

THÈSE de DOCTORAT de L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité: Mécanique

---

DÉVELOPPEMENT  
D'UN NOUVEAU MODÈLE DYNAMIQUE  
POUR LA TURBULENCE,  
APPLICATIONS AUX ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS  
ET AUX ÉCOULEMENTS PLANS

---

Présentée par

Jean-Philippe LAVAL

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Soutenue le 05 octobre 1999 devant le jury composé de:

Mme. <b>Bérenghère DUBRULLE</b>	<i>Responsable CEA</i>
Mr. <b>Bernard LEGRAS</b>	
Mr. <b>Maurice MENEGUZZI</b>	<i>Directeur de thèse</i>
Mme. <b>Annick POUQUET</b>	<i>Rapporteur</i>
Mr. <b>Olivier THUAL</b>	<i>Rapporteur</i>
Mr. <b>Vladimir TSEITLINE</b>	<i>Président</i>

CEA Saclay, DSM/DAPNIA Service d'Astrophysique,  
L'Orme des Merisiers, Bât 709  
91191 Gif sur Yvette Cedex



# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier les membres de mon jury de thèse, en particulier Bérengère Dubrulle qui a dirigé mes travaux de recherche. Je lui dois d'avoir essayé, pendant trois ans, de me convertir à son optimisme débordant. Elle m'a également montré comment l'abstraction des raisonnements théoriques pouvait venir au secours de la physique. Je remercie également Maurice Ménéguzzi qui m'a initié aux simulations numériques et qui m'a fourni un code de calcul spectral qui fut à la base de tout mes travaux. Je remercie les rapporteurs de ce travail, Annick Pouquet et Olivier Thual, ainsi que Vladimir Zeitlin et Bernard Legras d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je tiens également à remercier Sergey Nazarenko qui m'a accueilli plusieurs fois en Angleterre et qui fut de précieux conseil tout au long de ma thèse.

Je tiens à remercier le service d'astrophysique du CEA pour m'avoir donné les moyens de mener à bien cette thèse et pour m'avoir autorisé à m'exiler quelques mois aux Etats Unis. Je remercie également le NCAR et Jacques Herring en particulier pour m'avoir accepté dans son équipe ainsi que Peter Sullivan pour ces précieux conseils sur les simulations d'écoulements cisailés. J'ai trouvé, en la personne de Françoise Guichard, une aide très appréciable pour les petits problèmes informatiques. Je lui dois également le peu que j'ai appris sur les mécanismes de la géophysique. Qu'elle en soit remerciée.

La partie numérique de ces travaux n'aurait pu être menée à bien sans les moyens de calcul du CEA et de l'IDRIS. Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé à pénétrer les rouages obscurs de ces formules 1 du calcul scientifique, en particulier Romain Teissier qui m'a fait bénéficier de ses compétences tant en analyse numérique qu'en informatique. Je remercie également Françoise Gaulier qui a fait son possible pour satisfaire mes exigences informatiques.

J'adresse enfin un très grand remerciement à la famille Bréon & Co qui a constitué une véritable famille d'accueil lors de mon séjour à Boulder et qui a ainsi grandement contribué à mon adaptation hors de mes bases Françaises.



# Résumé

Nous avons mis au point un modèle de turbulence basé sur un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes dans l'hypothèse de non-localité des interactions aux petites échelles. Ce modèle fournit une expression du tenseur de Reynolds via une *estimation* des *vitesses* sous-maillles au lieu des *corrélations de vitesses* comme c'est le cas pour la majorité des modèles. Le modèle se présente sous la forme d'un couplage de deux équations: une pour les échelles résolues qui dépend du tenseur de Reynolds engendré par la dynamique des échelles sous-maillles et une pour les échelles sous mailles qui est utilisée pour calculer le tenseur de Reynolds. L'hypothèse de non-localité des interactions aux échelles sous-maillles permet de modéliser leur évolution par une équation linéaire inhomogène où le terme de forçage provient de la cascade d'énergie des échelles résolues vers les échelles sous-maillles.

Ce modèle a été mis en oeuvre en utilisant une décomposition des échelles sous-maillles sur des modes de Gabor et implémenté numériquement dans le cas 2D avec conditions aux limites périodiques. Une méthode particulière (PIC) a été utilisée pour l'intégration des échelles sous-maillles. Les résultats ont été comparés à des résultats de simulations directes dans plusieurs cas d'écoulements typiques. Le modèle a également été appliqué aux cas des écoulements plans parallèles. Une analyse théorique des équations obtenues permet une description des profils moyens de vitesses en accord avec les résultats expérimentaux et les résultats analytiques basés sur l'étude des symétries des équations de Navier-Stokes. Les domaines d'application et les améliorations possibles de ce modèle sont discutés en conclusion.



# Abstract

We developed a turbulent model based on asymptotic developpement of the Navier-Stokes equations within the hypothesis of non-local interactions at small scales. This model provides expressions of the turbulent Reynolds subgrid stresses via *estimates* of the subgrid *velocities* rather than *velocities correlations* as is usually done. The model involves the coupling of two dynamical equations: one for the resolved scales of motions, which depends upon the Reynolds stresses generated by the sub-grid motions, and one for the subgrid scales of motions, which can be used to compute the subgrid Reynolds stresses. The non-locality of interaction at subgrid scales allows to modelise their evolution with a linear inhomogenous equation where the forcing occurs via the energy cascade from resolved to subgrid scales.

This model was solved using a decomposition of sub-grid scales on Gabor's modes and implemented numericaly in 2D with periodic boundary conditions. A particles method (PIC) was used to compute the sub-grid scales. The results were compared with results of direct simulations for several typical flows. The model was also applied to plane parallel flows. An analytical study of the equations allows a description of mean velocity profiles in agreement with experimental results and theoritical results based on the symetries of the Navier-Stokes equation. Possible applications and improvements of the model are discussed in the conclusion.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction aux modèles de turbulence</b>	<b>1</b>
1.1	Nature de la turbulence . . . . .	2
1.2	Les limites de la simulation numérique directe . . . . .	3
1.3	Généralités sur les méthodes LES . . . . .	4
1.3.1	Équations de la turbulence 2D . . . . .	4
1.3.2	Équation des grandes échelles . . . . .	5
1.3.3	Modélisation du tenseur de Reynolds . . . . .	6
1.4	Test <i>a priori</i> . . . . .	9
1.4.1	Définitions . . . . .	9
1.4.2	Exemple de tests <i>a priori</i> . . . . .	10
1.5	Limites des modèles LES standards . . . . .	12
1.6	Plan de la thèse . . . . .	13
<b>I</b>	<b>Description et implémentation du modèle</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Hypothèses et validation du modèle</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	Décomposition en deux échelles . . . . .	19
2.3	Introduction des hypothèses . . . . .	20
2.4	Équations du modèle . . . . .	21
2.4.1	Cas réaliste d'un spectre d'énergie continue . . . . .	21
2.4.2	Cas idéal avec un trou spectral d'énergie . . . . .	21
2.5	Validation numérique des hypothèses . . . . .	22
2.5.1	Tests statiques . . . . .	22
2.5.2	Tests dynamiques . . . . .	26
2.6	Conclusion des tests . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Développement d'un modèle à deux fluides</b>	<b>35</b>
3.1	Motivations . . . . .	36
3.2	Définitions et propriétés . . . . .	36
3.3	Développement analytique des termes non-linéaires . . . . .	38
3.4	Application au cas avec trou spectral d'énergie . . . . .	39
3.4.1	Équations dans l'espace de Gabor . . . . .	39
3.4.2	Propriétés du modèle . . . . .	41

3.4.3	Spectres d'énergie des petites échelles . . . . .	43
3.5	Application au cas sans trou spectral d'énergie . . . . .	44
3.5.1	Équation des petites échelles . . . . .	44
3.5.2	Équation des grandes échelles . . . . .	45
3.6	Liens avec d'autres modèles . . . . .	45
3.6.1	Analyse de la turbulence par la RDT . . . . .	45
3.6.2	Modèle Euler- $\alpha$ . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Implémentation numérique</b>	<b>51</b>
4.1	Introduction . . . . .	52
4.2	Le code Fourier . . . . .	52
4.2.1	Discrétisation spatiale . . . . .	52
4.2.2	Discrétisation temporelle . . . . .	54
4.3	Traitement des petites échelles . . . . .	54
4.3.1	Principe de la méthode PIC . . . . .	54
4.3.2	Reconstruction des champs à petites échelles . . . . .	56
4.3.3	Discrétisation des termes non-linéaires . . . . .	58
4.3.4	Définition du filtre . . . . .	59
4.4	Modélisation du transfert d'entrophie . . . . .	62
4.4.1	Procédure de transfert d'entrophie . . . . .	62
4.4.2	Procédure de refonte des petites échelles . . . . .	63
4.5	Modélisation du transfert d'énergie . . . . .	64
4.6	Introduction de la dissipation . . . . .	66
<b>II</b>	<b>Analyse des résultats du modèle</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Résultats numériques du modèle pour la turbulence 2D</b>	<b>69</b>
5.1	Introduction . . . . .	70
5.2	Simulation de turbulence en déclin . . . . .	70
5.2.1	Description de la simulation . . . . .	70
5.2.2	Comparaison des résultats . . . . .	71
5.3	Simulation de turbulence forcée . . . . .	78
5.3.1	Description de la simulation . . . . .	78
5.3.2	Comparaison des résultats . . . . .	79
5.4	Analyse des comparaisons . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Application aux écoulements plans</b>	<b>85</b>
6.1	Introduction . . . . .	86
6.2	Application du modèle aux écoulements plans . . . . .	87
6.3	Dérivation du modèle . . . . .	87
6.3.1	Équations de bases . . . . .	87
6.3.2	Décomposition des équations . . . . .	88
6.3.3	Transformée de l'équation des petites échelles . . . . .	89
6.4	Analyse théorique . . . . .	89

---

6.4.1	Équations moyennées . . . . .	89
6.4.2	Développement loin des parois . . . . .	90
6.4.3	Développement près des parois . . . . .	93
6.4.4	Comparaison du modèle complet . . . . .	97
6.5	Synthèse et discussion . . . . .	98
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>101</b>
<b>Annexes</b>		<b>105</b>
<b>A Validation des hypothèses de non-localité</b>		<b>107</b>
	Non-locality of interaction of scales in the dynamics of 2D incompressible fluids . . . . .	107
<b>B Resultats avec séparation d'échelles</b>		<b>117</b>
	Dynamical modeling of sub-grid scales in 2D turbulence . . . . .	117
<b>C Caractéristiques des petites échelles</b>		<b>145</b>
	Non-local 2D turbulence and Batchlor's regime for passives scalars . . . . .	145
<b>D Application du modèle aux écoulements plans</b>		<b>165</b>
	Derivation of equilibrium profiles in plane parallel flows from a dynamical sub-grid model . . . . .	165
<b>Références bibliographiques</b>		<b>199</b>



# Liste des Figures

1.1	Image de la tache rouge de Jupiter . . . . .	2
1.2	Test <i>a priori</i> : modèle de similarité . . . . .	10
1.3	Test <i>a priori</i> : modèle de fonction de structure . . . . .	11
2.1	Schéma d'un trou spectral d'énergie . . . . .	18
2.2	Schéma d'un spectre d'énergie de turbulence forcée: hypothèse de non-localité des interactions . . . . .	19
2.3	Spectres comparatifs des termes non-linéaires (turbulence en déclin) . . . . .	23
2.4	Spectres comparatifs des termes non-linéaires (turbulence forcée) . . . . .	24
2.5	Spectres comparatifs des termes non-linéaires pour une séparation d'échelles réalisée avec le filtre $f^2$ . . . . .	25
2.6	Spectres comparatifs des termes non-linéaires moyennés sur plusieurs pas de temps des petites échelles . . . . .	26
2.7	Comparatif des différentes hypothèses d'approximation par une résolution directe des systèmes d'équations correspondants . . . . .	30
2.8	Test dynamique : turbulence en déclin . . . . .	32
2.9	Test dynamique : turbulence forcée . . . . .	33
3.1	Schéma d'évolution d'une particule de vortacité dans l'espace $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ . . . . .	41
3.2	Spectre d'énergie des particules (cas non forcé) . . . . .	44
3.3	Spectre d'énergie des particules (cas forcé) . . . . .	44
3.4	Comparatif de la vortacité avec le modèle <i>Euler</i> - $\alpha$ . . . . .	49
3.5	Comparatif des spectres d'énergie avec le modèle <i>Euler</i> - $\alpha$ . . . . .	50
4.1	Test <i>a priori</i> de la discrétisation en particules: spectres des différents termes non-linéaires . . . . .	65
4.2	Test <i>a priori</i> du modèle: comparaison du tenseur de Reynolds complet . . . . .	65
5.1	Comparatif de la vortacité grandes échelles entre une simulation à grande résolution et notre modèle (turbulence en déclin) . . . . .	73
5.2	Vortacité à grandes échelles pour deux simulations à faible résolution (turbulence en déclin) . . . . .	73
5.3	Comparatif de la vortacité petites échelles entre une simulation à grande résolution et notre modèle (turbulence en déclin, $t=5$ ) . . . . .	74
5.4	Comparatif de la vortacité totale entre une simulation à grande résolution et notre modèle (turbulence en déclin) . . . . .	74

5.5	Comparatif des spectres d'énergie entre une simulation à grande résolution et notre modèle (turbulence en déclin, $t=5$ ) . . . . .	75
5.6	Comparatif de la vorticité grandes échelles entre une simulation à grande résolution et notre modèle (turbulence en déclin, $t=20$ ) . . . . .	76
5.7	Vorticité à grandes échelles pour deux simulations à faible résolution (turbulence en déclin $t=20$ ) . . . . .	76
5.8	Comparatif des spectres d'énergie des simulation fig. 5.6 et 5.7 (turbulence en déclin, $t=20$ ) . . . . .	77
5.9	Comparatif de la vorticité grandes échelles entre une simulation à grande résolution, une simualtion à faible résolution et notre modèle (turbulence forcée) . . . . .	80
5.10	Comparatif de la vorticité petites échelles entre une simulation à grande résolution et notre modèle (turbulence forcée) . . . . .	81
5.11	Comparatif de la vorticité totale entre une simulation à grande résolution et notre modèle (turbulence forcée) . . . . .	81
5.12	Comparatif des spectres d'énergie entre une simulation à grande résolution, une simualtion à faible résolution et notre modèle (turbulence forcée) . . . .	82
6.1	Croquis d'un écoulement plan . . . . .	88
6.2	Comparaison des profils de vitesse près d'une paroi (données de Kestin <i>et al</i> )	96
6.3	Comparaison des profils de vitesse sans transition algébrique (données de Zagarola) . . . . .	96
6.4	Comparaison des profils de vitesse avec transition algébrique (données de Zagarola) . . . . .	96
6.5	Fonction $\eta(z_+)$ utilisée dans notre modèle près d'une paroi . . . . .	96
6.6	Profils de vitesse dans une canalisation pour $R_+=392.27$ : comparaison de notre modèle avec les données de Moser <i>et al.</i> . . . . .	97
6.7	Profils de vitesse dans une couche limite pour $R_+=20920$ : comparaison de notre modèle avec les données de Nockemann <i>et al.</i> . . . . .	98

# Chapitre 1

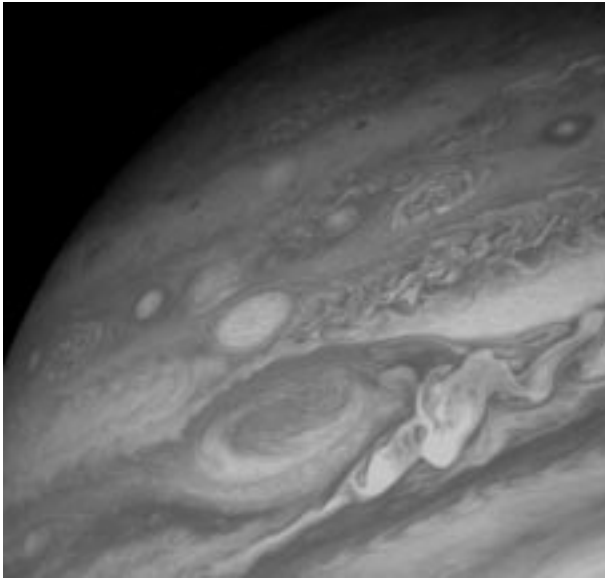
## Introduction aux modèles de turbulence



*Image de la terre prise le 11 décembre 1990 à 14:10 UTC par Galiléo (image du CRI de Bordeaux).*

## 1.1 Nature de la turbulence

La turbulence constitue un des domaines les plus actifs de la physique contemporaine. Elle est en effet gouvernée par des équations assez simples et n'est pourtant pas encore totalement comprise. Elle joue un rôle important dans la plupart des domaines scientifiques et industriels. C'est le cas par exemple de l'astrophysique, de la météorologie ou de l'aéronautique. Même si la majorité des applications de la turbulence est purement 3D, certains problèmes, comme en astrophysique, impliquent des écoulements à géométrie quasi-bidimensionnelle. C'est le cas par exemple des atmosphères planétaires (cf. fig. 1.1) Ceci rend la turbulence 2D digne d'intérêt. La dynamique de la turbulence 2D a été étudiée en outre par Brachet *et al* [10] ou Babiano *et al* [2],[1],[3]. La turbulence est



**Figure 1.1 :** *Images de la tache rouge de Jupiter, une structure tourbillonnaire aussi grosse que la terre. Cette structure est comparable à celles développées dans une simulation de turbulence 2D (fig. 5.4). Cette image a été prise de Voyager 1 le 25 février 1979 (image du CRI de Bordeaux).*

difficile à définir avec rigueur. Elle peut cependant être caractérisée par un nombre sans dimension appelé “nombre de Reynolds” et défini comme  $Re = UL/\nu$  où  $L$  et  $U$  sont respectivement une échelle et une vitesse caractéristique de l'écoulement et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Le nombre de Reynolds représente le rapport des forces d'inertie, qui tendent à désordonner l'écoulement, et de la viscosité qui tend à le stabiliser. Ainsi, plus ce nombre est grand, plus l'écoulement tend vers un état turbulent. Pour  $Re < 10$ , l'écoulement est dit “laminaire”, c'est à dire que les particules fluides ont une trajectoire quasi rectiligne et pouvant être prédit à petites échelles. Pour  $10 < Re < 100$ , les premières instabilités peuvent apparaître sous forme notamment de rouleaux, de tourbillons ou de plumes [75],[59], c'est un régime dit de “transition vers la turbulence” [41]. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, les instabilités se couplent et le désordre s'installe progressivement pour aboutir vers  $Re = 10^5, 10^6$  à une turbulence dite “pleinement développée” où l'écoulement est alors complètement désordonné.

La turbulence fait intervenir un grand nombre d'échelles spatiales allant de l'échelle caractéristique de l'écoulement à celle où la dissipation d'énergie devient prépondérante. Pour un écoulement atmosphérique, ces échelles sont de l'ordre de 1000 km à 1 cm. C'est ce grand nombre de degrés de liberté qui confère à la turbulence son caractère imprévisible.



Les détails de l'écoulement deviennent impossible à prévoir, et sont, de toutes manières, fortement liés d'une part aux conditions initiales et d'autre part, aux conditions aux limites. Ainsi, deux expériences similaires avec des conditions initiales très voisines donneront des résultats différents après un temps d'évolution suffisamment long. Afin de calculer un écoulement turbulent à une résolution donnée, il est nécessaire de connaître avec précision les conditions initiales aux plus petites échelles impliquées. C'est ce qui limite par exemple les prévisions météorologiques qui nécessiteraient de connaître, à un instant donné, l'état de l'atmosphère à l'échelle du centimètre. Il est donc pratiquement impossible de prédire l'évolution déterministe d'un écoulement turbulent sur un temps assez long. Tout au plus, peut-on espérer déterminer ses propriétés statistiques.

L'étude de la turbulence peut être entreprise par différentes approches. Les mathématiciens étudient plus particulièrement la structure des équations de Navier-Stokes [50] gouvernant la dynamique de la plupart des écoulements. Ils cherchent, par exemple, à démontrer l'existence ou l'unicité de solutions. Une approche plus physique consiste à rechercher des lois fondamentales de la turbulence telles que des lois statistiques ou des propriétés d'invariance. Les premiers résultats significatifs dans cette voie ont été obtenus par Richardson [63] qui a proposé un schéma d'organisation de la turbulence et par Kolmogorov [36] qui a déterminé une loi d'échelle pour les fonctions de structure. Plus tard, ces dernières prédictions ont été mises en défaut par les résultats expérimentaux ouvrant la voie à toute une recherche nouvelle sur le rôle de l'intermittence. Plusieurs types de modèles sont proposés aujourd'hui tels que le modèle "log-normal" [37], le " $\beta$ -modèle" [23] ou le modèle "multifractal" [58]. Les ingénieurs, quant à eux, recherchent des résultats plus "pratiques" concernant la turbulence. Ils s'intéressent par exemple aux coefficients de transport turbulent ou aux valeurs maximales prévisibles de concentration d'énergie. D'une manière générale, leur démarche consiste à modéliser des quantités moyennées dans l'espace ou dans le temps.

L'étude de la turbulence peut être abordée d'un point de vue théorique ou expérimental sachant que, depuis quelques années, la simulation numérique vient s'ajouter aux études expérimentales. En effet les puissances de calcul disponibles aujourd'hui permettent d'envisager la résolution directe des équations de Navier-Stokes (DNS<sup>1</sup>) dans certaines géométries et pour de faibles nombres de Reynolds. Cette approche est généralement moins coûteuse est plus rapide à mettre en oeuvre qu'une expérience. Elle est reproductible, et permet une meilleure analyse des résultats. L'expérimentation [72][27] reste, par contre, nécessaire pour valider certaines hypothèses et pour étudier des cas plus complexes inaccessibles à la simulation numérique.

## 1.2 Les limites de la simulation numérique directe

La simulation directe nécessite de calculer toutes les échelles de la turbulence. Sinon, l'énergie s'accumule aux plus petites échelles calculées au lieu d'être dissipée par la viscosité aux échelles inférieures. Ce phénomène, discuté par Falkovich [20], est communément

---

<sup>1</sup>abréviation de *Direct Numerical Simulation*

appelé “effet goulot”. Dans le cadre d’une simulation directe des équations de Navier-Stokes, il est donc nécessaire d’effectuer les calculs sur une grille dont les mailles ont une dimension inférieure ou égale à l’échelle de dissipation  $\eta$ . Cette dimension varie avec le nombre de Reynolds. On peut montrer par des arguments dimensionnels qu’elle est de l’ordre de  $Re^{3/4}$  en 3D et de  $Re^{1/2}$  en 2D. Le pas de temps est généralement déterminé pour obtenir un  $CFL^2 < 1$ . Le pas de temps est donc proportionnel à  $\eta$ . En définitive, le nombre de calculs à effectuer, varie comme  $Re^{3/2}$  en 2D et comme  $Re^3$  en 3D. Les puissances de calcul actuelles permettent de simuler des écoulements avec des nombres de Reynolds de quelques milliers [77] [40] alors que pour beaucoup d’applications physiques telles que pour l’astrophysique, les nombres de Reynolds sont de l’ordre de  $10^6$  et plus. Par exemple, le nombre de points nécessaires pour une simulation directe de la convection solaire [11] serait de l’ordre de  $10^{30}$  alors que les plus gros ordinateurs aujourd’hui ne peuvent traiter que de l’ordre de  $10^9$  points de grille. Compte tenu de la progression de la puissances des calculateurs [31], aussi bien en ce qui concerne la taille des mémoires que la vitesse des processeurs, il est évident que la simulation directe ne pourra pas résoudre les problèmes astrophysiques et géophysiques avant un grand nombre d’années.

Pour parvenir à résoudre ce type de problème, il faut modéliser le comportement des plus petites échelles qui monopolisent la majeure partie du temps de calcul et qui ont surtout un intérêt statistique. On ne peut cependant pas ignorer ces petites échelles car elles peuvent jouer un rôle important dans la dynamique des grandes échelles. Plusieurs approches sont alors envisageables. La première consiste à considérer que toute les parties fluctuantes font partie de la turbulence et doivent être modélisées. Les équations de base sont alors les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS<sup>3</sup>) faisant intervenir un terme à modéliser. Plusieurs modèles de turbulence sont basés sur ce principe, les plus courants, basés sur une hypothèse de viscosité turbulente, étant le modèle de la “longueur de mélange” introduit par Prandtl [62] ou le modèle “ $k - \epsilon$ ” [30]. Une autre approche dite LES<sup>4</sup>, consiste à modéliser les plus petites échelles pour ne calculer l’évolution que des grandes structures de l’écoulement. Cette approche laisse la possibilité aux grandes échelles de varier dans le temps. C’est sur cette approche que nous nous concentrerons par la suite.

## 1.3 Généralités sur les méthodes LES

### 1.3.1 Équations de la turbulence 2D

Les fluides que nous étudierons sont des fluides ordinaires incompressibles qui satisfont aux équations de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

---

<sup>2</sup>le CFL est défini comme le rapport de la taille d’une cellule sur la vitesse maximale de l’écoulement

<sup>3</sup>abréviation de *Reynolds Averaged Navier-Stokes*

<sup>4</sup>abréviation de *Large Eddy Simulation*

Dans ces équations,  $\mathbf{u}(x, t)$  et le champ de vitesse,  $p$  la pression,  $\rho$  la masse volumique et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. En utilisant  $U$  et  $L$ , comme échelle de vitesse et de longueur caractéristique, l'équation (1.1) peut se mettre sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} &= -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Cette équation peut aussi s'écrire en faisant intervenir la vortacité  $\tilde{\mathbf{w}}$  définie par:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{u}}\tag{1.3}$$

En prenant le rotationnel de (1.2), on obtient:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{w}},\tag{1.4}$$

En deux dimensions, le terme  $-\tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}$  est absent. En trois dimensions, ce terme est responsable de l'étirement et de la torsion des tourbillons et peut créer ou redistribuer de la vortacité. En 2D l'équation de la vortacité se réduit à l'équation scalaire suivante:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\omega} = \nu \nabla^2 \tilde{\omega},\tag{1.5}$$

où  $\tilde{\omega} = \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{z}$  est la composante de la vortacité perpendiculaire au plan (x,y) considéré.

### 1.3.2 Équation des grandes échelles

La simulation des grandes échelles (LES) consiste à calculer directement les grandes échelles à l'aide des équations de Navier-Stokes et à appliquer un modèle de turbulence sur les plus petites échelles (SGS<sup>5</sup>). La justification d'un tel traitement vient du fait que les grandes échelles contiennent une grande partie de l'énergie totale et varient fortement en fonction des données du problème. Le comportement des petites échelles est, quant à lui, plus "universel" et donc plus facile à modéliser. De plus leur énergie étant moindre, l'erreur introduite par la modélisation des petites échelles sur le résultat final est de moindre importance. Cette approche constitue une sorte de compromis entre le calcul direct de toutes les échelles (DNS) et la modélisation complète de la turbulence (RANS).

Les composantes à grandes échelles sont obtenues par l'application d'un filtre. Le champ de vitesse filtré est ainsi obtenu par:

$$\bar{u}_i = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'\tag{1.6}$$

où  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  est une fonction localisée ou à support compact. Pour un écoulement homogène isotrope, il est logique de prendre un filtre ne dépendant que de la distance entre les deux points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ . Les filtres les plus fréquemment utilisés sont les filtres "Gaussien" où  $G$  est une fonction Gaussienne, les filtres "chapeau" qui sont des filtres raides dans

<sup>5</sup>abréviation de *Sub-Grid Scales*

l'espace physique ou les filtres "cut-off" qui sont des filtres raides dans l'espace de Fourier. Ces derniers sont les filtres idéals pour séparer clairement les petites des grandes échelles d'un écoulement, mais ils ne peuvent être utilisés que dans les méthodes spectrales car ils n'ont pas d'équivalent simple dans l'espace physique. Il est néanmoins possible d'approcher ce type de filtres en volumes finis à l'aide de formulations implicites [39]. Dans une description de type "volumes finis", le filtre le plus naturel est le filtre "chapeau" où la quantité filtrée est définie comme une moyenne sur un certain nombre de mailles autour du point considéré. Il faut cependant prendre garde à ne pas considérer la quantité filtrée comme la moyenne sur une seule maille, car, d'après le théorème de Nyquist, une maille de dimension  $\Delta x$  ne peut pas résoudre des structures plus petites que  $2\Delta x$ .

L'équation des grandes échelles s'obtient en appliquant un filtre aux équations de Navier-Stokes (1.1). Les équations obtenues pour les composantes du champ de vitesse sont les suivantes:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \quad (1.7)$$

avec pour l'équation de continuité :

$$\nabla \cdot \bar{u}_i = 0 \quad (1.8)$$

où chaque champ est décomposé en une partie filtrée et une partie petites échelles :  $c = \bar{c} + c'$ . L'équation (1.7) peut encore s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.9)$$

où  $\tau_{ij}$  est le tenseur de Reynolds défini par:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (1.10)$$

Ce tenseur fait intervenir l'action des petites échelles sur les grandes et doit donc être modélisé.

### 1.3.3 Modélisation du tenseur de Reynolds

Le tenseur de Reynolds  $\tau_{ij}$  admet la même formulation que dans les équations obtenues par une approche RANS. Une différence notable est la non-nihilpotence du filtre (à exception du filtre "cut off"):

$$\bar{\bar{u}} \neq \bar{u} \quad (1.11)$$

Le tenseur de Reynolds peut se décomposer de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ &+ \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{\bar{u}_j u'_i} \\ &+ \overline{u'_i u'_j} \end{aligned} \quad (1.12)$$

- Le premier des trois termes représentent les termes des petites échelles créés par l'interaction de deux structures dans les grandes échelles. Ce terme est souvent appelé le terme de "Léonard".

- Le second terme représente les interactions entre des structures à grandes et à petites échelles. Il peut aussi bien transférer de l'énergie des grandes échelles vers les petites qu'inversement.
- Le dernier terme représente l'action de deux petites échelles sur les échelles résolues. Ce terme peut être responsable d'un transfert d'énergie des petites vers les grandes échelles.

Chacun de ces trois termes reflète des phénomènes physiques différents et devrait donc être modélisé séparément. En pratique, le tenseur de Reynolds est néanmoins souvent modélisé dans sa globalité. Les modèles LES traditionnels peuvent se regrouper en trois grandes familles: les modèles basés sur le principe de viscosité turbulente, les modèles de similarité, et ceux basés sur une combinaison des deux premiers.

### Modèle de Smagorinsky

Le plus connu et le plus répandu des modèles LES est sans doute celui proposé par Smagorinsky [69]. C'est un modèle de viscosité turbulente similaire à la théorie de longueur de mélange pour les équations RANS. Le tenseur de Reynolds est modélisé de la manière suivante:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_T \overline{S_{ij}} \quad (1.13)$$

où  $\nu_T$  est la viscosité turbulente et  $S_{ij}$  est le tenseur des déformations défini par:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.14)$$

La justification d'un tel modèle peut s'obtenir de différentes manières et en particulier par une analyse dimensionnelle. A très grand nombre de Reynolds, la dissipation devient effective uniquement pour les très petites échelles. Dans la zone comprise entre l'échelle de forçage et celle de dissipation, seuls des mécanismes invicides de transfert d'énergie sont présents. L'énergie introduite à grandes échelles est alors pratiquement entièrement transférée aux plus petites échelles. Une analyse dimensionnelle montre que l'on peut définir le taux de transfert d'énergie  $\epsilon$  de la manière suivante:

$$\epsilon \approx Q^3/L \quad (1.15)$$

où  $Q$  est la vitesse caractéristique des tourbillons d'échelle intégrale  $L$ . En supposant que les plus petites échelles résolues par le modèle sont grandes devant l'échelle de dissipation, la totalité de l'énergie est transférée jusqu'à l'échelle de filtrage. Le taux de transfert d'énergie peut alors s'écrire:

$$\epsilon \approx q^3/\Delta \quad (1.16)$$

où  $q$  est la vitesse caractéristique à l'échelle de filtrage  $\Delta$  du modèle. Ce taux de transfert d'énergie dans la zone inertielle doit être égal au taux de dissipation d'énergie introduit par le modèle de viscosité et qui peut être estimé par:

$$\epsilon \approx \nu_T q^2/\Delta^2 \quad (1.17)$$

Il ressort donc de (1.16) et (1.17) que la viscosité turbulente doit prendre la forme:

$$\nu_T \propto q\Delta \quad (1.18)$$

En tirant  $q$  des équations (1.15) et (1.16) on obtient:

$$\nu_T \approx Q\Delta^{4/3}L^{-1/3} \quad (1.19)$$

On peut alors estimer  $Q$  par:

$$\begin{aligned} Q &\approx L\left(\overline{S_{ij}S_{ij}}\right)^{1/2} \\ &\approx L|\overline{S}| \end{aligned} \quad (1.20)$$

En introduisant cette estimation de  $Q$  dans l'expression de la viscosité turbulente, on obtient en définitive:

$$\nu_T = C_s^2 \Delta^{4/3} L^{2/3} |\overline{S}| \quad (1.21)$$

où  $C_s$  est un paramètre qui peut être estimé [43], dans l'hypothèse de turbulence isotrope à très grand nombre de Reynolds, par la formule suivante :

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{2C_k} \right)^{3/4} \quad (1.22)$$

Dans cette estimation,  $C_k$  est la constante de Kolmogorov qui vaut 1.6. Ceci donne une valeur de  $C_s$  de 0.165. Tous les autres types d'analyse conduisent à une valeur de  $C_s$  comparable proche de 0.2.

### Modèle de similarité d'échelles

Une autre approche a été introduite par Bardina *et al.* [4]. Cette méthode utilise les plus petites échelles résolues afin d'estimer l'action des échelles non-résolues sur les plus grandes échelles. L'hypothèse liée à ce modèle est que les interactions entre échelles résolues et non-résolues dépendent principalement de l'interaction des tourbillons à des échelles proches de l'échelle de coupure  $\Delta$ , de part et d'autre de celle-ci. Le champ de vitesse des échelles résolues  $\overline{u}_i$  est obtenu en appliquant un filtre au champ total  $u_i$ . Le champ des échelles non-résolues est défini comme la différence entre le champ total et le champ moyenné:  $u'_i = u_i - \overline{u}_i$ . On considère donc, d'une part un champ à très grandes échelles qui serait le résultat du champ à grandes échelles, filtré une seconde fois ( $\overline{\overline{u}_i}$ ), et d'autre part, le champ des plus petites échelles résolues qui serait la différence entre  $\overline{\overline{u}_i}$  et  $\overline{u}_i$ . Les plus grandes échelles non-résolues peuvent être interprétées comme le résultat du filtrage de  $u'_i$ , c'est à dire  $\overline{u'_i}$ . Or cette quantité peut être développée de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \overline{u'_i} &= \overline{u_i - \overline{u}_i} \\ &= \overline{u}_i - \overline{\overline{u}_i} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Il apparaît donc, d'après leurs définitions, que les échelles proches de l'échelle de filtrage et de part et d'autre de celle-ci sont équivalentes. En introduisant le résultat (1.23) dans

l'expression du tenseur de Reynolds, on peut obtenir une estimation de celui-ci par la formule:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (1.24)$$

L'expérience montre que ce modèle ne procure pas une dissipation suffisante de l'énergie pour les échelles proches de l'échelle de filtrage. C'est la raison pour laquelle il n'est pratiquement jamais utilisé seul, mais souvent couplé avec un modèle de viscosité turbulente comme le modèle de Smagorinsky. Ce type de modèle "mixte" combinant un modèle de "similarité" et un modèle de "viscosité turbulente" donne généralement de meilleurs résultats que chacun des deux modèles pris séparément. Lorsque le filtre utilisé est un filtre raide dans l'espace de Fourier, la modélisation du tenseur de Reynolds par l'approche "similarité" donne une valeur nulle. Ce filtre ne peut donc pas être utilisé pour ce type de modèle. Par contre pour un filtre Gaussien, le double filtrage à une échelle  $\Delta$  correspond à un filtrage à une échelle  $\sqrt{2}\Delta$ .

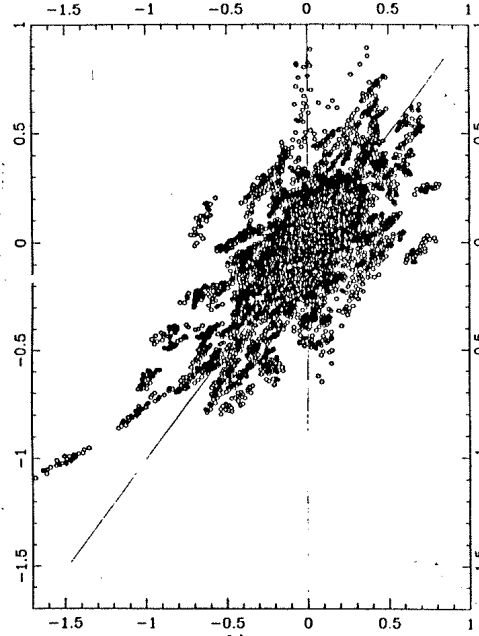
### Modèle dynamique

Le filtrage fictif à une échelle légèrement supérieur à l'échelle du filtre réel à été introduit par Germano *et al.* [24] et a donné lieu au développement d'une procédure dynamique utilisée dans de nombreux modèles. C'est le cas par exemple pour le modèle de Smagorinsky où l'introduction d'un filtre fictif permet de calculer dynamiquement le paramètre ajustable  $C_s$ . Des raffinements sont néanmoins nécessaires afin de ne pas permettre à la viscosité turbulente de devenir négative, ce qui est une source d'instabilité non-acceptable par les codes numériques.

## 1.4 Test a priori

### 1.4.1 Définitions

Afin de tester l'aptitude d'un modèle à reproduire correctement la dynamique d'un écoulement, plusieurs méthodes sont envisageables. La première consiste à appliquer le modèle à différents types d'écoulements et comparer les résultats à des résultats de référence à très grand nombre de Reynolds. Ces résultats de référence peuvent être issus de simulations numériques directes à très grande résolution, d'expériences ou simplement de calculs analytiques. Dans le cas de comparaison avec des résultats d'expériences, la difficulté est de pouvoir simuler exactement le même écoulement. Ceci implique, entre autre, d'avoir des données assez précises de l'écoulement de référence. Pour ce qui est de la comparaison avec des simulations numériques directes, le problème majeur reste la limitation du nombre de Reynolds. Si l'on veut de plus tester ou ajuster un certain nombre de paramètres, cela demande d'effectuer un grand nombre de simulations et l'opération devient alors très coûteuse. Il est alors intéressant d'effectuer en premier lieu un test dit "*a priori*". Ce type de tests consiste à partir d'un champ à très grande résolution recouvrant si possible la totalité du spectre d'énergie. On sépare alors les grandes des petites échelles avec le filtre qui sera utilisé dans le modèle de LES, puis on calcule ce que serait



**Figure 1.2 :** Test *a priori* du modèle de similarité . Le graphe représente les valeurs de transferts sous-maîlles  $T_{SGS}^w = \overline{\omega}_j |\text{rot} \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k}|_j$  réels (axe horizontal) en fonction des valeurs obtenues par le modèle (axe vertical)

le tenseur de Reynolds à l'aide des petites échelles. Le test consiste à comparer ce tenseur de Reynolds modélisé, au tenseur de Reynolds exact.

#### 1.4.2 Exemple de tests *a priori*

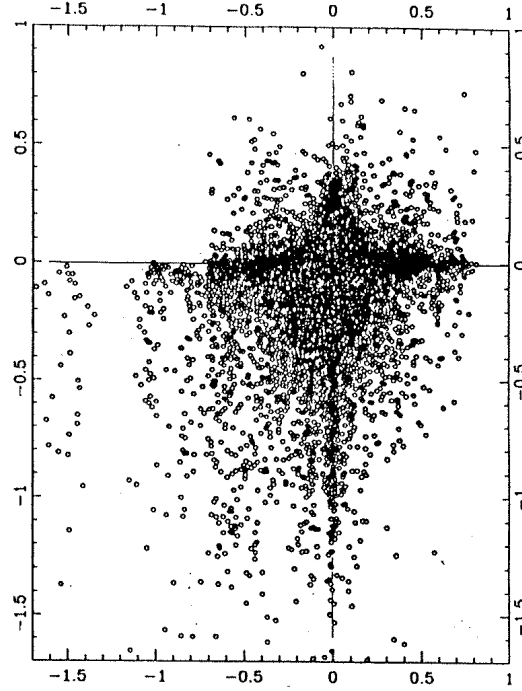
Cette comparaison peut être envisagée de différentes manières. La première solution est de tracer, pour chacun des termes du tenseur, un graphe représentant la valeur de référence en fonction de la valeur obtenue par la modélisation, et ceci en chaque point de grille. Le résultat, s'il était parfait, devrait alors faire apparaître un nuage de points situé sur une droite de pente 1. Le test sera d'autant plus satisfaisant que les points se rapprochent de cette solution idéale. Les figures 1.2 et 1.3 montrent le résultat de tests *a priori* effectués par Gonze [25] pour une simulation 3D d'un sillage bidimensionnel derrière un cylindre. Le premier test (fig. 1.2) concerne un modèle de similarité. Le tenseur de Reynolds est modélisé dans ce cas par:

$$\tau_{ij} = C(\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j - \overline{u}_i \overline{u}_j) \quad (1.25)$$

où  $C = 1$ . Les filtres utilisés sont des filtres implicites dont le comportement est proche d'un filtre raide dans l'espace de Fourier. Le filtre test  $\tilde{g}$  a été choisi à un nombre d'onde  $k = 0.8 k_c$  où  $k_c$  est le nombre d'onde caractéristique du filtre  $\overline{g}$ .

Le deuxième test concerne un modèle de viscosité turbulente développé par Métails et





**Figure 1.3 :** Test a priori du modèle de fonction de structure . Le graphe représente les valeurs de transfert sous-mailles  $T_{SGS}^w = \overline{\omega}_j |\text{rot} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}|_j$  réels (axe horizontal) en fonction des valeurs obtenues par le modèle (axe vertical)

Lesieur [47]. Le tenseur de Reynolds est modélisé par:

$$\tau_{ij} = 2C\Delta\sqrt{\overline{F}_2(\Delta)}S_{ij} \quad (1.26)$$

où  $C = 0.017$  et  $\overline{F}_2(\Delta)$  est la fonction de structure du second ordre associée à  $\overline{\mathbf{u}}$  et défini par:

$$\overline{F}_2(\Delta) = \langle |\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{r})|^2 \rangle_{|\mathbf{r}|=\Delta} \quad (1.27)$$

On remarque que le test *a priori* du modèle de similarité, bien qu'il ne soit pas parfait, est bien meilleur que celui du modèle de viscosité turbulente. En effet ce dernier semble montrer qu'il n'y a aucune corrélation entre les valeurs exactes et les valeurs modélisées du coefficient de transfert sous-maille.

Une autre méthode, plus quantitative, pour évaluer le résultat de tests *a priori* est de calculer des coefficients de corrélation  $C(\alpha, \beta)$  entre les grandeurs exactes  $\alpha$  et les grandeurs modélisées  $\beta$ , soit:

$$C(\alpha, \beta) = \frac{\sum \alpha\beta}{\sqrt{\sum \alpha^2 \beta^2}} \quad (1.28)$$

où les sommes s'effectuent sur tous les points de grille d'une région du domaine de calcul. Plusieurs modèles ont ainsi été testés par Gonze [25] par comparaison des coefficients de corrélations sur la dissipation d'énergie  $\epsilon_{SGS} = \tau_{ij}S_{ij}$  et les transferts d'énergie  $T_{SGS} = \partial_{x_j} [\overline{u}_i \tau_{ij}] - \epsilon_{SGS}$ . Les modèles dit de "similarité d'échelles" font apparaître dans

cette étude un coefficient de corrélation (relatif au calcul DNS) bien supérieur à ceux obtenus par le modèle de Smagorinsky. Cependant, les résultats de ce type de tests ne sont pas suffisants pour valider un modèle, il est nécessaire d’effectuer également des tests dits “dynamiques”. Bien que le test *a priori* du modèle de Smagorinsky soit en général assez mauvais, ce modèle passe assez bien l’épreuve des tests dynamiques.

**Tableau 1.1 :** Coefficients de corrélation entre plusieurs modèles et une simulation directe pour la dissipation et le transfert d’énergie [25].

	Dissipation d’énergie ( $\epsilon_{SGS}$ )			Transfert d’énergie ( $T_{SGS}$ )		
	DNS	Mod.1	Mod.2	DNS	Mod.1	Mod.2
Mod.1	0.87000	1.00000		0.90920	1.00000	
Mod.2	0.47329	0.46895	1.00000	0.32377	0.30119	1.00000
Mod.3	0.43255	0.4288	0.98937	0.32421	0.30183	0.98177

DNS : Simulation directe (valeur exacte)

Mod.1 : Modèle de similarité (eq. 1.25)

Mod.2 : Modèle de Smagorinsky (eq. 1.13)

Mod.3 : Modèle de fonction de structure (eq. 1.26)

## 1.5 Limites des modèles LES standards

Les modèles LES standards sont, en général, basés sur des hypothèses concernant la statistique des petites échelles. Il n’est donc pas étonnant que ces modèles puissent être mis en défaut pour certains types particuliers d’écoulement. C’est le cas par exemple des écoulements avec un fort cisaillement et une forte stratification comme dans une couche limite atmosphérique la nuit, près du sol. Ce type d’écoulement est très sensible à la prescription de l’échelle de longueur dans les modèles sous-mailles et devient donc très difficile à modéliser. D’autre part, les modèles de viscosité turbulente, comme le modèle de Smagorinsky, sont totalement dissipatifs et n’autorisent donc aucun transfert d’énergie des échelles sous-mailles vers les échelles résolues. Lesieur et Métais [42] ainsi que Piomelli *et al* [61] ont montré que cette rétroaction sur les grandes échelles était essentielle pour modéliser les phases de transition laminaire-turbulent à grand nombre de Reynolds. Les différents modèles standards sont également déficients près des parois où l’échelle de longueur verticale décroît avec la distance à la paroi. Mason *et al* [45] ainsi que Sullivan *et al* [71] ont montré que dans ces cas, les modèles de LES standards donnaient des résultats assez éloignés de la fameuse “loi du mur”.

Le principal défaut des modèles sous-mailles standards vient du fait qu’ils reposent sur une modélisation plutôt que sur une dérivation des équations. Nous avons donc développé un nouveau modèle basé sur la dérivation d’une équation approchée d’évolution

des échelles sous-mailles via un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes. Une approche similaire dans le principe a été développée par Dubois et al. Leur modèle DML<sup>6</sup> [13], [14] consiste à séparer l'écoulement en plusieurs niveaux d'échelle pouvant varier dans le temps. Une hypothèse d'évolution des petites échelles permet alors une intégration plus rapide de celles-ci et donc un gain de temps global par rapport à une DNS équivalente.

## 1.6 Plan de la thèse

Nous avons exposé dans cette introduction plusieurs types de modèles de turbulence. Ces différents modèles sont basés sur un certain nombre d'hypothèses relatives à l'évolution des petites échelles non-résolues. Le modèle de viscosité turbulente suppose par exemple que le tenseur de Reynolds est proportionnel au tenseur des déformations alors que le modèle de similarité est basé sur l'hypothèse de similarité des échelles proches des échelles minimum résolues. Ce type d'hypothèses est difficile à apprécier dans le cas général. De plus ces modèles font souvent intervenir un certain nombre de paramètres libres qui doivent être ajustés en fonction du type d'écoulement. C'est le cas par exemple, de la constante  $C_s$  dans le modèle de Smagorinsky (eq. 1.22). Notre approche est différente. Elle consiste à calculer le tenseur de Reynolds par une estimation des vitesses sous-mailles, au lieu de leur corrélation. Cette estimation est faite à partir d'un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes dans l'hypothèse de non-localité des interactions entre petites et grandes échelles.

Nous développons, dans le chapitre 2, les hypothèses de base de ce modèle ainsi que la forme des équations d'évolution qui en découle. Une série de tests a été réalisée afin de valider le choix de nos hypothèses. En plus des tests "statiques" indiquant l'ordre de grandeur de chacun des termes négligés, nous avons réalisé une série de tests dynamiques dit "*a posteriori*" qui consistent à comparer les résultats obtenus, après application de nos hypothèses, à des résultats issus de simulations directes.

La modélisation obtenue prend la forme d'un système d'équations décrivant l'évolution des petites et des grandes échelles de l'écoulement. Nous développons, dans le chapitre 3, la théorie relative à la décomposition de l'équation des petites échelles par une transformée de Gabor. Nous avons ensuite comparé les équations obtenues avec celles d'un autre modèle de turbulence (*Euler* -  $\alpha$ ) ainsi qu'avec une théorie simplifiée d'évolution des petites échelles (RDT<sup>7</sup>).

Les questions relatives à l'implémentation numérique de notre modèle sont abordées dans le chapitre 4. Nous développons d'une part le code pseudo-spectral utilisé pour les grandes échelles et d'autre part la méthode particulière d'intégration des petites échelles. Un test *a priori* permet de valider la méthode de reconstruction du tenseur de Reynolds modélisé.

Afin de tester dynamiquement l'ensemble du modèle, plusieurs comparaisons ont été effectuées avec des résultats de simulations directes de grandes résolutions. Les résultats de ces comparaisons sont analysés dans le chapitre 5, et ce, pour deux cas typiques

<sup>6</sup>abréviation de *Dynamic Multilevel Method*

<sup>7</sup>abréviation de *Rapid Distorsion Theory*

d'écoulement. Dans l'esprit d'une modélisation LES, nous avons comparé les résultats des grandes échelles. Cependant, compte tenu du fait que les petites échelles sont également modélisées, nous avons étendu notre comparaison à l'ensemble des échelles de l'écoulement.

Nous avons ensuite appliqué notre modèle au cas d'écoulement plans (chapitre 6). Les caractéristiques particulières du champ de vitesse à grandes échelles permettent, dans ce cas, d'intégrer analytiquement l'équation d'évolution des petites échelles moyennant une hypothèse de décorrélation en temps du terme de forçage. Nous montrerons qu'il est ainsi possible de retrouver les différents profils de vitesse connus pour ce type de problème. Les profils théoriques obtenus par une analyse théorique de notre modélisation seront comparés avec des résultats issus d'expérimentations ou de simulations numériques.

Nous concluons cette étude par un bref rappel des fondements et des possibilités de notre modèle, et nous évoquerons les ouvertures possibles, tant numériques que théoriques, de ce type de modélisation.

Première partie

Description et implémentation du  
modèle



## Chapitre 2

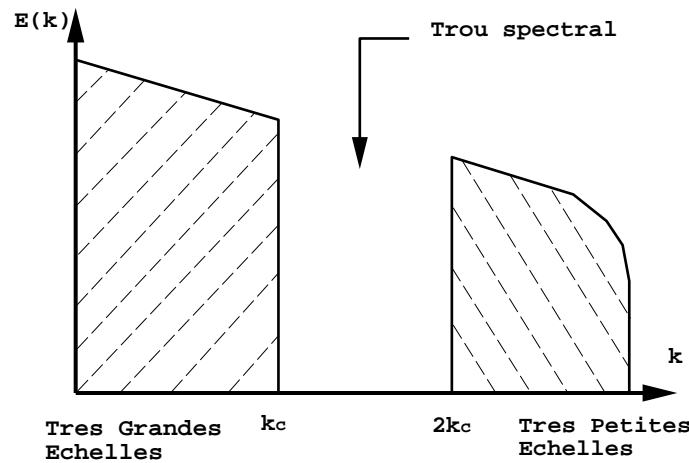
# Hypothèses et validation du modèle



*Image de la galaxie spirale M100 distante de 60 millions d'années lumières*

## 2.1 Introduction

L'évolution de la turbulence 2D conduit généralement à la formation de tourbillons à grandes échelles [66]. L'intensité de ces tourbillons augmente par le biais de la cascade inverse d'énergie. Dans le cas idéal où aucune friction n'est introduite, l'énergie s'accumule à très grandes échelles. Le spectre d'énergie<sup>1</sup> devient alors plus pentu que le spectre théorique de Kolmogorov (en  $k^{-5/3}$ ) [70] [9]. Cette condensation de l'énergie à grandes échelles favorise les interactions non-locales entre les petites et les grandes échelles dans l'évolution de la turbulence à petites échelles. Dubrulle et Nazarenko sont partis de cette hypothèse pour développer un modèle de turbulence à deux fluides [17]. Ils ont réalisé un développement asymptotique des équations d'Euler par rapport à un petit paramètre représentant le rapport entre les petites et les grandes échelles. Cette dérivation a été effectuée dans le cas idéal où il y a un trou spectral d'énergie entre les petites et les grandes échelles (fig. 2.1). Il est évident que cette configuration ne peut être maintenue au cours



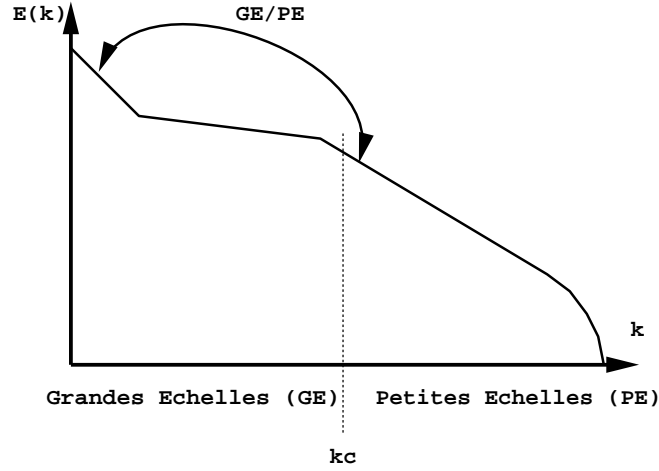
**Figure 2.1** : Schéma d'un spectre d'énergie avec un trou spectral d'énergie entre les nombres d'onde  $k_c$  et  $2k_c$

du temps. En effet, si l'on part d'une configuration avec un trou spectral d'énergie, l'effet combiné de la cascade d'énergie et d'enstrophie tendent à combler ce trou au cours du temps. Ce cas idéal permet cependant de caractériser la dynamique des petites échelles sous l'action des interactions non-locales et de comparer les résultats obtenus avec ceux d'une simulation "réaliste" où les interactions locales coexistent dans une certaine proportion. De plus, même dans le cas où il n'y a pas de trou spectral d'énergie, l'hypothèse de séparation d'échelles permet de reproduire avec une bonne approximation les interactions entre les très grandes échelles et la turbulence à petites échelles (fig. 2.2). L'erreur introduite dans ce modèle est donc uniquement relative aux interactions locales de part et d'autre de l'échelle de séparation  $k_c$ . Nous développerons, dans ce chapitre, les équations d'évolution dans le cas idéal avec un trou spectral d'énergie et nous étudierons le com-

---

<sup>1</sup>Tous les spectres d'énergie visualisés seront définis par  $E(k) = \frac{1}{2} \sum_{k-\frac{1}{2} < |\mathbf{k}| \leq k+\frac{1}{2}} \frac{|\omega(\mathbf{k})|^2}{k^2}$  où  $\omega(\mathbf{k})$  est le champ de vorticité dans l'espace de Fourier





**Figure 2.2** : Spectre d'énergie: l'interaction des très grandes échelles sur les petites rentre dans l'hypothèse de la non-localité des interactions

portement des petites échelles qui en résulte. Dans un second temps, nous généraliserons ce calcul au cas plus réaliste avec un spectre d'énergie continu.

## 2.2 Décomposition en deux échelles

Les calculs seront effectués pour un fluide 2D inviscide et incompressible régi par l'équation d'Euler. Dans ce cas, l'équation d'évolution de la vorticité totale s'écrit:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u}\omega) = 0, \quad (2.1)$$

où  $\omega(x, y)$  est la composante suivant  $\mathbf{z}$  de la vorticité. Les champs de vitesse et de vorticité peuvent être décomposés en une partie grandes échelles et une partie petites échelles à l'aide d'un filtre  $G$  pour l'instant arbitraire:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{u}} = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \\ \mathbf{u}'(\mathbf{x}) &= \mathbf{u} - \mathbf{U}, \\ \Omega(\mathbf{x}) &= \bar{\omega} = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \\ \omega'(\mathbf{x}) &= \omega - \Omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'équation de la vorticité à grandes échelles s'obtient en appliquant le filtre à l'équation de la vorticité totale (2.1).

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\omega} \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (2.3)$$

En décomposant chacun des champs  $\mathbf{u}$  et  $\omega$  en leurs parties grandes et petites échelles, on obtient:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\bar{\mathbf{U}}\Omega) + \text{div}(\bar{\mathbf{U}}\omega') + \text{div}(\mathbf{u}'\Omega) + \text{div}(\mathbf{u}'\omega') = 0 \quad (2.4)$$

L'équation d'évolution de la vorticité à petites échelles est alors obtenue en faisant la différence des équations (2.1) et (2.4):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega'}{\partial t} &+ \operatorname{div}(\mathbf{U}\Omega) - \operatorname{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) \\
&+ \operatorname{div}(\mathbf{U}\omega') - \operatorname{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) \\
&+ \operatorname{div}(\mathbf{u}'\Omega) - \operatorname{div}(\overline{\mathbf{u}'\Omega}) \\
&+ \operatorname{div}(\mathbf{u}'\omega') - \operatorname{div}(\overline{\mathbf{u}'\omega'}) = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Il convient alors, d'introduire les hypothèses afin de ne garder que les termes dominants dans chacune des équations (2.4) et (2.5) (cf annexe A).

### 2.3 Introduction des hypothèses

Le modèle de turbulence que nous proposons est basé sur un développement asymptotique des équations par rapport à deux petits paramètres. Le premier  $\epsilon$  est défini comme le rapport  $\epsilon = l/L$  de deux échelles caractéristiques relative aux grandes structures de l'écoulement ( $L$ ) et aux petites structures turbulentes ( $l$ ). Le second paramètre correspond au rapport  $\eta = \tau/T$  du temps caractéristique des échelles turbulentes ( $\tau$ ) sur le temps caractéristique d'évolution des grandes échelles ( $T$ ) qui peut être défini par  $T = 1/\nabla\mathbf{U}$ . Les différents modèles de turbulence basés sur un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes peuvent être classifiés en fonction des hypothèses sur l'amplitude de ces deux petits paramètres et de leur rapport  $\epsilon/\eta$  qui s'interprète comme le rapport des vitesses caractéristiques des deux échelles. Le modèle de viscosité turbulente décrit par Dubrulle et Frisch [15] est basé sur les hypothèses  $\epsilon \ll 1$ ,  $\eta \ll 1$  et  $\epsilon/\eta \gg 1$ . Par contre, la théorie de la distorsion rapide (RDT) de Batchelor et Proudman [6] décrit l'évolution des petites échelles par le biais d'équations linéaires par rapport aux grandes échelles sous la seule hypothèse  $\epsilon/\eta \gg 1$ . Dans le cas de la turbulence pleinement développée, le spectre d'énergie dans la zone inertielle est proche d'une loi de puissance  $E(k) = k^{-\alpha}$ . Dans ce cas, l'ordre de grandeur de la vitesse à une échelle  $l$  est donnée par  $u(l) \sim l^{(\alpha-1)/2}$ . Le rapport des deux petits paramètres s'exprime alors par  $\epsilon/\eta \sim \epsilon^{(\alpha-1)/2}$ . Ceci implique la relation  $\eta \sim \epsilon^{(3-\alpha)/2}$ . De nombreux résultats semblent indiquer que le spectre d'énergie est souvent plus pentu que  $k^{-3}$ . Cette constatation a conduit aux hypothèses  $\epsilon \ll 1/\eta \ll 1$  dans Dubrulle Nazarenko [17].

Une analyse dimensionnelle permet d'évaluer l'ordre de grandeur de chacun des termes non-linéaires des équations d'évolution (2.4) et (2.5) de chacune des deux échelles. En prenant le terme  $\operatorname{div}(\mathbf{U}\Omega)$  pour référence, les ordres de grandeur relatifs des autres termes sont respectivement :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{U}\omega')/\operatorname{div}(\mathbf{U}\Omega) &\sim 1/\epsilon\eta \sim \epsilon^{(\alpha-5)/2} \\
\operatorname{div}(\mathbf{u}'\Omega)/\operatorname{div}(\mathbf{U}\Omega) &\sim \epsilon/\eta \sim \epsilon^{(\alpha-1)/2} \\
\operatorname{div}(\mathbf{u}'\omega')/\operatorname{div}(\mathbf{U}\Omega) &\sim 1/\eta^2 \sim \epsilon^{(\alpha-3)}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous ne garderons dans notre dérivation que les termes d'ordre relatif supérieur à 1 dans l'hypothèse réaliste où le spectre d'énergie possède une pente  $-\alpha$  telle que  $3 < \alpha < 5$ . Il

est à noter que, pour des spectres d'énergie en  $k^{-5}$ , les deux paramètres  $\epsilon$  et  $1/\eta$  sont du même ordre de grandeur. Nous considérerons donc le cas où  $\epsilon \lesssim 1/\eta \ll 1$ .

## 2.4 Équations du modèle

### 2.4.1 Cas réaliste d'un spectre d'énergie continue

Compte tenu de l'ordre de grandeur de chacun des termes sous les hypothèses définies précédemment, les équations d'évolution de la vorticité (2.4) et (2.5) deviennent:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{U}\omega') = - \left( \text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) \right) + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) \quad (2.8)$$

La partie gauche de l'équation (2.8) représente l'équation d'advection de la vorticité à petites échelles ( $\omega'$ ) par le champ de vitesse à grandes échelles ( $\mathbf{U}$ ). Les termes de la partie droite sont des termes de forçage des petites échelles.  $(\text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}))$  représente la partie petites échelles du résultat de l'interaction non-linéaire des grandes échelles sur elles-mêmes. Ces termes de forçage contribuent à l'augmentation de l'énergie des petites échelles et sont donc responsables de la cascade directe d'entrophie.

### 2.4.2 Cas idéal avec un trou spectral d'énergie

Dans l'hypothèse supplémentaire où l'écoulement possède un trou spectral d'énergie, la moyenne des termes non-linéaires faisant intervenir à la fois des petites et des grandes échelles peut être considérée comme nulle dans l'équation d'évolution des grandes échelles. En effet, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}\omega'} &\simeq \overline{\mathbf{U}\omega'} \simeq 0 \\ \overline{\mathbf{u}'\Omega} &\simeq \overline{\mathbf{u}'\Omega} \simeq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

De plus, le terme non-linéaire grandes échelles satisfait:

$$\overline{\mathbf{U}\Omega} \simeq \mathbf{U}\Omega \quad (2.10)$$

Ces approximations deviennent des égalités strictes lorsque l'on utilise par exemple un filtre raide dans l'espace de Fourier au nombre d'onde  $k = k_c$  sur un écoulement dont l'énergie est nulle entre les nombres d'onde  $k_c$  et  $2k_c$  (fig. 2.1). Il est à noter que, dans le cas d'une moyenne d'ensemble, ces termes sont également nuls. Comme le terme non-linéaire  $\text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'})$  pris en compte dans l'équation d'évolution des grandes échelles est nul, il est nécessaire de prendre en compte le terme d'ordre inférieur  $\text{div}(\overline{\mathbf{u}'\omega'})$  afin de modéliser l'influence des petites échelles sur les grandes. Sous cette hypothèse de trou spectral d'énergie, les équations d'évolution de la vorticité sont donc de la forme suivante:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\omega'}) = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{U}\omega') = 0 \quad (2.12)$$

Cela signifie que les petites échelles sont advectées par les grandes échelles. Elles ne peuvent pourtant pas être considérées comme un scalaire passif car elle interagissent sur les grandes échelles par l'intermédiaire du terme de forçage  $div(\overline{\mathbf{u}'\omega'})$ . Ce terme permet un échange d'énergie entre les deux types d'échelles. Cette échange est entre autre responsable de la cascade inverse d'énergie.

