire, un plus grand champ de vue, et un faible temps mort, qui ensemble fournissent une amélioration d'un facteur 30 dans la sensibilité de l'instrument par rapport au détecteur EGRET (Energetic Gamma Ray Experiment Telescope) du satellite CGRO (Compton Gamma-Ray Observatory) [36]. Fermi tournera autour de la Terre sur une orbite circulaire de 550 km avec une durée de vie d'au moins 5 ans mais attendue de 10 ans.

La mission Fermi est le fruit d'une collaboration internationale incluant, en plus des Etats-Unis qui assurent la maîtrise d'oeuvre du projet, l'Allemagne, la France, l'Italie, le Japon et la Suède. En France, cinq laboratoires sont impliqués dans cette mission : le Service d'Astrophysique du CEA-Irfu et quatre laboratoires du CNRS : le Centre d'Etudes Nucléaires de Bordeaux Gradignan (CENBG), le Centre d'études spatiales des rayonnements (CESR, CNRS/Université Toulouse-III), le Laboratoire Leprince-Ringuet (LLR) de l'Ecole Polytechnique, le Laboratoire de Physique Théorique Appliquée (LPTA) de Montpellier.

Les objectifs de la mission Fermi portent sur l'étude des mécanismes d'accélération des pulsars, les vestiges de supernova et les noyaux actifs de galaxies, l'identification d'une population de sources détectées par le télescope EGRET mais dont la nature demeure encore une énigme, l'étude du fond diffus de la Voie lactée, des sursauts gamma ou encore la recherche de la matière noire dans l'univers.

Le satellite a été lancé le 11 juin 2008. Le 26 août 2008, la NASA a annoncé un premier résultat majeur : une image panoramique de la Galaxie a été obtenue par le LAT en seulement 95 heures, avec une précision meilleure que ce que le satellite EGRET avait obtenu en plusieurs années. Cette annonce officielle marque la fin de la période de vérifications et d'étalonnage des instruments à bord du satellite.

La carte du ciel établie par l'instrument principal du satellite (Figure 1), le télescope LAT, a permis d'illustrer le fort potentiel de la mission, conforme à ce qui avait été défini par les scientifiques. Outre la Galaxie, les sources les plus brillantes du ciel sont des pulsars célèbres comme celui du Crabe, de Vela ou bien encore Geminga, une source restée une énigme pendant des décennies avant d'être identifiée comme un pulsar X et gamma. Les premiers clichés obtenus soulignent également la capacité de l'observatoire Fermi à détecter des sources extragalactiques comme les galaxies actives : la quatrième tache lumineuse importante est en effet une galaxie active appartenant à la catégorie des blazars, 3C 454.3, située à 7.1 milliards d'années-lumière dans la constellation de Pegasus .

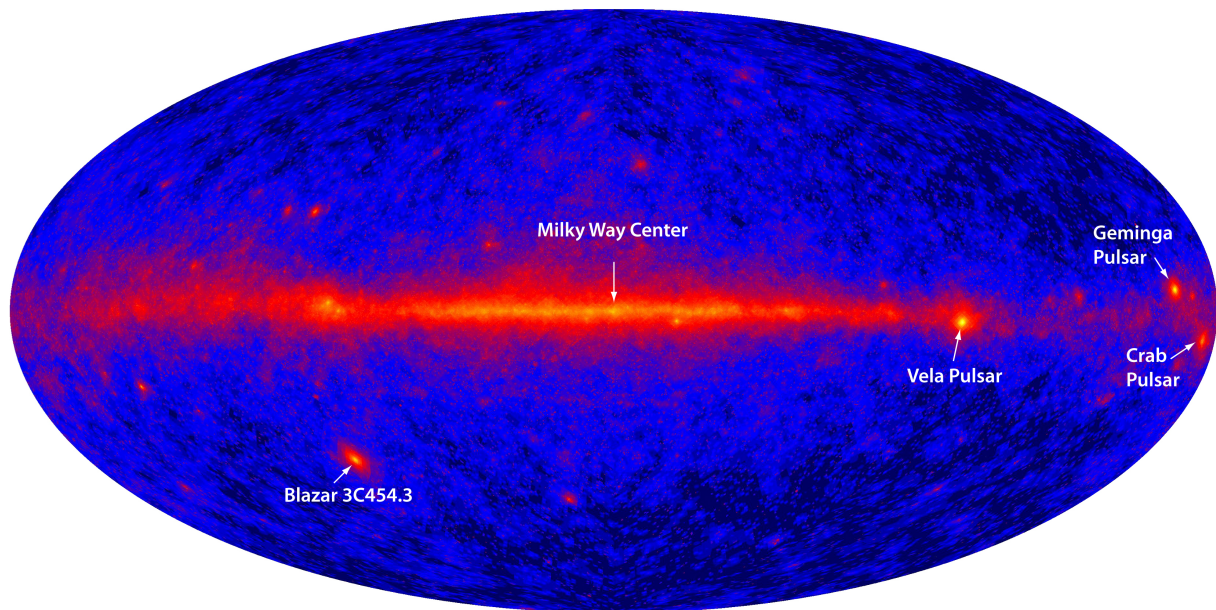


FIGURE 1 – Carte de l'ensemble de la voûte céleste en rayons gamma acquise par le LAT (crédit NASA)

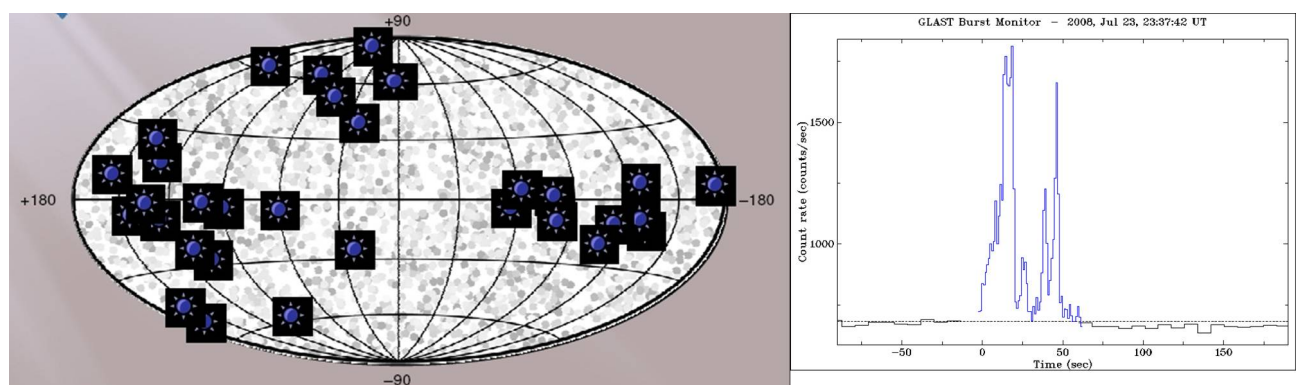


FIGURE 2 – A gauche : position dans le ciel (représentation en coordonnées galactiques) des 31 sursauts gamma détectés par GBM. A droite : évolution de l'intensité du signal en fonction du temps de l'un d'entre eux (crédit NASA)

Le second instrument du satellite, le GBM a quant à lui permis de détecter lors du premier mois d'opération trente et un sursauts gamma (Figure 2). Ceci permettra de mieux comprendre l'origine de ces soudaines bouffées de photons gamma, probable signature de la mort violente d'une étoile massive, très loin dans l'Univers.

Deux catalogues de sources de rayonnement gamma détectées et identifiées par Fermi, respectivement après un an [2] et deux ans d'observations [3], ont été publiés. 1451 sources de rayonnement gamma ont été détectées au cours de la première année d'observations [2], 1873 sources ont été détectées en deux ans [3].

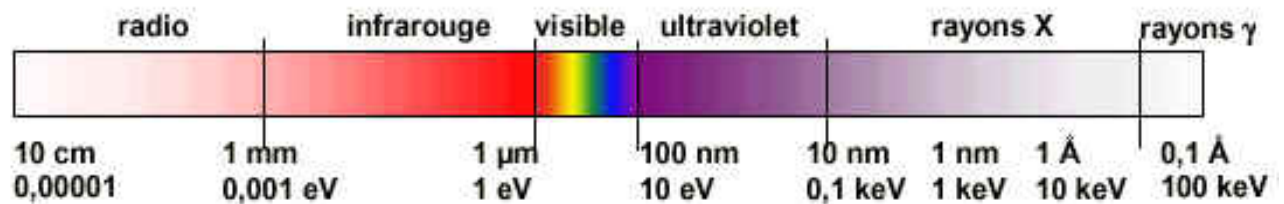


FIGURE 3 – Classement des ondes électromagnétiques en fonction de la longueur d'onde et de l'énergie

## 2 Aspects scientifiques

### 2.1 Le rayonnement gamma

Les rayons gamma sont une forme de rayonnement électromagnétique : il s'agit de photons de haute énergie (au-delà de 100keV). Ils possèdent une longueur d'onde très courte, inférieure à 5 picomètres et peuvent être produits par la désintégration  $\gamma$  ou d'autres processus nucléaires ou subatomiques tels que l'annihilation d'une paire électron-positron.

Différents types d'objets dans l'Univers émettent différents types de radiations. Notre Soleil est évidemment une source de lumière visible, mais il émet également des ondes radio, des rayonnements infra-rouges, ultra-violet et des rayons X. C'est pourquoi il est nécessaire d'étudier l'Univers dans les différents domaines du spectre électromagnétique (Figure 3).

La mission Fermi étudie spécifiquement les rayonnements gamma dans l'Univers. Ce type de rayonnements est produit par les phénomènes les plus violents existant dans l'univers, comme les explosions d'étoiles, la chute de matière dans les trous noirs et les collisions d'objets célestes. L'observation du rayonnement gamma permet donc aux astrophysiciens d'étudier ces phénomènes violents, capitaux pour la compréhension de l'histoire de l'Univers.

Les rayonnements gamma, extrêmement dangereux pour la vie terrestre, sont absorbés par l'atmosphère terrestre. Par conséquent, il est très difficile d'observer les rayonnements gamma de l'Univers depuis le sol. Il existe cependant des techniques pour détecter des rayons gamma depuis le sol, en mesurant le rayonnement des particules ultra-relativistes produites par l'interaction des photons gamma avec la haute atmosphère (effet Tchernkov). Actuellement, les télescopes Tchernkov existants sont H.E.S.S. (Namibie), Veritas (Arizona) et MAGIC (Iles Canaries).

Pour observer directement les rayonnements gamma, il est donc nécessaire d'utiliser des satellites ou des ballons. Cependant, la haute énergie des rayonnements gamma pose un autre problème : ils sont capables de traverser les lentilles et les miroirs, ce qui rend très difficile de les observer à l'aide d'un télescope. C'est pourquoi Fermi utilise des technologies développées dans le monde de la physique des particules, qui n'ont rien à voir avec les instruments classiques de l'astronomie. Ces technologies seront évoquées dans la section suivante, consacrée aux instruments de mesure du satellite.

A l'heure actuelle, outre Fermi, le satellite INTEGRAL (*INTE*rnational *Gamma-Ray*

*Astrophysics Laboratory*) de l'ESA, lancé à 2002, étudie les rayonnements gamma dans l'Univers. Il a permis notamment d'obtenir une cartographie du centre de la galaxie, et de mettre en évidence le trou noir central de la Voie Lactée.

Les paragraphes suivants présentent les différents phénomènes astrophysiques étudiés par Fermi : pulsars, AGN, rayons cosmiques, éruptions solaires, sursauts gamma, trous noirs galactiques et microquasars.

## 2.2 Les pulsars

Les pulsars sont des étoiles à neutrons nées lors d'explosions d'étoiles massives, appelées supernovae. Ce sont des astres très denses pourvus d'un champ magnétique très intense et pouvant tourner sur eux-même plusieurs dizaines de fois par secondes, émettant périodiquement un faisceau de rayonnement électromagnétique. Il existe une grande variété de types de pulsars, dont les propriétés dépendent essentiellement de leur âge et de leur environnement : pulsars radio, pulsars X, pulsars X anormaux, magnétars, pulsars milliseconde. Fermi étudie spécifiquement les pulsars émettant dans la bande de rayonnement gamma, ou pulsars gamma. Avant le lancement de la mission, seulement sept pulsars émettant dans cette bande de rayonnement avaient été répertoriés. Fermi en a identifiés 87 [3].

## 2.3 Les noyaux actifs de galaxies et les blazars

Un noyau actif de galaxie (AGN) est une région compacte située au centre d'une galaxie (dite galaxie active) qui est beaucoup plus lumineuse que la normale dans une partie ou dans l'ensemble du spectre électromagnétique (ondes radio, infrarouge, lumière visible, ultraviolet, rayon X et/ou rayons gamma). On pense que les raditions de l'AGN sont le résultat de l'accrétion autour d'un trou noir supermassif situé au centre de la galaxie. Un jet de matière de très grande énergie peut être produit dans la région du trou noir perpendiculairement au disque.

Le satellite EGRET a découvert que les blazars, une classe de la famille des noyaux actifs de galaxies, sont des sources intenses de rayonnement gamma. En fait, ils émettent l'essentiel de leur luminosité dans ce domaine d'énergie. Cette émission, hautement variable dans le temps, est vraisemblablement due à la présence de jets relativistes pointant dans la direction de la Terre. Le réservoir d'énergie provient de l'accrétion de matière sur un trou noir supermassif situé au coeur de la galaxie.

70 sources de ce type ont déjà été découvertes par EGRET. Fermi a identifié 917 AGN au total, dont 83 blazars [3].

## 2.4 Les rayons cosmiques et l'émission interstellaire

Le rayonnement cosmique est un flux de particules chargées électriquement se déplaçant à très grande vitesse. Il s'agit principalement de protons (entre 85 et 90 %) et de noyaux d'hélium ou hélions (de 9 à 14 %), le reste étant constitué d'électrons, de différents nucléons (noyaux d'atomes) et autres particules élémentaires.

La majorité des photons gamma observés dans notre Galaxie provient de l'interaction des rayons cosmiques (particules de haute énergie qui sillonnent la Galaxie) avec le milieu interstellaire (gaz atomique HI, gaz moléculaire CO, poussières). Un des objectifs de la mission Fermi consiste à déterminer si une émission de ce type a également lieu dans les galaxies proches. Dans l'affirmative, est-elle similaire à celle observée dans notre galaxie ? La cartographie détaillée de notre Galaxie devait permettre de mesurer la différence de densité des rayons cosmiques entre le centre et les régions extérieures. Il est probable que la grande énergie des rayons cosmiques est acquise lors de leur interaction avec des vestiges de supernovae. Fermi, en cartographiant les restes de supernovae les plus brillants, doit pouvoir tester cette théorie en mesurant l'excès d'émission par rapport au milieu interstellaire ordinaire.

Le premier résultat important concernant les rayons cosmiques a été de montrer que l'excès de rayonnement gamma dans la voie lactée observé par EGRET dans la bande d'énergie supérieure à  $1\text{GeV}$  par rapport aux modèles était simplement un effet de l'instrument de mesure : le spectre d'émission interstellaire mesuré par Fermi au voisinage de la Voie Lactée correspond bien aux modèles d'interaction du rayonnement cosmique avec le gaz atomique et moléculaire, plus l'effet inverse compton [28]. [29] présente une étude détaillée de l'émission de rayonnement gamma due à l'interaction du rayonnement cosmique avec le gaz atomique HI. Là encore, le spectre mesuré est conforme aux modèles. Des études dans les 2e [26] et 3e quadrants galactiques [30] ont montré un niveau d'émission à l'extérieur de la galaxie plus grand que prévu, et confirmé que l'émission de rayonnement gamma dans le voisinage de la galaxie est plus fort lorsque le rayonnement cosmique interagit avec des restes de supernovas. Une émission interstellaire a été observée dans cinq autres galaxies : LMC [27], SMC [24], M3 [25], M82 et NGC253 [23].

## 2.5 Les éruptions solaires

Une éruption solaire est un événement primordial de l'activité du Soleil. Elle se produit à la surface de la photosphère et projette au travers de la chromosphère un jet de matière ionisée qui se perd dans la couronne à des centaines de milliers de km d'altitude. En plus des particules et des rayons cosmiques, l'éruption s'accompagne d'un intense rayonnement (UV, rayons X, etc.) qui perturbe les transmissions radioélectriques terrestres (orage magnétique) et provoque l'apparition des aurores polaires.

La première éruption solaire observée le fut par l'astronome britannique Richard Carrington, le 1er septembre 1859, lorsqu'il constata l'apparition d'une tache très lumineuse à la surface du Soleil qui perdura pendant 5 minutes.

Le satellite EGRET a découvert que le Soleil émettait des photons gamma de haute énergie, de l'ordre du GeV. Fermi doit permettre d'étudier en détail ces éruptions et de déterminer les particules responsables de l'émission observée.

## 2.6 Les sursauts gamma

Les sursauts gamma, qui font partie des explosions les plus violentes de l'Univers, sont de brèves émissions de rayonnements X et gamma à très haute énergie, observées une fois

par jour en moyenne dans une région aléatoire de la sphère céleste. Ils correspondent à l'explosion d'étoiles extrêmement massives ou à la fusion de deux astres compacts. Dans les deux cas, un jet de matière est produit avec une vitesse proche de la lumière, dans lequel les particules émettant les rayons gamma sont accélérées. Grâce à son grand champ de vue (et l'association avec le détecteur de sursauts GBM), le télescope LAT va étendre l'étude des sursauts gamma jusqu'au domaine d'énergie voisin du GeV. A cette énergie, les modèles de chocs relativistes prédisent une atténuation du flux de photon gamma par production de paires. Fermi doit permettre de vérifier la validité de ces modèles.

## 2.7 Les trous noirs galactiques et microquasars

Un trou noir est un objet massif dont le champ gravitationnel est si intense qu'il empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper. De tels objets n'émettent donc pas de lumière et sont alors noirs. Les trous noirs sont décrits par la théorie de la relativité générale. Ils ne sont pas directement observables, mais plusieurs techniques d'observation indirecte dans différentes longueurs d'onde ont été mises au point et permettent d'étudier les phénomènes qu'ils induisent sur leur environnement. En particulier, la matière qui est happée par un trou noir est chauffée à des températures considérables avant d'être engloutie et émet de ce fait une quantité importante de rayons X. Ainsi, même si un trou noir n'émet pas lui-même de rayonnement, il peut néanmoins être détectable par son action sur son environnement. L'existence des trous noirs est une certitude pour la quasi-totalité de la communauté scientifique concernée (astrophysiciens et physiciens théoriciens).

Un microquasar est une étoile binaire contenant un objet compact tel qu'une étoile à neutrons ou un trou noir, et qui produit des jets d'une vitesse proche de la vitesse de la lumière.

Les microquasars sont des sources potentielles de photons gamma de haute énergie. Les particules très énergétiques du jet interagissent avec le flux de photons optique ou infrarouge issu de l'étoile compagnon (généralement une étoile massive) ou du milieu environnant et produisent des photons de haute énergie. Des indices semblent d'ailleurs indiquer que plusieurs sources non identifiées du catalogue EGRET appartiennent à cette famille d'objets. Les observations menées par Fermi permettront d'étudier en détail les mécanismes d'émission à haute énergie, d'identifier les particules (électron, proton) présentes dans le jet ou encore de contraindre l'intensité du champ magnétique de ce dernier.

## 2.8 Etude de l'Univers primitif

Fermi pourrait apporter des informations cruciales à propos de la quantité de lumière visible et ultra-violette émise par les premières étoiles de l'Univers. En effet, d'après l'équation d'Einstein  $E = mc^2$ , un photon gamma peut interagir avec un autre photon suffisamment énergétique, comme les photons de lumière visible ou d'ultra-violet, pour former une paire électron-positron. En observant le flux de rayonnement gamma provenant des confins de l'Univers observables, Fermi pourra ainsi nous renseigner sur la

quantité de lumière visible et ultra-violette dans les premiers instants de l'Univers.

## 2.9 Matière noire

Fermi pourrait aider à résoudre le mystère de l'identité de la matière noire, cette matière inconnue qui représente environ 22 % de l'énergie de l'Univers. On suppose que le constituant fondamental de la matière noire serait une particule hypothétique appelée *weakly interacting massive particle* (WIMP). Fermi pourrait permettre de vérifier cette hypothèse. En effet, ce type de particules, prédit par une théorie appelée supersymétrie, agit comme sa propre particule d'anti-matière. Lorsque deux WIMP interagissent, elles s'annihilent en émettant des particules secondaires ainsi que du rayonnement gamma. Les astrophysiciens espèrent que Fermi pourra observer ces annihilations.

## 3 Instruments de mesure

Fermi comprend 2 instruments de mesure du rayonnement gamma.

- le LAT "Large Area Telescope", qui est l'instrument principal ;
- le GBM "Glast Burst Monitor", pour l'étude des sursauts gamma.

### 3.1 Le LAT

Le LAT (Large Area Telescope) est un télescope à très grand champ de vue observant le ciel dans le rayonnement gamma. Avec son très grand champ de vue, ce télescope voit environ 20 % du ciel à tout moment. En mode balayage, qui est le mode principal d'observation, le LAT couvre le ciel en exactement trois heures. L'observatoire peut également être orienté tant que nécessaire et peut pivoter de façon autonome quand des sursauts suffisamment lumineux de rayons gamma sont détectés à bord par un des instruments.

Le LAT comprend 4 sous-ensembles :

- Un trajectographe basé sur la conversion de gamma en paire électron-positron (micropistes en silicium) ;
- Un calorimètre pour mesurer les énergies ;
- Un système d'anticoïncidence fait de scintillateurs plastiques permettant le rejet du fond de particules chargées ;
- Des systèmes de déclenchement et de gestion de flux de données réglables.

Le LAT est modulaire, il se compose de 4 rangées de 4 tours identiques avec au total 880.000 canaux détecteurs en silicium. Le Calorimètre est composé de 1536 barreaux d'une matière "scintillante" qui produit une quantité de lumière visible proportionnelle à l'énergie déposée, convertie en signaux électriques par des détecteurs adéquats appelés photodiodes. La masse du calorimètre est de 1500 kg, représentant environ la moitié de celle du satellite.

La figure 4 présente le schéma du dispositif. Le fonctionnement est le suivant :

1. Un rayon gamma pénètre dans le LAT. Il traverse tout d'abord un détecteur



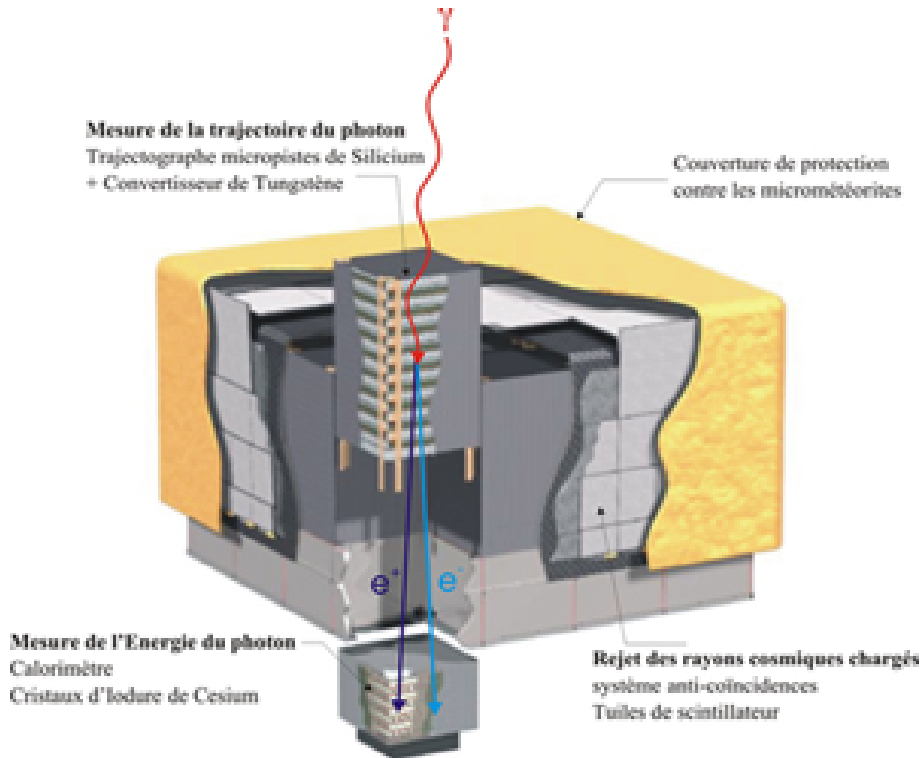


FIGURE 4 – Schéma du LAT

d'anticoïncidence, élément-clé du dispositif de rejet. Cette traversée ne produit pas de signal ;

2. Le rayon interagit avec une feuille mince de tungstène et se transforme en une paire électron et positron, selon la loi d'équivalence matière/énergie d'Einstein ( $E = mc^2$ )
3. Le *Tracker*, un détecteur fait d'un empilement de feuilles à pistes de silicium, détermine la trajectoire des deux particules et en conséquence la direction d'origine du rayon gamma original ;
4. Les deux particules atteignent le calorimètre, qui mesure leurs énergies et donc celles du rayon gamma original. Cet élément est composé d'iodure de césium et produit des flashes lumineux dont l'intensité est proportionnelle à l'énergie de la particule absorbée ;
5. Contrairement aux rayons gamma, les particules étrangères constituant le bruit de fond produisent un signal dans le détecteur d'anticoïncidence, ce qui permet au système d'acquisition (*Data Acquisition System*) de rejeter les données ne correspondant pas à un rayon gamma. On estime que 99.97% des signaux correspondront à ce bruit de fond ou autres parasites, et seront ainsi éliminés.

### 3.2 Le GBM

Le GBM (GLAST Burst Monitor) est un instrument plus petit destiné à détecter les sursauts gamma. Il est constitué de deux types de détecteurs. Le premier, composé de 12 scintillateurs en cristaux de iodure de sodium (NaI), couvre la gamme d'énergie de 5 keV à 1 MeV. Le deuxième, 2 scintillateurs plastiques en germanate de bismuth



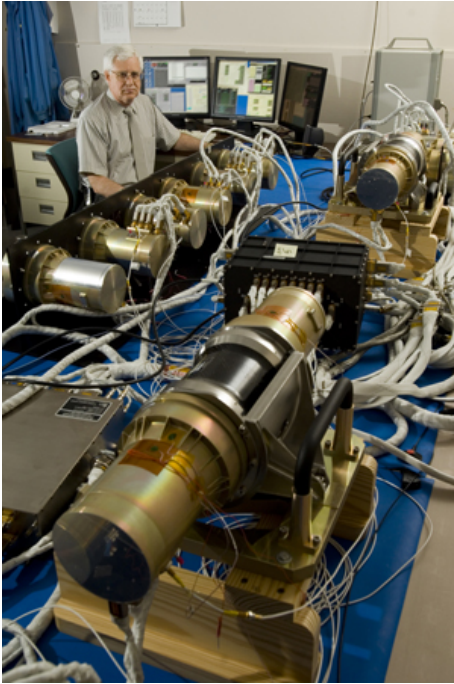


FIGURE 5 – Le télescope GBM

(BGO), est sensible aux photons d'énergie comprise entre 10 keV et 25 MeV. Dans chaque cas, le photon gamma est converti en signal électrique. Doté d'un champ de vue de 8 stéradians, il délivrera en temps réel une localisation, même imparfaite, du sursaut gamma qui pourra ensuite être rapidement observé par le télescope LAT.

La figure 6 présente le principe du fonctionnement du GBM :

1. Les rayons X ou gamma frappent un ensemble de disques en iodure de sodium, qui réagissent en produisant un éclat lumineux lui-même détecté par un tube photomultiplicateur. Leur gamme de fréquences s'étend de 8KeV à 1 MeV ;
2. Les rayons produisent un éclat lumineux d'autant plus vif que leur angle d'incidence est élevé par rapport au disque d'iodure de sodium ;
3. En comparant l'intensité des éclats produits par un ensemble de disques d'angles variés (4 ou plus), le calculateur de bord déduit la direction de la source par triangulation ;
4. Deux détecteurs au germanate de bismuth (gamme de 150 KeV à 30 MeV) réagissent aux rayons gamma à haute énergie de la même façon.

Sur la satellite, les deux types de détecteurs sont placés de façon diamétralement opposée de chaque côté du satellite afin de couvrir la totalité du ciel, comme on peut le voir sur la figure 7.

## 4 Fermi à l'Irfu

Dans le cadre de Fermi, les objectifs scientifiques principaux de cette thèse sont au nombre de deux : l'étude du fond diffus galactique et celle des sources ponctuelles de

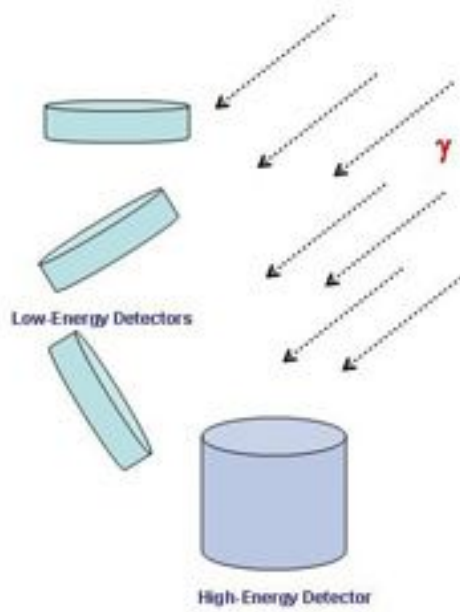


FIGURE 6 – Schéma de principe du GBM. Crédit NASA

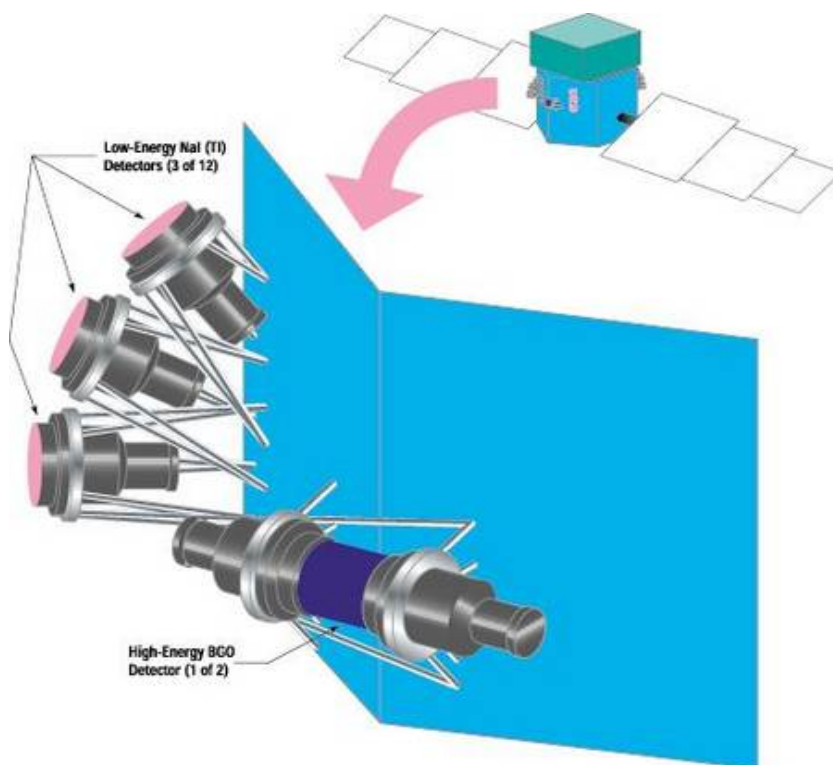


FIGURE 7 – Distribution des détecteurs du GBM sur le satellite. Crédit NASA

rayonnement gamma. Ces deux objectifs sont liés. En effet, pour étudier les sources ponctuelles, il est nécessaire de les séparer du fond diffus. Pour cela, il est important de caractériser physiquement le fond diffus de la Galaxie, afin de le modéliser et de le retirer sur les cartes.

## 4.1 Etude du fond diffus

### 4.1.1 Origine du fond diffus

Le fond diffus est lié à la propagation du rayonnement cosmique dans la galaxie. Le rayonnement cosmique est un flux de particules de haute énergie constitué à 99% de protons (noyaux d'hydrogène H) et de particules  $\alpha$  (noyaux d'hélium He) et à 1% d'électrons. Ces particules émettent un rayonnement gamma lié à 3 phénomènes :

1. Interaction entre les noyaux et le milieu interstellaire (gaz et poussières) : les chocs inélastiques des protons du rayonnement cosmique avec les atomes du milieu interstellaire engendrent de nombreuses particules secondaires instables, en particulier des pions neutres  $\pi_0$ . Le pion neutre  $\pi_0$ , très instable, se désintègre en deux pions gamma.
2. Interaction entre les électrons et le milieu interstellaire : Bremsstrahlung (rayonnement de freinage). Lorsqu'un électron rentre dans le champ électrique d'un noyau, sa trajectoire est déviée. Selon les équations de Maxwell, toute charge dont la vitesse varie, en valeur absolue ou en direction, rayonne. Les rayonnements gamma émis ont une énergie pouvant varier de quelques centaines de MeV à 3TeV. Ces deux processus sont indépendants de l'état thermodynamique. L'étude de ces phénomènes pourra permettre de cartographier le gaz interstellaire.
3. Intéraction entre les électrons et les photons interstellaires (effet Compton Inverse). Par effet Compton Inverse, les électrons cèdent leur énergie aux photons interstellaires de faible énergie (lumière visible, infra-rouge...) pour les faire passer dans la bande gamma. L'étude de cette interaction pourra permettre de tracer le champ de rayonnement stellaire.

Les deux premiers phénomènes sont liés aux interactions entre le rayonnement cosmique et le gaz interstellaire. En théorie, le gaz interstellaire est constitué de deux parties : le gaz atomique (HI) et le gaz moléculaire (CO). Les cartes du HI et du CO ont été obtenues par des radiotélescopes. Cependant, les observations de poussières galactiques mettent en évidence une autre composante du gaz interstellaire, appelée gaz sombre [35].

Les données peuvent être modélisées par une combinaison linéaire des différentes composantes du milieu interstellaire :

$$\begin{aligned}
 & [(a\text{HI} + b\text{CO} + c\text{dark gaz} + d\text{Inverse Compton} \\
 & + e\text{Sources brillantes} + f\text{carte synchrotron 408 MHz} \\
 & + g\text{bruit instrumental isotrope}) * \text{PSF}] \times \text{carte d'exposition} = \text{données}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Les coefficients sont obtenus par la méthode du template fitting [47], consistant à calculer les coefficients optimisant le critère du maximum de vraisemblance. Cette méthode est détaillée dans la Partie V de ce manuscrit.

### 4.1.2 Caractéristique spatiale des émissions

**Pions et Bremsstrahlung** Localement, la densité de rayonnement émise est une convolution entre la densité de rayonnement cosmique (noyaux dans le cas des pions, électrons dans le cas du Bremsstrahlung) et la densité de gaz interstellaire. L'intensité mesurée par Fermi correspond à l'intégrale sur la ligne de visée du produit de la densité de rayonnement cosmique par la densité de gaz interstellaire, multipliés par la surface de visée, soit :

$$I_{\gamma 1} = \int_{\text{ligne de visée}} \sigma(n_P + n_e)\rho_{gaz} dl \quad (2)$$

avec  $I_{\gamma 1}$  l'intensité du rayonnement  $\gamma$  de pions et de Bremsstrahlung mesurée par Fermi en un point,  $\sigma$  la surface de visée,  $n_P$  le densité de noyaux dans le rayonnement cosmique,  $n_e$  la densité d'électrons dans le rayonnement cosmique,  $\rho_{gaz}$  la densité de gaz interstellaire.

**Inverse Compton** Dans le cas de l'Inverse Compton, on intègre le produit de la densité d'électrons par la densité de photons interstellaires, soit :

$$I_{\gamma 2} = \int_{\text{ligne de visée}} \sigma n_e \rho_{photons} dl \quad (3)$$

En un point de l'espace, le densité de rayonnement de fond diffus mesurée par Fermi est donc :

$$I_{\gamma} = \int_{\text{ligne de visée}} \sigma(n_P + n_e)\rho_{gaz} dl + \int_{\text{ligne de visée}} \sigma n_e \rho_{photons} dl \quad (4)$$

### 4.1.3 Caractéristique spectrale des émissions

**Bremsstrahlung** L'énergie du rayon  $\gamma$  émis est légèrement inférieure à celle de l'électron. Pour un électron d'énergie 1 GeV, l'énergie du rayonnement  $\gamma$  sera d'environ 800 MeV. On suppose que le spectre d'intensité des électrons est en loi de puissance de l'énergie :  $I_e(E_e) \propto E_e^{-p}$ . Le spectre d'intensité des rayons  $\gamma$  émis à la même loi de puissance :  $I_{\gamma}(E_{\gamma}) \propto E_{\gamma}^{-p}$ .

**Inverse Compton** On considère les photons comme des corps noirs. Le spectre en intensité des électrons est de la forme :  $I_e(E_e) \propto E_e^{-p}$ .

Le spectre du rayon gamma est alors un spectre en loi de puissance, de pente différente :  $I_{\gamma}(E_{\gamma}) \propto E_{\gamma}^{(1-p)/2}$ .

**Désintégration de pions** L'énergie du  $\pi_0$  au repos est de 135 MeV. Lorsqu'il est au repos (quantité de mouvement nulle), il se désintègre en deux photons  $\gamma$  de quantités de mouvement opposées. L'énergie du pion se transmet donc équitablement aux deux photons. L'énergie de chaque photon est donc égale à 67,5 MeV. Si le  $\pi_0$  possède une quantité de mouvement non-nulle, les photons sont émis dans des directions différentes, avec une énergie différente. Plus la quantité de mouvement initiale du pion sera importante, plus l'énergie des photons sera éloignée de 67,5 MeV. Le spectre de puissance des photons sera donc une courbe centrée autour de 67,5 MeV.

#### 4.1.4 Corrélacion avec d'autres émissions

L'effet Inverse Compton est lié aux photons interstellaires, qui peuvent être observés sur les émissions du CMB, dans l'infra-rouge et dans le visible.

Le Bremsstrahlung et la désintégration de pions sont liés au gaz et aux poussières interstellaires. Le gaz atomique (HI) émet une raie dans le domaine radio avec une longueur d'onde de 21 cm (fréquence 1420 MHz). Le gaz moléculaire (CO) émet une raie dans le domaine radio avec une longueur d'onde de 2,6 mm. Les poussières interstellaires se comportent comme des corps noirs qui absorbent l'essentiel des rayonnements électromagnétiques dans le visible, l'ultra-violet et l'infra-rouge proche et réémettent l'énergie absorbée sous forme thermique, dans l'infra-rouge moyen et lointain.

#### 4.1.5 Qualité des modélisations

Les distributions spatiales des constituants du milieu interstellaire (HI, CO, poussières) et du rayonnement cosmiques ne sont pas connus avec précision.

## 4.2 Etablissement du catalogue de sources

Le SAp est chargé d'établir le catalogue des sources de rayonnement gamma détectées par Fermi, qui sera rendu public un an après le début des observations. Le catalogue fournit la position la plus probable des sources, l'incertitude sur leur position (boîte d'erreur), le degré de confiance associé, l'indice spectral et l'intensité de la source à différentes périodes d'observation et différentes longueurs d'ondes.

Plusieurs étapes sont nécessaires à la réalisation de ce catalogue :

- la recherche de sources ;
- la caractérisation de ces sources (spectre, variabilité) ;
- l'identification des sources à des objets déjà connus en astrophysique.

Deux méthodes sont utilisées au SAp pour détecter les sources à partir des images de Fermi :

- la méthode MR-FILTER + SEXTRACTOR. Cette méthode utilise deux procédures : MR-FILTER, qui filtre l'image, et SEXTRACTOR, qui extrait les sources de l'image filtrée et crée une liste sauvegardée dans un fichier ;
- la méthode MR-DETECT. Cette méthode utilise la procédure MR-DETECT, qui détecte les sources dans l'image et fournit un catalogue.

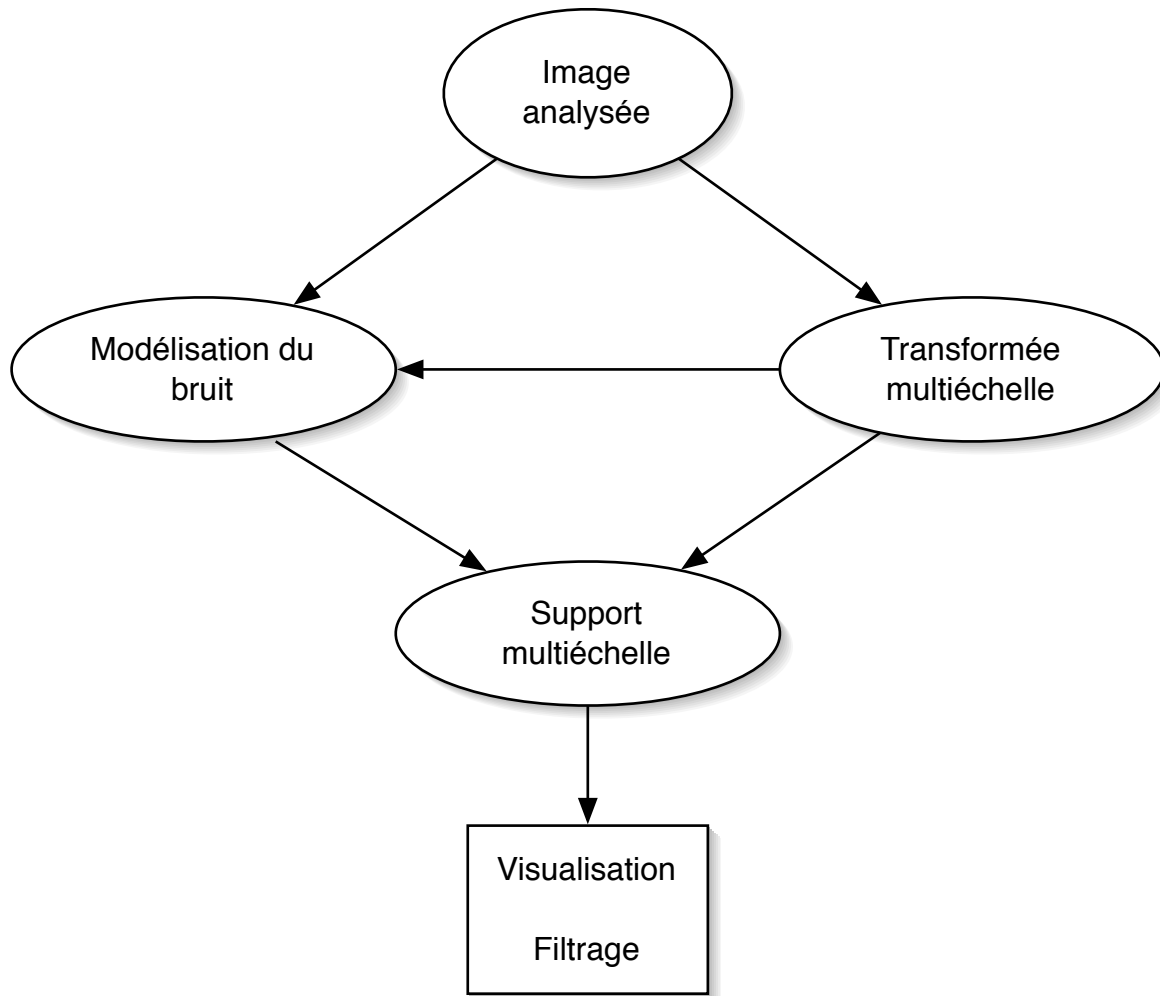


FIGURE 8 – Synoptique présentant l'opération de filtrage

#### 4.2.1 Filtrage

Le dispositif d'acquisition (LAT) recevant des photons en quantité finie, les images obtenues par Fermi sont des réalisations poissonniennes. L'objectif du filtrage est de remonter à l'intensité de la distribution poissonnienne, de façon à avoir une image plus lisible et à faciliter la détection des sources.

MR-FILTER et MR-DETECT utilisent tous deux la même technique pour filtrer l'image. Le principe de l'algorithme est présenté ci-dessous.

Chaque image est décomposée en un ensemble d'échelles. Cette représentation associée à une modélisation du bruit est utilisée pour le filtrage de l'image. Cet algorithme est synthétisé sur la figure 8.

#### 4.2.2 Détection et extraction de sources

Les deux méthodes diffèrent sur la façon d'extraire les sources.

**SEXTRACTOR** SEXTRACTOR[9] permet d'extraire les sources de l'image filtrée et de les restituer sous forme de catalogue dans un fichier de sortie.

L'algorithme est présenté figure 9. La détection est effectuée directement sur l'image filtrée. Sont définis comme sources les objets de l'image vérifiant les points suivants :

- La valeur de l'ensemble des pixels formant cet objet est supérieure à un certain seuil.
- Les pixels appartenant à cet objet sont tous adjacents (par un coin ou un côté).
- La taille en pixels de l'objet est supérieure à une surface minimale fixée

Une opération de deblending est effectuée ensuite afin de séparer les sources proches.

**MR-DETECT** MR-DETECT travaille sur une image d'entrée qui n'est pas filtrée. Il réalise l'opération de filtrage comme décrite précédemment.

La méthode de détection est basée sur le Multiscale Vision Model (MVM) [10]. A l'inverse de SEXTRACTOR, MR-DETECT effectue la détection sur la transformée en ondelettes de l'image débruitée. Une fois l'image débruitée, le programme reprend pour chaque échelle les régions où le signal est significatif (supérieur au seuil). Il détermine alors la position du maximum pour chaque objet détecté et regarde sur l'échelle suivante si, pour la même position du pixel, il existe une structure significative et si son maximum est supérieur à celui de l'échelle précédente. Dans ce cas, la structure est associée à la nouvelle échelle.

Plusieurs cas de figures peuvent se présenter :

1. Sur une échelle donnée, le programme détecte deux objets alors que, sur l'échelle inférieure, il n'en détecte qu'une. Dans ce cas, le programme considère qu'il ne s'agit que d'une seule et même source.
2. Sur une échelle  $n$  donnée, le programme détecte deux objets qui correspondent à l'échelle  $n - 1$  à deux objets et à l'échelle  $n - 2$  à un seul objet. Le programme considère alors qu'il s'agit de 2 sources distinctes.

**Comparaison des résultats des deux méthodes** Isabelle Moreau a comparé les résultats de ces deux méthodes de détection. La méthode MR-FILTER + SEXTRACTOR s'est avérée la méthode la plus efficace [48]. La méthode MR-FILTER + SEXTRACTOR a été utilisée dans l'établissement du catalogue de sources Fermi [2] [3].

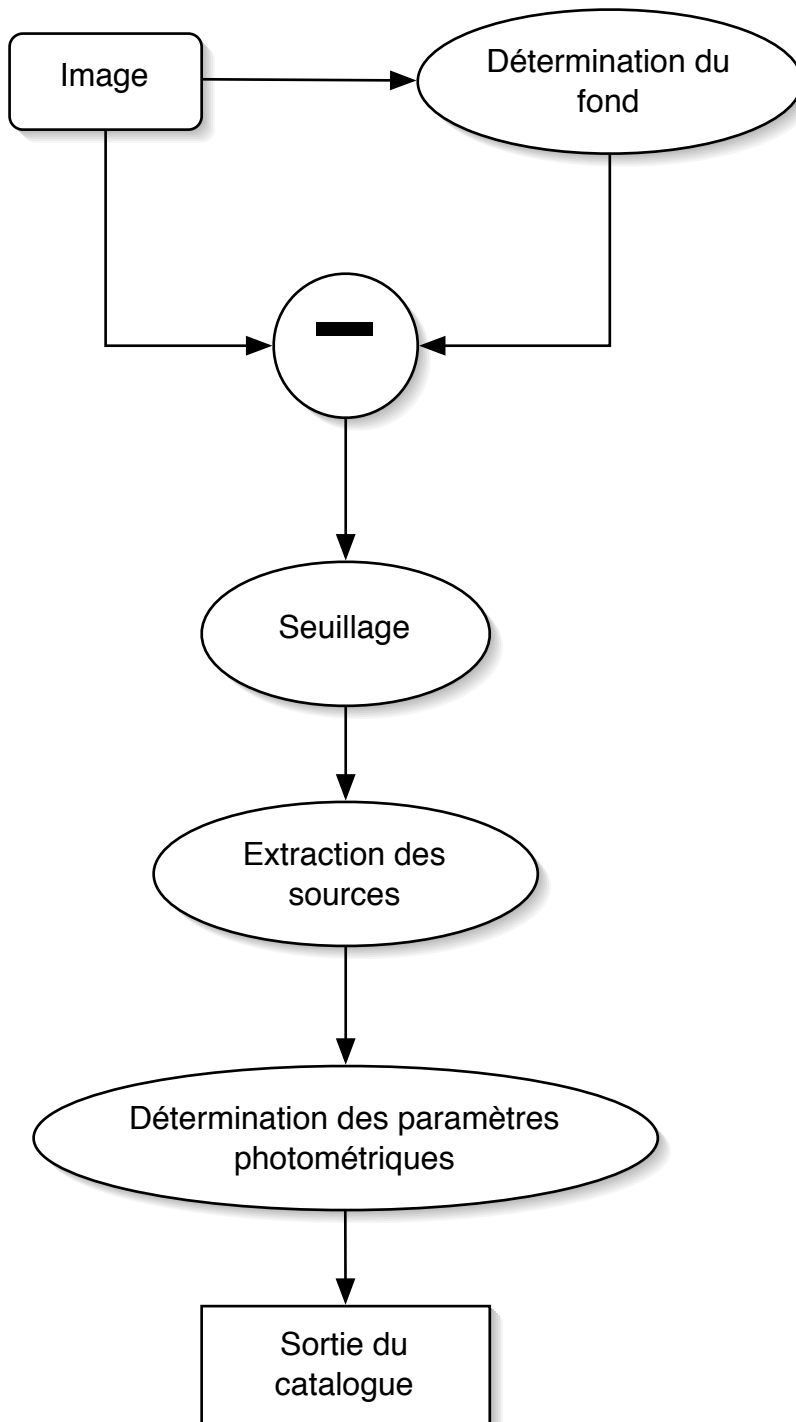


FIGURE 9 – Synoptique simplifié du programme SEXTRACTOR



---

## Troisième partie

# L'analyse multi-échelle sur la sphère

## Sommaire

---

<b>5</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>La transformée en harmoniques sphériques</b>	<b>31</b>
<b>7</b>	<b>Pixélisation sur la sphère</b>	<b>31</b>
7.1	Généralités . . . . .	31
7.2	La pixélisation HEALPix . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Transformée en ondelettes isotrope sur la sphère</b>	<b>35</b>
8.1	Transformée en ondelettes isotrope non-décimée sur la sphère . . . . .	35
8.1.1	La transformation . . . . .	36
8.1.2	La reconstruction . . . . .	38
<b>9</b>	<b>Ridgelets et Curvelets sur la sphère</b>	<b>38</b>
9.1	Transformée en ridgelets sur la sphère . . . . .	38
9.1.1	Transformée en ridgelets sur le plan . . . . .	38
9.1.2	Transformée en ridgelets sur la sphère . . . . .	38
9.2	Transformée en curvelets sur la sphère . . . . .	39
9.2.1	Transformée en curvelets sur le plan . . . . .	39
9.2.2	Transformée en curvelets sur la sphère . . . . .	42
<b>10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>

---

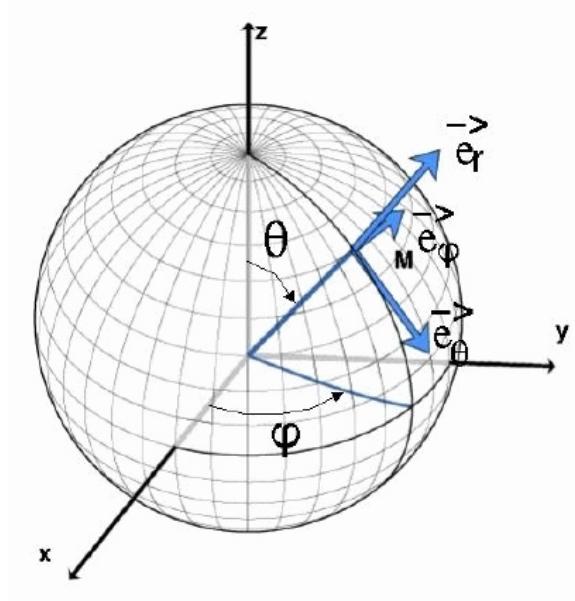


FIGURE 10 – Repérage en coordonnées sphériques sur la sphère

## 5 Introduction

A l'heure actuelle, l'analyse multi-échelle sur la sphère en est à ses balbutiements. La première transformée à avoir été développée sur la sphère est la transformée en harmoniques sphériques, sorte d'équivalent de la transformée de Fourier.

Diverses transformées multi-échelles ont été développées ces dernières années. Historiquement, la première transformée en ondelettes utilisée sur la sphère a été une transformée en ondelettes orthogonale basée sur l'ondelette de Haar, mise au point par [55]. Cette transformation est très simple à mettre en oeuvre et très rapide à calculer numériquement. Cependant, cette transformée a été très peu utilisée du fait du manque de régularité de l'ondelette de Haar et de sa forme mal adaptée à l'analyse fine du contenu des données. Par conséquent, de nombreuses autres méthodes de transformation en ondelettes continues sur la sphère ont été proposées, comme les transformées en ondelettes continues isotropes [7][64][37][12] et directionnelles [69][70].

Ces transformées continues sont intéressantes pour analyser les données, cependant elles sont relativement coûteuses en temps de calcul et n'ont pas d'algorithme de reconstruction. Par conséquent, elles ne peuvent pas être utilisées dans des applications de restauration. [61] propose une panoplie de transformées multi-échelles (ondelettes isotropes, ridgelets, curvelets), possédant toutes un algorithme de reconstruction. Ces transformées, initialement développées pour l'étude du fond diffus cosmologique [5], ont été utilisées dans des applications de débruitage, de déconvolution et d'inpainting.

## 6 La transformée en harmoniques sphériques

Toute fonction sur la sphère  $S^2$  peut se décomposer sur la base des harmoniques sphériques :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (5)$$

où les  $Y_{lm}$  sont les harmoniques sphériques. Les harmoniques sphériques sont les solutions sur la sphère de l'équation de Laplace. Elles sont définies par :

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \varphi) e^{im\theta} \quad (6)$$

Les  $P_{lm}$  sont les polynômes de Legendre associés. Ils sont définis par l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_{lm} - 2x \frac{d}{dx} P_{lm} + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_{lm} = 0 \quad (7)$$

Ces polynômes sont associés aux polynômes de Legendre classiques  $P_l$  par :

$$P_{lm} = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (8)$$

où les  $P_l$  sont définis par :

$$P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (9)$$

Pour une fonction harmonique sphérique  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ,  $m$  est appelé degré, et  $l$  est appelé ordre azimutal.  $l$  et  $m$  déterminent le nombre et la position des cercles d'annulation de la fonction harmonique sphérique. Lorsque  $\theta$  et  $\varphi$  décrivent  $[0; 2\pi[$ ,  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  s'annule suivant  $l$  cercles (Figure 11) :

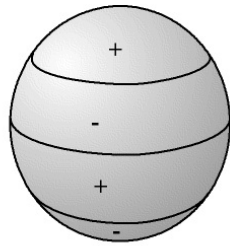
- $m$  cercles suivant un méridien (iso-longitude)
- $l - m$  cercles suivant un parallèle (iso-latitude)

## 7 Pixélisation sur la sphère

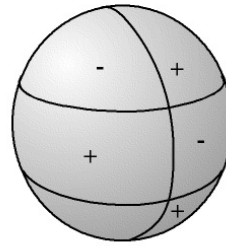
### 7.1 Généralités

Il existe un certain nombre de pixélisations sur la sphère, chacune ayant leurs avantages et leurs inconvénients. On peut citer les critères de choix suivants :

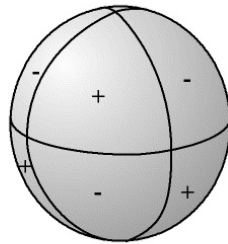
- compacité ;
- simplicité du calcul de la transformée en harmoniques sphériques ;
- choix du nombre de pixels et de leur taille ;
- isolatitude des pixels ;
- hiérarchie ;
- égalité de surface des pixels
- séparabilité des variables en longitude et latitude  $(\theta, \varphi)$



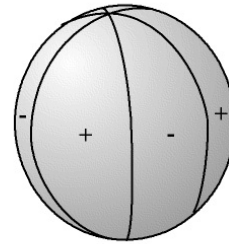
$l = 3$  : la fonction s'annule selon 3 cercles  
 $m = 0$  : aucun cercle n'est un méridien  
 $l - m = 3$  : 3 cercles sont des parallèles



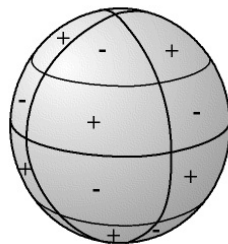
$l = 3$  : la fonction s'annule selon 3 cercles  
 $m = 1$  : 1 cercle est un méridien  
 $l - m = 2$  : 2 cercles sont des parallèles



$l = 3$  : la fonction s'annule selon 3 cercles  
 $m = 2$  : 2 cercles sont des méridiens  
 $l - m = 1$  : 1 cercle est un parallèle



$l = 3$  : la fonction s'annule selon 3 cercles  
 $m = 3$  : 3 cercles sont des méridiens  
 $l - m = 0$  : aucun cercle n'est un parallèle



$l = 5$  : la fonction s'annule selon 4 cercles  
 $m = 2$  : 2 cercles sont des méridiens  
 $l - m = 3$  : 3 cercles sont des parallèles

FIGURE 11 – Cercles d'annulation d'une fonction harmonique sphérique

- disponibilité de bibliothèques, de préférence robustes, performantes et éventuellement parallélisables

Certains de ces points étant contradictoires, aucune pixélisation ne pourra tous les satisfaire.

Divers types de pixélisations ont été proposées dans la littérature : ECP, Isocaèdre, COBE Quad Cube, IGLOO, HEALPix, HTM, GLESP. Parmi ces pixélisations, nous utiliserons uniquement la pixélisation HEALPix. Cette pixélisation permet un calcul très rapide (bien qu’approché) des harmoniques sphériques, est très utilisée dans la communauté scientifique et possède de très nombreuses bibliothèques performantes. En outre, elle permet de construire très facilement certaines transformées multi-échelles géométriques comme les curvelets sur la sphère.

## 7.2 La pixélisation HEALPix

La pixélisation HEALPix [34] a été proposée afin de répondre au besoin en terme de pixélisation des sondes WMAP et PLANCK, chargées d’étudier le Fond Diffus Cosmologique ou CMB (Cosmic Microwave Background). En effet, ces sondes fournissaient des cartes de plusieurs millions de pixels sur la sphère et il s’agit de pouvoir traiter correctement ces données. Les autres pixélisations comme COBE, Quad Cube ou Isocaèdre ne convenaient pas, notamment à cause de l’absence d’iso-latitude des pixels entraînant une explosion du temps de calcul des coefficients en harmoniques sphériques.

HEALPix satisfait aux exigences des projets WMAP et PLANCK car elle possède trois propriétés fondamentales :

- hiérarchie de la structure : la sphère est divisée de manière hiérarchique en quadrilatères curvilinéaires. La pixélisation de plus faible résolution est composée de 12 pixels de base (4 autour de l’équateur et 4 autour des pôles). Pour passer aux résolutions suivantes, il suffit de diviser chaque pixel en quatre.
- pixels de même surface.
- iso-altitude des pixels : les pixels sont distribués sur des lignes de latitude constante. Cette propriété permet un calcul rapide des coefficients en harmoniques sphériques.

Les auteurs de [34] ont conçu cette pixélisation en considérant la projection cylindrique de la sphère vers le plan. En effet, cette projection permet la conservation des aires de la sphère vers le plan, ce qui permet de dessiner simplement une pixélisation sur le plan sans se soucier de la projection. Pour réaliser la pixélisation, ils ont découpé la surface formée suivant la projection cylindrique en  $N_\theta$  et  $N_\varphi$  parties suivant respectivement la latitude et la longitude, comme montré sur les Figures 12 et 13. La séparation entre les pixels près du pôle et ceux près de l’équateur est choisie de sorte que tous les pixels aient la même surface. Les frontières de chaque pixel sont de la forme  $\cos \theta = a + b \times \varphi$  dans la zone équatoriale et de la forme  $\cos \theta = a + b/(\varphi)^2$  ailleurs.

Pour la pixélisation HEALPix, ils ont choisi  $N_\theta = 3$  et  $N_\varphi = 4$ . Ainsi, la pixélisation de base comporte 4 pixels autour de chaque pôle et 4 pixels le long de l’équateur. Pour obtenir de nouvelles pixélisations à des résolutions plus élevées, il suffit de diviser chaque pixel en quatre. (Figure 14) Ce découpage permet à la fois une numérotation des pixels aisée, la conservation de l’égalité des aires des pixels, et la répartition des pixels sur un ensemble d’anneaux de latitude constante. Le paramètre déterminant la résolution de

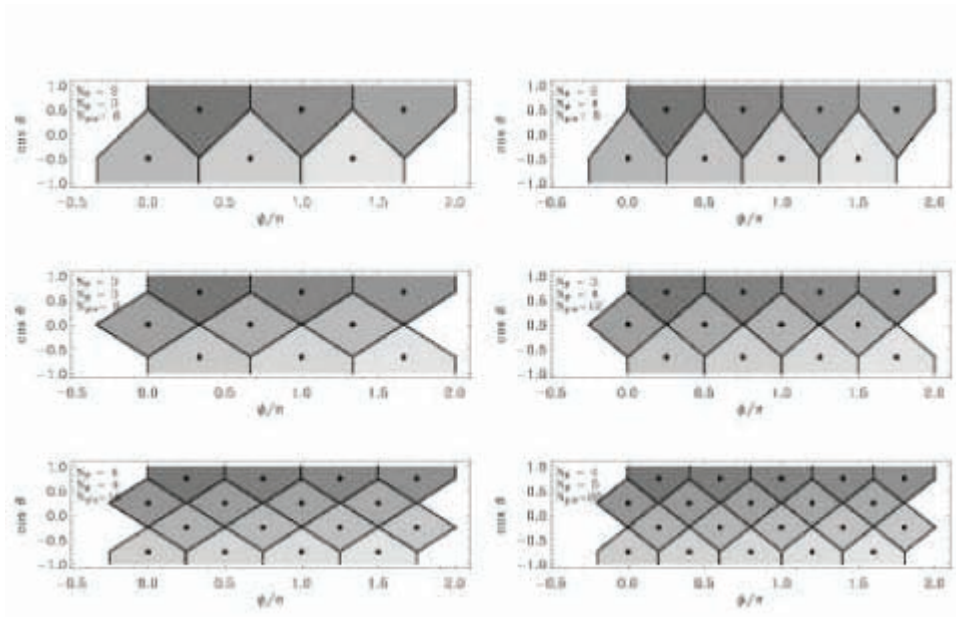


FIGURE 12 – Projection cylindrique de différentes pixélisations possibles pour différents  $N_\theta$  et  $N_\varphi$ . La grille HEALPix utilise  $N_\theta = 3$  et  $N_\varphi = 4$ .

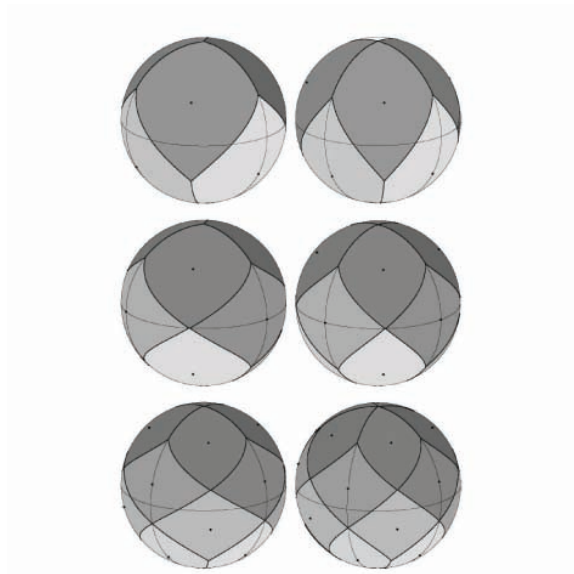


FIGURE 13 – Projection orthographique de différentes pixélisations possibles pour différents  $N_\theta$  et  $N_\varphi$ .

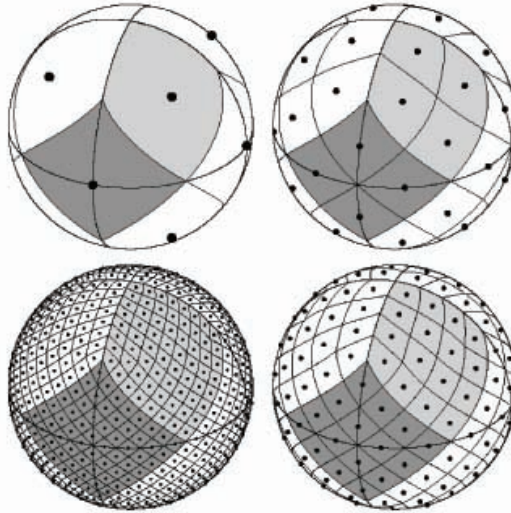


FIGURE 14 – Différentes échelles de la pixélisation HEALPix. Chaque carte contient quatre fois plus de pixels que la précédente.

la pixélisation est le paramètre  $N_{\text{side}}$ . Pour une pixélisation donnée, chaque face de la pixélisation de base est constituée de  $N_{\text{side}}^2$  pixels. Une image HEALPix est constituée de  $N_{\text{pix}} = 12N_{\text{side}}^2$  pixels.

A partir de ce découpage, on peut utiliser deux schémas de numérotation des pixels : la numérotation en anneaux, appelée "ring scheme", et la numérotation en chaînes, appelées "nested scheme". Ces deux numérotations ont chacune leur propre utilité. La pixélisation en anneaux consiste à numérotter les pixels dans l'ordre dans lequel ils apparaissent le long des différents anneaux de pixélisation. La numérotation en chaînes consiste à utiliser la hiérarchie de la pixélisation HEALPix. Le numéro de chaque pixel est lié au numéro du pixel dont il est issu dans la pixélisation précédente. Ainsi, grâce à cette numérotation, il est très facile de passer d'une échelle à une autre.

## 8 Transformée en ondelettes isotrope sur la sphère

### 8.1 Transformée en ondelettes isotrope non-décimée sur la sphère

[61] propose une méthode de transformée en ondelettes basée sur les harmoniques sphériques qui présente un algorithme de reconstruction extrêmement simple. En effet, cette transformée est très similaire à l'algorithme à trous car la reconstruction se fait par une simple sommation des échelles et du plan lissé. De plus, utilisant la pixélisation HEALPix, il devient ainsi possible de décimer les échelles tout en gardant une reconstruction exacte.

La transformée est basée sur une fonction d'échelle isotropique,  $\phi_{l_c}(\theta, \varphi)$  de fréquence de coupure  $l_c$ . Ainsi, les coefficients en harmoniques sphériques de cette fonction d'échelle

$\hat{\phi}_{l_c}(l, m)$  de  $\phi_{l_c}$  sont nuls quand  $m \neq 0$ , ce qui implique que :

$$\phi_{l_c}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{l=l_c} \hat{\phi}_{l_c}(l, 0) Y_{l,0}(\theta, \varphi) \quad (10)$$

où les  $Y_{l,m}$  sont les harmoniques sphériques.

Ainsi, convoluer une carte  $f(\theta, \varphi)$  avec les harmoniques sphériques est grandement simplifié et les coefficients en harmoniques sphériques  $\hat{a}_0(l, m)$  de la carte convoluée sont obtenus par :

$$\hat{a}_0(l, m) = \widehat{\phi_{l_c} * f}(l, m) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{\phi}_{l_c}(l, 0) \hat{f}(l, m) \quad (11)$$

où  $*$  représente la convolution.

### 8.1.1 La transformation

Une suite d'approximations d'une fonction  $f$  est obtenue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_0 &= \phi_{l_c} * f \\ a_1 &= \phi_{2^{-1}l_c} * f \\ &\dots \\ a_j &= \phi_{2^{-j}l_c} * f \end{aligned}$$

où  $\phi_{2^{-j}l_c}$  est une version dilatée de  $\phi_{l_c}$  avec une fréquence de coupure  $2^{-j}l_c$  :  $\hat{\phi}_{2^{-j}l_c} = \frac{\hat{\phi}_{l_c}(l, m)}{2^j}$ .

Ces coefficients peuvent être obtenus de manière récursive. On définit un filtre passe-bas  $h_j$  pour chaque échelle  $j$  par :

$$\hat{H}_j(l, m) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \hat{h}_j(l, m) = \begin{cases} \frac{\hat{\phi}_{\frac{l_c}{2^{j+1}}}(l, m)}{\frac{\hat{\phi}_{l_c}(l, m)}{2^j}} & \text{si } l < \frac{l_c}{2^{j+1}} \text{ et } m = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

On remarque aisément que  $a_{j+1}$  dérive de  $a_j$  par convolution avec  $h_j$  :  $a_{j+1} = a_j * h_j$ .

Les coefficients ondelettes sont obtenus simplement par la différence de deux résolutions successives :  $d_{j+1}(\theta, \varphi) = a_j(\theta, \varphi) - a_{j+1}(\theta, \varphi)$ .

On choisit comme fonction d'échelle une  $B$ -spline d'ordre 3, même si n'importe quelle fonction avec une fréquence de coupure aurait pu être choisie. La fonction d'échelle a une forme similaire à celle d'une Gaussienne mais converge assez rapidement vers zéro :

$$\hat{\phi}_{l_c}(l, m = 0) = \frac{3}{2} B_3\left(\frac{2l}{l_c}\right) \quad (13)$$

où  $B(x) = \frac{1}{12}(|x-2|^3 - 4|x-1|^3 + 6|x|^3 - 4|x+1|^3 + |x+2|^3)$ .

La Figure 15 montre en haut à gauche une simulation du fond diffus galactique (données Fermi), et sa transformée en ondelettes avec quatre échelles d'ondelettes et le plan lissé.



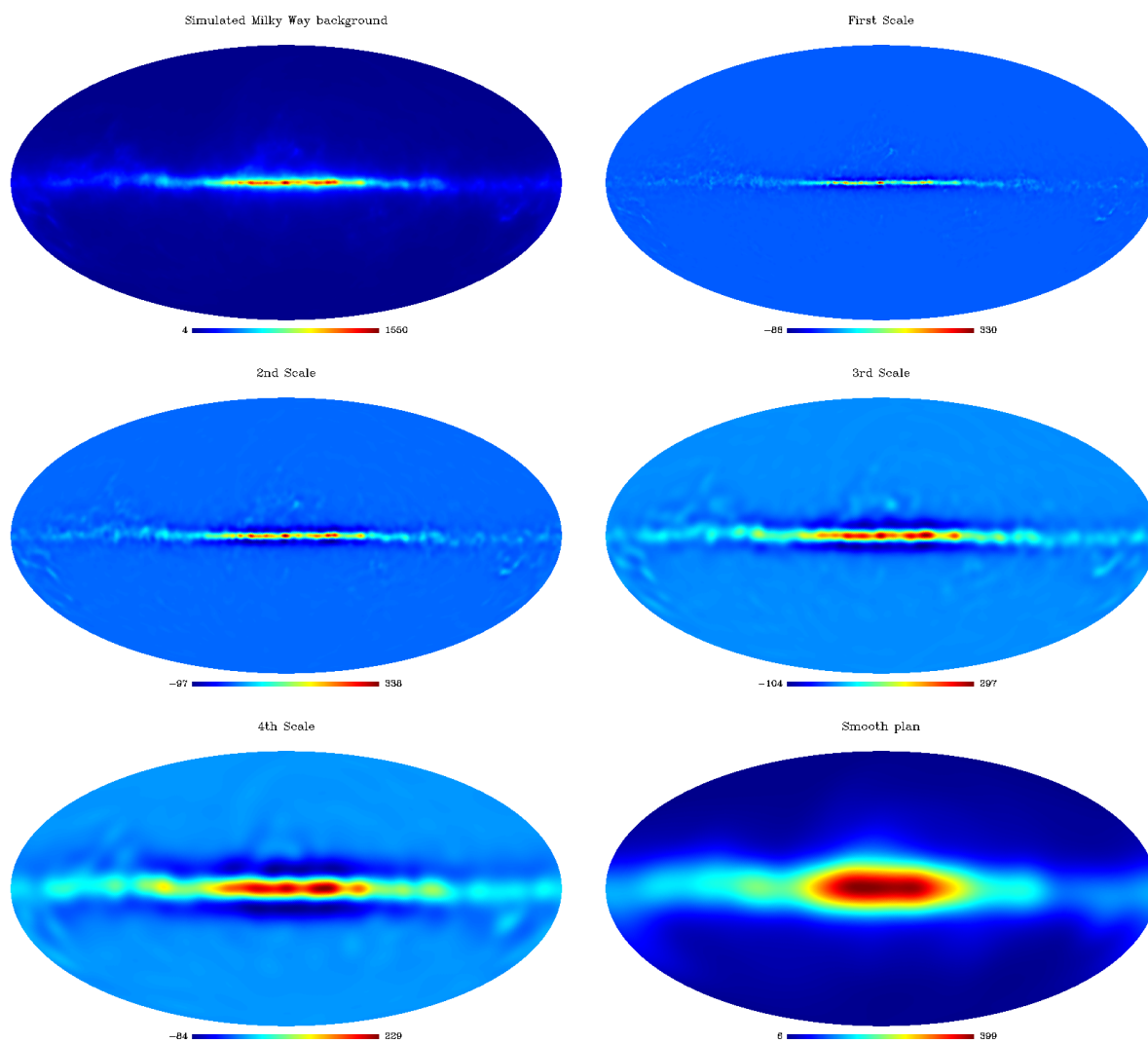


FIGURE 15 – Plan galactique simulé (en haut à gauche) et sa transformée en ondelettes sur la sphère sur 5 échelles (dans l'ordre, 4 échelles ondelettes et le plan lissé). La somme de ces 5 cartes reproduit exactement les données d'origine.