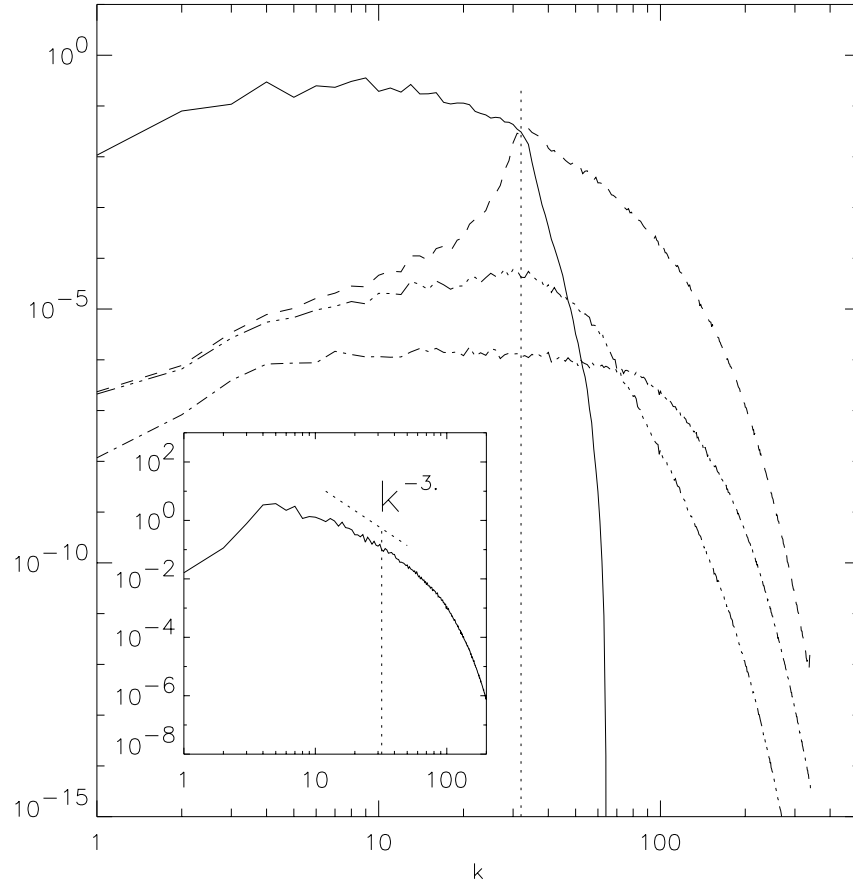
## 2.5 Validation numérique des hypothèses

### 2.5.1 Tests statiques

Les arguments dimensionnels mentionnés ne prennent en compte ni le nombre variable de modes dans le produit de convolution, ni les éventuels effets de phase. Il est donc important, afin de valider ces hypothèses, d'effectuer une analyse de l'importance de chacun des termes non-linéaires de l'équation d'évolution des grandes échelles. Cette analyse est effectuée à partir du résultat d'une simulation numérique directe à grande résolution. Pour un champ de vorticité et de vitesse à un temps donné, il suffit de séparer les petites des grandes échelles par l'intermédiaire d'un filtre raide dans l'espace de Fourier et de calculer numériquement les différents termes non-linéaires apparaissant dans les équations (2.4) et (2.5). Ce test a été réalisé sur deux types de situation: La première est une simulation directe de turbulence en décroissance libre sur un maillage  $1024^2$  (fig. 2.3)<sup>2</sup>. Le spectre d'énergie du champ de départ est représenté dans la fenêtre. L'échelle de séparation des deux échelles été prise au milieu de la zone inertielle ( $k_c = 32$ ), là où le spectre d'énergie a une pente proche de  $k^{-3}$ . Le deuxième test a été réalisé sur le résultat d'une simulation de turbulence forc e à  $k = 100$  (fig. 2.4). L'échelle de séparation a été prise, dans ce cas, au milieu de la cascade inverse d'énergie ( $k = 21$ ) où le spectre d'énergie est proche de  $k^{-5/3}$ . Les figures 2.3 et 2.4 permettent de visualiser l'importance relative de chacun des quatre termes non-linéaires intervenant dans l'équation (2.4). Ces résultats confirment les ordres de grandeur relatifs établis en (2.6) par une analyse dimensionnelle. Les composantes grandes échelles des termes  $div(\mathbf{u}'\omega')$  et  $div(\mathbf{u}'\Omega)$  sont inférieures à celles des deux autres termes, en particulier près de l'échelle de coupure  $k_c$ , là où ces termes sont les plus importants en module.

Les deux tests précédents ont été réalisés en utilisant un filtre raide en Fourier afin de séparer clairement les petites des grandes échelles. Nous verrons que nous serons amenés à utiliser un autre type de filtre dans la description du modèle. Nous avons donc réalisé le même type de tests en utilisant le filtre qui sera utilisé dans le modèle. La transformée de Fourier de ce filtre sera définie dans le chapitre 4 par l'équation (4.44). Nous avons réalisé ce test sur le même champ issu d'une simulation de turbulence en décroissance libre. Les spectres d'énergie du champ aux deux échelles ainsi que du champ total sont représentés figure 2.5c. L'importance de chacun des termes non-linéaires filtrés intervenant dans l'équation des grandes échelles est représenté figure 2.5a alors que la partie petites échelles de ces termes est repr sent e figure 2.5b. On remarque que l'ordre d'importance

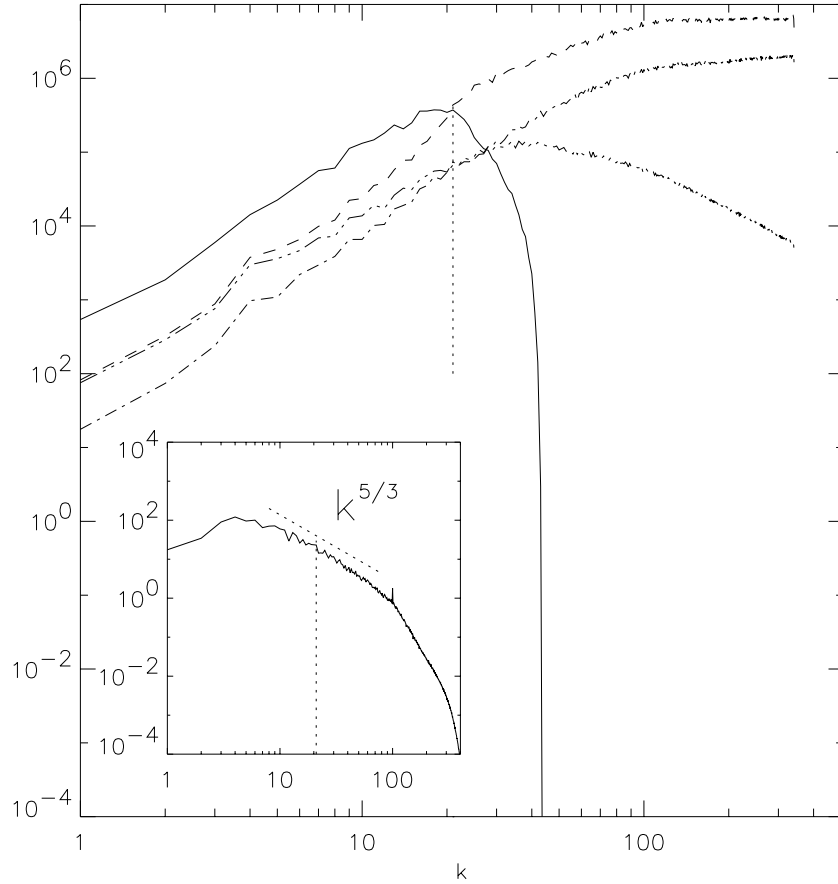
<sup>2</sup>Toutes les simulations seront effectu es sur un domaine carré avec un maillage régulier.  $N^2$  signifie que le domaine est discr t s  en  $N$  points dans la direction  $x$  et dans la direction  $y$



**Figure 2.3 :** Module au carré des quatre termes non-linéaires suivants: — :  $div(\mathbf{U}\Omega)$  , - - :  $div(\mathbf{U}\omega')$ , - · - :  $div(\mathbf{u}'\omega')$  et · · · :  $div(\mathbf{u}'\Omega)$ . Le spectre d'énergie  $E(k)$  de la simulation de départ est donné dans la fenêtre. Il s'agit d'une simulation de turbulence en déclin sur un maillage  $1024^2$ . La séparation des grandes et petites échelles est effectuée par l'intermédiaire d'un filtre "cut-off" au nombre d'onde  $k = 32$ .

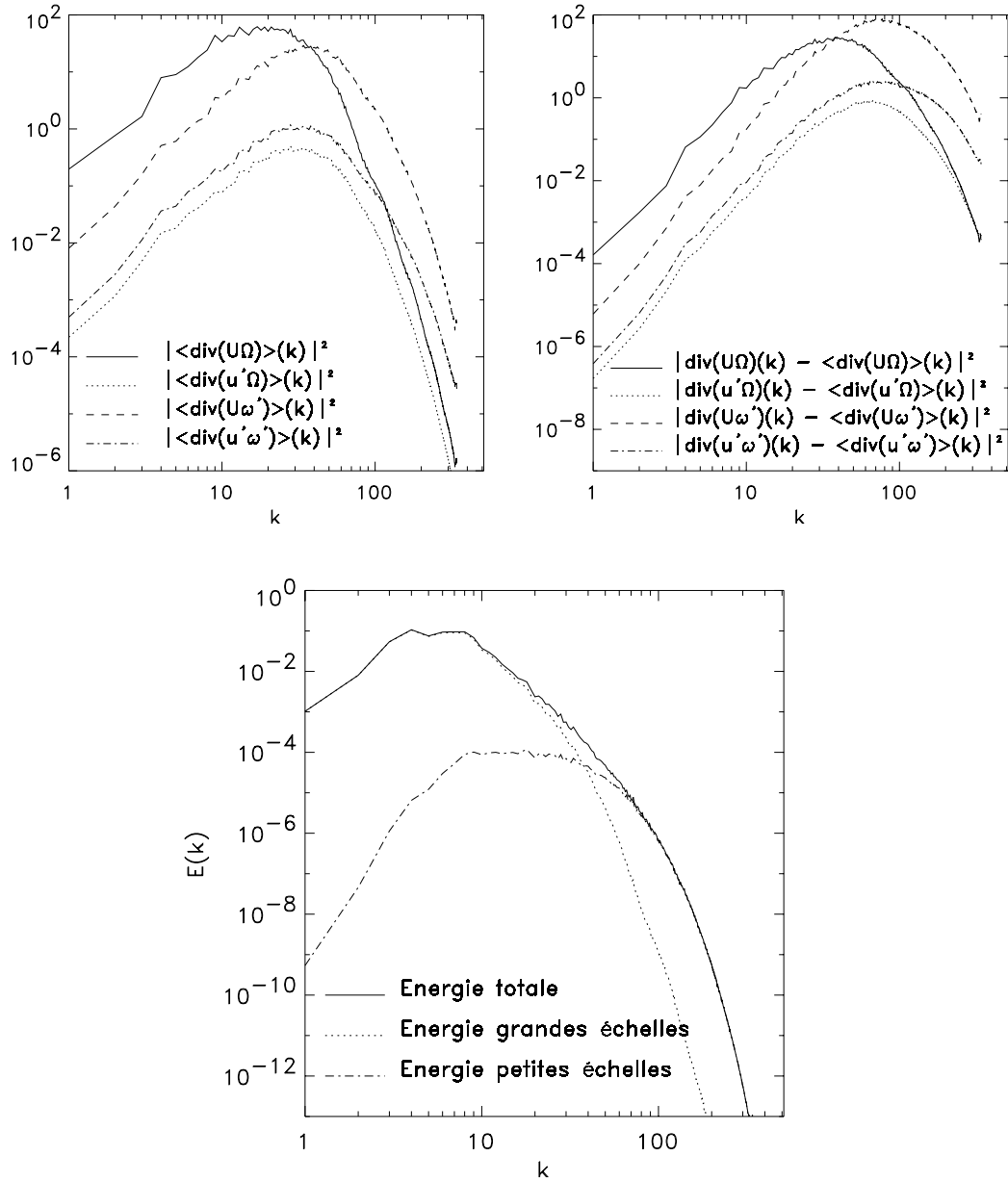
de chacun des termes n'est pas le même que celui obtenu pour une séparation franche des deux échelles. Cependant les hypothèses qui conduisent aux équations d'évolution des petites et des grandes échelles restent valables.

Les tests précédents sont uniquement des tests statiques dans le sens où ils permettent de visualiser l'ordre de grandeur des termes non-linéaires à un instant donné de la simulation. De ce fait, ils ne tiennent pas compte des éventuels effets de phase qui peuvent modifier, sur des temps longs, l'influence de chacun de ces termes sur les grandes échelles. Afin de pouvoir considérer ce problème, nous avons réalisé le même type de tests en moyennant chacun des termes sur plusieurs pas de temps des petites échelles équivalent à un pas de temps des grandes échelles. La figure 2.6 montre le résultat de ce test pour un champ initial issu d'une simulation de turbulence en déclin dont le spectre d'énergie est donné dans la fenêtre insérée. On remarque que le fait de moyenner ne change pratiquement pas l'ordre de grandeur de chacun des termes. Seul le terme  $div(\mathbf{U}\omega')$  subit un

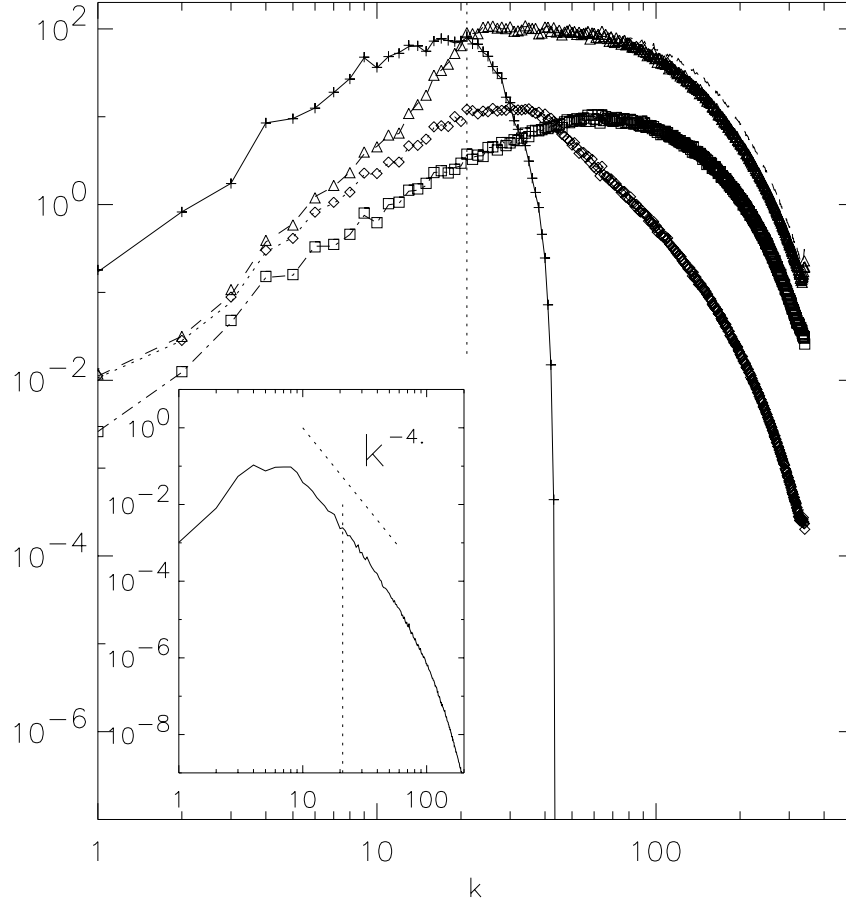


**Figure 2.4 :** Module au carré des quatre termes non-linéaires suivants: — :  $\text{div}(\mathbf{U}\Omega)$  , - - :  $\text{div}(\mathbf{U}\omega')$ , - · - :  $\text{div}(\mathbf{u}'\omega')$  et · · · :  $\text{div}(\overline{\mathbf{u}'\Omega})$ . Le spectre d'énergie  $E(k)$  de la simulation de départ est donné dans la fenêtre. Il s'agit d'une simulation de turbulence forcée au nombre d'onde  $k = 100$  sur un maillage  $1024^2$ . Le forçage est réalisé en maintenant constante l'énergie du mode  $\mathbf{k} = (100, 0)$ . La séparation des grandes et petites échelles est effectuée par l'intermédiaire d'un filtre "cut-off" au nombre d'onde  $k = 21$ .

changement aux petites échelles par l'effet de moyenne qui tend à réduire son module aux petites échelles. Ce résultat permet de montrer que les hypothèses effectuées sur l'ordre d'importance de chacun des termes restent vrai d'un point de vue dynamique. Afin de valider correctement ces hypothèses d'un point de vue dynamique, nous avons cependant effectué plusieurs tests a posteriori.



**Figure 2.5 :** Distribution du module au carré des quatre termes non-linéaires en fonction du nombre d'onde  $k$ . : partie filtrée intervenant dans l'équation des grandes échelles (fig. du haut à gauche), partie intervenant dans l'équation des petites échelles (fig. du haut à droite). Le filtre utilisé est le filtre  $f^2 = F$  dont la transformée de Fourier sera définie au chapitre 4 par l'équation (4.44) avec dans ce cas  $dh = 2\pi/32$ .  $U$  et  $\Omega$  sont respectivement les champs de vitesse et de vorticité filtrés alors que  $u'$  et  $\omega'$  représentent les parties petites échelles de ces mêmes champs. Les spectres d'énergie des champs totaux, grandes échelles et petites échelles sont représentés figure du bas.



**Figure 2.6 :** Module au carré des quatre termes non-linéaires suivant: (—) :  $\text{div}(\mathbf{U}\Omega)$ , (- -) :  $\text{div}(\mathbf{U}\omega')$ , (- · -) :  $\text{div}(\mathbf{u}'\omega')$  et (- · · · -) :  $\text{div}(\mathbf{u}'\Omega)$  ainsi que les mêmes quantités moyennées sur 64 pas de temps des petites échelles. (+) :  $\langle \text{div}(\mathbf{U}\Omega) \rangle_{(64 dt)}$ , ( $\Delta$ ) :  $\langle \text{div}(\mathbf{U}\omega') \rangle_{(64 dt)}$ , ( $\square$ ) :  $\langle \text{div}(\mathbf{u}'\omega') \rangle_{(64 dt)}$  et ( $\diamond$ ) :  $\langle \text{div}(\mathbf{u}'\Omega) \rangle_{(64 dt)}$ . Le spectre d'énergie de la simulation de départ est donné dans la fenêtre insérée. La séparation du champ total en deux échelles a été effectuée par un filtre raide dans l'espace de Fourier au nombre d'onde  $k = 21$ .

### 2.5.2 Tests dynamiques

Les tests a posteriori consistent à effectuer une comparaison des résultats de la simulation à analyser avec une simulation de référence. Nous avons montré que l'on pouvait décomposer le champ de vorticité totale en un champ à grandes échelles (2.4) et un champ à petites échelles (2.5). Afin de tester dynamiquement l'importance de chacun des termes intervenant dans ce système d'équations, nous avons réalisé plusieurs simulations en ne prenant en compte qu'un certain nombre de termes dans ce système d'équation. Les tests dynamiques tels qu'ils ont été entrepris consistent à intégrer l'équation des petites échelles sur un maillage fin identique à celui utilisé pour la simulation de référence et avec le même type de dissipation.   ceci, vient s'ajouter l'intégration de l'équation des



grandes échelles sur un maillage plus grossier. La simulation des équations approximées est donc plus coûteuse que la simulation équivalente sans approximation. N'ayant pas les ressources informatique suffisantes pour effectuer ces tests sur un maillage assez fin, nous avons choisi d'introduire une dissipation de type hyper-visqueuse afin de conserver un maximum de petites échelles pour analyser l'influence de nos approximation sur la description des grandes échelles. Dans les tests dynamiques qui suivront, la simulation de référence sera une simulation directe avec hyperviscosité que nous appellerons HDNS par opposition à une simulation directe avec une simple viscosité notée DNS. Nous avons effectué ces tests sur une simulation d'interaction de deux tourbillons. Nous avons choisi cet exemple car le résultat de la simulation est très sensible aux différentes approximations. Elle permet de voir l'influence de chacune des approximations sur les petites échelles par l'intermédiaire des filaments créés lors de l'interaction. L'influence des approximations sur les grandes échelles est mis en évidence par la forme et la vitesse de rotation du tourbillon final. La figure 2.7 montre le résultat de ces différentes simulations. Les équations utilisées pour chacune des simulations sont détaillées dans le tableau 2.1. Dans chacun des cas, les grandes et les petites échelles sont séparées par un filtre raide dans l'espace de Fourier à  $k = 21$ . Les calculs sont effectués sur un maillage  $512^2$  pour les petites échelles et  $64^2$  pour les grandes. Afin de minimiser l'effet de la périodicité, les tourbillons initiaux ont été placés suffisamment loin des limites du maillage. Les figures 2.7 représentent donc uniquement  $1/4$  du domaine de calcul.

Le premier test effectué a pour but de vérifier l'hypothèse de non-localité des interactions. Nous avons vu que cette hypothèse consiste à négliger les interactions des petites échelles sur elles mêmes. Nous avons donc réalisé une simulation en supprimant uniquement le terme  $(div(\mathbf{u}'\omega') - div(\overline{\mathbf{u}'\omega'}))$  de l'équation d'évolution des petites échelles. On remarque que le résultat de cette simulation (fig. b) est quasiment indifférenciable de la simulation directe (fig. a). Ceci confirme que ce terme représentant l'interaction des petites échelles sur elles même est bien négligeable par rapport aux autres termes. Nous avons ensuite effectué une simulation avec la même équation pour les petites échelles en supprimant le terme non-linéaire  $div(\overline{\mathbf{u}'\omega'})$  dans l'équation des grandes échelles. Le résultat de cette simulation (fig. c) est très comparable à celui de la figure (b) où ce terme a été conservé dans les grandes échelles. Les figures (d) et (e) montre le résultat d'une simulation où, en plus du terme faisant intervenir le produit  $(\mathbf{u}'\omega')$ , on a négligé le terme  $(div(\mathbf{u}'\Omega) - div(\overline{\mathbf{u}'\Omega}))$  dans l'équation des petites échelles pour (d) et (e) en plus du terme  $div(\overline{\mathbf{u}'\Omega})$  pour (e). La figure (d) est pratiquement identique à la figure (c). Ceci prouve que les termes faisant intervenir le produit  $(\mathbf{u}'\Omega)$  restent très inférieurs aux termes prise en compte faisant intervenir le champ de vitesse à grande échelles. Par contre, il apparaît une différence sur l'orientation du tourbillon sur la figure (e). Comme on peut le percevoir sur le résultat des test statiques, le terme  $div(\mathbf{u}'\Omega)$ , bien qu'inférieur à toutes les échelles au terme  $div(\mathbf{U}\omega')$ , est du même ordre de grandeur que celui-ci aux très grandes échelles. Ceci explique probablement cette faible différence du champ de vorticité aux très grandes échelles. L'ordre suivant d'approximation consiste a négliger le terme  $div(\overline{\mathbf{U}\omega'})$  dans l'équation des grandes échelles. Ceci conduit à un système d'équations où il n'y a plus de rétroaction des petites échelles sur les grandes car le seul terme non-linéaire qui

subsiste dans l'équation des grandes échelles ne fait intervenir que les champs de vitesse et de vorticité à grandes échelles. La simulation des grandes échelles correspond donc à une simulation directe des équations d'Euler sur une grille  $64^2$ . Il est bien connu que, dans cette configuration, l'énergie s'accumule aux plus petites échelles résolues ( $k = 21$  dans notre cas) au lieu de cascader vers les plus petites échelles. Nous avons conservé l'équation d'évolution des petites échelles identique à celle intégrée dans le cas (e) afin de pouvoir visualiser l'effet du terme négligé sur le champ de vorticité totale. En comparant les champs de vorticité totale figures (e) et (f), on mesure l'importance du terme  $div(\overline{\mathbf{U}\omega'})$  pour la dynamique des grandes échelles, et ceci même après une faible période d'intégration (1 temps de retournement<sup>3</sup> dans ce cas). Les résultats de ces différents tests montrent donc que le terme le plus important ne faisant intervenir que le champ à petites échelles est le terme  $div(\mathbf{U}\omega')$ . Ce terme prend la forme d'un forçage des grandes échelles par l'intermédiaire de  $div(\overline{\mathbf{U}\omega'})$  et d'un terme d'advection de la vorticité à petites échelles par le champ de vitesse à grandes échelles. L'ordre d'importance de chacun des autres termes non-linéaires semble être le même que celui déduit des différents tests statiques.

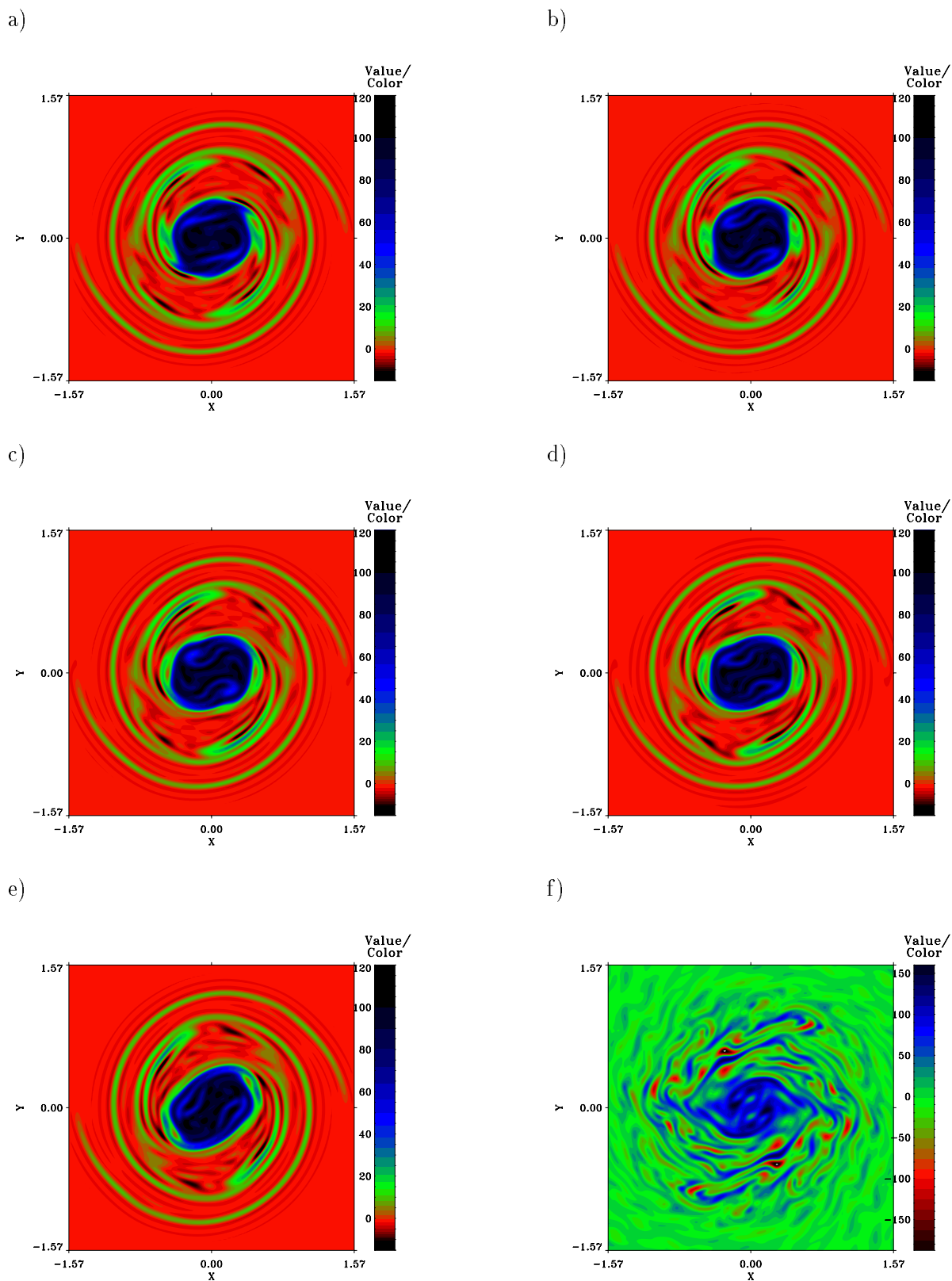
Nous avons également appliqué ce test dynamique à deux autres simulations de turbulence 2D. La figure 2.8b montre le résultat de l'intégration du système d'équations (2.7)-(2.8) dans le cas d'une turbulence en déclin. Le champ de vorticité après environ 1.6 temps de retournement est très comparable avec celui obtenu par une simulation directe (fig. a) de même résolution (la comparaison pour un temps d'intégration plus long est effectuée en annexe A). Ce résultat est encore plus net en ce qui concerne les spectres d'énergie (fig. c) où la comparaison entre les deux simulations est quasiment parfaite. Il est à noter que la pente du spectre en  $k^{-3.5}$  est probablement dû à l'effet de l'hyperviscosité. En effet, une simulation directe équivalente de grande résolution ( $1024^2$ ) produit un spectre d'énergie dont la pente est plus proche de  $k^{-3}$  (voir fig. 5.5). Nous avons effectué le même test dans le cas d'une simulation de turbulence forcée. Le forçage est obtenu, dans cette simulation, en maintenant à un niveau constant d'énergie le mode  $\mathbf{k} = (15, 0)$ . Les champs de vorticité après 17 temps de retournement sont visualisés figures 2.9a et 2.9b. Les deux simulations ont été effectuées à partir d'un champ initial de vorticité ayant un très faible niveau d'énergie par rapport au niveau d'énergie finale. Compte tenu du caractère chaotique de la turbulence, le champ de vorticité obtenu par intégration du système d'équation (2.7)-(2.8) n'est donc pas identique à celui de la simulation directe de grande résolution. Cependant, les caractéristiques statistiques de l'écoulement sont correctement reproduites. On peut constater en effet, que le nombre de tourbillons ainsi que leur taille et leur intensité est assez bien reproduit. On remarque que les spectres d'énergie (fig. 2.9c) sont également très comparables à toutes les échelles autre que les très grandes échelles. La taille des tourbillons étant assez faible devant la taille de la simulation, la comparaison de l'énergie à très grandes échelles n'a pas beaucoup de signification, seule la quantité moyenne d'énergie de ces grandes échelles est pertinente. Or, dans notre cas, cette quantité moyenne est assez bien conservée. Ceci est assez remarquable dans la mesure où l'échelle

---

<sup>3</sup>temps caractéristique défini par  $\tau = 2\pi\lambda/v$  où  $\lambda$  et  $v$  sont respectivement l'échelle de Taylor et la vitesse moyenne fluctuante définies par  $\lambda = \sqrt{\left(\sum_{\mathbf{k}} E(k)\right) / \left(\sum_{\mathbf{k}} k^2 E(k)\right)}$  et  $v = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} E(k)}$

de coupure entre les deux échelles ( $k = 21$ ) est très proche de l'échelle de forçage ( $k = 15$ ).

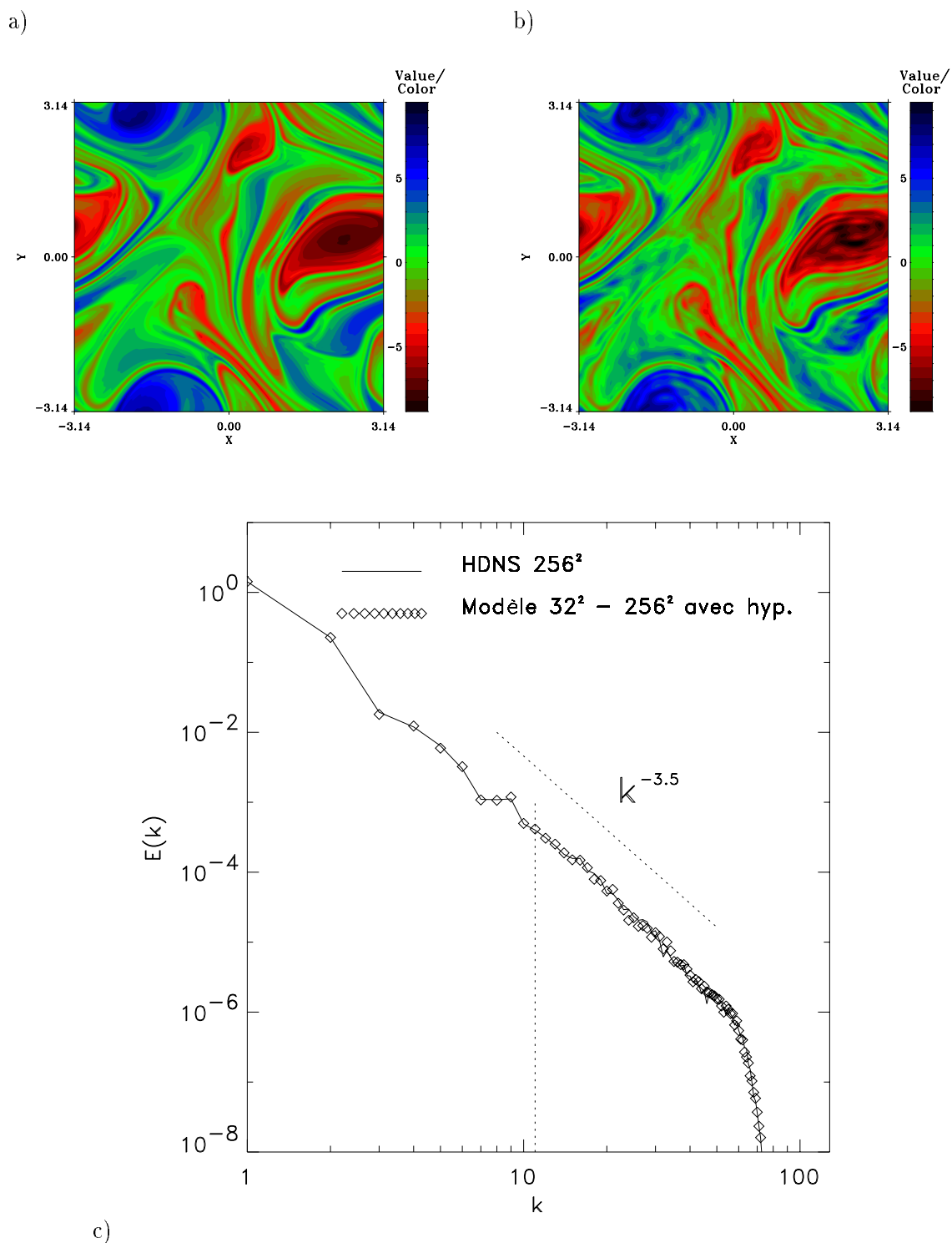
Les tests effectués sur ces deux cas de turbulence montrent, comme dans le cas de l'interaction de deux tourbillons, que, pour c'est trois types de simulation, les termes négligés n'apportent qu'une très faible contribution dans le transfert d'énergie entre les deux types d'échelles. Le fait que les spectres d'énergie à très petites échelles soient très comparables, signifie de plus que le terme d'interaction des petites échelles sur elles-mêmes n'a que très peu d'influence dans la cascade d'entrophie.



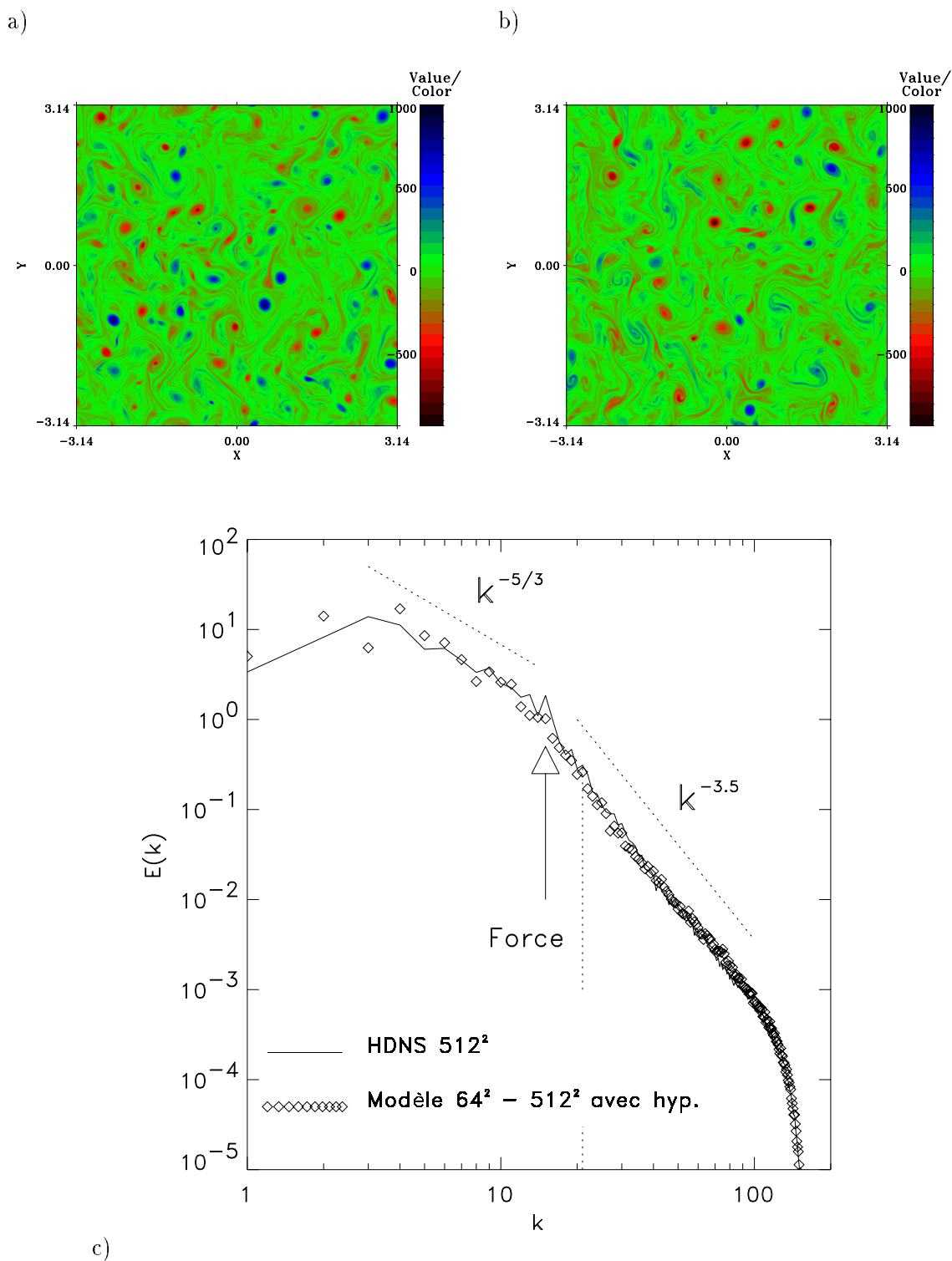
**Figure 2.7 :** Champs de vorticité totale reconstituée à partir des champs grandes et petites échelles. Le détail des équations correspondant à chacune des simulations est donné dans le tableau 2.1.

**Tableau 2.1** : Systèmes d'équations intégrés pour les simulations de deux tourbillons en interaction (figs. 2.7)

N° Fig.	Type éch.	Équations d'évolution du type d'échelles considéré
a)	Totales	$\partial_t \omega + \text{div}(\overline{\mathbf{u}\omega}) = \nu \nabla^{16} \omega$
b)	Grandes Petites	$\partial_t \Omega + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\Omega}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\omega'}) = 0$ $\partial_t \omega' + (\text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega})) + (\text{div}(\mathbf{U}\omega') - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'})) + (\text{div}(\mathbf{u}'\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\Omega})) = \nu \nabla^{16} \omega'$
c)	Grandes Petites	$\partial_t \Omega + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\Omega}) = 0$ $\partial_t \omega' + (\text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega})) + (\text{div}(\mathbf{U}\omega') - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'})) + (\text{div}(\mathbf{u}'\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\Omega})) = \nu \nabla^{16} \omega'$
d)	Grandes Petites	$\partial_t \Omega + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) + \text{div}(\overline{\mathbf{u}'\Omega}) = 0$ $\partial_t \omega' + (\text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega})) + (\text{div}(\mathbf{U}\omega') - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'})) = \nu \nabla^{16} \omega'$
e)	Grandes Petites	$\partial_t \Omega + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) = 0$ $\partial_t \omega' + (\text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega})) + (\text{div}(\mathbf{U}\omega') - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'})) = \nu \nabla^{16} \omega'$
f)	Grandes Petites	$\partial_t \Omega + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) = 0$ $\partial_t \omega' + (\text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega})) + (\text{div}(\mathbf{U}\omega') - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'})) = \nu \nabla^{16} \omega'$



**Figure 2.8** : Résultats d'une simulation de turbulence en déclin. Champs de vorticité obtenus par: a) une HDNS sur un maillage  $256^2$ , b) une simulation du système d'équations (2.7)-(2.8) avec un maillage  $32^2$  pour les grandes échelles et  $256^2$  pour les petites. c) Comparaison des spectres d'énergie des deux simulations au temps correspondant aux figures a) et b).



**Figure 2.9 :** Résultats d'une simulation de turbulence forcée. Le forçage est réalisé en maintenant constant le niveau d'énergie du mode de Fourier ( $k_x = 15, k_y = 0$ ). Champs de vorticité obtenus par : a) une HDNS sur un maillage  $512^2$ , b) une simulation du système d'équations (2.7)-(2.8) avec un maillage  $64^2$  pour les grandes échelles et  $512^2$  pour les petites. c) Comparaison des spectres d'énergie des deux simulations au temps correspondant aux figures a) et b).

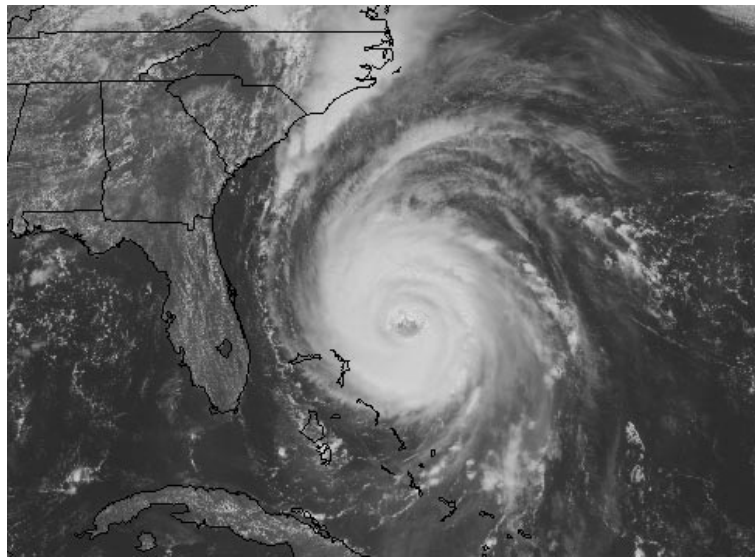
## 2.6 Conclusion des tests

Nous avons obtenu jusqu'ici, un système d'équations couplées pour l'évolution des petites et des grandes échelles. Ces équations ont été obtenues en décomposant les champs de vitesse et de vorticité en une partie grandes échelles et une partie petites échelles. Nous avons ensuite négligé certains termes non-linéaires en fonction de leur niveau d'énergie. Les tests *a priori* concernant l'ordre de grandeur de chacun des termes dans chacune des équations, permettent d'étayer nos hypothèses basées sur une analyse dimensionnelle. Ce type de tests ne permet cependant pas d'appréhender la dynamique d'échanges d'énergie entre petites et grandes échelles. En effet un terme important en ordre de grandeur peut ne contribuer que faiblement aux échanges d'énergie entre les différentes échelles si ce terme est complètement décorrélé en temps. Afin de tester l'aspect dynamique nous avons effectué des simulations de ce système couplé d'équations et comparé les résultats à ceux issus de simulations directes. Les résultats de cette étude dynamique conduisent aux mêmes analyses concernant les termes non-linéaires importants dans notre système d'équations. Cependant, le système couplé d'équations ne peut être, à ce stade, pris pour un modèle LES car la seule intégration des petites échelles nécessite autant de calculs que l'équation du champ total lors d'une DNS (ou d'une HDNS) de même résolution. En effet cette équation nécessite de calculer autant de modes et avec un pas de temps lié aux petites échelles. Afin de tirer avantage de la linéarité de l'équation des petites échelles nous allons la transformer en une équation d'évolution, par les grandes échelles, d'un certain nombre de modes prépondérants. Le chapitre suivant, détaille la manière dont on peut décomposer cette équation sur d'autres modes que les modes de Fourier utilisés pour l'intégration des grandes échelles.



## Chapitre 3

# Développement d'un modèle à deux fluides



*Image d'un ouragan pris le 05 septembre 1996 à l'est de la Floride*

### 3.1 Motivations

Dans le cas de la turbulence non homogène, la décomposition des champs sur des modes “non-locaux”, comme des modes de Fourier, n’est pas naturelle et ne conduit pas à une bonne optimisation. Une décomposition en ondelettes semble beaucoup plus adaptée et permet de conserver le maximum d’énergie ou d’énstrophie du système considéré avec un minimum de modes [67]. C’est en partant de cette constatation qu’il paraît intéressant de décomposer les petites échelles sur ce type de modes. Cependant, les transformées en ondelettes ne conduisent pas à des développements analytiques simples. Nous avons donc opté pour un compromis, et utilisé des transformées de Gabor [74] qui ressemblent à des transformées en ondelettes mais sont beaucoup plus aisées à manipuler dans les calculs analytiques. Les calculs effectués dans ce chapitre ont pour seul objet de déterminer l’équation des petites échelles dans l’espace de Gabor. Le système d’équations sera exprimé dans les cas avec ou sans trou spectral d’énergie.

### 3.2 Définitions et propriétés

Nous verrons qu’il sera nécessaire de reconstruire les champs filtrés faisant intervenir un champ à petites échelles à l’aide de la transformée de Gabor. Pour ce faire, il est commode de définir le filtre de la manière suivante:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int f^2(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) u(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.1)$$

$\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{x}/\epsilon$  sont des variables dite “rapides” et “lentes” correspondant respectivement aux petites et aux grandes échelles.  $\epsilon^*$  est un petit paramètre tel que  $1 \gg \epsilon^* \gg \epsilon$  et  $f$  est une fonction décroissant rapidement vers l’infini. On peut prendre par exemple pour  $f$  une fonction Gaussienne  $f(x) = e^{-x^2}$ . La moyenne est définie avec une fonction au carré par commodité dans les développements qui vont suivre. Le fait de définir la moyenne avec une fonction au carré ne modifie en rien les données du problème. Pour une fonction Gaussienne l’utilisation de  $f^2$  au dépend de  $f$  fait juste intervenir un coefficient  $\sqrt{2}$  dans l’échelle caractéristique du filtre.

La transformée de Gabor (TG) d’un champ à petites échelles  $u'$  est définie comme suit:

$$TG\{\mathbf{u}'\}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \equiv \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \int f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \mathbf{u}'(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.2)$$

où  $f$  est la même fonction que celle introduite dans la formule du filtre (3.1). Il est alors possible, si  $f(0) \neq 0$ , d’inverser la transformée de Gabor en intégrant par rapport au nombre d’onde  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} \int \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} &= \int f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) \left\{ \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d\mathbf{k} \right\} d\mathbf{x}' & (3.3) \\ &= (2\pi)^2 \int f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= f(0) (2\pi)^2 \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac. On obtient donc la formule d'inversion suivante:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2 f(0)} \int \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad (3.4)$$

Comme les champs de vitesse et de vorticité sont réels dans l'espace physique, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) &= \hat{\mathbf{u}}'^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \\ \hat{\omega}'(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) &= \hat{\omega}'^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où le symbole  $*$  signifie "complexe conjugu e".

Il est nécessaire, à ce stade, de démontrer un certain nombre de propriétes de la transformée de Gabor ainsi définie. Ces propriétes seront utilisées dans le développement de l'équation des petites échelles dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  de Gabor. On peut montrer, par une intégration par partie, que la transformée de Gabor d'un gradient, commute avec les opérateurs de dérivée en géométrie périodique.

$$\widehat{\partial_i \mathbf{u}'}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \partial_i \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \quad (3.6)$$

On peut également calculer le développement de la transformée de Gabor par une expansion en fonction du paramètre  $\epsilon^*$ . En intégrant par partie, on obtient:

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_i \mathbf{u}'}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) &= \partial_i \int f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d\mathbf{x}' \\ &= ik_i \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) + \epsilon^* \int f'(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d\mathbf{x}' \\ &= ik_i \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) + O(\epsilon^*) \end{aligned} \quad (3.7)$$

En utilisant cette formule de dérivation, et sachant que  $\omega' = (\nabla \times \mathbf{u}') \cdot \mathbf{z}$ , on obtient les relations approchées liant la vorticité et les composantes de la vitesse à petites échelles:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'(x, y, p, q, t) &= \widehat{\partial_x v'}(x, y, p, q, t) - \widehat{\partial_y u'}(x, y, p, q, t) \\ &= \partial_x \hat{v}'(x, y, p, q, t) - \partial_y \hat{u}'(x, y, p, q, t) \\ &= ip \hat{v}'(x, y, p, q, t) - iq \hat{u}'(x, y, p, q, t) + O(\epsilon^*) \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{k} = (p, q)$  et  $\mathbf{x} = (x, y)$ . En inversant ces formules à l'aide de la fonction de courant  $\psi'(\mathbf{x}, t) = -\nabla^{-2} \omega'(\mathbf{x}, t)$ , on obtient:

$$\hat{u}'(x, y, p, q, t) = \frac{iq}{p^2 + q^2} \hat{\omega}'(x, y, p, q, t) + O(\epsilon^*) \quad (3.9)$$

$$\hat{v}'(x, y, p, q, t) = \frac{-ip}{p^2 + q^2} \hat{\omega}'(x, y, p, q, t) + O(\epsilon^*) \quad (3.10)$$

Afin de pouvoir prendre la transformée de Gabor des termes non-linéaires des équations d'Euler, il est utile de définir la transformée de Gabor d'un produit faisant intervenir une variable petites échelles et une variable grandes échelles.

$$\widehat{\mathbf{U} \mathbf{u}'}(\mathbf{x}, t) = \int f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \mathbf{U}(\mathbf{x}', t) \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (3.11)$$

Comme  $f$  varie sur des échelles de l'ordre de  $L/\sqrt{\epsilon}$  et que  $\mathbf{U}$  varie sur des échelles d'ordre  $L$ , il est possible de faire un développement de Taylor de  $\mathbf{U}$  autour du point  $\mathbf{x}'$  de la manière suivante:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}', t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + O((\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2) \quad (3.12)$$

En introduisant le résultat du développement de Taylor (3.12) dans l'expression (3.11), on obtient:

$$\widehat{\mathbf{U}\mathbf{u}'}(\mathbf{x}, t) \simeq \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, t) + i \nabla_l \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \nabla_{k_l} \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, t) \quad (3.13)$$

Ceci donne une approximation de la quantité  $\widehat{\mathbf{U}\mathbf{u}'}$  au premier ordre en  $\epsilon^*$ . Ces différentes propriétés seront utilisées pour exprimer les équations du modèle en fonction de la transformée de Gabor des champs à petites échelles.

### 3.3 Développement analytique des termes non-linéaires

Afin de calculer le terme non-linéaire  $\text{div}(\overline{\mathbf{u}'\omega'})$  intervenant dans l'équation des grandes échelles (2.11), il est nécessaire d'explicitier le résultat du filtrage d'un produit de deux variables petites échelles. Le résultat de ce filtrage s'exprime en fonction des transformées de Gabor des deux variables:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{2} \left[ \hat{u}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \hat{\omega}'(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) + \hat{u}'(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) \hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \right] d\mathbf{k} \\ &= \int \Re \left[ \hat{u}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \hat{\omega}'(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) \right] d\mathbf{k} \\ &= \int \Re \left[ \int f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} u'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \int f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')} \omega'(\mathbf{x}'', t) d\mathbf{x}'' \right] d\mathbf{k} \\ &= \int f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) f(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')) u'(\mathbf{x}', t) \omega'(\mathbf{x}'', t) \left( \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}')} d\mathbf{k} \right) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \quad (3.14) \end{aligned}$$

En utilisant la relation:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}')} d\mathbf{k} = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''), \quad (3.15)$$

on obtient une formulation de la moyenne du produit qui s'exprime donc en fonction de la transformée de Gabor de chacune des variables par:

$$\overline{u'\omega'}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Re \left[ \hat{u}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \hat{\omega}'(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) \right] d\mathbf{k} \quad (3.16)$$

Le second terme non-linéaire faisant intervenir le champ de vorticité à petites échelles ( $\text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'})$ ) intervient à la fois dans l'équation des petites échelles et des grandes échelles. Ce terme pourrait être développé en reconstruisant, dans un premier temps, le champ de vorticité à petites échelles, puis en effectuant le produit avec  $\mathbf{U}$  avant d'effectuer les d  riv  es dans l'espace de Fourier. Cependant, nous verrons que la méthode de reconstruction du champ de vorticité à petites échelles que nous utiliserons par la suite, génère du "bruit"    petites échelles. Il est donc préférable d'effectuer un développement de ce terme afin de

l'exprimer en fonction du champ de vorticité filtré à petites échelles. Par définition de la moyenne, le terme  $\overline{\mathbf{U}\omega'}(\mathbf{x}, t)$  peut s'écrire:

$$\overline{\mathbf{U}\omega'}(\mathbf{x}, t) = \int f^2(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{U}(\mathbf{x}', t) \omega'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (3.17)$$

En utilisant le développement de Taylor de  $\mathbf{U}$  en  $\mathbf{x}'$  à l'ordre  $\epsilon^*$  (3.12), on obtient la relation :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}\omega'}(\mathbf{x}, t) &= (\overline{\mathbf{U}\omega'}) (\mathbf{x}) + \int f^2(\epsilon^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}', t) \omega'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \\ &= (\overline{\mathbf{U}\omega'}) (\mathbf{x}) + O(\epsilon^*) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le premier ordre de ce développement est suffisant car les termes d'ordre  $\epsilon^*$  seraient du même ordre que certain termes négligés dans l'équation d'évolution des grandes échelles (2.7). En utilisant la définition de la moyenne d'un produit de deux variables à petites échelles (3.16) aux variables 1 et  $\omega'$  on obtient en définitive:

$$\overline{\mathbf{U}\omega'}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Re [\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \hat{1}(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t)] d\mathbf{k} + O(\epsilon^*) \quad (3.19)$$

où  $\hat{1}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  représente la transformée de Gabor de la fonction constante unité qui est aussi la transformée de Fourier de la fonction  $f$  en  $\mathbf{k}$ .

### 3.4 Application au cas avec trou spectral d'énergie

Nous allons développer les équations obtenus dans le cas idéal d'un écoulement avec un trou spectral d'énergie. La dérivation sera effectuée en utilisant les transformées de Gabor. Nous ferons ensuite le lien avec les résultats établis par Dubrulle et Nazarenko [17] dans les mêmes conditions mais en utilisant des fonctions de Wigner définies par :

$$W_k(\mathbf{x}, t) = \int \omega(p+k) \omega(p-k) e^{2i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \frac{dp}{(2\pi)^2} \quad (3.20)$$

où  $\omega(k)$  est la transformée de Fourier de  $\omega$ . La transformée de Wigner du champ de vorticité est donc équivalente au produit des transformées de Gabor  $\omega(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}, t) \omega(\mathbf{x}, \hat{-\mathbf{k}}, t)$ . Nous allons dériver ci-après l'équation de conservation de la vorticité alors que l'analyse de Dubrulle Nazarenko porte sur le carré de la vorticité.

#### 3.4.1 Équations dans l'espace de Gabor

##### Équation des petites échelles

Il convient maintenant d'exprimer l'équation d'évolution de la vorticité aux petites échelles dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  en prenant la transformée de Gabor de l'équation (2.12).

$$\frac{\partial \hat{\omega}'}{\partial t}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) + TG \{div(\mathbf{U}\omega')\}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = 0 \quad (3.21)$$

En utilisant d'une part, la formule approchée au premier ordre en  $\epsilon^*$  de la transformée de Gabor d'un produit (3.13) et d'autre part, la formule de dérivation (3.7), la transformée de Gabor du terme non linéaire devient:

$$\begin{aligned}
TG \{ \partial_j U_j \omega' \} &= TG \{ U_j \partial_j \omega' \} & (3.22) \\
&\simeq U_j TG \{ \partial_j \omega' \} + i \partial_l U_j \frac{\partial}{\partial k_l} TG \{ \partial_j \omega' \} \\
&\simeq U_j \partial_j \hat{\omega}' + i \partial_l U_j \frac{\partial}{\partial k_l} (i k_j \hat{\omega}') \\
&\simeq U_j \partial_j \hat{\omega}' + i \partial_l U_j k_j \frac{\partial}{\partial k_l} \hat{\omega}' - \hat{\omega}' \partial_j U_j
\end{aligned}$$

En utilisant ensuite le fait que le fluide soit incompressible ( $\partial_j U_j = 0$ ), l'équation d'évolution de la vorticité à petites échelles peut se mettre sous la forme conservative suivante:

$$D_t \hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = 0 \quad (3.23)$$

avec:

$$D_t = \partial_t + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla + \dot{\mathbf{k}} \partial_k, \quad (3.24)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \partial_k \Phi, \quad (3.25)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = -\nabla \Phi, \quad (3.26)$$

$$\Phi = \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}, \quad (3.27)$$

où  $\partial_k$  est le gradient dans l'espace des nombres d'onde  $\mathbf{k}$ . L'équation (3.23) exprime donc la conservation de la vorticité à petites échelles dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ . Cette équation de conservation peut être interpr  t  e comme l'advection de particules fluides transportant une certaine quantité d'ensrophie et ayant un nombre d'onde associé  $\mathbf{k}$  représentatif d'un mode d'oscillation local. Ces particules sont advect  es par le champ de vitesse à grandes échelles et leur nombre d'onde évolue en fonction des gradients de ces mêmes grandes échelles (fig. 3.1).

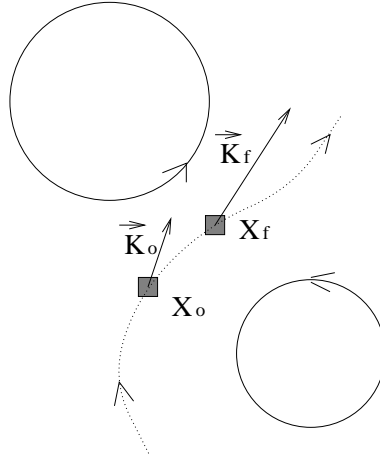
Il est possible, à partir de l'équation de conservation de la vorticité à petites échelles dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ , d'obtenir une équation exprimant la conservation d'une quantité qui correspond à une densité d'ensrophie dans ce même espace. En multipliant l'équation (3.23) par  $\hat{\omega}'^*$  et en additionnant le résultat à celui obtenu en multipliant par  $\hat{\omega}'$  la même équation pour  $\hat{\omega}'^*$  on obtient en effet:

$$\partial_t (\hat{\omega}' \hat{\omega}'^*) (\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) (\hat{\omega}' \hat{\omega}'^*) (\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) - \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{U} \partial_k (\hat{\omega}' \hat{\omega}'^*) (\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = 0 \quad (3.28)$$

soit, mis sous une forme conservative,

$$D_t |\hat{\omega}'|^2 (\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = 0, \quad (3.29)$$

où  $D_t$  est la dérivé totale défini en (3.24). Cette équation correspond à l'équation d'évolution de la densité d'ensrophie obtenue par Dubrulle et Nazarenko [17].



**Figure 3.1 :** Une particule fluide de coordonnées initiales  $(X_0, K_0)$  est advectée dans l'espace physique par l'écoulement à grandes échelles, son nombre d'onde associé évoluant sous l'action des gradients de vitesse

### Équation des grandes échelles

L'équation des grandes échelles est obtenue en remplaçant dans l'équation (2.11) le terme linéaire faisant intervenir les petites échelles  $div(\overline{\mathbf{u}'\omega'})$  par son expression (3.16) en fonction des transformées de Gabor de  $\mathbf{u}'$  et  $\omega'$ . On obtient donc :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + div(\overline{\mathbf{U}\Omega}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} div \left\{ \int \Re \left[ \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \hat{\omega}'(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) \right] d\mathbf{k} \right\} \quad (3.30)$$

Cependant, le terme de droite donne une contribution nulle à l'ordre  $\epsilon^*$ . Pour trouver la contribution à l'ordre supérieur, une solution consiste à reformuler ce terme en fonction des composantes de vitesse. L'équation d'évolution des grandes échelles devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + div(\overline{\mathbf{U}\Omega}) &= -\nabla \times (\nabla(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'})) \\ &= (\partial_{yy} - \partial_{xx})(\overline{u'v'}) + \partial_{xy}(\overline{u'u'} - \overline{v'v'}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

En développant l'expression du second membre à l'ordre  $\epsilon^*$  à l'aide de la relation (3.16) appliquée aux composantes du champ de vitesse  $\mathbf{u}'$ , on retrouve une formulation de l'équation des grandes échelles équivalente à celle obtenue par Dubrulle Nazarenko [17]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + div(\overline{\mathbf{U}\Omega}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int (\mathbf{k} \times \nabla)_z \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla}{k^4} |\hat{\omega}'|^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad (3.32)$$

où la notation  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z$  correspond à la composante suivant  $z$  du produit vectoriel de  $\mathbf{a}$  par  $\mathbf{b}$

### 3.4.2 Propriétés du modèle

#### Conservation de la quantité de mouvement

En prenant l'inverse du rotationnel de l'équation de la vorticité à grandes échelles (3.32), on obtient l'équation d'évolution de la vitesse:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \partial_j \overline{(U_i U_j)} = -\partial_j \sigma_{ij} \quad (3.33)$$

avec

$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{pq}{k^4} |\hat{\omega}'|^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad (3.34)$$

En intégrant l'équation (3.33) sur  $\mathbf{x}$  et en considérant que  $\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  est nul à l'infini (ou périodique), on obtient la loi de conservation de quantité de mouvement:

$$\int \mathbf{U} d\mathbf{x} = \text{constante} \quad (3.35)$$

Comme  $|\hat{\omega}'|^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = |\hat{\omega}'^*|^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = |\hat{\omega}'|^2(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t)$ , l'impulsion associée aux petites échelles est nulle:

$$\int \mathbf{k} |\hat{\omega}'|^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = 0 \quad (3.36)$$

La conservation de la quantité de mouvement totale est donc équivalente à la conservation sur les grandes échelles uniquement.

### Conservation de l'énergie

En multipliant l'équation de la vorticité à grandes échelles (3.32) par la fonction de courant  $\psi$  définie par  $\mathbf{U} = \text{rot}(\psi \mathbf{z})$  et en intégrant par partie, on obtient la relation suivante:

$$-\frac{1}{2} \partial_t \int \mathbf{U}^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{(2\pi)^2} \int |\hat{\omega}'|^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla}{k^4} (\mathbf{k} \times \nabla \psi)_z d\mathbf{k} d\mathbf{x} = 0 \quad (3.37)$$

En supposant, par ailleurs, que  $\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  est nul pour  $k \rightarrow \infty$  et en intégrant une seconde fois par partie sur  $\mathbf{k}$ , l'équation (3.37) devient:

$$-\frac{1}{2} \partial_t \int \mathbf{U}^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k^2} \partial_k \left( |\hat{\omega}'|^2 \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) \right) d\mathbf{k} d\mathbf{x} = 0 \quad (3.38)$$

En utilisant l'équation (3.24) de conservation de  $\hat{\omega}'$  dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ , l'équation peut encore s'écrire:

$$-\frac{1}{2} \partial_t \int \mathbf{U}^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k^2} \partial_t |\hat{\omega}'|^2 d\mathbf{k} d\mathbf{x} = 0 \quad (3.39)$$

Cette équation correspond à une relation de conservation d'énergie:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_{ge} + E_{pe}) = 0 \quad (3.40)$$

où  $E_{ge}$  et  $E_{pe}$  sont respectivement l'énergie des grandes et des petites échelles définies par:

$$E_{ge} = \frac{1}{2} \int \mathbf{U}^2 d\mathbf{x} \quad (3.41)$$

$$E_{pe} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{|\hat{\omega}'|^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)}{k^2} d\mathbf{k} d\mathbf{x} \quad (3.42)$$



Il y a donc conservation de l'énergie totale du système. Compte tenu de l'hypothèse sur les vitesses caractéristiques des deux types d'échelles ( $\mathbf{U} \gg \mathbf{u}$ ), l'énergie des grandes échelles est grande devant celle des petites échelles ( $E_{ge} \gg E_{pe}$ ). Néanmoins les petites échelles peuvent occasionner une variation significative de l'énergie à grandes échelles dans les cas où cette échange est toujours du même signe. Compte tenu de l'équation (3.29), l'énstrophie des petites échelles définie par  $1/(2\pi)^2 \int |\hat{\omega}'|^2 d\mathbf{k}$  est conservée. Par contre les échanges d'énstrophie entre les deux types d'échelles apparaissent à un ordre supérieur du développement en  $\hat{\omega}'$ .