### 8.1.2 La reconstruction

La reconstruction est triviale : il suffit de sommer les différentes échelles d'ondelettes et le plan lissé :

$$a_0(\theta, \phi) = a_J(\theta, \phi) + \sum_{j=1}^J d_j(\theta, \phi) \quad (14)$$

## 9 Ridgelets et Curvelets sur la sphère

### 9.1 Transformée en ridgelets sur la sphère

#### 9.1.1 Transformée en ridgelets sur le plan

L'analyse en ridgelets peut se construire comme une analyse en ondelettes dans le domaine de Radon. La transformée de Radon 2D d'un objet  $f$  est la collection des intégrales sur une ligne indexées par  $(\theta, t) \in [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  donnée par :

$$Rf(\theta, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2 \quad (15)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Ensuite, la transformée en ridgelets est précisément l'application d'une transformée en ondelettes 1D sur les lignes de la transformée de Radon, où la variable angulaire  $\theta$  est constante et  $t$  varie. Pour chaque échelle  $s > 0$ , chaque position  $t \in \mathbb{R}$  et chaque angle  $\theta \in [0, 2\pi[$ , la fonction ridgelet 2D  $\psi_{s,t,\theta}$  est définie à partir d'une fonction ondelette 1D  $\psi$  comme :

$$\psi_{s,t,\theta}(x_1, x_2) = s^{-1/2} \cdot \psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t)/s) \quad (16)$$

Une fonction ridgelet est constante le long des lignes  $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = \text{const}$ . Perpendiculairement à ces lignes, on a une fonction ondelette.

Ainsi, une stratégie élémentaire pour calculer la transformée en ridgelets est de calculer tout d'abord la transformée de Radon  $Rf(t, \theta)$ , puis d'appliquer une transformée en ondelettes unidimensionnelle sur les lignes  $Rf(\cdot, \theta)$ .

#### 9.1.2 Transformée en ridgelets sur la sphère

**Partition de la sphère** On partitionne la sphère de façon à pouvoir appliquer localement la transformée en ridgelets sur chacun des bloc. La pixellisation HEALPix permet de diviser la sphère en blocs dont la projection plane est assez proche du quadrilatère. Cette division se fait de plus de manière hiérarchique, si bien que chaque face est composée de  $N_{\text{side}}^2$  pixels. Ainsi, certaines transformations 2D usuelles peuvent être appliquées sur la sphère. Un effet de bloc peut apparaître lors d'opérations de reconstruction non-linéaire sur la transition entre blocs. Pour supprimer cet effet, il est possible de travailler sur différentes rotations de la sphère, afin de déplacer ces transitions en des endroits différents des données, puis de fusionner les différents résultats (*cycle spinning*). Ceci est rendu possible par le fait qu'il existe plusieurs rotations qui ne modifient pas le schéma de pixélisation avec HEALPix.

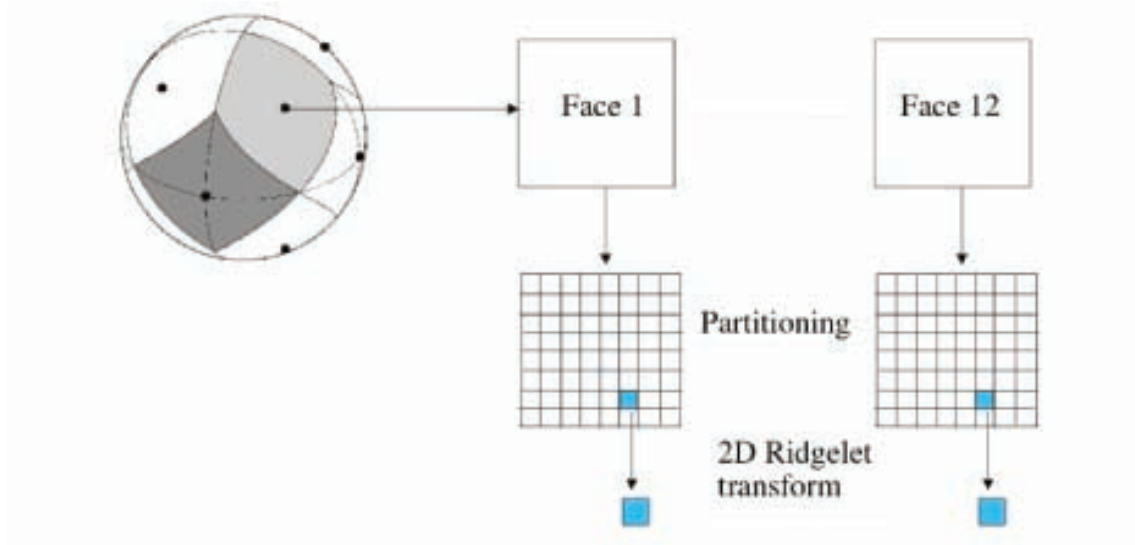


FIGURE 16 – Diagramme de la transformée en ridgelets sur la sphère

**Algorithme** Une fois que la partition de la sphère est effectuée, la transformée en ridgelets 2D décrite dans [57] peut être appliquée sur chaque bloc. Voici la description de la transformée en ridgelets sur le plan :

1. Calcul de la transformée de Fourier 2D.
2. Extraction des lignes passant par l'origine des fréquences.
3. Calcul de la transformée de Fourier inverse 1D sur chaque ligne. Ceci nous permet de calculer la transformée de Radon.
4. Calcul de la transformée en ondelettes 1D des lignes de la transformée de Radon

Les trois premières étapes correspondent à la transformée de Radon appelée *linogramme*.

La Figure 16 montre le diagramme de la transformée en ridgelets sur la sphère. La Figure 17 présente la projection inverse de coefficients de ridgelets à différentes échelles et différentes orientations.

## 9.2 Transformée en curvelets sur la sphère

### 9.2.1 Transformée en curvelets sur le plan

La transformée en curvelets [11][19][58] a ouvert la possibilité d'analyser une image avec des tailles de bloc différentes, mais avec une seule transformation. L'idée est de commencer par décomposer l'image en un ensemble de plans d'ondelettes, et ensuite d'analyser chaque bande par une transformée en ridgelets locale. La taille des blocs peut ainsi être changée à chaque échelle. Les différents niveaux de la pyramide en ridgelets multi-échelle sont utilisés pour représenter les différentes sous-bandes de la transformée en ondelettes. Cette décomposition en sous-bandes impose une relation entre la longueur et la largeur des éléments, de telle façon qu'ils soient anisotropes et obéissent approximativement à une loi d'échelle parabolique  $\text{largeur}^2 \approx \text{longueur}$ .

La transformée en curvelets discrète d'une fonction continue  $f(x)$  utilise une séquence

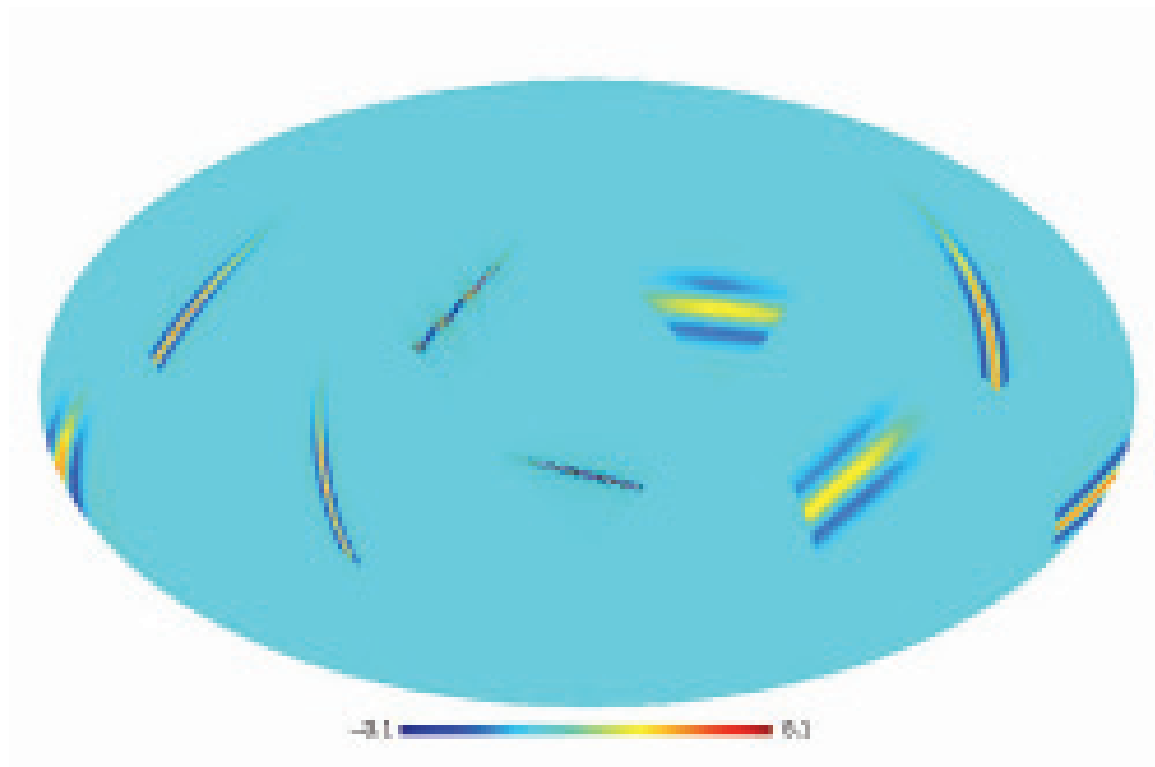


FIGURE 17 – Projection inverse de coefficients de ridgelets à différentes échelles et à différentes orientations. Tous les coefficients sont mis à zéro sauf un, et une transformation inverse est appliquée à ces coefficients. En fonction de l'échelle et de la position du coefficient différent de zéro, les données reconstruites ont des formes de longueur définie et d'orientation définie.

dyadique d'échelles et un banc de filtres dont la bande passante  $\delta_j$  est concentrée sur des fréquences  $[2^{2j}, 2^{2j+2}]$ , c'est à dire :

$$\delta_j(f) = \Psi_{2j} * f, \hat{\Psi}_{2j}(\nu) = \hat{\Psi}(2^{-2j}\nu) \quad (17)$$

Dans la théorie des ondelettes, on utilise habituellement une décomposition en bandes dyadiques  $[2^j, 2^{j+1}]$ . Par opposition, les sous-bandes utilisées dans la transformée en curvelets discrète ont la forme non-standard  $[2^{2j}, 2^{2j+1}]$ . Ceci est une particularité non-standard de la transformée en curvelets qui est importante, car c'est ceci qui fixe la loi d'échelle parabolique.

Les différentes étapes de la décomposition sont les suivantes :

- *Décomposition en sous-bandes.* L'image  $f$  est décomposée en sous-bandes.
- *Partitionnement doux.* Chaque sous-bande est fenêtrée avec un filtre lisseur à une échelle appropriée (de taille  $\sim 2^{-j}$ ).
- *Transformation en ridgelets.* Chaque bloc est analysé par une transformée en ridgelets.

Dans cette définition, les deux sous-bandes  $[2^{2j}, 2^{2j+1}]$  et  $[2^{2j+1}, 2^{2j+2}]$  sont fusionnées avant d'appliquer la transformée en ridgelets.

**Implémentation numérique** La transformée en ondelettes isotrope "à trous" est spécialement bien adaptée au besoin de la transformée en curvelets discrète [58]. Cet algorithme décompose une image de la taille  $n \times n$  en une superposition de plans :

$$f[i_1, i_2] = a_J[i_1, i_2] + \sum_{j=1}^J d_j[i_1, i_2] \quad (18)$$

où  $a_J$  est le plan lissé de l'image originale et les  $d_j$  représentent les coefficients en ondelettes de  $f$  à l'échelle  $j$ . Ainsi, l'algorithme fournit  $J+1$  sous-bandes de taille  $n \times n$ .

L'algorithme de la transformée en curvelets 2D peut être résumé par le pseudo-code suivant :

1. Appliquer la transformation isotrope "à trous" à  $J$  échelles.
2. Initialiser  $B_1 = B_{min}$ , où  $B_{min}$  est la taille du bloc de la première échelle.
3. Pour  $j = 1, \dots, J$  faire
4. Partitionner la sous-bande  $w_j$  avec une taille de bloc  $b_j$  et appliquer la transformée en ridgelets sur chaque bloc.
5. si  $j$  modulo 2 = 1 alors
6.  $B_{j+1} = 2B_j$
7. sinon  $B_{j+1} = B_j$
8. fin Si
9. fin Pour

La taille des fenêtres de localisation est doublée tous les deux sous-bandes dyadiques, permettant de garantir la propriété fondamentale de la transformation en curvelets, qui est que les éléments de longueur proche de  $2^{-j/2}$  sont utilisés pour l'analyse et la synthèse de la  $j$ ème sous-bande  $[2^j, 2^{j+1}]$ . On peut également noter que le plan lissé  $c_J$  de l'image

est laissé intact. La valeur  $B_{min} = 16$  est couramment utilisée dans la plupart des implémentations.

Cette implémentation est redondante. La facteur de redondance est égal à  $16J + 1$ , lorsque  $J$  échelles sont utilisées. Cet algorithme permet une reconstruction exacte, du fait que chaque étape de la décomposition est elle-même inversible.

### 9.2.2 Transformée en curvelets sur la sphère

La transformée en ondelettes isotrope sphérique et la transformée en ridgelets sur la sphère décrites précédemment permettent de mettre en place une extension de la transformée en curvelets pour la sphère.

**Algorithme de la transformée en curvelets** La transformée en curvelets sur la sphère se décompose de la manière suivante :

1. Réaliser une transformée en ondelettes isotrope sur la sphère avec  $J$  échelles,
2. Initialiser la taille des blocs initiaux à  $B_1 = B_{min}$
3. pour  $j = 1, \dots, J$  :
  - faire une partition des échelles  $d_j$ , avec une taille de bloc  $B_j$ .
  - réaliser une transformée en ridgelets sur chaque bloc.
  - si  $j$  modulo 2 = 1 alors  $B_{j+1} = 2B_j$
  - sinon  $B_{j+1} = B_j$

La longueur de la fenêtre est doublée pour chaque sous-bande dyadique, afin de conserver la propriété fondamentale de la transformée en curvelets qui consiste à dire que des éléments de taille  $2^{-j/2}$  sont utilisés pour l'analyse et la synthèse de la  $j$ ème sous-bande  $[2^j, 2^{j+1}]$ . On utilise dans notre implémentation une taille de bloc minimale  $B_{min} = 16$  pixels.

## 10 Conclusion

On a introduit de nouvelles transformées multi-échelle sur la sphère : une transformée en ondelettes isotrope et une transformée en curvelets. Ces transformées se calculent aisément à l'aide de la pixélisation HEALPix et possèdent un algorithme de reconstruction extrêmement simple. Dans la section suivante, ces transformées serviront de base à la méthode MS-VSTS, afin d'avoir une décomposition multi-échelle sur la sphère adaptée aux données Poissonniennes.

## Quatrième partie

# Une représentation multi-échelle sur la sphère adaptée aux données Poissonniennes : la Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle sur la Sphere (MS-VSTS)

## Sommaire

---

<b>11</b>	<b>Position du problème</b>	<b>45</b>
<b>12</b>	<b>Débruitage Poissonien sur le plan : la méthode MS-VST</b>	<b>46</b>
12.1	Débruitage de données Gaussiennes sur le plan à l'aide de la transformée en ondelettes . . . . .	46
12.1.1	La transformée en ondelettes 1D et 2D . . . . .	46
12.1.2	Parcimonie et application au débruitage gaussien . . . . .	48
12.2	Débruitage de données poissonniennes par la méthode MS-VST . . . . .	49
12.2.1	Principe de la VST . . . . .	49
12.2.2	VST d'un processus de Poisson filtré . . . . .	50
12.2.3	La méthode MS-VST : Multi-Scale Variance Stabilizing Transform . . . . .	52
<b>13</b>	<b>Une représentation multi-échelle sur la sphère : la Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle sur la Sphere (MS-VSTS)</b>	<b>57</b>
13.1	MS-VSTS + IUWT . . . . .	57
13.2	MS-VSTS + Curvelets . . . . .	58
<b>14</b>	<b>Application à la suppression du bruit de Poisson</b>	<b>60</b>
14.1	MS-VSTS + IUWT . . . . .	60
14.2	Adaptation du support de multi-résolution . . . . .	61
14.3	MS-VSTS + Curvelets . . . . .	61
14.4	Résultats expérimentaux . . . . .	63
<b>15</b>	<b>Application à l'étude du fond diffus galactique : débruitage et inpainting</b>	<b>63</b>
15.1	Méthode . . . . .	63

15.2 Résultats expérimentaux . . . . .	64
<b>16 Application à la détection de sources : débruitage et extraction du fond diffus galactique</b>	<b>64</b>
16.1 Méthode . . . . .	64
16.2 Résultats expérimentaux . . . . .	65
16.3 Sensibilité aux erreurs de modèle . . . . .	66
<b>17 Extension aux données multicanales</b>	<b>66</b>
17.1 Cas Gaussien . . . . .	66
17.1.1 Transformée en ondelettes 2D-1D sur la sphère . . . . .	66
17.1.2 Transformée en ondelettes 2D-1D sur la sphère non-décimée rapide et reconstruction . . . . .	67
17.1.3 Débruitage Gaussien multicanal . . . . .	68
17.2 Cas Poissonien . . . . .	68
17.2.1 MS-VSTS 2D-1D . . . . .	68
17.2.2 Détection-Reconstruction . . . . .	69
17.3 Expériences . . . . .	70
<b>18 Conclusion</b>	<b>70</b>

---



## 11 Position du problème

Les cartes de photons sphériques obtenues par Fermi sont dégradées par un bruit de quantification dû aux fluctuations du nombre de photons, qui rend la détection de sources plus difficile. Pour prendre en compte ce bruit de quantification, on modélise les données Fermi comme une réalisation d'un processus Poissonien.

La loi de Poisson, ou loi des événements rares, correspond au modèle suivant : sur une période de temps  $T$ , un événement arrive en moyenne  $\lambda$  fois. On appelle  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où l'événement se produit au cours de la période  $T$ . Cette variable aléatoire suit une loi de probabilité appelée loi de Poisson de paramètre (ou d'intensité)  $\lambda$  :

$$p(k) = p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (19)$$

Cette distribution a pour moyenne  $\lambda$  et pour variance  $\lambda$ . Par la suite, on utilisera la notation  $\mathcal{P}(\lambda)$  pour désigner une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

On observe un jeu de données aléatoires  $\mathbf{X} = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}^q}$ , où  $X_i$  est une variable aléatoire de Poisson d'intensité  $\lambda_i$ , c'est à dire  $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ . On suppose ici que les  $X_i$  sont mutuellement indépendants. L'objectif du débruitage est d'estimer le profil d'intensité sous-jacent  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}^q}$  à partir de l'observation  $\mathbf{X}$ .

Dans le cadre de la mission Fermi, on a deux objectifs scientifiques principaux :

- Détection des sources ponctuelles afin de construire le catalogue de sources,
- Etude du fond diffus galactique, lié à l'interaction entre le rayonnement cosmique et le gaz et les poussières interstellaires de la Voie Lactée.

Le premier objectif implique l'extraction du fond diffus galactique. Par conséquent, on a besoin d'une méthode capable de supprimer le bruit de Poisson tout en extrayant un modèle du fond diffus. Le second objectif implique de retirer les sources ponctuelles des données : on souhaite appliquer un masque binaire sur les données (égal à 0 sur les sources ponctuelles, et à 1 partout ailleurs) et de réaliser le débruitage tout en interpolant les données manquantes. Les deux objectifs sont liés : une meilleure connaissance du fond diffus galactique nous permet d'améliorer notre modèle de fond, ce qui permet de mieux détecter les sources, tandis que les sources détectées sont retirées de l'image à l'aide du masque binaire afin d'étudier le fond diffus.

L'objectif de cette partie est de présenter une méthode de débruitage de données poissoniennes sphériques appelée Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle sur la Sphère (MS-VSTS), destinée à débruiter les données Fermi sphériques. Cette méthode est basée sur la Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle (MS-VST) [73] et sur les transformées multi-échelle sur la sphère présentées dans la section précédente. A notre connaissance, il n'existe pas d'autre méthode pour estimer l'intensité de données poissoniennes sphériques. Il est possible de décomposer les données sphériques en projections 2D, de débruiter séparément chaque projection et de reconstruire les données débruitées, mais la projection sur le plan entraîne des désagréments comme des artefacts visuels et la déformation des sources.

## 12 Débruitage Poissonien sur le plan : la méthode MS-VST

Il existe de très nombreuses méthodes de suppression d'un bruit additif gaussien : filtrage optimal, débruiteurs multi-échelle, estimateurs bayésiens... Cependant, le débruitage poissonien a été beaucoup moins étudié. Différentes techniques d'estimation de l'intensité de Poisson en 2D ont été proposées dans la littérature. De nombreuses méthodes adoptent un cadre bayésien multi-échelles conçu spécifiquement pour les données poissonniennes [52], initié indépendamment par Timmerman [66] et Kolackzyk [40]. Lefkimmiatis [42] propose un cadre bayésien amélioré pour l'analyse de processus de Poisson, basé sur une représentation multi-échelle du processus de Poisson dans lequel les ratios des intensités de Poisson sous-jacentes sur des échelles adjacentes sont modélisés par des mixtures de distributions paramétriques conjuguées. Une autre approche inclut la transformation des données par une Transformée Stabilisatrice de Variance (VST) comme la transformée d'Anscombe [6]) et la transformée de Fisz [32], appliquées respectivement dans le domaine spatial [20] et le domaine des ondelettes [33]. La transformée modifie les données de façon à ce que le bruit devienne approximativement gaussien de variance constante. On peut alors utiliser les méthodes standard de débruitage pour un bruit gaussien indépendant identiquement distribué. Cette section présente une méthode puissante appelée Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle (MS-VST) [73]. Cette méthode consiste à combiner une transformée stabilisatrice de variance (VST) avec une transformée multi-échelle (ondelettes, ridgelets, curvelets), de façon à obtenir des coefficients se comportant asymptotiquement comme des coefficients distribués selon une loi gaussienne de variance connue. Il suffit alors d'utiliser des méthodes de débruitage Gaussien comme le seuillage d'ondelettes.

### 12.1 Débruitage de données Gaussiennes sur le plan à l'aide de la transformée en ondelettes

#### 12.1.1 La transformée en ondelettes 1D et 2D

La transformée en ondelettes représente un signal 1D à temps continu, à valeurs réelles  $f(t), t \in \mathbb{R}$  en terme de translations et de dilatations d'une fonction d'échelle passe-bas  $\phi(t)$  et d'une ondelette passe-bande  $\psi(t)$ . Notons  $\phi_{j,n}(t) := 2^{-j/2}\phi(2^{-j}t - n)$  et  $\psi_{j,n}(t) := 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - n)$ . Pour des choix particuliers de ces fonctions, les translations et dilatations  $\{\phi_{j,n}, \psi_{j,m} | j \leq J, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$  forment une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R})$ . Par conséquent, on a la représentation du signal :

$$f(t) = \sum_n a_J[n] \phi_{J,n} + \sum_{j=-\infty}^J \sum_n d_j[n] \psi_{j,n} \quad (20)$$

$$a_J[n] = \langle f, \phi_{J,n} \rangle, d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (21)$$

Ici,  $(a_j[n])_n$  et  $(d_j[n])_n$  sont respectivement les coefficients d'approximation (ou coefficients d'échelle) et les coefficients de détails (ou coefficients d'ondelettes) à l'échelle  $j$ ;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  correspond au produit interne. La représentation ci-dessus révèle l'aspect multi-résolution de l'analyse en ondelettes. La première somme en (20) est une approximation

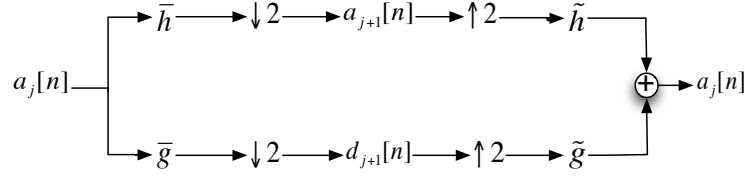


FIGURE 18 – Transformée en ondelettes implémentée par un banc de filtres itératif

de  $f$  à l'échelle (résolution)  $J$ , et la seconde double somme consiste en des améliorations à des échelles de plus en plus fines  $j \leq J$ . A la différence de la base de Fourier à support infini, des ondelettes à support compact avec un nombre arbitraire de moments d'annulation peut être construite [16]. Par conséquent, les ondelettes permettent une analyse qui s'adapte aux variations locales du signal.

Les coefficients d'approximation et de détails peuvent être calculés de façon itérative et efficace. On utilise le fait que la fonction d'échelle et la fonction ondelette sont reliées par [46]

$$\phi(x/2) = \sqrt{2} \sum_n h[n] \phi(x - n), \quad \psi(x/2) = \sqrt{2} \sum_n g[n] \phi(x - n)$$

où  $h[n]$  et  $g[n]$  sont des filtres passe-bas et passe-bande à temps discret, respectivement. Les coefficients d'approximation et de détails peuvent être calculés récursivement comme

$$a_{j+1}[n] = \bar{h} \star a_j[2n] = \sum_k h[k - 2n] a_j[k], \quad d_{j+1}[n] = \bar{g} \star a_j[2n] = \sum_k g[k - 2n] a_j[k] \quad (22)$$

où  $\bar{h}[n] := h[-n]$ , et  $\star$  représente la convolution. Soit  $\check{x}[n] = x[p]$  si  $n = 2p$  et 0 sinon, ce qui est un schéma de sur-échantillonnage. La reconstruction des coefficients d'approximation peut être obtenue à partir des résolutions plus brutes

$$a_j[n] = \sum_k \check{a}_{j+1}[k] \tilde{h}[n - k] + \sum_k \check{d}_{j+1}[k] \tilde{g}[n - k] \quad (23)$$

où  $\tilde{h} = h$  et  $\tilde{g} = g$  pour des ondelettes orthonormales [46]. (22) et (23) peuvent être résumées en un banc de filtres à temps discret comprenant des filtres passe-bas et passe-bande, des décimateurs et des sur-échantillonneurs (Figure 18). Pour un signal discret  $f[n]$ , les récursions (22) et (23) définissent une décomposition en ondelettes discrète et une inversion, respectivement. La transformée a une complexité linéaire  $O(N)$ , où  $N$  est la longueur du signal. Pour une image 2D  $f[n, m]$ , la transformée en ondelettes discrète est implémentée par un banc de filtre 2D. Si une base d'ondelette séparable est utilisée, les filtres  $h$  et  $g$  seront aussi séparables. Alors, la transformée est obtenue en alternant l'application des filtres  $h$  et  $g$  sur les lignes et les colonnes de l'image. La transformée pour des signaux de plus grande dimension peut être réalisée de même.

Il est important dans de nombreuses applications comme la reconnaissance de formes d'avoir une représentation du signal invariante par translation. Lorsqu'une forme est translatée, ses descripteurs numériques doivent être translatés sans être modifiés. Cependant, il est facile de vérifier que la représentation en ondelettes (21) n'est pas invariante par translation. L'invariance par translation peut être ré-obtenue en calculant les

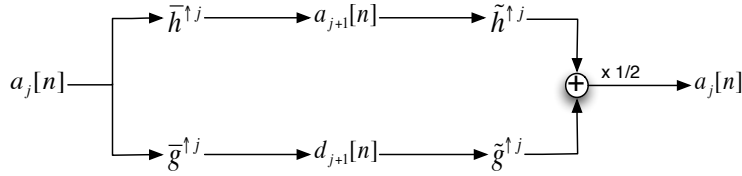


FIGURE 19 – Transformée en ondelettes non-décimée implémentée par un bac de filtres itératif

coefficients d'approximation et de détails sur la grille entière :

$$a_j[n] = \langle f(t), \phi_{j,n} \rangle, \quad \phi_{j,n} = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}(t-n)) \quad (24)$$

$$d_j[n] = \langle f(t), \psi_{j,n} \rangle, \quad \psi_{j,n} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}(t-n)) \quad (25)$$

Le calcul pratique de  $a_j$  et  $d_j$  peut aussi être réalisé par un schéma de récurrence, ou un algorithme "à trous" [38][56].

$$a_{j+1}[l] = \bar{h}^{\uparrow j} \star a_j[l] = \sum_k h[k] a_j[l + 2^j k], \quad d_{j+1}[l] = \bar{g}^{\uparrow j} \star a_j[l] = \sum_k g[k] a_j[l + 2^j k] \quad (26)$$

où  $h^{\uparrow j}[l] = h[l]$  si  $l/2^j \in \mathbb{Z}$  et 0 sinon. La reconstruction est donnée par :  $a_j[l] = \frac{1}{2} \left[ (\bar{h}^{\uparrow j} \star a_j)[l] + (\bar{g}^{\uparrow j} \star d_j)[l] \right]$ . On résume l'algo à trous sur la Figure 19. En comparaison de la figure 5.1, les décimateurs et les sur-échantillonneurs sont absents. Par conséquent, ce schéma est aussi appelé transformée en ondelette non-décimée (UWT). Cette transformée a une complexité en  $O(N \log(N))$ , qui est seulement légèrement plus grande que celle de la version décimée.

### 12.1.2 Parcimonie et application au débruitage gaussien

La transformée en ondelettes de signaux du monde réel a tendance à être très parcimonieuse, avec peu de grandes échelles et de coefficients d'ondelettes dominant la représentation, alors que la plupart des coefficients d'ondelettes sont pratiquement à zéro. Formellement, si on approxime un signal en gardant les  $M$  vecteurs dans une base d'ondelettes ayant les plus grandes amplitudes de leurs coefficients, alors la norme  $\mathcal{L}^2$  de l'erreur d'approximation peut être écrite comme une fonction décroissant avec  $M$ , c'est à dire  $O(M^{-\alpha})$  où  $\alpha > 0$ . Plus  $\alpha$  est grand, plus la taux de décroissance est grand, et par conséquent plus la représentation du signal dans le domaine d'ondelettes est parcimonieuse. On montre que la transformation en ondelettes est optimale pour représenter des signaux à variations bornées. Les fonctions à variations bornées incluent celles qui sont régulières par morceaux avec un nombre fini de discontinuités ponctuelles. Cette propriété fait des transformations en ondelettes une représentation très efficace pour de nombreux signaux en pratique. Cependant, il faut remarquer que les données de dimensions supérieures à 1 peuvent avoir des singularités plus complexes autres que les discontinuités ponctuelles (comme les contours linéaires et curvilignes en 2D). Pour de telles données, le système d'ondelettes n'est plus optimal, et d'autres transformées multi-échelles plus efficaces ont été développées, en particulier les transformées en ridgelets et

curvelets. En dimension 2, les ondelettes sont adaptées à la représentation de singularités ponctuelles, tandis que les ridgelets sont optimales pour représenter des lignes de la taille de l'image, et que les curvelets sont optimales pour représenter des contours  $C^2$ .

Cette propriété de parcimonie est avantageuse dans des applications de débruitage. En effet, le transformée en ondelettes tendra à concentrer l'énergie du signal désiré en un petit nombre de coefficients de grande amplitude (fort rapport signal à bruit (SNR)). Les autres coefficients auront de faibles amplitudes (faible SNR) qui sont principalement dues au bruit. Par conséquent, un simple seuillage sur les coefficients qui élimine les coefficients non-significatifs et garde les coefficients significatifs permet d'éliminer le bruit. Une configuration de seuillage générale peut être écrite comme

$$\tilde{d}_j[n] = h \cdot d_j[n] \quad (27)$$

où  $0 \leq h \leq 1$ . Un facteur  $h$  de valeur zéro supprime complètement la contribution de la fonction de base  $\psi_{j,n}$ ; poser  $h = 1$  le laisse intact. Poser  $0 < h < 1$  réduit la contribution de  $\psi_{j,n}$  en fonction. Les fonctions de seuillage couramment utilisées comprennent le seuillage dur

$$h = \begin{cases} 1 & |d_j[n]| \geq T \\ 0 & |d_j[n]| < T \end{cases} \quad (28)$$

et le seuillage doux

$$h = \begin{cases} 1 - \frac{T \cdot \text{sgn}(d_j[n])}{d_j[n]} & |d_j[n]| \geq T \\ 0 & |d_j[n]| < T \end{cases} \quad (29)$$

où  $T$  est une valeur de seuil spécifiée par l'utilisateur qui est généralement proportionnelle au niveau de bruit. Cette méthode, adaptée au débruitage de données gaussiennes, est appelée *wavelet shrinkage* (seuillage d'ondelettes).

## 12.2 Débruitage de données poissonniennes par la méthode MS-VST

### 12.2.1 Principe de la VST

Pour un jeu de données de Poisson  $\mathbf{X}$ , chaque échantillon  $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$  a une variance  $\text{Var}[X_i] = \lambda_i$ . Par conséquent, la variance de  $\mathbf{X}$  est dépendante du signal. Le but du VST  $T$  est de stabiliser les données de sorte que chaque coefficient de  $T(\mathbf{X})$  possède une variance (asymptotiquement) constante, indépendante de la valeur de  $\lambda_i$ . En outre, dans le cas des VST présentés ci-dessous,  $T(\mathbf{X})$  est asymptotiquement normalement distribué. Par conséquent, les données transformées par VST sont approximativement stationnaires et Gaussiennes. Une fois ramené à un problème de débruitage Gaussien, n'importe quelle méthode standard comme le *wavelet shrinkage* peut être appliquée pour obtenir les coefficients débruités  $\widehat{T(\mathbf{X})}$ . Finalement, l'intensité est estimée en inversant le VST, c'est à dire  $\hat{\lambda} = T^{-1}(\widehat{T(\mathbf{X})})$ .

La transformation de Anscombe [6] est un VST couramment utilisé qui a une forme simple en racine carrée :

$$T(X) := 2\sqrt{X + 3/8} \quad (30)$$

On peut montrer que  $T(X)$  est asymptotiquement normal lorsque l'intensité augmente.

$$T(x) - 2\sqrt{\lambda} \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty \quad (31)$$

On peut montrer que la transformée d'Anscombe nécessite une forte intensité sous-jacente pour stabiliser les données (typiquement pour  $\lambda \gtrsim 10$ ). [51] montre que le biais sur les données Poissonniennes de faible intensité est dû non pas à la transformée d'Anscombe elle-même mais à sa transformée inverse, et propose des transformées inverses optimales pour minimiser le biais sur les données de faible intensité.

### 12.2.2 VST d'un processus de Poisson filtré

La méthode MS-VST proposée par [73] est basée sur une VST conçue pour stabiliser la variance d'un processus de Poisson discret filtré par un filtre passe-bas. Cette transformée est rapide pour n'importe quelle donnée dimensionnelle, et on montre qu'elle est plus efficace que les VST existantes dans des situations de données basses. La logique derrière les avantages de stabiliser une version filtrée passe-bas du processus original est la suivante. La performance de la VST de Anscombe se détériore lorsque l'intensité devient faible (typiquement pour  $\lambda < 10$ ), c'est à dire lorsque le SNR décroît. Par conséquent, on peut alléger cette limitation et améliorer les performances de la VST si le SNR est amélioré avant la stabilisation. Celà peut être réalisé en pré-filtrant le processus original à condition que le filtre agisse comme un noyau "moyenneur", et plus généralement, un filtre passe-bas.

Soit un processus de Poisson  $\mathbf{X} := (X_i)_i$  où les  $X_i$  sont indépendants et  $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ ,  $Y_j := \sum_i h[i]X_{j-i}$  est le processus filtré obtenu en convoluant  $(X_i)_i$  avec un filtre discret  $h$ . Nous utiliserons  $Y$  pour noter n'importe quel des  $Y_j$ . Définissons  $\tau_k := \sum_i (h[i])^k$  pour  $k = 1, 2, \dots$ . En outre, nous adoptons une hypothèse d'homogénéité locale telle que  $\lambda_{j-i} = \lambda$  pour tout  $i$  dans le support de  $h$ .

**Point de vue heuristique** On peut voir que la variance de  $Y$  ( $\text{Var}[Y]$ ) est proportionnelle à l'intensité  $\lambda$  sous-tendant la variable de Poisson. Pour stabiliser  $\text{Var}[Y]$ , on cherche une transformation  $Z := T(Y)$  telle que  $\text{Var}[Z]$  est (asymptotiquement) constante, par exemple égale à 1, indépendamment de la valeur de  $\lambda$ .