### 3.4.3 Spectres d'énergie des petites échelles

La forme linéaire de l'équation d'évolution de la vorticité aux petites échelles permet à celle-ci de pouvoir être int gr es analytiquement dans certains cas simples. C'est le cas, par exemple, d'un dipôle plongé dans une turbulence à petites échelles (cas étudié par Dubrulle et Nazarenko [17]). Dans le cas idéal où les grandes échelles sont totalement d coupl es des petites échelles turbulentes, leur vorticité peut être consid r e comme un scalaire passif vis à vis des grandes échelles. Ce découplage est effectif dans le cas où, d'une part, il y a un trou spectral d'énergie (qui implique que les interactions soient non-locales) et d'autre part lorsque la turbulence à petites échelles est homogène et isotrope. Dans ces conditions, il n'y a aucune rétroaction des petites échelles sur les grandes structures de l'écoulement. Il est à noter que la séparation d'échelles peut être obtenue dans le cas d'un scalaire passif lorsque le nombre de Peclet est très grand devant le nombre de Reynolds. Les plus petites échelles de la vitesse sont alors grandes devant les échelles observ es du scalaire passif. Ce cas à été étudié par Batchelor [7] qui a prédit un spectre d'énergie du scalaire passif en  $k^{-1}$  dans les petites échelles. Ce spectre est l'équivalent du spectre d'énergie en  $k^{-3}$  dans la cascade d' nstrophie. Pour une distribution initialement homogène et isotrope de la vorticité à petites échelles il est possible de montrer que le spectre d'énergie dans la cascade d'énstrophie est aussi en  $k^{-3}$  (cf annexe C). Plaçons-nous dans le cas simple où la transformée de Gabor de la vorticité à petites échelles  $\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  serait initialement distribu e sur des cercles d'équations  $k = k_o$  en tout point de l'espace  $\mathbf{x}$ :

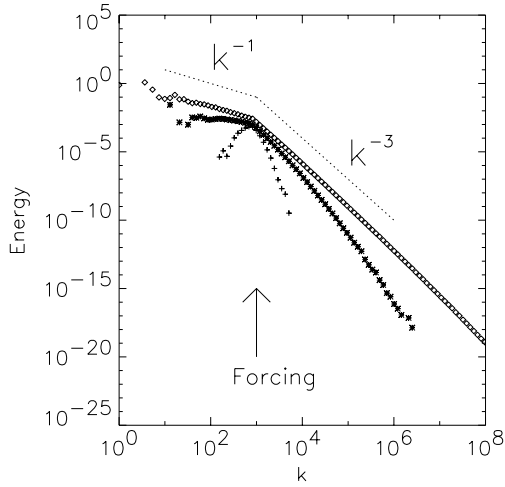
$$|\hat{\omega}'|^2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, 0) = w_o^2 \delta(k - k_o) \quad (3.43)$$

Il est possible avec ces conditions initiales d'intégrer l'équation d'évolution des petites échelles (3.24). La distribution de  $\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  en un point  $\mathbf{x}$  devient alors une ellipse dans l'espace des  $\mathbf{k}$  dont l'excentricité et la direction principale du grand axe sont fonction du gradient de vitesse au point considéré (cf annexe B). Le spectre d'énergie correspondant à ces petites échelles peut s'écrire:

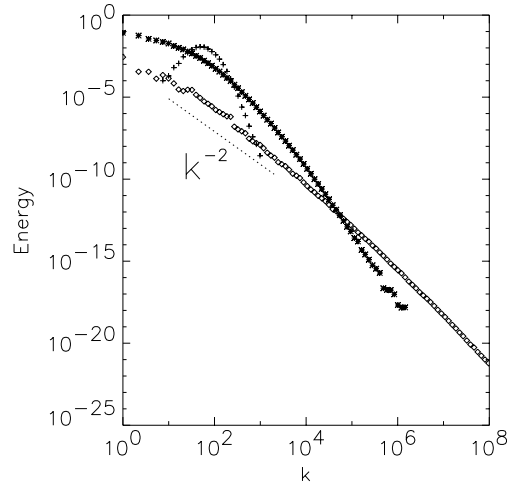
$$E(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \int \frac{|\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)|^2}{k^2} k d\theta \quad (3.44)$$

où  $\mathbf{k} = (p, q) = (k \cos(\theta), k \sin(\theta))$ . La résolution analytique de l'équation des petites échelles permet de montrer que, avec les conditions initiales des petites échelles définies par (3.43) et sans aucun forçage, le spectre d'énergie résultant des petites échelles est en  $k^{-2}$ . Nous avons confirmé ce résultat par une simulation numérique effectu e sous les mêmes

hypothèses (fig. 3.2). Afin de simuler une turbulence forcée idéale, nous pouvons injecter une quantité constante d'énergie au cours du temps sous la forme d'une distribution de vorticité identique à celle définie par (3.43). L'intégration de l'équation des petites échelles permet alors, comme dans le cas non-forcé, de déterminer les pentes du spectre d'énergie. Pour les nombres d'onde  $\mathbf{k}$  dont le module est inférieur à celui de forçage  $k_0$ , le spectre résulte d'un flux d'énergie vers les grandes échelles sous l'action des interactions non-locales, et suit une loi en  $k^{-1}$ . Le spectre dans la cascade d'entrophie ( $\mathbf{k}$  tel que  $k < k_0$ ) est quant à lui en  $k^{-3}$  (fig. 3.3). Ce spectre est l'équivalent du spectre d'énergie en  $k^{-1}$  pour le scalaire passif.



**Figure 3.2 :** Spectre d'énergie des petites échelles pour une distribution initiale définie par (3.43). Les petites échelles sont advect  es par un champ confiné à très grandes échelles afin de satisfaire l'hypothèse de séparation d'échelles.



**Figure 3.3 :** Spectre d'énergie des petites échelles pour une distribution initiale définie par (3.43). Les petites échelles sont advect  es par un champ confiné à très grandes échelles afin de satisfaire l'hypothèse de séparation d'échelles. Un forçage est introduit en injectant à chaque pas de temps un certain nombre de particules ayant une distribution identique à la distribution initiale des petites échelles

## 3.5 Application au cas sans trou spectral d'énergie

### 3.5.1   quation des petites échelles

Dans le cas général, l'équation d'évolution de la vorticité à petites échelles s'obtient également en appliquant une transformée de Gabor à l'équation (2.8) exprim  e dans l'espace physique:

$$\frac{\partial \hat{\omega}'}{\partial t}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) + TG \{div(\mathbf{U}\omega')\}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = F(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \quad (3.45)$$

avec

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = TG \left\{ - \left( \text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) \right) + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) \right\} \quad (3.46)$$

Par un développement du premier membre similaire à celui effectué dans le cas avec un trou spectral d'énergie (eq. 3.23), on obtient l'équation suivante:

$$D_t \hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = F(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \quad (3.47)$$

où la dérivée totale  $D_t$  est définie par (3.24).  $F(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  peut être considéré comme un terme de forçage défini comme la transformée de Gabor des termes du second membre de l'équation de la vorticité à petites échelles (2.8). Ce terme permet un transfert de vorticité des grandes vers les petites échelles. Il participe donc à la cascade d'entrophie.

### 3.5.2   quation des grandes échelles

L'équation des grandes échelles est celle établie en (2.7)    l'on a montré que le terme non-linéaire d'ordre le plus élevé est  $\text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'})$ . En introduisant le développement de ce terme au premier ordre réalisé en (3.19) l'équation d'évolution des grandes échelles devient:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) = -\mathbf{U} \text{div} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Re \left[ \hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \hat{f}(-\mathbf{k}) \right] d\mathbf{k} \right\} \quad (3.48)$$

    $\hat{f}(-\mathbf{k})$  est la transformée de Fourier de la fonction  $f$  utilis  e dans la définition de la transformée de Gabor.

Nous développerons au chapitre suivant la manière dont seront résolues ces équations d'évolution des petites et des grandes échelles. Nous exprimerons en particulier comment seront discr  tiss  s les champs à petites échelles dans l'espace de Gabor.

## 3.6 Liens avec d'autres modèles

### 3.6.1 Analyse de la turbulence par la RDT

Notre modèle présente certaines similarités avec la théorie de distorsion rapide de la turbulence (RDT) invent  e par Batchelor et Proudman [6]. Cette méthode analyse comment la turbulence à petites échelles est "distordue" lorsqu'elle passe rapidement dans une région de cisaillement des grandes échelles de l'écoulement. Hunt et Carruthers ont résumé récemment les conditions d'application ainsi que les limites de la RDT [29]. Cette théorie implique le même type d'hypothèses que celles utilis  es pour la dérivation de notre modèle: la prédominance des interactions entre les grandes et les petites échelles sur les interactions des petites échelles sur elles mêmes. Cette hypothèse permet de transformer l'équation des petites échelles en une équation linéaire traduisant simplement leur advection par le champ de vitesse à grandes échelles. Dans le cas de la turbulence 2D, l'équation des petites échelles est identique à celle d  velopp  e dans notre modèle sous l'hypothèse de trou spectral d'énergie (2.12). Par contre cette théorie ne prend pas en compte la rétroaction des petites échelles sur les grandes structures qui sont données a priori et non calcul  es

au cours du temps. Or, lorsque la turbulence est anisotrope, des transferts d'énergie entre petites et grandes échelles peuvent modifier fortement ces dernières. La RDT n'est donc pas très utile dans la compréhension de ce phénomène. D'autre part, en RDT, l'équation des petites échelles est linéaire et ne fait intervenir aucun forçage venant des grandes échelles. De ce fait, les petites échelles sont entièrement déterminées par leurs conditions initiales. Dans la turbulence, les effets non-linéaires sont responsables d'une décorrélation en temps des petites échelles de sorte qu'elles deviennent de moins en moins dépendantes des conditions initiales. Ceci montre les limites de l'analyse RDT. Cette méthode n'est donc pas un moyen d'analyse systématique de l'évolution de la turbulence. Elle peut cependant être utilisée pour une analyse simplifiée afin de mettre en évidence certaines propriétés dynamiques des petites échelles dans certains cas particuliers. L'analyse RDT permet par exemple d'obtenir des prédictions assez bonnes des différentes composantes du tenseur de Reynolds dans le cas d'un écoulement cisailé [73]. La RDT peut également être utilisée comme modèle afin de prédire le tenseur de Reynolds par intégration des petites échelles sur un pas de temps correspondant aux grandes échelles. Durbin et Zeman [18] ont appliqué la RDT à la modélisation de la turbulence compressible homogène. Simone *et al* [68] ont, quant à eux, comparé les résultats issus d'une modélisation RDT et ceux issus de DNS dans l'étude de la compressibilité d'un écoulement cisailé turbulent.

Cependant, la RDT ne permet pas d'étudier tous les types de problèmes. Nazarenko *et al* [32] ont étudié la réduction du cisaillement à grandes échelles dans le cas de turbulence inhomogène à l'aide d'une théorie dérivée de la RDT faisant intervenir la réaction des petites échelles sur les grandes. Dans ce cas, l'action des grandes échelles sur la turbulence à petites échelles permet le développement de grosses structures tourbillonnaires qui viennent réguler l'action du cisaillement des grandes échelles. Ce mécanisme particulier serait difficilement descriptible dans le cadre d'une analyse classique RDT puisque la rétroaction des petites échelles joue un rôle prépondérant dans la dynamique. Cette prise en compte de la rétroaction des petites échelles sur les grandes s'avère, en fait, importante dans la majorité des applications, en particulier lorsque les grandes échelles ne sont pas contraintes par les conditions aux limites. Cette rétroaction est prise en compte dans notre modèle par l'intermédiaire du terme de forçage dans l'équation des grandes échelles.

### 3.6.2 Modèle Euler- $\alpha$

#### Description du modèle

D'autres modèles de turbulence sont basés sur les mêmes hypothèses de prépondérance de certains termes non-linéaires du tenseur de Reynolds intervenant dans l'équation d'évolution des grandes échelles. Parmi eux, on trouve le modèle appelé *Euler -  $\alpha$*  qui se caractérise par un système d'équations conservatives. Ce modèle a pour but de simuler les écoulements de fluides inviscide et incompressibles. Les détails de la dérivation de ce modèle sont décrits par Nadiga et Shkoller [49]. Nous ne rappellerons ici que la formulation de ce modèle. Les équations de la vorticité à grandes échelles peuvent se mettre sous la forme:

$$\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{u}_\alpha}^\alpha \omega_\alpha = 0 \quad (3.49)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (3.50)$$

où  $\nabla_{\mathbf{u}_\alpha}^\alpha$  est un opérateur défini par

$$\nabla_{\mathbf{u}_\alpha}^\alpha = (1 - \alpha^2 \nabla^2)^{-1} \nabla \mathbf{u}_\alpha (1 - \alpha^2 \nabla^2) \quad (3.51)$$

$\mathbf{u}_\alpha$  et  $\omega_\alpha$  représentent respectivement le champ de vitesse filtré et de vorticité filtré à grandes échelles. L'équation (3.49) peut aussi se mettre sous la forme suivante:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \overline{\nabla(\bar{\mathbf{u}} \bar{\omega})} = 0 \quad (3.52)$$

en définissant la moyenne d'une variable  $g$  dans l'espace de Fourier par:

$$\bar{g} = g_\alpha = (1 - \alpha^2 \nabla^2)^{-1} g \quad (3.53)$$

L'opération  $\tilde{\omega}$  correspond au résultat du d filtrage de la vorticité filtré  $\bar{\omega}$ . Ceci revient à estimer le champ de vorticité totale par l'application de l'inverse du filtre au champ de vorticité filtré qui est la quantité intégré. Le d filtrage est alors défini en Fourier par l'inversion de la formule de filtrage (3.53) soit:

$$\tilde{g} = g = (1 - \alpha^2 \nabla^2) \bar{g} \quad (3.54)$$

En reprenant les notations utilis es pour la décomposition des champs de vitesse et de vorticité totale ( $\omega = \bar{\omega} + \omega' = \Omega + \omega'$  et  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ ), on peut récrire l'équation d'évolution de la vorticité à grandes échelles sous la forme:

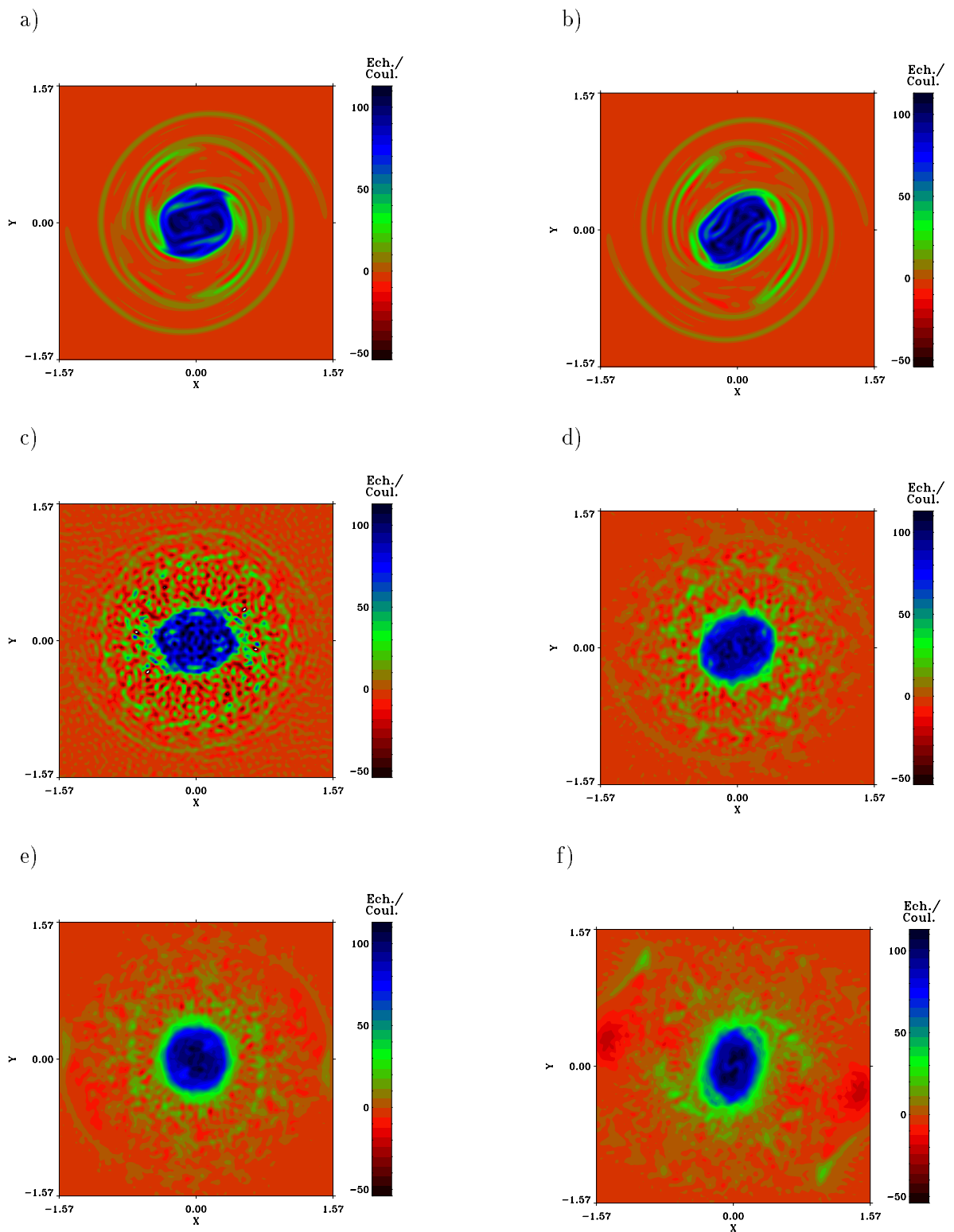
$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{U}} \bar{\Omega}) + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{U}} \omega') = 0 \quad (3.55)$$

Cette équation correspond à celle obtenue en développant le tenseur de Reynolds à l'ordre  $\epsilon^*$  (eq. 2.7) dans le cas réaliste d'un spectre d'énergie continu. La différence avec notre modèle est que les petites échelles sont déduites des grandes échelles par un "d filtrage" des grandes échelles, plutôt que par une équation propre. En fait, on ne peut pas parler dans ce cas de petites échelles, puisqu'elles sont définies uniquement sur la gamme des échelles résolues. Ceci constitue une différence majeure avec notre modèle où l'équation des petites échelles est  valu e, avec plus ou moins de précision et sous l'hypothèse de non-localité des interactions, sur des échelles aussi petites que voulues.

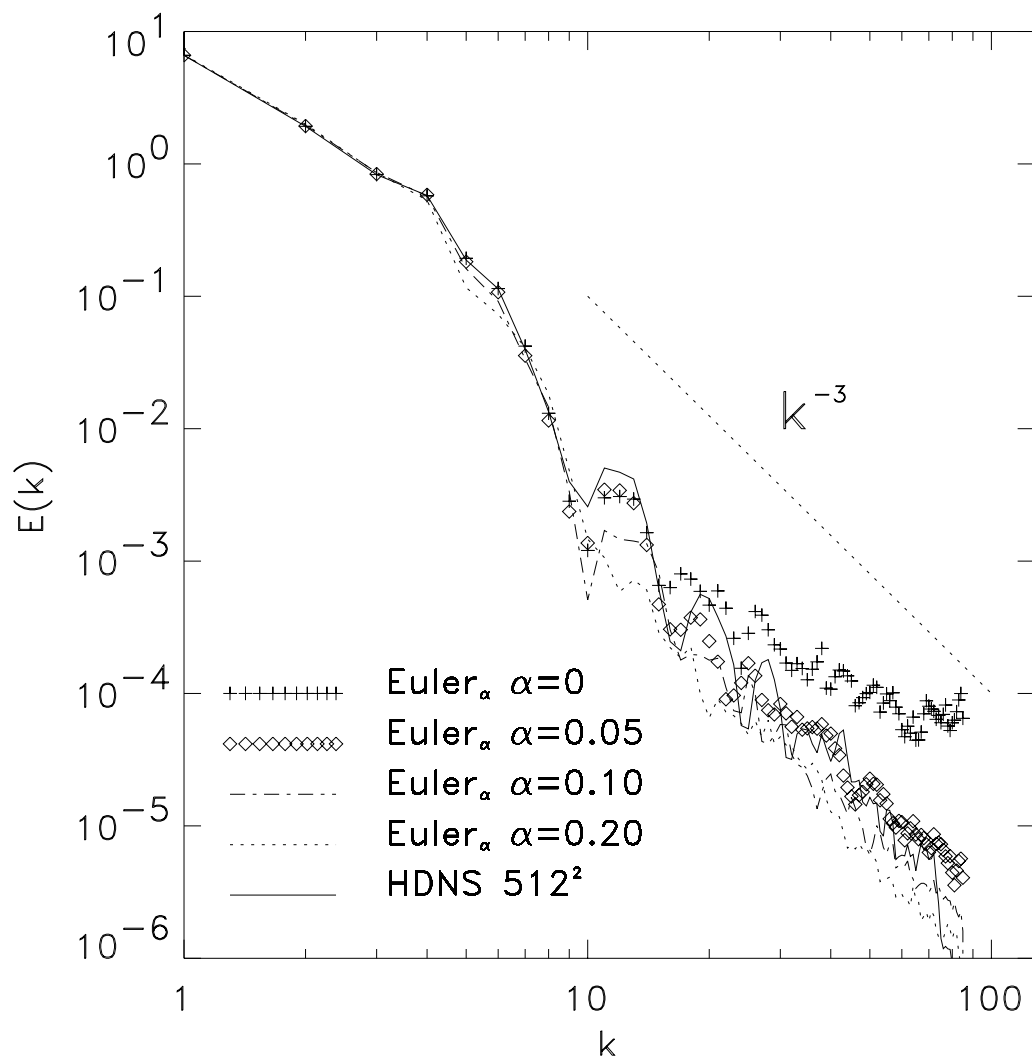
## Résultats

Les figures 3.4 permettent de comparer les résultats de simulations du modèle *Euler* -  $\alpha$  (figs. c, d, e, f) avec les résultats d'une simulation directe (fig. a) et les résultats de la simulation du système d'équations (2.7)-(2.8). Les quatre figures (c, d, e et f) ont été établies pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . La figure (c), obtenue pour  $\alpha = 0$ , correspond au résultat d'une simulation directe des équations d'Euler. Il est connu que, dans ce cas, l'énergie s'accumule à l'échelle de coupure. Ceci se traduit par un spectre d'énergie beaucoup moins pentu que le spectre théorique en  $k^{-3}$  (fig. 3.5). L' image du

champ de vorticité correspondant fait clairement apparaître cette accumulation d'énergie à petites échelles lorsqu'elle est compar e aux résultats de la simulation directe. Pour des valeurs de  $\alpha$  de plus en plus grandes, cette accumulation d'énergie disparaît. On remarque, dans l'expression du filtre (3.53) que le paramètre  $\alpha$  représente la longueur caractéristique du filtre rapport e à la longueur caractéristique de la simulation. Lorsque ce paramètre est trop important, une partie non négligeable de l'énergie passe dans la partie non résolue des équations. Ceci implique une mauvaise description de l'écoulement, y compris pour les grandes échelles. Ce résultat se traduit par une mauvaise concordance des spectres d'énergie entre la simulation directe et la simulation avec  $\alpha = 0.2$ . L'image du champ de vorticité montre également que les plus gros filaments visibles dans la simulation directe (fig. a) ne sont plus du tout capturés. La figure (b) montre le résultat d'une simulation du système d'équations (2.7)-(2.8) obtenue après avoir négligé les termes les moins énergétiques dans le système résultant de la décomposition du champ total. La séparation des échelles à été effectu e par un filtre raide en Fourier localisé à  $k = 32$ , l'équation des petites échelles étant int gr e sur un maillage  $512^2$ . Afin de stabiliser l'équation des petites échelles, celle-ci sont dissip es par une hyperviscosité identique à celle introduite dans la simulation HDNS (fig. a). Compte tenu de la longueur de la zone de dissipation, la zone inertielle est équivalente à celle obtenue pour les simulations de type *Euler* -  $\alpha$  sur un maillage  $256^2$ . On remarque cependant que, comparés aux résultats du modèle *Euler* -  $\alpha$  avec  $\alpha = 0.1$ , les filaments (fig. b) sont très bien capturés alors que pour la simulation *Euler* -  $\alpha$  une reconstruction du champ total à l'aide du champ résolu à grandes échelles ne permet pas de capturer correctement ces filaments. Cependant cet exemple est certainement très contraignant pour ce modèle car les petites échelles sont fortement non isotropes et non homogènes. Ceci rend très difficile leur description par une extrapolation des grandes échelles.



**Figure 3.4 :** Champs de vorticité d'une simulation de l'interaction de deux tourbillons pour: a) HDNS  $512^2$  b) une simulation du système d'équations (2.7)-(2.8) avec hyperviscosité dans l'équation des petites échelles, c) Modèle Euler  $-\alpha$  avec  $\alpha = 0$  (équivalent à une DNS inviscide), d) Modèle Euler  $-\alpha$  avec  $\alpha = 0.05$  e) Modèle Euler  $-\alpha$  avec  $\alpha = 0.1$  f) Modèle Euler  $-\alpha$  avec  $\alpha = 0.2$



**Figure 3.5 :** Comparaison des spectres d'énergie entre les résultats du modèle Euler –  $\alpha$  ( $256^2$ ) pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  et le résultat d'une HDNS ( $512^2$ ). Les spectres sont calculés avec les champs de vorticité représentés figures 3.4.



## Chapitre 4

# Implémentation numérique



*Un des premiers ordinateur (Altair 8800) ...*



*... et l'un des plus gros calculateurs actuels. (CRAY T90)*

## 4.1 Introduction

Notre modèle à deux fluides conduit donc au calcul de deux équations (3.48) et (3.47) décrivant l'évolution des grandes et des petites échelles. Aucune méthode numérique de résolution n'a été supposée jusqu'alors dans le développement des équations. Cependant, l'esprit de la méthode consiste à modéliser l'évolution des petites échelles à moindre coût. En particulier, pour que le modèle soit intéressant, il est indispensable d'intégrer l'équation des petites échelles avec un pas de temps correspondant aux grandes échelles. L'hypothèse de non-localité des interactions a permis de négliger les interactions des petites échelles sur elles-mêmes. Cette hypothèse conduit à une équation linéaire pour les petites échelles et permet donc une intégration avec un pas de temps correspondant aux grandes échelles. Les transformées de Gabor ont été introduites dans le but de modéliser les petites échelles avec un minimum de modes significatifs. Il n'est pas envisageable de résoudre l'équation des petites échelles sur un maillage fixe de l'espace à 4 dimensions  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ . Du fait de la structure Hamiltonienne de l'équation d'évolution des petites échelles, nous avons choisi de la résoudre par une méthode particulière (PIC<sup>1</sup>). Cette méthode permet de discrétiser la transformée de Gabor de la vorticité en un certain nombre de mode représentés par des particules évoluant dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ . En ce qui concerne les grandes échelles, le choix de la méthode importe peu. Cependant, les opérations de filtrage des grandes échelles sont généralement plus aisées et beaucoup plus rapides dans l'espace de Fourier. Ce type de filtrage implique cependant que la transformée de Fourier du filtre  $(\widehat{f}^2(\mathbf{k}))$  dans notre cas) tende vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini. Le calcul des dérivées est également plus simple et beaucoup plus précis par une méthode spectrale que par une méthode de type différences finies par exemple. Pour ces deux raisons, nous avons choisi de calculer les grandes échelles à l'aide d'un code pseudo-spectral. Ce type de méthode est très utilisé pour des simulations directes de la turbulence [75] [10]. Pour plus de détails sur cette méthode d'intégration, le lecteur pourra consulter, par exemple, les ouvrages de Gottlieb *et al* [26] et Voigt *et al* [76].

## 4.2 Le code Fourier

### 4.2.1 Discrétisation spatiale

La représentation en Fourier d'un écoulement sur un domaine 2D de dimension  $L \times L$  implique des conditions aux limites périodiques de période L dans chacune des directions. Ceci est un handicap pour modéliser des écoulements dans un domaine fermé, mais permet néanmoins de reproduire correctement les comportements des échelles plus petites que L.

Les transformées de Fourier discrètes s'obtiennent à partir de la transformée de Fourier continue en moyennant celle-ci sur un domaine de dimension  $L \times L$ . L'équivalent des transformées de Fourier et des transformées de Fourier inverses sur un domaine 1D de dimension L discrétisé en N points, est alors:

$$\hat{u}(k \Delta f, t) = \Delta x \sum_{l=0}^{N-1} u(l \Delta x) e^{-i 2\pi k \Delta f l \Delta x} \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>abréviation de *Particles In Cells*

$$u(l\Delta x, t) = \Delta f \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}(k\Delta f) e^{i2\pi k\Delta f l\Delta x} \quad (4.2)$$

où les différentes variables ont la signification suivante:

$N$	=	le nombre de point de discrétisation du domaine de longueur $L$
$\Delta x$	=	la taille d'une maille $\Delta x = L/N$
$\Delta f$	=	intervalle de discrétisation en fréquence $\Delta f = 1/N\Delta x$
$l$	=	$\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$
$k$	=	$\{-N/2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, N/2\}$
$u(l\Delta x)$	=	la valeur de $u$ en $(l\Delta x)$ dans l'espace physique
$\hat{u}(k\Delta f)$	=	la valeur de $u$ en $(k\Delta f)$ dans l'espace de Fourier

Pour la dérivation des équations nous utiliserons les transformées de Fourier continues, mais tous les calculs pourraient être effectués avec des transformées discrètes. Les calculs numériques ont été réalisés à l'aide des procédures de transformées de Fourier rapides (FFT<sup>2</sup>) du CRAY ou avec celles développées par Temperton. Pour cette raison nous utiliserons pour  $N$  uniquement des puissances de 2 optimisant les algorithmes de FFT. L'équation de la vorticité des grandes échelles (3.48) peut s'écrire dans l'espace de Fourier:

$$\frac{\partial \Omega(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = G(\mathbf{k}, t) - k^2 \Omega(\mathbf{k}, t) \quad (4.3)$$

où  $G(\mathbf{k}, t)$  est la transformée de Fourier de tous les termes non-linéaires (faisant intervenir un produit de deux variables) et  $k$  le module de  $\mathbf{k}$ . Ce terme est calculé dans l'espace physique puis repassé dans l'espace de Fourier en dernier lieu. La raison de ce traitement vient du fait que la transformée de Fourier d'un produit est un produit de convolution qui s'avère beaucoup trop coûteux numériquement. Le calcul des produits dans l'espace physique donne cependant lieu à une erreur appelé "aliasing". L'influence de cette erreur sur les résultats a été étudié par exemple par Orszag [57]. L'erreur d'aliasing intervient sur le résultat à des nombres d'onde  $\mathbf{k} = (p, q)$  tels que:

$$\begin{cases} p > 2k_{max}/3 \\ q > 2k_{max}/3 \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $k_{max} = N/2$  et le nombre d'onde maximum accessible dans la transformée de Fourier d'un champ discrétisé en  $N$  points. Une solution est alors de ne considérer que les modes correctement calculés. Il existe cependant d'autres méthodes plus fines pour supprimer cette erreur d'aliasing [60]. Nous verrons que le calcul du terme non-linéaire faisant intervenir les petites échelles ne peut également pas être calculé avec précision sur les plus grands nombres d'onde des grandes échelles. La solution retenue a donc été de ne pas considérer le terme non-linéaire pour les modes tels que  $k > 2k_{max}/3$ .

---

<sup>2</sup>abréviation de *Fast Fourier Transform*

## 4.2.2 Discrétisation temporelle

L'évolution temporelle est réalisée par un schéma d'Adams-Bashforth. Le terme de diffusion étant intégré analytiquement. Considérons la forme simplifiée suivante de l'équation à résoudre:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}(t) = G(\Omega) - k^2 \Omega(t) \quad (4.5)$$

L'intégration analytique du terme de diffusion  $k^2 \Omega(t)$  s'effectue en introduisant la variable:  $\tilde{\Omega}(t) = \Omega(t) e^{-k^2 t}$ . On obtient alors par dérivation, la relation suivante:

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t}(t) = k^2 e^{k^2 t} \tilde{\Omega}(t) + e^{k^2 t} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t}(t) \quad (4.6)$$

En introduisant la relation (4.6) dans l'équation à résoudre (4.5), on obtient:

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t}(t) = e^{-k^2 t} G(\Omega) \quad (4.7)$$

En intégrant cette expression entre  $t$  et  $t + dt$ , on obtient:

$$\tilde{\Omega}(t + dt) - \tilde{\Omega}(t) = \int_t^{t+dt} e^{-k^2 t'} G(\Omega(t')) dt' \quad (4.8)$$

soit en revenant à la variable  $\Omega$  et par un changement de variable dans l'intégrale,

$$\Omega(t + dt) = e^{-k^2 t} \Omega(t) + e^{-k^2 t} \int_0^{dt} e^{-k^2 t''} G(\Omega(t + t'')) dt'' \quad (4.9)$$

L'intégrale est alors approximée par le schéma aux différences finies d'Adams-Bashforth. Le schéma résultant est en définitive:

$$\Omega(t + dt) = e^{-k^2 t} \Omega(t) + \left\{ \frac{3}{2} G(\Omega(t - dt)) e^{-k^2 t} - \frac{1}{2} G(\Omega(t)) e^{-2k^2 t} \right\} \quad (4.10)$$

Ce schéma fait donc intervenir le champ de vorticité au temps  $t$  et le terme non-linéaire au temps  $t$  et  $t + dt$ .

## 4.3 Traitement des petites échelles

### 4.3.1 Principe de la méthode PIC

Nous avons vu que, afin d'une part de réduire le nombre de modes, et d'autre part d'effectuer les calculs sur un pas de temps lié aux grandes échelles, l'équation des petites échelles (3.24) sera résolue par une méthode PIC. Cette méthode de calcul a été utilisée auparavant par Nazarenko, Zabusky et Sheidegger [52] pour la modélisation des interactions non-linéaires entre les tourbillons et des ondes sonores. Elle est également très utilisée dans les calculs de plasma [8].

La méthode consiste à modéliser la quantité  $\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  par un certain nombre de particules élémentaires dans l'espace à 4 dimensions  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ . L'équation d'évolution de la vorticité à petites échelles revient alors à faire évoluer dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  ces particules

qui transportent une valeur complexe liée à la vorticité. Les trajectoires des  $N_p$  particules  $\alpha$  de coordonnées  $\mathbf{x}_\alpha$  et  $\mathbf{k}_\alpha$  sont données par les deux équations (3.25) et (3.26) soient:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_\alpha}{\partial t}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_\alpha(t)) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_\alpha}{\partial t}(t) = -(\mathbf{k}_\alpha(t) \cdot \nabla) \mathbf{U}(\mathbf{x}_\alpha(t)) \quad (4.12)$$

Les particules évoluent donc, dans l'espace physique, entre les mailles de la grille utilis e pour le calcul des grandes échelles. L'advection des particules nécessite de connaître les vitesses et les gradients de vitesse des grandes échelles à l'emplacement de chacune d'elles. Ces quantités sont calcul es à l'aide de fonctions interpolatrices  $S_{\mathbf{x}}$  et  $S_{\mathbf{k}}$  relatives à la méthode PIC et définies ci-après (eqs. (4.18) et (4.19)). Les équations différentielles (4.11) et (4.12) sont int gr es par le schéma stable du second ordre de Runge-Kutta. L'intégration consiste à effectuer un calcul intermédiaire de  $\mathbf{x}_\alpha$  et  $\mathbf{k}_\alpha$ :

$$\mathbf{x}_\alpha^\diamond = \mathbf{x}_\alpha(t) + \frac{dt}{2} \mathbf{U}(\mathbf{x}_\alpha(t)) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{k}_\alpha^\diamond = \mathbf{k}_\alpha(t) - \frac{dt}{2} (\mathbf{k}_\alpha(t) \cdot \nabla) \mathbf{U}(\mathbf{x}_\alpha(t)) \quad (4.14)$$

Les valeurs au temps  $t+dt$  sont alors données par les relations:

$$\mathbf{x}_\alpha(t+dt) = \mathbf{x}_\alpha(t) + dt \mathbf{U}(\mathbf{x}_\alpha^\diamond) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{k}_\alpha(t+dt) = \mathbf{k}_\alpha(t) - dt (\mathbf{k}_\alpha^\diamond \cdot \nabla) \mathbf{U}(\mathbf{x}_\alpha^\diamond) \quad (4.16)$$

La quantité  $\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  peut être reconstruite à partir de la contribution de chacune des particules par la formule:

$$\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N_p} \hat{\sigma}_\alpha(t) S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha(t)) S_{\mathbf{k}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\alpha(t)) \quad (4.17)$$

Dans le cas d'un spectre continue d'énergie, l'équation des petites échelles (3.47) fait intervenir un terme source issu de la partie petites échelles du terme non-linéaire  $div(\mathbf{U}\Omega)$ . Ce terme de forçage impliquerait que la quantité de vorticité transport e par chaque particule ( $\hat{\sigma}_\alpha(t)$ ) ne soit pas constante dans le temps. Nous verrons qu'il est plus simple de maintenir cette quantité de vorticité constante au cours du temps et de traiter le terme de forçage par la création de nouvelles particules. Il reste maintenant à choisir les fonctions élémentaires  $S_{\mathbf{x}}$  et  $S_{\mathbf{k}}$  d'interpolation pour la méthode PIC. Les fonctions les plus couramment utilis es sont des polynômes par morceaux d'un ordre quelconque [8]. Il faut noter cependant que ces fonctions doivent vérifier  $S_{\mathbf{x}}(0) = 1$ . Plus l'ordre des polynômes sera élevé, plus le support de la fonction sera grand, et donc plus le nombre de calculs à effectuer sera important. Cependant pour un nombre total de particules donné, le "bruit" engendré par la discrétisation en particules et d'autant plus faible que l'ordre de la fonction est élevé. Il y a donc un compromis à trouver entre le nombre total de particules et l'ordre des fonctions d'interpolation. Nous verrons que ce sont les d riv es premières ou secondes des termes non-linéaires évalués par la méthode PIC qui interviennent dans l'équation des grandes échelles. Pour cette raison, nous avons choisi des fonctions d'interpolation d'ordre

2 (c'est à dire des polynômes d'ordre 1) dans l'espace des  $\mathbf{x}$  et des fonctions d'ordre 0 dans l'espace des  $\mathbf{k}$ . Les fonctions  $S_{\mathbf{x}}$  et  $S_{\mathbf{k}}$  sont donc, en 2D, de la forme suivante:

$$S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) = S_x(x - x_\alpha) \times S_y(y - y_\alpha) \quad (4.18)$$

$$S_{\mathbf{k}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\alpha) = \delta(p - p_\alpha) \times \delta(q - q_\alpha) \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\mathbf{k} = (p, q)$ ,  $\delta$  est la fonction de Dirac et les fonctions  $S_x$  et  $S_y$  sont définies par:

$$S_x(x - x_\alpha) = \begin{cases} (dh - |x - x_\alpha|)/dh & \text{si } |x - x_\alpha| < dh \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$S_y(y - y_\alpha) = \begin{cases} (dh - |y - y_\alpha|)/dh & \text{si } |y - y_\alpha| < dh \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $dh$  correspond à la moitié du support de la fonction d'interpolation  $S_{\mathbf{x}}$ . Cette dimension est choisie en fonction de la précision désirée du champ à reconstruire. Cependant, comme il a été mentionné auparavant, cette dimension ne peut pas être choisie aussi petite que voulue à cause du bruit engendré par la méthode lorsque le nombre de particules par maille de dimension  $dh \times dh$  est insuffisant. Dans la pratique, et pour des raisons de commodité numérique, nous prendrons, comme dimension des mailles pour la méthode PIC, une subdivision entière de la taille des mailles utilisées pour la résolution des grandes échelles. Dans toute la suite du développement on considérera que  $dh = \Delta x = 2\pi/N$ .

Les champs à petites échelles seront donc discrétisés en  $2N_p$  particules évoluant d'après les équations (4.11) et (4.12). Il est alors possible de les répartir en considérant plusieurs particules dans l'espace des  $\mathbf{k}$  ayant les mêmes coordonnées dans l'espace  $\mathbf{x}$ , ou alors des particules ayant toutes des coordonnées différentes à la fois en  $\mathbf{x}$  et en  $\mathbf{k}$ . Nous avons choisi la deuxième solution qui est celle qui permet une meilleur discrétisation de l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  pour un nombre de particules donné. Nous avons tout de même introduit, pour chaque particule  $\alpha$  de coordonnées  $\mathbf{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ , deux nombres d'onde:  $\mathbf{k}_\alpha = (p_\alpha, q_\alpha)$  et son opposé  $-\mathbf{k}_\alpha = (-p_\alpha, -q_\alpha)$  afin de tirer partie des symétries des équations d'évolution des petites échelles. En effet, d'après la forme de l'équation d'évolution des nombres d'onde (4.12), l'évolution du nombre d'onde  $-\mathbf{k}_\alpha$  se déduit automatiquement de celle de  $\mathbf{k}_\alpha$ . Nous ne ferons donc les calculs numériques uniquement sur une moitié des nombres d'onde.

### 4.3.2 Reconstruction des champs à petites échelles

Les champs à petites échelles dans l'espace physique se déduisent de leur formulation discrétisée (4.17) dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  par une intégration sur  $\mathbf{k}$  identique à celle effectuée en (3.4):

$$\begin{aligned} \omega'(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2 f(0)} \int \hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 f(0)} \int \sum_{\alpha=1}^{2N_p} \hat{\sigma}_\alpha(t) S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha(t)) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\alpha(t)) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{f(0)} \sum_{\alpha=1}^{2N_p} \hat{\sigma}_\alpha(t) S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha(t)) \\
&= \frac{1}{f(0)} \left\{ \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \hat{\sigma}_{\alpha_+}(t) S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}(t)) + \sum_{\alpha_-=1}^{N_p} \hat{\sigma}_{\alpha_-}(t) S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_-}(t)) \right\}
\end{aligned}$$

où l'on a la relation:

$$\sum_{\alpha=1}^{2N_p} = \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} + \sum_{\alpha_-=1}^{N_p} \quad (4.23)$$

$\sum_{\alpha_+=1}^{N_p}$  signifie que la somme est effectuée uniquement sur la moitié des particules de nombre d'onde  $\mathbf{k}_\alpha$  alors que  $\sum_{\alpha_-=1}^{N_p}$  est une somme sur les particules ayant un nombre d'onde opposé  $-\mathbf{k}_\alpha$ . Par convention on prendra pour la somme sur les particules  $\alpha_+$  celles dont le nombre d'onde vérifie  $p_{\alpha_+} > 0$ . Compte tenu que  $\mathbf{x}_{\alpha_+} = \mathbf{x}_{\alpha_-}$ , le champ  $\omega'(\mathbf{x}, t)$  peut encore s'écrire:

$$\omega'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{f(0)} \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} (\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t) + \hat{\sigma}_{\alpha_-}(t)) S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}(t)) \quad (4.24)$$

Comme  $\omega'(\mathbf{x}, t)$  doit être réel, on doit avoir la relation suivante:

$$\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t) = \hat{\sigma}_{\alpha_-}^*(t) \quad (4.25)$$

On obtient en définitive la formule de reconstruction du champ de vortacité à petites échelles suivante:

$$\omega'(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{f(0)} \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \Re[\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t)] S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}(t)) \quad (4.26)$$

où  $\Re[\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t)]$  est la partie réelle de  $\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t)$ . On peut procéder de même pour les deux composantes de champs de vitesse à petites échelles. En utilisant les relations (3.9) et (3.10) définissant leurs composantes dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  en fonction de  $\omega'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$ , on obtient:

$$u'(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{f(0)} \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \frac{-q_{\alpha_+}}{p_{\alpha_+}^2 + q_{\alpha_+}^2} \Im[\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t)] S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}(t)) \quad (4.27)$$

$$v'(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{f(0)} \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \frac{p_{\alpha_+}}{p_{\alpha_+}^2 + q_{\alpha_+}^2} \Im[\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t)] S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}(t)) \quad (4.28)$$

où  $\Im[\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t)]$  est la partie imaginaire de  $\hat{\sigma}_{\alpha_+}(t)$ . Ces équations correspondent donc aux formules de reconstruction des champs petites échelles en fonction des coordonnées des particules.

### 4.3.3 Discrétisation des termes non-linéaires

Les termes non-linéaires faisant intervenir le champ à petites échelles seront reconstruits à l'aide de la méthode PIC. Il est donc nécessaire de déterminer leur expression via les fonctions d'interpolation introduites en (4.18) et (4.19).

Le terme non-linéaire  $div(\overline{\omega' \mathbf{u}'})$  étant de l'ordre  $\epsilon^2$  il n'est pas possible d'en obtenir une approximation à l'aide des développement de la vorticité à l'ordre  $\epsilon$ . Ce terme sera donc calculé en fonction des composantes du champ de vitesse uniquement. En exprimant la vorticité en fonction des composantes de la vitesse, on obtient:

$$div(\omega' \mathbf{u}') = \partial_x^2(u'v') - \partial_y^2(u'v') + \partial_x \partial_y (v'^2 - u'^2) \quad (4.29)$$

Il nous faut donc déterminer les expressions des moyennes des trois différents produits des composantes de vitesse de manière discrétisées à l'aide des fonctions interpolatrices de la méthode PIC. En introduisant la formulation de la vitesse à petites échelles dans l'expression de la moyenne d'un produit (3.16) on obtient l'expression de  $\overline{u'v'}(\mathbf{x}, t)$  suivante:

$$\begin{aligned} \overline{u'v'}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Re \left[ \hat{u}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \hat{v}'(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) \right] d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Re \left[ \left( \sum_{\alpha=1}^{2N_p} \frac{iq}{p^2 + q^2} \hat{\sigma}_\alpha S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\alpha) \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \sum_{\beta=1}^{2N_p} \frac{+ip}{p^2 + q^2} \hat{\sigma}_\beta S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\beta) \delta(-\mathbf{k} - \mathbf{k}_\beta) \right) \right] d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Si, de plus, toutes les particules possèdent un nombre d'onde différent (tout au moins dans un domaine correspondant au support de la fonction  $S_{\mathbf{x}}$ ), alors la relation (4.30) peut se mettre sous la forme suivante:

$$\overline{u'v'}(\mathbf{x}, t) = 2 \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \Re \left[ \frac{-q_{\alpha_+} p_{\alpha_+}}{(p_{\alpha_+}^2 + q_{\alpha_+}^2)^2} \hat{\sigma}_{\alpha_+} \hat{\sigma}_{\alpha_-} S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}) \right] \quad (4.31)$$

Compte tenu du fait que  $\hat{\sigma}_{\alpha_-}$  et le complexe conjugué de  $\hat{\sigma}_{\alpha_+}$  et en procédant de même pour les deux autres produits des composantes de la vitesse à petites échelles, on obtient:

$$\begin{aligned} \overline{u'v'}(\mathbf{x}, t) &= 2 \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \frac{-q_{\alpha_+} p_{\alpha_+}}{(p_{\alpha_+}^2 + q_{\alpha_+}^2)^2} |\hat{\sigma}_{\alpha_+}|^2 S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}) \\ \overline{u'^2}(\mathbf{x}, t) &= 2 \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \frac{+q_{\alpha_+}^2}{(p_{\alpha_+}^2 + q_{\alpha_+}^2)^2} |\hat{\sigma}_{\alpha_+}|^2 S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}) \\ \overline{v'^2}(\mathbf{x}, t) &= 2 \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \frac{+p_{\alpha_+}^2}{(p_{\alpha_+}^2 + q_{\alpha_+}^2)^2} |\hat{\sigma}_{\alpha_+}|^2 S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ces trois termes  $\overline{u'^2}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\overline{v'^2}(\mathbf{x}, t)$  et  $\overline{u'v'}(\mathbf{x}, t)$  seront ensuite repassés dans l'espace de Fourier afin d'effectuer les dérivées nécessaires au calcul des différents termes intervenant dans la décomposition (4.29) de  $div(\overline{\omega' \mathbf{u}'})$ .



Nous avons déterminé, au chapitre précédent (eq. 3.19), le développement à l'ordre  $\epsilon$  du terme  $\overline{\mathbf{U}\omega'}$  en fonction de la transformée de Gabor de  $\omega'$ . On peut maintenant développer cette expression en utilisant la formule de discrétisation de la fonction  $\omega'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  en particules. On obtient alors l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{U}\omega'}(\mathbf{x}, t) &\simeq \frac{\mathbf{U}}{(2\pi)^2} \int \Re \left[ \hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \hat{1}(\mathbf{x}, -\mathbf{k}, t) \right] d\mathbf{k} \\
&\simeq \frac{\mathbf{U}}{(2\pi)^2} \int \Re \left[ \hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) f(-\mathbf{k}) \right] d\mathbf{k} \\
&\simeq \frac{\mathbf{U}}{(2\pi)^2} \int \Re \left[ \sum_{\alpha=1}^{2N_p} \hat{\sigma}_\alpha f^*(\mathbf{k}) S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\alpha) \right] d\mathbf{k} \\
&\simeq 2\mathbf{U} \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} \Re \left[ \hat{\sigma}_{\alpha_+} f^*(\mathbf{k}_{\alpha_+}) \right] S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}) \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Le terme  $div(\overline{\mathbf{U}\omega'})$  sera ensuite calculé en prenant la divergence du terme  $\overline{\mathbf{U}\omega'}(\mathbf{x}, t)$  après l'avoir repassé dans l'espace de Fourier.

#### 4.3.4 Définition du filtre

##### Relation entre filtre et fonction d'interpolation

Le fait de choisir une fonction interpolatrice  $S_x(\mathbf{x})$  (eq. 4.18) impose la forme de la fonction  $f$  dans la définition du filtre et donc de la transformée de Gabor. En effet on peut écrire la formule de la moyenne du carré de la vorticité, d'une part avec la définition du filtre  $f$  discr tisi  sur les points de grille, et d'autre part avec l'équivalent discr tisi  en particules.

$$\overline{\omega'^2}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \omega'^2(\mathbf{x}_i) f^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) (\Delta\mathbf{x})^2 \tag{4.34}$$

$$= 2 \sum_{\alpha_+=1}^{N_p} |\sigma_{\alpha_+}|^2 S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}) \tag{4.35}$$

Cette formule étant valable pour n'importe quel point  $\mathbf{x}_i$ , on doit donc avoir une relation linéaire entre  $f^2$  et  $S_{\mathbf{x}}$ :

$$f^2(\mathbf{x}) = C \times S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x}) \tag{4.36}$$

D'autre part on doit avoir les relations suivantes:

$$S_{\mathbf{x}}(0) = 1. \tag{4.37}$$

$$\int f^2(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 1. \tag{4.38}$$

Ceci conduit donc a:

$$f^2(\mathbf{x}) = f^2(0) S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x}) \tag{4.39}$$

avec

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{\int S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'}} \tag{4.40}$$

Il sera nécessaire d'exprimer l'opération de filtrage de manière discrétisée sur la grille grande échelle afin de calculer le terme  $div(\overline{\mathbf{U}\Omega})$  intervenant à la fois dans l'équation d'évolution des petites (2.7) et des grandes échelles (2.8). Compte tenu de la formule de filtrage (3.1) et de l'expression (4.39) de la fonction  $f$  en fonction des fonctions interpolatrices, l'opération de filtrage en deux dimensions est définie par:

$$\overline{g}(x, y) = f^2(0) \int S_x^2(x - x') S_y^2(y - y') g(x, y) dx' dy' \quad (4.41)$$

où le calcul de la constante  $f^2(0)$  donne

$$f^2(0) = \frac{1}{\int S_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'} = \left( \frac{3}{2dh} \right)^2 \quad (4.42)$$

### Définition du filtre dans l'espace de Fourier

On peut effectuer les opérations de filtrage directement dans l'espace de Fourier avec la formule suivante:

$$\overline{\hat{g}}(p, q) = \widehat{f^2}(p, q) \hat{g}(p, q) \quad (4.43)$$

où  $\widehat{f^2}(p, q)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $f^2(0) \times S_{\mathbf{x}}^2(x, y)$ . Après calcul, l'expression du filtre vaut:

$$\widehat{f^2}(p, q) = \frac{36}{(p dh)^2 (q dh)^2} \left\{ \left( 1 - \frac{\sin(p dh)}{p dh} \right) \left( 1 - \frac{\sin(q dh)}{q dh} \right) \right\} \quad (4.44)$$

Pour des raisons de simplicité, on prendra  $dh = l \times \Delta(x)$  avec  $l$  entier. Le rapport  $l$  entre les deux grilles sera même une puissance de 2 par souci d'optimisation pour les algorithmes de FFT.

### Approximation du filtre dans l'espace physique

La formule de filtrage dans l'espace de Fourier est difficilement utilisable dans le cas où l'équation des grandes échelles n'est pas intégrée à l'aide d'un code spectral. Il est alors intéressant d'obtenir un développement de la formule de filtrage à l'aide d'un développement de Taylor de son expression. L'expression de la moyenne d'une quantité  $g(x, y)$  peut se mettre sous la forme:

$$\overline{g}(x, y) = f(0) \int S_x^2(x - x') \overline{g}^y(x', y) dx' \quad (4.45)$$

où  $\overline{g}^y(x', y)$  correspond à la moyenne 1D de  $g(x', y)$  suivant  $y$  qui est définie par:

$$\overline{g}^y(x', y) = f(0) \int S_y^2(y - y') g(x, y) dy' \quad (4.46)$$

On peut donc, de cette manière, se ramener à un calcul unidimensionnel. En remplaçant la fonction  $S_y(y - y')$  par sa formulation (4.21) et en introduisant la fonction  $\psi$  telle qu :

$$g(x', y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x', y) \quad (4.47)$$

on obtient:

$$\bar{g}^y(x', y) = \frac{f(0)}{dh^2} \int_{-dh}^{+dh} (dh - |y'|)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}(x', y - y') dy' \quad (4.48)$$

En effectuant alors deux intégrations par partie, on obtient:

$$\bar{g}^y(x', y) = f(0) \left\{ -\frac{4}{dh} \psi(x', y) + \frac{4}{dh^2} \int_{-dh}^{+dh} \psi(x', y - y') dy' \right\} \quad (4.49)$$

Si l'on définit  $\phi$  comme la primitive de  $\psi$  par rapport à  $y$ , on obtient après un changement de variable:

$$\int_{-dh}^{+dh} \psi(x', y - y') dy' = \phi(x', y - dh) - \phi(x', y + dh) \quad (4.50)$$

Il faut alors prendre le développement de Taylor à l'ordre 5 de chacun des deux termes pour obtenir l'approximation suivante de la moyenne:

$$\bar{g}^y(x', y) = f(0) \frac{2dh}{3} \left[ g(x', y) + \frac{dh^2}{20} \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}(x', y) + O(dh^4) \right] \quad (4.51)$$

On peut alors appliquer cette formule de la moyenne 1D à la quantité  $\bar{g}^y(x', y)$  pour obtenir l'expression de la moyenne 2D donnée par l'équation (4.45). On obtient en définitive le développement suivant:

$$\bar{g}(x, y) = g(x, y) + \frac{dh^2}{20} \nabla^2 g(x, y) + O(dh^4) \quad (4.52)$$

Cette formulation peut être utilisée dans le cadre d'un filtrage dans l'espace physique en utilisant par exemple une formule aux différences finies pour modéliser le laplacien. Elle peut permettre également, comme dans l'espace de Fourier, de choisir l'échelle  $dh$  du filtre quelconque par rapport à la dimension d'une maille de la grille à grandes échelles. On remarque que le filtre défini en (4.52) est similaire à celui utilisé dans le modèle *Euler* -  $\alpha$  (eq. 3.53). En effet, dans l'espace de Fourier la moyenne définie en (4.52) s'écrit:

$$\bar{g}(\mathbf{k}) \sim g(\mathbf{k}) - \frac{dh^2}{20} k^2 g(\mathbf{k}) \quad (4.53)$$

Si l'on regarde l'effet de ce filtre sur les grandes échelles, on peut considérer le cas où  $dh^2 k^2 < 1$  et donc  $dh^2 k^2/20 \ll 1$ . La formule du filtre (4.53) peut alors s'écrire:

$$\bar{g}(\mathbf{k}) \sim \left(1 + \frac{dh^2}{20} k^2\right)^{-1} g(\mathbf{k}) \quad (4.54)$$

où encore dans l'espace physique:

$$\bar{g}(\mathbf{x}) \sim \left(1 - \frac{dh^2}{20} \nabla^2\right)^{-1} g(\mathbf{x}) \quad (4.55)$$

On obtient ainsi la même formule de filtrage que pour le modèle *Euler* -  $\alpha$  où  $\alpha$  serait défini par  $\alpha = dh^2/20$ .

## 4.4 Modélisation du transfert d'entrophie

### 4.4.1 Procédure de transfert d'entrophie

La cascade directe d'entrophie implique un transfert de vorticité des grandes vers les petites échelles. Cette cascade est présente à toutes les échelles impliqu es. Il doit donc y avoir en particulier un transfert de vorticité entre les deux types d'échelles mod lis es par les deux équations d'évolutions (2.7) et (2.8) dans le cas réaliste d'un spectre continu d'énergie. Le transfert d'entrophie des grandes vers les petites échelles est traduit par le second membre de l'équation (2.8) qui correspond à la partie petites échelles des termes non-linéaires impliquant les grandes échelles. A ce terme correspond une création de vorticité dans les petites échelles. Deux possibilités sont alors envisageables. La première consiste à faire évoluer dans le temps la valeur de la vorticité ( $\hat{\sigma}_\alpha$ ) attach e à chaque particule en calculant à l'aide de la méthode PIC le terme de forçage à chacune de leur position. L'équation d'évolution de la vorticité de chaque particule  $\alpha$  devient alors:

$$D_t \hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha, t) = F(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha, t) \quad (4.56)$$

Cette équation peut être int gr e de la même manière que les équations d'évolution des particules dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ . Cette méthode suppose qu'un certain nombre de particules soit déjà créé. Afin de discrétiser correctement le terme de forçage, il devrait même y avoir une densité de particules suffisante. Or si aucune petites échelles ne sont présentes au début de la simulation, cette méthode n'est pas envisageable. Nous utiliserons donc la deuxième solution qui consiste à traiter ce terme de forçage en créant à chaque pas de temps de nouvelles particules. Si l'on crée  $M$  particules à chaque pas de temps, on devra avoir l'égalité suivante dans l'espace physique:

$$\omega'_f(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{f(0)} \sum_{\alpha_+=N_p+1}^{N_p+M} \Re[\sigma_{\alpha_+}(t)] S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha_+}) \quad (4.57)$$

où  $\omega'_f(\mathbf{x}, t)$  représente le terme de forçage des petites échelles et vaut dans le cas d'une simulation avec un spectre continue d'énergie (eq. 2.8):

$$\omega'_f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{dt} \left\{ - \left( \text{div}(\mathbf{U}\Omega) - \text{div}(\overline{\mathbf{U}\Omega}) \right) + \text{div}(\overline{\mathbf{U}\omega'}) \right\} \quad (4.58)$$

Comme nous l'avons montré auparavant, ce terme de forçage est nul dans le cas d'une simulation d'un écoulement idéal avec un trou spectral d'énergie (eq. 2.12). Si l'on souhaite une égalité stricte entre le terme de forçage dans l'espace réel et son équivalent discrétisé en particules, il est nécessaire de créer une particule par point de grille des grandes échelles. Il sera donc crée  $M = N^2$  particules à chaque pas de temps. En appliquant l'égalité (4.57) aux points  $\mathbf{x}_i$  de la grille grandes échelles et compte tenu de la définition de la fonction interpolatrice  $S_{\mathbf{x}}$ , on obtient:

$$\omega'_f(\mathbf{x}_i, t) = \frac{2}{f(0)} \Re[\sigma_{\alpha_i}(t)] \quad (4.59)$$

Avec cette équation, trois coordonnées ( $x_\alpha, y_\alpha$  et  $\Re[\sigma_\alpha]$ ) de chacune des particules sont d termin es. Il reste donc à déterminer les trois autres composantes que sont  $p_\alpha, q_\alpha$  et  $\Im[\sigma_\alpha]$ .

Pour ce faire, une des solutions est d'utiliser les vitesses correspondantes aux champs de vortacité  $\omega'_f(\mathbf{x}, t)$  et d'égaliser leurs expressions avec celles équivalentes discrétisées en particules. Si l'on définit  $\mathbf{u}'_f$  tel que  $(\omega'_f = \nabla \times \mathbf{u}'_f) \cdot \mathbf{z}$  on a alors, en chaque points de grille  $\mathbf{x}_i$ , les relations suivantes:

$$u'_f(\mathbf{x}_i, t) = \frac{2}{f(0)} \frac{-q_{\alpha_i}}{(p_{\alpha_i}^2 + q_{\alpha_i}^2)} \Im[\sigma_{\alpha_i}(t)] \quad (4.60)$$

$$v'_f(\mathbf{x}_i, t) = \frac{2}{f(0)} \frac{+p_{\alpha_i}}{(p_{\alpha_i}^2 + q_{\alpha_i}^2)} \Im[\sigma_{\alpha_i}(t)] \quad (4.61)$$

Avec ces deux nouvelles équations, il est possible de déterminer les coordonnées de chaque particule dans l'espace des  $\mathbf{k}$ . Il manque encore cependant une équation afin de déterminer la partie imaginaire de  $\sigma_{\alpha_i}(t)$ . Nous avons choisi de se donner la partie imaginaire égale à la partie réelle. Cette dernière coordonnée pourrait cependant être déterminée par une équation faisant intervenir des gradients de  $\omega'_f$ . En définitive les coordonnées de chaque particule  $\alpha_i$  créée sont déterminées par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Re[\hat{\sigma}_{\alpha_i}] = f(0) \omega'_f(\mathbf{x}_i)/2 \\ \Im[\hat{\sigma}_{\alpha_i}] = \Re[\hat{\sigma}_{\alpha_i}] \\ q_{\alpha_i}/p_{\alpha_i} = -u'_f(\mathbf{x}_i)/v'_f(\mathbf{x}_i) \\ p_i = \frac{\omega'_f(\mathbf{x}_i)(q_{\alpha_i}/p_{\alpha_i})^2}{v'_f(\mathbf{x}_i)(1+(q_{\alpha_i}/p_{\alpha_i})^2)} \\ \mathbf{x}_{\alpha_i} = \mathbf{x}_i \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Afin de limiter cependant le nombre de particules créées et de prendre en compte le caractère locale du terme de forçage, les particules qui auraient un niveau de vortacité équivalente  $\omega'_f(\mathbf{x}_i)$  plus petit en module qu'une valeur donnée ne seront pas créés. Ceci conduit, dans le cas où le terme de forçage est très intermittent, à ne créer qu'une fraction des  $N^2$  particules à chaque pas de temps et permet une économie substantielle du nombre de particules et donc de temps de calcul.

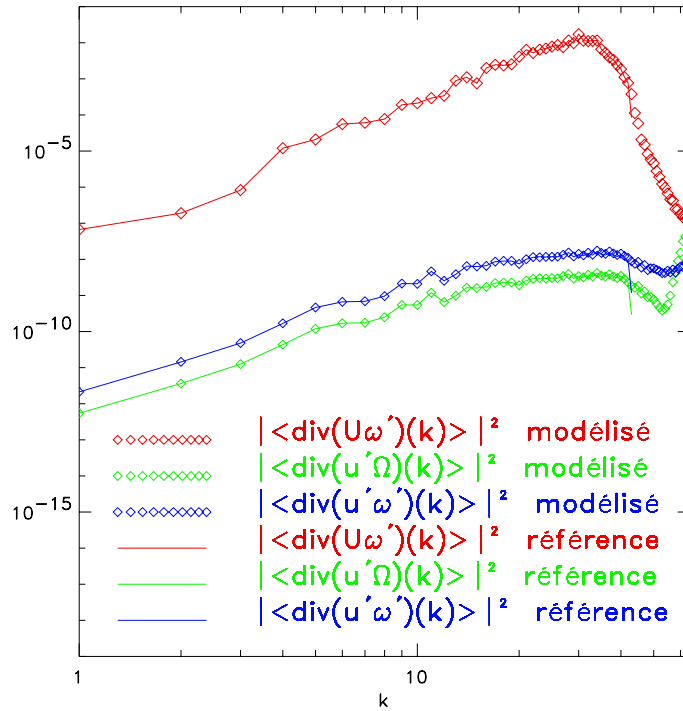
#### 4.4.2 Procédure de refonte des petites échelles

La création d'un grand nombre de particules par pas de temps implique que le nombre total de particules croit très rapidement. Sans autre traitement, le modèle deviendrait donc rapidement inutilisable numériquement par faute de mémoire. Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de réduire le nombre de particules périodiquement. Il faut donc introduire une procédure qui, lorsque le nombre total de particules  $N_p$  devient trop grand, les remplace par une nouvelle répartition moins dense tout en conservant le maximum d'informations incluses dans les particules de départ. Une solution est de recréer un champ de vortacité à petites échelles sur un maillage  $(N_f \times N_f)$  beaucoup plus fin que le maillage grandes échelles  $(N \times N)$  et de recréer  $N_f^2$  particules à l'aide de la procédure définie dans le paragraphe précédent. Ceci est rendu possible par le fait que, plus le nombre de particules est important, le plus la reconstruction à l'aide de la méthode PIC est précise. Il est donc possible de reconstruire un champ de vortacité sur un maillage dont la taille sera fonction du nombre de particules avant manipulation et de la précision de la méthode PIC pour ce nombre de particules donné. Cette procédure permet d'obtenir une reconstruction

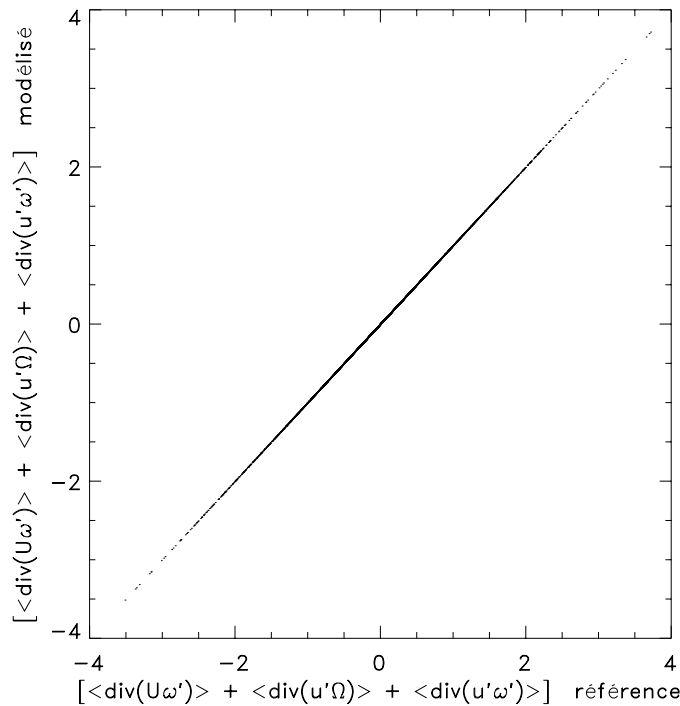
identique de la vorticité  $\omega'$  et donc de la vitesse  $\mathbf{u}'$  sur la grille grandes échelles. En particulier, l'avantage est que le calcul des termes de forçage des grandes échelles des équations (2.7) ou (2.11) n'est pas directement affecté par cette procédure de refonte des particules. Cette procédure, tout en définissant une échelle minimum de résolution pour les petites échelles, permet un transfert d'énergie au travers de cette échelle. En effet la discrétisation des petites échelles en particules fait que l'on ne peut pas définir d'échelle minimum, mais la procédure de refonte des particules a pour effet de filtrer les échelles plus petites que l'échelle de reconstruction ( $dx_{min} = L/N_f$ ). Cette procédure permet donc d'introduire une troncature artificielle des petites échelles sans problème d'accumulation d'énergie à l'échelle de coupure.

## 4.5 Modélisation du transfert d'énergie

Les termes non-linéaires  $div(\overline{\mathbf{U}\omega'})$  et  $div(\overline{\mathbf{u}\omega'})$  intervenant dans l'équation des grandes échelles sont responsables du transfert d'énergie des petites vers les grandes échelles. Nous avons détaillé dans le paragraphe 4.3.3 l'expression de chacun de ces termes en fonction du champ discrétisé en particules de la vorticité à petites échelles. Afin de s'assurer de la validité de notre discrétisation, nous avons effectué un test *a priori* sur les différents termes non-linéaires faisant intervenir le champ à petites échelles. Le terme  $div(\overline{\mathbf{U}\Omega})$  ne faisant intervenir que des échelles résolues, il est calculé directement dans l'espace physique avant d'être repassé dans l'espace de Fourier. Le principe du test *a priori* a été expliqué dans le premier chapitre. Il consiste, dans ce cas précis, à partir du résultat d'une simulation directe. Le champ de vorticité de cette simulation à un instant donné est ensuite séparé en deux composantes grandes et petites échelles par l'intermédiaire de notre filtre  $f^2$  dont la transformée de Fourier est exprimée en (4.44). Le champ à petites échelles est discrétisé en particules dont les composantes sont calculées à partir du système d'équations (4.62). Le test consiste alors à reconstruire les termes non-linéaires à partir des coordonnées de chacune des particules créées en utilisant les expressions dérivées en (4.32) et (4.33). Ces termes reconstruits sont ensuite comparés aux termes équivalents calculés directement en Fourier sur le maillage de la simulation directe de départ. La figure 4.1 montre une comparaison du spectre de chacun des trois termes non-linéaires faisant intervenir les petites échelles. La comparaison est pratiquement parfaite jusqu'aux échelles proches de la plus petite échelle résolue ( $k = 42$  dans ce cas). Au delà de cette échelle la méthode de reconstruction des champs modélisés introduit un bruit visible sur les spectres. Ce phénomène est plus prononcé sur les termes faisant intervenir le champ de vitesse à petites échelles ( $div(\mathbf{u}'\Omega)$  et  $div(\mathbf{u}'\omega')$ ). L'apparition de ce bruit inhérent à la méthode de reconstruction nous amènera à tronquer les termes non-linéaires une fois repassés dans l'espace de Fourier afin de ne prendre en compte que les échelles correctement modélisées. En pratique, cette troncature ne nuit pas à la méthode car nous avons montré que le terme non-linéaire, faisant intervenir uniquement les champs à grandes échelles, doit être tronqué pour les nombres d'onde de module  $k > 2k_{max}/3$  à cause du phénomène "d'aliasing". Il suffira donc de filtrer les autres termes non-linéaires à partir du même nombre d'onde.



**Figure 4.1 :** Comparaison du spectre du module au carré de chacun des 3 termes non-linéaires faisant intervenir le champ à petites échelles. Les champs modélisés reconstitués à l'aide de la méthode PIC (symboles) sont comparés à ceux issus d'un calcul direct en Fourier (lignes).  $\langle . \rangle$  est dans ce cas la moyenne définie par  $f^2$  (eq. 4.44)



**Figure 4.2 :** Comparaison des valeurs modélisées et réelles du tenseur de Reynolds filtré et tronqué au nombre d'onde  $k = 42$ .  $\langle . \rangle$  est la moyenne définie par la fonction  $f^2$  (eq. 4.44) et  $\mathbf{u}, \omega$ , les champs de vitesse et de vorticité totale.

La figure 4.2 permet de visualiser le résultat de la comparaison de la somme des trois termes non-linéaires modélisés ( $\langle \text{div}(\mathbf{U}\omega') \rangle + \langle \text{div}(\mathbf{u}'\Omega) \rangle + \langle \text{div}(\mathbf{u}'\omega') \rangle$ ) en fonction du même terme calculé directement. Ces termes ont été tronqués au nombre d'onde  $k = 42$  afin d'éliminer le phénomène d'aliasing dans le calcul direct et le bruit

inhérent à la méthode PIC pour les termes modélisés. On remarque que tous les points sont très proches de la première bissectrice. Ceci signifie que, après une troncature du bruit, le résultat de la modélisation est pratiquement parfait. Afin d'évaluer la précision de notre modélisation, on peut, par exemple, comparer ce test *a priori* à celui du *modèle de fonction de structure* (fig. 1.3) ou même du *modèle de similarité* (fig. 1.2).

## 4.6 Introduction de la dissipation

Nous avons jusqu'alors développé les équations dans l'hypothèse d'un fluide inviscide. Il est cependant très facile d'introduire de la viscosité. Il suffit, pour l'équation des grandes échelles, d'ajouter le terme de dissipation  $-\nu\nabla^2\Omega$ . Ce terme sera traité par la méthode choisie pour l'intégration des grandes échelles, soit, dans notre cas, une méthode spectrale. En ce qui concerne l'équation des petites échelles, le terme de dissipation est obtenu en prenant la transformée de Gabor de  $-\nu\nabla^2\omega'$ . Compte tenu de la formule approchée (3.7) de la transformée de Gabor d'une dérivée, on obtient pour l'équation des petites échelles:

$$D_t\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = -\nu|\mathbf{k}|^2\hat{\omega}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) + F(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \quad (4.63)$$

où  $D_t$  est la dérivée totale explicitée en (3.24) et où  $F(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  est le terme de forçage des grandes échelles (3.46). Nous avons montré comment ce terme de forçage était traité dans le paragraphe 4.5 . Il nous faut donc trouver maintenant une solution de l'équation sans le terme de forçage  $F(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$ . Cette équation dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  se ramène à une équation d'évolution de la vorticité de chaque particule  $\alpha$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\sigma}_\alpha(t) = -\nu|\mathbf{k}_\alpha(t)|^2\hat{\sigma}_\alpha(t) \quad (4.64)$$

Cette équation s'intègre facilement et l'on obtient:

$$\hat{\sigma}_\alpha(t) = e^{-\nu\int_0^t|\mathbf{k}_\alpha(t)|^2dt}\hat{\sigma}_\alpha(0) \quad (4.65)$$

On pourra utiliser le même schéma en temps que celui utilisé pour l'advection des particules (4.13)-(4.16) pour intégrer cette équation d'évolution de la vorticité de chaque particule.



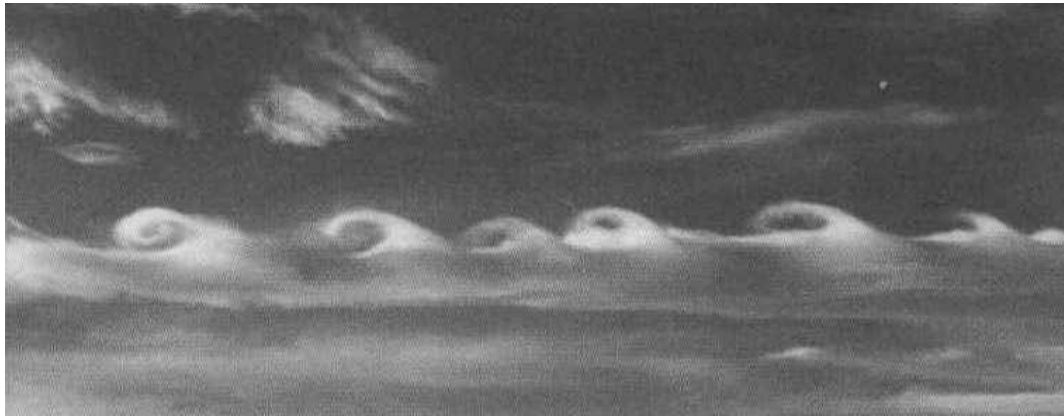
Deuxième partie

Analyse des résultats du modèle



## Chapitre 5

# Résultats numériques du modèle pour la turbulence 2D



*Instabilité de Kelvin-Helmoltz dans l'atmosphère*

## 5.1 Introduction

Nous avons, dans le chapitre précédent, développé la méthode numérique utilisée pour résoudre le système d'équations couplées obtenu dans la définition de notre modèle. Nous avons en particulier donné l'expression de reconstitution des termes non-linéaires impliquant les petites échelles. Un test *a priori* a permis de valider la méthode de reconstruction de ces termes non-linéaires. Ce test a montré que pour une reconstruction du champ de vorticité sur un maillage donné, les échelles supérieures à 2/3 de l'échelle minimum de reconstruction sont correctement mod lis es alors qu'il apparaît un bruit inhérent à la méthode au delà de cette échelle. Ce test n'est cependant qu'un test statique qui ne permet pas d'appréhender l'aspect dynamique du problème. Afin de valider dynamiquement notre modèle nous avons effectué une série de tests *a posteriori*. Ces tests consistent à comparer les résultats obtenus par l'intermédiaire de notre modèle avec des résultats de référence. Nous prendrons comme références des simulations directes des équations de Navier Stokes (DNS)   grandes résolutions. Pour certaines d'entre elles, nous avons introduit une hyperviscosité (HDNS) afin de simuler des écoulements se rapprochant le plus possible du cas inviscide. Les simulations utilisant notre modèle seront, quant à elles, totalement inviscide.

## 5.2 Simulation de turbulence en déclin

### 5.2.1 Description de la simulation

Nous avons appliqué notre modèle à un cas de turbulence en déclin. Nous avons pris un champ initial de vorticité avec un spectre d'énergie localisé aux grandes échelles. Ceci permet de tester notre procédure de transfert d'ensrophie entre les grandes et les petites échelles dans la mesure où toutes les petites échelles seront cr ees par cette procédure. La simulation utilisant notre modélisation a été effectu e sur un maillage grandes échelles de  $32^2$ . Ceci signifie que la longueur caractéristique du filtre utilisé pour séparer les grandes des petites échelles est  $dh = (2\pi/32)$ . Par contre, afin de déterminer correctement le terme  $(div(\mathbf{U}\Omega) - div(\overline{\mathbf{U}\Omega}))$  de forçage des petites échelles, ce terme sera calculé sur un maillage double ( $64^2$ ). Une résolution double est suffisante car le produit de deux termes ayant des composantes jusqu'à  $k = kc$  n'a des composantes que pour les nombres d'onde  $k \leq 2kc$ . Dans ce cas le nombre d'onde maximum des grandes échelles sera pris à  $k = 11$  afin d'éliminer l'erreur d'aliasing. Nous avons montré qu'il était nécessaire de fusionner régulièrement les particules au cours de la simulation afin d'en limiter leur nombre. Cette procédure de fusion a été r alis e sur un maillage  $256^2$ . Ceci signifie que, tous les 25 pas de temps, le champ de vorticité à petites échelles est reconstruit sur ce maillage et,  $256^2$  particules sont recrées au maximum. Les particules qui, par la procédure de création, auraient un poids trop faible sont n glig es afin de ne pas alourdir inutilement la simulation.

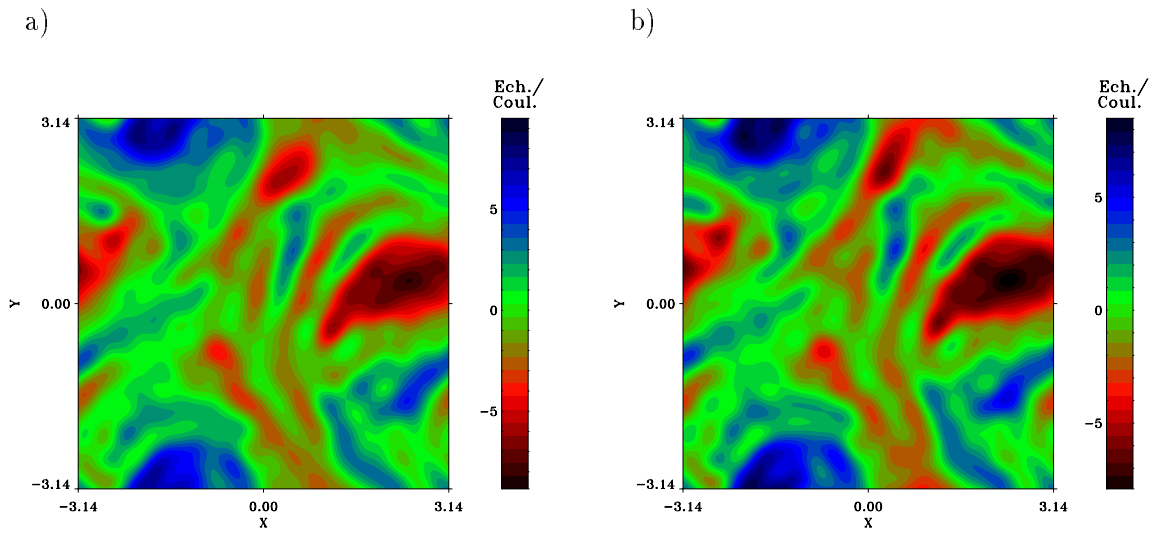
### 5.2.2 Comparaison des résultats

Nous avons comparé le résultat de cette simulation avec celui d'une DNS sur un maillage  $1024^2$ . Les figures 5.1 montrent les résultats du champ de vorticité à grandes échelles après environs 4 temps de retournement calculé sur la simulation directe à grande résolution. Afin de faciliter la comparaison nous avons visualisé les champs de vorticité totale pour les mêmes échelles définies en filtrant les nombres d'onde  $\mathbf{k}$  tels que  $k > 11$  du champ de vorticité totale. Pour le résultat de notre modèle, le champ de vorticité totale est reconstitué en additionnant le champ à grandes échelles avec celui reconstitué à petites échelles sur un maillage  $256^2$ . Pour la visualisation, afin d'éliminer le bruit inhérent à la méthode de reconstruction du champ à petites échelles, nous avons tronqué le résultat pour les nombres d'onde tels que  $k > 64$ . Les champs de vorticité à grandes échelles ( $k < 11$ ) sont très comparables. A titre de comparaison nous avons visualisé le résultat d'une simulation des équations d'Euler (fig. 5.2a). Il est connu que, dans ce cas ou aucune dissipation n'est introduite, l'énergie s'accumule proche de l'échelle de coupure pour former de fines structures ayant une intensité anormalement   lev  e. On peut alors remarquer que le résultat obtenu dans ce cas est très diff  rent de celui obtenu par la simulation directe, y compris après un faible temps d'intégration. Nous avons également effectué une HDNS avec une résolution identique à celle des grandes échelles de notre modèle ( $32^2$ ). Le résultat obtenu (fig. 5.2b) est clairement beaucoup plus éloigné de la simulation directe que celui de notre modèle.

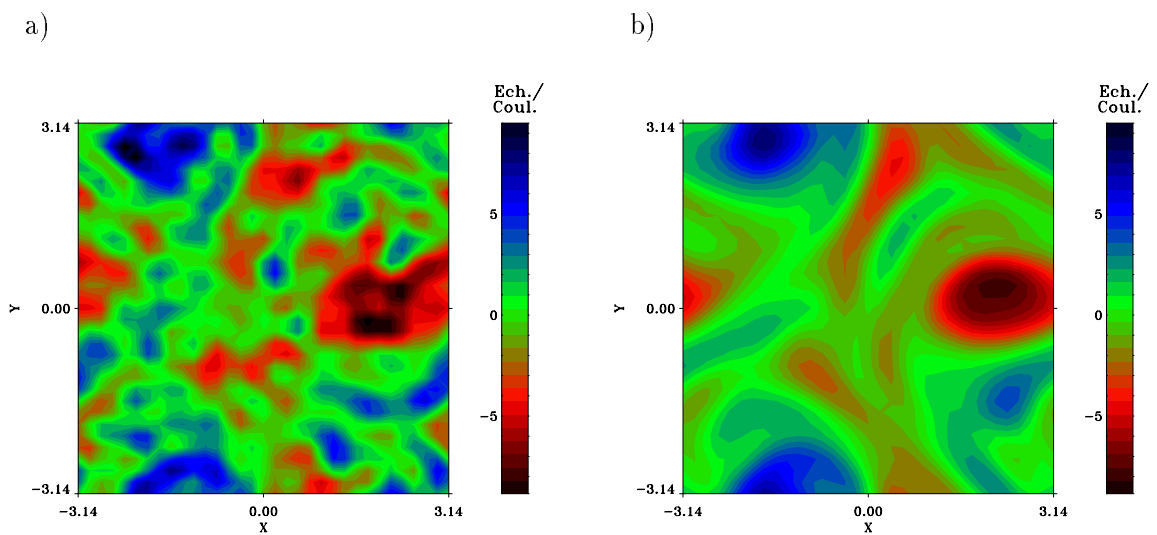
En plus de l'information à grandes échelles, et contrairement à la plupart des modèles LES, notre modèle permet une modélisation du comportement des petites échelles. On peut alors comparer les champs de vorticité à petites échelles (fig. 5.3). Les champs visualisés sont le résultat du filtrage du champ de vorticité totale pour  $11 < k < 64$ . On remarque que les filaments sont assez correctement reproduits en dépit de la discrétisation en particules des petites échelles. Cette discrétisation en un nombre limité de mode induit un bruit lors de la reconstruction du champ à petites échelles. Ces oscillations ne sont pas g  nantes pour la stabilité de la simulation car seule la partie filtr  e des termes non-linéaires intervient dans l'équation des grandes échelles. L'interaction des petites échelles sur elles même étants n  glig  e dans le modèle, il n'y a pas non plus de problème de stabilité des petites échelles. Les figures 5.4 montrent les résultats des champs de vorticité totale tronqués aux nombres d'onde  $k > 64$ . Comme attendu, les résultats sont très semblables même si les petites échelles sont légèrement bruit  es. Les spectres d'énergie des deux simulations sont comparés figure 5.5. On remarque que les spectres sont pratiquement identiques à grandes échelles. A partir du nombre d'onde  $k \simeq 25$  apparaît la zone de dissipation de la simulation directe alors que le spectre obtenu par notre modèle continu de développer une loi proche de  $k^{-3}$ . Notre modèle reproduit une simulation totalement inviscide. Il faudrait donc effectuer une simulation à beaucoup plus grande résolution afin de comparer efficacement les résultats pour les nombres d'onde  $k < 128$ . Ceci n'est cependant pas possible à cause du c  t de calcul d'une telle simulation.

La figure 5.6 permet de comparer les champs de vorticité des mêmes simulations pour un temps 4 fois plus grand que pour les figures 5.2. Le résultat de notre modèle est comparé

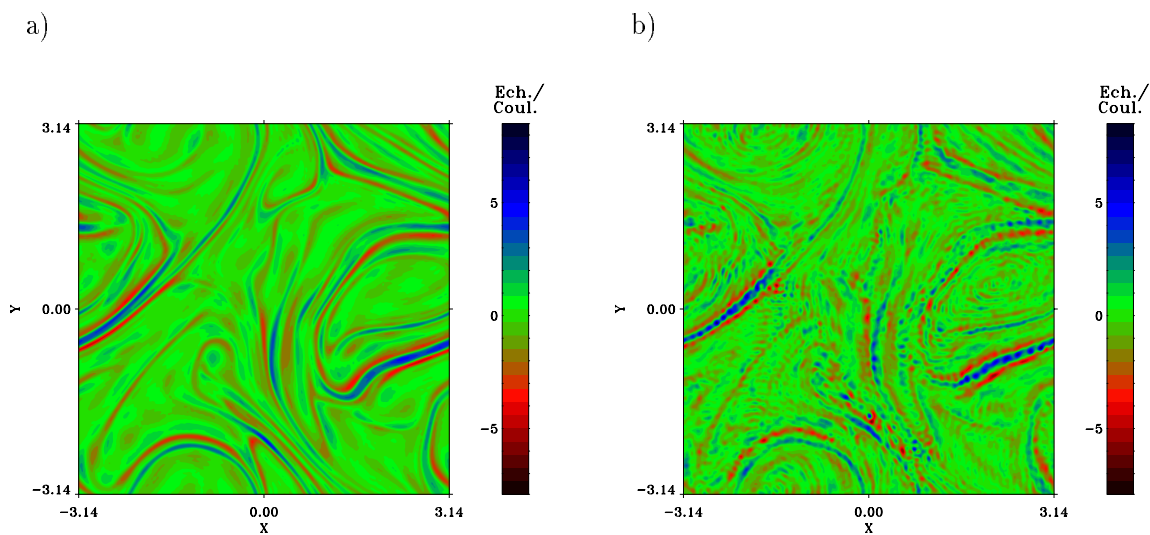
à celui d'une DNS sur un maillage  $1024^2$ . Les grandes échelles sont, dans ce cas, calculées sur un maillage  $64^2$ . Seuls ces grandes échelles (c'est à dire les 21 premiers modes) sont représentés. On constate que les champs de vorticité sont très comparables et en particulier que les deux tourbillons résultants sont encore correctement localis es. Nous avons également compar e les résultats avec ceux issus d'une simulation de faible résolution avec hyperviscosité et d'une simulation  $64^2$  avec un autre modèle de turbulence 2D d evelopp e par Sadourny et Basdevant [65]. Le résultat de cette dernière simulation semble meilleur que celui de la HDNS de faible résolution. Afin de chiffrer cette comparaison, nous avons calculer les coefficients de corrélation entre chacune des trois simulations et la DNS de grande résolution. Les résultats de cette analyse (tab. 5.1) confirme les impressions visuelles, à savoir que, dans ce cas, notre modèle est celui qui se rapproche le plus de la simulation directe. Les spectres d'énergie correspondant aux champs de vorticité des figures 5.6 et 5.7 sont repr esent es figure 5.8. Except e pour la simulation de faible résolution avec hyperviscosité, les spectres ont une pente proche de  $k^{-3}$ .



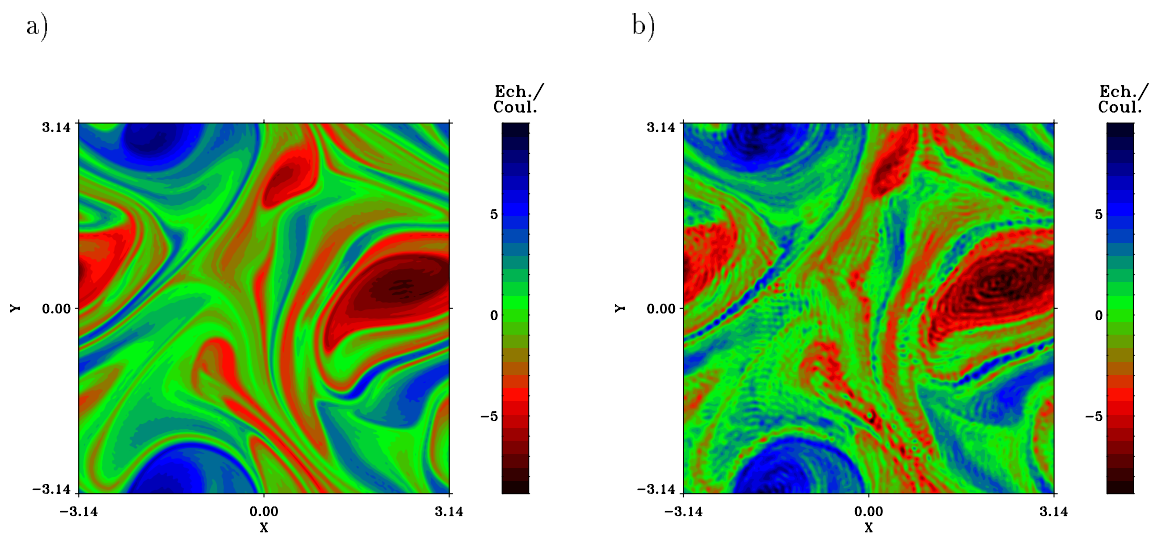
**Figure 5.1 :** Comparaison des grandes échelles ( $k < 11$ ) des champs de vorticité obtenus par une DNS  $1024^2$  (fig. a) et notre modèle (fig b) après environs 4 temps de retournement. Le filtre utilisé dans notre modélisation est le filtre  $f^2$  défini en (4.44) où  $dh = 2\pi/32$ .



**Figure 5.2 :** Champs de vorticité équivalents à ceux des figures 5.1 pour une DNS  $32^2$  sans aucune dissipation (fig. a) et une HDNS  $32^2$  (fig. b).

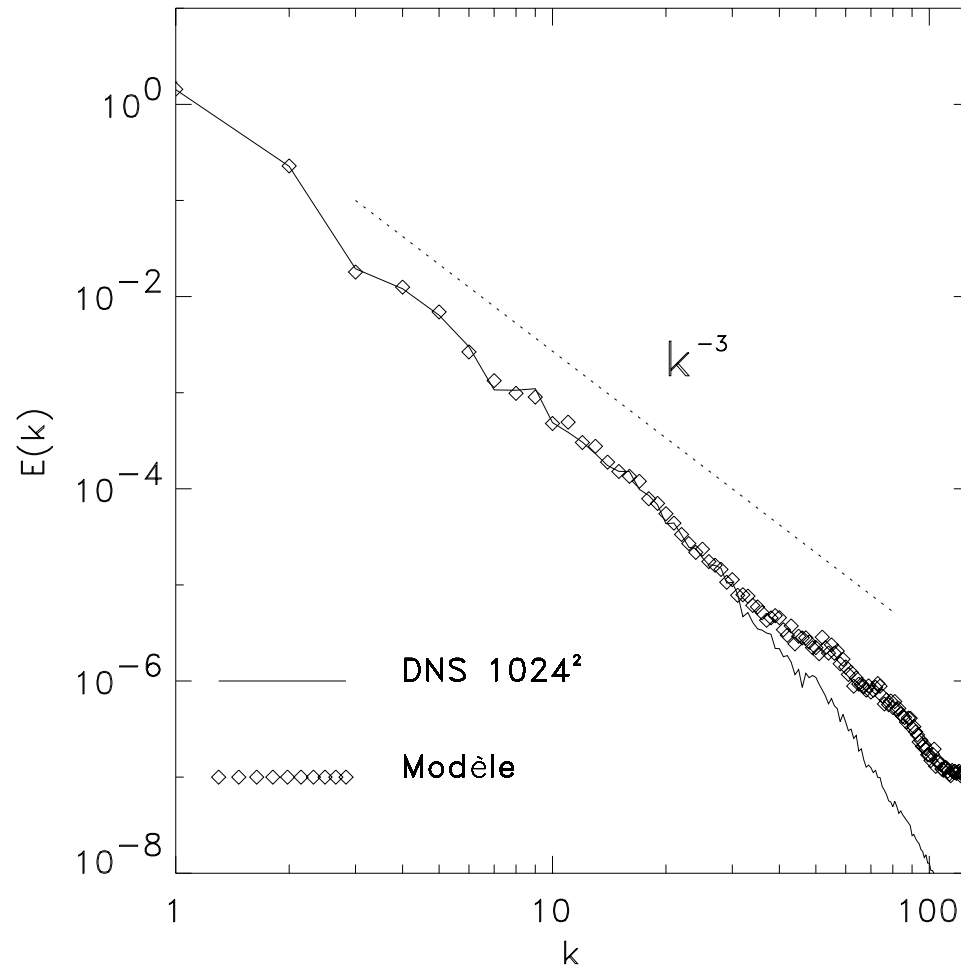


**Figure 5.3 :** Comparaison des petites échelles ( $k > 11$ ) des champs de vorticité obtenus pour la DNS  $1024^2$  (fig. a) et notre modèle (fig. b)

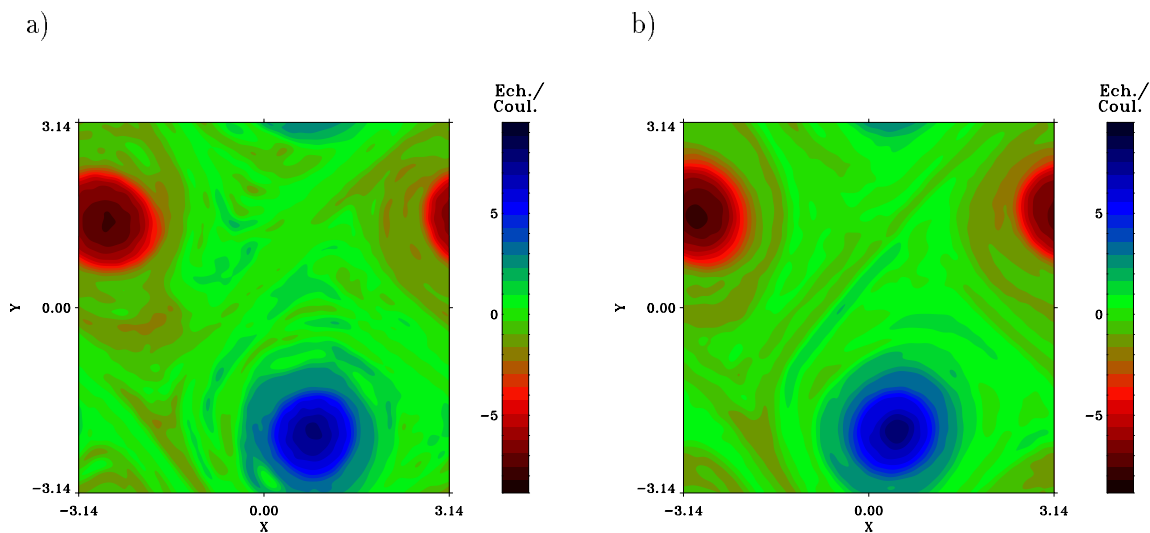


**Figure 5.4 :** Comparaison des champs de vorticité totale filtrée ( $k < 64$ ) obtenus pour la DNS  $1024^2$  (fig. a) et notre modèle (fig. b)

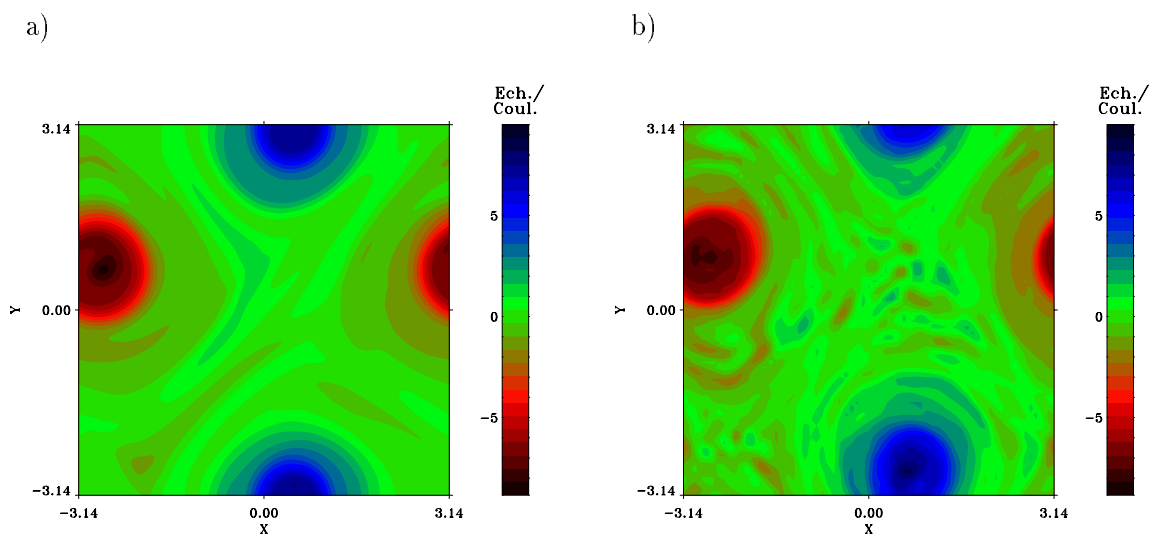




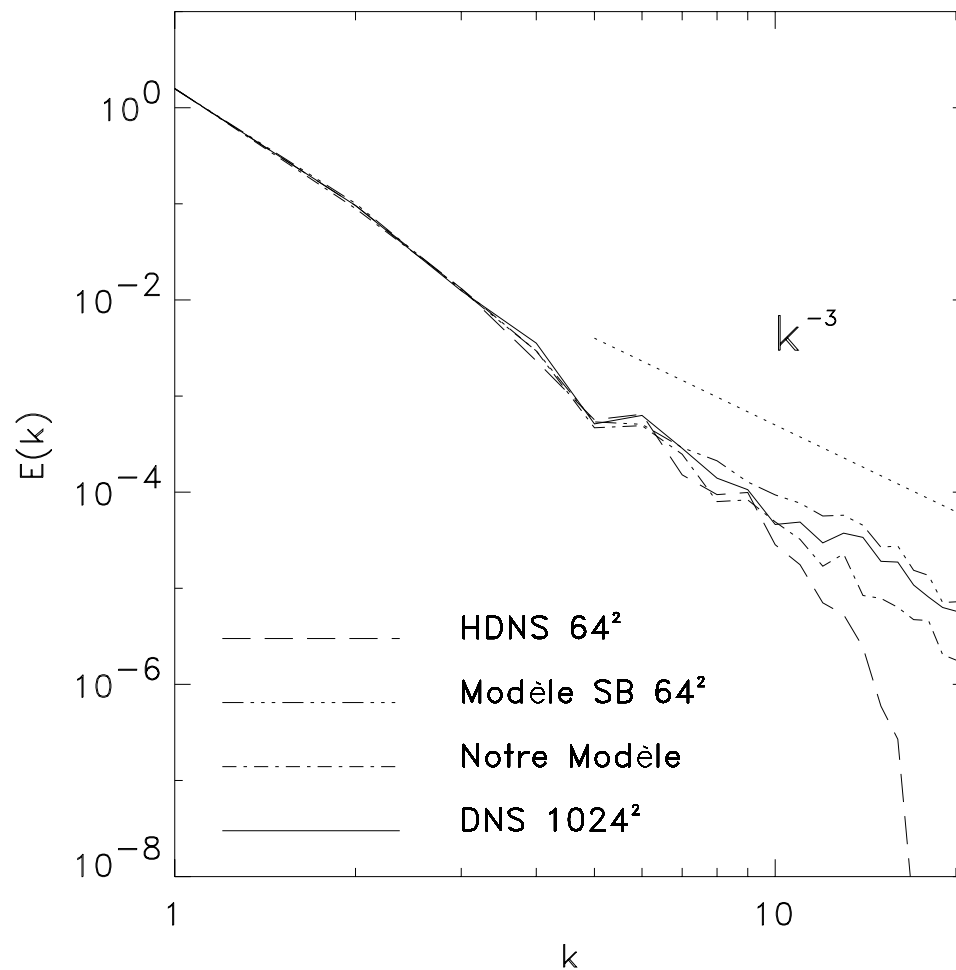
**Figure 5.5** : Comparaison des spectres d'énergie obtenus par la DNS 1024<sup>2</sup> et notre modèle (spectres correspondant aux champs de vorticité visualisés figures 5.4).



**Figure 5.6 :** Comparaison des grandes échelles ( $k < 21$ ) des champs de vorticité obtenus par une DNS  $1024^2$  (fig. a) et notre modèle (fig b) après environ 16 temps de retournement. Le filtre utilisé dans notre modélisation est le filtre  $f^2$  défini en (4.44) où  $dh = 2\pi/64$ .



**Figure 5.7 :** Champs de vorticité équivalents à ceux des figures 5.6 pour une HDNS  $64^2$  (fig. a) et une simulation avec le modèle de Sadourny-Basdevant [65] sur un maillage  $64^2$  (fig. b).



**Figure 5.8** : Comparaison des spectres d'énergie obtenus par une DNS  $1024^2$ , notre modèle, une HDNS  $64^2$  et une simulation avec le modèle de Sadourny-Basdevant (SB). (spectres correspondant aux champs de vorticité visualisés figures 5.6 et 5.7.)

**Tableau 5.1** : Coefficient de corrélation entre les différents champs de vorticité représentés figures 5.6 et 5.7.

Simulations	DNS $1024^2$	Notre Modèle	Modèle SB $64^2$ .	HDNS $64^2$
DNS $1024^2$	1.000	0.8181	0.7743	0.5323

### 5.3 Simulation de turbulence forcée

Dans le cas de simulations de turbulence forcée, la structure des grandes échelles est très sensible au taux de transfert d'énergie des petites vers les grandes échelles. Dans le cas où l'on introduit une dissipation aux très grandes échelles, le taux de transfert d'énergie va déterminer le niveau stationnaire d'énergie dans la simulation. Le cas de la turbulence forcée constitue donc un bon test pour un modèle de turbulence dans la mesure où une mauvaise modélisation du tenseur de Reynolds conduit à des résultats très éloignés de la solution exacte.

#### 5.3.1 Description de la simulation

##### Discrétisation

Nous avons effectué le même type de tests pour la turbulence forcée que pour la turbulence en déclin. Nous avons choisi d'effectuer les simulations sur un maillage plus fin que pour le cas en déclin afin de pouvoir effectuer le forçage dans les grandes échelles tout en conservant la possibilité d'une cascade inverse d'énergie. La simulation utilisant notre modélisation a été effectuée sur un maillage grandes échelles de  $64^2$ . Comme dans le cas en déclin, le terme non linéaire ( $div(\mathbf{U}\Omega) - div(\overline{\mathbf{U}\Omega})$ ) a été calculé sur un maillage deux fois plus fin ( $128^2$ ). La procédure de fusion des particules a été introduite tous les 25 pas de temps sur une grille  $512^2$  afin de maintenir le nombre total de particules dans la simulation entre 260000 et 700000 environs. Ceci correspond à conserver entre 16 et 40 particules par maille en moyenne lors de la reconstruction par la méthode PIC du champ de vortacité à petites échelles. Ce nombre pourrait probablement être diminué, mais, n'ayant pas de relations précises entre le nombre de particules par maille et la précision des calculs, nous avons effectué les calculs avec un nombre de particules délibérément grand afin de démontrer la validité de notre modèle.

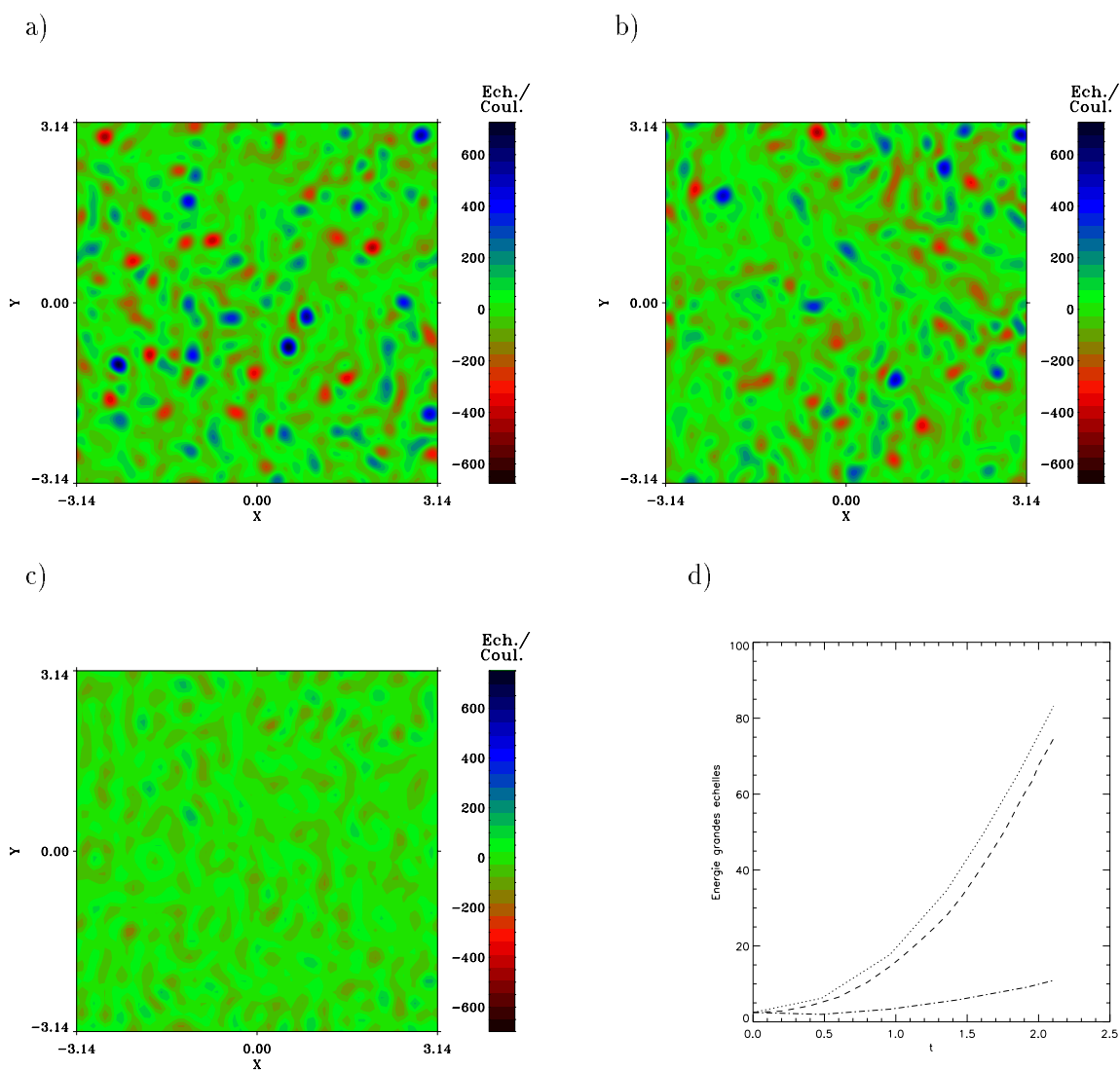
##### Description du forçage

Nous avons introduit comme condition initiale, un champ de vortacité avec un faible niveau d'énergie concentrée autour du nombre d'onde  $k = 15$ . Cette configuration permet de comparer le taux d'énergie qui cascade à grandes échelles. Les simulations seront forcées en maintenant constant le niveau d'énergie du mode de Fourier  $\mathbf{k} = (15, 0)$  de la vortacité totale. La vortacité totale est directement accessible dans une simulation directe mais nécessite d'être calculée dans notre modèle par l'addition du champ de vortacité résolue avec le champ reconstruit à partir des particules. À chaque pas de temps on ajoute donc à ce mode une vortacité  $\delta\omega$  complexe afin de le maintenir à un niveau d'énergie constant. Nous avons vu que le filtre utilisé dans notre modèle commence à filtrer dès les plus faibles nombres d'onde. Ceci signifie que la vortacité au mode  $\mathbf{k} = (15, 0)$  est distribuée à la fois dans les échelles résolues et dans les particules. Il est donc nécessaire, dans le cas de notre modèle, de répartir cet incrément de vortacité entre les échelles résolues et les particules. La partie additionnée au champ résolu de vortacité sera  $\hat{f}^2(15, 0) \times \delta\omega$ . Le complément

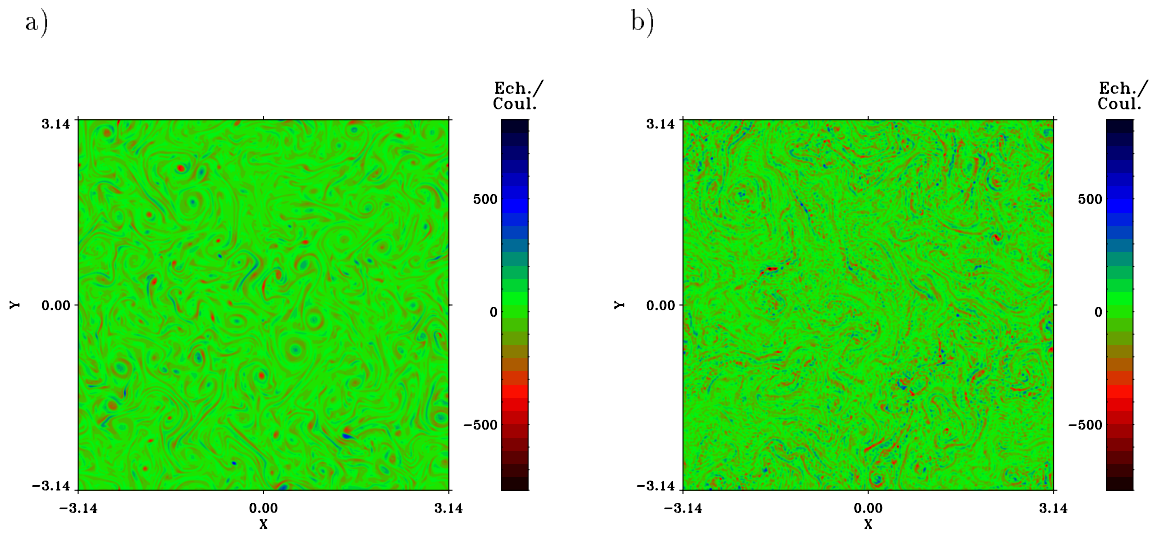
$(1 - \hat{f}^2(15, 0)) \times \delta\omega$  sera additionné au terme de forçage des petites échelles. Nous avons montré au chapitre précédent comment ce terme de forçage était traité à chaque pas de temps par création de nouvelles particules.

### 5.3.2 Comparaison des résultats

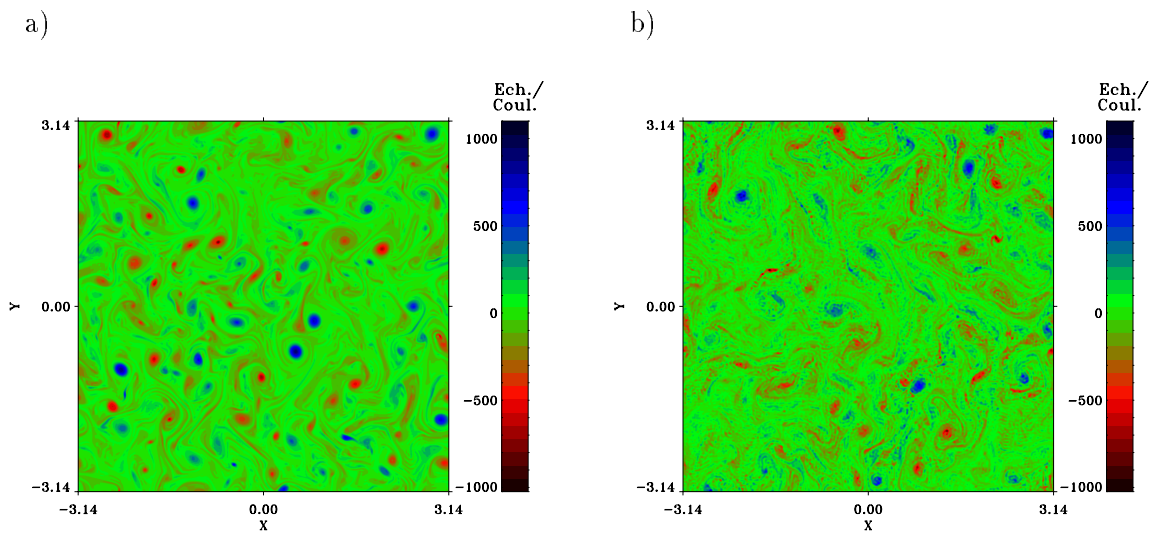
Les résultats de notre modèle ont été comparés à ceux issus de deux HDNS  $512^2$  et  $64^2$ . Les figures 5.9 représentent le champ de vorticité à grandes échelles ( $k < 21$ ) pour les trois simulations. Le champ introduit comme condition initiale étant de faible énergie comparé au champ final, le caractère chaotique de la turbulence fait qu’il ne faut pas s’attendre à une description parfaite du champ de vorticité après plusieurs temps de retournement (17 dans notre cas). Néanmoins, on peut comparer certaines caractéristiques statistiques de chacun des résultats. On peut remarquer que le champ de vorticité obtenu avec notre modèle (fig. 5.9b) possède des caractéristiques semblables à celui issu de la simulation directe à grande résolution (fig. 5.9a). On constate par exemple que les tourbillons ont approximativement la même intensité et la même échelle dans les deux cas. Nous avons représenté, avec la même échelle de couleur, le champ de vorticité obtenu par la simulation directe de faible résolution. Il est évident que les structures obtenues n’ont pas du tout les mêmes caractéristiques que dans la simulation à grande résolution. Il apparaît en effet que leur niveau d’énergie est beaucoup plus faible. Ceci est d   au fait que, dans ce cas de simulation à petite résolution, il n’y a pas de possibilité de transfert d’énergie des très petites échelles sur les plus grandes. Ces résultats sont encore beaucoup plus nettes lorsque l’on compare les spectres d’énergie des trois simulations (fig. 5.12). Alors que le spectre obtenu par notre modèle est très comparable à celui de la HDNS  $512^2$ , celui obtenu par la simulation de faible résolution laisse apparaître un large déficit d’énergie à très grandes échelles. La variation d’énergie des grandes échelles, calcul  e en additionnant l’énergie des modes tels que  $k < 21$ , est repr  sent  e figure 5.9d. Ce résultat montre que le transfert d’énergie à grandes échelles est assez bien représenté par notre modélisation alors qu’il ne l’est pas du tout dans la simulation de faible résolution. Il est à noter que le spectre d’énergie obtenu par notre modèle remonte légèrement pour les plus grands  $k$ . Ce phénomène est lié au bruit engendré par la méthode PIC. Nous avons vu, en effet, que les plus petites échelles reconstitu  es ne devaient pas être prises en considération. On peut, comme dans le cas de la turbulence en déclin comparer les champs de vorticité totale (fig. 5.11) correspondant aux modes  $k < 128$ . Les modes supérieurs à  $k = 128$  ont été tronqués pour la visualisation afin d’éliminer le bruit d   à la méthode de reconstruction des petites échelles. Comme pour les résultats des grandes échelles, les champs de vorticité totale sont très comparable d’un point de vue statistique. Les champs de vorticité à petites échelles ( $21 < k < 128$ ) extrait du champ de vorticité totale sont représentés figures 5.10. On peut remarquer le même type de filaments à petites échelles même si celles-ci paraissent plus “bruit  es” à cause de la discrétisation en particules.



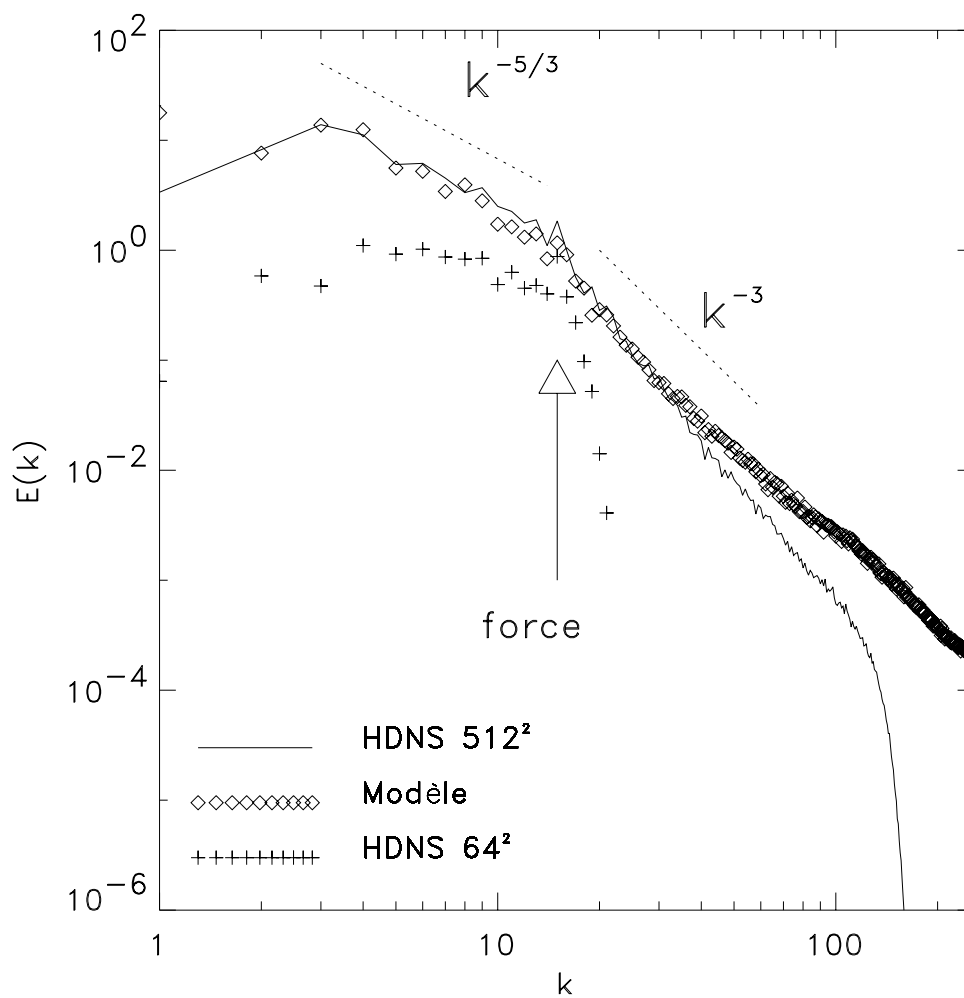
**Figure 5.9** : Comparaison des grandes échelles ( $k < 21$ ) des champs de vorticité obtenus par une HDNS  $512^2$  (fig. a), notre modèle (fig. b) et une HDNS  $64^2$  (fig c) après environs 17 temps de retournement. Le filtre utilisé dans notre modélisation est le filtre  $f^2$  défini en (4.44) où  $dh = 2\pi/64$ . L'évolution de l'énergie des grandes échelles au cours du temps est comparée figure (d) (— : HDNS  $512^2$ ,  $\cdots$  : notre modèle, - - - : HDNS  $64^2$ ). Le temps  $t=2.105$  correspond à 17 temps de retournement.



**Figure 5.10** : Comparaison des petites échelles ( $k > 21$ ) des champs de vorticité obtenus pour la HDNS  $512^2$  (fig. a) et notre modèle (fig. b)



**Figure 5.11** : Comparaison des champs de vorticité totale filtr e ( $k < 128$ ) obtenus pour la HDNS  $512^2$  (fig. a) et notre modèle (fig. b)



**Figure 5.12 :** Comparaison des spectres d'énergie obtenus pour la HDNS  $512^2$ , notre modèle et une HDNS  $64^2$ .



## 5.4 Analyse des comparaisons

Les différentes comparaisons effectuées montrent que les résultats obtenus avec notre modèle sont très proches de ceux obtenus par une simulation directe à grande résolution. Il est difficile cependant de comparer les performances de notre modèle en terme de gain de temps. En effet la modélisation peut être complètement inviscide et de telles simulations ne sont pas possible en DNS. Il faudrait donc comparer les résultats de notre modèle à des simulations de très grande résolution afin de pouvoir simuler des écoulements à très grand nombre de Reynolds. Pour d'effectuer des comparaisons à moindre coût, nous avons souvent introduit une hyperviscosité dans nos simulations directes. L'introduction d'une hyperviscosité constitue déjà un modèle qui à l'inconvénient par exemple de faire croître artificiellement les maxima de vorticité [44]. Nous avons vérifié sur plusieurs cas que ce type de simulation donne cependant des résultats très proches des solutions DNS pour une résolution deux fois plus faible.

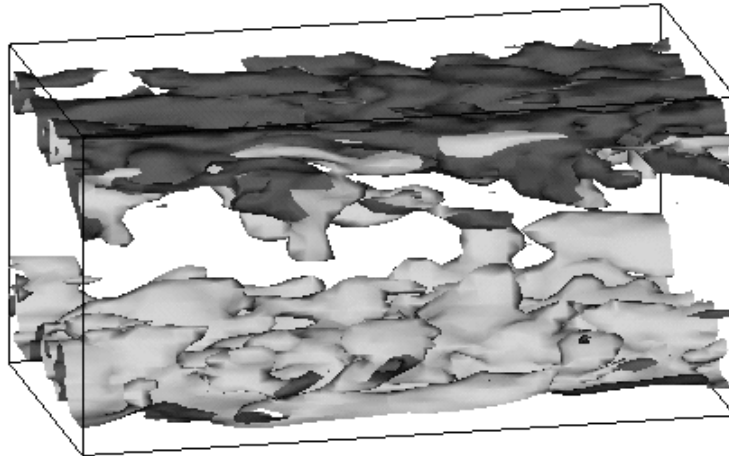
Il est d'autant plus difficile d'évaluer les performances de notre modèle par rapport à une DNS ( ou une HDNS) que la vitesse de calcul dépend fortement de la machine sur laquelle la simulation est effectu  e. Le code DNS (ou HDNS) que nous avons utilisé est un code pseudo-spectral. Dans ce type de code une grande part du temps de calcul est passé dans les calculs de transformées de Fourier. Or il existe, sur des machines performantes de type CRAY, des algorithmes de transformées de Fourier Rapide (FFT) très optimisés. A l'inverse, pour notre modélisation, une grande partie du temps de calcul est passé dans le calcul des trajectoires des particules et dans la reconstruction, par la méthode PIC, du champ de vorticité à petites échelles . Nous nous sommes attachés, lors de cette étude, à développer un code de calcul permettant d'implémenter simplement un grand nombre de tests. Nous n'avons pas cherché à optimiser le code afin de le rendre plus performant. Il est à noter que le temps lié au calcul des petites échelles est pratiquement linéaire en fonction du nombre de particules. Nous n'avons effectué plusieurs tests avec un nombre de particules diff  rent. Le nombre de particules est, en grande partie, fonction de la fréquence avec laquelle les particules sont fusionn  es en une nouvelle distribution, et de l'échelles avec laquelle est effectu  e cette fusion. Un certain nombre de tests ont montré qu'il était nécessaire de conserver un temps minimum entre deux procédures de fusion. Ce temps est de l'ordre de 5 pas de temps environs d'après notre analyse. Il apparait de plus que cette procédure doit être effectu  e sur une grille au minimum 4 fois plus fine que la grille des grandes échelles. C'est deux paramètres combinés impliquent un nombre de particules minimum pour notre modélisation qui est de l'ordre de 20 fois le nombre de modes utilisés pour les grandes échelles. Compte tenu de ce grand nombre de particules, les performances de notre modèle reste limit  es. Par exemple, pour la simulation visualis  e figure 5.6b, le temps de calcul sur une station est environs 10 fois inférieur à celui de la simulation directe équivalente (figs. 5.6a) pour un nombre de particules variant de 250000    330000. Il est cependant probable qu'une optimisation plus fine permettrait un gain de temps de calcul significatif. Il serait également possible de réduire le nombre de particules en optimisant la procédure permettant leur création pour l'intégration du forçage venant des grandes échelles. Ceci est d'autant plus vrai lorsque les grandes échelles développent des petites structures très localis  es comme dans le cas de la simulation de l'interaction

de deux tourbillons (fig. 3.4).

Afin de limiter le bruit dans la reconstruction du champ de vortacité à petites échelles, nous avons utilisé un maillage deux fois plus fin que le maillage des grandes échelles. Ceci ne change en rien le temps de calcul nécessaire à la reconstruction puisque ce temps est proportionnel au nombre de particules et non au nombre de points de grille. La seule différence réside dans le fait que, puisque que le code grandes échelles est un code spectral, il est nécessaire d'effectuer une FFT du champ de vortacité à petites échelles. Ce temps reste cependant négligeable par rapport au temps de reconstruction du champ à petites échelles. Néanmoins, la reconstruction du champ sur un maillage double n'est peut être pas nécessaire dans la mesure où seules les composantes filtrées des termes non-linéaires interviennent dans l'équation d'évolution des grandes échelles. Il est donc possible d'utiliser la zone de troncature des grandes échelles affecté dans la procédure de désaliasing. Cette zone peut être suffisante pour filtrer le bruit intervenant dans le calcul de  $\omega'(\mathbf{x})$  et donc du terme linéaire  $div(\overline{\mathbf{U}\omega'})$ . Compte tenu du fait que le doublement de la résolution ne change que très peu le temps de calcul, nous avons opté pour cette dernière solution.