D'un point de vue heuristique, l'expansion de Taylor nous donne  $T(Y) \approx T(\mu_Y) + T'(\mu_Y)(Y - \mu_Y)$ , où  $\mu_Y := \mathbb{E}[Y] = \lambda\tau_1$ . Nous avons ensuite  $\text{Var}[Z] \approx T'(\mu_Y)^2 \cdot \lambda\tau_2$ . Par conséquent, en posant  $\text{Var}[Z] = 1$ , on obtient une équation différentielle  $T'(\mu_Y) = \mu_Y^{-1/2} \sqrt{\tau_1/\tau_2}$ , dont la solution est donnée par  $T(Y) = 2\sqrt{\tau_1/\tau_2}\sqrt{Y}$ . Cela implique que la transformée racine carrée peut servir comme VST. Il est possible d'utiliser des expansions de Taylor d'ordre supérieur pour trouver des VST de différentes formes, mais résoudre les équations différentielles associées s'avère difficile car elles sont fortement non-linéaires.

**Point de vue rigoureux** On définit la transformée en racine carrée  $T$  par :

$$T(Y) := b \cdot \text{sgn}(Y + c) |Y + c|^{1/2} \quad (32)$$

où  $b$  est un facteur de normalisation. Le Lemme 2 (preuve dans [72]) confirme nos heuristiques que  $T$  est bien une VST pour les processus de Poisson filtrés (avec un filtre à moyennement non-nulle) dans lequel  $T(Y)$  est asymptotiquement normalement distribué avec une variance stabilisée lorsque  $\lambda$  devient grand. Ce résultat reste vrai pour tout  $c \in \mathbb{R}$ . Cependant, le taux de convergence dans (33) varie avec la valeur de  $c$ . La section suivante apporte une analyse du taux asymptotique et détermine la valeur optimale de  $c$ .

**Lemme 1 (Racine carrée comme VST)** Si  $\tau_1 \neq 0$ ,  $\|h\|_2, \|h\|_3 < \infty$ , alors on a :

$$\text{sgn}(Y + c)\sqrt{|Y + c|} - \text{sgn}(\tau_1)\sqrt{|\tau_1|\lambda} \xrightarrow{\mathcal{D}}_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{N}\left(0, \frac{\tau_2}{4|\tau_1|}\right) \quad (33)$$

où  $\text{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe.

**Paramètre optionnel de la VST** Pour faciliter l'analyse asymptotique, on suppose un filtre non-négatif  $h$  et une constante positive  $c$  (un  $h$  non-positif avec un  $c$  négatif peut également être considéré). Par conséquent, notre VST est simplifié en  $Z := T(Y) = b\sqrt{Y + c}$ . On peut maintenant dériver les expansions asymptotiques de  $\mathbb{E}[Z]$  et  $\text{Var}[Z]$  comme dit dans la proposition 1. (preuve dans [72]). Notons que le dernier point dans la proposition résulte directement du Lemme 1.

**Proposition 1 (Paramètre optimal de la VST)**

1. Définissons  $Z := b\sqrt{Y + c}$ . Alors nous avons :

$$\mathbb{E}[Z] = b\sqrt{\lambda\tau_1} + b\frac{4c\tau_1 - \tau_2}{8\tau_1^{3/2}}\lambda^{-1/2} + O_{\lambda \rightarrow +\infty}(\lambda^{-1}) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z] = & b^2\frac{\tau_2}{4\tau_1} + b^2\left(\frac{7\tau_2^2}{32\tau_1^3}\right)\lambda^{-1} + b^2\left(\frac{5\tau_4 + 16c^2\tau_2 + 16c\tau_3}{64\tau_1^3}\right. \\ & \left. - \frac{17\tau_2\tau_3 + 21c\tau_2^2}{32\tau_1^4} + \frac{75\tau_2^3}{128\tau_1^5}\right)\lambda^{-2} + O_{\lambda \rightarrow +\infty}(\lambda^{-5/2}) \end{aligned} \quad (35)$$

2. Pour que la VST soit précise au second ordre et que  $Z$  aie une variance unité asymptotique,  $b$  et  $c$  doivent satisfaire :

$$c = \frac{7\tau_2}{8\tau_1} - \frac{\tau_3}{2\tau_2}, \quad b = b - 1 := 2\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \quad (36)$$

3. Pour  $b$  et  $c$  ci-dessus,  $Z - b_1\sqrt{\tau_1\lambda} \xrightarrow{\mathcal{D}}_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1)$ .

La proposition 1 nous dit que pour la valeur choisie de  $c$ , le terme de premier ordre dans l'expansion (35) disparaît, et la variance est presque constante avec un résidu au second ordre. En tant que facteur de normalisation, la valeur de  $b$  n'influe pas sur le taux de convergence. On peut également noter que s'il n'y a pas de filtrage ( $h = \delta$ ), la valeur de  $c$  dans (36) est égale à  $3/8$ , çàd la valeur du VST d'Anscombe.

Fixons maintenant  $c$  à la valeur donnée par (36). Une fois que l'espérance asymptotique est normalisée à  $\sqrt{\lambda}$ , le coefficient du terme de plus grand ordre  $O(\lambda^{-3/2})$  dans

(34) est donné par (37). De façon similaire, la variance asymptotique étant normalisée à 1, le coefficient du terme  $O(\lambda^{-2})$  dans (35) est donné par (38)

$$C_E = \frac{5\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}{16\tau_1^2\tau_2} \quad (37)$$

$$C_{\text{Var}} = \frac{5\tau_1^2\tau_2\tau_4 + 13\tau_2^4 - 4\tau_1^2\tau_3^2 - 13\tau_1\tau_2^2\tau_3}{16\tau_1^4\tau_2^2} \quad (38)$$

### 12.2.3 La méthode MS-VST : Multi-Scale Variance Stabilizing Transform

La principe de cette méthode est de combiner la VST présentée précédemment avec divers types de transformées multi-échelle. Cette méthode s'inspire des méthodes de débruitage gaussien bases sur la parcimonie. L'idée est de décomposer le signal dans une base parcimonieuse tout en stabilisant ses coefficients, de manière à pouvoir débruiter le signal par mise à zéro des coefficients non-significatifs comme dans le cas gaussien.

Un des intérêts de cette méthode est de pouvoir s'adapter à un grand nombre de transformées multi-échelles, ce qui permet de choisir ou de concevoir la transformée la plus adaptée aux sources à restaurer, en fonction leur morphologie. Par exemple, pour représenter efficacement des singularités isotropiques et des structures régulières, on choisira la transformée en ondelettes. La transformée en ridgelets s'avère être très efficace pour représenter des lignes globales dans une image. Le système des curvelets est très adapté pour représenter des images lisses ( $\mathcal{C}^2$ ) à partir de contours  $\mathcal{C}^2$ . Ces transformations sont également attractives d'un point de vue calculatoire particulièrement pour les applications à grande échelle.

La MS-VST peut être facilement combinée avec ces diverses décompositions géométriques multi-échelles, menant à des coefficients asymptotiquement normalement distribués de variances connues. Un framework de tests d'hypothèse classique est ensuite adopté pour détecter les coefficients significatifs. A cause de la non-linéarité de la MS-VST et de la sur-complétion des transformées, un schéma itératif basé sur la parcimonie est proposé pour reconstruire l'estimée finale. La méthode MS-VST s'avère être un débruiteur très performant capable de reconstruire d'importantes structures de diverses (isotropes, linéaires et curvilignes) formes dans des images à (très) basses valeurs.

**Cadre général** Dans cette section, la VST proposée sera incorporée au sein du cadre multi-échelle offert par la UWT (pas nécessairement séparable), donnant naissance à la MS-VST. La transformée non-décimée est utilisée car elle permet un débruitage invariant par translation. Ci-dessous, nous discutons d'abord du cas du débruitage 1D, et ensuite l'extension au cas multi-dimensionnel sera directe.

La VST peut être combinée avec l'UWT de la façon suivante : comme les  $(\bar{h}^{\uparrow j})_j$  sont des filtres passe-bas (et ont des moyennes non-nulles), on peut d'abord stabiliser les coefficients d'approximation  $(a_j)_j$  à l'aide de la VST, et ensuite calculer les coefficients de détails à partir des  $a_j$  stabilisés. Notons que la VST est désormais dépendante de l'échelle (et par conséquent la MS-VST). En faisant ainsi, la Gaussianité stabilisée asymptotique des  $a_j$  sera transférée aux  $d_j$ , comme nous le montrerons plus tard. Par conséquent, la distribution des  $d_j$  étant connue (Gaussienne), on peut détecter les coefficients significatifs par des tests d'hypothèses classiques. Avec la connaissance des



coefficients détectés, l'estimation finale peut être reconstruite. En résumé, le débruitage par UWT avec la MS-VST implique les trois étapes suivantes :

1. **Transformation** : Calculer la UWT et appliquer la MS-VST
2. **Détection** : Détecter des coefficients de détails significatifs par des tests d'hypothèses
3. **Estimation** : Reconstruire l'estimée finale de façon itérative en utilisant la connaissance des coefficients détectés.

La dernière étape nécessite quelques explications. La reconstruction du signal requiert d'inverser la UWT combinée avec la MS-VST après l'étape de détection. Cependant, la non-linéarité de la MS-VST rend l'inversion directe impossible dans la plupart des cas. Même pour l'UWT isotrope (IUWT), qui use des bancs de filtres spéciaux menant à une MS-VST inversible, l'inversion directe est loin d'être optimale. Par conséquent, nous proposons de reformuler la reconstruction comme un problème d'optimisation convexe et de le résoudre par un algorithme de descente abrupte itératif.

**MS-VST + UWT isotrope** La IUWT utilise le banc de filtres  $(h, g = \delta - h, \tilde{h} = \delta, \tilde{g} = \delta)$ , où  $h$  est un filtre-passe bas symétrique comme le filtre  $B_3$ -Spline. La structure particulière des filtres d'analyse  $(h, g)$  mène au schéma de décomposition itérative à gauche de (39). La reconstruction est triviale, çàd,  $a_0 = a_J + \sum_{j=1}^J d_j$ . Cet algorithme est couramment utilisé en imagerie biomédicale [53] et en astronomie [62] pour détecter des objets isotropes.

On applique la VST sur les  $a_j$  ce qui résulte en la procédure de stabilisation montrée sur la partie droite de (39) :

$$\text{IUWT} \left\{ \begin{array}{l} a_j = \bar{h}^{\uparrow j-1} \star a_{j-1} \\ d_j = a_{j-1} - a_j \end{array} \right. \implies \begin{array}{c} \text{MS-VST} \\ + \\ \text{IUWT} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_j = \bar{h}^{\uparrow j-1} \star a_{j-1} \\ d_j = T_{j-1}(a_{j-1}) - T_j(a_j) \end{array} \right. \quad (39)$$

Dans (39), le filtrage sur  $a_{j-1}$  peut être réécrit comme un filtrage sur  $a_0 = \mathbf{X}$ , çàd  $a_j = h^{(j)} \star a_0$ , où  $h^{(j)} = \bar{h}^{\uparrow j-1} \star \dots \star \bar{h}^{\uparrow 1}$  pour  $j \geq 1$  et  $h^{(0)} = \delta$ .  $T_j$  est l'opérateur de VST à l'échelle  $j$  :

$$T_j(a_j) = b^{(j)} \text{sgn}(a_j + c^{(j)}) \sqrt{|a_j + c^{(j)}|} \quad (40)$$

Définissons  $\tau_k^{(j)} := \sum_i (h^{(j)}[i])^k$ . Alors, d'après (36), la constante  $c^{(j)}$  associée à  $h^{(j)}$  devrait être fixée à :

$$c^{(j)} := b \frac{7\tau_2^{(j)}}{8\tau_1^{(j)}} - \frac{\tau_3^{(j)}}{2\tau_2^{(j)}} \quad (41)$$

Cette procédure de stabilisation est directement inversible et on a :

$$a_0 = T_0^{-1} \left[ T_J(a_J) + \sum_{j=1}^J d_j \right] \quad (42)$$

Le schéma de décomposition et l'inverse de MSVST + IUWT sont également illustrés sur Fig. 5.7(a).

### Distribution asymptotique de $d_j$

**Théorème 1 (Distribution asymptotique de  $d_j$ )** Posons  $b^{(j)} := \text{sgn}(\tau_1^{(j)})/\sqrt{|\tau_1^{(j)}|}$ , si  $\lambda$  est constant sur le support du filtre  $h^{(j)}[k - \cdot]$ , alors on a :

$$d_j[k] \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\tau_2^{(j-1)}}{4\tau_1^{(j-1)^2}} + \frac{\tau_2^{(j)}}{4\tau_1^{(j)^2}} - \frac{\langle h^{(j-1)}, h^{(j)} \rangle}{2\tau_1^{(j-1)}\tau_1^{(j)}}\right) \quad (43)$$

La preuve de ce théorème est donnée dans [72]. Ceci est un résultat très utile montrant que les coefficients de détail issus de parties localement homogènes du signal suivent asymptotiquement une distribution normale centrée avec une variance indépendante de l'intensité qui dépend uniquement du filtre  $h$  et de l'échelle courante. Par conséquent, la variance stabilisée (ainsi que les constantes  $b^{(j)}$ ,  $c^{(j)}$ ,  $\tau_k^{(j)}$ ) peuvent toutes être précalculées pour tout  $h$  donné.

**Extension au cas multi-dimensionnel** Le banc de filtres en  $qD$  ( $q > 1$  devient  $(h_{qD}, g_{qD} = \delta - h_{qD}, \tilde{h}_{qD} = \delta, \tilde{g}_{qD} = \delta)$ , où  $h_{qD} = \otimes_{i=1}^q h$ . Notons que  $g_{qD}$  est en général non-séparable. Le schéma de décomposition de la MS-VST reste le même qu'en (39), et le résultat asymptotique au dessus reste vrai. Le complexité pour le pré-calcul de  $b^{(j)}$ ,  $c^{(j)}$ ,  $\tau_k^{(j)}$  et la variance stabilisée en (43) reste la même que dans le cas 1D.

**MS-VST + UWT standard** Dans cette section, nous montrons comment la MS-VST peut être utilisée pour stabiliser les coefficients d'ondelettes d'une UWT séparable standard. De façon similaire à (39), on applique la VST sur les coefficients d'approximation  $(a_j)_j$ , ce qui mène au schéma suivant (voir aussi le diagramme de blocs de la Fig. 5.7(b)) :

$$\text{UWT} \begin{cases} a_j = \bar{h}^{\uparrow j-1} \star a_{j-1} \\ d_j = \bar{g}^{\uparrow j-1} \star a_{j-1} \end{cases} \implies \begin{matrix} \text{MS-VST} \\ + \\ \text{UWT} \end{matrix} \begin{cases} a_j = \bar{h}^{\uparrow j-1} \star a_{j-1} \\ d_j = \bar{g}^{\uparrow j-1} \star T_j(a_{j-1}) \end{cases} \quad (44)$$

où  $T_j(a_j) = b^{(j)}\text{sgn}(a_j + c^{(j)})\sqrt{|a_j + c^{(j)}|}$ , et  $c^{(j)}$  est défini comme en (41).

### Distribution asymptotique des coefficients de détails

**Théorème 2 Distribution asymptotique de  $d_j$**  Posons  $b^{(j)} := 2\sqrt{|\tau_1^{(j)}|/\tau_2^{(j)}}$ , si  $\lambda$  est constant sur le support du filtre  $(\bar{g}^{\uparrow j-1} \star h^{(j-1)})[k - \cdot]$ , alors  $d_j[k] \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} \mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$ ,

où

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{\tau_2^{(j-1)}} \sum_{m,n} \bar{g}^{\uparrow j-1}[m]\bar{g}^{\uparrow j-1}[n] \sum_k h^{(j-1)}[k]h^{(j-1)}[k+m-n] \quad (45)$$

Parallèlement au Théorème 1, le Théorème 2 (preuve dans [72]) montre la normalité asymptotique des coefficients de détails issus des parties localement homogènes du signal. Ici, les valeurs de  $b^{(j)}$ ,  $c^{(j)}$ ,  $\tau_k^{(j)}$  et  $\sigma_j$  peuvent toutes être pré-calculées une fois que  $(h, g)$  a été choisie.

### Extension au cas multi-dimensionnel

**Détection dans le domaine des ondelettes par test d'hypothèses** Notre détection dans le domaine des ondelettes est formulée par des tests d'hypothèses, c'est à dire tester l'hypothèse nulle  $H_0 : d_j[k]$  est non-significatif contre l'hypothèse  $H_1 : d_j[k]$  est significatif. Les coefficients d'ondelettes non-significatifs sont ceux qui sont calculés sur les parties localement homogènes du signal. En effet, s'il n'y avait pas de bruit, ces coefficients issus de schéma de la UWT classique vaudraient zéro, comme toute ondelette a une moyenne nulle. Grace aux théorèmes 1 et 2, la distribution des  $d_j[k]$  stabilisés sous l'hypothèse nulle  $H_0$  est maintenant connue (Gaussienne). Par conséquent, selon le taux d'erreur statistique prévu pour être contrôlé, les tests individuels et les tests multiples sont tous applicables.

**Reconstruction itérative** A la suite de l'étape de détection, nous devons inverser les schémas de MS-VST pour reconstruire l'estimée. Pour le cas de l'UWT standard, la procédure de reconstruction directe est indisponible car l'opérateur de convolution (par  $\bar{g}^{\uparrow j-1}$ ) et l'opérateur VST  $T_{j-1}$  ne commutent pas dans (45). Pour le cas IUWT, même si l'inversion directe de la MS-VST est possible, elle peut ne pas garantir une reconstruction positive, comme l'intensité de Poisson est toujours non-négative. Une projection de positivité peut être appliquée sur l'inverse, mais des structures importantes peuvent perdre dans l'estimée. Par conséquent, on propose de reformuler la reconstruction comme un problème d'optimisation convexe et de le résoudre de façon itérative.

On définit d'abord le support de multirésolution [63]  $\mathcal{M}$ , qui est déterminé par le jeu des coefficients significatifs détectés :

$$\mathcal{M} := \{(j, k) \mid \text{si } d_j[k] \text{ est significatif}\} \quad (46)$$

L'estimation est ensuite formulée comme un problème de minimisation sous contraintes en termes de coefficients d'ondelettes  $\mathbf{d}$  :

$$\min_{\mathbf{d} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{d}), J(\mathbf{d}) := \|\mathbf{d}\|_1 \quad (47)$$

où  $\mathcal{C} := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S}_1 := \{\mathbf{d} \mid d_j[k] = (\mathcal{W}\mathbf{X})_j[k], (j, k) \in \mathcal{M}\}$ ,  $\mathcal{S}_2 := \{\mathbf{d} \mid \mathcal{R}\mathbf{d} \geq 0\}$

où  $\mathcal{W}$  représente l'opérateur de transformée en ondelettes, et  $\mathcal{R}$  son (opérateur de synthèse) inverse à gauche (faiblement généralisé). On peut voir que nous cherchons la solution la plus parcimonieuse en minimisant l'objectif  $\mathcal{L}^1$  à l'intérieur de l'ensemble  $\mathcal{C} := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_1$  requiert que les éléments de  $\mathbf{d}$  préservent les coefficients d'intérêt ; l'ensemble  $\mathcal{S}_2$  assure que l'estimée reconstruite est à valeurs positives.

(47) est un problème d'optimisation convexe qui peut être résolu par Programmation Linéaire (LP) en utilisant des méthodes de point intérieur. Cependant, la complexité de calcul de la LP augmente de façon dramatique avec la taille du problème. En dessous,

on propose une alternative beaucoup plus rapide basée sur la Hybrid Steepest Descent (HSD) [71]. On établit d'abord le théorème suivant (preuve dans [72]).

**Théorème 3** Soit  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^L$ . Définissons le problème d'optimisation suivant ( $\epsilon \geq 0$ ) :

$$\min_{\mathbf{d} \in \mathcal{C}_B} J_\epsilon(\mathbf{d}), \quad J_\epsilon(\mathbf{d}) := \sum_{i=1}^L \sqrt{d[i]^2 + \epsilon} \quad (48)$$

$$\text{où } \mathcal{C}_B := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3, \quad \mathcal{S}_3 := \{\mathbf{d} \mid \|\mathbf{d}\|_2 \leq B, B \geq \|\mathcal{W}\mathbf{X}\|_1\}$$

Définissons le schéma d'itération HSD [71] ( $k \geq 0$ ) :

$$\mathbf{d}_\epsilon^{(k+1)} := T_{\mathcal{C}_B} \mathbf{d}_\epsilon^{(k)} - \beta_{k+1} \nabla J_\epsilon(T_{\mathcal{C}_B} \mathbf{d}_\epsilon^{(k)}) \quad (49)$$

où  $\nabla J_\epsilon$  est le gradient de  $J_\epsilon$ , et  $T_{\mathcal{C}_B} := P_{\mathcal{S}_3} \circ P_{\mathcal{S}_2} \circ Q_{\mathcal{S}_2}$ ,

$$P_{\mathcal{S}_3} \mathbf{d} := \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|_2} \cdot \min(\|\mathbf{d}\|_2, B); \quad (P_{\mathcal{S}_3} \mathbf{d})_j[k] := \begin{cases} (\mathcal{W}\mathbf{X})_j[k] & (j, k) \text{ dans } \mathcal{M} \\ \mathbf{d}_j[k] & \text{sinon} \end{cases}; \quad (50)$$

$$Q_{\mathcal{S}_2} \mathbf{d} := \mathcal{W}P_+ \mathcal{R} \mathbf{d}$$

où  $P_+$  représente la projection de l'orthant non-négatif. La séquence d'étapes satisfait :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = 0, \quad \sum_{k \geq 1} \beta_k = +\infty \text{ et } \sum_{k \geq 1} |\beta_k - \beta_{k+1}| < +\infty \quad (51)$$

Supposons que dans (2)-(4) ci-dessous  $\mathcal{W}$  représente une décomposition en frame étroite et  $\mathcal{R}$  son opérateur pseudo-inverse. Alors on a :

1. Le jeu de solutions de (47) est le même que celui de (48) avec  $\epsilon = 0$  ;
2.  $T_{\mathcal{C}_B}$  est non-expansive, et son jeu de points fixes est  $\text{Fix}(T_{\mathcal{C}_B}) = \mathcal{C}_B \neq \emptyset$  ;
3.  $\forall \epsilon > 0$ , avec n'importe quel  $\mathbf{d}_\epsilon^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{d}_\epsilon^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbf{d}_\epsilon^*$ , où  $\mathbf{d}_\epsilon^*$  est la solution unique de (48) ;
4. Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , la séquence  $(\mathbf{d}_\epsilon^*)_{\epsilon > 0}$  est bornée. Par conséquent, elle a au moins un point limite ;
5. Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , tout point limite de la séquence  $(\mathbf{d}_\epsilon^*)_{\epsilon > 0}$  est une solution de (47).

Le théorème 3 implique qu'en pratique, au lieu de résoudre directement (47), on peut résoudre sa version lissée (48) en appliquant (49) avec un petit  $\epsilon$ . Dans des problèmes réels,  $T_{\mathcal{C}_B}$  est simplifié en  $T_{\mathcal{C}} := P_{\mathcal{S}_1} \circ Q_{\mathcal{S}_2}$ . En effet, comme nous traitons toujours des données de dimension finie avec des valeurs finies, la valeur exacte de  $B$  n'est pas importante, et il peut être considéré comme étant suffisamment grand pour que la contrainte  $\mathcal{S}_3$  soit toujours satisfaite. On peut également signaler que même si le Théorème 3 suppose une décomposition sur une frame étroite et une reconstruction par pseudo-inverse, il a été observé que les itérations (49) s'appliquaient également aux décompositions sur des frames générales et aux inverses, et marchaient très bien avec  $\epsilon = 0$  (voir résultats en section 5.3.2.6). Ci-dessous, (52) réécrit (49) avec  $\epsilon = 0$ .

$$\mathbf{d}^{(k+1)} := T_{\mathcal{C}} \mathbf{d}^{(k)} - \beta_{(k+1)} \nabla J(T_{\mathcal{C}} \mathbf{d}^{(k)}) \quad \text{où } \nabla J(\mathbf{d}) = \text{sgn}(\mathbf{d}) \quad (52)$$

## 13 Une représentation multi-échelle sur la sphère : la Transformée Stabilisatrice de Variance Multi-Echelle sur la Sphère (MS-VSTS)

La MS-VSTS [54] est l'extension sur la sphère de la MS-VST. Elle consiste à combiner une VST en racine carré avec une transformée multi-échelles sur la sphère.

### 13.1 MS-VSTS + IUWT

Cette section décrit la transformée MS-VSTS + IUWT, qui est une combinaison de la VST en racine carrée avec la Transformée en Ondelettes Isotrope non-décimée sur la Sphère (IUWT). Le schéma itératif est :

$$\begin{aligned} \text{IUWT} \begin{cases} a_j(\theta, \varphi) &= (h_{j-1} * a_{j-1})(\theta, \varphi) \\ d_j(\theta, \varphi) &= a_{j-1}(\theta, \varphi) - a_j(\theta, \varphi) \end{cases} \\ \implies \text{MS-VSTS+IUWT} \begin{cases} a_j(\theta, \varphi) &= (h_{j-1} * a_{j-1})(\theta, \varphi) \\ d_j(\theta, \varphi) &= (T_{j-1}(a_{j-1}) - T_j(a_j))(\theta, \varphi) \end{cases} \end{aligned} \quad (53)$$

Dans l'équation (53), le filtrage sur  $a_{j-1}$  peut être réécrit comme un filtrage sur  $a_0 = \mathbf{Y}$ , c'est à dire  $a_j = h^{(j)} * a_0$ , où  $h^{(j)} = h_{j-1} * \dots * h_1 * h_0$  pour  $j \geq 1$  et  $h^{(0)} = \delta$ , où  $\delta$  est l'impulsion de Dirac ( $\delta = 1$  sur un seul pixel et 0 partout ailleurs).  $T_j$  est l'opérateur de VST à l'échelle  $j$  :

$$T_j(a_j) = b^{(j)} \text{sign}(a_j + c^{(j)}) \sqrt{|a_j + c^{(j)}|}. \quad (54)$$

Posons  $\tau_k^{(j)} := \sum_i (h^{(j)}[i])^k$ . Dans [72], il est démontré que, pour avoir une taux de convergence optimal pour la VST, la constante  $c^{(j)}$  associée à  $h^{(j)}$  doit avoir pour valeur :

$$c^{(j)} := \frac{7\tau_2^{(j)}}{8\tau_1^{(j)}} - \frac{\tau_3^{(j)}}{2\tau_2^{(j)}}. \quad (55)$$

La transformée MS-VSTS + IUWT peut être inversée directement de la façon suivante :

$$a_0(\theta, \varphi) = T_0^{-1} \left[ T_J(a_J) + \sum_{j=1}^J d_j \right] (\theta, \varphi). \quad (56)$$

En posant  $b^{(j)} := \text{sgn}(\tau_1^{(j)}) / \sqrt{|\tau_1^{(j)}|}$ , si l'intensité poissonienne  $\lambda$  est constante sur l'ensemble du support de  $h^{(j)}$ , alors on a [72] :

$$d_j(\theta, \varphi) \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{\tau_2^{(j-1)}}{4\tau_1^{(j-1)^2}} + \frac{\tau_2^{(j)}}{4\tau_1^{(j)^2}} - \frac{\langle h^{(j-1)}, h^{(j)} \rangle}{2\tau_1^{(j-1)}\tau_1^{(j)}} \right), \quad (57)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  correspond au produit interne.

Cela signifie que les coefficients de détail calculés sur des parties localement homogènes du signal suivent asymptotiquement une loi gaussienne centrée de variance indépendante de l'intensité, ne dépendant que du filtre  $h$  et de l'échelle. Par conséquent, les variances stabilisées et les constantes  $b^{(j)}, c^{(j)}, \tau_k^{(j)}$  peuvent être pré-calculées.

Appelons  $\sigma_{(j)}^2$  la variance stabilisée à l'échelle  $j$  pour une partie localement homogène du signal :

$$\sigma_{(j)}^2 = \frac{\tau_2^{(j-1)}}{4\tau_1^{(j-1)^2}} + \frac{\tau_2^{(j)}}{4\tau_1^{(j)^2}} - \frac{\langle h^{(j-1)}, h^{(j)} \rangle}{2\tau_1^{(j-1)}\tau_1^{(j)}}. \quad (58)$$

Pour calculer les  $\sigma_{(j)}, b^{(j)}, c^{(j)}, \tau_k^{(j)}$ , il suffit donc de connaître les filtres  $h^{(j)}$ . On calcule les  $h^{(j)}$  à l'aide de la formule  $a_j = h^{(j)} * a_0$ , en appliquant la transformée IUWT sur une impulsion de Dirac  $a_0 = \delta$ . Les  $h^{(j)}$  sont alors les coefficients d'échelle de la transformée en ondelettes. Les  $\sigma_{(j)}$  ont été pré-calculés pour une transformée IUWT à 6 échelles (Tableau 1).

Echelle $j$	Valeur de $\sigma_j$
1	0.484704
2	0.0552595
3	0.0236458
4	0.0114056
5	0.00567026

TABLE 1 – Valeurs pré-calculées des variances  $\sigma_j$  des coefficients de détail des parties localement homogènes du signal à chaque échelle  $j$  pour une transformée IUWT à 6 échelles.

On a simulé des données poissonniennes stationnaires de différentes intensités  $\lambda$ , effectué la transformée MS-VSTS + IUWT sur chaque image et observé la variation de la valeur normalisée de  $\sigma_{(j)}$  ( $(\sigma_{(j)})_{\text{expérience}}/(\sigma_{(j)})_{\text{théorique}}$ ) en fonction de  $\lambda$  pour chaque échelle  $j$  (Fig. 20)/. On constate que les coefficients d'ondelettes sont stabilisés lorsque  $\lambda \gtrsim 0.1$ , à l'exception de la première échelle d'ondelettes, qui est principalement constituée de bruit. Sur la Fig. 21, on compare les résultats de la MS-VSTS avec la méthode de débruitage par transformée d'Anscombe + seuillage d'ondelettes, sur des sources d'intensité variable. On constate que le MS-VSTS fonctionne bien sur des sources de faible intensité, tandis que Anscombe ne fonctionne plus quand l'intensité est trop faible.

## 13.2 MS-VSTS + Curvelets

Comme la première étape de l'algorithme est une transformée IUWT, on peut stabiliser chaque niveau de résolution comme dans l'équation (53). On applique ensuite la transformée en ridgelets locale sur chaque bande d'ondelettes stabilisée.

L'obtention de la variance asymptotique des coefficients de curvelets stabilisés pour des données poissonniennes stationnaires n'est pas aussi directe que pour la transformée MS-VSTS + IUWT. Nous les avons obtenus à l'aide de données poissonniennes simulées d'intensité stationnaire  $\lambda$ . Après avoir vérifié que la variance dans les bandes de curvelets est stabilisée lorsque le niveau d'intensité augmente (ce qui signifie que la stabilisation

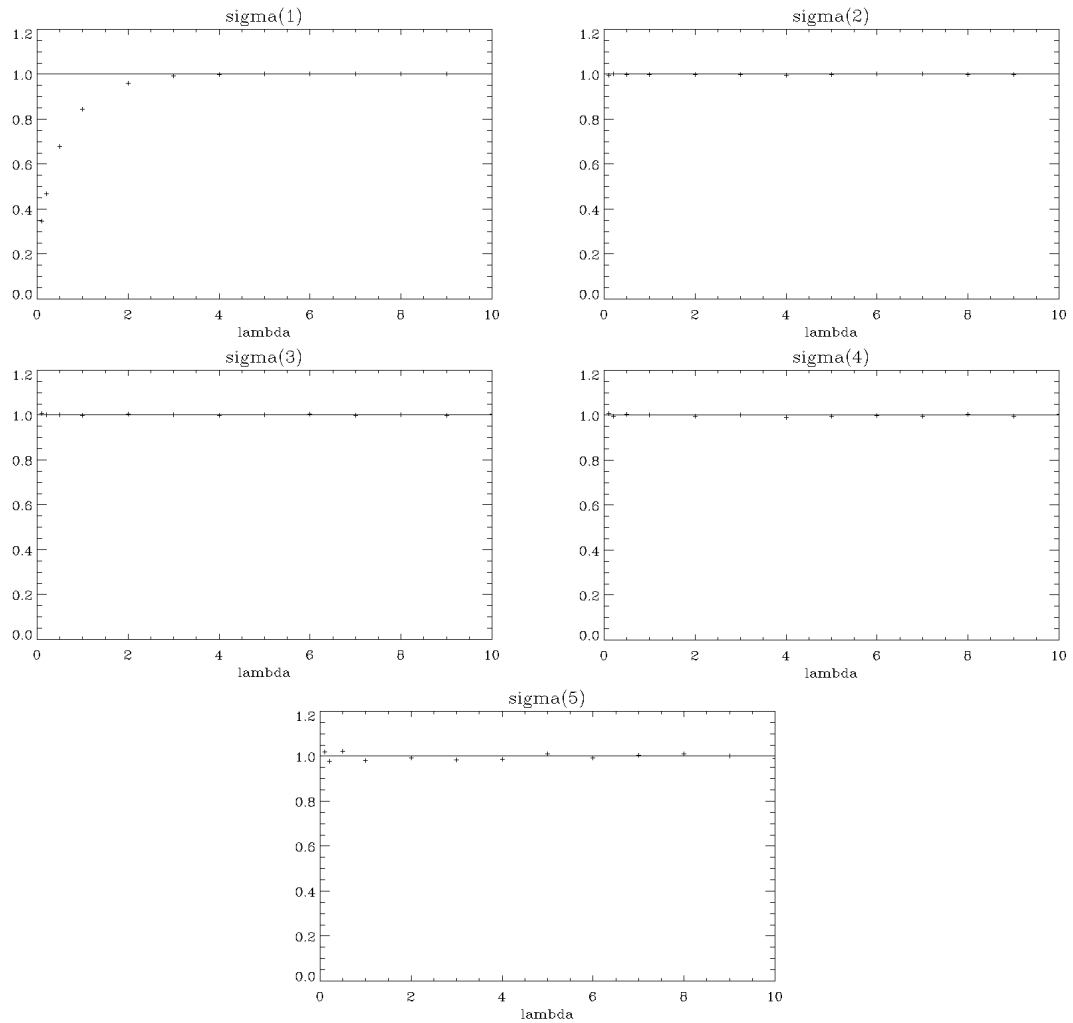


FIGURE 20 – Valeur normalisée  $((\sigma_j)_{\text{expérience}}/(\sigma_j)_{\text{théorique}})$  de la variance stabilisée à chaque échelle  $j$  en fonction de  $\lambda$ .

fonctionne bien), on a mesuré l'écart-type  $\sigma_{j,l}$  pour chaque échelle d'ondelettes  $j$  et chaque bande de ridgelets  $l$  (Tableau 2).

$j$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
1	1.74550	0.348175		
2	0.230621	0.248233	0.196981	
3	0.0548140	0.0989918	0.219056	
4	0.0212912	0.0417454	0.0875663	0.20375
5	0.00989616	0.0158273	0.0352021	0.163248

TABLE 2 – Valeurs asymptotiques des variances  $\sigma_{j,k}$  des coefficients de curvelets calculées sur des parties localement homogènes du signal à chaque échelle d'ondelettes  $j$  et chaque bande de curvelets  $l$  pour une IUWT à 6 échelles.

## 14 Application à la suppression du bruit de Poisson

### 14.1 MS-VSTS + IUWT

Sous l'hypothèse d'une intensité poissonnienne homogène, les coefficients d'ondelettes stabilisés  $d_j$  se comportent comme des réalisations d'une variable aléatoire centrée d'écart-type  $\sigma_{(j)}$  indépendant de l'intensité. On peut détecter des coefficients significatifs à l'aide de tests d'hypothèses binaires de la même manière que dans un problème de débruitage gaussien.

Sous l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0$  selon laquelle l'intensité poissonnienne est homogène, la distribution des coefficients d'ondelette stabilisés  $d_j[k]$  à l'échelle  $j$  et à l'échelle de localisation  $k$  s'écrit :

$$p_j[k] = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \int_{|d_j[k]|}^{+\infty} \exp(-x^2/2\sigma_j^2) dx. \quad (59)$$

Par conséquent, pour accepter ou rejeter  $\mathcal{H}_0$ , on compare chaque  $|d_j[k]|$  avec un seuil critique  $\kappa\sigma_j$ ,  $\kappa = 3, 4$  ou  $5$  correspondant au niveau de signifiécance. Cela revient à décider que :

- si  $|d_j[k]| \geq \kappa\sigma_j$ ,  $d_j[k]$  est significatif.
- si  $|d_j[k]| < \kappa\sigma_j$ ,  $d_j[k]$  n'est pas significatif.

Ensuite, nous devons inverser la transformée MS-VSTS + IUWT pour reconstruire l'estimée. Cependant, même si la reconstruction directe est possible (Eq. (56)), elle ne peut pas garantir la positivité de l'estimée finale, alors que l'intensité d'une variable aléatoire poissonnienne est toujours positive. Une projection de positivité peut être appliquée, mais des structures importantes risquent d'être perdues. Pour résoudre ce problème, on reformule la reconstruction comme un problème d'optimisation convexe que l'on résout de manière itérative à l'aide d'un algorithme basé sur la Hybrid Steepest Descent (HSD) [71].

On définit le support de multi-résolution  $\mathcal{M}$ , qui est déterminé par l'ensemble des coefficients significatifs obtenus par le test d'hypothèses :

$$\mathcal{M} := \{(j, k) \mid d_j[k] \text{ est déclaré significatif}\}. \quad (60)$$

On formule le problème de reconstruction comme un problème de minimisation convexe sous contrainte :

$$\text{Arg min}_{\mathbf{X}} \|\Phi^T \mathbf{X}\|_1, \text{ s.t. } \begin{cases} \mathbf{X} \geq 0, \\ \forall (j, k) \in \mathcal{M}, (\Phi^T \mathbf{X})_j[k] = (\Phi^T \mathbf{Y})_j[k], \end{cases} \quad (61)$$

où  $\Phi$  désigne l'opérateur de synthèse de la IUWT.

Ce problème est résolu à l'aide d'un algorithme itératif : l'image est initialisée par  $\mathbf{X}^{(0)} = 0$ , et le schéma itératif est, pour  $n = 0$  à  $N_{\max} - 1$  :

$$\tilde{\mathbf{X}} = P_+[\mathbf{X}^{(n)} + \Phi P_{\mathcal{M}} \Phi^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}^{(n)})] \quad (62)$$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \Phi \text{ST}_{\lambda_n}[\Phi^T \tilde{\mathbf{X}}] \quad (63)$$



où  $P_+$  désigne la projection de positivité, et  $P_{\mathcal{M}}$  désigne la projection sur le support de multi-résolution  $\mathcal{M}$  :

$$P_{\mathcal{M}}d_j[k] = \begin{cases} d_j[k] & \text{si } (j, k) \in \mathcal{M}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (64)$$

et  $\text{ST}_{\lambda_n}$  le seuillage doux de seuil  $\lambda_n$  :

$$\text{ST}_{\lambda_n}[d] = \begin{cases} \text{sign}(d)(|d| - \lambda_n) & \text{si } |d| \geq \lambda_n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (65)$$

---

**Algorithm 1** Débruitage MS-VSTS + IUWT
 

---

**Require:** données  $a_0 := \mathbf{Y}$ , nombre d'itérations  $N_{\max}$ , seuil  $\kappa$

***Détection***

- 1: **for**  $j = 1$  à  $J$  **do**
- 2:   Calculer  $a_j$  et  $d_j$  à l'aide de (53).
- 3:   Effectuer un seuillage dur sur  $|d_j[k]|$  de seuil  $\kappa\sigma_j$  et mettre à jour  $\mathcal{M}$ .
- 4: **end for**

***Estimation***

- 5: Initialiser  $\mathbf{X}^{(0)} = 0$ ,  $\lambda_0 = 1$ .
  - 6: **for**  $n = 0$  à  $N_{\max} - 1$  **do**
  - 7:    $\tilde{\mathbf{X}} = P_+[\mathbf{X}^{(n)} + \Phi P_{\mathcal{M}} \Phi^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}^{(n)})]$ .
  - 8:    $\mathbf{X}^{(n+1)} = \Phi \text{ST}_{\lambda_n}[\Phi^T \tilde{\mathbf{X}}]$ .
  - 9:    $\lambda_{n+1} = \frac{N_{\max} - (n+1)}{N_{\max} - 1}$ .
  - 10: **end for**
  - 11: Déduire l'estimée  $\hat{\Lambda} = \mathbf{X}^{(N_{\max})}$ .
- 

## 14.2 Adaptation du support de multi-résolution

Lorsque deux sources sont trop proches, la source la moins intense risque de ne pas être détectée à cause des coefficients d'ondelette négatifs de la source la plus intense. Pour éviter un tel problème, on peut mettre à jour le support de multi-résolution à chaque itération. L'idée est de retirer les sources qui ont été détectées et de réaliser une détection sur le résidu, de façon à détecter les sources qui auraient pu être ratées à la première détection.

A chaque itération  $n$ , on calcule la transformée MS-VSTS de  $\mathbf{X}^{(n)}$ . On note  $d_j^{(n)}[k]$  les coefficients stabilisés de  $\mathbf{X}^{(n)}$ . On effectue un seuillage dur sur  $(d_j[k] - d_j^{(n)}[k])$  avec les mêmes seuils qu'à l'étape de détection. Les coefficients significatifs détectés sont ajoutés au support de multi-résolution  $\mathcal{M}$ .

Les principales étapes de la méthode sont résumées dans l'Algorithme 2. En pratique, nous avons utilisé l'Algorithme 2 à la place de l'Algorithme 1 dans nos expériences.

## 14.3 MS-VSTS + Curvelets

Les coefficients non-significatifs sont mis à zéro à l'aide de tests d'hypothèses semblables au cas MS-VSTS + IUWT. A chaque échelle d'ondelette  $j$  et bande de ridgelet  $k$ ,

---

**Algorithm 2** Débruitage MS-VSTS + IUWT + Adaptation du support de multi-résolution

---

**Require:** données  $a_0 := \mathbf{Y}$ , nombre d'itérations  $N_{\max}$ , seuil  $\kappa$

**Détection**

- 1: **for**  $j = 1$  to  $J$  **do**
- 2:   Calculer  $a_j$  et  $d_j$  à l'aide de (53).
- 3:   Effectuer un seuillage dur sur  $|d_j[k]|$  de seuil  $\kappa\sigma_j$  et mettre à jour  $\mathcal{M}$ .
- 4: **end for**

**Estimation**

- 5: Initialiser  $\mathbf{X}^{(0)} = 0$ ,  $\lambda_0 = 1$ .
  - 6: **for**  $n = 0$  à  $N_{\max} - 1$  **do**
  - 7:    $\tilde{\mathbf{X}} = P_+[\mathbf{X}^{(n)} + \Phi P_{\mathcal{M}} \Phi^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}^{(n)})]$ .
  - 8:    $\mathbf{X}^{(n+1)} = \Phi \text{ST}_{\lambda_n}[\Phi^T \tilde{\mathbf{X}}]$ .
  - 9:   Calculer la MS-VSTS de  $\mathbf{X}^{(n)}$  pour obtenir les coefficients stabilisés  $d_j^{(n)}$ .
  - 10:   Effectuer un seuillage dur sur  $|d_j[k] - d_j^{(n)}[k]|$  et mettre à jour  $\mathcal{M}$ .
  - 11:    $\lambda_{n+1} = \frac{N_{\max} - (n+1)}{N_{\max} - 1}$ .
  - 12: **end for**
  - 13: Déduire l'estimée  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}^{(N_{\max})}$ .
- 

on effectue un seuillage dur sur les coefficients de curvelets de seuil  $\kappa\sigma_{j,k}$ ,  $\kappa = 3, 4$  ou  $5$ . Finalement, on effectue une reconstruction directe en inversant d'abord les transformée en ridgelets locales puis en inversant la transformée MS-VSTS + IUWT (Equation (56)). Une reconstruction itérative peut également être effectuée.

L'Algorithme 3 résume les principales étapes du débruitage à l'aide de la transformée MS-VSTS + Curvelets.

---

**Algorithm 3** Débruitage MS-VSTS + Curvelets

---

- 1: Appliquer la transformée MS-VST + IUWT à  $J$  échelles pour obtenir les sous-bandes d'ondelettes stabilisées  $d_j$ .
  - 2: Poser  $B_1 = B_{\min}$ .
  - 3: **for**  $j = 1$  à  $J$  **do**
  - 4:   Partitionner la sous-bande  $d_j$  en blocs de taille  $B_j$  et appliquer la transformée en ridgelets sur chaque bloc pour obtenir les coefficients de curvelets stabilisés.
  - 5:   **if**  $j$  modulo 2 = 1 **then**
  - 6:      $B_{j+1} = 2B_j$
  - 7:   **else**
  - 8:      $B_{j+1} = B_j$
  - 9:   **end if**
  - 10:   Tests d'hypothèses sur les coefficients de curvelets stabilisés.
  - 11: **end for**
  - 12: Inverser la transformée en ridgelets sur chaque bloc avant d'inverser la MS-VSTS + IUWT.
-

## 14.4 Résultats expérimentaux

La méthode MS-VSTS a été testée sur des données Fermi simulées. Les données simulées sont la somme d'un modèle de fond diffus galactique et de 1000 sources de rayonnement gamma ponctuelles de forme gaussienne, sur laquelle on génère un bruit poissonien. Nous avons basé notre modèle d'intensité du fond diffus galactique sur le modèle *gll\_iem\_v02* obtenu au Fermi Science Support Center [49]. Ce modèle est obtenu en réalisant un template fitting sur des cartes de photons Fermi. On a utilisé une PSF réaliste pour les sources, basée sur des simulations de Monte Carlo du LAT, d'angle approximatif  $0.8(E = 1\text{GeV})^{-0.8}$  degré. La position des 205 sources les plus brillantes correspond à la liste des sources du LAT à 3 mois [1]. La position des 795 sources restantes suit la distribution des sources du catalogue Fermi à 1 an [50] : chaque source simulée a été placée de façon aléatoire dans un intervalle de  $\Delta l = 5$  et  $\Delta b = 1$  autour d'une source provenant du catalogue de sources Fermi à 1 an. On a utilisé une exposition de  $3.10^{10} \text{s.com}^2$  correspondant approximativement à un an d'observations dans le domaine d'énergies autour de 1 GeV. La carte de photons simulée correspond à une bande en énergie comprise entre 150 MeV et 20 GeV.

La Fig. 22 compare les résultats du débruitage à l'aide de la méthode MS-VSTS + IUWT (Algorithme 2), MS-VSTS + curvelets (Algorithme 3), VST d'Anscombe + seuillage d'ondelettes sur une carte Fermi simulée. La Fig. 23 montre les résultats sur une seule face HEALPix. Comme prévu par la théorie, la méthode par transformée d'Anscombe donne de mauvais résultats car l'intensité est trop faible. La méthode MS-VSTS fonctionne beaucoup mieux. Pour cette application, les ondelettes sont plus performantes que les curvelets. ( $SNR_{\text{wavelets}} = 65.8\text{dB}$ ,  $SNR_{\text{curvelets}} = 37.3\text{dB}$ ,  $SNR(\text{dB}) = 20 \log(\sigma_{\text{signal}}/\sigma_{\text{noise}})$ ). Ce résultat était attendu car les images contiennent de nombreuses sources ponctuelles, en effet les ondelettes sont bien plus performantes que les curvelets pour représenter des objets isotropes.

# 15 Application à l'étude du fond diffus galactique : débruitage et inpainting

## 15.1 Méthode

Afin d'extraire l'émission galactique diffus des cartes de photons Fermi, nous voulons supprimer les sources ponctuelles des cartes Fermi. Comme notre algorithme de reconstruction itérative basé sur la HSD est très proche de l'algorithme MCA [59], l'idée est de masquer les sources les plus intenses et de modifier notre algorithme de façon à interpoler à l'intérieur des trous de la même manière que dans l'algorithme MCA-Inpainting [4]. Cet algorithme modifié peut être appelé algorithme MS-VSTS - Inpainting.

Le problème peut être reformulé comme un problème de minimisation convexe sous contrainte :

$$\text{Arg min}_{\mathbf{X}} \|\Phi^T \mathbf{X}\|_1, \text{ s.t. } \begin{cases} \mathbf{X} \geq 0, \\ \forall (j, k) \in \mathcal{M}, (\Phi^T \Pi \mathbf{X})_j[k] = (\Phi^T \mathbf{Y})_j[k], \end{cases} \quad (66)$$

où  $\Pi$  est un masque binaire (égal à 1 sur les données valides et 0 sur les données non-valides (sources ponctuelles à supprimer)).

Le schéma itératif de l'algorithme de reconstruction peut être adapté pour tenir compte d'un masque binaire, ce qui donne :

$$\tilde{\mathbf{X}} = P_+[\mathbf{X}^{(n)} + \Phi P_{\mathcal{M}} \Phi^T \Pi (\mathbf{Y} - \mathbf{X}^{(n)})], \quad (67)$$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \Phi \text{ST}_{\lambda_n}[\Phi \tilde{\mathbf{X}}], \quad (68)$$

---

**Algorithm 4** Débruitage + Inpainting MS-VST + IUWT
 

---

**Require:** données  $a_0 := \mathbf{Y}$ , masque  $\Pi$ , nombre d'itérations  $N_{\max}$ , seuil  $\kappa$ , dictionnaire  $\Phi'$ .

**Détection**

- 1: **for**  $j = 1$  to  $J$  **do**
- 2: Calculer  $a_j$  et  $d_j$  à l'aide de (53).
- 3: Effectuer un seuillage dur de  $|d_j[k]|$  de seuil  $\kappa\sigma_j$  et mettre à jour  $\mathcal{M}$ .
- 4: **end for**

**Estimation**

- 5: Initialiser  $\mathbf{X}^{(0)} = 0$ ,  $\lambda_0 = \lambda_{\max}$ .
  - 6: **for**  $n = 0$  à  $N_{\max} - 1$  **do**
  - 7:  $\tilde{\mathbf{X}} = P_+[\mathbf{X}^{(n)} + \Phi P_{\mathcal{M}} \Phi^T \Pi (\mathbf{Y} - \mathbf{X}^{(n)})]$ .
  - 8:  $\mathbf{X}^{(n+1)} = \Phi_{\lambda_n}^{\text{ST}}[\Phi^T \tilde{\mathbf{X}}]$ .
  - 9:  $\lambda_{n+1} = \lambda_{\max} (2^{\frac{N_{\max} - (n+1)}{N_{\max} - 1}} - 1)$
  - 10: **end for**
  - 11: Déduire l'estimée  $\hat{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{X}^{(N_{\max})}$ .
- 

## 15.2 Résultats expérimentaux

Nous avons appliqué la méthode sur des données Fermi simulées où nous avons masqué les sources les plus lumineuses.

Les résultats sont sur la Figure 24. La méthode MS-VSTS + IUWT + Inpainting (Algorithme 4) interpole très bien les données manquantes.

## 16 Application à la détection de sources : débruitage et extraction du fond diffus galactique

### 16.1 Méthode

Dans le cas des données Fermi, l'émission diffuse de rayonnements gamma de la Voie Lactée, du aux interactions entre le rayonnement cosmique et le milieu interstellaire (gaz et poussières) crée un fond diffus relativement intense. Nous devons extraire ce fond afin de détecter les sources ponctuelles. Cette émission interstellaire diffus peut être modélisée par une combinaison linéaire de différents templates (gaz et poussières,

inverse compton...). Nous pouvons utiliser un tel modèle de fond et incorporer une suppression du fond dans notre algorithme de débruitage.

Notons  $\mathbf{Y}$  les données,  $\mathbf{B}$  le fond que l'on cherche à extraire, et  $d_j^{(b)}[k]$  les coefficients de MS-VSTS de  $\mathbf{B}$  à l'échelle  $j$  et à la position  $k$ . On détermine le support de multi-résolution en comparant  $|d_j[k] - d_j^{(b)}[k]|$  avec  $\kappa\sigma_j$ .

On formule le problème de reconstruction comme un problème de minimisation convexe sous contrainte :

$$\text{Arg min}_{\mathbf{X}} \|\Phi^T \mathbf{X}\|_1, \text{ s.t. } \begin{cases} \mathbf{X} \geq 0, \\ \forall (j, k) \in \mathcal{M}, (\Phi^T \mathbf{X})_j[k] = (\Phi^T (\mathbf{Y} - \mathbf{B}))_j[k], \end{cases} \quad (69)$$

Le schéma itératif devient :

$$\tilde{\mathbf{X}} = P_+[\mathbf{X}^{(n)} + \Phi P_{\mathcal{M}} \Phi^T (\mathbf{Y} - \mathbf{B} - \mathbf{X}^{(n)})], \quad (70)$$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \Phi \text{ST}_{\lambda_n}[\Phi^T \tilde{\mathbf{X}}]. \quad (71)$$

L'algorithme est illustré par l'étude théorique de la Figure 25. On réalise un débruitage poissonien en séparant une source, en forme de Gaussienne d'écart-type égal à 0.01, d'un fon, constitué de la somme de deux gaussiennes d'écart-types respectifs 0.1 et 0.01.

---

#### Algorithm 5 MS-VSTS + IUWT Denoising + Background extraction

---

**Require:** données  $a_0 := \mathbf{Y}$ , modèle de fond  $B$ , nombre d'itérations  $N_{\max}$ , seuil  $\kappa$ .

##### Détection

- 1: **for**  $j = 1$  à  $J$  **do**
- 2:   Calculer  $a_j$  et  $d_j$  à l'aide de (53).
- 3:   Effectuer un seuillage dur de  $(d_j[k] - d_j^{(b)}[k])$  de seuil  $\kappa\sigma_j$  et mettre à jour  $\mathcal{M}$ .
- 4: **end for**

##### Estimation

- 5: Initialiser  $\mathbf{X}^{(0)} = 0$ ,  $\lambda_0 = 1$ .
  - 6: **for**  $n = 0$  à  $N_{\max} - 1$  **do**
  - 7:    $\tilde{\mathbf{X}} = P_+[\mathbf{X}^{(n)} + \Phi P_{\mathcal{M}} \Phi^T (\mathbf{Y} - \mathbf{B} - \mathbf{X}^{(n)})]$ .
  - 8:    $\mathbf{X}^{(n+1)} = \Phi \text{ST}_{\lambda_n}[\Phi^T \tilde{\mathbf{X}}]$ .
  - 9:    $\lambda_{n+1} = \frac{N_{\max} - (n+1)}{N_{\max} - 1}$ .
  - 10: **end for**
  - 11: Déduire l'estimée  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}^{(N_{\max})}$ .
- 

Comme l'Algorithme 1, l'Algorithme 5 peut être adapté de façon à adapter le support de multi-résolution à chaque itération.

## 16.2 Résultats expérimentaux

Nous avons appliqué l'Algorithme 5 sur des données Fermi simulées. Pour tester l'efficacité de notre méthode, nous détectons les sources à l'aide de la routine SExtractor, et nous comparons les sources détectées avec le catalogue de sources théoriques afin d'obtenir le nombre de vraies et de fausses détections. Les résultats sont visibles sur les Figures 26 and 27. SExtractor parvient à détecter 593 sources sur la carte Fermi simulée restaurée à l'aide de l'Algorithme 5 parmi les 1000 sources de la simulation.

Ecart-type de l'erreur de modèle	% de vraies détections	% de fausses détections	RSB (dB)
0	59.3%	7.1%	23.8
10	57.0%	11.0%	23.2
20	53.2%	18.9%	22.6
30	49.1%	43.5%	21.7
40	42.3%	44.3%	21.0
50	34.9%	39.0%	20.3
60	30.3%	37.5%	19.5
70	25.0%	34.6%	18.9
80	23.0%	28.5%	18.7
90	23.6%	27.1%	18.3

TABLE 3 – Pourcentage de vraies et fausses détections en fonction de l'écart-type du bruit gaussien sur le modèle de fond. On ajoute un bruit gaussien sur le modèle de fond afin de simuler une erreur de modèle, et on applique l'algorithme MS-VSTS + IUWT avec extraction du fond.

### 16.3 Sensibilité aux erreurs de modèle

Comme il est difficile de modéliser le fond diffus galactique avec précision, il est important d'étudier la sensibilité de la méthode vis à vis des erreurs de modèle. On ajoute un bruit gaussien stationnaire au modèle de fons, on réalise le débruitage par MS-VSTS + IUWT avec un seuil de détection de  $3\sigma_j$  avec extraction du modèle de fond bruité sur les données Fermi simulées, et on étudie le nombre de vraies et fausses détections en fonction de l'écart-type de la perturbation gaussienne sur le modèle. Le Tableau 3 montre que, quand l'écart-type du bruit sur le modèle de fond devient du même ordre de grandeur que la moyenne de la distribution d'intensité de Poisson ( $\lambda_{\text{moyen}} = 68.764$ ), le nombre de fausses détections augmente, le nombre de vraies détections diminue et le rapport signal à bruit augmente. Tant que la perturbation n'est pas trop importante (écart-type  $< 10$ ), l'effet de l'erreur de modèle reste faible.

## 17 Extension aux données multicanales

### 17.1 Cas Gaussien

#### 17.1.1 Transformée en ondelettes 2D-1D sur la sphère

On propose une méthode de débruitage pour les données 2D-1D sur la sphère inspirée de la méthode 2D-1D sur le plan proposée dans [60], où les deux premières dimensions sont spatiales (longitude et latitude) et la troisième est soit le temps soit l'énergie. On doit analyser les données avec une transformée en ondelettes non-isotrope, où l'échelle de temps ou d'énergie n'est pas connectée à l'échelle spatiale. Une fonction ondelette idéale serait définie par :

$$\psi(\theta, \varphi, t) = \psi^{(\theta, \varphi)}(\theta, \varphi)\psi^{(t)}(t) \quad (72)$$

où  $\psi^{(\theta, \varphi)}$  est l'ondelette spatiale et  $\psi^{(t)}$  est l'ondelette temporelle (ou énergétique). Dans la suite, on considérera uniquement des échelles spatiales isotropes ou dyadiques, et

on note  $j_1$  l'indice d'échelle spatiale (i.e. l'échelle  $2^{j_1}$ ),  $j_2$  l'indice d'échelle temporelle. Ensuite, on définit les fonctions ondelettes spatiales et temporelles (ou énergétiques)  $\psi_{j_1}^{(\theta, \varphi)}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2^{j_1}} \psi^{(\theta, \varphi)}(\frac{\theta}{2^{j_1}}, \frac{\varphi}{2^{j_1}})$  and  $\psi_{j_1}^{(t)} = \frac{1}{2^{j_2}} \psi^{(t)}(\frac{t}{2^{j_2}})$ .

Ensuite, on dérive les coefficients d'ondelettes  $w_{j_1, j_2}[k_\theta, k_\varphi, k_t]$  à partir d'un jeu de données  $D$  ( $k_\theta$  et  $k_\varphi$  sont les indices spatiaux et  $k_z$  l'indice temporel (ou énergétique). En coordonnées continues, cela mène à la formule

$$\begin{aligned} w_{j_1, j_2}[k_\theta, k_\varphi, k_t] &= \frac{1}{2^{j_1}} \frac{1}{\sqrt{2^{j_2}}} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} D(\theta, \varphi, t) \times \psi^{(\theta, \varphi)}\left(\frac{\theta - k_\theta}{2^{j_1}}, \frac{\varphi - k_\varphi}{2^{j_1}}\right) \psi^{(t)}\left(\frac{t - k_t}{2^{j_2}}\right) dx dy dz \\ &= D * \bar{\psi}_{j_1}^{(\theta, \varphi)} * \bar{\psi}_{j_2}^{(t)}(\theta, \varphi, t) \end{aligned} \quad (73)$$

où  $*$  est l'opérateur de convolution et  $\bar{\psi}(t) = \psi(-t)$ .

### 17.1.2 Transformée en ondelettes 2D-1D sur la sphère non-décimée rapide et reconstruction

Afin d'avoir un algorithme rapide pour des données discrètes, on utilise des fonctions ondelettes associées à des bancs de filtres. Ainsi, notre décomposition en ondelettes consiste à appliquer tout d'abord une transformée IUWT sur la sphère pour chaque frame  $k_z$ . En utilisant la transformée IUWT sphérique, on a la formule de reconstruction suivante :

$$D[k_\theta, k_\varphi, k_t] = a_{J_1}[k_\theta, k_\varphi] + \sum_{j_1=1}^{J_1} w_{j_1}[k_\theta, k_\varphi, k_t], \forall k_t \quad (74)$$

où  $J_1$  est le nombre d'échelles spatiales. Pour avoir des notations plus légères, on remplace les deux indices spatiaux par un seul indice  $k_r$  qui correspond à l'indice pixel :

$$D[k_r, k_t] = a_{J_1}[k_r] + \sum_{j_1=1}^{J_1} w_{j_1}[k_r, k_t], \forall k_t \quad (75)$$

Ensuite, pour chaque indice spatial  $k_r$  et chaque échelle d'ondelette 2D  $j_1$ , on applique une transformation en ondelettes 1D le long de  $t$  sur les coefficients d'ondelettes spatiaux  $w_{j_1}[k_r, k_t]$  de sorte que :

$$w_{j_1}[k_r, k_t] = w_{j_1, J_2}[k_r, k_t] + \sum_{j_2=1}^{J_2} w_{j_1, j_2}[k_r, k_t], \forall (k_r, k_t) \quad (76)$$

où  $j_2$  est le nombre d'échelles le long de  $t$ . Le même processus est également appliqué le long de l'échelle spatiale  $a_{J_1}[k_r, k_t]$  et nous avons :

$$a_{J_1}[k_r, k_t] = a_{J_1, J_2}[k_r, k_t] + \sum_{j_2=1}^{J_2} w_{j_1, j_2}[k_r, k_t], \forall (k_r, k_t) \quad (77)$$

Ensuite, nous avons la représentation en ondelettes sphérique non-décimée 2D-1D pour les données  $D$  :

$$D[k_r, k_t] = a_{J_1, J_2}[k_r, k_t] + \sum_{j_1=1}^{J_1} w_{j_1, J_2}[k_r, k_t] + \sum_{j_2=1}^{J_2} w_{j_1, j_2}[k_r, k_t] + \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} w_{j_1, j_2}[k_r, k_t] \quad (78)$$

A partir de cette expression, on distingue quatre types de coefficients :

- Coefficients Détail-Détail ( $j_1 \leq J_1$  and  $j_2 \leq J_2$ ) :

$$w_{j_1, j_2}[k_r, k_t] = (\delta - \bar{h}_{1D}) \star (\bar{h}_{1D}^{(j_2-1)} \star a_{j_1-1}[k_r, \cdot]) - h_{1D}^{(j_2-1)} \star a_{j_1}[k_r, \cdot] \quad (79)$$

- Coefficients Approximation-Détail ( $j_1 = J_1$  and  $j_2 \leq J_2$ ) :

$$w_{J_1, j_2}[k_r, k_t] = h_{1D}^{(j_2-1)} \star a_{J_1}[k_r, \cdot] - h_{1D}^{(j_2)} \star a_{J_1}[k_r, \cdot] \quad (80)$$

- Coefficients Détail-Approximation ( $j_1 \leq J_1$  and  $j_2 = J_2$ ) :

$$w_{j_1, J_2}[k_r, k_t] = h_{1D}^{(J_2)} \star a_{j_1-1}[k_r, \cdot] - h_{1D}^{(J_2)} \star a_{j_1}[k_r, \cdot] \quad (81)$$

- Coefficients Approximation-Approximation ( $j_1 = J_1$  and  $j_2 = J_2$ ) :

$$a_{J_1, J_2}[k_r, k_t] = h_{1D}^{(J_2)} \star a_{J_1}[k_r, \cdot] \quad (82)$$

### 17.1.3 Débruitage Gaussien multicanal

Comme la transformée en ondelettes sphérique 2D-1D non-décimée décrite précédemment est totalement linéaire, un bruit Gaussien reste Gaussien après transformation. Par conséquent, toutes les stratégies de seuillage qui ont été développées pour le débruitage Gaussien sont toujours valides pour la transformée en ondelettes sphérique 2D-1D. En notant TH l'opérateur de seuillage, le cube débruité dans le cas d'un bruit blanc Gaussien additif est obtenu par :

$$\tilde{D}[k_r, k_t] = a_{J_1, J_2}[k_r, k_t] + \sum_{j_1=1}^{J_1} \text{TH}(w_{j_1, J_2}[k_r, k_t]) + \sum_{j_2=1}^{J_2} \text{TH}(w_{J_1, j_2}[k_r, k_t]) + \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \text{TH}(w_{j_1, j_2}[k_r, k_t]) \quad (83)$$

Un choix typique pour l'opérateur de seuillage est le seuillage dur, c'est à dire :

$$\text{TH}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| < \tau \\ x & \text{if } |x| \geq \tau \end{cases} \quad (84)$$

Le seuil  $\tau$  est généralement choisi entre 3 et 5 fois l'écart type du bruit.

## 17.2 Cas Poissonien

### 17.2.1 MS-VSTS 2D-1D

Pour réaliser un débruitage Poissonien, on doit combiner la MS-VST avec une transformée en ondelettes sphérique 2D-1D non-décimée. De nouveau, on distingue quatre type de coefficients qui prennent les formes suivantes :

- Coefficients Détail-Détail ( $j_1 \leq J_1$  and  $j_2 \leq J_2$ ) :

$$w_{j_1, j_2}[k_r, k_t] = (\delta - \bar{h}_{1D}) \star (T_{j_1-1, j_2-1}[\bar{h}_{1D}^{(j_2-1)} \star a_{j_1-1}[k_r, \cdot]]) - T_{j_1, j_2-1}[h_{1D}^{(j_2-1)} \star a_{j_1}[k_r, \cdot]] \quad (85)$$

- Coefficients Approximation-Détail ( $j_1 = J_1$  and  $j_2 \leq J_2$ ) :

$$w_{J_1, j_2}[k_r, k_t] = T_{J_1, j_2-1}[h_{1D}^{(j_2-1)} \star a_{J_1}[k_r, \cdot]] - T_{J_1, j_2}[h_{1D}^{(j_2)} \star a_{J_1}[k_r, \cdot]] \quad (86)$$



- Coefficients Détail-Approximation ( $j_1 \leq J_1$  and  $j_2 = J_2$ ) :

$$w_{j_1, J_2}[k_r, k_t] = T_{j_1-1, J_2}[h_{1D}^{(J_2)} \star a_{j_1-1}[k_r, \cdot]] - T_{j_1, J_2}[h_{1D}^{(J_2)} \star a_{j_1}[k_r, \cdot]] \quad (87)$$

- Coefficients Approximation-Approximation ( $j_1 = J_1$  and  $j_2 = J_2$ ) :

$$a_{J_1, J_2}[k_r, k_t] = h_{1D}^{(J_2)} \star a_{J_1}[k_r, \cdot] \quad (88)$$

Ainsi, tous les coefficients d'ondelettes 2D-1D  $w_{j_1, j_2}$  sont désormais stabilisés, et le bruit sur ces coefficients d'ondelettes se comporte comme un bruit Gaussien de variance connue dépendant uniquement de  $h$  et des échelles  $j_1$  et  $j_2$ . Le débruitage n'est cependant pas direct puisqu'il n'existe pas de formule pour la reconstruction à cause de la forme des équations de stabilisation ci-dessus. Formellement, les opérateurs de stabilisation  $T_{j_1, j_2}$  et les opérateurs de convolution le long des dimensions spatiales et temporelles ne commutent pas, même si les bancs de filtre satisfont la formule de reconstruction exacte. Pour régler ce problème, on propose de résoudre le problème de reconstruction à l'aide d'un algorithme de reconstruction itératif.

### 17.2.2 Détection-Reconstruction

Comme le bruit sur les coefficients stabilisés est Gaussien, et comme on peut imposer que l'écart type du bruit est égal à 1 partout sans perdre en généralité, on considère qu'un coefficient d'ondelettes  $w_{j_1, j_2}[k_r, k_t]$  est significatif si sa valeur absolue est plus grande qu'un seuil critique  $\tau$ , où  $\tau$  est typiquement compris entre 3 et 5.

Le support multi-résolution est obtenu en détectant les coefficients significatifs à chaque échelle. Le support multi-résolution pour  $j_1 \leq J_1$  et  $j_2 \leq J_2$  est défini par :

$$\mathcal{M}_{j_1, j_2}[k_r, k_t] = \begin{cases} 1 & \text{if } w_{j_1, j_2}[k_r, k_t] \text{ est significatif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (89)$$

On note  $\mathcal{W}$  la transformée en ondelettes 2D-1D sphérique non-décimée décrite ci-dessus, et  $\mathcal{R}$  sa transformée inverse. On souhaite que notre solution  $X$  préserve les structures significatives des données originales en reproduisant exactement les mêmes coefficients que les coefficients d'ondelettes des données  $Y$ , mais seulement aux échelles et positions où du signal significatif a été détecté. Aux autres échelles et positions, on veut que la solution soit la plus lisse possible avec le moins possible de coefficients d'ondelettes. Etant donné que les intensités de variables aléatoires Poissoniennes sont toujours positives, on impose également une contrainte de positivité sur la solution. Il est clair qu'il existe de nombreuses solutions satisfaisant les contraintes de positivité et d'égalité aux données sur le support multi-résolution, y compris  $Y$  elle-même. Par conséquent, notre problème de reconstruction basé uniquement sur ces deux contraintes est un problème mal posé qui doit être régularisé. Typiquement, la solution qui nous intéresse soit être parcimonieuse dans le domaine des ondelettes. Par conséquent, notre problème de reconstruction est formulé comme un problème de minimisation sous contrainte :

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathcal{W}\mathbf{X}\|_1 \text{ subject to } \begin{cases} \mathcal{M}\mathcal{W}\mathbf{X} = \mathcal{M}\mathcal{W}\mathbf{Y} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases} \quad (90)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme  $l_1$  jouant le rôle de régularisation et est bien connue pour entraîner la parcimonie [21]. Ce problème peut être résolu efficacement à l'aide de la l'algorithme

---

**Require:** Données bruitées  $\mathbf{Y}$ , filtre passe-bas  $h$ , support multi-résolution  $\mathcal{M}$  obtenu par l'étape de détection, nombre d'itérations  $N_{\max}$

- 1: Initialiser  $\mathbf{X}^{(0)} = \mathcal{M}\mathcal{W}\mathbf{Y} = \mathcal{M}w_Y$ ,
- 2: **for**  $n = 1$  à  $N_{\max}$  **do**
- 3:  $\tilde{d} = \mathcal{M}w_Y + (1 - \mathcal{M})\mathcal{W}X^{(n-1)}$ ,
- 4:  $\mathbf{X}^{(n)} = P_+(\mathcal{RST}_{\beta_n}[\tilde{d}])$ ,
- 5: Mettre à jour  $\beta_n = (N_{\max} - n)/(N_{\max} - 1)$
- 6: **end for**

---

Hybrid Steepest Descent [71] [73], et nécessite environ 10 itérations en pratique. Le principales étapes de l'algorithme peuvent être résumées comme ceci :

où  $P_+$  est la projection sur l'orthant positif, i.e.  $P_+(x) = \max(x, 0)$ ,  $\text{ST}_{\beta_n}$  est l'opérateur de seuillage doux de seuil  $\beta_n$ , i.e.  $\text{ST}_{\beta_n}[x] = x - \beta_n \text{sign}(x)$  si  $|x| \geq \beta_n$ , et 0 sinon.

L'algorithme de débruitage sur la sphère à l'aide de la MS-VSTS 2D-1D est le suivant :

---

**Require:** Données bruitées  $\mathbf{Y}$ , filtre passe-bas  $h$ , niveau de seuillage  $\tau$

- 1: *Transformée MS-VSTS 2D-1D* : Appliquer la transformée MS-VSTS 2D-1D en utilisant (85)-(88).
- 2: *Détection* : Détecter les coefficients significatifs au dessus du seuil  $\tau$ , et en déduire le support multi-résolution  $\mathcal{M}$ .
- 3: *Reconstruction* : Reconstruire les données débruitées à l'aide de l'algorithme ci-dessus.

---

### 17.3 Expériences

On a appliqué l'algorithme sur nos données Fermi simulées, avec 14 bandes en énergie entre 50 MeV et 50 GeV. Les figures 28 et 29 montrent le résultat de l'algorithme sur 2 bandes en énergie. La MS-VSTS multicanale permet de débruiter les données bande par bande de manière performante, ce qui nous permet d'avoir l'information spectrale pour chaque position spatiale. La Figure 30 montre le spectre de puissance d'une source ponctuelle de rayonnement gamma, obtenu par la MS-VSTS multicanale.

## 18 Conclusion

Cette partie présente de nouvelles méthodes de restauration de données sphériques perturbée par un bruit suivant une distribution poissonnienne. La méthode proposée utilise une méthode de stabilisation de variance associée à des transformées multi-échelle sur la sphère. Les résultats expérimentaux montrent que cette méthode est très performante pour débruiter des données Fermi. On a utilisé deux transformées multi-échelle sphériques, les ondelettes et les curvelets. Ensuite, nous avons proposé une extension de la méthode de débruitage afin de prendre en compte les données manquantes, et nous avons montré que cette méthode d'inpainting peut être utile pour estimer l'émission

---

diffuse de la Voie Lactée. Ensuite, nous avons introduit une nouvelle méthode de débruitage sur la sphère tenant compte d'un modèle de fond. Enfin, nous avons étendu la méthode au cas multicanal. Les données simulées ont montré que cette méthode est relativement robuste vis à vis des erreurs de modèle, et peut par conséquent être utilisée pour la modélisation du fond diffus galactique et la détection de sources.