## Chapitre 6

# Application aux écoulements plans



*Résultat d'une simulation d'écoulement dans une canalisation pour un Reynolds de 385: iso-contours d'entropie. (groupe du Prof. A.D. Gosman, Imperial College of Science, London)*

## 6.1 Introduction

Un des problèmes les plus répandus et les plus étudiés en turbulence concerne les écoulements dans une canalisation ou entre deux parois planes. Ce type de problèmes fait l'objet de nombreuses recherches car il est possible d'effectuer certains développements théoriques qui sont impossibles dans le cas d'un écoulement quelconque. Ce type de problèmes est étudié depuis très longtemps et un certain nombre de résultats étaient considérés comme acquis. Il était en effet très largement admis que le profil de vitesse est constitué d'une partie linéaire très près des parois suivie d'un profil logarithmique et d'un profil algébrique au centre de la canalisation [28]. Ces différents profils apparaissent assez clairement dans les données de résultats expérimentaux [80] et ont été confirmés par des développements issus d'analyses dimensionnelles [79][46]. Il n'y a cependant pas unanimité sur les définitions exactes des différents profils de vitesse et de leur localisation dans la canalisation. L'existence d'un profil logarithmique a fait l'objet d'une controverse de la part de Barenblatt [5] qui, par une analyse dimensionnelle combinée à une hypothèse de symétrie incomplète, a obtenu pour la description des profils moyens de vitesses dans une canalisation, une famille de lois de puissance possédant une enveloppe logarithmique. Le coefficient de puissance de cette loi varie lentement avec le nombre de Reynolds: une mesure à partir des données de Nikuradze [54] donne une variation lente en  $1/\ln(Re)$ . Il en découle que cette loi tend vers une loi logarithmique lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Cette théorie a été testée sur les données du "super-pipe" de Zagarola [80] mais les résultats tendent à confirmer une loi logarithmique au dépens de la théorie de Barenblatt. Depuis, Barenblatt a ré-analysé ces mêmes données et a trouvé une faible dépendance du résultat par rapport à la rugosité Ceci le conduit à penser que les données de Nikuradze semblent plus appropriées pour tester la théorie. Oberlack [56] a récemment utilisé une analyse en groupe de Lie des équations d'évolution pour en déduire un ensemble de profils stables possibles résultant des symétries des équations de Naviers Stokes. Son analyse conduit aux différents types de lois possibles que sont les lois logarithmiques, algébriques, le profil linéaire et exponentiel. Ces résultats ajoutent un peu plus de confusion sur la définition précise de ce type d'écoulement.

La voie la plus naturelle pour étudier ce type de problèmes et éclaircir la situation est d'effectuer une analyse uniquement à partir d'un développement des équations de Navier-Stokes. Dubrulle et al ont utilisés une méthode WKB et un modèle simplifié de génération des petites échelles pour modéliser ce problème. Ces simplifications permettent d'obtenir une formulation analytique des profils de vitesse. Cependant la transition entre les différents profils dépend des mécanismes de génération des petites échelles. Il est donc plus rigoureux d'effectuer une modélisation des petites échelles afin de calculer le forçage qu'elles impliquent aux grandes échelles. C'est ce qui est réalisé dans notre modélisation. Il est possible d'effectuer, pour un écoulement plan 3D, les mêmes développements que ceux que nous avons effectués dans le cas 2D. L'intérêt d'une telle modélisation réside dans le fait que les résultats sont directement déduits d'un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes et non d'argumentations dimensionnelles. Nous verrons que cette étude permet, entre autre, de relier le choix d'un des deux types de lois concurrentes près des parois (loi de puissance et loi logarithmique) à une analyse de la cascade d'énergie

des grandes vers les petites échelles.

## 6.2 Application du modèle aux écoulements plans

En appliquant au cas d'un écoulement dans une canalisation, le même formalisme que dans le cas 2D, nous montrerons que l'on peut obtenir le même type d'équations de conservation de la vitesse à petites échelles. Ces équations se mettent sous la forme générique suivante:

$$\begin{aligned} D_t u_i &= A_{ij} u_j + F_i \\ \dot{x}_i &= U_i \\ \dot{k}_i &= \partial_i (U_j k_i) \end{aligned} \quad (6.1)$$

où  $F_i$  est le terme de forçage provenant de la partie petites échelles des termes non-linéaires et  $A_{ij}$  un opérateur dépendant des grandes échelles. Ce système est un système d'équations linéaires inhomogènes. Les équations des petites échelles sont liés à l'équation des grandes échelles par l'intermédiaire de la vitesse  $U_i$  et de l'opérateur  $A_{ij}$ . Dans le cas général de la turbulence 2D, on ne connaît rien de la vitesse à grandes échelles. Il n'est donc pas possible de calculer une solution analytique du système car les équations d'évolution des  $x_i$  et  $k_i$  ne peuvent être intégrées analytiquement. Par contre, dans le cas des écoulements plans, on s'intéresse à une solution stationnaire de la vitesse  $U_i$  à grandes échelles. Cette vitesse ne dépend que de la coordonnée  $z$  perpendiculaire aux parois. Dans ce cas particulier, il est possible d'intégrer analytiquement les équations d'évolution des  $x_i$  et des  $k_i$ . Cependant, le terme de forçage  $F_i$  dépend, en général, à la fois des petites et des grandes échelles. Ceci rend impossible, sans aucune autre approximation, l'intégration analytique du système complet (6.1). En revanche, il est toujours possible d'effectuer une intégration numérique de ce système, car, moyennant les hypothèses liées à la constitution de notre modèle, on peut calculer l'expression de cette force  $F_i$  à chaque pas de temps en fonction des champs de vitesse à petites et à grandes échelles aux pas de temps précédents. Le système d'équations devient cependant beaucoup plus simple dans le cas on l'on découple le terme de forçage des petites échelles. Nous verrons qu'une hypothèse réaliste de décorrélation en temps de ce terme de forçage permet de se ramener à un cas simplifié. Il est possible, avec cette nouvelle hypothèse conduisant à une prescription du forçage, d'intégrer analytiquement le système (6.1) et d'en déduire un certain nombre de résultats concernant par exemple les différents profils de vitesse à grandes échelles.

## 6.3 Dérivation du modèle

### 6.3.1 Équations de bases

Nous allons appliquer notre modèle aux écoulements plans (fig. 6.1). Ceci inclut les écoulements entre deux plaques planes infinies ( $Lx = Ly = \infty$ ) (ou dans une canalisation telle que  $Ly \gg 2d$ ), les écoulements cisailés (les plaques à  $z = -d$  et  $z = d$  ont alors une vitesse différentielle suivant  $\vec{x}$ ), ou les couches limites ( $d = \infty$ ).

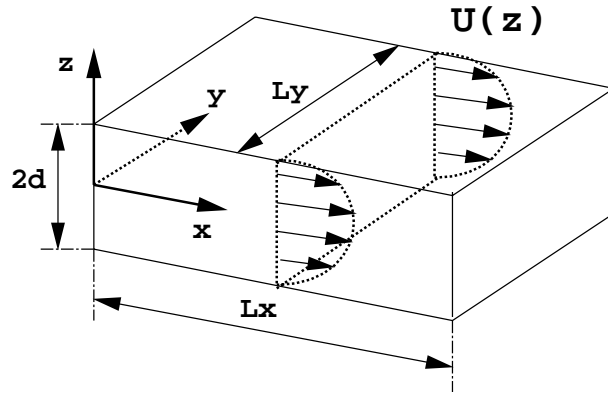


Figure 6.1 : Croquis d'un écoulement plan

Les équations de base pour ces problèmes d'écoulements plans sont les équations de Navier-Stokes en 3D:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \partial_j(u_i u_j) &= -\partial_i p + \nu \partial_{jj} u_i + \sigma_i \\ \partial_j u_j &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

où  $\sigma_i$  est un terme de forçage extérieur correspondant à un gradient de pression. Ce forçage sera pris non nul uniquement dans la direction principale de l'écoulement, c'est à dire suivant  $\vec{x}$  ( $\vec{\sigma} = (-dP_*/dx, 0, 0)$ ). Dans le cas de la couche limite, aucun forçage ne sera introduit, mais on choisira en  $z = \infty$  la vitesse suivant  $\vec{x}$ . Afin de simplifier les équations, la densité (constante) à été prise égale à l'unité.

### 6.3.2 Décomposition des équations

Comme nous l'avons vu dans le cas de la turbulence 2D, le principe de notre modèle consiste à séparer les grandes des petites échelles et à appliquer un certain nombre d'hypothèses sur le système d'équations obtenu (voir paragraphe 2.3). La définition et les propriétés du filtre utilisé dans le modèle sont développées dans l'annexe D. Après décomposition des champs ( $g$ ) en leur partie petites échelles ( $g'$ ) et grandes échelles ( $G = \overline{g}$ ), on obtient les équations d'évolution des grandes échelles suivantes:

$$\begin{aligned} \partial_i U_i + \partial_j(\overline{U_i U_j}) + \partial_j(\overline{U_i u'_j} + \overline{U_j u'_i}) + \partial_j(\overline{u'_i u'_j}) &= -\partial_i P + \nu \partial_{jj} U_i + S(z)\delta_{i1} + \overline{\sigma_i} \\ \partial_i U_i &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

où  $S(z)\delta_{i1}$  est un terme provenant de la non-commutativité du filtre avec les opérateurs de dérivées. Ce terme de surface n'apparaît que dans la direction où l'écoulement est borné ( $\vec{z}$  dans notre cas). Son expression est détaillée en annexe D. Une analyse de chacun des termes issus de la décomposition de l'équation moyennée (6.3) a été effectué par Domaradzi [12] pour les écoulements dans une canalisation. Cette analyse équivalente à notre "analyse statique" pour la turbulence 2D semble confirmer l'hypothèse de non-localité pour ce type d'écoulement 3D. Après soustraction des équations des grandes

échelles (6.3) à celles du champ total (6.2), et après décomposition du terme non-linéaire, on obtient les équations des petites échelles suivantes:

$$\begin{aligned}\partial_t u'_i + U_j \partial_j u'_i + u'_j \partial_j U_i &= -\partial_i p' + \nu \partial_{jj} u'_i + F_i \\ \partial_i u'_i &= 0\end{aligned}\quad (6.4)$$

où la “pseudo-force”  $F_i$  est définie par :

$$F_i = -S(z)\delta_{i1} + \partial_j (\overline{U_i U_j} - U_i U_j) + \partial_j (\overline{U_j u'_i}) + \partial_j (\overline{U_i u'_j}) \quad (6.5)$$

Nous appelons ce terme “pseudo-force” car il dépend linéairement de la partie moyennée du champ à petites échelles. Il sera cependant considéré, dans les développements à venir, comme une force extérieure aux petites échelles.

### 6.3.3 Transformée de l'équation des petites échelles

Comme dans le cas de la turbulence 2D, et pour garder l'avantage du caractère intermittent que peuvent développer les petites échelles, nous allons décomposer leur équation d'évolution (6.4) sur des modes de Gabor. Cette décomposition s'effectue de la même manière que pour le cas de la turbulence 2D, et l'on obtient en définitive (voir annexe D pour le détail des calculs):

$$D_i \hat{u}'_i = \left( \frac{2k_i k_m}{\mathbf{k}^2} - \delta_{im} \right) - \nu \mathbf{k}^2 \hat{u}'_i + \hat{F}_i^\perp, \quad (6.6)$$

$$D_t x_i = U_i, \quad (6.7)$$

$$D_t k_i = -k_j \partial_j U_j, \quad (6.8)$$

où  $\hat{F}_i^\perp$  est la partie de divergence nulle de  $\hat{F}_i$  définie par:

$$\hat{F}_i^\perp = \left( \delta_{im} - \frac{k_i k_m}{\mathbf{k}^2} \right) F_m \quad (6.9)$$

Les équations (6.7) et (6.8) décrivent le mouvement des modes de Gabor advectés par le champ de vitesse à grandes échelles. Le système constitué des équations (6.6), (6.7), (6.8) et (6.3) est la base de notre modèle. Ce système peut être résolu numériquement de la même manière que pour le cas de la turbulence 2D (chapitre 4). Cependant nous allons nous attacher à mettre en évidence les résultats théoriques qui peuvent découler de l'analyse de ce système d'équations.

## 6.4 Analyse théorique

### 6.4.1 Équations moyennées

Nous allons, à partir de maintenant, chercher à obtenir une dérivation des profils de vitesse moyenne. Il nous faut donc trouver une expression analytique de la quantité  $\langle U_i \rangle = (\langle U \rangle(z), 0, 0)$  où  $\langle \rangle$  correspond à une moyenne le long de l'axe  $x$ . Les

équations décrivant l'évolution de la vitesse moyenne  $\langle U_i \rangle$  s'obtiennent en prenant la moyenne  $\langle \rangle$  de l'équation des grandes échelles (6.3). En tenant compte de la géométrie plane et donc du fait que les termes dérivés par rapport à  $x$  et  $y$  s'éliminent, on obtient pour l'équation suivant  $x$  de la vitesse grandes échelles:

$$\partial_z \langle \overline{Uw'} \rangle + \partial_z \langle \overline{u'w'} \rangle = \nu \partial_{zz} U + \overline{\sigma_x} + S(z) \quad (6.10)$$

Comme nous l'avons mentionné auparavant, il n'est pas possible de calculer analytiquement l'évolution des petites échelles et donc des termes  $\overline{Uw'}$  et  $\overline{u'w'}$  sans une hypothèse complémentaire sur la description du terme de forçage  $\hat{F}_i^\perp$ . Si par contre, on considère maintenant les termes  $F_i$  comme étant des forces extérieures aux petites échelles et que l'on considère le cas où ces forces sont décorréliées en temps, il est possible d'intégrer analytiquement le système d'équations des petites échelles (6.6)(6.7)(6.8). La pertinence de cette hypothèse ainsi que le détail de l'intégration des petites échelles sont décrits dans l'annexe D. Le résultat de l'intégration des petites échelles permet de reconstruire les termes non linéaires  $\overline{Uw'}$  et  $\overline{u'w'}$  intervenant dans l'équation (6.10). Le profil de vitesse  $\langle U \rangle$  est alors déterminé par l'équation suivante:

$$\partial_z \left( \frac{\eta \langle U \rangle}{\partial_z \langle U \rangle} + \frac{\lambda}{\partial_z \langle U \rangle} \right) = -S(z) - \langle \overline{\sigma} \rangle + \nu \partial_{zz} \langle U \rangle \quad (6.11)$$

où  $\lambda$  et  $\eta$  sont deux fonctions faisant intervenir les différents termes de forçage  $F_i$ . L'expression de ces paramètres est décrite en annexe D. Ne connaissant pas *a priori* l'expression de ces forces, il n'est pas possible de connaître l'expression de  $\eta$  et de  $\lambda$  en fonction de la coordonnée  $z$ . Cependant, l'expression analytique de ces paramètres montre qu'ils ne dépendent de  $z$  que par l'intermédiaire de la variable  $\partial_z U$ . Il ne s'agit pas de paramètres libres et ajustables, mais de fonctions dépendant de la cascade d'énergie des grandes vers les plus petites échelles. Dans la limite où  $\nu \rightarrow 0$ , on peut montrer (voir annexe D) par un développement de ces deux paramètres, qu'ils doivent être, en première approximation, constants près de la paroi ainsi que dans la région centrale de l'écoulement. Nous choisirons donc de les modéliser par deux fonctions constantes par morceaux sur les deux différentes régions de l'écoulement.

## 6.4.2 Développement loin des parois

### Équations simplifiées

La viscosité n'étant importante que près des parois, si l'on s'intéresse au comportement de l'équation loin des parois, le terme visqueux  $\nu \partial_{zz} \langle U \rangle$  devient négligeable devant les autres termes du membre de droite de l'équation (6.11). Après adimensionnement et intégration suivant  $z$  (cf annexe D), cette équation peut s'écrire en négligeant le terme visqueux:

$$\frac{\eta \langle U \rangle}{\partial_z \langle U \rangle} + \frac{\lambda}{\partial_z \langle U \rangle} = - \int_{z_0}^z [-S(z') - \langle \overline{\sigma} \rangle] dz' \quad (6.12)$$

où  $z_0$  est la valeur de la coordonnée  $z$  à la paroi. Le terme de droite peut être calculé numériquement lorsque que l'on connaît la définition du filtre permettant d'exprimer le terme  $S(z)$ . Ce terme est visualisé en annexe D dans le cas d'un filtre Gaussien. Notre



objectif sera cependant de déterminer les solutions analytiques possibles de cette équation. Pour ce faire, il est plus commode de ré-écrire cette équation en faisant intervenir une variable intermédiaire  $s(z)$  définie par:

$$s(z) = - \int_0^z \frac{\eta(z') dz'}{\int_{z_0}^{z'} (S(z'') + \langle \sigma_x \rangle) dz''} \quad (6.13)$$

L'équation (6.12) devient alors:

$$\frac{dU}{ds} = (U_c - U) \quad (6.14)$$

où  $U_c$  est définie par  $U_c = \lambda/\eta$ . Dans le cas d'un écoulement entre deux parois,  $U_c$  correspond à la vitesse au centre. En effet la dérivée de la vitesse étant nulle, ceci impose que  $\lambda + \eta \langle U \rangle$  soit nul également. Comme  $\eta$  et  $\lambda$  sont des fonctions de  $s$ ,  $U_c$  est aussi une fonction de  $s$ . Nous avons cependant montré que les développements de  $\lambda$  et  $\eta$  conduisent à considérer ces paramètres constants dans la région centrale de l'écoulement. Ceci implique donc que  $U_c$  soit constant en fonction de  $s$  et l'équation (6.14) peut alors s'intégrer en:

$$U_c - U = (U_c - U_D) e^{s-s_D} \quad (6.15)$$

où  $U_D$  et  $s_D$  sont les valeurs des fonctions  $U$  et  $s$  à la transition entre la zone près de la paroi et la zone centrale, c'est à dire à la limite de validité de l'approximation. Cette équation décrit l'évolution du profil de vitesse en fonction de la variable intermédiaire  $s$  qui dépend à la fois du terme de forçage  $\langle \sigma_x \rangle$  et du terme de surface  $S(z'')$ . Ces deux termes étant dépendant de la géométrie du problème, les profils de vitesse obtenus le seront également.

### Écoulement entre deux parois planes

Dans le cas d'un écoulement entre deux parois planes, le terme de forçage  $\langle \sigma_x \rangle$  sera pris constant alors que le terme de surface  $S(z'')$  s'annule loin des parois (cf expression en annexe D). De ce fait la fonction  $H = dz/ds$  est linéaire en fonction de  $z$ . Ceci conduit à une dépendance logarithmique de la variable intermédiaire  $s$  en fonction de  $z$ . En introduisant ce résultat dans l'équation (6.15), on obtient la loi suivante:

$$U_c - U = (U_c - U_D) \left| \frac{z}{z_D} \right|^\gamma \quad (6.16)$$

avec  $\gamma = -\eta/\langle \sigma_x \rangle$  et en prenant l'origine de  $z$  au centre des deux parois. Oberlack [56] à montré, par une analyse en groupe de Lie, que ce type de lois algébriques était une conséquence des symétries des équations de Navier-Stokes et que cela correspondait à la solution avec le plus haut degré de symétrie. Ce type de loi algébrique à été suggérée par Barenblatt [5] pour le profil près de la paroi. Cependant la région centrale semble être un endroit plus propice pour ce type de loi. Oberlack avance cette argument en considérant que, près de la paroi, la vitesse de friction est une variable qui brise la symétrie. Cette hypothèse de loi algébrique dans la partie centrale est étayée par de nombreux résultats tant numériques qu'expérimentaux. Les données de Wei *et al* [78] ainsi que de Niederschulte [53] laissent très clairement apparaître cette loi algébrique sur une région

centrale couvrant environ 80% du domaine. Pour un nombre de Reynolds compris entre 18000 et 40000, Oberlack a trouvé comme valeur  $\gamma = 1.69$ ,  $z_D = 0.8$  et  $(U_c - U_D) \simeq 4$ . L'analyse des données de DNS de Kim *et al* [35] pour des nombres de Reynolds de 3300 et 7900 fait également apparaître très clairement une loi algébrique couvrant environ 75% du domaine. Les constantes  $\gamma$  et  $(U_c - U_D)$  semblent cependant dépendre faiblement du nombre de Reynolds. Ceci s'interprète facilement à l'aide de notre modèle par le fait que  $\gamma$  est proportionnel à  $\eta$  et donc inversement proportionnel à  $U_c$ . Or  $U_c$  doit augmenter légèrement avec le nombre de Reynolds. La loi d'évolution de  $U_c$  en fonction du nombre de Reynolds peut être déterminée par des arguments de similarité [73], et l'on trouve alors  $U_c = (1/K)\ln(R_+) - U_{co}$  où  $K$  est la constante de Kármán [33],  $R_+ = u_*d/\nu$  étant le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de friction  $u_*$  près de la paroi et  $U_{co}$  est une constante pouvant dépendre éventuellement de la géométrie. Si  $\lambda$  était un paramètre indépendant du nombre de Reynolds, notre modèle conduirait à l'expression suivante de l'exposant algébrique  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\ln(R_+/R_{+0})} \quad (6.17)$$

Une confirmation de cette hypothèse réclame l'analyse de plusieurs profils à différents nombres de Reynolds et ceci n'a pu être effectué jusqu'à présent.

### Écoulement dans une couche limite

Dans le cas d'une couche limite, c'est à dire, dans notre cas, d'un écoulement au dessus d'une plaque plane, il n'y a pas de terme de gradient de pression ( $\langle \sigma_x \rangle = 0$ ). Le terme de surface  $S(z'')$  est, quant à lui, négligeable lorsque l'on se place loin de la paroi ( $z = 0$ ) et loin du haut de la couche limite ( $z = h$ ) (voir expression du terme de surface en annexe D). Il en résulte que la fonction  $H = dz/ds$  est dans ce cas constante et proportionnelle à  $\eta$ . Nous avons montré de plus que la fonction  $\eta$  devait être constante en première approximation dans cette région de l'écoulement. Pour une telle fonction  $\eta$ , la variable intermédiaire  $s$  définie par l'équation (6.13) est linéaire en fonction de  $z$ . En introduisant cette loi linéaire de  $s$  dans l'équation du profil (6.15) on obtient la loi d'évolution suivante:

$$U_\infty - U = (U_\infty - U_D)e^{-\beta z/z_D} \quad (6.18)$$

où  $\beta = -\eta/H(h/2)$ . Ce type de loi fait également partie des lois possibles dans l'analyse en groupe de Lie effectuée par Oberlack [56]. Cette loi apparaît, d'après son analyse, lorsqu'une échelle caractéristique extérieure brise la symétrie suivant les coordonnées spatiales. De nombreuses données de couches limites sont disponibles pour une gamme importante de nombre de Reynolds. Cependant Oberlack explique que l'analyse de ces données est difficile. En effet il est nécessaire de soustraire la vitesse  $U_\infty$  à la vitesse  $U$  afin de déterminer les coefficients intervenant dans la loi du profil. Cette soustraction entraîne de faibles erreurs qui conduisent à des erreurs très importantes sur la détermination des coefficients de la loi. Oberlack a cependant obtenu des résultats en bon accord avec la loi exponentielle (6.18). L'analyse des données de Saddoughi et Veeravalli [64] et de Fernholz *et al* [22] conduisent à une valeur des coefficients de  $\beta = 9.46$ ,  $z_D = \Delta_c$  ( $\Delta_c$  étant la longueur de Rotta-Clauser) et  $(U_\infty - U_D)/U_\tau = 10.34$ . Notre modèle permet donc

d'obtenir cette loi exponentielle obtenue par une analyse des symétries des équations de Navier-Stokes et observée dans de nombreuses données. Il est à noter que cette loi apparaît dans notre modèle comme le résultat de l'absence de gradients de pression.

### Écoulement de Couette

On peut analyser le résultat de notre modèle dans le cas d'un écoulement de Couette. Cette écoulement est particulier dans le sens où la symétrie  $z \rightarrow -z$  implique que la vitesse moyenne au centre de l'écoulement soit nulle. Dans un écoulement de Couette, la production d'énergie dans la région centrale est en grande partie due aux interactions entre les gradients de pression moyenne et aux interactions non-locales avec l'écoulement moyen. Du fait qu'il n'y a pas de gradient de pression moyenne et que la vitesse moyenne doit être nulle au centre, on peut raisonnablement supposer que la production d'énergie doit être également nulle près du centre de l'écoulement. Ceci impliquerait que  $\eta$  soit nul dans cette région. Avec ces nouvelles hypothèses, on peut redéfinir une nouvelle variable intermédiaire :

$$s(z) = - \int_0^z \frac{\lambda(z') dz'}{\int_{z_0}^{z'} (S(z'') + \langle \sigma_x \rangle) dz''} \quad (6.19)$$

L'équation (6.12) avec  $\eta = 0$  devient en introduisant cette nouvelle variable:

$$U = s \quad (6.20)$$

En l'absence de gradient de pression et du fait que le terme de surface est négligeable dans la partie centrale de l'écoulement, la variable  $s$  est linéaire en  $z$ . L'équation du profil devient donc, en fonction de  $z$ :

$$U = \beta z \quad (6.21)$$

avec  $\beta = \lambda/H(0)$ . Cette loi linéaire fait également partie des solutions trouvées par Oberlack dans son analyse des symétries des équations de Navier-Stokes. Cette solution correspond au plus bas degré de symétrie.  $\nu/U_\tau$  et  $U_\tau$  sont dans ce cas une longueur et une vitesse caractéristique qui rompent la symétrie. Cette loi linéaire est assez clairement présente dans l'analyse, faite par Oberlack, des données expérimentales de El Telbany et Reynolds [19] et des données de simulation de Lee et Kim [38]. La loi linéaire est présente avec une relativement bonne précision sur environ 80% dans la partie centrale du domaine.

### 6.4.3 Développement près des parois

#### Dérivation des équations

Nous avons montré que l'on pouvait retrouver, avec les équations dérivées de notre modèle, les différents profils de vitesse loin de la paroi obtenus par une étude des symétries des équations de Navier-Stokes dans les écoulements plans. Nous allons considérer maintenant les équations près de la paroi. Il faut, dans ce cas, repartir de l'équation (6.10) dans laquelle le terme de viscosité ne peut plus être négligé. Nous pourrions, partant de

cette équation, effectuer le même type d'expansion en exprimant les termes proportionnels à la viscosité. Ce type d'analyse a été effectué par Nazarenko *et al* [51]. Il est aussi possible de partir de l'équation obtenue par notre modèle en essayant de déterminer le comportement des deux paramètres  $\eta$  et  $\lambda$  en fonction des différentes variables du problème. Une des conditions à respecter doit être que le tenseur de Reynolds soit nul à la paroi. Cette condition implique que  $\lambda + \eta U = 0$  et donc que  $\lambda = 0$  à la paroi. Nous avons vu que  $\lambda$  ne dépendait de  $z$  que par l'intermédiaire de  $\partial_z U$ . On peut donc effectuer un développement de ce paramètre en fonction de cette variable qui paraît la plus pertinente. Le développement de Taylor de  $\lambda$  s'écrit alors:

$$\lambda = \lambda_0(\partial_z U - R_+) + \lambda_1(\partial_z U - R_+)^2 + \dots, \quad \partial_z U \rightarrow R_+ \quad (6.22)$$

où les  $\lambda_i$  sont des fonctions des deux autres variables  $z$  et  $U$  et  $R_+ = u_* L / \nu$  est la valeur adimensionnée du flux visqueux à la paroi. En reportant le développement de  $\lambda$  dans l'équation (6.10), et après le changement de variable  $z \rightarrow z_+ = R_+(1 + z)$ , on obtient:

$$\frac{1 + K R_* \tilde{\eta} \tilde{U}}{\partial_{z_+} U} = K R_* \left( \frac{z_+}{R_*} - 1 \right) + (1 + K R_*) \partial_{z_+} U, \quad (6.23)$$

Nous avons introduit dans cette équation les variables suivantes:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{R_+(1 - \lambda_1 R_+)}, \\ R_* &= R_+(1 + \lambda_0 - 2\lambda_1 R_+). \end{aligned} \quad (6.24)$$

On peut distinguer deux types de comportements. Très près de la paroi, lorsque  $z_+ \ll |R_*|$  et  $U/R_+ \ll 1$ , l'équation (6.23) devient:

$$\partial_{z_+} U = 1 \quad (6.25)$$

et l'on retrouve la loi linéaire classique  $U = z_+$ . Le paramètre  $R_*$  pourrait donc s'interpréter comme la dimension de la couche visqueuse qui est souvent estimée comme étant de l'ordre de 10 à 30 en coordonnées internes  $z_+$ . Au delà de la couche visqueuse, lorsque  $|R_*| \ll z_+ < z_{+0}$  (où  $z_{+0}$  représente la transition entre la couche limite et le corps du domaine), l'équation (6.23) se réduit à:

$$\frac{1 + K R_* \eta U}{\partial_{z_+} U} = K z_+. \quad (6.26)$$

Pour des fonctions  $K$ ,  $R_*$  et  $\eta$  constantes ou variant très lentement, l'équation (6.26) admet deux solutions différentes suivant que le paramètre  $\eta$  est nul ou non. Pour  $\eta$  non nul la solution est:

$$\begin{aligned} U - \frac{1}{K R_* \eta} &= \left( U_0 - \frac{1}{K R_* \eta} \right) \left( \frac{z_+}{z_0} \right)^\alpha, \\ \alpha &= \eta R_*. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Cette solution est exactement celle proposée par Barenblatt [5] si le paramètre  $\alpha$  suivait une loi de décroissance en  $\alpha \sim 1/\ln(R_+/R_0)$ . Nous n'avons cependant pas la possibilité

de confirmer ou d'infirmar cette loi. Pour une valeur nulle de  $\eta$ , on obtient, par intégration de l'équation (6.26), la célèbre loi logarithmique:

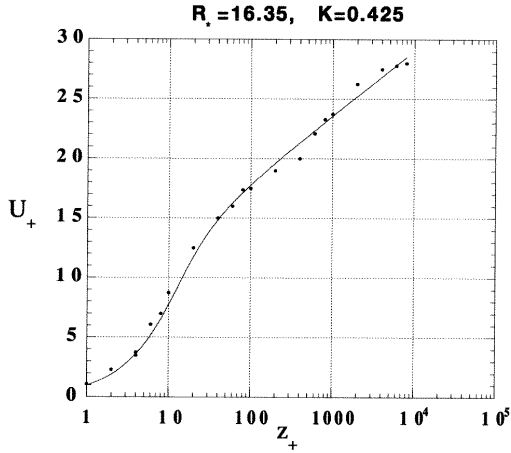
$$U = \frac{1}{K} \ln z_+ + B \quad (6.28)$$

En fait, dans le cas où  $\eta = 0$ , on peut même intégrer directement l'équation (6.23) (cf annexe D). La solution obtenue est alors une solution continue dans laquelle on retrouve les solutions développées ci-dessus dans les deux différentes régions ( $z_+ \ll |R_*|$  et  $|R_*| \ll z_+ < z_{+0}$ ). Il est alors possible d'obtenir une expression analytique de la constante B:

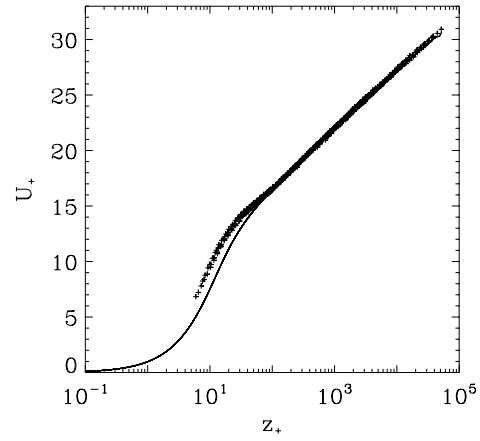
$$B = \frac{1}{2K} (1 + KR_* + 2 \ln(K)). \quad (6.29)$$

### Comparaison des résultats

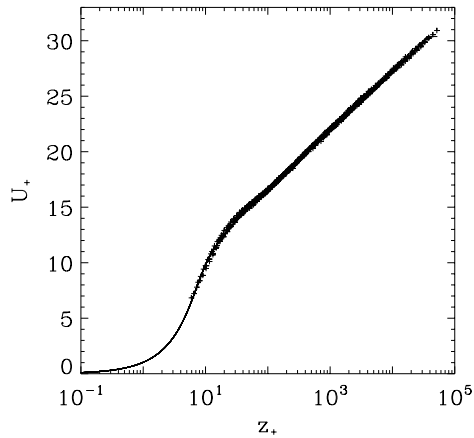
Nous avons réalisé plusieurs tests afin de comparer les profils de vitesse obtenus avec notre modèle à ceux issus de données expérimentales. La loi obtenue dans le cas où  $\eta = 0$  apparaît être en très bon accord avec certaines données expérimentales. La figure 6.2 montre la comparaison du résultat de l'intégration analytique de l'équation (6.23) avec les données de Kestin *et al* [34]. Le meilleur ajustement de la courbe a été réalisé avec  $R_* = 16.35$  et  $k = 0.425$  ce qui conduit à  $B = 7.34$ . Nous avons effectué la même comparaison avec les données plus récentes du "super-pipe" de Zagarola [80] pour 26 nombres de Reynolds différents. Le résultat de cette comparaison est représenté figure 6.3. La courbe s'ajustant le mieux aux données a été obtenue pour  $R_* = 14.5$  et  $K = 0.45$ , ce qui implique  $B = 6.59$ . On peut remarquer que la courbe de notre modèle est très proche des données sur au moins trois décades correspondants à la partie logarithmique des profils. Cependant la zone de transition entre le profil linéaire et le profil logarithmique laisse apparaître, sur les données, une légère "bosse" qu'il n'est pas possible de capturer avec notre modèle si l'on impose  $\eta = 0$ . Cette "bosse" sur les données peut être le résultat d'une loi algébrique dans la zone de transition entre le profil linéaire et le profil logarithmique. Nous avons vu que ce type de profil pouvait être obtenu par notre modèle pour une valeur de  $\eta$  non nulle (eq. 6.27). Nous avons donc effectué une autre comparaison des résultats de Zagarola en intégrant numériquement l'équation (6.23) avec  $\eta \neq 0$ . Cependant l'existence d'une loi logarithmique pour  $z_+ \gg R_*$  impose de choisir  $\eta = 0$  dans cette région. Nous avons donc choisi le raffinement le plus simple qu'il soit en prenant  $\eta \neq 0$  sur  $0 < z_+ < R_*$  et  $\eta = 0$  au delà de  $R_*$  (fig. 6.5). Pour des raisons d'universalité nous avons pris cette constante proportionnelle au nombre de Reynolds ( $\eta = \eta_0 R_+$ ). Le résultat de cette comparaison est représenté figure 6.4. Les paramètres permettant d'ajuster au mieux notre modèle aux données sont  $R_* = 6.8$ ,  $K = 0.45$  et  $\eta_0 = 0.185$ . Avec cette nouvelle paramétrisation, le modèle est très proches des données, y compris dans la zone de transition mal définie lorsque l'on imposait  $\eta = 0$ .



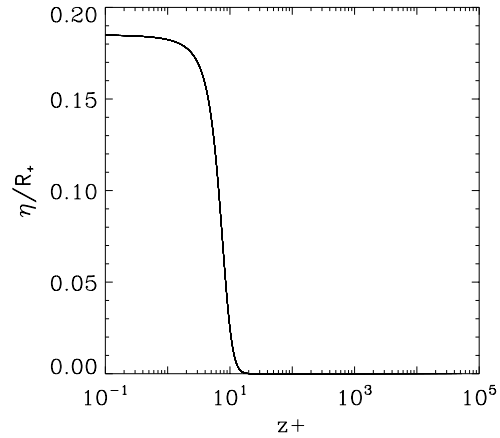
**Figure 6.2 :** Profil de vitesse obtenu avec notre modèle (ligne) comparé aux données de Kestin et al [34] (symboles)



**Figure 6.3 :** Profil de vitesse obtenu avec notre modèle (ligne) ( $R_* = 14.5$ ,  $K = 0.45$  et  $\eta = 0$ ) comparé aux données de Zagarola [80] (symboles) : résultats pour 26 valeurs de  $R_+$  allant de  $3.15 \cdot 10^4$  à  $3.52 \cdot 10^7$ .



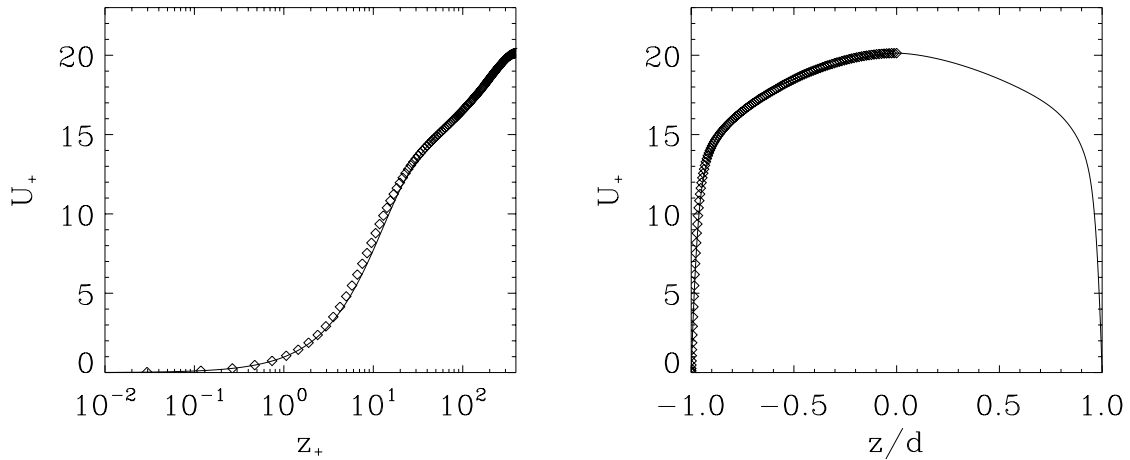
**Figure 6.4 :** Profil de vitesse obtenu avec notre modèle (ligne) ( $R_* = 6.8$ ,  $K = 0.45$  et  $\eta/R_+ = 0.185$ ) comparé aux données de Zagarola [80] (symboles) : résultats pour 26 valeurs de  $R_+$  allant de  $3.15 \cdot 10^4$  à  $3.52 \cdot 10^7$ .



**Figure 6.5 :** Fonction  $\eta(z_+)$  utilisée dans notre modèle (fig. 6.4)

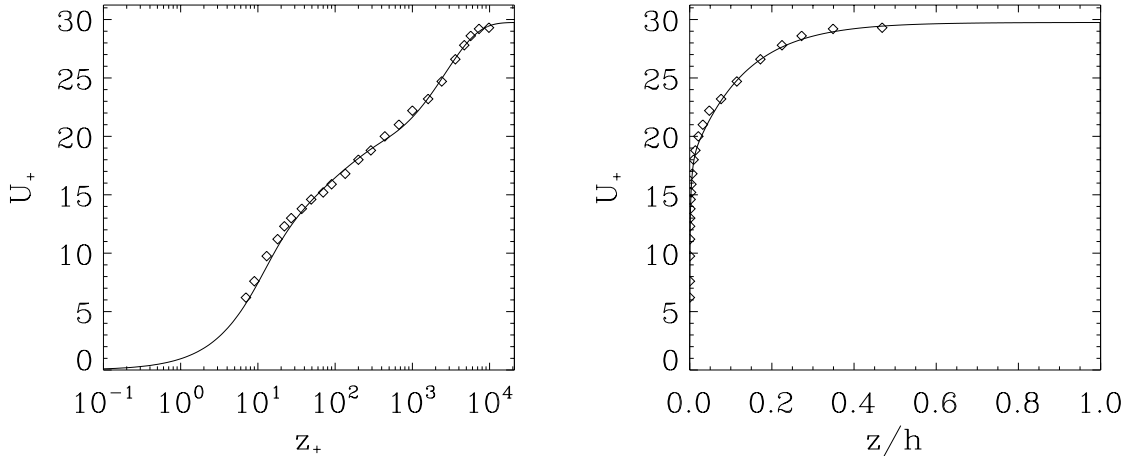
### 6.4.4 Comparaison du modèle complet

Partant de la constatation qu'il était possible d'ajuster avec précision les profils de vitesse, à la fois près des parois et dans la région centrale des différents écoulements considérés, nous avons cherché à construire un modèle valide sur tout le domaine. Pour ce faire, nous avons raccordé les différentes fonctions  $\eta$  et  $\lambda$  décrites dans les paragraphes précédents et définies sur une partie donnée du domaine. L'expression et la forme de ces fonctions ainsi raccordées sont décrites dans l'annexe D. Nous avons comparé les résultats de ce modèle complet à plusieurs données expérimentales pour, d'une part, un écoulement entre deux plaques planes, et d'autre part, un écoulement dans une couche limite. Les figures 6.6 montrent le résultat de la comparaison de notre modèle avec les données de Moser *et al* [48] pour un écoulement entre deux plaques planes. On remarque



**Figure 6.6 :** Profil de vitesse pour  $Re = 392.27$  pour un écoulement entre deux plaques planes en représentation linéaire et logarithmique: données de Moser *et al* [48] (symboles), notre modèle (ligne).

que le modèle s'ajuste très bien avec les données, y compris dans la zone de transition entre la partie près des parois et la région centrale. Une comparaison des mêmes données pour un autre nombre de Reynolds est effectuée en annexe D. Nous avons également comparé, figures 6.7, les résultats de notre modèle dans une couche limite avec les résultats d'expérience de Nockemann *et al* [55]. La comparaison a été effectuée pour un nombre de Reynolds  $R_+ = 20920$ . On remarque qu'il est également possible dans ce cas de trouver des paramètres  $\eta$  et  $\lambda$  et  $R_*$  de manière à ce que notre modèle s'ajuste correctement aux données dans la limite de précision de celles-ci. Les différents paramètres intervenant dans la modélisation ont été déterminés par une procédure automatique de moindres carrés.



**Figure 6.7 :** Profil de vitesse pour  $Re = 20920$  dans une couche limite en représentation linéaire et logarithmique: Données de Nockemann et al [55] (symboles) , notre modèle (ligne).

## 6.5 Synthèse et discussion

Nous avons, dans ce chapitre, appliqué notre modèle au cas des écoulements plans. Les équations sont dérivées des équations de Navier-Stokes sous certaines hypothèses équivalentes à celles proposées dans la modélisation de la turbulence 2D. La seule différence vient de la géométrie particulière de ces écoulements qui impliquent une direction privilégiée de l'écoulement moyen. La modélisation conduit à résoudre un système d'équations couplées entre les petites et les grandes échelles. L'équation des petites échelles étant linéaire, le système peut être simplement résolu numériquement dans la mesure où, à chaque pas de temps, la description de chacune des deux échelles permet de calculer les termes de forçage intervenant dans chacune des équations d'évolution. Cependant, nous avons choisi de nous concentrer sur une analyse théorique de cette modélisation. La configuration particulière de ces écoulements plans permet une résolution analytique d'une partie du système. La résolution complète est possible moyennant une hypothèse concernant le terme de forçage des petites échelles. Nous avons montré qu'avec cette hypothèse de décorrélation en temps du terme de forçage des petites échelles, il était possible d'intégrer analytiquement le système d'équations. La solution analytique fait intervenir ces termes de forçage dont on ne connaît pas *a priori* l'expression. Cependant, en s'appuyant sur des résultats connus concernant ce type d'écoulement, il est possible d'avoir une idée de leur forme. En considérant ces forces comme des paramètres extérieurs, nous avons montré que l'on pouvait trouver une expression satisfaisante de celles-ci permettant d'obtenir toute les lois connues dans ce type d'écoulements plans. Le modèle permet en effet de retrouver toutes les lois résultant d'une analyse exhaustive des symétries des équations de Navier-Stokes [56]. Les résultats du modèle ont également été comparés avec succès à des résultats numériques et expérimentaux. Une prochaine approche sera d'implémenter numériquement ce modèle



---

afin de valider la forme des paramètres qui ont été déduits de l'analyse théorique et de vérifier que les résultats de l'intégration complète du modèle sont compatibles avec les résultats théoriques obtenus moyennant une prescription des termes de forçage des petites échelles.



# Conclusions et perspectives

Les modèles de turbulence LES s’attachent uniquement à décrire correctement les grandes échelles d’un écoulement. Pour ce faire, il est nécessaire de calculer directement les plus grandes échelles et de modéliser les plus petites. La modélisation se résume souvent à essayer d’interpréter correctement l’action des petites échelles sur les grandes. La majorité de ces modèles sont donc basés sur une hypothèse concernant la statistique des petites échelles. Même si certaines hypothèses de ce type permettent de construire des modèles satisfaisant, il n’existe pas à l’heure actuelle, de modèle LES permettant d’obtenir un comportement correct pour tous les types d’écoulements. Chaque modèle possède un point faible qui se manifeste souvent lorsque la dynamique des petites échelles devient particulière et ne correspond plus au domaine d’application du modèle. Il n’existe pas, à ma connaissance, de modèle dit “universel” permettant de calculer n’importe quel type d’écoulement (tout au moins ceux régis par les équations de Navier-Stokes) sans aucun paramètre ajustable. Partant de cette constatation, nous avons donc cherché à développer un modèle qui découle directement des équations de Navier-Stokes et qui ne nécessite aucun ajustement en fonction de l’écoulement étudié. Notre modèle ne s’appuie donc pas sur une hypothèse concernant la statistique des petites échelles mais sur une équation d’évolution de celles-ci. Le but étant bien entendu que le coût de calcul de ces petites échelles soit inférieur à celui que requiert leur calcul direct par la résolution des équations de Navier-Stokes. La base de notre modèle est lié à une hypothèse de prépondérance des interactions non-locales intervenant dans la dynamique des petites échelles. Il est en effet possible de déterminer une échelle limite de séparation telle que l’on puisse considérer, en première approximation, que les petites échelles soient uniquement advectées par les grandes structures de l’écoulement. Cette hypothèse nécessite que, ce qui sera défini comme les grandes échelles, contienne la plus grande partie de l’énergie totale du système. Cette hypothèse peut donc être obtenue par un ajustement de l’échelle de coupure qui n’est cependant pas à proprement parlé un paramètre ajustable, mais plutôt une condition nécessaire à la validité du modèle.

Le modèle consiste donc à déterminer l’équation d’évolution de chacune des deux types d’échelles de l’écoulement. L’hypothèse de non-localité des interactions intervient ensuite dans l’équation d’évolution des petites échelles pour négliger le terme non-linéaire représentant l’interaction des petites échelles sur elles-mêmes (le terme  $div(\mathbf{u}'\omega') - div(\overline{\mathbf{u}'\omega'})$  de l’équation 2.5). Nous avons effectué au chapitre 2 une série de tests permettant de valider cette hypothèse. Ces mêmes tests ont permis d’évaluer l’importance de chacun des termes non-linéaires intervenant dans le tenseur de Reynolds. Cette analyse nous a conduit à

négliger d'autres termes en plus de celui découlant de notre hypothèse de départ. Cette approximation supplémentaire n'est pas pour autant nécessaire, mais permet de réduire sensiblement le coût numérique du modèle. En effet notre approche est différente de la majorité des autres modèles LES qui s'attachent à modéliser le tenseur de Reynolds dans sa globalité. Dans notre cas il est nécessaire de calculer ses différentes composantes en fonction des champs à petites échelles. Ces tests sur l'importance de chacune des composantes du tenseur de Reynolds sont intéressants dans le sens où ils permettent d'analyser la pertinence des modèles LES "classiques" et leur aptitude à modéliser les bons termes composant le tenseur de Reynolds. Nous avons, par exemple, effectué cette analyse sur le modèle *Euler* -  $\alpha$ . Nous avons également développé notre modèle dans les cas où les grandes et les petites échelles sont largement séparées. Ce cas idéal est intéressant car il permet des analyses théoriques sur le comportement des petites échelles. Nous avons par exemple déduit de cette analyse la forme de leur spectre d'énergie. Il est également possible de montrer que, en première approximation, le modèle permet une conservation de l'énergie totale du système.

La plus grande difficulté dans notre modèle consiste à intégrer l'équation des petites échelles avec un pas de temps lié aux grandes échelles et ceci avec une résolution compatible avec les limites imposées par les ordinateurs. Ceci est rendu possible grâce à l'élimination du terme non-linéaire représentant l'interaction des petites échelles sur elles-mêmes. Nous avons choisi de résoudre l'équation résultante par une méthode particulière. Cette méthode possède plusieurs avantages. Elle permet d'une part d'intégrer l'équation d'évolution des petites échelles avec un pas de temps lié aux grandes échelles, et ceci sans problème majeure de stabilité. Cette méthode permet de plus, de gérer au mieux les nombres de modes nécessaires à un instant donné de la simulation puisque ces particules sont créées uniquement dans les zones de forts gradients. Pour une description d'écoulements très intermittents, les petites échelles peuvent être discrétisées avec un minimum de particules. Du fait qu'il n'est guère possible de définir une résolution maximum équivalente à notre méthode, il est difficile de comparer son coût à celui d'une simulation directe équivalente. Il faut également rappeler que nous n'avons pas, dans un premier temps, cherché à optimiser notre modèle, mais nous nous sommes attachés à explorer ses possibilités. Cette méthode de résolution n'est peut être pas la plus adaptée aux équations à résoudre. Une méthode faisant intervenir des transformées en ondelettes plutôt que des transformées de Gabor peut être une autre solution envisageable. La décomposition des échelles directement résolues et des échelles modélisées pourrait être effectuée dans ce cas en fonction de l'énergie ou l'enstrophie propre de chaque mode. Ce type de décomposition serait sans doute plus en rapport avec l'hypothèse d'advection des échelles non résolues par les structures les plus énergétiques de l'écoulement. Cette méthode conduirait probablement à une optimisation plus fine du nombre de modes nécessaires dans la simulation [21] mais le coût de calcul par nombre de modes pourrait supprimer l'avantage acquis par l'optimisation de leur nombre.

Ce type de modèle, ou du moins les hypothèses qui le caractérisent, ouvre la voie à différentes analyses. Nous avons effectué, dans le chapitre 6, une analyse théorique sur les écoulements plans. Nous avons vu à cette occasion, que le modèle permet d'obtenir des résultats analytiques intéressants sur la description des profils de vitesse. Il serait

intéressant, vu les résultats analytiques obtenus, d'effectuer une simulation numérique de ce type particulier d'écoulement afin d'une part, d'étayer les hypothèses effectuées lors de l'analyse théorique et d'autre part de comparer les résultats du modèle complet à des résultats de référence. Le fait de calculer une équation d'évolution simplifiée des petites échelles permet également d'envisager une analyse théorique sur la statistique liée à ces petites échelles. Nous avons abordé cette étude dans le cas idéal de séparation d'échelles mais elle peut être poursuivie dans un cas plus général faisant intervenir le terme de forçage des petites échelles par les grandes. Nous avons étudié la forme du spectre d'énergie des petites échelles, mais il est également possible d'analyser les phénomènes de dissipation. La discrétisation en particules permet en effet d'obtenir des informations sur la dépendance spatiale et temporelle de la dissipation.

L'analyse qui a été effectuée dans cette thèse apparaît être comme un point de départ d'un grand nombre de développements possibles tant analytiques que numériques. Ce type de modélisation est développé dans plusieurs domaines de recherche. Nous avons commencé d'appliquer ce modèle à la couche limite atmosphérique [16]. Dans cette lignée, notre modèle a fait l'objet d'une proposition NSF<sup>1</sup> de la part de *CORA*<sup>2</sup>, du *NCAR*<sup>3</sup>, de l'*Université du Colorado* (Boulder) et de l'*Université de Californie* (Berkeley). Cette étude a pour but d'utiliser ce type de modélisations afin d'améliorer les simulations et donc la compréhension des écoulements cisailés. Une autre proposition NSF a été effectuée par le *NCAR* et l'*Université de Pennsylvanie* pour l'étude expérimentale et théorique des flux de chaleur et de moments cinétiques dans l'atmosphère. Notre modèle est également à la base de développements en astrophysique concernant la formation du système solaire et plus généralement de la dynamique des disques d'accrétion où la turbulence joue un rôle essentiel. Ce projet fait l'objet d'une proposition NASA Ames. L'application astrophysique, tant théorique que numérique, sera également développée dans une nouvelle thèse faisant suite à celle-ci. Finalement, ce modèle est actuellement utilisé par Nazarenko *et al* dans l'étude de la Magnétohydrodynamique (MHD).

---

<sup>1</sup>National Science Foundation

<sup>2</sup>Colorado Research Associate, Boulder Colorado

<sup>3</sup>National Center of Atmospheric Research, Boulder Colorado



# Annexes





## Annexe A

# Validation des hypothèses de non-localité

Reproduction d'un article de *Physical Review Letters* (sous presse), 1999

# Nonlocality of interaction of scales in the dynamics of 2D incompressible fluids

Jean-Philippe Laval<sup>1</sup>, Bérengère Dubrulle<sup>2,3</sup> and Sergey Nazarenko<sup>4</sup>

<sup>1</sup> CEA/DAPNIA/SAP L'Orme des Merisiers, 709, F-91191 Gif sur Yvette, France

<sup>2</sup> NCAR, P.O. Box 3000, Boulder CO 80307-3000

<sup>3</sup> CNRS, URA 285, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue Belin, F- 31400 Toulouse, France

<sup>4</sup> Mathematics Institute University of Warwick COVENTRY CV4 7AL, UK

## Abstract

We use numerical simulations to prove that the dynamics of the small-scale vorticity in two dimensional incompressible fluids is nearly passive and that the feedback of the small scales onto the large-scale dynamics is only important for the part of the large-scale range which is adjacent or close to the small-scale range.

The dynamics of high Reynolds number turbulent flows usually couples a broad range of scales, from the energy injection scale to the dissipative scale. This range is too wide to be fully resolved by direct numerical simulations of the Navier-Stokes equations. This motivated a number of attempts to describe separately the behavior of the "energy containing" scales (corresponding to either the large scales or the scales of the mean motions) via modeling of the action of the "dissipative" small or random scales of motions. In most cases, the modeling is empirical and based on hand waving or dimensional arguments about the small-scale dynamics. There are a few attempts to derive a model from asymptotic expansions based on the Navier-Stokes equations. Traditionally, these model are based on two different expansion parameters, based on the ratio of the typical length  $\ell$ , and time  $\tau$  of the small scale motions, and the typical length  $L$  and time scale  $T$  of the energy containing motions. This results in two parameters:  $\epsilon = \ell/L$  and  $\eta = \tau/T$ . For example, the eddy-viscosity description of Dubrulle and Frisch [1] requires  $\epsilon \ll 1$ ,  $\eta \ll 1$  but  $\epsilon/\eta \gg 1$ . The classical Rapid Distortion Theory of Batchelor and Proudman [2] describes the dynamic of the small scales via linearized equations of motions and requires  $\epsilon = 0$  and  $\eta \gg 1$ . More recently, Dubrulle and Nazarenko [3] introduced a dynamical subgrid model for two-dimensional turbulence based on RDT for weakly inhomogeneous mean flows by assuming  $\epsilon \ll 1$  and  $\eta \gg 1$ . These assumptions correspond to a developed stage of the 2D turbulence in which an energy condensation into large eddies is observed, so that evolution of at the small scales is dominated by the nonlocal interaction with these large eddies rather than by the local interaction of the small eddies among themselves. This nonlocality property has been reported a number of papers on the numerical simulation of 2D turbulence [4] [5] [6]. In this letter, we specifically focus on studying the mechanisms of the interaction between large and small scales of the system and, particularly, on studying the nonlocality property. Consider the two dimensional Euler equation in the vorticity form:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \omega + \operatorname{div}(\mathbf{u} \omega) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where  $\omega = \operatorname{curl} \mathbf{u}$ . We now define the large and small scale part of the vorticity and of the velocity, via a given filter  $G$  as follows,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \\ \mathbf{u}'(\mathbf{x}) &= \mathbf{u} - \mathbf{U}, \\ \Omega(\mathbf{x}) &= \langle \omega \rangle = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \\ \omega'(\mathbf{x}) &= \omega - \Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

The filter  $G$  can be of a cut-off type or a smoother one, but such that the resulting large-scale and small-scale fields would contain mostly low-wavenumber and high-wavenumber Fourier components correspondingly. Inserting this decomposition into the Euler equation (1) and taking its large and small scale component, we get a set of two coupled equations:

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega &+ \operatorname{div} \langle \mathbf{U} \Omega \rangle + \operatorname{div} \langle \mathbf{u}' \Omega \rangle \\ &+ \operatorname{div} \langle \mathbf{U} \omega' \rangle + \operatorname{div} \langle \mathbf{u}' \omega' \rangle = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\begin{aligned} \partial_t \omega' &+ \operatorname{div} \mathbf{U} \Omega + \operatorname{div} \mathbf{u}' \Omega + \operatorname{div} \mathbf{U} \omega' + \operatorname{div} \mathbf{u}' \omega' \\ &- \operatorname{div} \langle \mathbf{U} \Omega \rangle - \operatorname{div} \langle \mathbf{u}' \Omega \rangle \\ &- \operatorname{div} \langle \mathbf{U} \omega' \rangle - \operatorname{div} \langle \mathbf{u}' \omega' \rangle = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Not all of the terms in the above system of coupled equations for the small and large scales are equally important dynamically, and our first aim is to study their relative importance using an a-priori test based on a direct numerical simulation. The data used for the test are from a  $1024^2$  DNS of decaying turbulence using real (i.e. not hyper-) viscosity after 36 turnover times

with  $R_\lambda = 105$ . Here,  $R_\lambda$  is the Reynolds number based on the Taylor scales. The initial condition is a vorticity field with most of energy concentrated at the wavenumber  $k = 40$ . After 36 turnover times, the spectrum develops an inertial range between  $k = 8$  and  $k = 40$  with a slope close to  $k^{-3}$  (see insert of Fig. 1). A cut-off filter at  $k_c = 32$  was applied to the DNS data to separate the flow into large- and small-scale components. This was used to compute the four different non-linear terms appearing in the equation (namely  $\text{div}(U\Omega)$ ,  $\text{div}(U\omega')$ ,  $\text{div}(u'\Omega)$  and  $\text{div}(u'\omega')$ ). The cut-off scale was chosen so that it lies in the inertial range, and it allows for a reasonable amount of large scale energy, so that our hypothesis of non-locality is valid. These are the only restrictions pertaining to the choice of the cut-off scale. In Figure 1, we plotted the square modulus of the Fourier component of the four non-linear terms as a function of the wavenumber. One sees that for wavenumber less than the cut-off wavenumber (corresponding to the large-scale equation), the large scale-large scale non-linear interaction  $\text{div}(U\Omega)$  provides the dominant term, followed by the large-scale/small-scale interaction term  $\text{div}(U\omega')$  which becomes comparable to  $\text{div}(U\Omega)$  close to the cut-off wavenumber. The other two terms,  $\text{div}(u'\Omega)$  and  $\text{div}(u'\omega')$ , are both negligible throughout the large-scale range of wavenumbers. Note that both linear terms  $\text{div}(U\omega')$  and  $\text{div}(u'\Omega)$  asymptote to the same value at low-wavenumber end of the large-scale range (although both of them are much less than  $\text{div}(U\Omega)$ ). The non-linear small-scale/small-scale interaction term is much less than all the other terms. For wavenumbers greater than the cutoff (the small scale equation), the ordering of the terms changes and the dominant one becomes the contribution from  $U\omega'$ , followed by that of  $U\Omega$  up to approximately  $2k_c$ , where by construction  $U\Omega$  vanishes. For larger wavenumbers,  $\text{div}(u'\omega')$  becomes the second dominant term but it remains one or two orders of magnitude smaller than the leading order term  $\text{div}(U\omega')$  which is kept in our model. We have also performed the same test using different initial fields and different filter and always found the same qualitative behavior, as long as the cut-off scales allow for sufficient large-scale energy.

Based on the above results, we can write a reduced system of equations for the large and small scales by retaining only the dominant terms in the original system (3) and (4),

$$\begin{aligned}\partial_t \Omega + \text{div} \langle \mathbf{U}\Omega \rangle + \text{div} \langle \mathbf{U}\omega' \rangle &= 0, \\ \partial_t \omega' + \text{div} \mathbf{U}\omega' &= \text{div} \langle \mathbf{U}\Omega \rangle - \text{div} \mathbf{U}\Omega + \text{div} \langle \mathbf{U}\omega' \rangle.\end{aligned}\quad (5)$$

Note that in the case of turbulence with a spectral gap, the mixed average  $\langle U\omega' \rangle$  and  $\langle u'\Omega \rangle$  vanish and the only remaining contribution from the small scales is  $\text{div} \langle u'\omega' \rangle$ . This was the case considered in [3]. There are some observations indicating the existence of a spectral gap in the atmosphere [7]. However, this spectral gap is not obtained in general 2D numerical simulations of decaying or forced turbulence, so we shall not consider this possibility in the present paper. Had we assumed that our average is performed in a statistical sense (e.g. with respect to the realization), we would also have obtained a mean flow equation only forced by the small-scale Reynolds stress term, like in [3]. The fluctuating ("small scale") equation would appear even more simplified, since the only relevant terms up to order epsilon will be  $\partial_t \omega' + \text{div}(\mathbf{U}\omega') = 0$ . This is the situation corresponds to the classical RDT theory, where vorticity (in 2D) is considered to be passively advected by the mean flow.

The set of equation (5) describes an interesting coupled system between large and small scales. By virtue of (5), the dynamics of the large scales is determined first by their mutual (non-linear) interaction, but also by the "mixed" interaction between them and the small scales. Note that this is markedly different from standard Reynolds stress phenomenology, where it is usually assumed that the main interaction comes from the small-scale/small-scale term. In that sense, our coupled model is not based on an eddy-viscosity assumption, and captures behavior which could not be parameterized via, for example, a Smagorinsky description.

According to (5.b), the small scales evolve under the conjugate action of two processes, first being their advection by the large-scale velocity field and the second – their growth by the continuous building of small scales via non-linear interaction between large and small scales (related to the enstrophy cascade). In that respect, the small scales behave like a forced passive scalar, where the forcing depends on the large scale strain. However, the small scales are not completely passive since they are allowed to react back over the large scale via the non-linear coupling between the

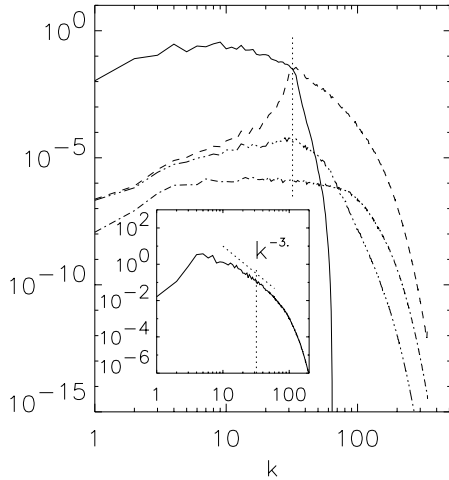


Figure 1: Square modulus of the four Reynolds Tensor components for a decaying turbulence : continuous line :  $div(\mathbf{U}\Omega)$ , - - :  $div(\mathbf{U}\omega')$ , - . - . :  $div(\mathbf{u}'\omega')$  et . . . . :  $div(\mathbf{u}'\Omega)$ . The initial field is the result of a DNS  $1024^2$  for decaying turbulence. The energy spectrum and the separation scale are shown in the inset

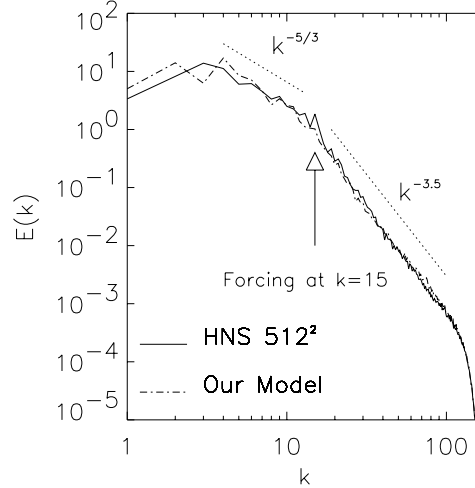


Figure 2: Energy spectra of turbulence forced at  $k=15$  by keeping the energy of the mode  $(15,0)$  constant in time. The HNS ( $512^2$ ) is compared with our model with the same resolution and the same hyperviscous dissipation. The separation scale is at  $k = 21$

large and small scales. This feedback of small scales on the large scales, as well as the forcing of the small scales via the non-linear term, make an essential difference between the present model and standard Rapid Distortion Theory, in which the small scales are only passively advected by the main stream. In such situation, the small-scale behavior is directly related to the initial and boundary conditions, - an a-priori undesirable feature to describe the fully developed stage of a turbulence, which should be independent of initial and boundary conditions (see discussion in the review paper by [8]). By allowing continuous injection of vorticity (forcing) at small scale, we do, in contrast, allow a loss of memory from initial conditions, since after long enough time, the "transient linear solution" (solution of the homogeneous small-scale equation, i.e. the classical RDT equation) will eventually decay and the long term behavior of the solution will be governed by the forcing, i.e. the non-linear coupling between large and small scales. Note however that we do conserve an essential desirable feature of the RDT description, which is the linearity of the small-scale equation. This allows explicit analytical solution of the small scale equations in terms of the large-scale flow, in certain simple case such as when the large scales are made of a dipole [3], a pure strain [9] or a shear flow [10, 11].

Our choice of the reduced model was motivated by the a-priori DNS test measuring relative importance of terms in the original system of equations at a given instant of time. However, averaged characteristics may differ from their instantaneous values. Indeed, collective phase effects (decorrelation) among terms could lead to a relative depletion or enhancement of the effective contribution of the various terms over long period of time. We therefore conducted a second series of (dynamical) tests by a direct numerical integration of the reduced model (5), in several typical 2D situations: decaying turbulence, forced turbulence and vortex merging. To get an inertial range as large as possible, we performed all the tests by replacing the dissipation term by a hyper-dissipation  $\nu\Delta^p\mathbf{u}$  with  $p = 8$ . In preliminary tests, we have checked that the Hyperviscous Numerical Simulation (HNS) are a very good approximation at large scales of a DNS at a much larger resolution. Since we are mostly interested in the large-scale behavior of our model, we felt that it was safe to use the HNS to perform the tests, allowing a substantial economy of computational resources. The filter used here is a cut-off in the Fourier space, at  $k=21$  for the three cases tested with this dynamical test. It is small enough to allow enough energy at large scale for the non-locality assumption to be valid. The comparison was made for same initial conditions and resolutions ( $512^2$ ). Both our model and the HNS were performed using a pseudo spectral

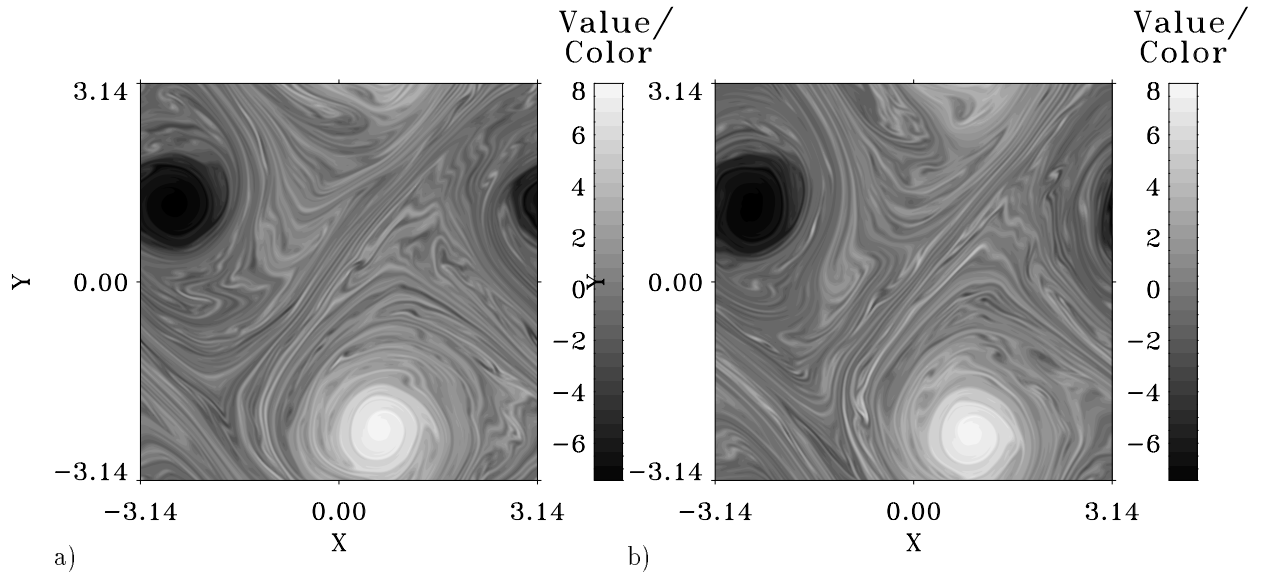


Figure 3: Vorticity field of decaying turbulence obtained by: a) HNS  $512^2$  b) our model  $512^2$  with a separation scale at  $k = 21$

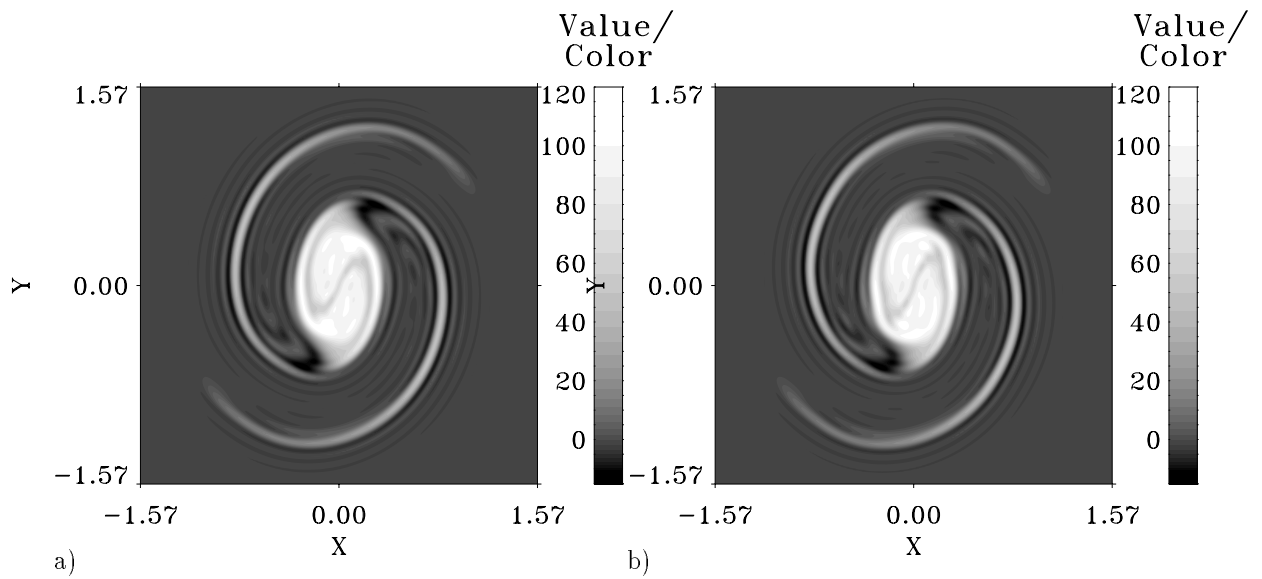


Figure 4: Vorticity field of a vortex merging process obtained by : a) HNS  $512^2$  b) our model  $512^2$  with a separation scale at  $k = 21$ . (only 1/4 of the total domain is represented)

code over a  $2\pi \times 2\pi$  periodic domain. For forced turbulence, the results are presented in FIG. 2. The initial condition for the two simulation is a vorticity field with a small total energy compared to the final state. The forcing was produced by keeping constant in time the energy at a given wavenumber ( $k_x = 15, k_y = 0$ ). One can see that the energy spectra are in very good agreement with the hyperviscous numerical simulation data for all scales.

For decaying turbulence, the vorticity fields obtained after 7 turnover times are shown in FIG. 3. This time corresponds to approximately  $160 T_w$  where  $T_w$  is the time of the maximum enstrophy. The agreement between the final state of our model and the final state of the hyperviscous simulation is excellent, even after several turnover time. A small difference between the dipole location is due to the intrinsic chaoticity of Navier-Stokes equations. However, both field present the same physical characteristics at large and small scales. Note that in our model, we can consider

scale as small as the smallest scale in the HNS because we do actually compute the small scales up to the hyperviscous cut-off. We also checked the very good agreement of the energy spectra at all scales. To check that the good agreement was indeed due to our good description of the small scales, we ran, as an additional test, a  $32^2$  HNS (our small-scale models was thus replaced by hyperviscosity). The vorticity fields and the energy spectra at large scales were quite different from the fully resolved HNS, showing the importance of the small-scale parameterization. The third test was performed on a vortex merging. This process is very sensitive to the small scale parameterization, and, therefore, provides a rather stringent test of our model. The initial vorticity field is made of two vortices separated by a distance  $\delta$ . The corresponding vorticity distribution is given, in polar coordinates, by:

$$\omega(r, \theta) = 50 * \{1 - \tanh[(r - R_o)/\Delta]\} \quad (6)$$

with  $R_o = 0.05 \times 2\pi$ ,  $\Delta = 0.01 \times 2\pi$  and  $\delta = 0.15 \times 2\pi$ . The total vorticity during the merging is shown in (FIG. 4) at approximately  $12 T_w$ . Note the very good agreement of the merged vortex orientation, and of the filamentary structure. This indicates that our model reproduces very well the dynamics of the full system.

The present validation of our model is interesting for several reasons. First, it justifies a posteriori any analytical development based on the two simplified coupled equations (5). This is important because the linearity of the small scale equations allows, like in classical Rapid Distortion theory, exact analytical or semi-analytical results. Since we have shown that this linear description is a very good approximation of the real dynamics, we may thereby obtain approximate non-perturbative solutions of our approximate system which are more accurate solution of the total dynamics than those obtained by standard perturbative methods. Also, our result is of interest for Large Eddy Simulations of 2D turbulence. Indeed, our set of coupled equation provides a basis for a dynamical sub-grid scale model, where the small scale contribution is computed from a dynamical equation rather than postulated [12]. In contrast with traditional subgrid scale models (such as Smagorinsky [13]), such dynamical sub-grid scale model takes into account such an important physical property of the 2D small-scale dynamics as the nonlocality of interaction (linearity of the small-scale equation). This improvement comes at slightly larger computational cost with respect to traditional subgrid scale models but it gives more accurate results obtained without any adjustable parameters. These results will be reported in a separate paper [12].

**Acknowledgments** JPL acknowledges the hospitality of NCAR/MMM where part of this work was done. A NATO fellowship helped BD pay for kids' nanny and tuition fee and, so, was a strong help in the preparation of this paper.

## References

- [1] B. Dubrulle and U. Frisch *Phys. Rev. A* **43** 5355 (1991).
- [2] G.K. Batchelor and I. Proudman *Q. J. Mech. Appl. Maths* **7**, 83 (1954).
- [3] B. Dubrulle and S. Nazarenko *Physica D* **110** 123 (1997).
- [4] V. Borue *Phys Rev Lett* **71** 3967 (1993).
- [5] K. Ohkitani *Phys Fluids A* **2** 1529 (1990).
- [6] M.E. Maltrud and G.K. Valis, *Phys Fluids A* **5** 1760 (1993).
- [7] I. van der Hoven *J. of Meteo.* **14** 160 (1957).

- [8] J.C.R. Hunt and D.J. Carruthers, *J. Fluid Mech.* **212** 497 (1990).
- [9] S. Nazarenko, N. Kevlahan and B. Dubrulle, *J. Fluid Mech.* **390** 325 (1999).
- [10] S. Nazarenko, B. Dubrulle and N. Kevlahan, *submitted to Physica D* (1999).
- [11] B. Dubrulle, J-P. Laval, N. Kevlahan and S. Nazarenko *submitted to Phys. Fluid* (1999).
- [12] J-P. Laval, B. Dubrulle and S. Nazarenko, *submitted to J. Fluid Mech.*, (1998)
- [13] J. Smagorinsky, *Mon. Wea. Rev.* **91** 99 (1963)







## Annexe B

# Resultats avec séparation d'échelles

Reproduction d'un article de *Journal of Fluid Mechanics* (sous presse), 1998

# Dynamical modeling of sub-grid scales in 2D turbulence

Jean-Philippe Laval<sup>1</sup>, Bérengère Dubrulle<sup>2,3</sup> and Sergey Nazarenko<sup>4,5</sup>

<sup>1</sup> CEA/DAPNIA/SAp L'Orme des Merisiers, 709, F-91191 Gif sur Yvette, France

<sup>2</sup> CNRS, URA 2052, CEA/DAPNIA/SAp L'Orme des Merisiers, 709, F-91191 Gif sur Yvette, France

<sup>3</sup> CNRS, URA 285, Observatoire Midi-Pyrénées 14 av. E. Belin, F-31400 Toulouse, France

<sup>4</sup> Mathematics Institute University of Warwick COVENTRY CV4 7AL, UK

<sup>5</sup> University of Arizona, Department of Mathematics, Tucson AZ 85721, USA

## Abstract

We develop a new numerical method which treats resolved and sub-grid scales as two different fluid components evolving according to their own dynamical equations. These two fluids are nonlinearly interacting and can be transformed one into another when their scale becomes comparable to the grid size. Equations describing the two-fluid dynamics were rigorously derived from Euler equations in [1] and they do not involve any adjustable parameters. The main assumption of such a derivation is that the large-scale vortices are so strong that they advect the sub-grid scales as a passive scalar, and the interactions of small scales with small and intermediate scales can be neglected. As a test for our numerical method, we performed numerical simulations of 2D turbulence with a spectral gap, and we found a good agreement with analytical results obtained for this case in [2]. We used the two-fluid method to study three typical problems in 2D dynamics of incompressible fluids: decaying turbulence, vortex merger and forced turbulence. The two-fluid simulations performed on at  $128^2$  and  $256^2$  resolution were compared with pseudo-spectral simulations using hyperviscosity performed at the same and at much higher resolution. This comparison shows that performance of the two-fluid method is much better than the one of the pseudo-spectral method at the same resolution and comparable computational cost. The most significant improvement is observed in modeling of the small-scale component, so that effective inertial interval increases by about two decades compared to the high-resolution pseudo-spectral method. Using the two-fluid method we demonstrated that the  $k^{-3}$  tail always exists for the energy spectrum, although its amplitude is slowly decreasing in decaying turbulence.

# 1 Introduction

Many applications in fluid mechanics require solutions of Navier Stokes equations at high Reynolds numbers. For flows encountered in aeronautics and engineering, Reynolds numbers can easily reach  $10^6$ . In astrophysics and geophysics they can be even larger. Nowadays, direct numerical simulations (DNS) on most powerful computers do not reach such Reynolds numbers. For pseudo-spectral methods the problem is that one cannot avoid introducing dissipation even at scales greater than the grid size. The reason for this is a numerical instability which manifests itself in stagnation of energy in small-scales and called bottle-neck instability. To dissipate this energy, one needs a smoothly increasing with wavenumber dissipation function. To achieve higher Reynolds numbers such a dissipation function can be chosen to be of a hyperviscosity-type, i.e. a function which is steeper than the real viscosity, but it cannot be made too steep to avoid the bottle-neck instability. Among the various alternatives to DNS is the Large Eddy Simulation (LES). The idea of the LES is to compute only the large scales and to model the feedback of small scales on the large-scale dynamics. The LES approach is especially popular for computing three dimensional turbulence, where DNS is practically impossible for high Reynolds numbers (see e.g. [3] and references therein). Most of the LES schemes, however, are based on phenomenological models for small-scale turbulence and contain adjustable parameters. For 2D turbulence, a LES method was proposed by Sadourny and Basdevant [6].

In the present paper, we implement and discuss a new numerical method for 2D turbulence based on a two-fluid model proposed recently by Dubrulle and Nazarenko [1]. In this model, the large scales and the small (sub-grid) scales are treated as two different components (fluids) described by their own equations. These equations are rigorously derived from the Navier-Stokes equations under assumption that the large scales produce much stronger velocity field than the intermediate and small scales do. This underlying assumption of the two-fluid method is justified for 2D turbulence because of the energy condensation in large vortices [4], [5]. In spirit, the two-fluid model is close to LES, because the small scales are less than the grid size. The dynamical equations are averaged over the small scales and involve only the slow time and coordinate corresponding to the large scales. However, the two-fluid model does not postulate small-scale turbulence but models it with a dynamical equation which does not involve any adjustable parameters. This model conserves both energy and enstrophy, and describes accurately the non-local interaction arising between well separated scales. It was used to give a simple analytical solution of the interaction between a large-scale dipole vortex and a small scale turbulence [1] and to derive spectra of non-local 2D turbulence [2].

The main goal of this paper is to use the two-fluid method in more realistic situations where there is no spectral gap separating large and small scales. Justification of using the two-fluid model for distributions without spectral gap is that intense vortices with the size (in terms of velocity) much greater than the grid cell give a dominant contribution into the dynamics of small sub-grid scales, and intermediate scales may be neglected in the subgrid-scale dynamics. In other words, the sub-grid turbulence is non-local, and the main contribution to the energy and enstrophy fluxes in small-scale turbulence comes from non-local wavenumber triads having one short leg and two long legs. This situation is indeed observed in high-resolution numerical computations of 2D turbulence [7], [8],[9]. To avoid any confusion it is appropriate to remark here that the 2D forced turbulence is indeed local for scales larger than the forcing scale and therefore the  $-5/3$  inverse cascade spectrum is observed. We emphasize however that it becomes nonlocal in the enstrophy cascade range at small scales and subgrid scales in particular. Nonlocality assumption works even better for decaying turbulence with no dissipation at low wavenumbers because the integral scale of turbulence in this case can be as large as the computational box size at late stages. Of course, neglecting local interactions of subgrid scales is only an approximation, but this is a much better approximation for 2D turbulence than neglecting the nonlocal interactions which is done when using the traditional LES approach. The non-locality of 2D turbulence and its relation to the passive advection of small scales resulting in  $k^{-3}$  energy spectrum and coherent structures responsible for a steeper spectrum at smaller wavenumbers was discussed in [10]. The passive advection of small scales is the main validity requirement for the RDT description in 2D. Note

however that this advection is not trully passive in our approach in that the small scales affect the large scales through the averaged Reynolds stresses which are taken into account in the 2-fluid model.

During the non-local dynamics, the sub-grid energy may not be conserved: it can be transferred to, or be drawn from, the large-scale component. This energy transfer to/from the large-scale component is taken care of in the large-scale equation of the two-fluid by a term describing the feedback of the small scales. We use a pseudo-spectral code to compute the large-scale component and we use a particle-in-cell (PIC) method to compute the small-scales. Because there is no spectral gap separating the two components, one needs a procedure converting the large-scale fluid into the small-scale one when its scale is approaching to the grid size. In turn, when the scale of the small-scale fluid is getting larger than the grid size, one has to convert it into the the large-scale component. Such procedure of local conversion of large scales into small scales and back is done using a simplified model in order to make the computations cost effective and this part of our numerical method is therefore non-rigorous. Thus, although the two-fluid equations are rigorously derived under the nonlocality condition, the whole model (including the conversion between the two fluids) is not rigorous and has to be tested via comparison with high resolution DNS.

In section 2 we summarize the two-fluid model and we describe our numerical method in section 3. In section 4 we discuss some basic properties of the sub-grid dynamics associated with the particle representation. In section 5 we consider situations where the large and small scales are separated by a gap, and test our numerical method by comparing with analytical results available for this case. Section 6 is central for the present work. Here we study three typical problems of the 2D fluid dynamics, decaying turbulence, vortex merger and forced turbulence, and compare the results obtained with the two-fluid method with results obtained by DNS performed at the same and at much higher resolution. We discuss our results and possible applications of our numerical method in section 7.

## 2 Two-fluid model

Consider a two dimensional incompressible inviscid fluid described by the Euler equations

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \text{div}(\mathbf{v}\omega) &= 0, \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\omega = \omega(\mathbf{r}, t) = \text{curl} \mathbf{v}$  is the vorticity. The two-fluid model is derived under the assumption of scale separation and weakness of turbulence compared to the large scales.

$$\begin{aligned} u &= u_L + u_S & \text{with} & & u_L \gg u_S \\ \omega &= \omega_L + \omega_S & & & \lambda_L \gg \lambda_S \end{aligned} \quad (2)$$

where  $\lambda$  is the characteristic scale and  $S$  and  $L$  label the small-scale and large-scale components respectively. In this case, equation (1) can be decomposed into two equations describing the evolution of the large and small scales [1]. Large-scale component obeys the Euler equation with an additional term describing the influence of small scales,

$$\partial_T \omega_L + (\mathbf{v}_L \cdot \nabla) \omega_L + 2 \int (\mathbf{k} \times \nabla)_z \frac{(\mathbf{k} \cdot \nabla)}{k^4} n \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} = 0. \quad (3)$$

Here,  $n(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  is the Wigner function of vorticity which corresponds to a density of the small-scale enstrophy in four-dimensional space  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ . It is defined in terms of the small-scale vorticity as

$$n(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \int \langle \omega_{S,p+k} \omega_{S,p-k} \rangle e^{2i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2}. \quad (4)$$

The symbol  $\langle \cdot \rangle$  denotes an average over the fast time corresponding to the small scales. The Wigner function is a very useful tool for describing interaction of the separated scales in fluids and plasmas, see e.g. [11], [12] and [1].

The equation for the small-scale component involves  $n(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$ . It expresses the fact that total small-scale enstrophy is conserved during the evolution,

$$D_T n = 0, \quad \text{with} \quad \begin{cases} D_T &= \partial_T + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla + \dot{\mathbf{k}} \cdot \partial_{\mathbf{k}}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v}_L, \\ \dot{\mathbf{k}} &= -(\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{v}_L, \end{cases} \quad (5)$$

where  $\partial_{\mathbf{k}}$  is the gradient in the  $\mathbf{k}$ -space. The large scales act on small scales via changing characteristics of equation (5). Small scales, in turn, react back on the large scales via the interaction term in (3). Closed system of nonlinearly coupled equations (3) and (5) will be used in this paper as a basis for the two-fluid numerical method described in the next section. Simple analytical solutions of these equations were found for a vortex dipole propagating through turbulence [1] and for the energy spectra of forced and decaying small-scale turbulence [2]. These analytical solutions will be used in the present paper as a reference for testing the numerical method.

### 3 Numerical method for computing the two-fluid equations

#### 3.1 PIC method for the sub-grid fluid

The small-scale equation (5) is computed by a Particle-In-Cell method (PIC) which is often used for computing plasmas [13]. This method was also used to solve equations similar to (5) in the case of sound-vortex interaction in an isentropic fluid [14]. The PIC method treats the small-scale component as a large ensemble of particles having coordinates  $\mathbf{x}_p(t)$  and momenta  $\mathbf{k}_p(t)$ ,  $p = 1, 2, \dots, N$ . Each particle carries a small fraction of the total enstrophy and moves along a trajectory in  $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  space computed according to the last two equations of (5),

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \mathbf{v}_L(t), \\ \dot{\mathbf{k}}_p(t) &= -(\mathbf{k}_p(t) \cdot \nabla) \mathbf{v}_L(t). \end{cases} \quad (6)$$

The two differential equations (6) are solved via a stable second order Runge-Kutta scheme. The enstrophy density function  $n(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  is expressed as a sum of individual particle contributions,

$$n(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \sum_{p=1}^N \sigma_p(t) \times S_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_p(t)), \quad (7)$$

where  $\sigma_p(t)$  is the enstrophy of particle  $p$  and  $S_x$  is a function describing the particle shape. For such a decomposition of  $n(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$ , the first equation of (5) implies that the enstrophy  $\sigma_p(t)$  of each particle does not change during its motion,

$$\sigma_p(t) = \sigma_p(t_0) = \sigma_p. \quad (8)$$

We have chosen the following shape factor for particles

$$S_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \begin{cases} 4 \frac{(\Delta - |x - x_p|)(\Delta - |y - y_p|)}{\Delta^2} & \text{if } \begin{cases} |x - x_p| < \Delta \\ |y - y_p| < \Delta \end{cases} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (9)$$

where constant  $\Delta$  is the particle ‘‘size’’.

At very high wavenumbers one has to ‘‘dissipate’’ particles by removing them from the system in order to keep the number of particles at a reasonable level and maintain a low computational cost. As we will see later, such dissipation is typically many orders of magnitude smaller than in any high-resolution DNS, which allows us to obtain very wide inertial range in our computations. The particle energy,  $\sigma_p/k^2$ , becomes very small when the particle reaches high wavenumbers, which means that its initial energy has been transferred to the large-scale fluid via the interaction term. Thus, the particles at high  $k$  have no effect on the overall dynamics and can be removed To be

precise, the error associated with removing the particles is very small compared with the error introduced by the other parts of the code. It is also easy to take into account the real viscous dissipation at small-scales by reducing the particle strength in time, as it was done in [2]. In this paper, however, we will not be interested to study the effect of viscosity.

### 3.2 Computing the large-scale fluid

The large-scale equation (3) can be solved in various ways. We used periodic boundary conditions and a pseudo-spectral method for the space variables. This method is fast, accurate and easy to implement [15]. The time marching is done in the Fourier space with a stable second order Adams-Bashford scheme. A detailed description of the numerical procedure can be found in [16].

The interaction term in (3) is computed in the following way,

$$2 \int (\mathbf{k} \times \nabla)_z \frac{(\mathbf{k} \cdot \nabla)}{k^4} n \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} = 2 \{ (\partial_{yy} - \partial_{xx}) I_1(\mathbf{x}, t) + \partial_{xy} I_2(\mathbf{x}, t) \}, \quad (10)$$

where

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{k_x \times k_y}{(k_x^2 + k_y^2)^2} n(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}, \\ I_2(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{k_x^2 - k_y^2}{(k_x^2 + k_y^2)^2} n(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}. \end{cases} \quad (11)$$

Using (7), we have

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{p=1}^N \sigma_p \frac{k_{px}(t) \times k_{py}(t)}{[k_{px}(t)^2 + k_{py}(t)^2]^2} S_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)), \\ I_2(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{p=1}^N \sigma_p \frac{k_{px}(t)^2 - k_{py}(t)^2}{[k_{px}(t)^2 + k_{py}(t)^2]^2} S_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)). \end{cases} \quad (12)$$

Because we solve our large-scale equation by a spectral method, it is convenient to find the interaction term (10) in Fourier space. In Fourier space, finding the second derivatives with respect to the coordinates will simply correspond to multiplication of Fourier transforms of  $I_1(\mathbf{x}, t)$  and  $I_2(\mathbf{x}, t)$  by corresponding wavenumber components. We then apply a low-pass filter to the interaction term in Fourier space to filter out the high-wavenumber part of the interaction term. The reason for doing so is the fact that the interaction term is derived based on the assumption of scale separation and, therefore, it is incorrect for the scales close to the grid size. On the other hand, the nonlocal nature of interaction implies smallness of the interaction of sub-grid scales with intermediate scales compared with their interaction with the large scales, and, therefore, retaining only the large-scale part of the interaction term is justified. The interaction term describes a force on the large-scale fluid produced by the sub-grid component; it is generally much less than the other terms in the large-scale equation. As we will see further, however, this term is very important for conservation of the total energy of the small-scale and large-scale fluids. On the other hand, the interaction term is shown to be precisely equal to zero at any time if  $n(\mathbf{k})$  is isotropic at some particular moment of time [17], for example initially. It is interesting that isotropy is not preserved during the evolution, but the developing anisotropy remains of such a kind that the interaction term is still zero at any time. This happens because the positive contribution of some wavenumbers is canceled by a negative contribution of the other wavenumbers. Note, that an initially isotropic spectrum develops into a spectrum with elliptic level lines, and this is a very special kind of anisotropy responsible for the above property.



### 3.3 Energy conservation

Because of interaction between the large and small scales, the energy can be transferred between the large-scale and small-scale fluids. However, the total energy of the two fluids is conserved [1],

$$E_{total} = E_L + E_S = \int u_L^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{(2\pi)^2} \int n d\mathbf{k} d\mathbf{x} = const. \quad (13)$$

In particle representation one can rewrite the small-scale energy as

$$E_S = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{p=1}^N \frac{\sigma_p}{k_p^2}. \quad (14)$$

It was shown in [17] that the energy of the small-scale and large-scale components are conserved separately if  $n$  only depends on the absolute value of the wavevector at some moment of time. As we mentioned above, the interaction term in the large-scale equation is equal to zero in this case. We use the energy conservation property as one of tests in our computations.

### 3.4 Conversion of the two fluids one into another

In standard DNS approach using pseudo-spectral methods, one has to introduce a dissipation at large wavenumbers to avoid the bottle-neck instability, i.e. piling up the spectrum near the cut-off wavenumber  $k_{max}$  (corresponding to the grid scale, i.e. the smallest scale resolved by the method). Using a steeper than the regular kinematic viscosity dissipation function (hyperviscosity) allows to suppress the bottle-neck instability and at the same time avoids excessive dissipation at larger scales.

In our method we do not use any dissipation to stabilize the pseudo-spectral scheme. Instead, we convert the large-scale component into the sub-grid fluid in the vicinity of the cut-off wavenumber  $k_{max}$ . Thus, the spectrum stagnation leading to the bottle neck instability is avoided by letting the small-scales pass the  $k_{max}$  barrier. Then, the sub-grid fluid is evolved according to its own equation which is computed by the PIC method. Note that one does not need any kind of dissipation for stability of the PIC method, and, therefore, one can compute situations with ultra-high Reynolds number (which can be estimated based on the particle removal scale).

The procedure of conversion from the large-scale fluid into the sub-grid one consist of filtering the large-scale vorticity field at wavenumbers close to the cut-off wavenumber  $k_{max}$ . Then, we consider the difference between the original and the filtered large-scale spectra of enstrophy and create particles with the same distribution in both coordinate and wavenumber space. To do this, we first generate an ensemble of particles, each carrying a small equal amount of enstrophy  $\sigma$  and having a momentum  $\mathbf{k}$ , such that their enstrophy distribution in  $\mathbf{k}$ -space is the same as the enstrophy spectrum of the converted part of the large-scale component. Second, we compute the difference between the un-filtered and filtered large-scale component in the  $\mathbf{x}$ -space, and distribute the new particles randomly in the  $\mathbf{x}$ -space with the weight given by such a vorticity distribution in the  $\mathbf{x}$ -space. Created this way, the particle ensemble has the same projections into the  $\mathbf{x}$ -space and into the  $\mathbf{k}$ -space as would the Wigner function of the converted large-scale vorticity. Direct computation of the Wigner function would be very costly, and the described conversion procedure may be considered as the major approximation made in our numerical model. Besides the enstrophy, the energy is also conserved by our conversion procedure. To achieve a good energy conservation we adjust the particle  $\mathbf{k}$ -space distribution in several iterations.

During the evolution, the wavenumber increases for most of the particles. However, for some particles, the wavenumber may become lower than its original value and reach the scales which are well resolved by the pseudo-spectral procedure. Because of the low wavenumber, the energy of such particles is high and, although there are only relatively few of them present in the system, these particles play an important dynamical role. Thus, these low-wavenumber particles must be converted back into the large-scale component. In our method, this is done by increasing the amplitude of the Fourier component of the large-scale fluid at  $\mathbf{k}$  corresponding to the particle's wavenumber in such a way that this increase would exactly reflect the amount of the particle's

energy and enstrophy. We leave the phase of this Fourier component unchanged which makes it easier to conserve energy and enstrophy simultaneously during such a conversion procedure.

### 3.5 Summary of runs

In table 1 we summarize for reference different runs which will be discussed in this paper. Below we describe relevant details of these runs.

(i) The initial stream function of the vortex dipole in run 1 is  $\psi(x, y) = \frac{1}{4\pi R} \ln \frac{x^2 + (y-R)^2}{x^2 + (y+R)^2}$  which is smoothed in the coordinate space to avoid dealing with the point-vortex singularities in the large-scale field. In this run, the particles are initially located on the straight line  $x = 0$ .

(ii) In all the runs starting with a random large-scale vorticity the initial energy spectrum is  $E(k) = C \cdot k \cdot e^{-(\frac{k}{k_0})^2}$  with  $k_0 = 4$  and  $C = 1$ .

(iii) By writing the initial number of particles as a product  $N_x \times N_k$ , we mean that we put  $N_k$  particles at each of  $N_x$  locations in the coordinate space, so that there is a wavenumber distribution of  $N_k$  particles at each of these locations.

(iv) In runs 1 and 5, by isotropic particle distribution we mean that the particle distribution is initially concentrated of the circle  $|\mathbf{k}| = k_p = 1000$  in the wavenumber space as shown on the insert of figure 16. In run 3 the particle distribution is initially concentrated of the circle  $|\mathbf{k}| = k_p = 100$ . By anisotropic initial distribution we mean a distribution on an 8-shaped curve shown on the insert of figure 17.

(v) By HDNS we mean a pseudo-spectral method with hyperviscosity  $k^{16}$ .

Run	Type/Grid	Large-scale initial conditions an forcing	Particle initial conditions and forcing			Interaction term
			Number	Shape $\mathbf{x}$	Shape $\mathbf{k}$	
$N^\circ 1$	2F128 <sup>2</sup>	dipole	$8 \times 1000$	on a line	isotropic	off
$N^\circ 2$	2F128 <sup>2</sup>	random field	2000000	uniform	Gaussian	off
$N^\circ 3$	2F128 <sup>2</sup>	random field	$4096 \times 500$	uniform	isotropic	off
$N^\circ 4$	2F128 <sup>2</sup>	random field	0		forced at $k = 1000$	off
$N^\circ 5$	2F128 <sup>2</sup>	random field	$16384 \times 36$	uniform	isotropic	on
$N^\circ 6$	2F128 <sup>2</sup>	same as $N^\circ 5$	$16384 \times 36$	uniform	anisotropic	on
$N^\circ 7$	2F128 <sup>2</sup>	random field	0			on
$N^\circ 8$	2F256 <sup>2</sup>	2 vortices	0			on
$N^\circ 9$	2F256 <sup>2</sup>	no field, forced at $k=40$	0			on
$N^\circ 10$	HDNS128 <sup>2</sup>	same as $N^\circ 7$	N/A	N/A	N/A	N/A
$N^\circ 11$	HDNS1024 <sup>2</sup>	same as $N^\circ 7$	N/A	N/A	N/A	N/A
$N^\circ 12$	HDNS256 <sup>2</sup>	same as $N^\circ 8$	N/A	N/A	N/A	N/A
$N^\circ 13$	HDNS1024 <sup>2</sup>	same as $N^\circ 8$	N/A	N/A	N/A	N/A
$N^\circ 14$	HDNS256 <sup>2</sup>	same as $N^\circ 9$	N/A	N/A	N/A	N/A
$N^\circ 15$	HDNS1728 <sup>2</sup>	same as $N^\circ 9$	N/A	N/A	N/A	N/A

Table 1: Description of runs discussed in this paper

## 4 Particle dynamics

Let us discuss some basic features of the small-scale dynamics. In the coordinate space, the particles are advected by the local velocity of the large-scale component, see (5). Thus, particles can be mixed in the coordinate space or be trapped into the large-scale vortices. This property is illustrated in figure 2 showing different particle trajectories in the field of a vortex dipole having the stream function depicted in figure 1 (run 1 in table 1). We see that 1, 8 and 2 are not trapped,

whereas particles 3,4,5 and 7 are trapped and dragged by vortices. Particle 1 is on a special trajectory including a stagnation point, to which it is approaching at a decreasing rate.

Equation for the wavenumber, i.e. the last equation in (5), is linear with respect to  $\mathbf{k}$ . Therefore, its solution for arbitrary initial wavenumber  $\mathbf{q}$  can be represented as a linear combination of two solutions obtained for just two different initial wavevectors forming a basis [17], [2]. An important consequence of this fact is that the level lines of an initially isotropic distribution of particles  $n_0(|q|, \mathbf{x})$  will be transformed from circles to ellipses [1], [17], [2]. The rate at which the ellipse aspect ratio is increasing depends on the local strain of the large-scale field. Figures 3 and 4 show the time evolution of the ellipses in  $\mathbf{k}$ -space for the particles located on trajectories 3 and 4 in figure 2 respectively. We see that initially isotropic distribution becomes anisotropic much slower for the trajectory 4, because it is trapped near the vortex center where the large-scale motion is approximately just a uniform rotation (plus translation). Note that the ellipse areas are not changing because of the incompressibility of motion in  $\mathbf{k}$ -space [17], [2]. This serves as a good test for the PIC code used in our simulations. Conservation of the ellipse areas also means that a wavenumber increase for some particles will always be accompanied by a wavenumber decrease for other particles if the initial particle distribution is isotropic.

Second example illustrating properties of the particle dynamics is evolution of a particle ensemble having initial Gaussian distribution in the wavenumber space and uniform distribution in the coordinate space (run 2 in table 1). We take random initial distribution of large-scale vorticity for this run. In this simulation, we ignore small scales feedback onto the large-scale fluid (the interaction term) and turn off the conversion between the small-scale and large-scale components assuming that there is a spectral gap between these two components. Note that under these conditions dynamics of the small-scale vorticity is identical to the passive scalar dynamics in Batchelor's regime (i.e. passive scalar advected by a smooth velocity field).

For random-vorticity initial conditions, a chaotic motion of particles in the coordinate space may be expected [18]. This behavior is illustrated in figures 5 and 6 which show the evolution of 50000 particles in the  $(x, y)$  space. At  $t = 0$  these particles were in a narrow strip in the  $(x, y)$  space,

$$\begin{cases} -\pi \leq x \leq -\pi + \delta x, \\ -\pi \leq y \leq +\pi. \end{cases} \quad (15)$$

However, particles cannot cross separatrix and remain outside the vortex cores, as clearly seen at late time shown in figure 6.

The initial Gaussian distribution of particles in  $\mathbf{k}$ -space (run  $N^{\circ}2$ ) is isotropic on average, see figure 9. At a later time, smaller vortices in the large-scale component have merged into bigger ones (Fig.8). This creates some preferred directions of the large-scale shear which are reflected in the particle distribution in the  $k$  space (Fig. 10) because particle wavenumbers tend to align with the large-scale shear. Note also a significant spreading of the particle distribution in  $\mathbf{k}$ -space. If we plot the probability distribution of just one wavenumber component, e.g.  $k_x$ , we see that the initially Gaussian profile (Fig. 11) turns later into a distribution close to log-normal (Fig.12). This result is in agreement with the analytical results of Kraichnan [19] about statistics of derivative of a passive scalar, obtained with a rapidly varying velocity field (white noise, delta correlated in time). The deviations with respect to the log-normal distribution observed in the tail of the distribution can be traced to correlations in the large scale velocity field, which induce a larger intermittency. Such result was also discussed in [19], and can be quantified using the large deviations theory (see e.g. [20]).

## 5 Turbulence with a spectral gap

In this section we continue to study the case when there is a spectral gap between the large-scale and small-scale components. Such a gap has been observed, for example, in the spectrum of horizontal velocity in the atmospheric boundary layer, for periods between a few minutes and a few hours, under special conditions [21]. Other situations where the spectral gap is observed in nature were discussed in [22], where an EDQNM approach was used to describe 3D turbulence dynamics.

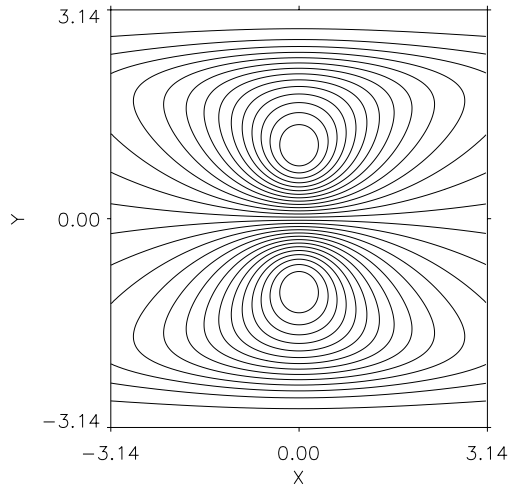


Figure 1: Stream function of the vortex dipole moving to the right with velocity  $u_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R}$  (run  $N^{\circ}1$ ).

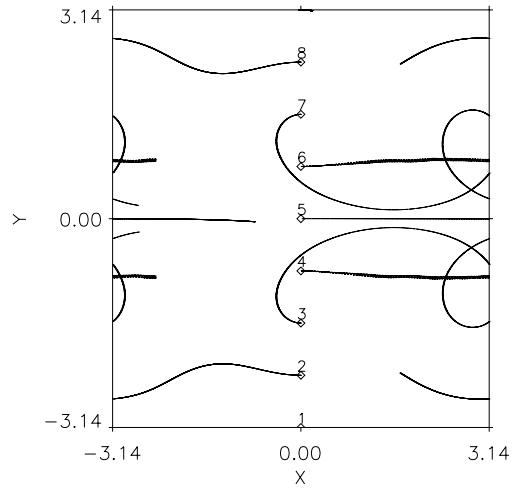


Figure 2: Particle trajectories in the dipole field (run  $N^{\circ}1$ ).

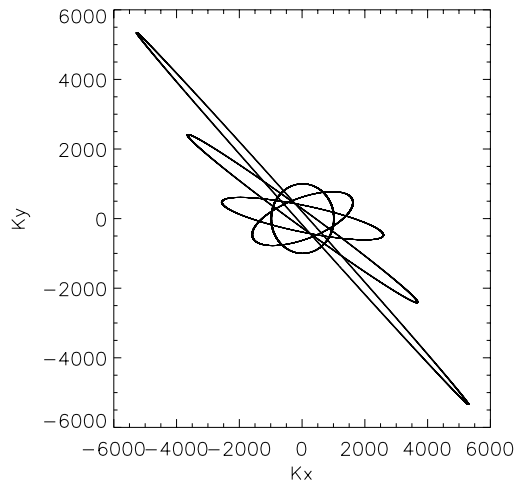


Figure 3: Wavenumber distribution of 1000 particles which were initially located at position 3 in the coordinate space. Initial circle becomes an ellipse due to the large-scale shear (run  $N^{\circ}1$ ).

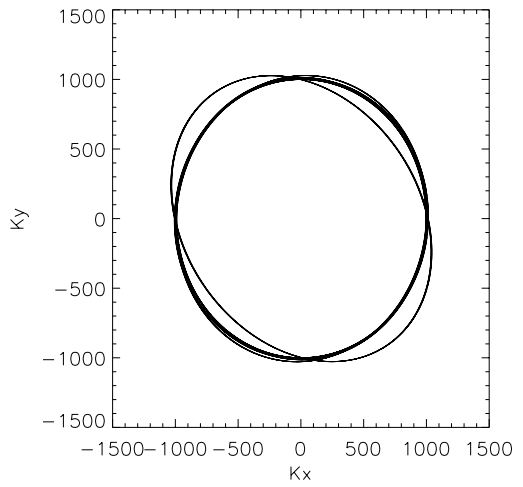


Figure 4: Wavenumber distribution of 1000 particles which were initially located at position 4 in the coordinate space (run  $N^{\circ}1$ ). The circle is only weakly stretched because the shear at the vortex center is less significant.

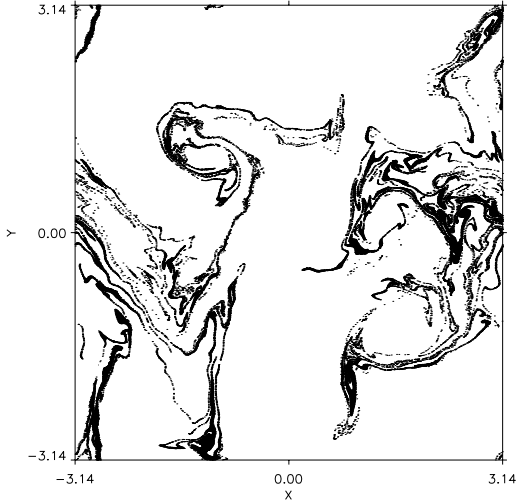


Figure 5: Coordinates of 50000 particles initially located in a strip  $-\pi \leq x \leq -\pi + \delta x$  shown at time  $t=5$  (run  $N^{\circ}2$ )

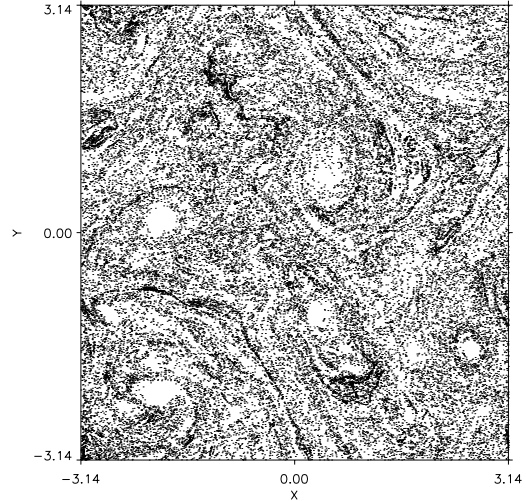


Figure 6: Position of the same 50000 particles as in figure 5 at  $t=25$ . After a long time, particles are mixed by turbulence except at the vortex cores (run  $N^{\circ}2$ ).

For our purposes the spectral-gap case is important also because there exist exact analytical results which may be used to test our numerical model.

First, we will concentrate only on the small-scale dynamics and consider decaying and forced small-scale turbulence. In this part, the large-scale fluid will be completely decoupled from the small-scale component and computed without the interaction term and without converting one fluid into another. This approach is valid for weak small scales which are well separated from the large scales in  $\mathbf{k}$ -space. To suppress the bottle-neck instability, we will have to introduce a hyperviscosity into the large-scale dynamics.

Second, we will consider stronger small scales and narrower spectral gaps to study the feedback of the small scales onto the large-scale fluid. We will use the procedure of conversion between the components to avoid using hyperviscosity in large scales and thereby to improve the conservation of energy and enstrophy. We will also take into account the interaction term for computing the large-scale fluid. Both the conversion procedure and the interaction term will be important, because our main focus in this part will be on studying the energy budget and transfers of energy between the large-scale and small-scale fluids.

## 5.1 Decaying small-scale turbulence

Let us introduce the small-scale energy spectrum which is obtained by integrating the density of the particle energy over the angle  $\theta$  (where  $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ ) and over the  $\mathbf{x}$  space,

$$\hat{E}(k) = \int \frac{n(x, y, k, \theta, t)}{k^2} k d\theta dx dy, \quad (16)$$

so that the total energy of the small-scale fluid is

$$E_S = \int \hat{E}(k) dk. \quad (17)$$

Using the particle representation (7),  $\hat{E}(k)$  can be written as a sum of the individual particle energies,

$$\hat{E}(k) = \frac{1}{dk} \sum_{k-dk/2 < |k_p| < k+dk/2} \frac{\sigma_p}{k_p(t)^2}, \quad (18)$$

where  $dk$  is a small number.  $dk \ll k$ , but large enough for having many particles in the interval  $k - dk/2 < |k_p| < k + dk/2$ .

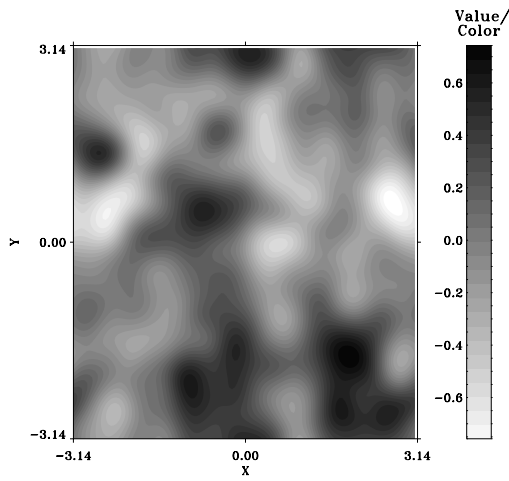


Figure 7: Initial large-scale stream function for run  $N^2$ . The maximum of the energy spectrum is at  $k \approx 4$ .

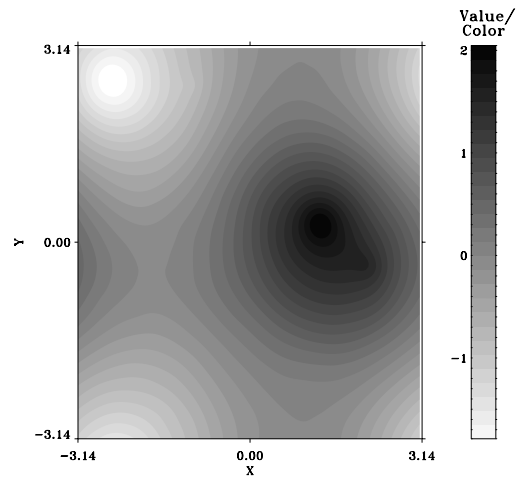


Figure 8: Large-scale stream function at  $t = 50$  for run  $N^2$ . Small vortices have merged into bigger ones and the large-scale field has become essentially anisotropic

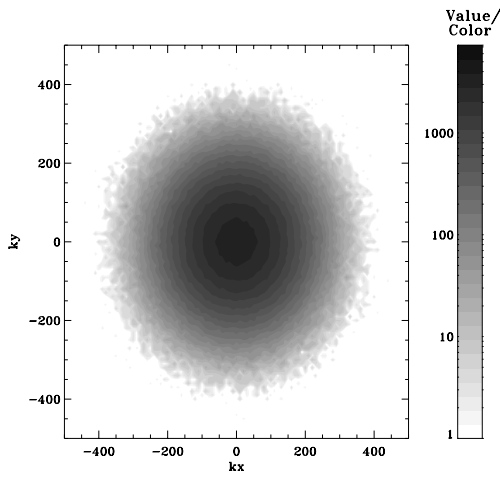


Figure 9: Initial Gaussian distribution of particles in the  $\mathbf{k}$  space for run  $N^2$ .

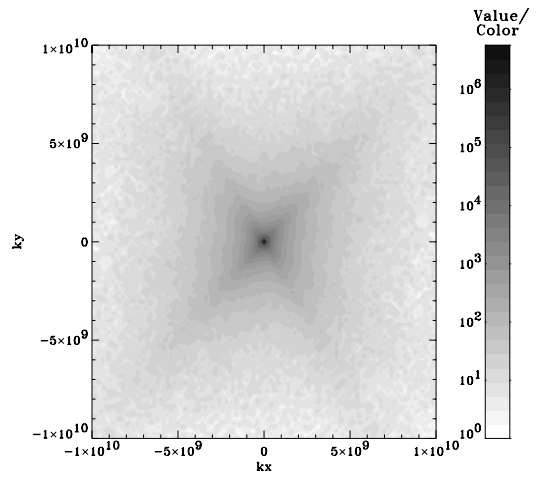


Figure 10: (run  $N^2$ ) Density of particles in the  $\mathbf{k}$  space at  $t = 50$ . Note an anisotropy caused by existence of preferential directions for the large-scale shear.

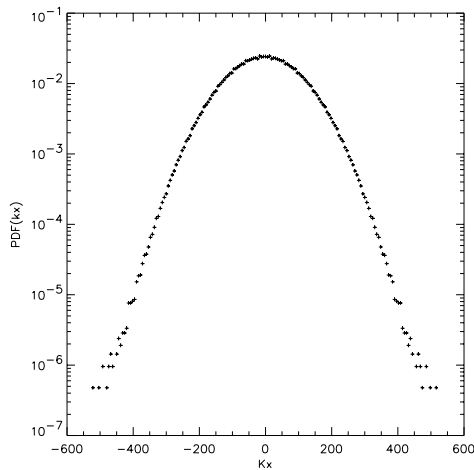


Figure 11: (run  $N^2$ ) Distribution of particles on the  $k_x$  axis at  $t = 0$  (Gaussian distribution with  $\sigma = 100$ )

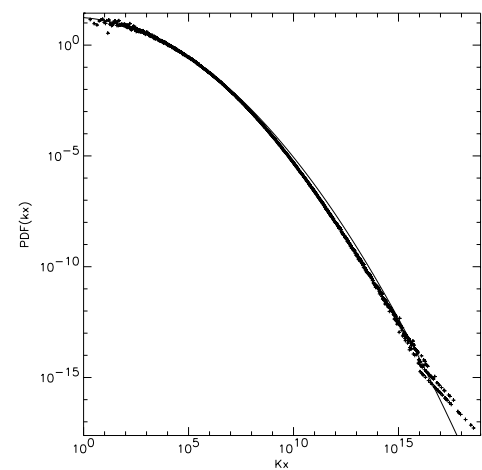


Figure 12: (run  $N^2$ ) Distribution of particles on the  $k_x$  axis at  $t = 50$ . The best fit with a log-normal distribution is shown with a continuous line.

According to an asymptotical analytical solution for decaying small-scale turbulence obtained in [2], the small-scale spectrum, initially concentrated around some scale  $|\mathbf{k}| = k_p$ , will tend to a power law shape,

$$\hat{E}(k) \propto k^{-2}.$$

The -2 slope is predicted in a wavenumber range centered at  $k_p$ , which is widening with time. Figure 13 shows the energy spectrum of freely decaying small-scale turbulence obtained by numerical computation with initial distribution of small scales concentrated on a ring in  $\mathbf{k}$ -space,  $n \propto \delta(|k| - k_p)$  with  $k_p = 100$  (run 3 in table 1). We see that -2 slope is indeed observed in a widening range of wavenumbers centered at  $k_p = 100$ , whereas a steeper slope is observed for higher wavenumbers.

## 5.2 Forced small-scale turbulence

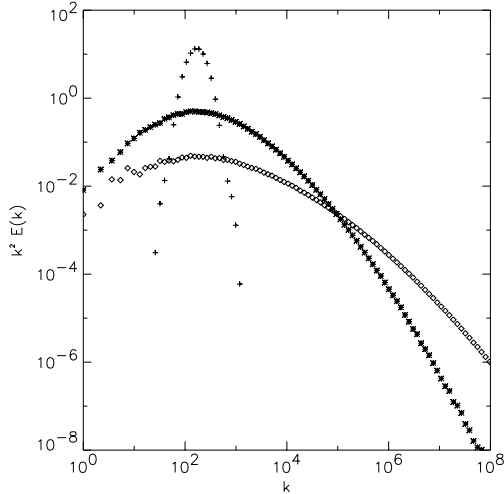
Consider now the case when particles are injected at the circle  $|\mathbf{k}| = k_p = 1000$  in  $\mathbf{k}$ -space at a constant rate (run 4 in table 1). Then, formation of a stationary spectrum is expected for the small-scale turbulence nonlocally interacting with the large-scale component [2]. This spectrum has -1 exponent for wavenumbers less than  $k_p$  and -3 exponent for  $|\mathbf{k}| > k_p$ . The -1 range corresponds to a constant flux of the small-scale energy to lower wavenumbers, and the -3 range corresponds to the enstrophy flux. As noted in [2], the spectral exponent for the nonlocal enstrophy flux spectrum is the same as in case of the local cascade (i.e. -3) whereas the slope corresponding to the nonlocal energy flux is different from the one corresponding to a local energy cascade (-1 versus -5/3).

In our numerical computations of forced small-scale turbulence we start with no particles and add 16000 particles every 10 time steps (corresponding to a time  $t = 2.5 \times 10^{-3}$ ). The added particles have a uniform distribution in the coordinate space and are distributed on a circle with a radius  $k_p = 1000$  in the  $\mathbf{k}$  space. Fig. 14 shows the small-scale energy spectrum at three different moments of time. At wavenumbers larger than the injection wave number, the spectrum tends to the  $k^{-3}$  shape, and at wavenumbers smaller than  $k_p$  we observe formation of the  $k^{-1}$  spectrum, which agrees with analytical results of [2].

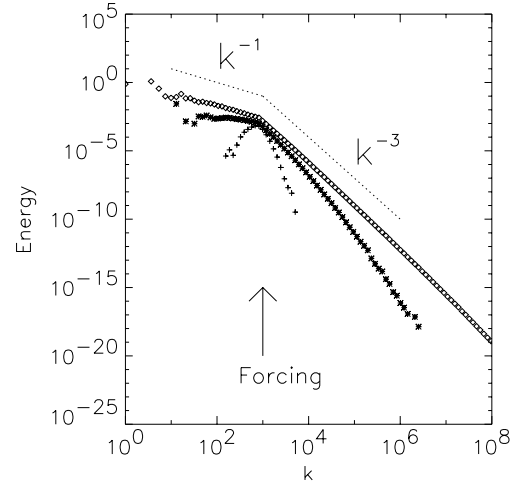
## 5.3 Interaction of the small-scale and large-scale fluids

Now we would like to study the nonlinear feedback of the small-scale component onto the large-scale one. For this, we compute the two-fluid equations with both the interaction term and the conversion between the two components turned on. In the simulations described in this section, the minimal initial particle wavenumber is about 20 times greater than the the smallest one of the large scales, and the total particle energy is about 20% of the large-scale energy. We simulate decaying turbulence case with random initial large scales and small scales distributed uniformly in the coordinate space with initial  $\mathbf{k}$ -space distribution on a circle shown on the insert of figure 16 (run 5) or on an 8-shaped curve shown in the insert of figure 17 (run 6). Principal difference in these two situations is that, in one of them, the initial spectrum of small scales is isotropic, whereas, in the other one, the small scales are essentially anisotropic. It was shown analytically in [17] that the energy will be conserved by both small-scale and large-scale components independently of each other in case when the initial small-scale spectrum is isotropic, whereas the energy can be transferred between the components for anisotropic initial spectra. Furthermore, it was shown that the interaction term in the large-scale equation is identically equal to zero for all times if the initial small-scale spectrum is isotropic in  $\mathbf{k}$ -space and uniform in  $\mathbf{x}$ -space.

Figure 15 shows the evolution of the mean square of the interaction term in runs 5 and 6. In the beginning, as expected, the interaction term is much stronger for the anisotropic initial small-scale spectrum (run 6) than for the isotropic one (run 5). However, for  $t > 0.2$  the magnitude of the interaction terms becomes of the same order for both cases. This is because the discretisation in  $x$  and  $k$  space with a finite number of particles makes the distribution in the "isotropic" case be slightly anisotropic, and the role of such an anisotropy grows in time. Figure 18 shows the large-scale stream function at  $t = 0.2$  for run 6, and figure 19 shows the interaction term as a function of coordinate for the same run at the same time. We see that maximum of interaction is strongly correlated with position of strong vortices in the large-scale field.



**Figure 13:** Compensated energy spectrum of freely decaying small-scale turbulence at three different moments of time obtained in run  $N^\circ 3$ . There is an initial spectral gap between large and small scales in this simulation. Observe formation of a  $k^{-2}$  range widening around the initial wavenumber  $k_p = 100$ .



**Figure 14:** Energy spectrum of small-scale turbulence forced at  $k_p = 1000$  at three different times as obtained in run  $N^\circ 4$ . Turbulence is assumed to be strongly nonlocal in this case. Observe formation of the  $k^{-1}$  spectrum which corresponds to an inverse nonlocal flux of energy and the  $k^{-3}$  enstrophy flux spectrum which extends over a very wide wavenumber range

The Fig. 16 shows the energy budget for the small and large scales in run  $N^\circ 5$ . As predicted [17], the energy exchange is negligible at the beginning. On the other hand, some energy exchange between the two fluids appears at about  $t = 0.3$ , which is related with deviations from perfect isotropy in the initial distribution, as explained above. One can see that the exchanged energy is very small compared to the total energy of the system (less than 0.06%). For the simulation with initially anisotropic small scales (run 6), the energy exchange starts at a finite rate from  $t = 0$ , see figure 17. As expected, the energy exchange is much greater than in the isotropic case; it is about 2% of the total energy. The error on the total energy conservation is less than 10% of the energy exchanged.

## 6 The two-fluid model versus DNS

In this section we concentrate on the main goal of this paper, namely using the two-fluid method for solving several typical problems of the 2D fluid dynamics without any spectral gap present in the system. In particular, we will test performance of the two-fluid numerical method by comparing it to pseudo-spectral DNS with hyperviscosity (HDNS) at the same level of resolution (and approximately same use of computing resources) and at a much higher resolution HDNS. We chose the following three test problems which are frequently computed by other methods: vortex merger, turbulence decay and forced turbulence.

### 6.1 Decaying turbulence

To simulate decaying 2D turbulence by the two-fluid method, we start with a random initial large-scale component having the energy spectrum shown in fig. 22 and with no sub-grid (particle) component initially present in the system. Then, evolution of the large-scale component will lead to formation of a  $k^{-3}$  tail at high wavenumbers corresponding to a down-scale enstrophy cascade. At the time when this tail reaches the cut-off wavenumber  $k_{max}$ , some part of the large-scale component starts being converted into particles by the procedure described in section 3.4. Note that if we did not convert large scales into particles near  $k_{max}$ , we would observe an accumulation of turbulence near  $k_{max}$ , because no dissipation (hyperviscosity) is used in the two-fluid method



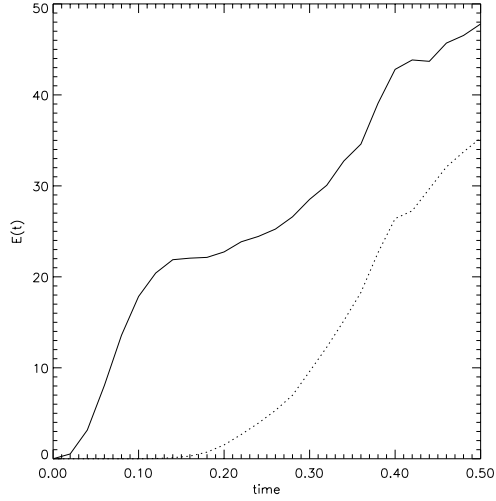


Figure 15: Mean square of the interaction term as a function of time for the case of initially isotropic small scales (run N°5, dashed line) and initially anisotropic small scales (run N°6, solid line).

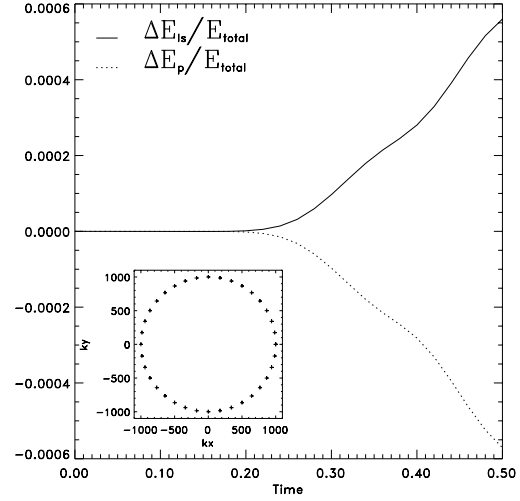


Figure 16: Variations in the small-scale and large-scale energies,  $(\Delta E_S/E_{total})$  and  $(\Delta E_L/E_{total})$  in the case of initially isotropic small scales (run N°5). Insert shows the initial particle distribution in the wavenumber space.

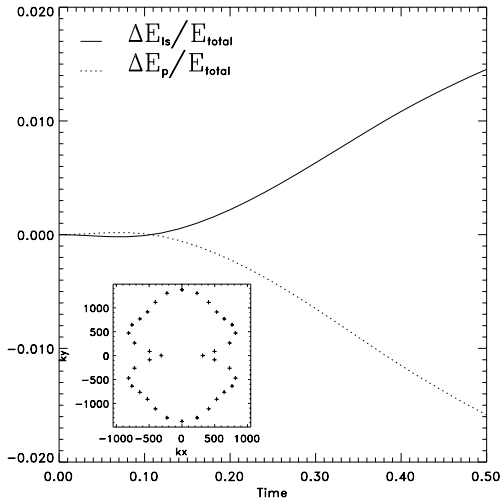


Figure 17: Variations in the small-scale and large-scale energies,  $(\Delta E_S/E_{total})$  and  $(\Delta E_L/E_{total})$  in the case of initially anisotropic small scales (run N°6). Insert shows the initial particle distribution in the wavenumber space.