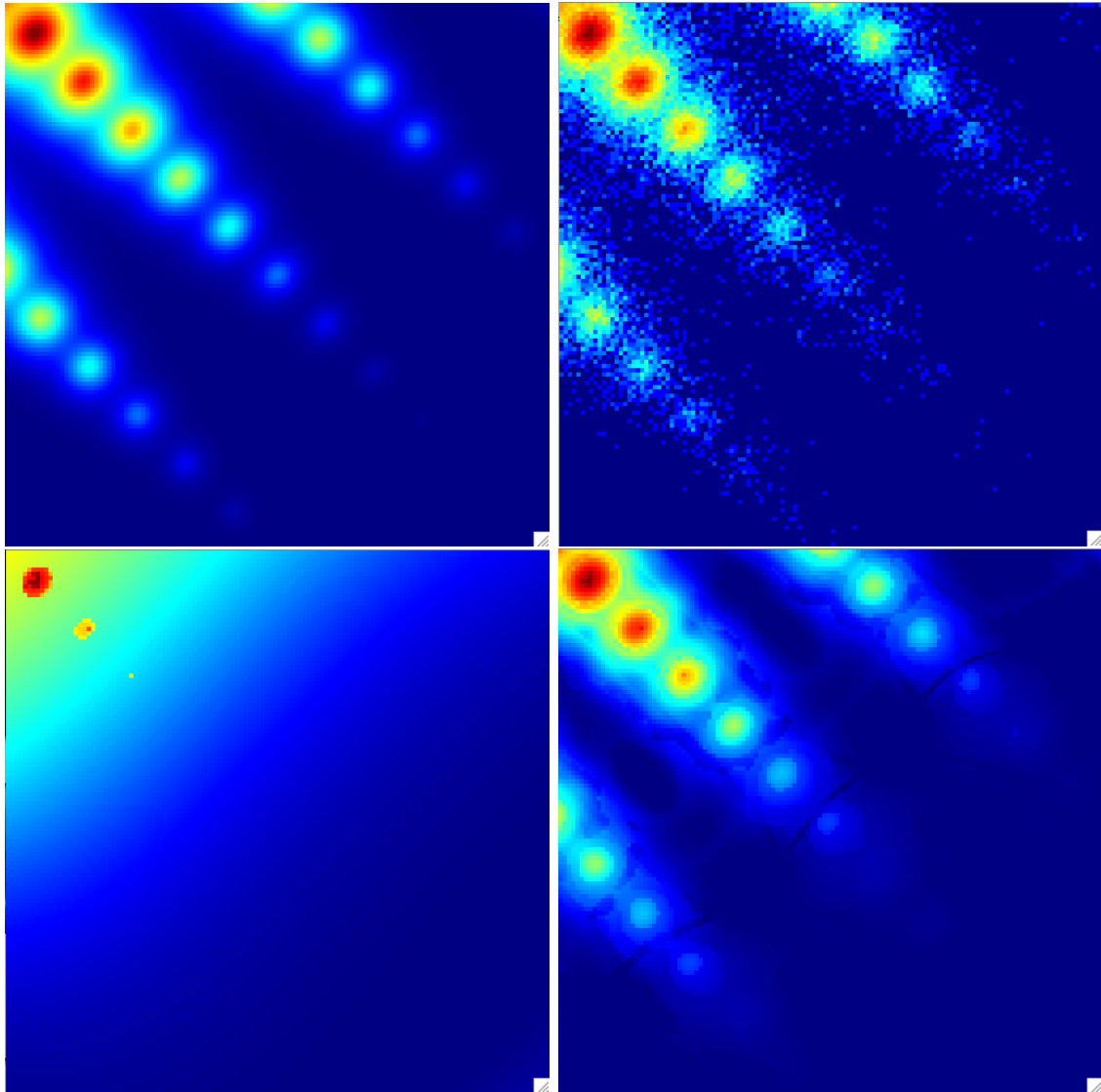


FIGURE 21 – Comparaison de la MS-VSTS avec la méthode Anscombe + seuillage d'ondelettes sur une seule face HEALPix. *En haut à gauche* : Sources d'intensité variable. *En haut à droite* : Sources d'intensité variable avec bruit poissonien. *En bas à gauche* : Sources d'intensité variable reconstruites par la méthode Anscombe + seuillage d'ondelettes. *En bas à droite* : Sources d'intensité variable reconstruites par la MS-VSTS.

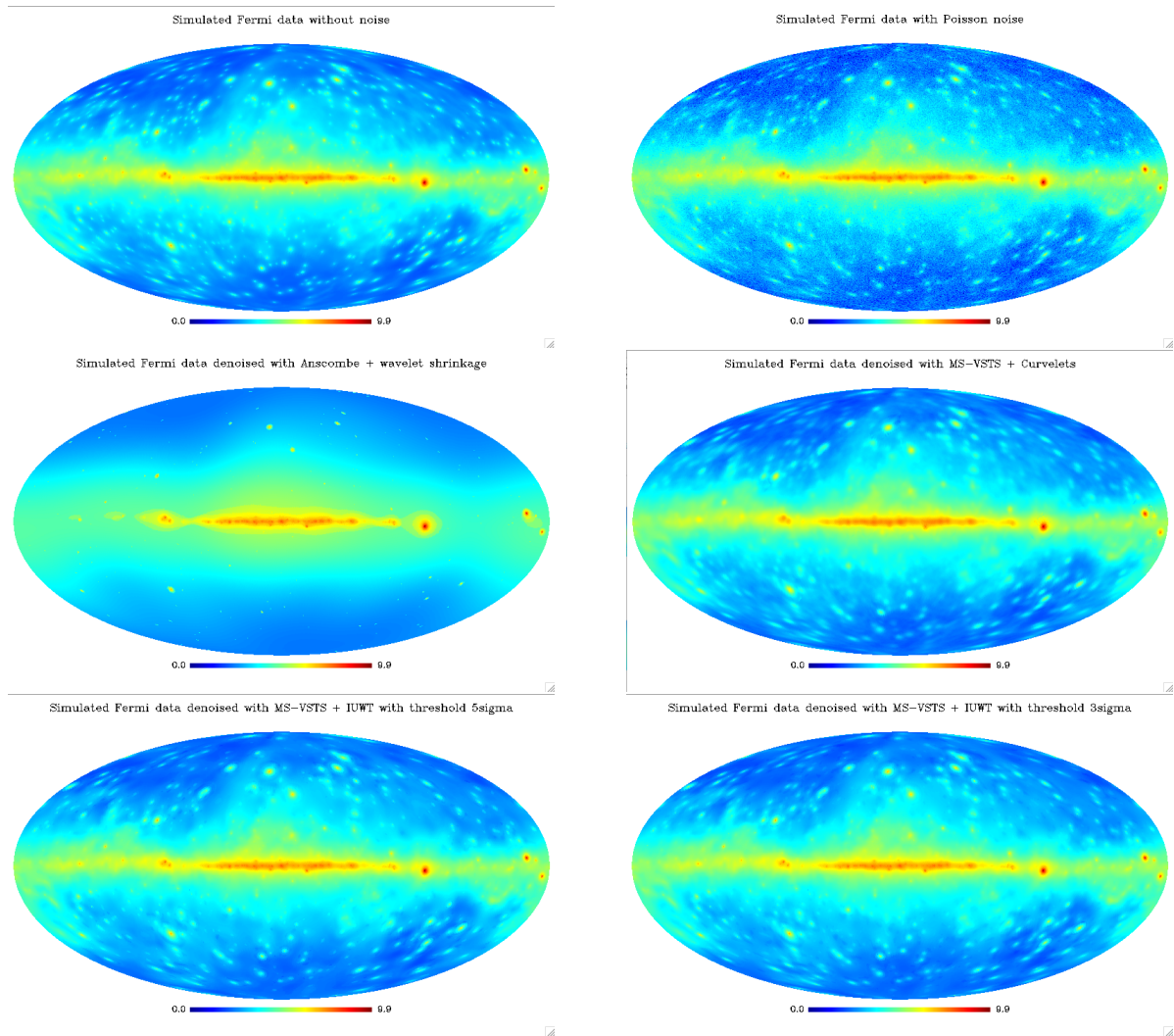


FIGURE 22 – *En haut à gauche* : Données Fermi simulées sans bruit. *En haut à droite* : Données Fermi simulées avec bruit poissonien. *Au milieu à gauche* : Données Fermi simulées débruitées par transformée d’Anscombe + seuillage d’ondelettes. *Au milieu à droite* : Données Fermi simulées débruitées par MS-VSTS + curvelets (Algorithme 3). *En bas à gauche* : Données Fermi simulées débruitées par MS-VSTS + IUWT (Algorithme 2) avec un seuil  $5\sigma_j$ . *En bas à droite* : Données Fermi simulées débruitées par MS-VSTS + IUWT (Algorithme 2) avec un seuil  $3\sigma_j$ .

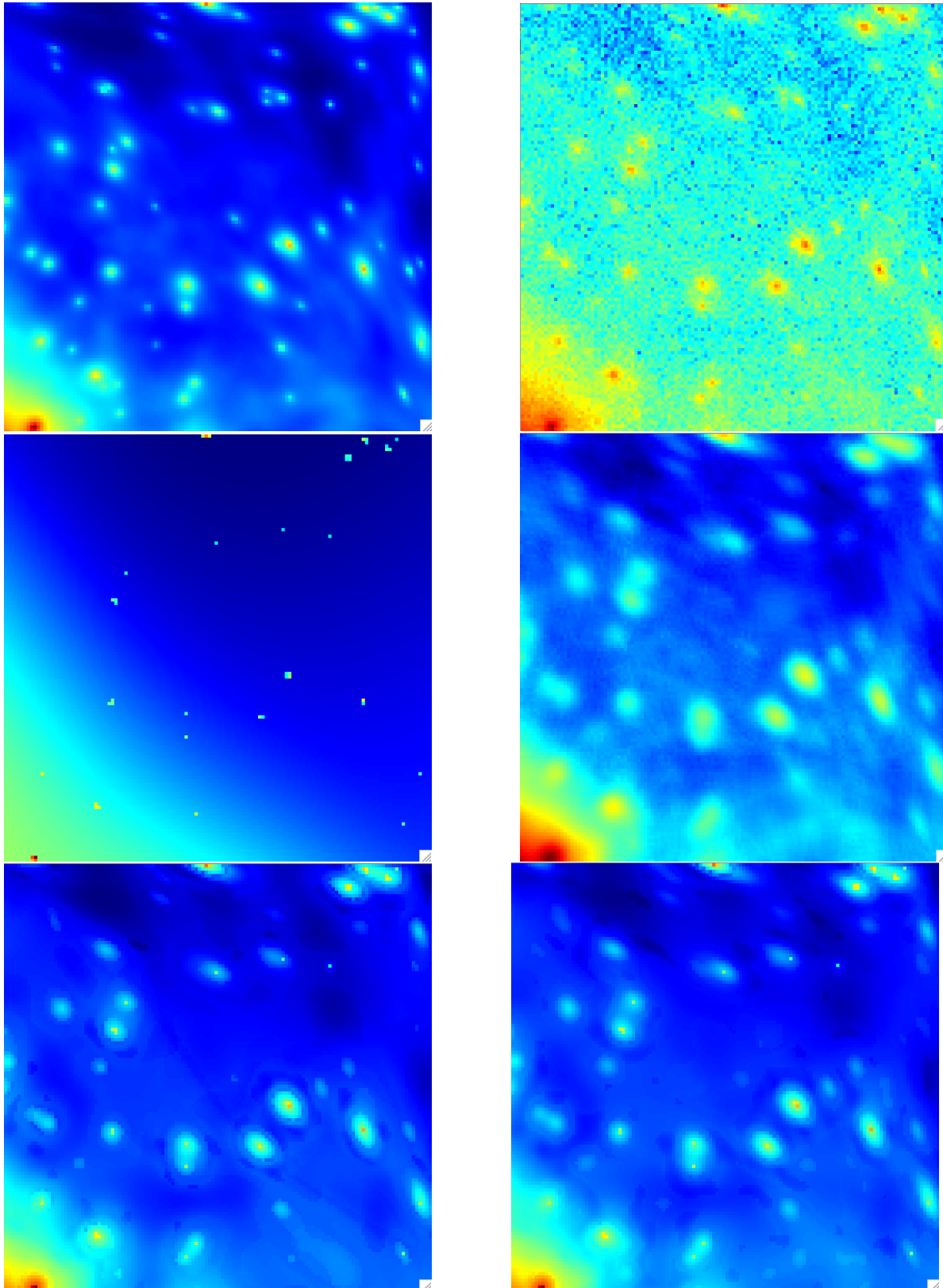


FIGURE 23 – Vue sur une seule face HEALPix des résultats de la Figure 22. *En haut à gauche* : Données Fermi simulées sans bruit. *En haut à droite* : Données Fermi simulées avec bruit poissonien. *Au milieu à gauche* : Données Fermi simulées débruitées par transformée d’Anscombe + seuillage d’ondelettes. *Au milieu à droite* : Données Fermi simulées débruitées par MS-VSTS + curvelets (Algorithme 3). *En bas à gauche* : Données Fermi simulées débruitées par MS-VSTS + IUWT (Algorithme 2) avec un seuil  $5\sigma_j$ . *En bas à droite* : Données Fermi simulées débruitées par MS-VSTS + IUWT (Algorithme 2) avec un seuil  $3\sigma_j$ .

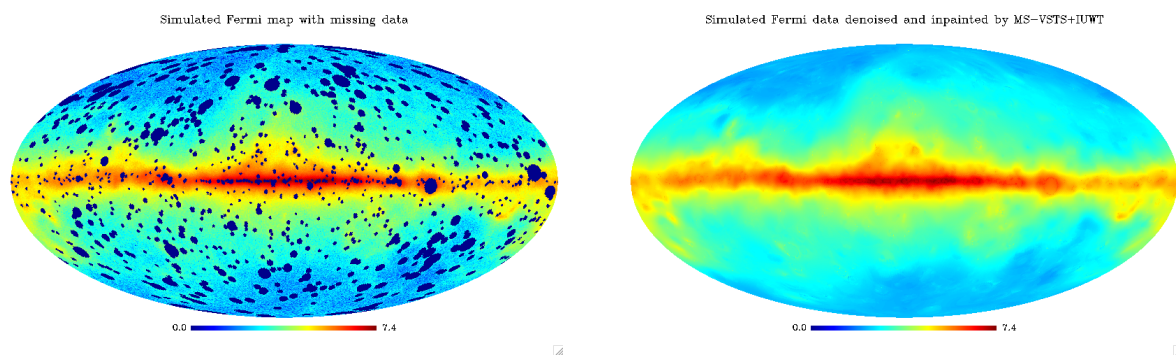


FIGURE 24 – MS-VSTS - Inpainting. *Gauche* : Données Fermi simulées avec bruit de Poisson et masquage des sources les plus lumineuses. *Right* : Données Fermi simulées débruitées et interpolées avec la méthode MS-VSTS + IUWT + Inpainting (Algorithme 4).

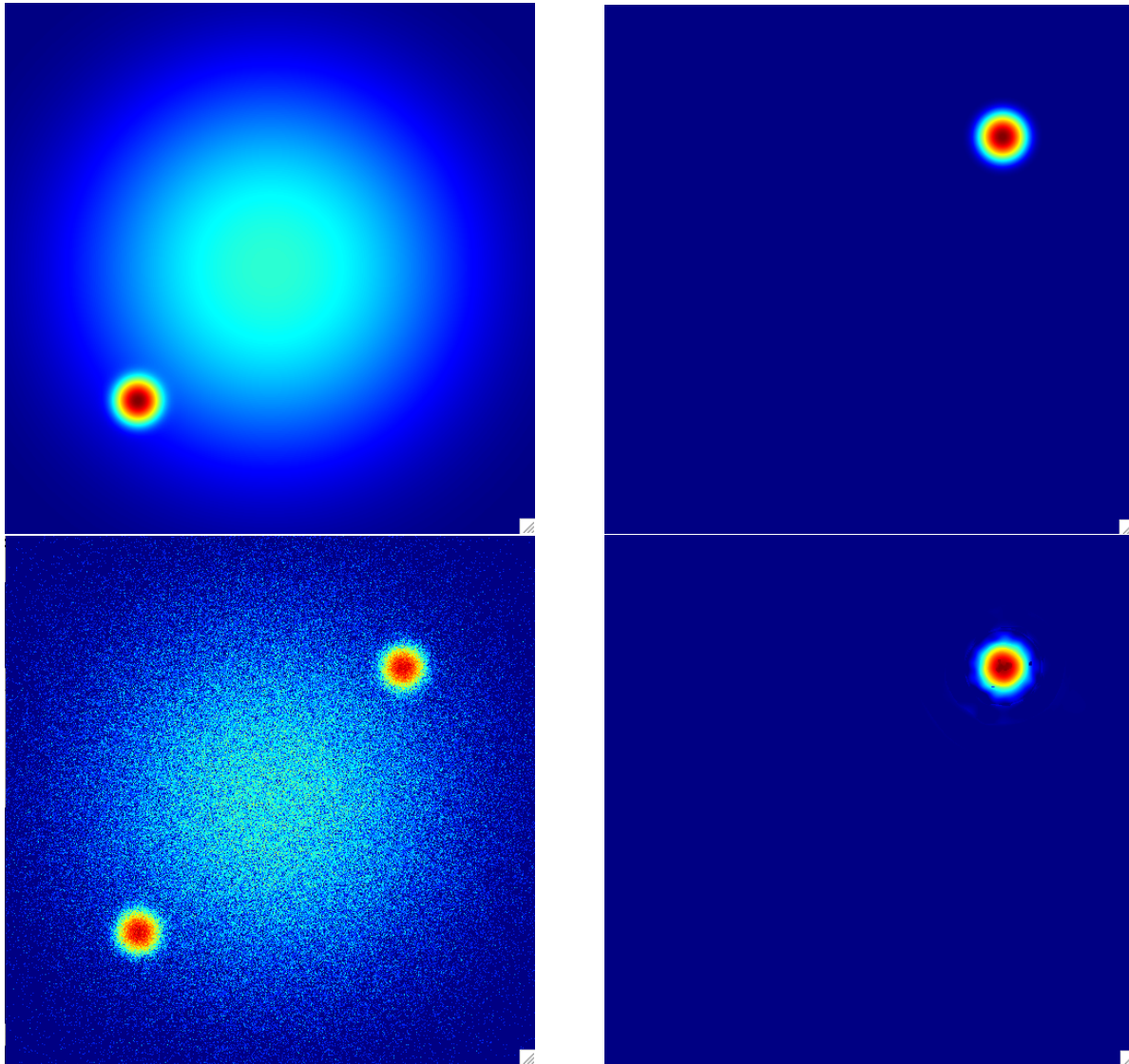


FIGURE 25 – Etude théorique de l’algorithme MS-VSTS + IUWT avec extraction du fond (Algorithm ??). Vue d’une face HEALPix. *En haut à gauche* : Fond simulé : somme de deux gaussiennes d’écart-type respectif 0.1 et 0.01. *En haut à droite* : Source simulée : Gaussienne d’écart-type 0.01. *En bas à gauche* : Données poissoniennes simulées. *En bas à droite* : Image débruitée à l’aide de l’algorithme MS-VSTS + IUWT avec extraction du fond.



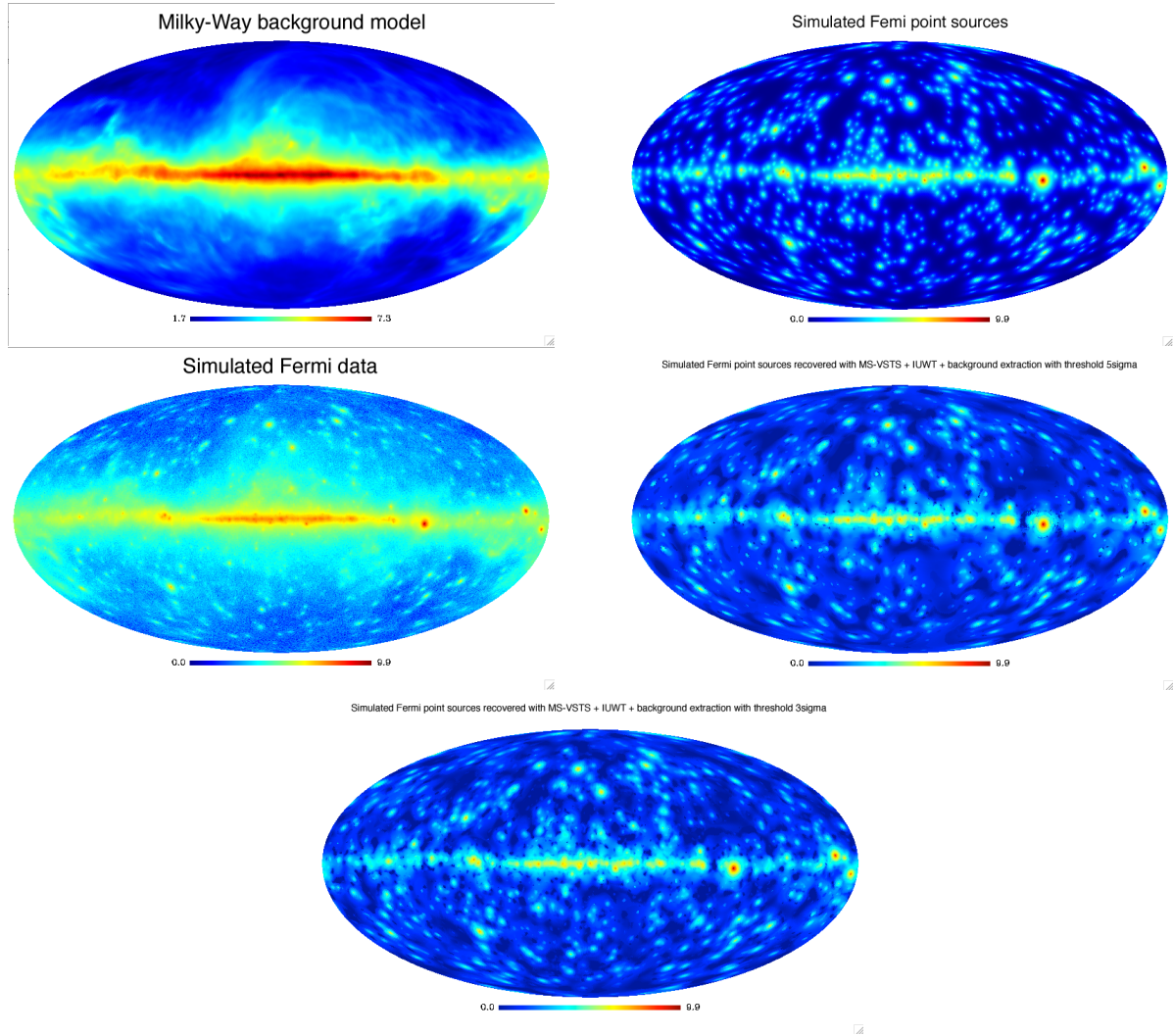


FIGURE 26 – *En haut à gauche* : Modèle de fond simulé. *En haut à droite* : Sources de rayonnement gamma simulées. *Au milieu à gauche* : Données Fermi simulées avec bruit poissonien. *Au milieu à droite* : Sources reconstruites à l'aide de la méthode MS-VSTS + IUWT + extraction du fond (Algorithme 5) avec le seuil de détection  $5\sigma_j$ . *En bas* : Sources reconstruites à l'aide de la méthode MS-VSTS + IUWT + extraction du fond (Algorithme 5) avec le seuil de détection  $3\sigma_j$ .

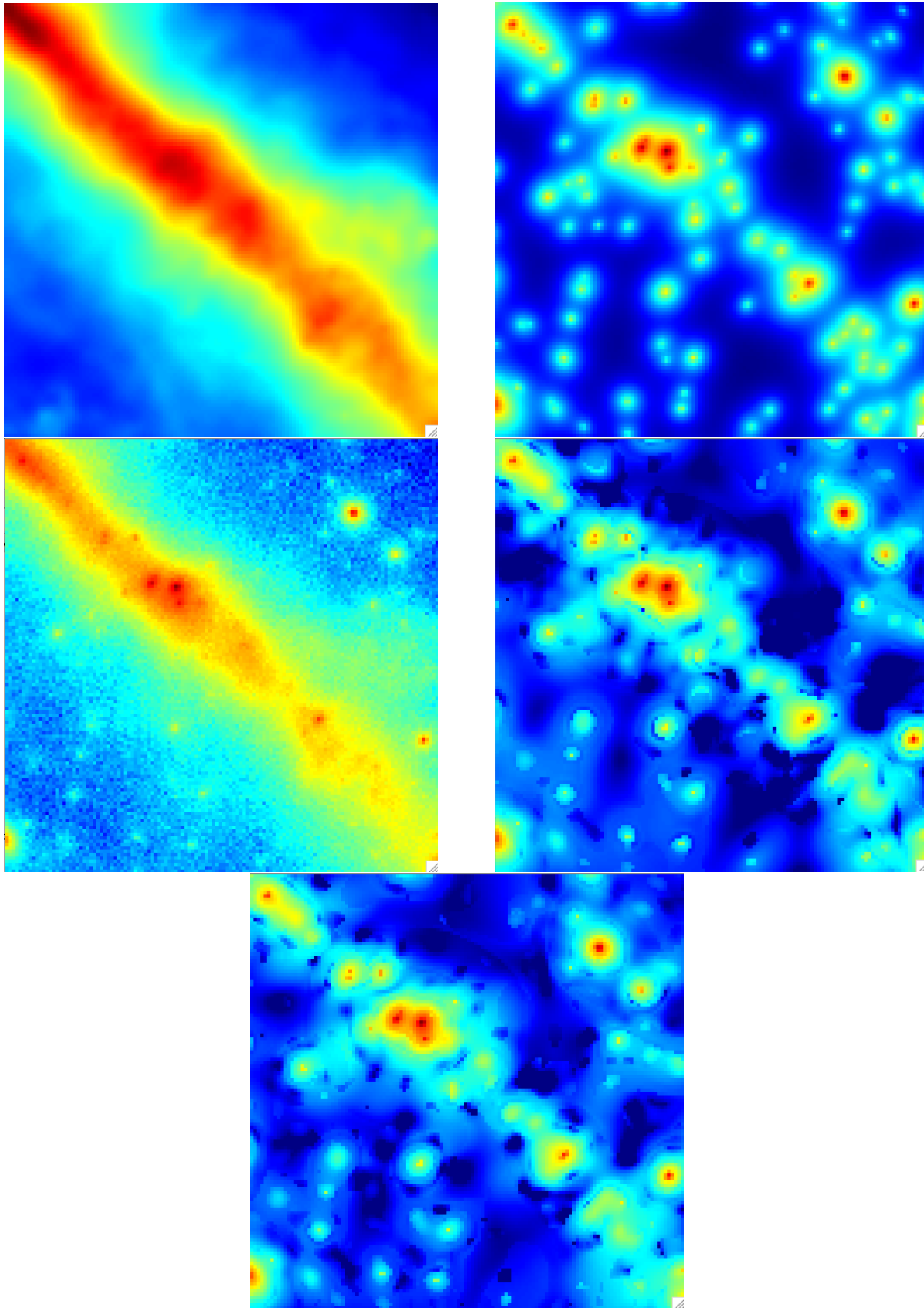


FIGURE 27 – Vue sur une face HEALPix des résultats de la Figure 26. *En haut à gauche* : Modèle de fond simulé. *En haut à droite* : Sources de rayonnement gamma simulées. *Au milieu à gauche* : Données Fermi simulées avec bruit poissonien. *Au milieu à droite* : Sources reconstruites à l'aide de la méthode MS-VSTS + IUWT + extraction du fond (Algorithme 5) avec le seuil de détection  $5\sigma_j$ . *En bas* : Sources reconstruites à l'aide de la méthode MS-VSTS + IUWT + extraction du fond (Algorithme 5) avec le seuil de détection  $3\sigma_j$ .

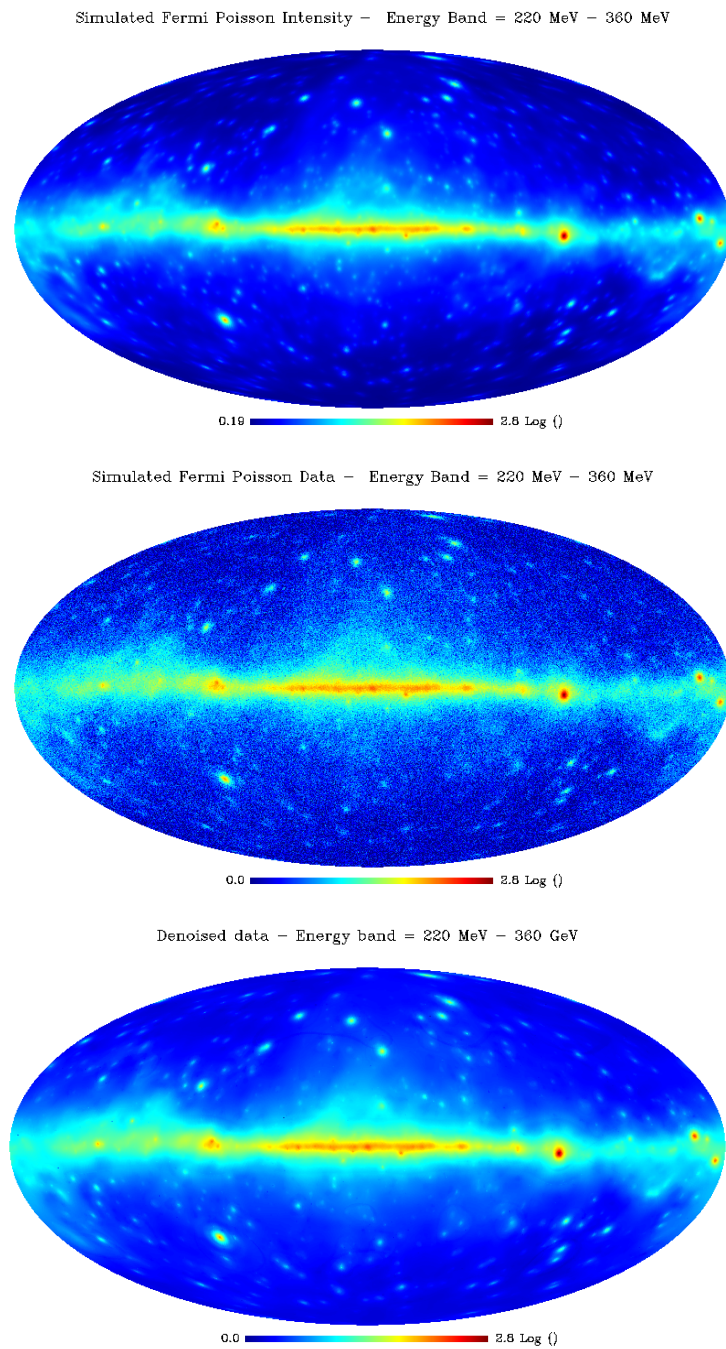


FIGURE 28 – Résultat de l’algorithme de débruitage Poissonien multicanal sur des données Femri simulées sur la bande en énergie 220 MeV - 360 MeV (*En haut* : Carte d’intensité simulée. *Au milieu* : carte de photons simulée avec bruit Poissonien. *En bas* : carte débruitée). Les images sont en échelle logarithmique.

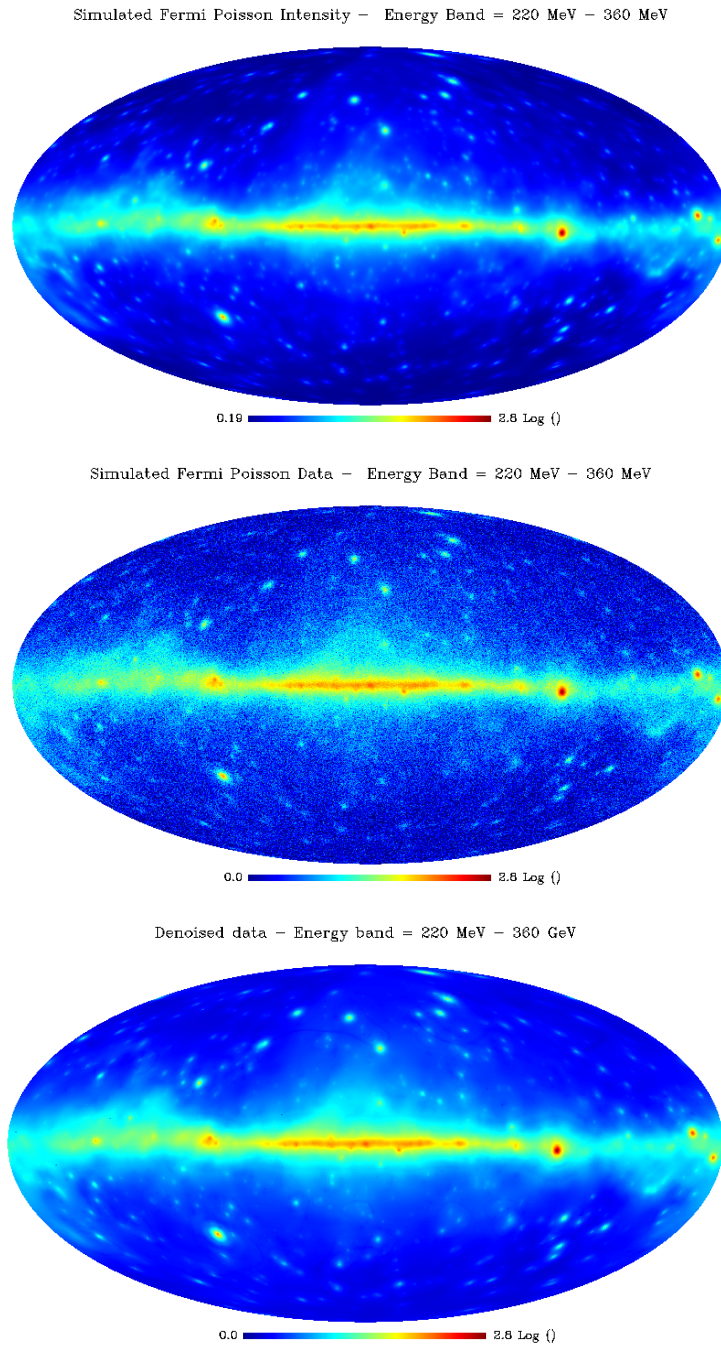


FIGURE 29 – Résultat de l’algorithme de débruitage Poissonien multicanal sur des données Fermi simulées sur la bande en énergie 589 MeV - 965 MeV (*En haut* : Carte d’intensité simulée. *Au milieu* : carte de photons simulée avec bruit Poissonien. *En bas* : carte débruitée). Les images sont en échelle logarithmique.

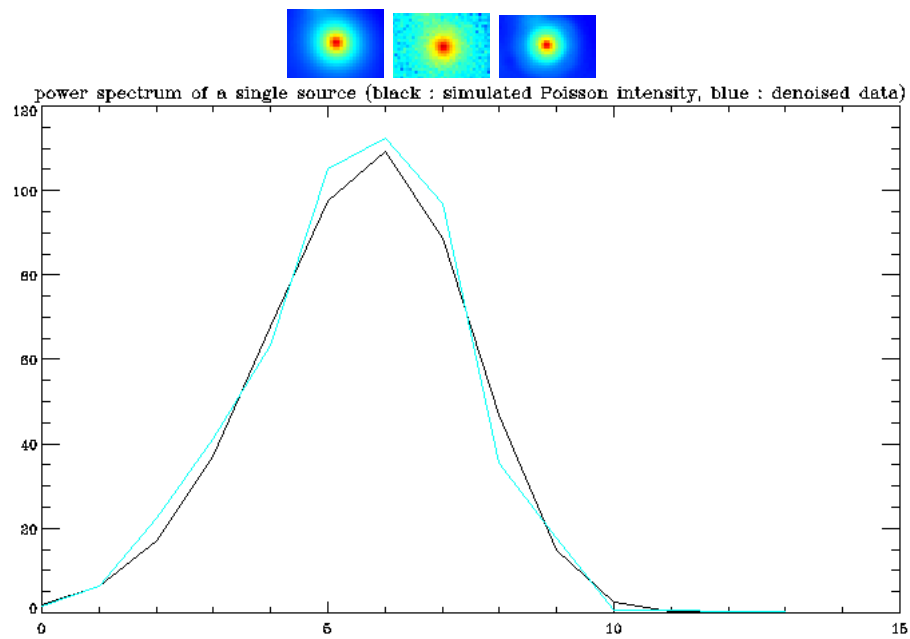


FIGURE 30 – Spectre de puissance d'une source ponctuelle de rayonnement gamma obtenu grace à la MS-VSTS multicanale. *En haut* : Source ponctuelle de rayonnement gamma, issue de données Fermi simulées intégrées suivant l'axe des énergies. (*A gauche* : Carte d'intensité simulée. *Au centre* : Données bruitées simulées. *A droite* : Données débruitées.) *En bas* : Spectre de puissance du centre de la source ponctuelle débruitée : intensité en fonction de la bande en énergie.

## Cinquième partie

# Déconvolution multicanale sur la sphère

## Sommaire

---

<b>19</b>	<b>Position du problème</b>	<b>83</b>
<b>20</b>	<b>Déconvolution monocanale</b>	<b>84</b>
20.1	Etat de l'art de la déconvolution monocanale sur le plan . . . . .	85
20.1.1	Méthodes itératives . . . . .	85
20.1.2	Contraintes . . . . .	85
20.1.3	Régularisation à l'aide du support de multirésolution . . . . .	86
20.2	Déconvolution monocanale sur la sphère en bruit Poissonien . . . . .	87
<b>21</b>	<b>Déconvolution parcimonieuse multicanale sur la sphère</b>	<b>87</b>
<b>22</b>	<b>Expériences</b>	<b>88</b>
<b>23</b>	<b>Conclusion</b>	<b>88</b>

---

## 19 Position du problème

De nombreux problèmes en traitement du signal et de simages peuvent être résolus par l'inversion du système linéaire :

$$y = \mathbf{H}x + \epsilon \quad (91)$$

où  $x \in \mathbb{R}^N$  correspond aux données à reconstruire,  $y \in \mathbb{R}^m$  correspond aux données bruitées observées, et  $\epsilon$  est un bruit additif de variance bornée. L'erreur inconnue peut être soit un bruit de mesure stochastique induit par l'appareil, soit une perturbation déterministe due par exemple à un modèle de signal imparfait.  $\mathbf{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$  est un opérateur linéaire borné qui est généralement mal posé étant donné qu'il modélise un processus d'acquisition qui subit des pertes d'information.

Notre objectif est de supprimer les effets de la PSF (Point Spread Function) de l'instrument. Ici,  $\mathbf{H}$  est un opérateur de convolution qui supprime le contenu haute fréquence de  $x$ . Le problème ci-dessus est alors un problème de déconvolution.

Dans le but de régulariser un tel problème d'inversion et de réduire l'espace des solutions candidates, on a besoin de connaissances a priori sur la structure typique de l'image originale  $x$ . Cette information a priori correspond au caractère lisse de la solution et peut aller d'une simple hypothèse de continuité uniforme à une connaissance plus complexe de la structure géométrique de  $x$ .

On note  $\mathbf{Y}$  les données observées,  $\mathbf{H}$  le noyau de convolution, et  $\mathcal{N}(\mathbf{X})$  le bruit additif. La déconvolution consiste à estimer  $\mathbf{X}$  tel que :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \star \mathbf{X} + \mathcal{N}(\mathbf{X}) \quad (92)$$

où  $\star$  correspond au produit de convolution.

Dans l'espace de Fourier, on a :

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathcal{N}} \quad (93)$$

On cherche à déterminer  $\mathbf{X}$  à partir de la connaissance de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{Y}$ . Ce problème inverse a été l'objet de nombreux travaux, les principales difficultés étant l'existence de :

1. une fréquence de coupure pour la PSF, et
2. le bruit additif.

Une solution peut être obtenue en calculant la transformée de Fourier de l'image déconvoluée  $\hat{\mathbf{X}}$  en divisant simplement les données  $\hat{\mathbf{Y}}$  par la PSF  $\hat{\mathbf{H}}$  :

$$\hat{\hat{\mathbf{X}}} = \frac{\hat{\mathbf{Y}}}{\hat{\mathbf{H}}} = \hat{\mathbf{X}} + \frac{\hat{\mathcal{N}}}{\hat{\mathbf{H}}} \quad (94)$$

Cette méthode, parfois appelée *Fourier-quotient method*, est très rapide. On a juste à effectuer une transformée de Fourier et une transformée de Fourier inverse. Pour des fréquences proches de la fréquence de coupure, le terme de bruit devient important, et



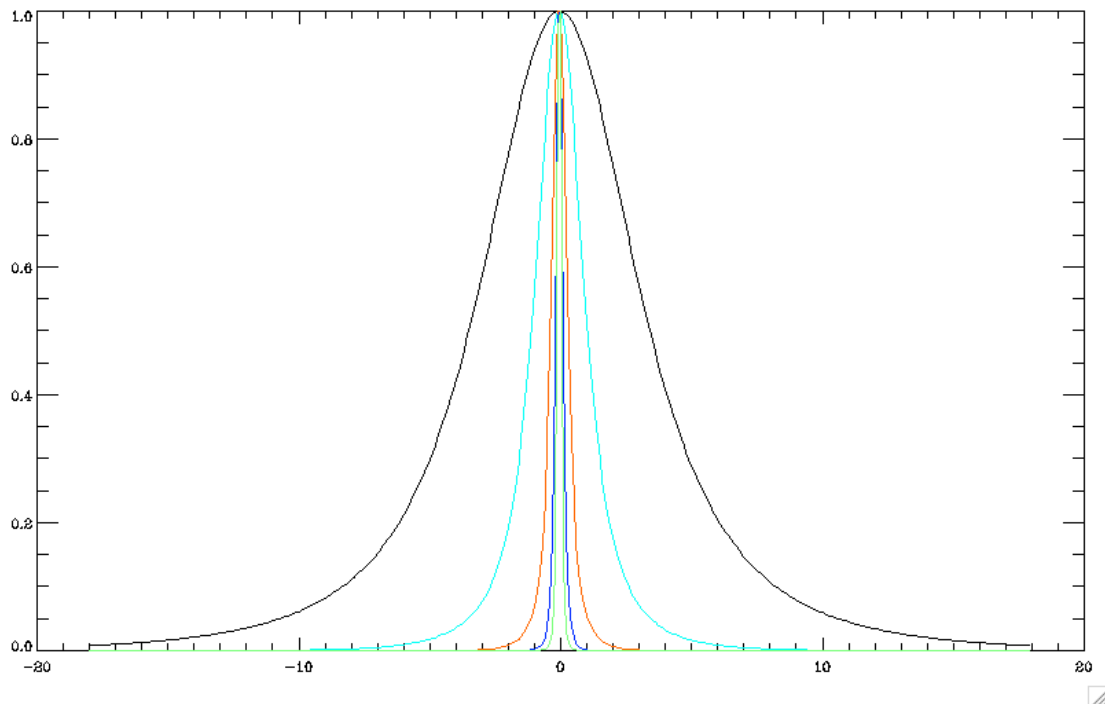


FIGURE 31 – Profil normalisé de la PSF pour différentes bandes en énergie en fonction de l'angle en degrés. *Noir* : 50 MeV - 82 MeV. *Bleu clair* : 220 MeV - 360 MeV. *Orange* : 960 MeV - 1.6 GeV. *Bleu foncé* : 4.2 GeV - 6.9 GeV. *Vert* : 19 GeV - 31 GeV.

le bruit est amplifié. Par conséquent, cette méthode ne peut pas être utilisée en présence de bruit.

L'Eq. (95) est généralement un problème mal posé. Cela signifie qu'il n'existe pas de solution unique et stable.

Dans nos simulations réalistes de données du LAT, la PSF dépend fortement de l'énergie, de 6.9 à 50 MeV à moins de 0.1 à 10 GeV et plus. La Figure 31 montre les profils normalisés des PSF pour différentes bandes en énergie.

## 20 Déconvolution monocanale

Pour la déconvolution de données Poissoniennes, diverses méthodes ont été proposées [65], [13], [41], [43], [67], [44], [45], [68], [18], [14], [63], [31], [17], [15], [22]. Richardson-Lucy est certainement la plus connue dans le domaine de l'astrophysique. Dans cette section, nous proposons un nouvel algorithme régularisé de Richardson-Lucy destiné aux données Poissoniennes sur la sphère.

On note  $\mathbf{Y}$  les données observées,  $\mathbf{H}$  le noyau de convolution, et  $\mathcal{N}(\mathbf{X})$  le bruit additif. La déconvolution consiste à estimer  $\mathbf{X}$  de sorte que :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \star \mathbf{X} + \mathcal{N}(\mathbf{X}) \quad (95)$$

où  $\star$  désigne le produit de convolution.



## 20.1 Etat de l'art de la déconvolution monocanale sur le plan

### 20.1.1 Méthodes itératives

**Van Cittert** La méthode de Van Cittert [13] est très simple : on commence avec  $n = 0$  et  $\mathbf{X}^{(0)} = 1$  et on itère :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} + \alpha(\mathbf{Y} - \mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}) \quad (96)$$

où  $\alpha$  est un paramètre de convergence généralement choisi égal à 1. Quand  $n$  tend vers l'infini, on a  $\mathbf{X} = \mathbf{X} + (\mathbf{Y} - \mathbf{H} * \mathbf{X})$ , soit  $\mathbf{Y} = \mathbf{H} * \mathbf{X}$ . Cette méthode converge rapidement en l'absence de bruit (seulement 5 ou 6 itérations), mais à tendance à diverger en présence de bruit. Jansson [39] a rendu cette méthode plus robuste en imposant des contraintes sur la solution, se traduisant par un certain choix de  $\alpha$ .

#### Landweber

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} + \gamma \mathbf{H}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}) \quad (97)$$

#### Richardson-Lucy

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} \left( \mathbf{H}^T * \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}} \right) \quad (98)$$

### 20.1.2 Contraintes

On régularise introduit un opérateur  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$  de projection sur un espace de contraintes  $\mathcal{C}$ . Par exemple,  $\mathcal{P}_+$  est la projection de positivité.

Les méthodes itératives contraintes sont alors :

#### Van Cittert

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}[\mathbf{X}^{(n)} + \alpha(\mathbf{Y} - \mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)})] \quad (99)$$

**Landweber** On note  $\mathbf{H}^T$  la transposée de  $\mathbf{H}$ . La méthode de Landweber [41] consiste en le schéma itératif suivant :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}[\mathbf{X}^{(n)} + \gamma \mathbf{H}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)})] \quad (100)$$

**Richardson-Lucy** La méthode de Richardson-Lucy [44] consiste en le schéma itératif suivant :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}} \left[ \mathbf{X}^{(n)} \left( \mathbf{H}^T * \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}} \right) \right] \quad (101)$$

### 20.1.3 Régularisation à l'aide du support de multirésolution

Lorsqu'on utilise une méthode itérative telle que Van Cittert ou Richardson-Lucy, on peut définir le résidu  $\mathbf{R}^{(n)}$  à chaque itération  $n$  :

$$\mathbf{R}^{(n)}(x, y) = \mathbf{Y}(x, y) - (\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)})(x, y) \quad (102)$$

En utilisant la transformée en ondelettes à trous,  $\mathbf{R}^{(n)}$  peut s'écrire comme la somme de son plan lissé et de ses coefficients d'ondelettes :

$$\mathbf{R}^{(n)}(x, y) = a_J(x, y) + \sum_{j=1}^J d_j(x, y) \quad (103)$$

On peut ainsi conserver uniquement les coefficients d'ondelettes significatifs du résidu à chaque itération. La partie significative du résidu peut s'écrire :

$$\bar{\mathbf{R}}^{(n)}(x, y) = a_J(x, y) + \sum_{j=1}^J \mathcal{M}(j, x, y) d_j(x, y) \quad (104)$$

où  $\mathcal{M}(j, x, y)$  est le support multi-résolution, défini par :

$$\mathcal{M}(j, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_j(x, y) \text{ est significatif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (105)$$

En bruit Gaussien, le support multi-résolution est obtenu simplement par des tests d'hypothèses sur les coefficients d'ondelettes des données. En bruit Poissonien, le support est obtenu par des tests d'hypothèses sur les coefficients de la MS-VST des données. Une autre approche [63] consiste à réestimer le support multi-résolution à chaque itération, en effectuant des tests d'hypothèses sur la transformée en ondelettes du résidu.

**Régularisation de l'algorithme de Van Cittert** L'algorithme de Van Cittert (Eq. 96) peut se réécrire :

$$\mathbf{X}^{(n+1)}(x, y) = \mathbf{X}^{(n)}(x, y) + \alpha \mathbf{R}^{(n)}(x, y) \quad (106)$$

On régularise l'algorithme en remplaçant le résidu  $\mathbf{R}^{(n)}$  par sa partie significative  $\bar{\mathbf{R}}^{(n)}$  :

$$\mathbf{X}^{(n+1)}(x, y) = \mathbf{X}^{(n)}(x, y) + \alpha \bar{\mathbf{R}}^{(n)}(x, y) \quad (107)$$

**Régularisation de l'algorithme de Richardson-Lucy** De même, l'algorithme de Richardson-Lucy régularisé s'écrit :

$$\mathbf{X}^{(n+1)}(x, y) = \mathbf{X}^{(n)}(x, y) \left( \mathbf{H}^T * \frac{\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}(x, y) + \bar{\mathbf{R}}^{(n)}(x, y)}{\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}(x, y)} \right) \quad (108)$$

## 20.2 Déconvolution monocanale sur la sphère en bruit Poissonien

Notre méthode de déconvolution est basée sur l'algorithme de Richardson-Lucy, avec une projection de positivité et une régularisation à l'aide du support de multirésolution.

La méthode de Richardson-Lucy nous donne un algorithme de déconvolution itératif. On démarre avec  $n = 0$  et  $\mathbf{X}^{(0)} = 1$  et on itère :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = P_+ \left[ \mathbf{X}^{(n)} \left( \mathbf{H}^T * \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}} \right) \right] \quad (109)$$

où  $\mathbf{H}^T$  est la transposée de  $\mathbf{H}$ , et  $P_+$  une projection de positivité.

On définit  $\mathbf{R}^{(n)}$  comme le résidu à l'itération  $n$  :

$$\mathbf{R}^{(n)} = \mathbf{Y} - (\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}) \quad (110)$$

En utilisant la transformée en ondelettes isotrope non-décimée sur la sphère (IUWT),  $\mathbf{R}^{(n)}$  peut se définir comme la somme de ses  $J$  échelles d'ondelettes et du plan lissé, pour un pixel  $k$  :

$$\mathbf{R}^{(n)}[k] = a_J[k] + \sum_{j=1}^J d_j[k] \quad (111)$$

où  $a_J$  correspond au plan lissé, et les  $d_j$  sont les coefficients d'ondelettes.

Les coefficients d'ondelettes permettent d'extraire uniquement les structures significatives des résidus à chaque itération. Normalement, une grande partie de ces résidus est statistiquement non-significative. Le résidu significatif est alors, pour un pixel  $k$  :

$$\bar{\mathbf{R}}^{(n)}[k] = a_J[k] + \sum_{j=1}^J \mathcal{M}(j, k) d_j[k] \quad (112)$$

où  $\mathcal{M}(j, k)$  est le support multi-résolution. Dans un cadre Gaussien, ce support serait obtenu par un simple seuillage sur les coefficients d'ondelettes des données. Dans le cadre Poissonien des données Fermi, le support multi-résolution est obtenu par détection des coefficients significatifs de la transformée MSVSTS+IUWT des données. L'algorithme itératif régularisé devient :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = P_+ \left[ \mathbf{X}^{(n)} \left( \mathbf{H}^T * \frac{\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)} + \bar{\mathbf{R}}^{(n)}}{\mathbf{H} * \mathbf{X}^{(n)}} \right) \right] \quad (113)$$

## 21 Déconvolution parcimonieuse multicanale sur la sphère

Dans ce problème, les données peuvent être vues comme une matrice  $\mathbf{Y} = (Y_t)_t$ , où, pour chaque canal  $t$ ,  $Y_t = (y_{r,t})_r$  est le vecteur correspondant à la carte sphérique au canal  $t$ , où  $r$  est l'indice correspondant au pixel. Chaque canal est convolué par un noyau  $\mathbf{H}_t$  :  $Y_t = \mathbf{H}_t \star X_t + \mathcal{N}(X_t)$ .

On calcule la transformée MS-VSTS sphérique 2D-1D, et le support multi-résolution  $\mathcal{M}_{j_1, j_2}[k_r, k_t]$  est obtenu par des tests d'hypothèses sur les coefficients.

On note  $\mathcal{H}$  l'opérateur de convolution par canal :  $\mathcal{H}\mathbf{X}$  signifie que chaque canal  $X_t$  est convolué par le noyau de convolution  $\mathbf{H}_t$ . L'algorithme de reconstruction est :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = P_+ \left[ \mathbf{X}^{(n)} \left( \mathcal{H}^T \frac{\mathcal{H}\mathbf{X}^{(n)} + \bar{\mathbf{R}}^{(n)}}{\mathcal{H}\mathbf{X}^{(n)}} \right) \right] \quad (114)$$

with  $\bar{\mathbf{R}}^{(n)}[k_r, k_t]$  the significant residual :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}^{(n)}[k_r, k_t] = & a_{J_1, J_2}[k_r, k_t] + \sum_{j_1=1}^{J_1} \mathcal{M}_{j_1, J_2}[k_r, k_t] w_{j_1, J_2}[k_r, k_t] \\ & + \sum_{j_2=1}^{J_2} \mathcal{M}_{J_1, j_2}[k_r, k_t] w_{J_1, j_2}[k_r, k_t] + \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \mathcal{M}_{j_1, j_2}[k_r, k_t] w_{j_1, j_2}[k_r, k_t] \end{aligned} \quad (115)$$

## 22 Expériences

L'algorithme est appliqué sur les 7 premières bandes en énergie de notre jeu de données Fermi simulées ( $50MeV$  à  $1.58GeV$ ). Les Figures 32 à 35 montrent le résultat de la déconvolution sur différentes bandes en énergie. La Figure 36 montre l'effet de l'algorithme de déconvolution multicanale sur une seule source ponctuelle. La déconvolution nous permet d'avoir une meilleure localisation spatiale pour les sources ponctuelles. La Figure 37 montre l'effet de l'algorithme de déconvolution multicanale sur le plan galactique, où l'effet de la déconvolution est particulièrement spectaculaire. Notre algorithme de déconvolution multicanale parvient à supprimer en grande partie l'effet de la PSF.

## 23 Conclusion

Cette partie présente un algorithme de déconvolution multicanale utilisant la MS-VSTS, destiné à supprimer l'effet de la PSF sur les données Fermi. Le fait d'avoir un algorithme multicanal permet de tenir compte de la forte disparité des largeurs de PSF en fonction de l'énergie. Notre algorithme de déconvolution multicanale supprime une grande partie de l'effet de la PSF et améliore considérablement la localisation spatiale des sources ponctuelles.

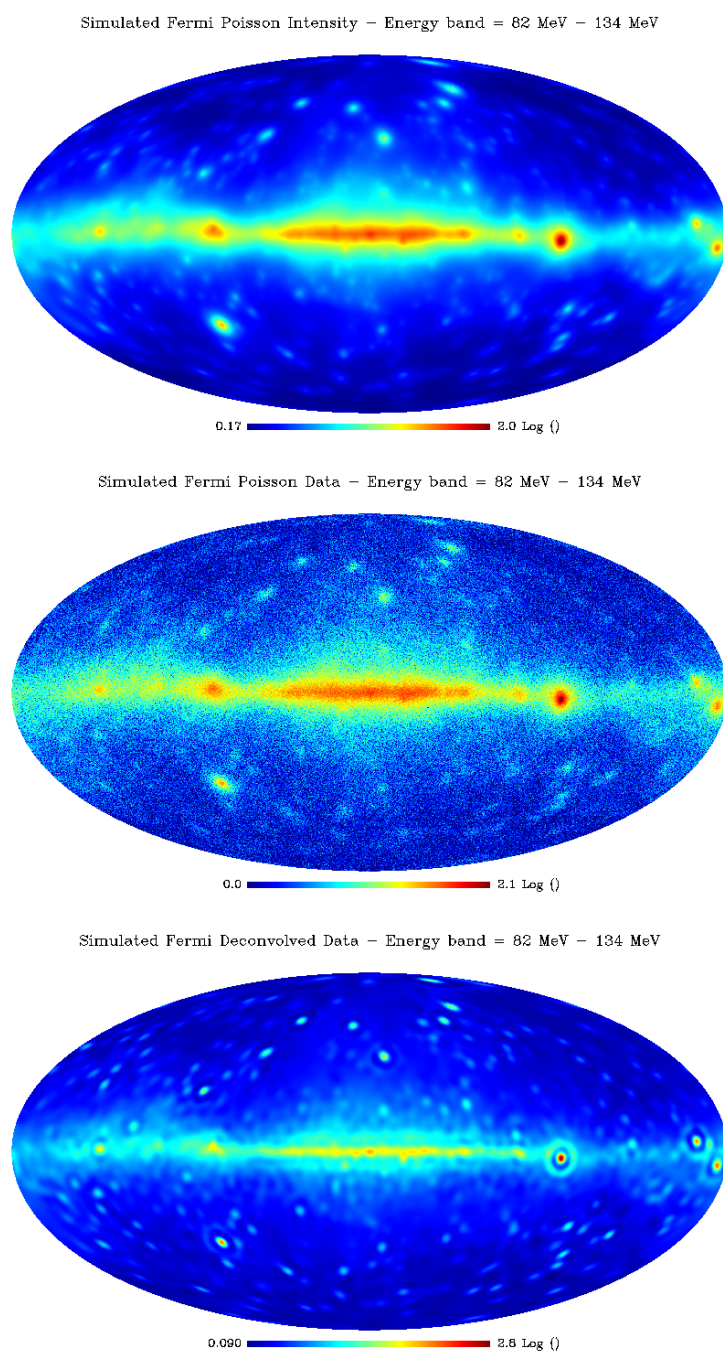


FIGURE 32 – Résultat de l’algorithme de déconvolution multicanale sur la bande en énergie 82 MeV - 134 MeV (*En haut* : Carte d’intensité simulée. *Au milieu* : Carte de photons simulée avec bruit Poissonien. *Bottom* : Carte déconvoluée). Les images sont en échelle logarithmique.

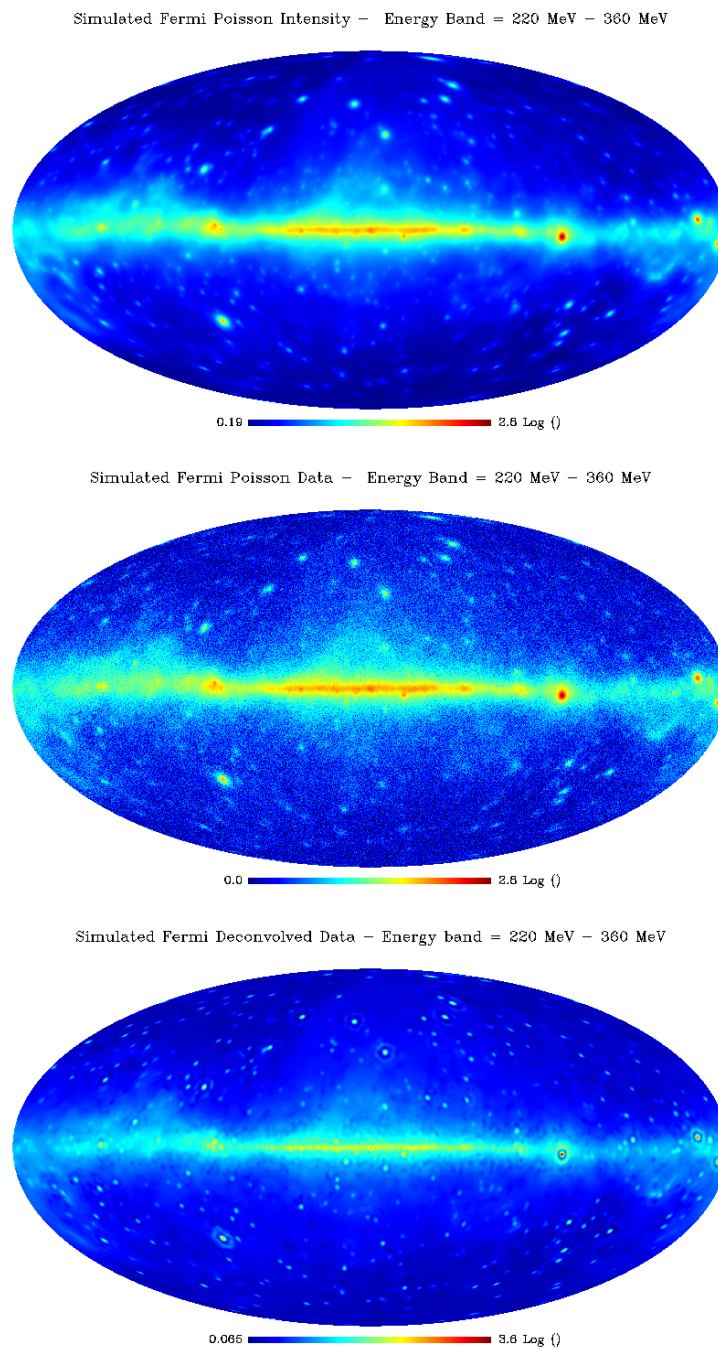


FIGURE 33 – Résultat de l’algorithme de déconvolution multicanale sur la bande en énergie 220 MeV - 360 MeV (*En haut* : Carte d’intensité simulée. *Au milieu* : Carte de photons simulée avec bruit Poissonien. *Bottom* : Carte déconvoluée). Les images sont en échelle logarithmique.

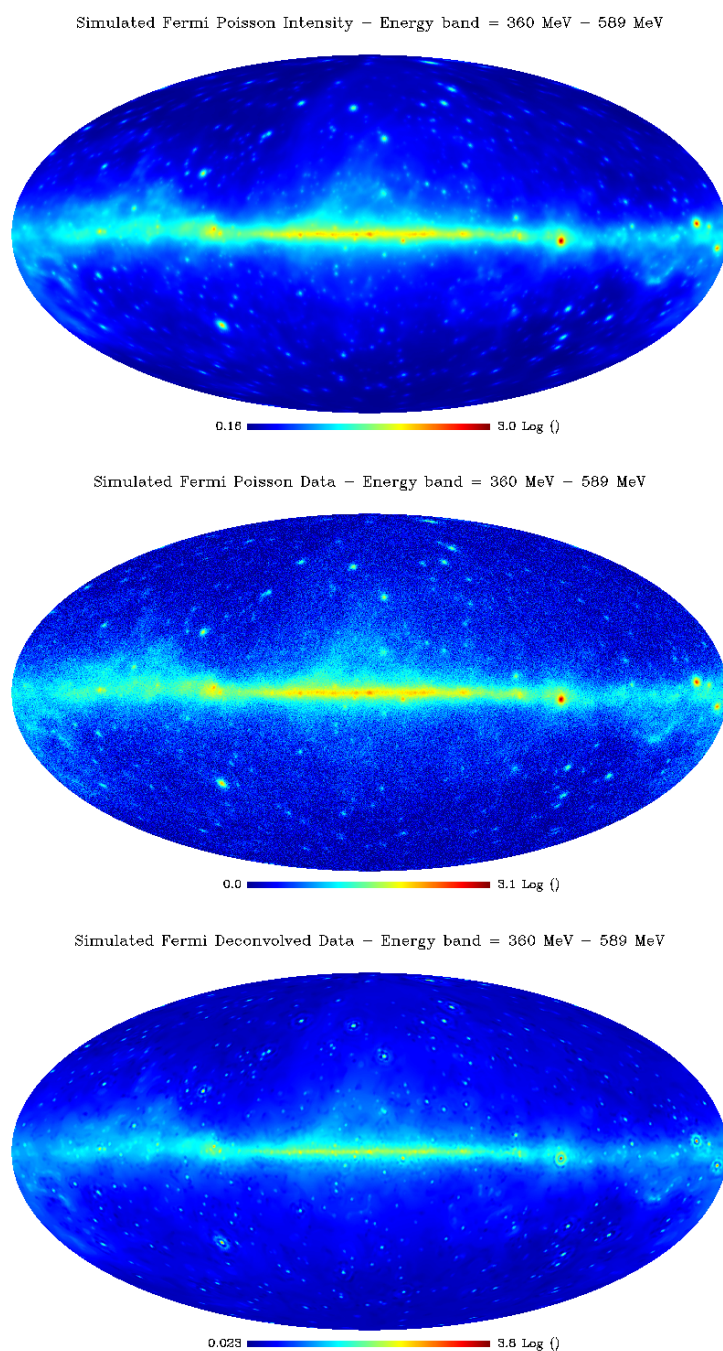


FIGURE 34 – Résultat de l’algorithme de déconvolution multicanale sur la bande en énergie 360 MeV - 589 MeV (*En haut* : Carte d’intensité simulée. *Au milieu* : Carte de photons simulée avec bruit Poissonien. *Bottom* : Carte déconvoluée). Les images sont en échelle logarithmique.



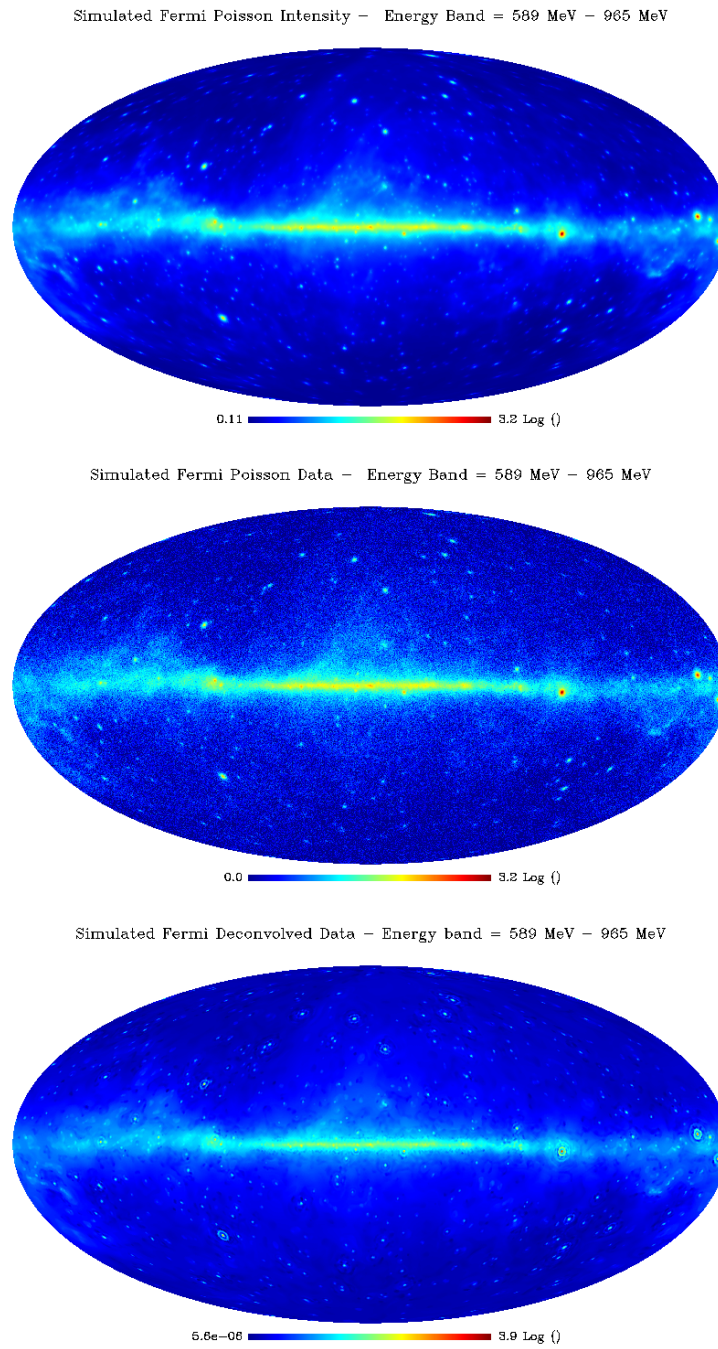


FIGURE 35 – Résultat de l’algorithme de déconvolution multicanale sur la bande en énergie 589 MeV - 965 MeV (*En haut* : Carte d’intensité simulée. *Au milieu* : Carte de photons simulée avec bruit Poissonien. *Bottom* : Carte déconvoluée). Les images sont en échelle logarithmique.



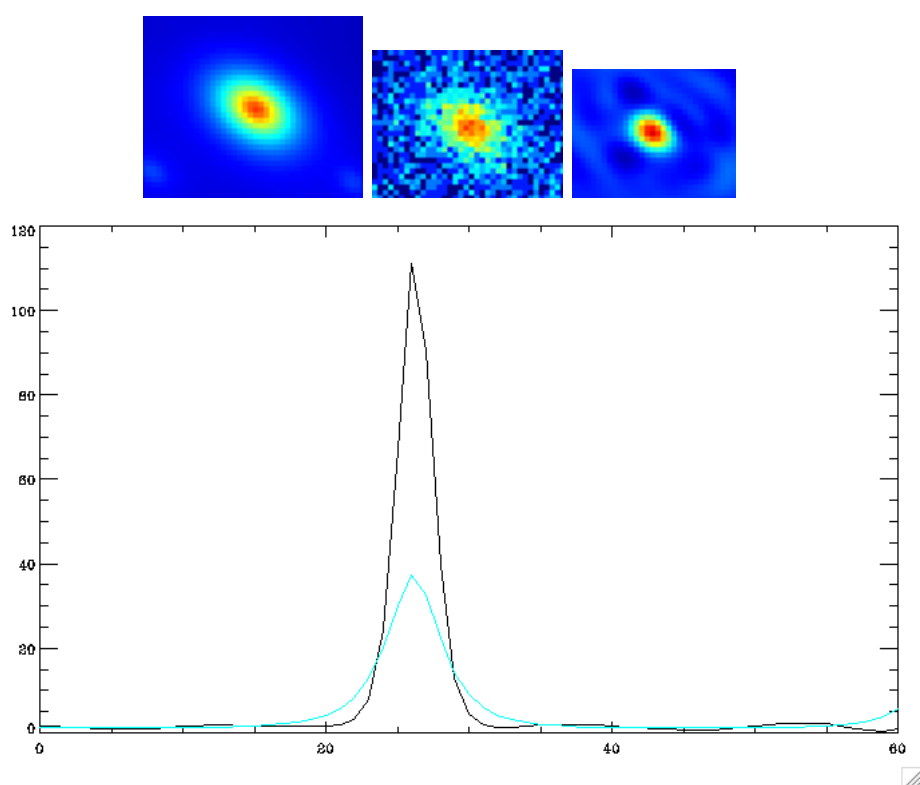


FIGURE 36 – Effet de l’algorithme de déconvolution multicanale sur une seule source ponctuelle de rayonnement gamma. *En haut* : Source ponctuelle de rayonnement gamma sur des données Fermi simulées (Bande en énergie : 360 MeV - 589 MeV) (*A gauche* : Intensité. *Au centre* : Données bruitées. *A droite* : Données déconvoluées.) *En bas* : Profil de la source ponctuelle. En bleu, la carte d’intensité. En noir, la carte déconvoluée.

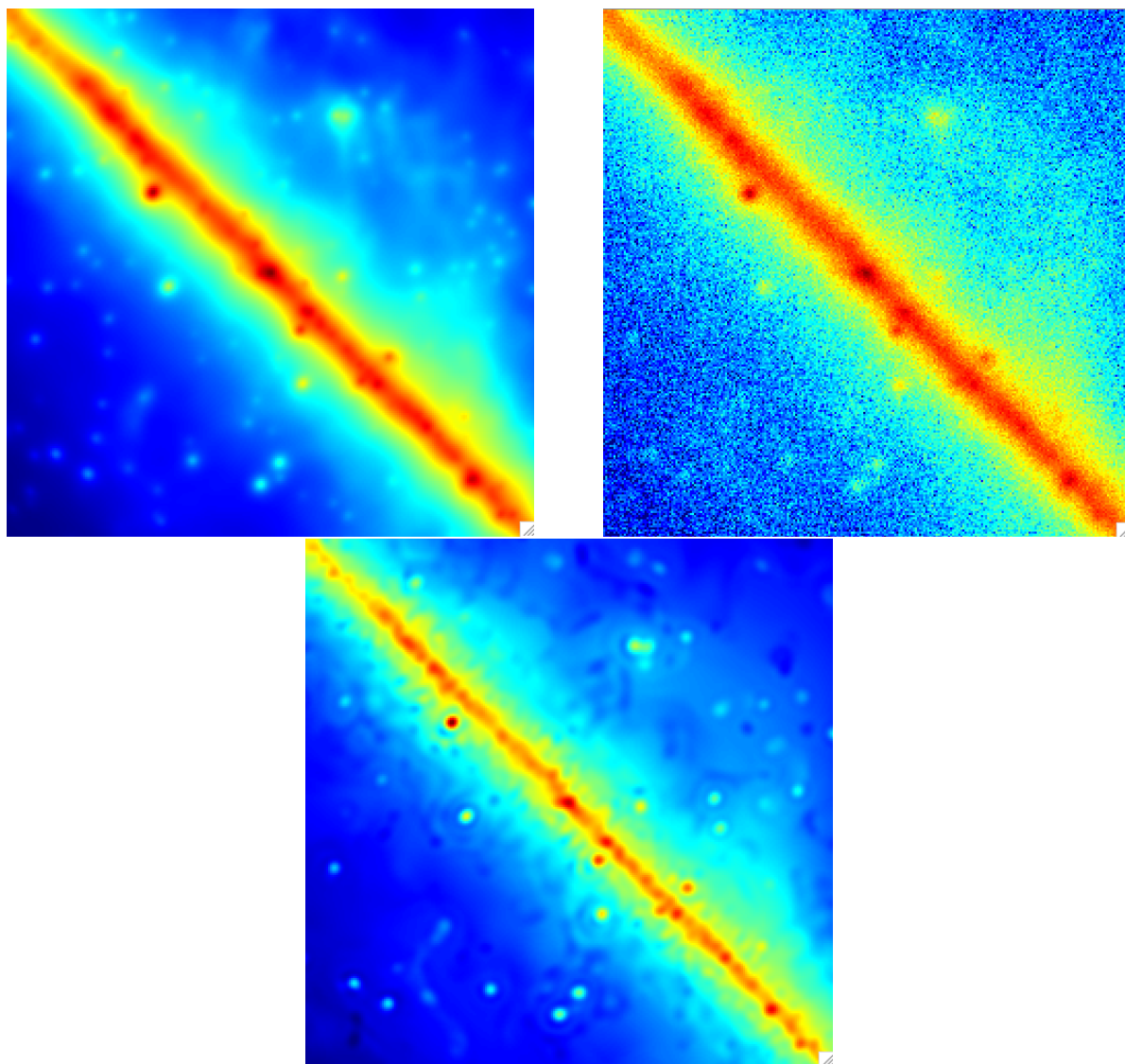


FIGURE 37 – Vue sur une face HEALPix. Résultat de l’algorithme de déconvolution multicanale sur le plan galactique. *En haut à gauche* : Carte d’intensité simulée. *En haut à droite* : Carte de photons simulée avec bruit de Poisson. *En bas* : Carte déconvoluée. Bande en énergie : 360 MeV - 589 GeV. Les images sont en échelle logarithmique.