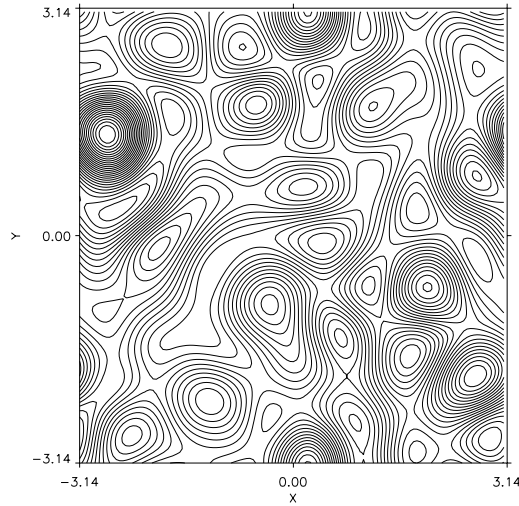


Figure 18: Stream function of the large-scale vorticity field at  $t = 0.2$  for run  $N^6$

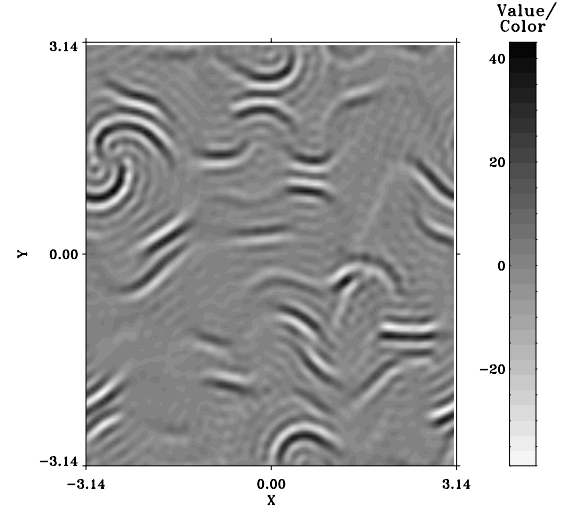


Figure 19: Interaction term describing the feedback of particles onto the large-scale fluid as obtained in run  $N^6$  at  $t = 0.2$ . Note a strong correlation with positions of large vortices shown in Fig. 18.

to suppress the bottle-neck instability. Thus, by converting the large scales into particles we let the enstrophy to pass the  $k_{max}$  barrier and to continue its down-scale flux in the sub-grid fluid computed by the PIC method. The energy budget of the large-scale and small-scale components in this simulation is shown in figure 20. The growth of the small-scale energy and an equal energy decrease in large scales seen in 20 for  $t < 5$  corresponds to the conversion of the large-scale fluid into particles when the  $k^{-3}$  tail reaches  $k_{max}$ . Particles take over the  $k^{-3}$  energy distribution and continue it for about three decades more in the subgrid-scale range, as seen in figure 23 which shows the wavenumber energy distribution for both large-scale and small-scale components at  $t = 40$ .

It is interesting that after initial growth associated with unsteady formation of the  $k^{-3}$  distribution, the small scales transfer their energy back into the large-scale component, see figure 20. Such a nonlocal up-scale energy transfer proceeds with preservation of the  $k^{-3}$  shape of the small-scale energy spectrum (the amplitude of which will be of course decreasing). In other words, the energy flux continues to be directed up-scale even when the interaction becomes strongly nonlocal, and there is always a  $k^{-3}$  range associated with a down-scale enstrophy flux. The spectral flux of enstrophy slows down because of depletion of the enstrophy reservoir in decaying turbulence, and this corresponds to the decrease of the total amplitude of the  $k^{-3}$  spectrum.

Figure 20 shows also change in the sum of energies of the large-scale and the small-scale components associated with a numerical error. As we see, the energy non-conservation is very small compared to the total energy of the system. It is also small enough compared to the energy exchanged between the components. To illustrate importance of the interaction term for conservation of total energy we performed a simulation of decaying turbulence by the two-fluid method with interaction term switched off. The results for the energy budget in the large and small scales and the numerical error in this run are shown in figure 21. One can see that the numerical error is significantly greater in this case than in the case with the interaction term taken into account, and it very quickly becomes comparable to the exchanged amount of energy.

As a test for the two-fluid method, we performed two HDNS using a pseudo-spectral method with hyperviscosity starting with identical initial conditions. One of these simulations was performed at the same resolution as the large-scale part of the two-fluid method ( $128^2$ ) and it required comparable amount of computing resources. Another simulation was performed at  $1024^2$  which requires much greater computational power. Energy spectra obtained in these two HDNS are plotted in figure 27 together with the energy spectrum obtained in the two-fluid simulation (sum of the large-scale and small-scale spectra). One can see that the spectrum obtained by the low-

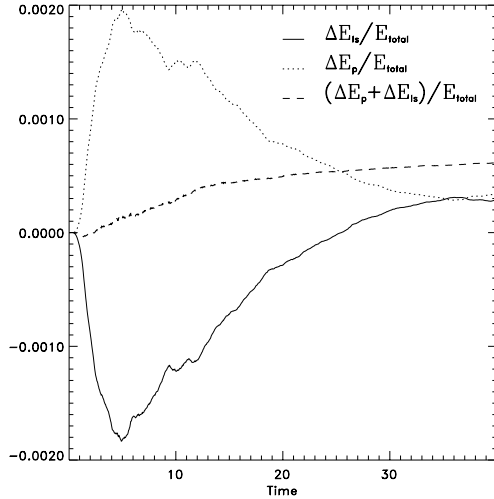


Figure 20: (run  $N^7$ ) Decaying turbulence: small-scale energy  $E_S/E_{total}$ , variations in the large-scale energy  $\Delta E_L/E_{total}$  and the error  $(\Delta E_L + E_S)/E_{total}$  (run  $N^7$ ).

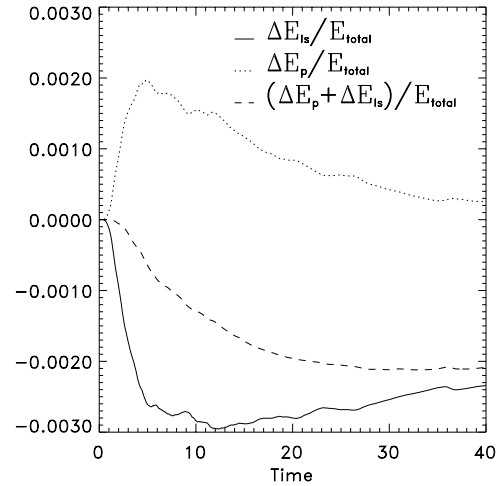


Figure 21: Decaying turbulence with the interaction term switched off: small-scale energy  $E_S/E_{total}$ , variations in the large-scale energy  $\Delta E_L/E_{total}$  and the error  $(\Delta E_L + E_S)/E_{total}$  (run  $N^7$  without the interaction term).

resolution HDNS is dissipated by hyperviscosity at much larger scales than both spectra obtained by the high-resolution HDNS and the two-fluid method. The two-fluid method gives practically identical spectrum as the high-resolution HDNS until the scale where the hyperviscous numerical dissipation makes the HDNS spectrum decay. Furthermore, it continues continuously on  $-3$  slope much further beyond the hyperviscous scale making the enstrophy inertial range about two decades wider than in the high resolution HDNS; see figure 23. Thus, we see that the  $128^2$  two-fluid method can perform as good as  $1024^2$  pseudo-spectral method and even over-perform it in describing the small-scale turbulence spectra. It is also important to note that the spectrum obtained by the two-fluid simulations is clearly continuous at the cut-off scale  $k_{max} = 42$ . Thus, there is a good matching at the interface scale between the two components which are computed by drastically different numerical procedures, and there is no significant numerical error associated with the choice of  $k_{max}$  (resolution). Finally, we compared our decaying energy spectra with the "classical" self-similar law of Batchelor [23] in all three cases. We did not obtain a self-similar collapse of the energy spectra in any of the three cases. This is in agreement with a recent detailed numerical study of Bartello and Warn [24] which indicates that Batchelor's similarity hypothesis fails to describe high-order moments of the vorticity distribution. They attribute this failure to the existence of a second rugged invariant, which can be either associated with the support of the vorticity density or the amplitude of the strongest vortices.

From the point of view of LES, it is important also to see whether a particular way of subgrid-scale modeling helps to better describe dynamics of large eddies. Figures 24, 26 and 25 show the large-scale vorticity field obtained by the high-resolution HDNS (only  $128^2$  modes corresponding to the large scales are shown), low-resolution HDNS and low-resolution two-fluid method respectively at  $t = 10$ . One can see that all three pictures are very similar, so that it is not clear if the large eddy dynamics is simulated better by the two-fluid method than by the pseudo-spectral method at equal resolution in this particular case. Similar comparison is somewhat more conclusive in the case of vortex merger problem discussed in the next section.

## 6.2 Vortex merger

Simulation of merging of two vortices having the same sign is a good test for our two-fluid model because we can compare both the characteristics of large structures, like the size and rotation speed of the final vortex, and the small-scale component including vorticity filaments. We chose

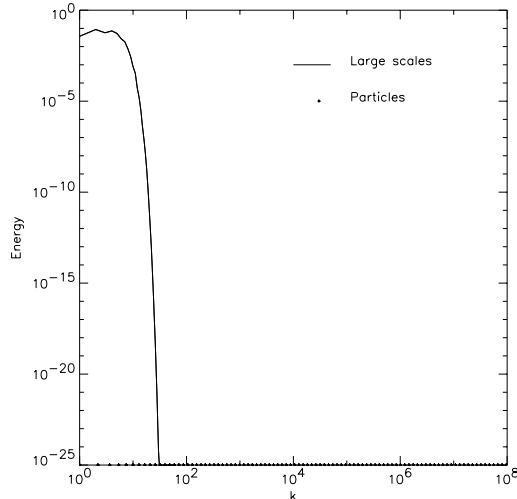


Figure 22: The initial large-scale energy spectrum for run  $N^\circ 7$ . There is no particles at  $t=0$ .

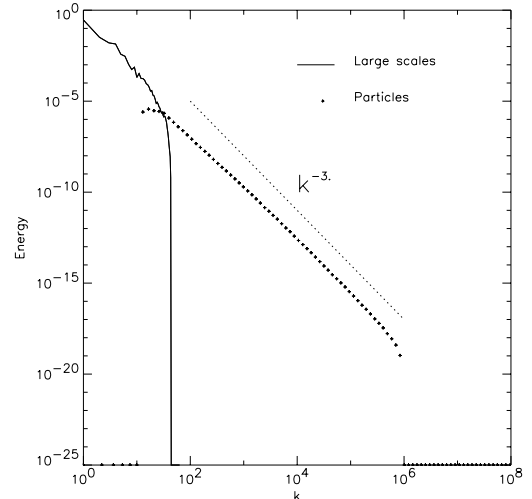


Figure 23: (run  $N^\circ 7$ ) Energy spectra of for the large-scale and subgrid (small-scale) fluids in decaying turbulence at  $t = 40$ . The fluids are converted one into another near  $k = 40$  which corresponds to the maximal resolved wavenumber in this simulation.

the following initial vorticity field representing the two vortices separated by a distance  $\delta$ , and with individual vorticity distribution [25],

$$\omega(r, \theta) = \frac{1}{2}\omega_0 \{1 - \tanh[(r - R_0)/\Delta]\}. \quad (19)$$

In our simulations  $R_0 = 0.05 \times 2\pi$ ,  $\omega_0 = 100.$ ,  $\Delta = 0.01$  and  $\delta = 0.15 \times 2\pi$ . The initial vorticity field is shown in Fig. 28, and the corresponding energy spectrum is given in Fig. 29. As in the case of decaying turbulence, we performed three simulations with the same initial conditions: HDNS at  $1024^2$  and  $256^2$  resolutions (pseudo-spectral method with hyperviscosity) and a two-fluid simulation at  $256^2$  resolution, which correspond to the runs 12, 13 and 8 in table 1. Typical computing time on a Sun workstation is six days, six hours and two hours for the high-resolution HDNS, low-resolution HDNS and the two-fluid simulation respectively. The energy spectra obtained by these three simulations are shown in Fig. 6.2. We see that the low-resolution two-fluid simulation reproduces the result obtained by a high-resolution HDNS very well for all wavenumbers up to the numerical dissipation scale of the HDNS method. In contrast, the HDNS performed at the same resolution as the two-fluid simulation exhibits a spectral decay at much lower  $k$  because of the hyperviscosity and a lower cut-off wavenumber. Most likely, the results obtained by the two-fluid method are reliable even for the scales which are much less than the cut-off scale of the high-resolution HDNS. This is related with almost exact enstrophy conservation built in the two-fluid method, whereas the pseudo-spectral methods must dissipate enstrophy via hyperviscosity for their stability. Note that the spectrum is continuous at the cut-off  $k_{max} = 85$ , which serves as a boundary between the resolved and sub-grid fluids computed by completely different numerical procedures.

Let us compare now results for the large-scale dynamics in real space obtained by the three different simulations described above. Figure 30 compares the results for the vorticity field in the central region which is  $1/16$  of the total computation domain. For the  $1024^2$  results, we showed only  $256^2$  modes corresponding to the large-scale field. Filaments of positive vorticity are well defined in the high-resolution HDNS. One can see that these filaments are better defined in the two-fluid  $256^2$  simulation than for the HDNS performed at the same resolution. One of the reasons for this result is that excessive hyperviscosity dissipates filaments in the  $256^2$  HDNS. Another, possibly more important reason, is that the particles produced at a high-gradient regions, associated with filaments, remain a part of the filamentary structure, because both particles and the filaments are

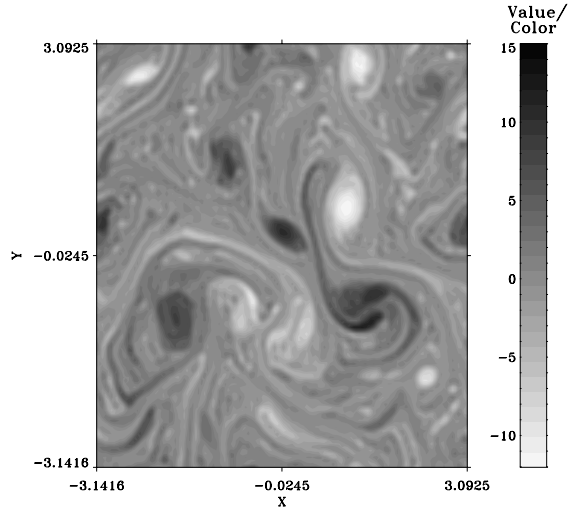


Figure 24: The large-scale vorticity field in decaying turbulence at  $t = 10$  for HDNS1024<sup>2</sup> (run N°11). Only 128<sup>2</sup> modes are shown to retain the same range of scales as in figures 25 and 26

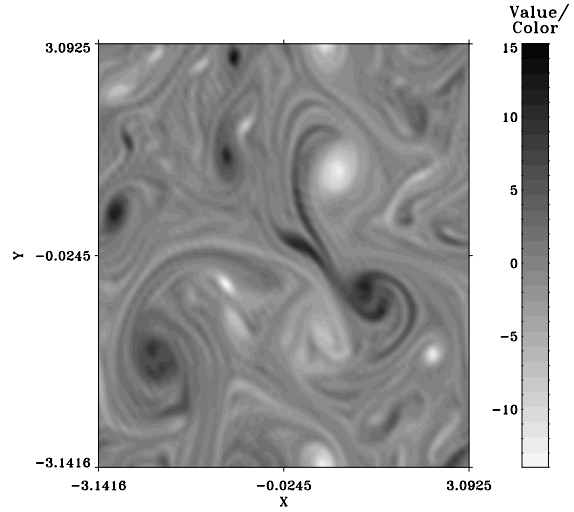


Figure 25: The large-scale vorticity field in decaying turbulence at  $t = 10$  for a two-fluid simulation on the 128<sup>2</sup> grid (run N°7).

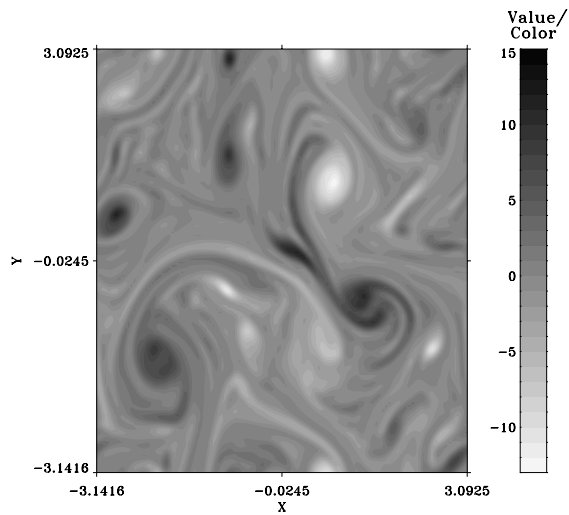


Figure 26: The large-scale vorticity field in decaying turbulence at  $t = 10$  for HDNS on the 128<sup>2</sup> grid (run N°10).

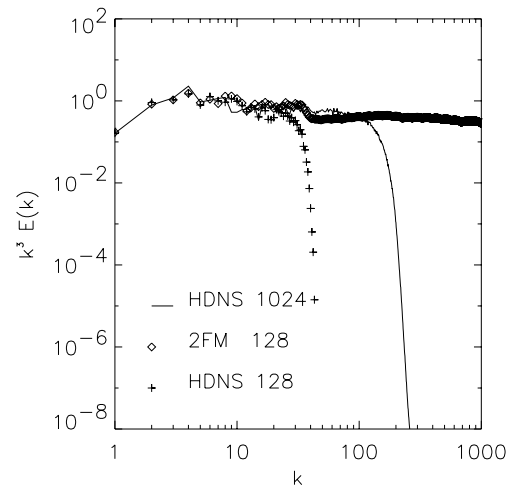


Figure 27: Compensate energy spectra of decaying turbulence obtained by HDNS1024<sup>2</sup> (run N°11, solid line), HDNS128<sup>2</sup> (run N°10, marked by +) and a two-fluid simulation on the 128<sup>2</sup> grid (run N°7, circles).

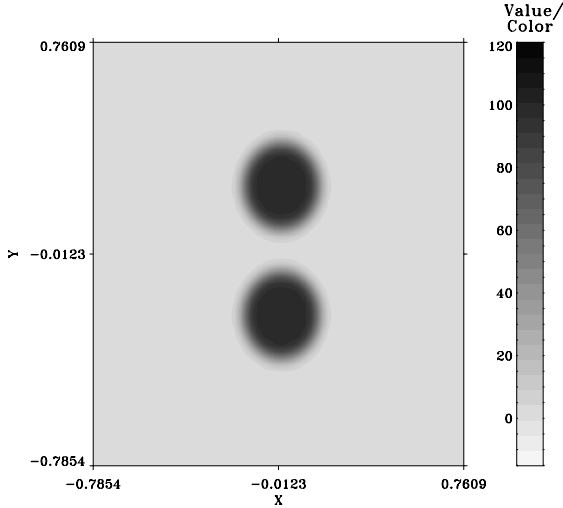


Figure 28: Initial vorticity field for the vortex merger problem, runs  $N^{\circ}8, 12$  and 13.

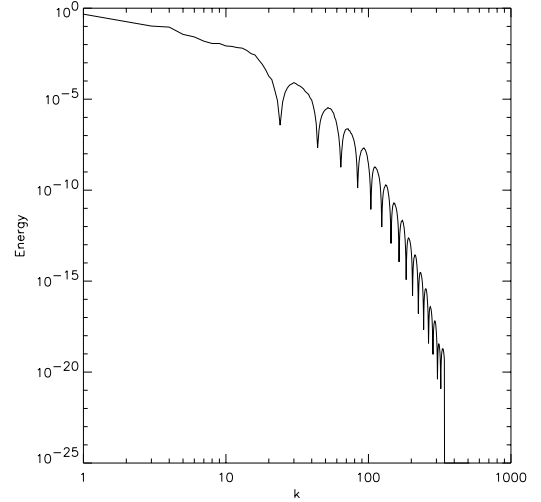


Figure 29: Initial energy spectrum in the vortex merger problem, runs  $N^{\circ}8, 12$  and 13.

advected with the same speed. Remaining on the filaments (see figure 32) these particles produce a selective forcing of the large-scale flow at the position of filaments via the interaction term which acts to oppose the diffusion of filaments. Note also that the orientation of the final vortex obtained by the two-fluid method is closer to the  $1024^2$  simulation than the one obtained by the  $256^2$  HDNS. Using these differences in orientation and taking into account that the vortex system has made about seven turnovers by the time these differences are observed, one can estimate the numerical error in the mean rotation speed as about 2% for the two-fluid method and 3% for the  $256^2$  HDNS. One can conclude that the two-fluid method does describe large-scale structures better than the pseudo-spectral method at equal resolution, although these improvements are not as impressive as in description of the small-scale field. In particular, our method does not improve modelling of the sharp edges of the coherent structures because it tends to convert sharp vorticity gradients into particles with partial loss of coherence. Respectively, we can describe the spectra much better than the higher momenta and intermittency which is largely caused by the coherent structures.

So far, we discussed the small-scale field only in context of the energy spectra. On the other hand, particles are characterized by distributions in both wavevector and coordinate space, and they contain much richer information about the small-scale field than just spectra. Ideally, the Wigner function describing the particle distributions is invertible and one could recover the small-scale field exactly based on the information about the particle positions and wavevectors. However, to create particles we did not compute directly the Wigner function, which would be too expensive, but used an approximate procedure described in section 3.4. Nevertheless, the information about the small-scale field contained in particles, although approximate, does contain correlations between different small-scale harmonics. To illustrate this point, we reconstructed the small-scale vorticity field by adding up the contributions of localized wavepackets centered at the particle coordinates  $\mathbf{x}_p$  and oscillating in space according to the particle wavevectors  $\mathbf{k}_p$ . Here, we take wavepackets having two main oscillations in the direction of  $\mathbf{k}_p$  and elongated in the transverse to  $\mathbf{k}_p$  direction. The resulting vorticity field for all particles with  $k_p < 512$  at  $t = 1.5$  is shown in figure 31, and this corresponds to the particle locations shown in figure 32. One can see a very correlated filamentary structure of the vorticity field obtained from the particle distribution.

### 6.2.1 Forced turbulence

Let us consider now a situation where initially there is no particles and no large-scale field. A force is introduced by keeping the same level of energy for a given wavenumber, in our case  $E = 0.5$  at  $k_x = 40, k_y = 0$ . To obtain a stationary spectrum, a linear friction at large scale is introduced by

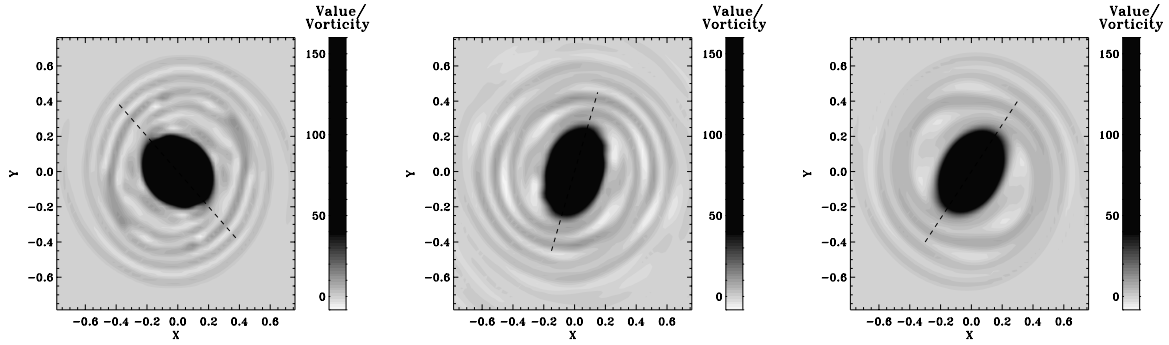


Figure 30: The large-scale vorticity for the vortex merger problem at  $t=1.5$  as obtained in (1) HDNS1024<sup>2</sup> (run N°13), two-fluid 256<sup>2</sup> simulation (run N°8) and (3) HDNS256<sup>2</sup> (run N°12). Only 1/16 of the computational area is shown. We retained only 256<sup>2</sup> modes in the figure for HDNS1024<sup>2</sup> in order to compare the large-scale features only.

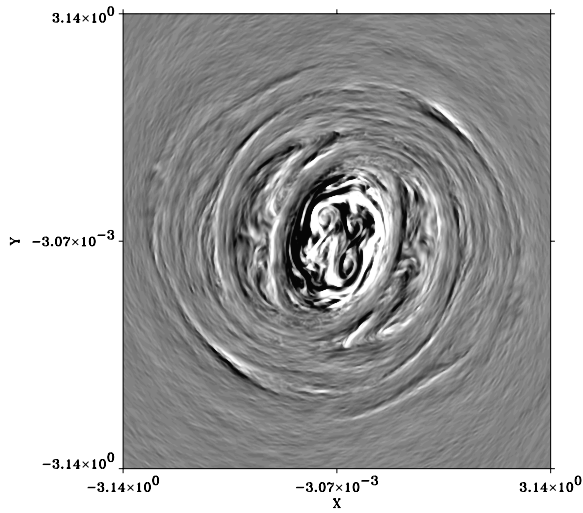


Figure 31: (run N°8) Reconstruction of the small-scale vorticity in the vortex merger problem by representing each particle as a vorticity wavepacket and adding up the individual contributions. Here, we considered only particles with  $k_p < 512$ . Note a coherent filamentary structure of the small-scale field.

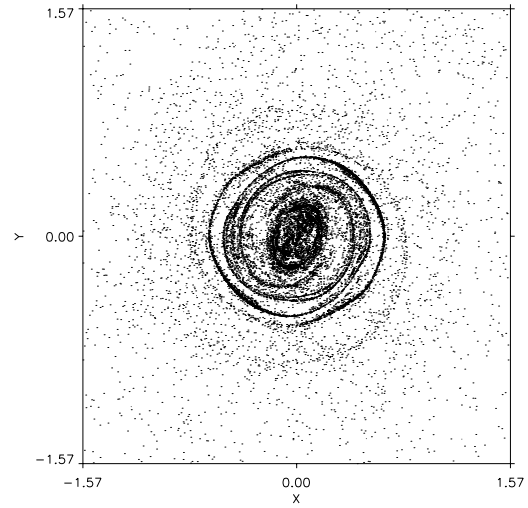


Figure 32: (run N°8) Positions of the first 20000 particles created from the large-scale fluid in the vortex merger problem. Here  $t=1.5$ , as in 31.

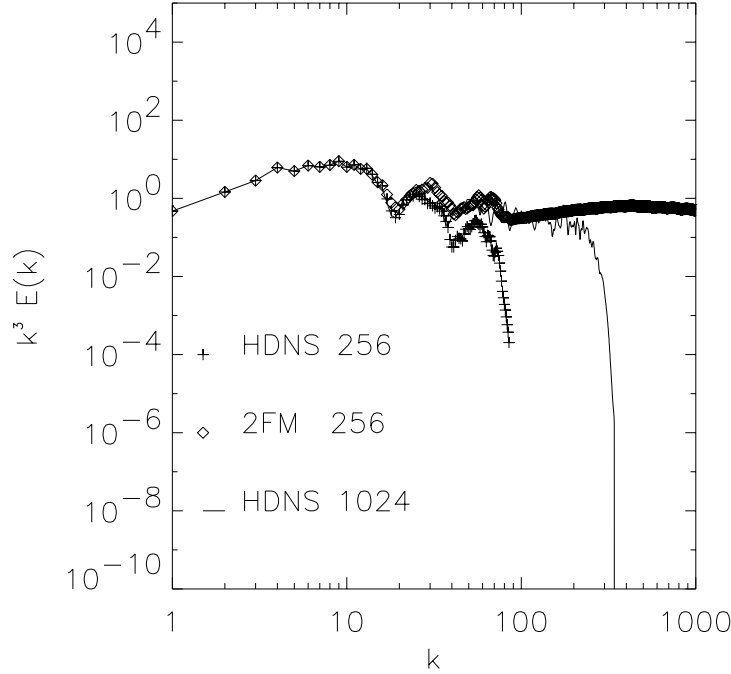


Figure 33: (run  $N^\circ 8, 12$  and  $13$ ) Compensated energy spectra in the vortex merger problem obtained by the HDNS1024<sup>2</sup> (solid line), HDNS256<sup>2</sup> (marked by +) and a two-fluid simulation on the 256<sup>2</sup> grid (circles); runs  $N^\circ 13, 12$  and  $8$  respectively.

the term  $D_\epsilon = t_d^{-1} l_d^{-2} \psi$  where  $l_d$  is the scale corresponding to system size,  $t_d$  is the characteristic friction time and  $\psi$  is the stream function. Note that by introducing a large-scale friction we really challenge our two-fluid method, because we are suppressing, to certain extent, the energy condensation at the largest scale existence of which is the main assumption of the two-fluid model.

We perform simulations using the two-fluid method and the pseudo-spectral method, both at 256<sup>2</sup> resolution, and compare results of these two runs (runs 9 and 14 in table 1) with the results of a high-resolution HDNS of Babiano et al [26] who used a 1728<sup>2</sup> pseudo-spectral method with hyperviscosity and the same forcing and large-scale friction as described above (reproduced as run  $N^\circ 15$ ). In the case of forced turbulence, the vorticity field is much less structured than in decaying turbulence or in the vortex merger problem, and its images in real space do not contain much information which could be used to compare different methods. We will concentrate, therefore, only on the energy spectra, which are shown in figure 6.2.1. We see that the 256<sup>2</sup> two-fluid simulation gives a very close result to the one of the 1728<sup>2</sup> HDNS for both low and high wavenumbers up to the wavenumbers where the numerical hyperviscosity makes the HDNS spectrum decay. In contrast, the spectrum obtained by the 256<sup>2</sup> HDNS deviates from the 1728<sup>2</sup> HDNS result not only in high wavenumbers, but also in the low  $k$  range. Again, one can argue that the enstrophy inertial interval in the two-fluid simulation extends far beyond the cut-off scale of the high-resolution HDNS method.

A slight deviation of the two-fluid simulation from the 1728<sup>2</sup> HDNS is observed around  $k=70$ . It is not clear which one of these results is more precise in this region. In the two-fluid result we see a transition from the  $k^{-3}$  spectrum at high  $k$  to a steeper spectrum closer to the forcing scale. Such a behavior agrees with observations made in [10], where the  $k^{-3}$  spectrum was attributed to the passively advected and strained small vortices and the steeper spectrum near the forcing scale was linked to coherent vortices.

Good performance of the two-fluid method in describing forced 2D turbulence confirms validity of the assumption about the non-locality of interaction even in the case when there is a large-scale dissipation which is reducing, to certain extent, the energy condensation at the largest scale. This result is in a good agreement with observation of a strong nonlocality of the enstrophy fluxes in forced turbulence with a large-scale dissipation was made by Borue who used a high resolution



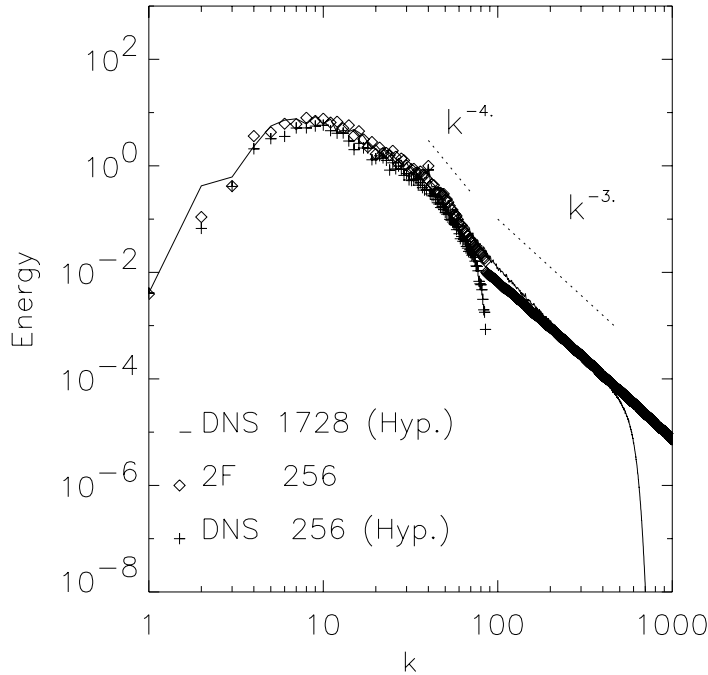


Figure 34: Energy spectrum of turbulence forced at  $k = 40$  which are obtained by HDNS1728<sup>2</sup> (run N°15, solid line), HDNS128<sup>2</sup> (run N°14, marked by +) and a two-fluid simulation on the 128<sup>2</sup> grid (run N°9, circles).

pseudo-spectral method with hyperviscosity [7].

## 7 Conclusion

In this paper we developed a two-fluid numerical method which treats the resolved and sub-grid scales as two different fluids which are nonlinearly interacting with each other and can be converted one into another near the minimal resolved scale. There are three essential components of the two-fluid method. One of them is the set of equations used to describe evolution of each of the fluids. These equations were rigorously derived in [1] under the assumption of nonlocality of interaction in small scales. The second ingredient of the two-fluid model is a PIC scheme to compute the small-scale sub-grid fluid. And the last, but not least, important element of our method is the procedure of conversion of one fluid into another.

By considering turbulence with a gap between large and small scales and by comparing the results with analytical results of [2], we in fact selectively tested the second element, the PIC discretisation of the small-scale field. Indeed, in this part we did not question validity of the two-fluid equations (used to obtain both numerical and analytical results), and we minimized the effect of the conversion procedure (not even using it for some computations) by considering well separated scales. Our numerical results agree well with the analytical predictions of [2], which proves effectiveness of using the PIC method to simulate the small-scale equation.

The first and the third components of the two-fluid method were tested by juxtaposition of the results obtained by this method with results obtained by HDNS performed at the same and at much higher resolution. We saw that the two-fluid method does very well in describing the small-scale part of the spectrum, which verifies the nonlocality assumption underlying the validity of the two-fluid equations. We emphasize that our method does not involve any parameters which could be adjusted to make the results look better in comparison with HDNS. We tested the sensitivity of our method with respect to the choice of the cut-off wavenumber, and we found that sufficiently accurate results may be obtained already for 128<sup>2</sup> resolution. In fact, we believe that the two-fluid method at a low 128<sup>2</sup> and 256<sup>2</sup> resolution describes many features of the the small-scale

dynamics (e.g. spectra) even better than HDNS at  $1024^2$  resolution. One of the important features that persistently appears in the two-fluid simulations of different problems is the  $k^{-3}$  tail in the energy spectrum. We conclude that the  $k^{-3}$  tail is generically present in most of the situations of nearly inviscid 2D dynamics. We think that this tail is not an artifact of our numerical method, whereas steeper small-scale spectra obtained using HDNS are due to the hyperviscous dissipation. It is interesting that the  $k^{-3}$  tail persists for a very long time but its amplitude decreases in decaying turbulence, which corresponds to a decreasing enstrophy flux. In this case, an initial small-scale energy increase, associated with fast formation of the  $k^{-3}$  tail, is followed by a decrease corresponding to a slow up-scale energy transfer.

We observed also improvements in modeling large scales with respect to the HDNS performed at the same resolution, but these improvements were not as impressive as the ones for the small scales. For example, the difference of the two-fluid results from the high-resolution HDNS for the final vortex orientation in the vortex merger problem is smaller than the deviations associated with the HDNS performed at the same resolution, but these deviations are still comparable. We attribute such deviations to the approximate nature of the conversion procedure which brings about a certain arbitrariness in distributing particles obtained from the large-scale component. Some of the small-scale structures are intrinsically a part of a bigger large-scale vortex, in which case preserving their coherence with this vortex is important. For example, the small-scale structure associated with sharp edges of a large vortex naturally arise near streamline separatrices, and maintaining these structure precisely at the separatrix location is important for preventing a vorticity “leak” to the open streamline regions located beyond the separatrix [27][28]. There is a room for improvement of our conversion procedure which would differentiate between the small-scales that belong to a coherent vortex structure from the rest of the small-scale vorticity. One possibility for such an improvement is to perform conversion in the wavelet space where the coherent structures are clearly distinguishable [29]. In this approach, the scale at which the conversion is performed would vary with coordinate (in contrast with a fixed scale used in this paper). Another possibility is to use the Contour Surgery method to describe the large-scale fluid [30]. In this approach, the small-scale fluid would be created from the long and thin filaments, which are cut off by the “surgery” procedure.

Finally, we would like to mention that there are quite a few types of fluids where the use of the two-fluid approach would be justified. Recall, that the underlying assumption of the two fluid method is that the small-scale dynamics is nonlocal and can be described by linear equations. The small scales can include not only vorticity, but also a wave component. In fact, the first application of the two-fluid approach was to compute the sound-vortex interaction problem, in which the small scales were short acoustic waves (ultrasound) [14]. Further, the first derivation of the two-fluid equations was done for the  $\beta$ -plane model for geophysical fluids where the interaction is typically nonlocal [12], but no numerical computation of these equations has been done yet. The nonlocality assumption is likely to be valid for MHD turbulence, and it was used by Kraichnan to derive the  $k^{-3/2}$  energy spectrum of MHD turbulence [31]. In this case, the small-scale (subgrid) fluid would be composed of an Alfvén wave distribution.

**Acknowledgments** We thank M. Meneguzzi for providing us with a copy of his 2D spectral code, and for numerous advice and discussions about the present work. We are grateful to A. Babiano for providing us a field at high resolution and for suggestions. The high resolution simulations were performed on the Cray C94 of IDRIS and the Cray C90 of the CEA Grenoble.

## References

- [1] B. Dubrulle and S. Nazarenko, *Physica D* **110**, 123 (1997)
- [2] S. Nazarenko and J-P. Laval, Non-local 2D turbulence and passive scalars in Batchelor's regime, *submitted to J. Fluid Mech. in February*, (1998).
- [3] C. Fureby et al, *Phys. Fluids* **9**, 1416 (1997).
- [4] L. Smith and V. Yakhot, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 352 (1993).
- [5] V. Borue, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1475 (1994).
- [6] R. Sadourny and C. Basdevant, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, Serie II* **292**, 1061 (1981)
- [7] V. Borue, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3967 (1993).
- [8] K. Ohkitani, *Phys. Fluids A* **2**, 1529 (1990).
- [9] M.E. Maltrud and G.K. Vallis, *Phys. Fluids A* **5**, 1760 (1993).
- [10] K.G. Oetzel and G.K. Vallis, *Phys. Fluids* **9** (10), 2991 (1997).
- [11] A.M. Rubenchik and I. Vuzov, *Radiofizika* **17**, 922 (1974)
- [12] A.I. Dyachenko, S.V. Nazarenko and V.E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **165**, 330 (1992).
- [13] C.K. Birdsall and A.B. Langdon, *Plasma physics via computer simulation* McGraw-Hill, New York, 1985.
- [14] S.V. Nazarenko, N.J. Zabusky and T. Scheidegger, *Phys. Fluids* **7**, 2407 (1995).
- [15] D. Gottlieb and S.A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, SIAM 1977.
- [16] M.E. Brachet, M. Meneguzzi, H. Politano, and P.L. Sulem, *J. Fluid Mech.* **194**, 333 (1988).
- [17] S. Nazarenko, N. Kevlahan and B. Dubrulle, *J. Fluid Mech.* **390**, 325 (1999).
- [18] J.M. Ottino, *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transports* Cambridge Univ. Press, 1989.
- [19] R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **64**, 737 (1974).
- [20] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge Univ. Press, 1995
- [21] I. Van der Hoven, *Journal of Meteorology* **14**, 160 (1957).
- [22] A. Pouquet, U. Frisch and J.P. Chollet, *Phys. Fluids* **26**, 877 (1983).
- [23] G.K. Batchelor, *Phys. Fluids Suppl. II.* **12**, 233 (1969).
- [24] P. Bartello and T. Warn *J. Fluid Mech.* **326**, 357 (1996).
- [25] A. H. Nielsen et al, *Phys. Fluids* **8**, 2263 (1996).
- [26] A. Babiano, B. Dubrulle and P. Frick, *Phys. Rev. E* **55**, 2693 (1997).
- [27] B. Legras and D. Dritschel, *J. Comput. Phys.* **104**, 287 (1993).
- [28] A. Mariotti, B. Legras and D. Dritschel, *Phys. Fluids* **6**, 3954 (1994).
- [29] M. Farge, N. Kevlahan, V. Perrier and E. Goirand, *Proceeding of the IEEE* **84**, 639 (1996).
- [30] D. Dritschel, *J. Comput. Phys.* **77**, 240 (1988).
- [31] R. Kraichnan, *Phys. Fluids* **8**, 1385 (1965).







## Annexe C

# Caractéristiques des petites échelles

Reproduction d'un article de *Journal of Fluid Mechanics* (sous presse), 1998





# Non-local 2D turbulence and Batchelor's regime for passive scalars.

Sergey Nazarenko<sup>1</sup>, Jean-Phillippe Laval<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mathematics Institute, University of Warwick, COVENTRY CV4 7AL, UK

<sup>2</sup>CEA/DAPNIA/SAP L'Orme des Merisiers, 709, F-91191 Gif sur Yvette, France

## Abstract

A semi-classical approach has recently been developed to describe dynamics of small scales advected by a large-scale flow [1] - [4]. Depending on the situation, the small scales may be dispersive [1] or non-dispersive waves [2], 2D vorticity [3] or 3D potential vorticity [4]. In this paper, we consider small-scale 2D non-local turbulence, where interaction of small scales with large vortices dominates in the small-scale dynamics. Also, we consider a closely related problem of passive scalars in Batchelor's regime, when the Peclet number is much greater than the Reynolds number. In our approach, we do not perform any statistical averaging, and most of our results are valid for any form of the large-scale advection. A new invariant is found in this paper for the case when the initial small-scale spectrum is isotropic. It is shown, analytically, numerically and using a dimensional argument, that there is a spectrum corresponding to an inverse cascade of the new invariant, which scales like  $k^{-1}$  for turbulent energy and  $k^1$  for passive scalars. For passive scalars, the  $k^1$ -spectrum was first found by Kraichnan [5] in the special case of  $\delta$ -correlated in time advection, but it was miss-interpreted as corresponding to an absolute thermodynamical equilibrium. We also obtain, both analytically and numerically, power-law spectra of decaying 2D turbulence,  $k^{-2}$ , and passive scalar,  $k^0$ .

## 1 Introduction

Formation of coherent large-scale vortices from turbulence is a common place in 2D numerical simulations of the Euler/Navier-Stokes equations [6] - [17], as well as in laboratory experiments [18][20][21]. Intensity of the coherent vortices grows via the inverse energy cascade and eventually they start producing a significant feedback on turbulence. At this moment, the low-wavenumber spectrum changes from its transient Kolmogorov shape,  $k^{-5/3}$  (for forced turbulence), to a steeper spectrum [6], [7]. There is no consensus in literature on how the nonlocal interaction with large-scale vortices affects the small-scale spectrum in both forced and decaying turbulence. Computations of McWilliams [9], Benzi et al [10][11], Babiano et al [12] and Satangelo et al [13] indicate steeper than  $k^{-3}$  spectra. McWilliams suggested that the coherent vortices suppress the enstrophy cascade by the coherent vortices which explains steeper than  $k^{-3}$  spectra in small scales [9], [14]. On the other hand, numerical experiments of Brachet et al [15][16], Burue [7] and more recent simulations of Kevlahan and Farge [17] speak in favor of the  $k^{-3}$  energy spectrum of small-scale turbulence. Difference in considered regimes and, perhaps, differences in performance of the numerical methods may explain the discrepancy. However, the underlying physical mechanisms of the turbulence-vortex interactions remain unclear.

To study the interaction of turbulence with coherent large-scale vortices we consider an extreme case where these interactions are dominant in the turbulence evolution and local interactions between the small scales may be neglected. This case will be referred to as *nonlocal turbulence*. It is reasonable to think that 2D turbulence becomes nonlocal at late stages of its evolution when much of the energy is condensed at the largest scale of the system. A simple estimate shows that the spectrum must decay steeper than  $k^{-3}$  at large scales for the nonlocal to be stronger than the local ones in small scales. High resolution numerical simulations of forced turbulence by Borue [8] indicate that the enstrophy transfer is strongly nonlocal. It is of course an open question whether or not the local interactions can be ever negligible in real experiment. However, study of such a pure nonlocal interaction is important as it is the opposite extreme to the classical Kolmogorov picture, in which the nonlocal interactions are neglected with respect to the local ones. The truth, then, should be expected in between of these two extremes. Remarkably, as we shall see in this paper, the nonlocal theory predicts the same  $k^{-3}$  spectrum as the local theory does which makes this spectrum quite universal.

A formalism suitable for description of the nonlocal 2D turbulence was developed in [3]. In this paper, the scale separation between the small turbulence scale and large vortex scale was used to average the Euler equations over the small scale and derive a coupled system of equations for the small-scale and large-scale components. Note that no averaging is made over the large scale. For the small-scale component this approach leads to a semi-classical (WKB) description, where the wavepackets of turbulence are advected by the mean flow, and their wavenumber is evolving due to the local mean strain/shear produced by the large vortices. The enstrophy of the turbulence wavepackets is conserved whereas the energy is not: it can be transferred to (or be drawn from) the large-scale vortices. In turn, turbulence produces a feedback on the large-scale flow via the averaged Reynolds stress. The equations for the small and large scales form a complete system of equations called the two-fluid model. The original idea of the two-fluid model was proposed by Dyachenko, Nazarenko and Zakharov for the  $\beta$ -plane turbulence [1]. It was applied for modeling the sound-vortex nonlinear interactions by Nazarenko, Zabusky and Scheidegger [2]. Using this approach, Nazarenko considered the rapid distortion of 3D turbulence by inhomogeneous strain [4]. Laval, Dubrulle and Nazarenko used the two-fluid model for a new numerical method which uses the small-scale equation for computing the sub-grid scales [22].

In this paper we consider the small-scale turbulence to be initially isotropic and homogeneous (for decaying turbulence) or to be generated by an isotropic and homogeneous forcing (for forced turbulence). Nazarenko showed that in this important special case the averaged Reynolds stress is uniform in space (under the non-locality assumption) and 2D turbulence does not produce any feedback on the large-scale flow. Thus, the large-scale vortex dynamics completely decouples from the small-scale turbulence, and the mean velocity field can be considered as external field for the small-scale dynamics. This result, together with the fact that the small-scale vorticity is

advected unchanged by the mean velocity field, makes the dynamics of initially isotropic turbulence *identical* to the passive-scalar advection problem. Therefore, we shall consider the turbulence and the passive-scalar spectra in parallel in this paper. The analogy between the small-scale vorticity and passive scalars is not new, see e.g. [23]. Babiano et al [12] argued, however, that because of the turbulence feedback on the coherent vortices the small-scale turbulence dynamics is very different from the passive-scalar dynamics. Again, in our case such a feedback is absent because of the non-locality and initial isotropy and homogeneity of turbulence.

For passive scalars, the reason for the non-locality (scale separation) is completely different from the case of turbulence. It arises, for example, if the Reynolds number is much less than the Peclet number, so that much smaller scales are present in the passive scalar than in the advecting flow. The case of the small-scale passive scalar advected by a large-scale flow was first studied by Batchelor [24], and it is referred to as the Batchelor's regime. Statistical behavior of passive scalar in Batchelor's regime is studied in great detail by Chertkov et al [25]. In present paper, we do not perform any statistical averaging over large scales. This allows us to show that some passive-scalar properties are general for any large-scale flow and independent of its statistics and to show sensitivity of some other properties to the particular location in the large-scale flow.

An important result which we are going to use in this paper is that the energy of initially isotropic turbulence is conserved; it is neither transferred to nor is it drawn from the large-scale flow as in the general case of anisotropic initial turbulence [4]. Consequently, there is a new spectrum associated with an inverse spectral flux of energy,  $k^{-1}$ . Together with the enstrophy-flux spectrum, the energy-flux spectrum can be derived from the dimensional argument, as well as obtained numerically and as an asymptotic analytical solution in the two-fluid model.

It is well known that the  $k^{-3}$  enstrophy-cascade spectrum has  $k^{-1}$  analog among the passive-scalar spectra [23]. The  $k^{-1}$  passive-scalar spectrum was first found by Batchelor [24]. Importantly, the new  $k^{-1}$  energy spectrum obtained in this paper also has its analog in the passive-scalar dynamics,  $k^1$ -spectrum. The  $k^1$ -spectrum is a special case of the  $k^{D-1}$ -spectrum (where  $D$  is the number of dimensions) obtained by Kraichnan (74) for the passive scalar in Batchelor's regime with  $\delta$ -correlated in time velocity field. Kraichnan noticed that the  $k^{D-1}$ -spectrum corresponds to equipartition of the passive scalar among all degrees of freedom and concluded that this spectrum corresponds to a state of absolute statistical equilibrium. In this paper we show that although the passive scalar is indeed uniformly distributed among wavenumbers for the  $k^1$ -spectrum, this spectrum corresponds to the cascade of another passive-scalar invariant, and, therefore, describes a state which very far from the statistical equilibrium. This new invariant is found in this paper and called pseudo-energy because it is analogous to the energy of 2D turbulence. The pseudo-energy cascade is inverse, and corresponding  $k^1$ -spectrum, is formed on the low-wavenumber side of the forcing scale, as verified numerically in this paper.

We also consider the case of freely decaying turbulence, for which we obtain, both analytically and numerically,  $k^{-2}$ -spectrum. Correspondingly, for free decay of passive scalar we obtain  $k^0$ -spectrum.

## 2 Dynamics of nonlocal turbulence

Let us write the 2D Navier-Stokes equations formulated in terms of vorticity  $\omega$  as

$$\omega_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega, \quad (1)$$

where  $\mathbf{u}$  is the velocity. Consider the turbulent vorticity at small scales  $l$  and suppose that turbulence is nonlocal, that is that only nonlocal interactions with large scales  $L$ , such that  $\epsilon = l/L \ll 1$ , are important for the turbulence dynamics at scale  $l$ . There are several equivalent ways leading to the semi-classical description of the small-scale turbulent dynamics in this case, for example using Wigner function [1], [3], partial Fourier transform [2], Gabor transform [4] or the wavelet transform [26]. Here we shall use Gabor transform of vorticity  $\omega$  defined as

$$\hat{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \int f(\epsilon^* |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \omega(\mathbf{x}_0, t) d\mathbf{x}_0, \quad (2)$$

where  $k \sim 2\pi/l$ ,  $1 \gg \epsilon^* \gg \epsilon$  and  $f(x)$  is a rapidly decreasing at infinity function, for example  $e^{-x^2}$ .

Define the averaging as

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int f^2(\epsilon^*|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) d\mathbf{x}_0, \quad (3)$$

where  $f$  is the same function as in the Gabor transform (2), and, therefore, the averaging is over a length which is intermediate between the small scale  $l$  and the large scale  $L$ . The non-locality of turbulence means that the dominant contribution to the advecting velocity field comes from the large scales,

$$|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}| \ll |\bar{\mathbf{u}}|. \quad (4)$$

Note that this condition does not require that the small-scale vorticity is small compared to the large-scale vorticity.

Let us apply Gabor transform to the vorticity equation (1) and use condition (4),

$$\partial_t \hat{\omega} + \int f(\epsilon^*|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \nabla_0 \cdot (\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_0) \omega(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}_0 = -\nu k^2 \hat{\omega}, \quad (5)$$

where  $\nabla_0$  denotes the gradient with respect to  $\mathbf{x}_0$ . Because of the decreasing kernel  $f$ , the main contribution into the integral here comes from  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \sim 1/\epsilon^*$ . Therefore, one can Taylor expand function  $\bar{\mathbf{u}}$  which varies significantly only at the large scale  $1/\epsilon \gg 1/\epsilon^*$ . Neglecting the quadratic terms in this Taylor expansion, which are small as  $(\epsilon/\epsilon^*)^2$ , we have

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\omega} + \int f(\epsilon^*|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \nabla_0 \cdot (\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}_0 + \\ \int f(\epsilon^*|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \nabla_0 \cdot [((\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] \omega(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 = -\nu k^2 \hat{\omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Integrating by parts and changing  $\nabla_0 \rightarrow -\nabla$  in the first integral in (6), we see that this integral is equal to  $(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\omega}$ . Integrating by parts the second integral and changing  $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \rightarrow i\partial_{\mathbf{k}}$  and  $\nabla_0 \rightarrow i\mathbf{k}$ , we have for the second term  $-(\nabla(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{k})) \cdot \partial_{\mathbf{k}} \hat{\omega}$ . Thus, one can write the equation for  $\hat{\omega}$  as follows,

$$D_t \hat{\omega} = -\nu k^2 \hat{\omega}, \quad (7)$$

where

$$D_t = \partial_t + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla + \dot{\mathbf{k}} \cdot \partial_{\mathbf{k}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{u}}, \\ \dot{\mathbf{k}} &= -\nabla(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (9)$$

Equations (8) and (9) are called the ray equations. Let us introduce the Jacobi matrix  $\Lambda$  such that

$$\Lambda_{ij} = \partial_{x_j} a_i, \quad i, j = 1, 2, \quad (10)$$

where  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = (a_1, a_2)$  is the initial coordinate; it is an inverse function to the solution of (8). In terms of  $\Lambda$  the solution of (9) is [4]

$$\mathbf{k} = \nabla(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) = \Lambda^T \mathbf{q}, \quad (11)$$

where  $\Lambda^T$  is transposed  $\Lambda$  and  $q$  is the initial wavenumber.

Because of the fluid incompressibility,  $d\mathbf{x} = d\mathbf{a}$ , we have

$$\det \Lambda = 0. \quad (12)$$

From this condition and (11) we it follows that the motion is also incompressible in the wavenumber space,

$$d\mathbf{k} = d\mathbf{q}. \quad (13)$$

Below we shall be interested in finding the turbulence spectra in the inertial range where the viscosity is negligible. Neglecting the viscosity term in (7) we can find the solution to this equation,

$$\hat{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \hat{\omega}(\mathbf{a}, \mathbf{q}, 0). \quad (14)$$

Note that  $N = \int |\hat{\omega}|^2 d\mathbf{k}$  is the  $\mathbf{x}$ -density of the small-scale enstrophy. It follows from (14) and (13) that the enstrophy density is conserved on the mean-flow trajectory

$$N_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla N = 0. \quad (15)$$

One can show [4] that for initially isotropic turbulence the energy density

$$E(\mathbf{x}, t) = \int \frac{|\hat{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)|^2}{k^2} d\mathbf{k}, \quad (16)$$

is also conserved on the mean-flow trajectory in inviscid range,

$$E_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla E = 0. \quad (17)$$

Both the energy and enstrophy conservation laws play important role in the dynamics of turbulence. Below, we shall be interested in the energy spectrum of turbulence defined as

$$E(\mathbf{x}, k, t) = \int \frac{|\hat{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)|^2}{k} d\theta, \quad (18)$$

where  $\theta$  is the polar angle in the wavenumber space.

### 3 Numerical method.

All analytical results obtained in this paper are verified and illustrated throughout this paper using numerical simulations. Our numerical method to compute nonlocal turbulence is based on equation (14) according to which  $\hat{\omega}$  is conserved along the trajectories in  $(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  space given by the solutions of (8) and (9). Therefore, we represent the field  $\hat{\omega}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, 0)$  by a large ensemble of particles and find  $\hat{\omega}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$  by moving these particles according to (8) and (9). This method is similar to the particle-in-cell (PIC) method to compute the Vlasov equation in plasma physics. First discussion of using PIC to compute small-scale turbulence was given in [1] in the context of the  $\beta$ -plane dynamics. The large-scale flow is computed by a standard pseudo-spectral method. A more detailed description of our numerical method can be found in [22].

### 4 Freely decaying turbulence

Let us consider first the simplest case where the initial spectrum is concentrated on a circle in  $\mathbf{k}$ -space and homogeneous in  $\mathbf{x}$ -space,

$$|\hat{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, 0)|^2 = \frac{N}{2\pi q_0} \delta(k - q_0), \quad (19)$$

where  $q_0$  is a number. We will also assume that initially the small-scale spectrum is separated from the large-scale turbulence by a gap in  $\mathbf{k}$ -space, and we will study the evolution of the small-scale component for the times until this spectral gap is filled by intermediate scales. Because the equations for the small-scale turbulence are linear, the generalization to the any isotropic initial spectrum is obtained by simply integration over the rings of type (19). From (14),

$$|\hat{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)|^2 = |\hat{\omega}(\mathbf{a}, \mathbf{q}, 0)|^2 = \frac{N}{2\pi q_0} \delta(q - q_0), \quad (20)$$

where  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  and  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  are the initial position and initial wavenumber correspondingly. Substituting this expression into (18) we have

$$E(\mathbf{x}, k, t) = \frac{N}{2\pi q_0 k} \int_0^{2\pi} \delta(q - q_0) d\theta = \frac{N}{2\pi q_0 k |\partial_\theta q|} = \frac{N}{\pi k |\partial_\theta q^2|}. \quad (21)$$

Here,  $q^2$  must be expressed in terms of  $k$  and  $\theta$ , and  $\theta$  must be eliminated using the condition  $q = q_0$ . From (11) and  $\det\Lambda = 0$  we have an expression for  $\mathbf{q}$  in terms of  $\mathbf{k}$ ,

$$\begin{aligned} q_x &= -\Lambda_{12}k_x + \Lambda_{11}k_y \\ q_y &= \Lambda_{22}k_x - \Lambda_{21}k_y. \end{aligned} \quad (22)$$

Thus

$$\begin{aligned} q^2 = q_x^2 + q_y^2 &= (-\Lambda_{12}k \cos\theta + \Lambda_{11}k \sin\theta)^2 + (\Lambda_{22}k \cos\theta - \Lambda_{21}k \sin\theta)^2 = \\ &= k^2(c + c_1 \cos 2\theta - c_2 \sin 2\theta) = k^2(c + c_3 \sin(\gamma - 2\theta)), \end{aligned} \quad (23)$$

where

$$c_1 = (\Lambda_{22}^2 + \Lambda_{12}^2 - \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{21}^2)/2, \quad (24)$$

$$c_2 = \Lambda_{11}\Lambda_{12} + \Lambda_{21}\Lambda_{22}, \quad (25)$$

$$c = (\Lambda_{22}^2 + \Lambda_{12}^2 + \Lambda_{11}^2 + \Lambda_{21}^2)/2, \quad (26)$$

$$c_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad (27)$$

$$\gamma = \arctan(c_1/c_2). \quad (28)$$

From  $q^2 = q_0^2$  we find

$$\sin(\gamma - 2\theta) = \frac{q_0^2}{c_3 k^2} - c/c_3. \quad (29)$$

Further,

$$|\partial_\theta q^2| = 2c_3 k^2 |\cos(\gamma - 2\theta)| = 2c_3 k^2 \sqrt{1 - \sin^2(\gamma - 2\theta)} = 2k^2 \sqrt{c_3^2 - (q_0^2/k^2 - c)^2}. \quad (30)$$

Using definitions of  $c_1, c_2, c_3$  and  $c$  and the condition  $\det\Lambda = \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{21}\Lambda_{12} = 1$  one can verify by a lengthy but simple calculation that  $c_3^2 - c^2 = -1$ , and therefore

$$|\partial_\theta q^2| = 2k^2 \sqrt{2cq_0^2/k^2 - q_0^4/k^4 - 1}. \quad (31)$$

Substituting this expression into (21) we finally have

$$E(\mathbf{x}, k, t) = \frac{N}{2\pi k^3 \sqrt{2cq_0^2/k^2 - q_0^4/k^4 - 1}}. \quad (32)$$

It is easy to check that

$$\int E(\mathbf{x}, k, t) dk = \frac{N}{q_0^2} = \text{const},$$

which is a manifestation of more general result that for any isotropic spectrum the energy is constant on the fluid trajectory [4].

#### 4.1 Large-time asymptotics of $E(\mathbf{x}, k, t)$ .

First, spectrum  $E(\mathbf{x}, k, t)$  is finite only in a limited range of wavenumbers,  $k_{min} < k < k_{max}$ , where  $k_{min}$  and  $k_{max}$  are to be found from the condition that the quadratic expression under the square root above is equal to zero,

$$k_{min}^2 = q_0^2(c - \sqrt{c^2 - 1}), \quad (33)$$

$$k_{max}^2 = q_0^2(c + \sqrt{c^2 - 1}). \quad (34)$$

Note that  $c = 1$  and  $k_{min} = k_{max} = q_0$  at  $t = 0$ . Second, the spectrum is infinite at  $k = k_{min}$  and  $k = k_{max}$ . These two observations are natural if we keep in mind that the initial circle distribution in  $k$ -space becomes an ellipse, see (29). One can see from (33) and (34) that the ellipse area is constant,

$$S = \pi k_{min} k_{max} = \pi q_0^2. \quad (35)$$

This gives a useful relation between  $k_{min}$  and  $k_{max}$ ,

$$k_{min}/q_0 = q_0/k_{max}. \quad (36)$$

The aspect ratio of the ellipse is

$$\lambda = k_{max}/k_{min} = k_{max}^2/q_0^2 = c + \sqrt{c^2 - 1}. \quad (37)$$

Expressing  $c$  in terms of  $\lambda$  is

$$2c = \lambda + 1/\lambda. \quad (38)$$

The value of  $k_{max}$ , and therefore  $\lambda$ , increase with time because of the large-scale distortion (shearing/straining). We shall consider in more detail in the appendix how fast this growth is. In turbulent flow, the growth of  $\lambda$  is directly related with Lapunov exponents [25]. When  $\lambda \gg 1$ , we have  $\lambda \approx 2c$ . In this case, we have for  $k_{min} \ll k \ll k_{max}$ ,

$$E(\mathbf{x}, k, t) = \frac{N}{2\pi\sqrt{2c}q_0} k^{-2}. \quad (39)$$

Note that  $\lambda \approx 2c \gg 1$  corresponds to the large time  $\overline{\omega}t \gg 1$  and that  $k_{min} = q_0\sqrt{2c}$  and  $k_{max} = q_0/\sqrt{2c}$ . Summarizing, we have for the large-time asymptotics,  $\lambda \approx 2c \gg 1$ , in the range  $q_0\sqrt{2c} \ll k \ll q_0/\sqrt{2c}$ ,

$$E(\mathbf{x}, k, t) = \frac{N}{2\pi k_{max}} k^{-2}, \quad (40)$$

where  $c$  is given by (26). Because,  $c$  in general depends on the coordinate, so do  $k_{min}$ ,  $k_{max}$  and  $E$ . Integration of  $E$  over the coordinate will give an average over the large scales energy spectrum, which is, of course, also scales as  $k^{-2}$ .

In Figure 1 we show the energy spectrum evolution obtained by numerical integration of (14) with initial conditions (19) and random initial conditions for the large-scale flow. We see that the spectrum is indeed approaching  $k^{-2}$  shape in a growing range centered at  $q_0$ .

## 4.2 The case of a finite-width initial spectrum

As we already mentioned before, the generalization to any isotropic initial spectrum  $|\hat{\omega}_0(q_0)|^2$  (and/or arbitrary isotropic pumping) is obtained by simply integration of  $E_k$  over  $q_0$ . For example, in decaying case

$$E_k = \int \frac{|\hat{\omega}_0(q_0)|^2}{2\pi k^3 \sqrt{2cq_0^2/k^2 - q_0^4/k^4 - 1}} dq_0. \quad (41)$$

Easy to see that if the width of  $|\hat{\omega}_0(q_0)|$  is of order of  $q_0$  then the result about the  $k^{-2}$  energy spectrum scaling remain valid. Instead of (40) we have

$$E(\mathbf{x}, k, t) = C k^{-2}, \quad (42)$$

where

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{2c}} \int \frac{|\hat{\omega}_0(q_0)|^2}{q_0} dq_0. \quad (43)$$

Numerical simulation of (14) with a finite-width initial spectrum confirms that the energy spectrum behaves as  $k^{-2}$  for large time, as shown in Figure 2.