---

## Sixième partie

# Séparation de composantes

## Sommaire

---

<b>24</b>	<b>Template Fitting</b>	<b>96</b>
24.1	Composantes . . . . .	96
24.2	Template Fitting . . . . .	96
24.2.1	Template Fitting dans l'espace pixel . . . . .	96
<b>25</b>	<b>Amélioration du template fitting à l'aide de la transformée en ondelettes</b>	<b>97</b>
25.1	Principe . . . . .	97
25.2	Résultats . . . . .	98

---

## 24 Template Fitting

### 24.1 Composantes

Les composantes constituant le background sont :

1. Photons extérieurs à la galaxie : fond diffus constant.
2. Gaz atomique : HI
3. Gaz moléculaire : CO
4. Inverse Compton
5. Carte des poussières : EBV
6. Loop One : photons gamma liés à des résidus de supernova (se voit en radio)

### 24.2 Template Fitting

#### 24.2.1 Template Fitting dans l'espace pixel

La méthode de séparation de composantes utilisée est le Template Fitting. Les données poissoniennes observées  $Y$  sont approximées par un modèle d'intensité  $X$  consistant en une combinaison linéaire  $X$  de templates :  $X = \sum_i a_i T_i$ . On recherche le vecteur  $A = (a_i)_i$ , que l'on estime par l'optimisation d'un certain critère sur chaque bande en énergie :

**Maximum de vraisemblance** Sur une carte Fermi, le nombre de photons  $Y[k]$  de chaque pixel  $k$  suit une loi Poissonienne :

$$p[k] = \frac{X[k]^{Y[k]} e^{-X[k]}}{Y[k]!} \quad (116)$$

où  $Y[k]$  est le nombre de photons au pixel d'indice  $k$ , et  $X[k]$  est le nombre de photons prédit par le modèle. La vraisemblance du modèle est le produit des probabilités sur les pixels :

$$L = \prod_k p[k] \quad (117)$$

Le logarithme de la vraisemblance est alors :

$$\ln L = \ln(L) = \sum_k Y[k] \ln(X[k]) - \sum_k X[k] - \sum_k \ln(Y[k]!) \quad (118)$$

Etant donné que le dernier terme ne dépend pas du modèle, il n'interviendra pas dans la maximisation de la vraisemblance et on n'en tiendra pas compte par la suite. La log-vraisemblance se réduit alors à :

$$\ln L = \sum_k Y[k] \ln(X[k]) - \sum_k X[k] \quad (119)$$

Le template fitting consiste à rechercher les coefficients  $a_i$  maximisant la log-vraisemblance (ou minimisant son opposé) :

$$\hat{A} = \text{Arg min}_{a_i} -\ln L \quad (120)$$

**Minimisation de l'écart quadratique** On minimise l'écart quadratique entre les données poissoniennes  $Y$  et le modèle d'intensité  $X$  :

$$L_2 = \|Y - X\|_2 = \|Y - \sum_i a_i T_i\|_2 \quad (121)$$

$$\hat{A} = \text{Arg min}_{a_i} L_2 \quad (122)$$

L'optimisation des deux critères (log-vraisemblance et écart quadratique) donne des résultats identiques. Au SAp, le template fitting est effectué en maximisant la log-vraisemblance. L'optimisation de ce critère ne permettant pas d'effectuer le template fitting dans l'espace ondelettes, on n'utilisera que le critère de l'écart quadratique par la suite. Le problème d'optimisation est résolu à l'aide d'un algorithme de minimisation itératif : Minuit (C++) ou Amoeba (IDL).

Le principal inconvénient de cette méthode est son manque de souplesse. Le fait qu'on modélise les données par une combinaison linéaire de templates rend la méthode extrêmement sensible aux erreurs de modèle sur les templates. En effet, si un template estime mal les données en un endroit de la carte, la méthode essaiera de compenser l'erreur en jouant sur les coefficients d'un autre template, ce qui risque de créer des erreurs sur d'autres portions de la carte, qui seraient compensées en jouant sur les coefficients d'autres templates etc.

## 25 Amélioration du template fitting à l'aide de la transformée en ondelettes

### 25.1 Principe

On souhaite fitter avec un modèle moins rigide. La méthode consiste à fitter non pas chaque template mais chaque échelle d'ondelette de chaque template. Le template fitting consiste alors à :

1. pour un jeu de coefficients donnés, effectuer une combinaison linéaire des échelles de templates dans l'espace ondelettes,
2. en calculer la transformée en ondelettes inverse de façon à obtenir un modèle des données
3. calculer la vraisemblance du modèle obtenu vis à vis des données poissoniennes.

Le template fitting consiste à déterminer le jeu de coefficients tel que la vraisemblance soit maximale.

On effectue le template fitting avec l'ensemble des templates sur des données Fermi réelles  $Y$ , et on compare l'effet de l'utilisation du nouveau modèle (méthode 2) avec le template fitting classique (méthode 1).

## 25.2 Résultats

La vraisemblance par rapport aux données du modèle  $X_2$  obtenu avec la méthode 2 est supérieure à celle du modèle  $X_1$  obtenu avec la méthode 1.

La norme 2 du résidu  $Y - X_2$  (11567142) est plus faible que celle du résidu  $Y - X_1$  (12230568).

En augmentant le nombre de paramètres, on obtient donc un modèle  $X_2$  plus proche des données  $Y$  que la modèle  $X_1$ .

Septième partie

Conclusion

Ces trois années de thèse avaient pour objet le traitement de données Poissonniennes sur la sphère à l'aide de représentations parcimonieuses, dans le cadre de la mission spatiale Fermi. Ce manuscrit présente une nouvelle forme de représentation multiéchelle sur la sphère adaptée aux données Poissonniennes, appelée *Multi-Scale Variance Stabilizing Transform on the Sphere* (MS-VSTS). Cette méthode, qui combine le principe de la stabilisation de variance avec une transformée multiéchelle sur la sphère (wavelets, curvelets), permet d'avoir une représentation multi-échelle des données dans laquelle le bruit sur les coefficients se comporte comme un bruit Gaussien de variance connue, ce qui permet de le supprimer très facilement en utilisant des méthodes classiques de débruitage gaussien, comme le seuillage d'ondelettes.

Dans un premier temps, nous avons mis en oeuvre un algorithme itératif de débruitage de données Poissonniennes sur la sphère basées sur la MS-VSTS. A notre connaissance, il s'agit de la première méthode permettant de supprimer le bruit de Poisson sur des données sphériques. Les méthodes de débruitage Poissonien existantes étant destinées au plan, le seul moyen de débruiter des données sphériques était de projeter les données sur des plans, de débruiter chaque plan séparément et enfin d'effectuer la projection inverse pour reconstituer l'image sphérique débruitée, ce qui entraîne des artefacts visuels sur l'estimée finale et empêche toute modélisation à grande échelle des données. Cette méthode de débruitage s'est avérée performante sur les données du LAT et présente de nombreux avantages comme sa rapidité et surtout sa grande adaptabilité. En effet, la MS-VSTS s'adapte à n'importe quelle transformée multiéchelle sur la sphère (ondelettes, curvelets, ridgelets), de manière à s'adapter au mieux à la morphologie des données.

Dans le cadre de la mission Fermi, outre la suppression du bruit, il est important de pouvoir extraire un modèle de fond des données afin de pouvoir détecter les sources ponctuelles et établir un catalogue des sources. A cet effet, on a proposé un algorithme basé sur la MS-VSTS permettant de supprimer conjointement le bruit de Poisson tout en extrayant un modèle de fond. Un autre objectif de la mission étant l'étude du fond diffus galactique, on souhaitait pouvoir supprimer les sources ponctuelles de rayonnement gamma, de façon à ne garder que le fond diffus galactique que l'on pourra fitter par la suite. Pour cela, on a proposé un algorithme réalisant conjointement le débruitage et l'interpolation de données manquantes (inpainting).

La MS-VSTS a été étendue aux données multicanales, de façon à pouvoir débruiter les données Fermi tout en conservant leur comportement spectral. Nous avons proposé un algorithme de déconvolution multicanale basé sur la MS-VSTS, de façon à supprimer l'effet de la PSF sur les données Fermi.

Au cours de cette thèse, nous avons également abordé le problème de la séparation de composantes, en proposant une méthode de *template fitting* dans l'espace ondelettes, qui permet une modélisation des données plus précise que le *template fitting* dans l'espace pixel. Une tentative d'appliquer la MS-VSTS au *template fitting* n'a pas donné de résultats satisfaisants. De nombreuses choses restent à faire dans le domaine de la séparation de composantes en bruit Poissonien. Un futur axe de recherche serait de pouvoir séparer les composantes sans modèle a priori, en utilisant leur diversité morphologique.





## Références

- [1] A. A. Abdo, M. Ackermann, and al. Fermi/large area telescope bright gamma-ray source list. *Astrophysical Journal Supplement*, 183 :46–66, 2009.
- [2] A. A. Abdo and M. Ackerman et. al. Fermi large area telescope first source catalog. *Astrophysical Journal Supplement*, 188 :405–436, June 2010.
- [3] A. A. Abdo and M. Ackerman et. al. Fermi large area telescope second source catalog. *Astrophysical Journal Supplement*, August 2011.
- [4] P. Abrial, Y. Moudden, J.L. Starck, J. Bobin, M.J. Fadili, B. Afeyan, and M.K. Nguyen. Morphological component analysis and inpainting on the sphere : Application in physics and astrophysics. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 13(6), 2007. 729–748.
- [5] P. Abrial, Y. Moudden, J.L. Starck, M. J. Fadili, J. Delabrouille, and M. Nguyen. CMB data analysis and sparsity. *Statistical Methodology*, 5(4), 2008. 289-298.
- [6] F.J. Anscombe. The transformation of poisson, binomial and negative-binomial data. *Biometrika*, vol. 35, no. 3 :pp. 246–254, 1948.
- [7] J.P. Antoine. The 2-d wavelet transform, physical applications and generalizations. In J.C. van den Berg, editor, *Wavelets in Physics*, pages 23–76. University of Cambridge, 1999.
- [8] W. B. Atwood, A. A. Abdo, and Ackermann et. al. The Large Area Telescope on the Fermi Gamma-Ray Space Telescope Mission. *Astrophysical Journal*, 697 :1071–1102, June 2009.
- [9] E. Bertin and S. Arnouts. Sextractor : Software for source extraction. *Astronomy and Astrophysics Supplement*, 117 :393–404, 1996.
- [10] A. Bijaoui and F. Ruè. A multiscale vision model adapted to the astronomical images. *Signal Processing*, 46 :345–362, 1995.
- [11] E. Candès and D. Donoho. Curvelets. Technical report, Statistics, Stanford University, 1999.
- [12] L. Cayón, J.L. Sanz, E. Martínez-González, A.J. Banday, F. Argüeso, J.E. Gallegos, K.M. Górski, and G. Hinshaw. Spherical mexican hat wavelet : an application to detect non-gaussianity in the coBE-dmr maps. *MNRAS*, 326 :1243, 2001.
- [13] P.H. Van Cittert. Zum einfluss der spaltbreite auf die intensitätsverteilung in spektrallinien ii. *Zeitschrift für Physik*, 69 :298–308, 1931.
- [14] A. Cohen, R. DeVore, P. Petrushev, and H. Xu. Nonlinear approximation and the space  $bv(r^2)$ . *Amer. J. Math.*, 121 :587–628, 1999.
- [15] P.L. Combettes and V.R. Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 4(4) :1168–1200, 2005.
- [16] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [17] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Comm. Pure Appl. Math.*, 57 :1413–1541, 2004.
- [18] D.D. Dixon, W.N. Johnson, J.D. Kurfess, R.K. Pina, R.C. Puetter, W.R. Purcell, T.O. Tuemer, W.A. Wheaton, and A.D. Zych. Pixon-based deconvolution. *Astronomy and Astrophysics, Supplement Series*, 120 :683–686, December 1996.

- [19] D. Donoho and M. Duncan. Digital curvelet transform : strategy, implementation and experiments. In *Proc. Aerosense 200, Wavelet Applications VII*, volume 4056, pages 12–29. SPIE, H. Szu, M. Vetterli, W. Campbell and J. Buss, 2000.
- [20] D.L. Donoho. Nonlinear wavelet methodes for recovery of signals, densitites, and spectra from indirect and noisy data. *Proc. Symposia in Applied Mathematics*, vol. 47 :pp. 173–205, 1993.
- [21] D.L. Donoho. For most marge underdetermined systems of linear equations, the minimal  $l^1$ -norm solution is also the sparsest solution. Technical report, Department of Statistics of Stanford University, 2004.
- [22] F.X. Dupé, M.J. Fadili, and J.L. Starck. A proximal iteration for deconvolving poisson noisy images using sparse representations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 18 :310–321, 2009.
- [23] A. A. Abdo et al. Detection of gamma-ray emission from the starburst galaxies m82 and ngc 253 with the large area telescope on fermi. *The Astrophysical Journal Letters*, 709 :L152, 2010.
- [24] A. A. Abdo et al. Detection of the small magellanic cloud in gamma-rays with fermi/lat. *Astronomy and Astrophysics*, 523 :A46, 2010.
- [25] A. A. Abdo et al. Fermi large area telescope observations of local group galaxies : Detection of m31 and search for m33. *Astronomy and Astrophysics*, 523 :L2, 2010.
- [26] A. A. Abdo et. al. Fermi observations of cassiopeia and cepheus : Diffuse gamma-ray emission in the outer galaxy. *The Astrophysical Journal*, 710 :133, 2010.
- [27] A. A. Abdo et al. Observations of the large magellanic cloud with fermi. *Astronomy and Astrophysics*, 512 :A7, 2010.
- [28] A. Abdo et. al. Fermi large area telescope measurements of the diffuse gamma-ray emission at intermediate galactic latitudes. *Physical Review Letters*, 103 :251101, 2009.
- [29] A. Abdo et. al. Fermi large area telescope observations of the cosmic-ray induced gamma-ray emission of the earth’s atmosphere. *The Astrophysical Journal*, 703 :1249, 2009.
- [30] M. Ackermann et. al. constraints on the cosmic-ray density gradient beyond the solar circle from fermi gamma-ray observations of the third galactic quadrant. *The Astrophysical Journal*, 726 :81, 2011.
- [31] M.A.T. Figueiredo and R.D. Nowak. An em algorithm for wavelet-based image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(8) :906–916, 2003.
- [32] M. Fisz. The limiting distribution of a function of two independant random variables and its statistical application. *Colloquium Mathematicum*, vol. 3 :pp. 138–146, 1955.
- [33] P. Fryźlewicz and G.P. Nason. A haar-fisz algorithm for poisson intensity estimation. *J. Comp. Graph. Stat.*, vol. 13 :pp. 621–638, 2004.
- [34] K. M. Górski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bartelmann. HEALPix : A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere. *Astrophysical Journal*, 622, April 2005. 759–771.
- [35] I. Grenier, J.-M. Casandjian, and R. Terrier. Unveiling extensive clouds of dark gas in the solar neighborhood. *Science*, 307 :1292 – 1295, 2005.

- [36] R. C. Hartman, D. L. Bertsch, S. D. Bloom, A. W. Chen, P. Deines-Jones, J. A. Esposito, C. E. Fichtel, D. P. Friedlander, S. D. Hunter, L. M. McDonald, P. Sreekumar, D. J. Thompson, B. B. Jones, Y. C. Lin, P. F. Michelson, P. L. Nolan, W. F. Tompkins, G. Kanbach, H. A. Mayer-Hasselwander, A. Mucke, M. Pohl, O. Reimer, D. A. Kniffen, E. J. Schneid, C. von Montigny, R. Mukherjee, and B. L. Dingus. Third EGRET catalog (3EG) (Hartman+, 1999). *VizieR Online Data Catalog*, 212 :30079+, August 1999.
- [37] M. Holschneider. Wavelet analysis on the sphere. *J. Math. Phys.*, 37(8) :4156, 1996.
- [38] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and P. Tchamitchian. A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform. In *Wavelets : Time-Frequency Methods and Phase-Space*, pages 286–297. Springer-Verlag, 1989.
- [39] P.A. Jansson, R.H. Hunt, and E.K. Peyler. Resolution enhancement of spectra. *Journal of the Optical Society of America*, 60 :596–599, 1970.
- [40] E. Kolaczyk. Bayesian multiscale models for poisson processes. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 94, no. 447 :pp. 920–933, 1999.
- [41] L. Landweber. An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, 73 :615–624, 1951.
- [42] S. Lefkimmiatis, P. Maragos, and G. Papandreou. Bayesian inference on multiscale models for poisson intensity estimation : Applications to photon-limited image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 20, no. 20, january 2009.
- [43] L.B. Lucy. An iteration technique for the rectification of observed distributions. *Astronomical Journal*, 79 :745–754, 1974.
- [44] L.B. Lucy. Image restoration of high photometric quality. In Space Telescope Science Institute, editor, *The Restoration of HST Images and Spectra II*, page 79. R.J. Harnisch and R.L. White, 1994.
- [45] P. Magain, F. Courbin, and S. Sohy. Deconvolution with correct sampling. *Astrophysical Journal*, 494 :472, 1998.
- [46] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 2nd edition, 1998.
- [47] J.R. Mattox and D.J. Macomb. *The EGRET Likelihood Analysis Program, LIKE*, September 1993.
- [48] I. Moreau. *Glast : Détection de sources*. Master’s thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, May 2006.
- [49] J.D. Myers. Lat background models, 2009. <http://fermi.gsfc.nasa.gov/ssc/data/access/lat/BackgroundModels.html>.
- [50] J.D. Myers. Lat 1-year point source catalog, 2010. [http://fermi.gsfc.nasa.gov/ssc/data/access/lat/1yr\\_catalog/](http://fermi.gsfc.nasa.gov/ssc/data/access/lat/1yr_catalog/).
- [51] M. Mäkitalo and A. Foi. Optimal inversion of the anscombe transformation in low-count poisson image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 20 :99–109, 2011.
- [52] R. Nowak and E. Kolaczyk. A statistical multiscale framework for poisson inverse problems. *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 45, no. 5 :pp. 1811–1825, 2000.
- [53] J.C. Olivo-Marin. Extraction of spots in biological images using multiscale products. *Pattern Recognition*, 35(5) :420–431, 2002.

- [54] J. Schmitt, J. L. Starck, J. M. Casandjian, J. Fadili, and I. Grenier. Poisson denoising on the sphere : application to the fermi gamma ray space telescope. *Astronomy and Astrophysics*, 517, 2010.
- [55] P. Schröder and W. Sweldens. Spherical wavelets : Efficiently representing functions on the sphere. In *Computer Graphics Proceedings (SIG-GRAPH 95)*, pages 161–172, 1995.
- [56] M.J. Shensa. Discrete wavelet transforms : Wedding the a trous and mallat algorithms. *IEE Trans. Signal Processing*, 40 :2464–2482, 1992.
- [57] J.-L. Starck, E. Candès, and D. Donoho. Astronomical image representation by the curvelet transform. *Astronomy and Astrophysics*, 398 :785, 2003.
- [58] J.-L. Starck, E. Candès, and D. Donoho. The curvelet transform for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(6) :131, 2003.
- [59] J.-L. Starck, M. Elad, and D.L. Donoho. Redundant multiscale transforms and their application for morphological component analysis. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 132, 2004.
- [60] J.-L. Starck, J. M. Fadili, S. Digel, B. Zhang, and J. Chiang. Source detection using a 3D sparse representation : application to the Fermi gamma-ray space telescope. *á*, 504 :641–652, September 2009.
- [61] J.-L. Starck, Y. Moudden, P. Abrial, and M. Nguyen. Wavelets, ridgelets and curvelets on the sphere. *Astronomy and Astrophysics*, 446 :1191–1204, 2006.
- [62] J.-L. Starck, F. Murtagh, and A. Bijaoui. *Image Processing and Data Analysis*. Cambridge University Press, 1998.
- [63] J.L. Starck, A. Bijaoui, and F. Murtagh. Multiresolution support applied to image filtering and deconvolution. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 57 :420–4311, 1995.
- [64] L. Tenorio, A.H. Jaffe, S. Hanany, and C.H. Lineweaver. Applications of wavelets to the analysis of cosmic microwave background. *MNRAS*, 310 :823, 1999.
- [65] A.N. Tikhonov, A.V. Goncharski, V.V. Stepanov, and I.V. Kochokov. Ill-posed image processing problems. *Soviet Physics - Doklady*, 32 :456–458, 1987.
- [66] K. Timmerman and R. Nowak. Multiscale modeling and estimation of poisson processes with application to photon-limited imaging. *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 45, no. 3 :pp. 846–862, 1999.
- [67] B.P. Wakker and U.J. Schwarz. The multi-resolution clean and its application to the short-spacing problem interferometry. *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics*, 200 :312, 1988.
- [68] N. Weir. A multi-channel method of maximum entropy image restoration. In *Astronomical Society of the Pacific, editor, Astronomical Data Analysis Software and System I*, pages 186–190. D.M. Worrall and C. Biemesderfer and J. Barnes, 1992.
- [69] Y. Wiaux, L. Jacques, P. Vielva, and P. Vanderghenst. Fast directional correlation on the sphere with steerable filters. *Astrophysical Journal*, 652 :820, 2006.
- [70] Y. Wiaux, J.D. McEwen, P. Vanderghenst, and O. Blanc. Exact reconstruction with directional wavelets on the sphere. *MNRAS*, 388 :770, 2008.

- 
- [71] I. Yamada. The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings. In *Inherently Parallel Algorithm in Feasibility and Optimization and their Applications*, pages pp. 473–504. Elsevier, 2001.
- [72] B. Zhang. *Contributions to fluorescence microscopy in biological imaging : PSF modeling, image restoration, and super-resolution detection*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 2007.
- [73] B. Zhang, J. Fadili, and J.-L. Starck. Wavelets, ridgelets and curvelets for poisson noise removal. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, no. 6 :pp. 1093–1108, 2008.

## A Publications

### A.1 Chapitre de livre

- *Poisson Noise Removal in Spherical Multichannel Images : Application to FERMI Data*, J. Schmitt, J.-L. Starck, J. Fadili, S. Digel, *Advances in Machine Learning and Data Mining for Astronomy*, Chapman and Hall, Décembre 2010

### A.2 Articles de revue à comité de lecture

- *Multichannel denoising and deconvolution on the Sphere : Application to the Fermi Gamma Ray Space Telescope*, J. Schmitt, J.-L. Starck, J.-M. Casandjian, J. Fadili, I. Grenier, *Astronomy and Astrophysics*, en cours de soumission
- *Poisson Denoising on the Sphere – Application to the Fermi Gamma Ray Space Telescope.*, J. Schmitt, J.-L. Starck, J.-M. Casandjian, J. Fadili, I. Grenier, *Astronomy and Astrophysics*, décembre 2009

### A.3 Proceedings

- *Poisson Denoising on the Sphere*, J. Schmitt, J.-L. Starck, J.-M. Casandjian, J. Fadili, I. Grenier, SPIE Optics & Photonics, San Diego (USA), août 2009
- *A New Method For Poisson Denoising on the Sphere*, J. Schmitt, J.-L. Starck, J.-M. Casandjian, J. Fadili, I. Grenier, Conférence ADA VI, Monastir (Tunisie), juin 2010

## B Toolbox IDL

A set of routines has been developed in IDL and added to the MRS package.

### B.1 Denoising using MS-VSTS + Isotropic Undecimated Wavelet Transform

#### B.1.1 Main routine

##### ► Starting from a photon counts map

↪ `mrs_msvsts_IUWT_denoising.pro` : Compute Poisson denoising on spherical HEALPix data with MS-VSTS + Isotropic Undecimated Wavelet Transform method.

**USAGE :** `mrs_msvsts_IUWT_denoising, image, image_reconstruite, NbrScale=NbrScale, niter=niter, HSD=HSD, coef_seuil=coef_seuil, coef_pos=coef_pos, First_Scale=First_Scale, mask=mask, filter=filter, pyr=pyr, background=background, expo=expo, alm=alm, curv=curv, separation=separation, back_reconstruit=back_reconstruit, update_support=update_support, split_support=split_support`

#### INPUTS :

- Image = (IDL array) HEALPix data to be denoised
- (Optional) background = (IDL array) if set, subtracts a background to the data
- (Optional) support = (IDL array) if set, use a given multi-resolution support instead of computing it with the procedure `mrs_msvsts_hypothesis_testing`

#### OUTPUTS :

- Image\_reconstruite = (IDL array) HEALPix denoised image
- (optional) Support = (IDL array) multi-resolution support of the image
- (optional) Back\_reconstruit = (IDL array) if set, returns the reconstructed background (need the keyword separation)

#### KEYWORD

- NbrScale : Number of scales (default is 4)
- niter : Number of iterations
- HSD : if set, the denoised image will be reconstructed using the Hybrid Steepest Descent Method (soft thresholding at each iteration of the reconstruction)
- coef\_seuil : determines the threshold for the detection of significant coefficients. For each scale  $i$ , the threshold is set to  $\text{coef\_seuil} * \sigma_i$  (default is 5)
- coef\_pos : if set, negative wavelets coefficients are set to 0.
- First\_Scale : if  $> 2$ , finer wavelet scales are set to 0. (default is 1)
- mask : if set, enables inpainting with the given mask
- filter : if set, the inverse wavelet transform will be computed using filters. Else, it will be obtained by a simple addition of all wavelet scales.
- pyr : if set, use pyramidal wavelet transform for the soft thresholding
- expo : if set, decreases the threshold exponentially at each step of the HSD. Else, decreases the threshold linearly



- alm : if set, thresholding is made on alm coefficients instead of wavelet coefficients
- curvelets : if set, thresholding is made on curvelets coefficients instead of wavelet coefficients
- separation : if set, compute separately the sources and the background
- update\_support : if set, update the multi-resolution support at each iteration
- split\_support : if set, splits the multi-resolution support

### B.1.2 Subroutines

↪ **mrs\_msvsts\_IUWT\_param\_computing.pro** : For a given number of scales, determines the VST operator at each scale for the MS-VST transform with spherical isotropic Undecimated Wavelet Transform. At scale  $j$ , the VST operator is :  $T_j(a_j) = b_{(j)} * \text{sgn}(a_j + c_{(j)}) * \sqrt{(|a_j + c_{(j)}|)}$  where  $a_j$  is the  $j$ th scale coefficient of the wavelet transform.

#### USAGE :

**mrs\_msvsts\_IUWT\_param\_computing,nbr,c,b,h,tau1,tau2,tau3,sigma**

#### INPUTS :

- nbr = (int) number of scales for the MS-VST transform

#### OUTPUTS :

- c = (1D IDL array) vector of the  $c(j)$  coefficients for each scale  $j$
- b = (1D IDL array) vector of the  $b(j)$  coefficients for each scale  $j$
- h = (IDL array)  $h[* ,j]$  is the low pass filter which gives the  $j$ th scale from the original image
- tau1 = (1D IDL array) vector of the 1st order moments of  $h[* ,j]$  for each scale  $j$
- tau2 = (1D IDL array) vector of the 2st order moments of  $h[* ,j]$  for each scale  $j$
- tau3 = (1D IDL array) vector of the 3rd order moments of  $h[* ,j]$  for each scale  $j$
- sigma = (1D IDL array) vector of the asymptotic standard deviations of detail coefficients issued from locally homogeneous parts of a signal for each wavelet scale

↪ **mrs\_msvsts\_IUWT\_transform.pro** : Computes the multi-scale variance stabilising transform on the sphere with undecimated isotropic wavelet transform, using the HEALPix representation (nested data representation). The wavelet function is zonal and its spherical harmonics coefficients  $a_{l0}$  follow a cubic box-spline profile. If DifInSH is set, wavelet coefficients are derived in the Spherical Harmonic Space, otherwise (default) they are derived in the direct space.

**USAGE : mrs\_msvsts\_IUWT\_transform, Imag, Trans,  
NbrScale=NbrScale, lmax=lmax, DifInSH=DifInSH**

#### INPUTS :

- Imag = (IDL array) HEALPix data

#### OUTPUTS :

- Trans = IDL structure with the following fields :
  - NbrScale = (int) number of scales

- nside = (int) Healpix nside parameter
- lmax = (int) Maximum l value in the Spherical Harmonic Space (Healpix)
- npix = (int) Number of pixels of the input image (12\*nside\*nside)
- Coef = (IDL array) stabilised wavelet transform of the data
- Coef[\* ,0] = stabilised wavelet coefficients of the finest scale (highest frequencies).
- Coef[\* ,NbrScale-1] = coarsest scale (lowest frequencies).
- lmax = (int) lmax parameter at the first scale

**KEYWORDS :**

- NbrScale = (int) Number of scales (default is 4)
- Lmax = (int) Number of spherical harmonics computed in the decomposition (default is 3\*nside, should be between 2\*nside and 4\*nside)
- DiffInSH : If set, compute the wavelet coefficients as the difference between two resolution in the spherical harmonics representation. Otherwise, the wavelet coefficients are computed as the difference between two resolutions in the initial representation.

↪ **mrs\_msvsts\_IUWT\_hypothesis\_testing.pro** : Computes the MS-VSTS + Isotropic Undecimate Wavelet Transform of a Poisson Image, perform hypothesis testing on coefficients, returns the multi-resolution support and the denoised image using direct reconstruction

**USAGE :** `mrs_msvsts_IUWT_hypothesis_testing, image, image_vst, support, image_rec, NbrScale=NbrScale, coef_seuil=coef_seuil, First_Scale=First_Scale, background=background`

**INPUTS :**

- Imag = (IDL array) HEALPix data
- (optional) background = (IDL array) if set, subtracts a background to the image.

**OUTPUTS :**

- image\_vst = (IDL structure) MS-VSTS transform of the image computed with `mrs_msvsts_IUWT_transform`
- support = (IDL array) multi-resolution support
- image\_rec = (IDL array) directly reconstructed denoised image

**KEYWORDS :**

- NbrScale = (int) Number of scales (default is 4)
- coef\_seuil = (int) determines the threshold for the detection of significant coefficients. For each scale  $i$ , the threshold is set to  $\text{coef\_seuil} * \sigma_i$  (default is 5)
- First\_Scale = (int) if  $> 2$ , finer wavelet scales are set to 0. (default is 1)

## B.2 Denoising using MS-VSTS + Curvelet Transform

### B.2.1 Main routine

↪ **mrs\_msvsts\_curv\_denoising.pro** : Compute Poisson denoising on spherical HEALPix data with MS-VSTS + Curvelet Transform method.

**USAGE :** `mrs_msvsts_curv_denoising, image, image_reconstruite, support, nbrscale=nbrscale, coef_seuil=coef_seuil,`

**suppr\_scale1=suppr\_scale1, hsd=hsd, niter=niter**

**INPUTS :**

- Image = (IDL array) HEALPix data to be denoised

**OUTPUTS :**

- Image\_reconstruite = (IDL array) HEALPix denoised image
- (optional) Support = (IDL array) multi-resolution support of the image

**KEYWORD :**

- NbrScale = Number of scales (default is 4)
- HSD = if set, the denoised estimate will be reconstructed using the Hybrid Steepest Descent Method (soft thresholding at each iteration of the reconstruction). If not set, the estimate is directly reconstructed.
- niter = Number of iterations
- coef\_seuil = determines the threshold for the detection of significant coefficients. For each scale  $i$ , the threshold is set to  $\text{coef\_seuil} * \sigma_i$  (default is 5)
- coef\_pos = if set, negative wavelets coefficients are set to 0.
- suppr\_scale1 = if set, remove the finest scale from the reconstructed estimate.

## B.2.2 Subroutines

↪ **mrs\_msvsts\_curv\_transform.pro** : Compute the multi-scale variance stabilizing transform on the sphere with standard undecimated curvelet transform on the sphere, using the healPix pixel representation (nested data representation). A band of the curvelet transform is defined by two number, the 2D WT scale number and the ridgelet scale number. The output is a IDL structure.

**USAGE :** `mrs_msvsts_curv_transform, Imag, Trans, lmax=lmax, NbrScale=NbrScale, FirstBlockSize=FirstBlockSize`

**INPUTS :**

- Image = (IDL array) HEALPix data to be transformed

**OUTPUTS :**

- Trans = IDL structures with the following fields :
  - NBRSCALE = (INT) Nbr of the scale in the 2D WT
  - TABBLOCKSIZE = (INT) TABBLOCKSIZE[j], Block size in the ridgelet transform at scale  $j$ .  $j = [0..NBRSCALE - 2]$
  - TABNBRSCALERID = (INT) TABNBRSCALERID[j], number of ridgelet band at scale  $j$
  - TABNORM = (2D IDL ARRAY) Normalization array
  - RIDSCALE1 = (IDL STRUCT) ridgelet transform of the first wavelet scale (see `mrs_ridtrans.pro` for details)
  - RIDSCALEj = (IDL STRUCT) ridgelet transform of the  $j$ th wavelet scale.  $j = [0..NBRSCALE - 2]$
  - LASTSCALE = (IDL 1D array) Healpix image of the coarsest scale
  - WT = (IDL STRUCT) Wavelet structure (for internal use only)
  - PYRTRANS = (INT) equal to 1 for a pyramidal curvelet transform and 0 otherwise

**KEYWORD :**

- NbrScale = (INT) Number of scale in the 2D wavelet transform (default 4)
- Undec = (INT) if set, an undecimated curvelet transform is used instead of the pyramidal curvelet transform
- FirstBlockSize = (INT) Block size in the ridgelet transform at the finest scale (default is 16)
- Lmax = (INT) Number of used spherical harmoniques used in the wavelet transform (default = 3\*nside, should be between 2\*nside and 4\*nside)
- Overlap = (LONG) is equal to 1 if blocks are overlapping

### B.3 Multichannel Denoising using MS-VSTS + Multichannel Wavelet Transform

► Starting from a set of photon counts maps

↪ **mrs\_msvsts\_multichannel\_denoising.pro** : Compute multichannel Poisson denoising on spherical 2D-1D HEALPix data with MS-VSTS + multichannel Wavelet Transform method.

**USAGE :**

**mrs\_msvsts\_multichannel\_denoising,input,solution,NbrScale1=NbrScale1,  
NbrScale2=NbrScale2,niter=niter**

**INPUT :**

- Input = (IDL array) multichannel HEALPix data to be denoised

**OUTPUT :**

- Solution = (IDL array) multichannel HEALPix denoised image

**KEYWORD**

- NbrScale1 : Number of scales for the two spatial dimensions (default is 6)
- NbrScale2 : Number of scales for the non-spatial dimension (time or energy) (default is 6)
- niter : Number of iterations

### B.4 Multichannel Deconvolution using MS-VSTS + Multichannel Wavelet Transform

► Starting from a set of photon counts maps

↪ **mrs\_msvsts\_multichannel\_deconvolution.pro** : Compute multichannel Poisson deconvolution on spherical 2D-1D HEALPix data with MS-VSTS + multichannel Wavelet Transform method.

**USAGE :**

**mrs\_msvsts\_multichannel\_deconvolution,input,solution,NbrScale1=NbrScale1,  
NbrScale2=NbrScale2,niter=niter,beam=beam,regularization**

**INPUT :**

- Input = (IDL array) multichannel HEALPix data to be denoised
- beam = (IDL array) set of convolution beams

**OUTPUT :**

- Solution = (IDL array) multichannel HEALPix denoised image

**KEYWORD**

- NbrScale1 : Number of scales for the two spatial dimensions (default is 6)
- NbrScale2 : Number of scales for the non-spatial dimension (time or energy) (default is 6)
- niter : Number of iterations
- regularization : if set, uses a regularization parameter (set to 0.01) to improve the convergence speed of the algorithm