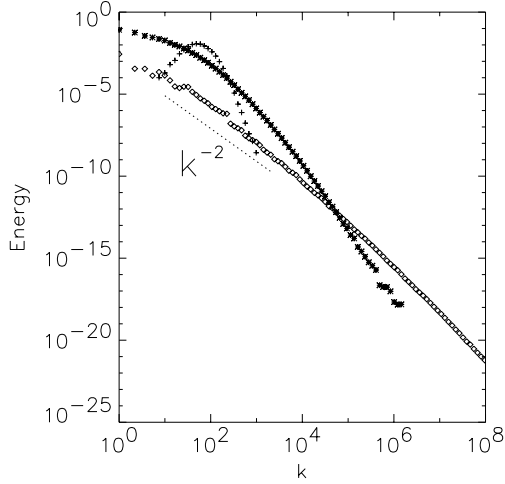


Figure 1: Energy spectrum of decaying turbulence with initial spectrum concentrated at  $k = q_0 = 100$  for three different moments of time.

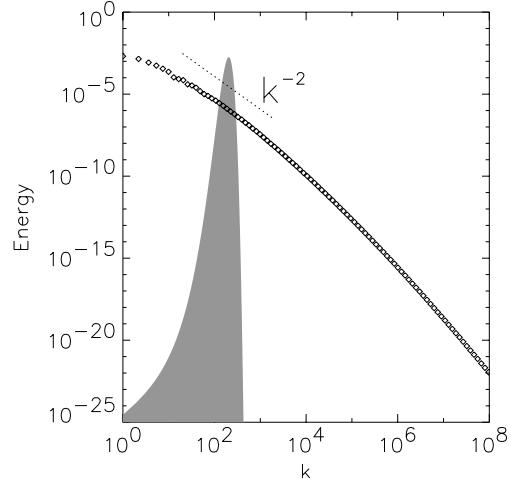


Figure 2: Energy spectrum of decaying turbulence with a broad initial spectrum. The initial spectrum is shaded

## 5 Forced turbulence

Suppose first that the enstrophy is injected  $\sigma$  at  $q = q_0$  at the rate  $\sigma$  per unit time. Because the problem is linear, the total spectrum is equal to the sum of the contributions produced by  $\sigma dt'$  injected at different moments  $t - t'$ ,

$$E(\mathbf{x}, k) = \frac{\sigma}{2\pi k^3} \int_{t_c}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{2c(t')q_0^2/k^2 - q_0^4/k^4 - 1}}. \quad (44)$$

Here  $t_c$  is the minimal time required for the ellipse to reach  $k$ . Depending on whether  $k < q_0$  or  $k > q_0$ , at  $t = t_c$  we have  $k = k_{min}$  or  $k = k_{max}$  correspondingly. In both cases the denominator in (44) turns into zero, which gives a condition for finding  $t_c$ ,

$$c(t_c) = \frac{1}{2}(q_0^2/k^2 + k^2/q_0^2). \quad (45)$$

### 5.1 Turbulence strained between vortices.

Uniform straining results in an exponential growth of the ellipse aspect ratios,  $\lambda = \exp(2\alpha t)$ , where  $\alpha$  is the strain rate, see the appendix. Then, the integral in (44) converges and the stationary spectrum is possible. Let us find the stationary spectrum for the scales far from the pumping scale,  $k \ll q_0$  and  $k \gg q_0$ .

#### 5.1.1 Pure energy flux case, $k \ll q_0$ .

If  $k \ll q_0$ , the main contribution to the integral (44) comes from such  $t'$  that  $2c \sim q_0/k \gg 1$ . Then  $2c = \lambda = \exp(2\alpha t) \gg 1$  and  $c(= 1/2\pi)$ , and (44) becomes

$$E(\mathbf{x}, k) = \frac{\sigma}{k^2 q_0} \int_{t_c}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{\exp(2\alpha t') - q_0^2/k^2}} = \frac{\sigma}{\alpha k q_0^2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\sigma}{\alpha k q_0^2} \arcsin z \Big|_0^1 = \frac{\pi \sigma}{2\alpha q_0^2} k^{-1}, \quad (46)$$

where  $z = q_0 e^{-\alpha t}/k$ . Thus, the energy spectrum at  $k \ll q_0$  has the following power-law scaling,

$$E \propto k^{-1}. \quad (47)$$



As we discussed before, in the freely decaying case most of the initial energy is transferred into  $k \ll q_0$  when  $\lambda \gg 1$  and most of the enstrophy (number of particles) into the  $k \ll q_0$  range. Therefore, spectrum (47) corresponds to the pure energy flux. As we show in the next section, this spectrum can be derived from the dimensional analysis and is, therefore, more general than just a solution in a special case of uniform strain.

### 5.1.2 Pure enstrophy flux case, $k \gg q_0$ .

If  $k \gg q_0$ , the main contribution to the integral (44) also comes from the  $2c \sim q_0/k \gg 1$  range. In this case, (44) can be rewritten as

$$E(\mathbf{x}, k) = \frac{\sigma}{k^3} \int_{t_c}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{\exp(2\alpha t') q_0^2/k^2 - 1}} = \frac{\sigma}{\alpha k^3} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\sigma}{\alpha k^3} \arcsin x|_0^1 = \frac{\pi\sigma}{2\alpha} k^{-3}, \quad (48)$$

where  $z = ke^{-\alpha t}/q_0$ . Thus, we have the following scaling for the spectrum in  $k \gg q_0$  range which corresponds to a pure enstrophy flux,

$$E \propto k^{-3}. \quad (49)$$

This spectrum will also be found using a dimensional argument in the next section.

## 5.2 Turbulence on the background of a vortex-core shear.

As shown in the appendix, vortex-core shearing results in an algebraic growth of the ellipse aspect ratios, asymptotically  $\lambda = (\beta t)^2$ , where  $\beta$  is the shear. Substituting  $c = \lambda/2$  (for large  $\lambda$ 's), we have

$$E(\mathbf{x}, k, t) = \frac{\sigma}{k^3} \int_{t_c}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{(\beta t')^2 q_0^2/k^2 - q_0^4/k^4 - 1}}. \quad (50)$$

One can see that this integral diverges at  $-\infty$ . Therefore, no stationary spectrum is possible for the small-scale turbulence inside the vortex cores in our model. Physical explanation of this effect is that the algebraic spreading in  $k$ -space due to shear produces too weak spectral fluxes directed away from the pumping region. These fluxes cannot balance the forcing and the turbulence spectrum is becoming very steep and concentrated near the pumping scale. The nonlinear interaction of small scales among themselves acts to accelerate the spectral transfer necessary for a stationary state. McWilliams suggested that the suppression of the enstrophy flux inside the coherent vortices is the reason of the steeper than  $k^{-3}$  spectra observed numerically [9], [14]. The results of this section show that this is indeed the case for the *nonlocal* turbulence on a vortex core. On the other hand, the  $k^{-3}$  spectrum is expected when turbulence is not trapped into vortex cores so that the spectral fluxes can quickly be developed when the turbulence gets in between of vortices. We will discuss our numerical results for the case of forced turbulence in section 5.4.

## 5.3 The case of a broad-band forcing.

Suppose now that turbulence is forced over a range of wavenumbers which is of the same order than the wavenumber itself and that the vorticity generated per unit time in the interval  $dq_0$  is  $\zeta(q_0) dq_0$ . Then instead of (44) we have

$$E(\mathbf{x}, k) = \frac{1}{2\pi k^3} \int \zeta(q_0) dq_0 \int_{t_c}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{2c(t')q_0^2/k^2 - q_0^4/k^4 - 1}}. \quad (51)$$

For  $k \ll q_0$  (where  $q_0$  is the characteristic forcing wavenumber), we have instead of (46)

$$E(\mathbf{x}, k) = \frac{\pi}{2\alpha} \left( \int \frac{\zeta dq_0}{q_0^2} \right) k^{-1}. \quad (52)$$

For  $k \gg q_0$ , expression (48) will be replaced with

$$E(\mathbf{x}, k) = \frac{\pi}{2\alpha} \left( \int \zeta dq_0 \right) k^{-3}. \quad (53)$$

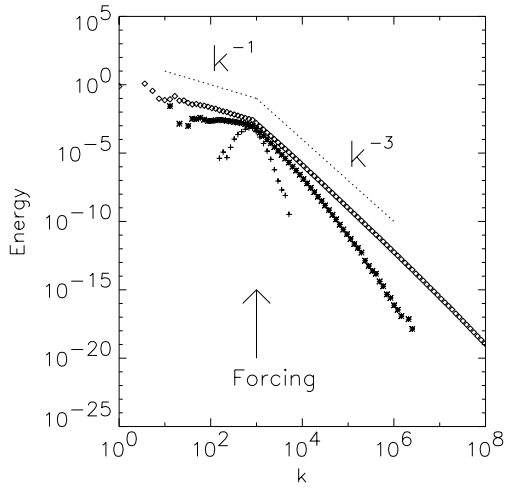


Figure 3: Energy spectrum of small-scale turbulence forced at a single wavenumber.

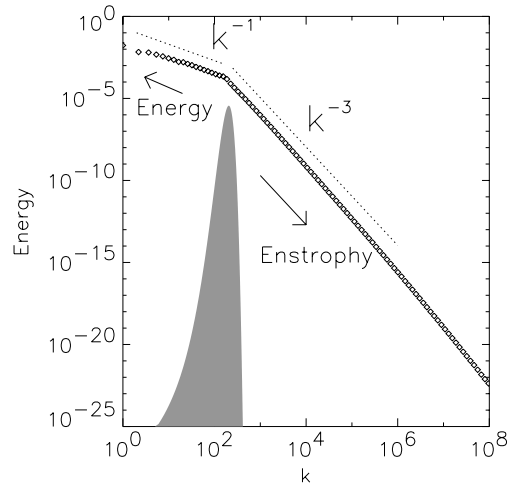


Figure 4: Energy spectrum of small-scale turbulence forced in a finite wavenumber range. The forcing shape is shaded.

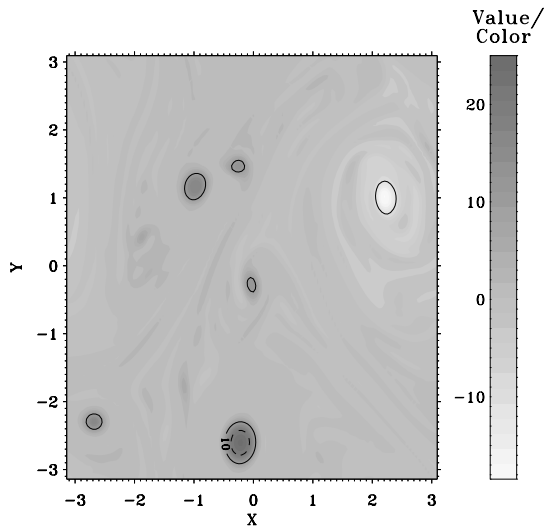


Figure 5: Large-scale vorticity. The intense vorticity regions are marked by contours.

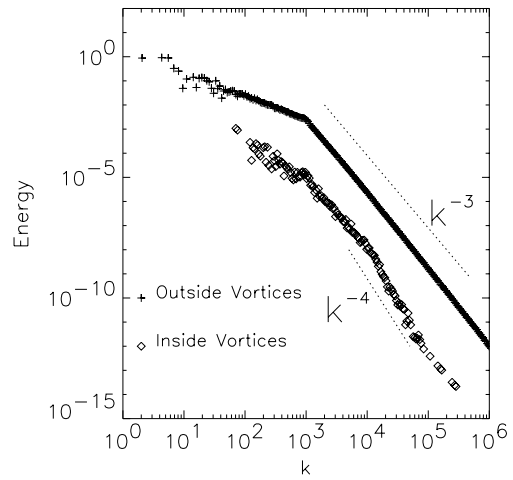


Figure 6: Energy spectrum of small-scale turbulence inside and outside of the intense vortices.

## 5.4 Numerical results for forced turbulence.

In the case of forced turbulence the numerical computations serve a greater purpose than just illustrating the analytical results. Indeed, the theory predicts different behavior (1) for forced turbulence on vortex cores and (2) for turbulence between vortices. Thus, it is not clear a priori what type of behavior is dominating in general case, in particular, when the large scales are initially random. In Figures 3 and 4, we show the numerical results for the energy spectrum of small-scale turbulence with a narrow and a broad-band forcing correspondingly. In both cases, the large-scale flow was random initially. Stationary  $k^{-1}$  and  $k^{-3}$  spectra are clearly seen at large time. This means that turbulence straining between vortices is the main dynamical process dominating the turbulence evolution. Using a pictorial interpretation of Chertkov et al [25], one could say that the “sea of strain” dominates the “islands of vorticity”. On the other hand, we do observe a steeper than  $k^{-3}$  spectrum for small turbulent regions inside intense vortices. In Figure 5 we show a typical large-scale vorticity distribution and an intense vortex marked by the dashed line which a vorticity contour at ten times the average-vorticity value. The energy spectrum of small-scale turbulence measured in such a vortex is shown in Figure 6. One can see that this spectrum is closer to  $k^{-4}$  than to  $k^{-3}$ .

## 6 Dimensional analysis for the nonlocal energy and enstrophy cascades.

In the nonlocal case, the interaction among the small scales is negligible compared with interaction via large scales. Corresponding equations for the small-scale turbulent spectrum are linear with a characteristic time determined by the large-scale strain and/or shear. Further, these equations have the form of a conservation law for the small-scale enstrophy (number of particles) and, therefore, there is no enstrophy transfer between the small and large scales. More subtle fact is that the small-scale energy is also conserved if the initial small-scale spectrum is isotropic [4]. The enstrophy transfer between the small scales is much more local in nonlocal turbulence than in local turbulence. This, on the first sight paradoxical, statement is valid because any interacting wavenumber triad contains one small wavenumber (large scale) and two large wavenumbers with very close values (small scales), and the enstrophy is transferred only between these large wavenumbers. On the other hand, the energy transfer is less local (it is as local as, perhaps, in local turbulence) because for each individual triad the small-scale energy is not conserved (only total energy of all triads is conserved for isotropic initial spectra).

In stationary turbulence the enstrophy and energy fluxes are constant. As in local turbulence, the enstrophy cascade is directed toward large  $k$ 's and the energy cascade is inverse, i.e. toward smaller  $k$ 's with respect the pumping scale  $q_0$ . Indeed, if a finite enstrophy dissipation at  $k \ll q_0$  would imply an infinite energy dissipation at these scales, and, in turn, a finite energy dissipation at  $k \gg q_0$  would mean an infinite enstrophy dissipation there. This standard reasoning to find directions of the enstrophy and energy fluxes is independent of the locality (or non-locality) assumption. However, Kraichnan's dimensional derivation of the energy spectra [27], corresponding to the enstrophy and energy cascades does rely on locality. Below we shall see the consequences of this fact for the energy spectrum exponents.

Consider first  $k \ll q_0$  where the enstrophy flux  $\eta$  is negligible and the shape of the energy spectrum is determined by the energy flux  $\epsilon$ . The energy flux  $\epsilon$  has dimension  $l^2/t^3$  and the large-scale flow is characterized by the rate of strain  $\alpha$  having the dimension  $1/t$ . Because the equations are linear, the energy spectrum must be linear in  $\epsilon$ . The only combination of  $\epsilon, \alpha$  and  $k \sim 1/l$ , having the dimension  $l^3/t^2$  of the energy spectrum and linear in  $\epsilon$ , is

$$E_k \propto \frac{\epsilon}{\alpha} k^{-1}. \quad (54)$$

Thus, we see that the energy cascade is characterized by -1 spectral exponent in nonlocal turbulence, which is different from famous -5/3 valid for local turbulence. This spectrum coincides with

the exact analytical solution obtained above for  $k \ll q_0$  for the special case of uniform large-scale strain.

Now let us consider  $k \gg q_0$  where the energy spectrum is determined by the enstrophy flux  $\eta$  having dimension  $1/t^3$ . The only combination of  $\eta, \alpha$  and  $k \sim 1/l$ , having the dimension of the energy spectrum and linear in  $\eta$ , is

$$E_k \propto \frac{\eta}{\alpha} k^{-3}. \quad (55)$$

This spectrum coincides with the exact analytical solution obtained above for  $k \gg q_0$  for the special case of uniform large-scale strain.

As we see, the spectral exponent -3 is the same for local and nonlocal turbulence. This arises because the dimension of the enstrophy flux does not involve  $l$ , and the way we match the temporal part in the dimension of  $E_k$  ( $\eta^{2/3}$  for local turbulence or  $\frac{\eta}{\alpha}$  for nonlocal turbulence) does not change the spatial scale dependence  $k^{-3}$ .

## 7 Passive scalar spectra.

As we already mentioned in the Introduction, the dynamics of vorticity in nonlocal 2D turbulence is identical to the dynamics of a small-scale passive scalar  $n(\mathbf{x}, t)$  advected by a large-scale velocity field  $\mathbf{u}$ . In this section, we apply the results obtained above for 2D turbulence to the passive-scalar advection problem. We consider the Batchelor's regime for the passive-scalar when its scale is much smaller than that of the advecting velocity field. The passive-scalar spectrum is defined as

$$P(\mathbf{x}, k, t) = \int \frac{|\hat{n}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)|^2}{k} d\theta, \quad (56)$$

where  $\theta$  is the polar angle in the wavenumber space and  $\hat{n}$  is the Gabor transform of  $n$ ,

$$\hat{n}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \int f(\epsilon^* |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} n(\mathbf{x}_0, t) d\mathbf{x}_0, \quad (57)$$

(see (2) for notations).

### 7.1 Pseudo-energy.

One obvious conservation law for the passive scalar, which is analogous to the enstrophy conservation in 2D turbulence, is

$$\Pi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \Pi = 0, \quad (58)$$

where

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \int P dk. \quad (59)$$

Remarkably there is also an analog of the energy conservation in the case when the passive-scalar spectrum is initially isotropic,

$$I_t + \mathbf{u} \cdot \nabla I = 0, \quad (60)$$

where

$$I(\mathbf{x}, t) = \int \frac{|\hat{n}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)|^2}{k^2} d\mathbf{k}. \quad (61)$$

Indeed, by substituting

$$\hat{n}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \hat{n}(\mathbf{a}, \mathbf{q}, 0) \quad (62)$$

and (11) in (61), changing the variable of integration to  $\mathbf{q}$  and taking into account that  $\det \Lambda = 1$ , we obtain that  $I$  depends on  $\mathbf{x}$  and  $t$  only via  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ . But this means that  $I$  satisfies equation (60). Keeping in mind the turbulence analogy, we will call invariant  $I$  pseudo-energy. Note that the pseudo-energy is conserved only when the passive-scalar scale is much less than the scale of the advecting field. Therefore, the pseudo-energy is an adiabatic invariant.

## 7.2 Free decay.

To obtain the passive-scalar spectra one can just divide the energy spectra obtained for 2D turbulence by  $k^2$ . For a freely decaying (i.e. unforced) passive-scalar spectrum then it follows from (41) that

$$P_k = \int \frac{|\hat{n}_0(q_0)|^2}{2\pi k \sqrt{2c q_0^2/k^2 - q_0^4/k^4 - 1}} dq_0, \quad (63)$$

where  $\hat{n}_0$  is the initial spectrum. In case  $c \sim ut/L \gg 1$  we have for  $k_{min} \ll k \ll k_{max}$ ,

$$P(\mathbf{x}, k, t) = C k^0, \quad (64)$$

where

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{2c}} \int \frac{|\hat{n}_0(q_0)|^2}{q_0} dq_0. \quad (65)$$

Numerically obtained spectrum of freely decaying passive scalar is shown in Figure 7. As predicted, the spectrum tends to constant in an expanding range of wavenumbers centered at the initial scale.

## 7.3 Forced passive scalar.

Suppose that a passive scalar is forced so that the passive scalar generated per unit time in the interval  $dq_0$  is  $\xi(q_0) dq_0$ . It follows from the analysis of 2D turbulence that no stationary passive-scalar spectrum is possible inside the vortex cores of the advecting velocity field, whereas between the vortices we have from (51)

$$P(\mathbf{x}, k) = \frac{1}{2\pi k} \int \xi(q_0) dq_0 \int_{t_c}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{2c(t')q_0^2/k^2 - q_0^4/k^4 - 1}}. \quad (66)$$

Consider the uniform strain flow,  $\mathbf{u} = (\alpha x, -\alpha y)$ . For  $k \gg q_0$  (where  $q_0$  is the characteristic forcing wavenumber), we obtain famous Batchelor's  $k^{-1}$  spectrum,

$$P(\mathbf{x}, k) = \frac{\pi}{2\alpha} \left( \int \xi dq_0 \right) k^{-1}. \quad (67)$$

This spectrum corresponds to the constant spectral flux of the passive scalar toward high wavenumbers. For  $k \ll q_0$  we have

$$P(\mathbf{x}, k) = \frac{\pi}{2\alpha} \left( \int \frac{\xi dq_0}{q_0^2} \right) k^1. \quad (68)$$

This spectrum corresponds to the constant spectral flux of the pseudo-energy  $I$ . It will be considered in greater detail in next section.

In figure 8, we show the spectrum of the forced passive scalar advected by a random-field large-scale flow. One can see that Batchelor's  $k^{-1}$ -spectrum is formed on the high-wavenumber side of the forcing scale, whereas the  $k^1$ -spectrum is seen on the low- $k$  side of the forcing.

## 7.4 Pseudo-energy cascade in two and higher dimensions.

The  $k^1$ -spectrum is, in fact, a  $D = 2$  version ( $D$  being the dimension) of  $k^{D-1}$ -spectrum obtained by Kraichnan [5]. Because the pseudo-energy invariant was not known, the importance of this spectrum as a cascade-type spectrum was not understood, and it was misinterpreted as corresponding to an absolute statistical equilibrium state. Let us consider the equation for the passive scalar spectrum derived by Kraichnan for the case of  $\delta$ -correlated in time velocity field, and write a zero-diffusion limit of this equation,

$$\partial_t F = C[k\partial_{kk} - (D-1)\partial_k](kF), \quad (69)$$

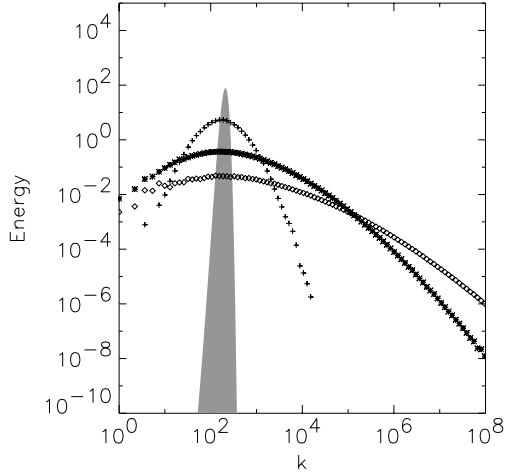


Figure 7: Spectrum of decaying passive scalar for three different moments of time. The initial spectrum is shaded.

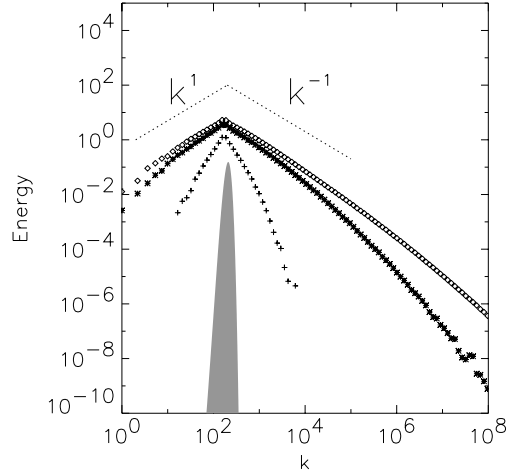


Figure 8: Forced passive scalar spectrum for three different moments of time. The shape of forcing is shaded.

where  $F$  is the passive scalar spectrum averaged over the large scales and  $C$  is a coefficient determined by the mean advection. Multiplying this equation by  $k^{-D}$ , we can write it as

$$\partial_t (F/k^D) = \partial_k [Ck^{1-D} \partial_k (kF)]. \quad (70)$$

Thus,

$$\int_0^\infty \frac{F}{k^D} dk = const, \quad (71)$$

which is a generalization of the pseudo-energy conservation to the  $D$ -dimensional case. According to (70), the flux of the pseudo-energy (71) is  $Ck^{1-D} \partial_k (kF)$ , and the constant-flux solution satisfies

$$Ck^{1-D} \partial_k (kF) = const,$$

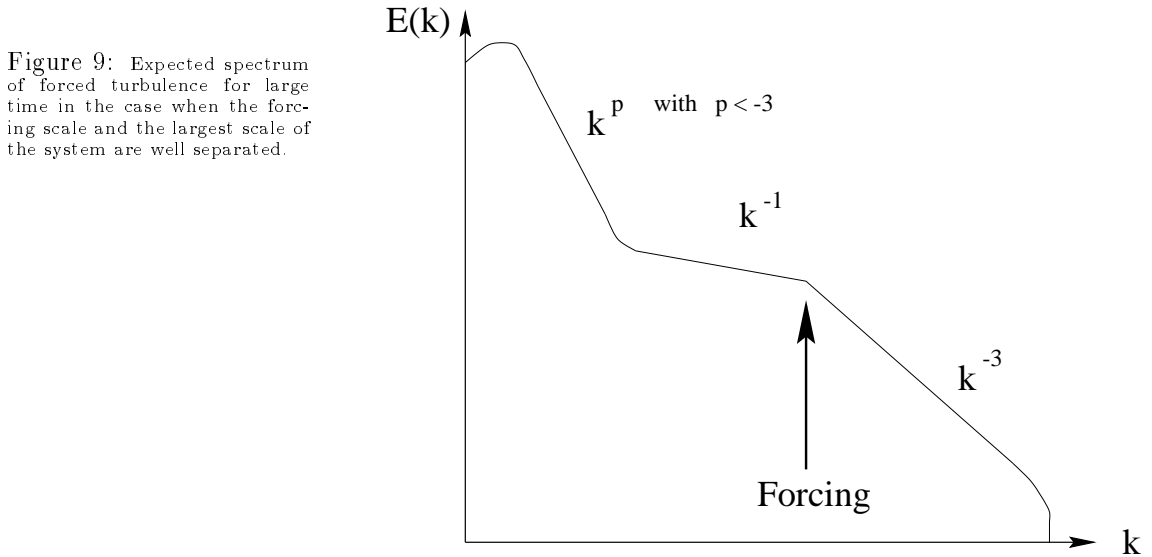
which gives

$$F \propto k^{D-1}.$$

This spectrum corresponds to an equipartition of the passive scalar in the phase space. However, it corresponds to a state which is very far from an absolute statistical equilibrium, because there is an inverse cascade of the pseudo-energy associated with this solution. It will be shown in a separate publication that the invariant of pseudo-energy and related inverse-cascade spectra exist in case of any dimensions for much more general than  $\delta$ -correlated in time advecting field [28].

## 8 Conclusion

Semi-classical description based on using Gabor transform proved to be an efficient tool for studying nonlocal 2D turbulence and passive scalar turbulence in Batchelor's regime. It allows to describe variations in the small-scale dynamics depending on the local large-scale flow. For example, it allowed to establish the fact that the turbulence spectra are steeper inside the vortex cores than in between of vortices. Numerical simulation of the semi-classical equations by PIC method allows to work with very large inertial intervals, typically eight decades wide. Cascade type spectra and spectra of decaying turbulence can be obtained within the semi-classical description analytically for general form of the large-scale flow without using averaging over large scales. It natural to think that 2D turbulence becomes nonlocal for large time because of the energy condensation at the largest scale. If this is true, then for very large time one should expect the spectrum of forced turbulence to be as shown in figure 9.



Note that spectrum  $k^{-1}$  will be observed only if the forcing scale is much less than the largest scale of the system. When approaching to the largest scale, the nonlocal inverse energy flux "slows down" and changes the spectral slope from  $-1$  to a sharper one corresponding to the energy condensate. Our nonlocal theory is strictly valid if the slope of such a condensate is less than  $-3$ . Unfortunately, it is presently impossible to test the hypothesis of non-locality using direct numerical simulations, because of insufficient resolution and large required time of simulations. On the other hand, it is possible to compute the entire spectrum treating the small-scale turbulence and large-scale condensate as two different fluids. Because there is no spectral gap in this case, the large-scale component may leak into the small scales and the low- $k$  tail of the small-scale component may start overlapping with the large scales. Thus, one has to implement a procedure transferring the large-scale component into the small-scale one and back when they cross a wavenumber  $k_b$  taken to be a boundary separating the large and small scales. As in this paper, the small-scale component can be computed by the PIC code, whereas the pseudo-spectral method can be used for the large-scale component. In this case, the natural choice for  $k_b$  is given by the smallest scale of the pseudo-spectral scheme. Numerical results obtained by such a two-fluid numerical method are reported in [22].

One remark should be made about the non-locality in the direct cascade of enstrophy. It is known that equal intervals of the  $k^{-3}$  spectrum give equal contributions to the enstrophy transfer [29]. In the present paper, these contributions have been assumed to be small compared to the enstrophy transfer via straining the large-scale component. Naturally, for very high wavenumbers this assumption will fail, and the small-scale  $k^{-3}$  spectrum itself will start dominating the enstrophy transfer [30]. Such a transfer is also non-local, but in a different from considered in this paper way. This regime was considered by Kraichnan, who showed that one should expect a logarithmic correction to the  $k^{-3}$  spectrum in this case [29].

## 9 Appendix. Evolution of the ellipse aspect ratio in straining and shearing large-scale flows.

We will consider two special cases of the large-scale flows: an axially symmetric vortex and a uniform strain flow. These two examples correspond to the characteristic behavior on the "islands of vorticity" and in the "sea of strain" in a general turbulent flow [25].

### 9.1 Axially symmetric vortex.

Let us solve the ray equations (8) and (9) for the case of an axysymmertic vortex when  $\bar{\mathbf{u}} = U(r)e_\phi$ , where  $r$  and  $\phi$  are the polar coordinates, and  $e_\phi$  is a unit vector tangent to  $r=\text{const}$ . The solution of (8) in this case is just a uniform rotation,

$$r = \text{const}, \quad (72)$$

$$\phi = \Omega t + \phi_0, \quad (73)$$

where  $\Omega = U/r$  is the angular velocity. For the wavenumber we have

$$\dot{k}_r = \Omega k_\phi - k_\phi \partial_r U, \quad (74)$$

$$\dot{k}_\phi = -\Omega k_r + \frac{1}{r} k_r U = 0. \quad (75)$$

Solving these equations, we obtain

$$k_\phi = \text{const} = q_{\phi 0} \quad (76)$$

$$k_r = -q_{\phi 0} r \beta t + q_{r 0}. \quad (77)$$

where  $\beta = r \partial_r \Omega$ . Near the vortex centre  $\partial_r \Omega = 0$  and  $k_r = \text{const}$  so that the wavevector is just uniformly rotating without any change in magnitude. For large time,  $r \beta t \gg 1$ , initial ring  $k = q_0$  becomes an ellipse with

$$k_{max} \approx q_0 |\beta| t, \quad (78)$$

$$k_{min} = q_0^2 / k_{max} \approx q_0 / |\beta| t, \quad (79)$$

$$\lambda = k_{max} / k_{min} \approx (\beta t)^2. \quad (80)$$

### 9.2 Uniform strain flow.

For uniform strain flow, the large-scale velocity field is  $\bar{\mathbf{u}} = (U_x, U_y)$  with

$$U_x = \alpha x, \quad (81)$$

$$U_y = -\alpha y, \quad (82)$$

where  $x$  and  $y$  axes are chosen to be principal axes of the strain, and  $\alpha = \text{const}$ . In this case,

$$\dot{k}_x = -\alpha k_x, \quad (83)$$

$$\dot{k}_y = \alpha k_y. \quad (84)$$

Solving these equations, we have

$$k_x = q_{0x} \exp(-\alpha t), \quad (85)$$

$$k_y = q_{0y} \exp(\alpha t). \quad (86)$$

For large time,  $\alpha t \gg 1$ , we have the following ellipse parameters,

$$k_{max} \approx q_0 \exp(\alpha t), \quad (87)$$

$$k_{min} \approx q_0 \exp(-\alpha t), \quad (88)$$

$$\lambda \approx \exp(2\alpha t). \quad (89)$$



## References

- [1] A.I. Dyachenko, S.V. Nazarenko and V.E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **165**, 330 (1992).
- [2] S.V. Nazarenko, N.J. Zabusky and T. Scheidegger, *Phys. Fluids* **7** 2407 (1995)
- [3] B. Dubrulle and S. Nazarenko, *Physica D* **110**, 123 (1997).
- [4] S. Nazarenko, A WKB theory of the rapid distortion of turbulence by inhomogeneous strain, *accepted for publication in J. Fluid Mech. in january 1999*
- [5] R. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **64**, 737 (1974).
- [6] L. Smith and V. Yakhot, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 352 (1993).
- [7] V. Borue, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1475 (1994).
- [8] V. Borue, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3967 (1993).
- [9] J.C. McWilliams, *J. Fluid Mech.* **146**, 21 (1984).
- [10] R. Benzi et al, *J. Phys A: Math. Gen.* **19**, 3771 (1986).
- [11] R. Benzi, S. Patnello and P. Santangelo, *Europhys. Lett.* **3**, 811 (1987)
- [12] A. Babiano, C. Basdevant, B. Legras and R. Sadourny, *J. Fluid Mech.* **183**, 379 (1987).
- [13] P. Santangelo, R. Benzi and B. Legras *Phys. Fluids A* **1**, 1027 (1989).
- [14] J.C. McWilliams, *Phys. Fluids A* **2**, 547 (1990).
- [15] M.E. Brachet, M. Meneguzzi and P.L. Sulem, *Phys. Rev. Lett* **57**, 683 (1986).
- [16] M.E. Brachet, M. Meneguzzi H. Politano and P.L. Sulem, *J. Fluid Mech.* **194**, 333 (1988).
- [17] N. K.-R. Kevlahan and M. Farge, *J. Fluid Mech.* **346**, 49 (1997).
- [18] Y. Couder, *J. Phys. Lett.* **45**, 353 (1984).
- [19] J. Sommeria, PhD Thesis, (1985).
- [20] O. Cardoso, D. Marteau and P. Tabeling, *Physical Review E* **49**, 454 (1994)
- [21] D. Marteau, O. Cardoso and P. Tabeling, *Physical Review E* **51**, 5124 (1995).
- [22] J.-P. Laval, B. Dubrulle and S.V. Nazarenko, Dynamical modeling of sub-grid scales in 2D turbulence, , *submitted to J. Fluid Mech.*, (1998)
- [23] R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **67**, 155 (1975).
- [24] G.K. Batchelor, *J. Fluid Mech.* **5**, 113 (1959).
- [25] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Phys. Rev. E.* **51**, 5609 (1995).
- [26] N. Kevlahan, B. Dubrulle, J.-P. Laval and S. Nazarenko, work in progress.
- [27] R.H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
- [28] S.V. Nazarenko, New invariant for passive scalars in Batchelor's regime, to be published.
- [29] R.H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **47**, 525 (1971).
- [30] G. Eyink, private communication.



## Annexe D

# Application du modèle aux écoulements plans

Reproduction d'un article soumis à *Physics of Fluids*

# Derivation of equilibrium profiles in plane parallel flows using a dynamic subgrid-scale model

B. Dubrulle<sup>1,2</sup>, J-P. Laval<sup>1,3</sup>, S. Nazarenko<sup>4</sup> and N. K.-R. Kevlahan<sup>5</sup>

<sup>1</sup> NCAR, P.O. Box 3000, Boulder CO 80307-3000

<sup>2</sup> CNRS, URA 285, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue Belin, F- 31400 Toulouse, France

<sup>3</sup> SAp/DAPNIA/DSM/CEA, CE Saclay, 91191 Gif sur Yvette Cedex, France

<sup>4</sup> Mathematics Institute University of Warwick COVENTRY CV4 7AL, UK

<sup>5</sup> Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, Hamilton, Ontario L8S 4K1, Canada

## Abstract

We present a derivation of equilibrium profiles in plane parallel flows using a dynamic subgrid-scale model. This new model provides expressions for the turbulent Reynolds subgrid-scale stresses via estimates of the subgrid *velocities* rather than velocity *correlations*. Subgrid-scale velocities are computed using an auxiliary equation which is derived directly from the Navier–Stokes equations. It has no adjustable parameters, and gives analytic expressions for the Reynolds stresses as a function of the mean flow gradient in the plane parallel geometry using an assumption of delta-correlation in time for the energy transfers. These expressions can be used to derive mean equilibrium profiles both in the near-wall and core regions. In the near-wall region we derive a general expression for the velocity profile which is linear in the viscous layer and logarithmic outside. This expression involves two physical parameters: the von Karman constant and the size of the viscous layer (which can be computed via a numerical implementation of our model). Fits of experimental profiles using our general formula provides reasonable values of these parameters ( $\kappa = 0.4$  to  $\kappa = 0.45$ , size of the viscous layer about 15 wall units). In the core region, we find that the shape of the profile depends on the geometry of the flow: it ranges from algebraic in channel flow, to exponential in the bulk of boundary layers, or linear in plane Couette flow. This classification is consistent with Oberlack’s system, which is based on symmetry arguments. Fits of boundary layer flows or channel flows at different Reynolds number over the whole flow region are performed using our results, and are found to be in very good agreement with available data.

## 1 Introduction

Turbulent shear flows are widespread and their structure has been investigated extensively for many decades in laboratory and numerical experiments. For a long time, it has been commonly accepted that the mean velocity profile across the channel is piece-wise: a linear ‘viscous profile’ near the wall, a logarithmic profile away from the wall, followed by an algebraic profile [1] in the centre of the channel. This description appeared to be supported by a simple dimensional analysis due to von Karman and by several matched asymptotic theories (see e.g. [2, 3]) which all led to the famous log law of the wall under appropriate asymptotic limits.

More recently, a controversy arose when Barenblatt [4] used a dimensional argument combined with an assumption of incomplete similarity to obtain a family of power laws, with logarithmic envelope, as the description of the mean velocity profile in a channel. In his theory, the index of the power law varies with the Reynolds number. This dependence was subsequently detected in the high Reynolds number data of Nikuradze [5], but found to be weak, like  $1/\ln(Re)$ . As a consequence, mean velocity profiles measured at different Reynolds number tend to scatter slightly and reveal only the envelope of the family of curves, i.e. the log-law. This controversy reached a climax when a team from Princeton used measurements made at the Super Pipe facility to test the Barenblatt theory. The Reynolds numbers obtained in this configuration are quite large, even larger than those obtained in the experiment of Nikuradze. The final result apparently contradicted Barenblatt’s theory, and was more consistent with the log-law, preceded by an algebraic profile with Reynolds independent index [6]. Barenblatt and Chorin have re-analyzed these data, and claim to have found a roughness dependence of the result which makes them less suitable to test their theory than the Nikuradze data.

Another recent theory for turbulent pipe/channel and boundary layer flow has been developed by George et al. [7], [8]. This theory is also based on dimensional analysis and matched asymptotic expansions, however this group bases their analysis directly on the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations. They determined that the correct velocity to scale the outer region is  $U_\infty$ , while the friction velocity  $u_*$  should be used to scale the inner region near the wall. Both regions follow Reynolds number dependent power laws, but with different constants and origins. However, they found that the Reynolds number dependence should be much stronger for a zero-pressure gradient boundary layer than for pipe and channel flows (where Reynolds number dependence is negligible). Note that they assume the same Reynolds number dependence as Barenblatt. The two different forms for the inner and outer scalings imply the existence of a mesolayer in which dissipative scales are not fully separated from the energy and Reynolds stress producing ones. The mesolayer follows a power law in boundary layers and a logarithmic law in pipe and channel flow. In both cases the profiles are functions of  $y + a$  rather than  $y$  alone (where  $a$  is an arbitrary constant). Their theory also matches the Super Pipe data very well.

At the same time new results were obtained which only added to the confusion. Oberlack [9] used a Lie group analysis of the equations of motion to classify all the possible equilibrium velocity profiles allowed by the symmetry of the Navier–Stokes equation. The results include the logarithmic law, the algebraic law, the viscous sublayer, the linear profile and the exponential profile as particular cases. This study was followed by a data analysis to try to determine the actual conditions required for each law to be realized. Analyzing Niederschulte’s data [10], Oberlack found evidence of an algebraic law extending almost to the center of the channel, and scaling with the channel’s half-width instead of with the “inner scale” (viscous scale) predicted in Barenblatt’s theory. Moreover, the index of the power law measured by Oberlack was significantly larger (one order of magnitude) than that predicted by the theory. An analysis of the Super Pipe data of Zagarola [11] confirmed the existence of this algebraic law covering 80% of the center of the pipe [12]. More recently, the same data have been shown to fit a modified cosh-profile arising from a new closure equation [13]. Since all the theories describing these results can be put on the same phenomenological (dimensional or closure-like) footing, it is hard to decide which is right and in which cases.

One way to resolve the controversy is to leave aside heuristics and derive analytical results based solely on the Navier–Stokes equations. In a previous paper [14], we derived the equilibrium velocity profile for a flow in the near wall region using a WKB method generalizing the Rapid Distortion Theory, using a simplified assumption about the small-scale generation. Specifically, we modelled the debris of the near-wall vortices penetrating the outer regions as a weak external forcing acting at small-scales. This simplification allows exact analytical solutions, with the celebrated log law of the wall being the one them in the case of a forcing with short correlation in time and statistically homogeneous in space. The main elements of this approach can be most easily explained using the simplest example of two-dimensional shear flow turbulence, see [19].

From a theoretical point of view, such a theory is important because it is the first instance of a derivation of the log-law starting from the Navier–Stokes equations, and not from dimensional arguments, as is usually done. Such exact results can serve as a basis for a less rigorous but more general and, therefore, more practical model which is developed in the present paper. First, we replace the statistical averaging procedure of the previous paper with space averages, which are more suitable for numerical and laboratory experiments. Indeed, in numerical simulation, one either performs horizontal averages over the streamwise directions, or spatial average over a given scale, representing the smallest resolved scale in the simulation (Large Eddy Simulation approach); in laboratory experiments one usually performs times averages which are then translated into spatial averages using Taylor’s hypothesis. On the other hand, statistical averages require a large number of realizations of the same flow, which, being useful theoretically, is often impractical. The second new element of the present paper is that the external forcing is chosen based on physical requirements, such as zero turbulent stress at the wall, and based on the experimental data for the mean profiles. Alternatively, to determine the forcing one could measure the starting vorticity penetrating from the viscous sublayer directly, but this is a challenging task experimentally and it requires further analysis of the numerical data, and we leave such an approach for future. Note that the choice of forcing is important because, as we mentioned in the previous paper, only uniform and short correlated forcing leads to the log law. On the other hand, it is well known that far from the wall (in the core region or in the outer region), the shape of the equilibrium profile changes to a log-law [15], algebraic or exponential [9] defect law. This probably reflects some changes in the generation of small-scales which needs to be taken into account by a self-consistent modelling of the forcing. The purpose of the present paper is to derive such a self-consistent model of a channel flow by combining ideas from the WKB-RDT method and from LES. The model is derived directly from the Navier–Stokes equations, and is therefore parameter free. By this we mean that all constants appearing in the model can be computed by solving the model equations numerically.

By moving from the previous WKB-RDT model with external forcing to our LES-RDT model with self-consistent forcing, we give up the possibility of exact analytical solutions because of non-linear dynamical coupling. We show here that simple physical simplifying assumptions lead to a solution where the subgrid-scale Reynolds stresses can be expressed as a function of resolved quantities and numerical constants only, which cannot be derived analytically. Thus, the corresponding set of closed equations for the resolved velocities can be integrated further analytically, or pseudo-analytically, to find qualitatively the equilibrium profile in any part of the channel. We find that the qualitative profile changes from a log-law near the boundary, to an algebraic (exponential) defect law for a flow within a closed channel (over a flat plate).

The present paper is not intended to be as fully rigorous as the previous one. We allow ourselves the liberty, when necessary, of making simplifying assumptions which are not fully justified. We will attempt to minimize the arbitrariness of our assumptions by providing technical or mathematical justifications where possible. However, to simplify the paper, we have placed the technical details of the derivation in the appendices.

## 2 Derivation of the dynamical equations

### 2.1 Notations and constitutive equations

We consider an incompressible velocity field  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  satisfying the Navier–Stokes equations:

$$\begin{aligned}\partial_i u_i &= 0, \\ \partial_t u_i + \partial_j (u_i u_j) &= -\partial_i p + \nu \Delta u_i + \sigma_i,\end{aligned}\tag{1}$$

where  $p$  is the pressure,  $\nu$  is the kinematic viscosity and  $\sigma$  is an external forcing. We have set the (constant) density equal to one for simplicity.

In this paper we shall consider two types of geometry: plane channel flow (where the flow is bounded by two infinite flat rigid plates separated by a vertical distance  $2d$ ) and a flat plate boundary layer (where the fluid is parallel to and bounded by a single flat plate). In the first case, the forcing is via a constant pressure gradient applied in the  $x$  direction parallel to the plates  $\sigma = (-dP_*/dx; 0, 0)$ , or by constant movement of plates in opposite directions (plane Couette flow). In the second case, we assume no external forcing ( $\sigma = 0$ ), but we allow for a free stream velocity  $u_\infty$  at the outer (infinite) edge of the boundary layer. We assume no-slip boundary conditions for the velocity on the rigid plates.

In both cases, we consider a parallel plane geometry in which the mean velocity (averaged horizontally and in time) is parallel to the plate ( $x$ -direction), and depends only on the direction perpendicular to the plate ( $z$ -direction):  $\langle \mathbf{u} \rangle = (U(z), 0, 0)$ . (This implies a clever choice of the filtering, which is discussed in the appendix.) Note that boundary layer flows are not strictly parallel. However, since the streamline curvature is usually very small, the flow may be considered to be locally parallel. Also, Oberlack [9] showed that it is possible to take into account the streamwise dependence of the mean velocity profile by using as an outer length scale the Rotta–Clauser length  $\Delta = \int_0^\infty (\langle u_\infty \rangle - \langle u \rangle) / u_* dz$ , where  $\langle u \rangle$  is the mean velocity and  $u_*$  is the friction velocity, given by  $\nu \partial_z u(z=0) = u_*^2$  and  $\langle u_\infty \rangle$  is the mean velocity at the outer edge of the boundary layer.

### 2.2 Resolved scale equations

To derive the large-scale equations, we decompose the fields into their resolved and subgrid parts

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \equiv \mathbf{U} + \mathbf{u}',\tag{2}$$

where the average is taken via a filter (which is defined and discussed in appendix, see equation 66). Note that from now on we shall refer to  $\bar{\mathbf{u}}$  as the resolved velocity, as distinguished from the mean velocity  $\langle u \rangle$  which is obtained by averaging the velocity horizontally and in time. Applying this decomposition to the Navier–Stokes equations (1) and taking into account the fact that the averaging and the  $y$ -component of the Laplacian for the horizontal velocity do not commute (see appendix), we obtain the following equation for the resolved streamwise velocity,

$$\partial_t U_i + \partial_j \overline{u_i u_j} = -\partial_i P + \nu \Delta U_i + \mathcal{S}(z) \delta_{i1} + \bar{\sigma}_i.\tag{3}$$

Here,  $\mathcal{S}(z)$  are the surface terms, due to the boundary conditions. These surface terms depend on the geometry of the flow:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{channel} &= u_*^2 (g_3(z-d) + g_3(z+d)), \\ \mathcal{S}_{Couette} &= u_*^2 (g_3(z-d) - g_3(z+d)) + \\ &\quad \nu U_0 \left( \frac{dg_3}{dz}(z-d) - \frac{dg_3}{dz}(z+d) \right), \\ \mathcal{S}_{BL} &= -u_*^2 (g_3(z)) + \nu u_\infty \frac{dg_3}{dz}(z-h).\end{aligned}\tag{4}$$

Here,  $h$  is the height of the boundary layer and  $U_0$  is the speed of the plates for the plane Couette flow ( $U = \pm U_0$  at  $z = \mp d$ ). The function  $g_3(z)$  is the correction due to the filter which depends explicitly on the filter choice and on the cut-off scale in the vertical direction.

If we use the decomposition (2), we can split the nonlinear terms of (3) into several terms,

$$\begin{aligned} \partial_t U_i + \partial_j \overline{U_i U_j} + \partial_j \langle \overline{U_i u'_j} + \overline{U_j u'_i} \rangle + \partial_j \overline{u'_i u'_j} = \\ -\partial_i P + \nu \partial_{jj} U_i + \mathcal{S}(z) \delta_{i1} + \overline{\sigma}_i. \end{aligned} \quad (5)$$

The resolved scale motions depend on the subgrid-scale motions via two terms: the usual Reynolds stresses, involving only subgrid-scale quantities, and an unusual cross term between subgrid and resolved quantities. Traditional LES usually models these two terms together. However, recent numerical experiments by Domaradzki et al. [16] indicate that in a channel flow, these two terms have very different influence on the mean flow: the subgrid-subgrid term appears to be about 50% smaller than the subgrid-resolved component. This property can be justified by simple dimensional arguments (see appendix). In the sequel, we show that we are able to model the two terms separately, and hence are able to better capture their different properties by computing them via the evolution of the subgrid-scale velocities. This evolution is given by subgrid-scale equations.

### 2.3 Subgrid-scale equations

To find the subgrid-scale equations, we consider the subgrid component of the constitutive equations (1),

$$\begin{aligned} \partial_i u'_i &= 0, \\ \partial_t u'_i + \partial_i (u_i u_j - \overline{u_i u_j}) &= -\partial_i p' + \nu \Delta u'_i - \mathcal{S}(z) \delta_{i1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Note that the subgrid part of the (constant) forcing  $\sigma$  is zero. At this level, we see that the small scales are generated via two types of terms: the subgrid part of the nonlinear cascade from large to small scales (as expressed by the second term of the l.h.s. of 6), and the surface term. This is consistent with the physics of the problem: small-scale turbulence is generated at the surface or by a transfer of energy to smaller scales (termed backscatter).

Now we can use decomposition (2) to split the nonlinear part of (6) into terms involving resolved-subgrid-scale products and subgrid-subgrid-scale products (the resolved-resolved-scale term is zero because of the plane parallel geometry). The relative magnitude of these terms has been estimated by Domaradzki et al [16] in the channel flow geometry. They found that the subgrid-subgrid energy transfer at subgrid-scales is between one and two orders of magnitude smaller than the energy transfer induced by subgrid-resolved (nonlocal) interactions. (In the appendix we present dimensional arguments supporting this observation.) For this reason it is tempting to neglect the subgrid-subgrid terms in the small-scale equation, i.e. to consider only the *nonlocal* dynamics of the subgrid motions. The corresponding equations are our subgrid-scale model (see below) which has no adjustable parameters. Note that energy considerations alone are not sufficient to prove that the subgrid-scale dynamics are nonlocal: e.g. phase effects could lead to an average reduction (with time) of the importance of the non-local energy transfer and make it less dominant. Therefore, the dynamical justification of our nonlocal hypothesis requires some numerical tests, which are in progress. We are, however, confident that our approximation is meaningful, and does indeed capture the main features of the subgrid-scale dynamics because the relevant dynamical test of non-locality performed on two-dimensional turbulence is very good [17].

Retaining only the nonlocal interactions, our subgrid-scale model becomes

$$\begin{aligned} \partial_j u'_j &= 0, \\ \partial_t u'_i + U_j \partial_j u'_i + u'_j \partial_j U_i &= -\partial_i p' + \nu \Delta u'_i + F_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Note that this model is in fact an auxiliary equation for the subgrid velocities. It enables us to obtain an expression for the Reynolds stresses via a direct estimate of velocities rather than velocity



*correlations*, as is usual. This idea was used for the first time in [18] with an empirical estimate procedure. Here, our estimate procedure is derived directly from the Navier–Stokes equations, and involves no free parameters, in contrast to  $K-\epsilon$  models, which also involve the solution of an auxiliary equation.

Note also that the plane parallel geometry does not preclude horizontal variation of the subgrid-scale quantities, this creates “pseudo-forces”  $F_i$ ,

$$F_i = -\mathcal{S}(z)\delta_{i1} + \partial_j (\overline{U_i U_j} - U_i U_j) + \partial_j \overline{U_j u_i'} + \partial_j \overline{U_i u_j'}, \quad (8)$$

We call them pseudo-forces because they depend linearly on the averaged part of the subgrid-scale motions. We will eventually simplify them by replacing them with prescribed external forces, in order to get analytical solutions.

The equations (8), although superficially complicated, have a simple structure: they are linear inhomogeneous equations for the subgrid motions. The forcing comes from the subgrid part of the nonlinear cascade amongst the resolved scales of motion. The linearity of the forcing is the essential simplification which makes it possible in certain cases to solve subgrid model analytically in terms of the resolved quantities. By plugging the solution back into the large-scale equation, we obtain a closed problem for the resolved scales.

To take advantage of small-scale intermittency (e.g. turbulent spots or streaks), we now decompose the small-scale equation into its Gabor modes (which are localized in both wavenumber  $\mathbf{k}$  and position  $\mathbf{x}$ ). The mathematical definition of the Gabor transform is given in appendix 5.2.1. We now take the Gabor transform of equation (7) and use (73). To leading order in the scale separation (see [14] for rigorous justifications) and dropping primes for simpler notations <sup>1</sup> we obtain the following equations

$$\begin{aligned} \partial_j \hat{u}_j &= 0, \\ \partial_t \hat{u}_i + U_j \partial_j \hat{u}_i + \partial_j (U_m k_m) \partial_{k_j} \hat{u}_i &= \\ -ik_i \hat{p} - \hat{u}_j \partial_j U_i - \nu \mathbf{k}^2 \hat{u}_i + \hat{F}_i, \end{aligned} \quad (9)$$

where  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  is the wavenumber. Note that in the Gabor transformation, we did not have to take into account surface terms because for the boundary conditions which we chose, the subgrid quantities have necessarily zero boundary conditions at the boundary (for both the velocity and its derivative).

The set of equations (9) can be put into the form of a set of ray equations by introducing the total derivative,

$$D_t \equiv \partial_t + U_j \partial_j - \partial_j (U_m k_m) \partial_{k_j}, \quad (10)$$

which is a total time derivative in the phase space  $(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$  provided  $\mathbf{k}$  and  $\mathbf{x}$  satisfy:

$$\begin{aligned} D_t x_i &= U_i, \\ D_t k_i &= -k_j \partial_j U_i. \end{aligned} \quad (11)$$

These ray equations describe the motion of particles passively advected in position and wavenumber by a large-scale flow. Using the incompressibility to eliminate the pressure, we can finally re-express the system (9) as

$$D_t \hat{u}_i = \left( \frac{2k_i k_m}{\mathbf{k}^2} - \delta_{im} \right) \hat{u}_j \partial_j U_m - \nu \mathbf{k}^2 \hat{u}_i + \hat{F}_i^\perp, \quad (12)$$

where  $F_i^\perp$  are the divergence free components of the force:

$$F_i^\perp = \left( \delta_{im} - \frac{k_i k_m}{\mathbf{k}^2} \right) F_m. \quad (13)$$

---

<sup>1</sup>This means that from now on, we denote average quantities by capital letters, and fluctuating quantities by lower case letters.

The set of equations (5), (12), where the Reynolds stresses are computed using (74) constitute the main equations of our subgrid-scale model. This model is dynamical because it allows a time and space evolution of the Reynolds stress. It has been derived directly from the Navier–Stokes equations under the assumption of non-locality of the supergrid energy transfer. It involves no adjustable parameters. Note that this subgrid-scale modelling is in the spirit of a recent model by Domaradzki and Saiki [18] in which the subgrid velocity, rather than energy tensor is estimated, which permits the detailed computation of all terms appearing in the Reynolds stresses. Note that because we have used the Gabor transform (as opposed to the Fourier transform), the subgrid-scale energy spectrum can vary in space, which allows for inhomogeneous turbulence.

Leaving the numerical implementation of this model to further work, we focus here on possible analytical predictions obtained within the framework of the model. In the present paper, we show how one can derive analytically the equilibrium profile for plane parallel flows using this model. This is because, after time and horizontal averaging, the equations of motions become solvable analytically, as we now show.

### 3 Equilibrium profiles in the delta-correlated approximation

#### 3.1 The time and horizontally averaged equations

From now on, we concentrate on the derivation of equilibrium profiles in a plane parallel geometry. Namely, we wish to derive the possible shapes for  $\langle U_i \rangle = (\langle U \rangle(z), 0, 0)$ , where now  $\langle \rangle$  refers to a horizontal and time average. The horizontal averaging can be performed easily in our LES formalism by taking constant functions as filters in the horizontal direction (i.e.  $g_1(x) = g_2(y) = 1/L$ , where  $L$  is the horizontal scale over which the horizontal average is performed). Then,  $\langle U \rangle$  can be obtained easily by taking only a time average of the corresponding resolved velocity  $U$ . So, from now on, we use constant horizontal filters, and consider that  $\langle \rangle$  denotes a time average. The equation for the mean profile can then be obtained via a time averaging of (5),

$$\begin{aligned} \partial_z \langle \overline{Uw} \rangle + \partial_z \langle \overline{uw} \rangle &= -\partial_x P + \nu \partial_{zz} U + \overline{\sigma_x} + \mathcal{S}(z), \\ \partial_z \langle \overline{vw} \rangle &= 0, \\ \partial_z \langle \overline{w^2} \rangle &= -\partial_z P. \end{aligned} \tag{14}$$

Here, we have taken into account the plane parallel geometry, and the fact that, for constant horizontal averages, terms involving horizontal derivatives vanish. The first equation of (14) gives the mean profile. The second is a consistency equation for the subgrid stresses, to avoid generation of spanwise mean velocity. The third equation expresses the hydrostatic equilibrium in the vertical direction.

The subgrid Reynolds stresses can be found by considering the ray equations (15) in a plane parallel geometry. They are:

$$\begin{aligned} D_t \hat{u} &= \frac{k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \hat{w} \partial_z U - \nu \mathbf{k}^2 \hat{u} + \hat{F}_u^\perp, \\ D_t \hat{v} &= \frac{2k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \hat{w} \partial_z U - \nu \mathbf{k}^2 \hat{v} + \hat{F}_v^\perp, \\ D_t \hat{w} &= \frac{2k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \hat{w} \partial_z U - \nu \mathbf{k}^2 \hat{w} + \hat{F}_w^\perp \end{aligned} \tag{15}$$

The corresponding ray equations are in this geometry:

$$\begin{aligned}
D_t x &= U, \\
D_t y &= 0, \\
D_t z &= 0, \\
D_t k_x &= 0, \\
D_t k_y &= 0, \\
D_t k_z &= -k_z \partial_z U.
\end{aligned} \tag{16}$$

### 3.2 The forcing

In general, the ray equations (11) and (12) have no simple analytical solution because the motion of the small and large scales are implicitly nonlinearly coupled via the forces: these forces determine the behaviour of the small scales, but they depend on both large and small scales in a non-trivial way. This means that equilibrium solutions can in general only be found numerically, by a recursive procedure. The situation is much simpler if one allows an *a posteriori* characterization of the forces, by considering them as some sort of external noise, with simple prescribed statistics, or, in our case, simple time averaging properties. This idea was already used in the previous paper [14]. Here, we use the same approach, but take into account that the force does not have zero average.

Therefore, from now on we consider the forces  $F_u$ ,  $F_v$  and  $F_w$  appearing in (7) and (9) to be external forces, with prescribed averaging properties. The simplest choice we can make is to assume that the forces are  $\delta$ -correlated in time. The idea is that because of Taylor's hypothesis space averages are, loosely speaking, equivalent to time averages. Then, because of the chaotic nature of the flow, solutions with different initial conditions have very different behaviour. So, it seems reasonable to assume that the average of two quantities starting at different times is zero. We shall refer to this as the  $\delta$ -correlation assumption. In §5.4 we show that this property enables us to write the correlation of two Gabor transforms corresponding to rays starting from same origin as

$$\langle \hat{F}_i^\perp(x, k, t) \hat{F}_j^\perp(x, k', t') \rangle \propto A_{ij}(k) \delta(k - k'), \tag{17}$$

where the coefficient of proportionality depends only on the mean gradients and on the angle between the vector components of  $k$ . When the forcing is isotropic, one may assume that the function  $A_{ij}$  takes the following standard form:

$$A_{ij}(k) = \frac{3F(\mathbf{k})}{8\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j). \tag{18}$$

Isotropy can be safely assumed in the core region, which is the region we are most interested in. It is not expected to hold near the wall. Furthermore, we shall assume that the forcing is symmetric with respect to  $y \rightarrow -y$  to ensure that vertical and spanwise mean velocity are not generated (see [14] and below). We now show that our assumptions allow the small scales and the subgrid stresses to be expressed in terms of the mean velocity profile.

### 3.3 Subgrid-scale solution

The integration of (16) with respect to time is straightforward in the plane parallel case, and gives

$$\begin{aligned}
x &= U(z)(t - t_0) + x_0, & y &= y_0, & z &= z_0, \\
k_x &= k_{x0}, & k_y &= k_{y0}, & k_z &= k_{z0} - k_x \partial_z U(t - t_0),
\end{aligned} \tag{19}$$

where  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $k_{x0}$ ,  $k_{y0}$  and  $k_{z0}$  are the initial conditions of the ray. This equation shows that the parameter  $R = k_z/k_x$  can be used instead of  $t$  to label the trajectories. To further simplify the notation we introduce

$$\begin{aligned}
k_h &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \\
\theta &= \arctan(k_y/k_x).
\end{aligned} \tag{20}$$

Note that  $k_h$  and  $\theta$  are constant along the rays. With this notation the subgrid-scale equations (15) become

$$\begin{aligned}
D_R \hat{u} &= - \left[ \frac{2 \cos \theta}{1 + R^2} - \frac{1}{\cos \theta} \right] \hat{w} + \frac{\nu k_h^2}{\cos \theta \partial_z U} (1 + R^2) \hat{u} \\
&\quad - \frac{1}{\cos \theta \partial_z U} \hat{F}_u^\perp, \\
D_R \hat{v} &= - \frac{2 \sin \theta}{1 + R^2} \hat{w} + \frac{\nu k_h^2}{\cos \theta \partial_z U} (1 + R^2) \hat{v} \\
&\quad - \frac{1}{\cos \theta \partial_z U} \hat{F}_v^\perp, \\
D_R \hat{w} &= - \frac{2R}{1 + R^2} \hat{w} + \frac{\nu k_h^2}{\cos \theta \partial_z U} (1 + R^2) \hat{w} \\
&\quad - \frac{1}{\cos \theta \partial_z U} \hat{F}_w^\perp.
\end{aligned} \tag{21}$$

Note that the two-dimensional case can be easily found by putting  $\theta = 0$ . Note also that when the forces are symmetric with respect to  $y \rightarrow -y$ , their Gabor transform is also symmetric with respect to  $k_y \rightarrow -k_y$ , i.e.  $\theta \rightarrow -\theta$ .

Since the forces are external, we can find the subgrid-scale motions as the solution of a coupled linear inhomogeneous system of ordinary differential equations in  $R$ . In the appendix, we show that this can be written as

$$(u, v, w)(R) = \int_{-\infty}^R (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})(R, R_0) dR_0, \tag{22}$$

where  $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})(R, R_0)$  are solutions of the homogeneous part of (21) (i.e. with no force term), such that at  $R = R_0$ ,

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})(R_0, R_0) = - \frac{1}{\cos \theta \partial_z U} (F_u^\perp, F_v^\perp, F_w)(R_0). \tag{23}$$

This property can be used to compute formally the first subgrid term  $\langle \overline{Uw} \rangle$ . Indeed, to leading order in the scale separation (see appendix), we have:

$$\overline{Uw} \approx U \overline{w}, \tag{24}$$

with

$$\overline{w} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} k_h dk_h \int_{-\infty}^{\infty} dR \int_{-\infty}^R \tilde{w}(R, R_0) dR_0. \tag{25}$$

Using the solutions of the homogeneous system given in appendix,  $\overline{w}$  can then be written:

$$\overline{w} = - \frac{1}{\partial_z U} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} k_h dk_h \int_{-\infty}^{\infty} dR \int_{-\infty}^R F_w^\perp(R_0, k_h, \theta) \frac{1 + R_0^2}{1 + R^2} \frac{\exp \left[ - \frac{\nu k_h^2 \int_{R_0}^R (1 + X^2) dX}{\partial_z U \cos \theta} \right]}{\cos \theta} dR_0. \tag{26}$$

Note that in the limit  $\nu \rightarrow 0$ , the integral diverges at  $\theta = \pi/2$ , but the viscosity regularizes this singular behaviour. Note also that the only functional dependence of  $\eta$  in  $z$  is through  $\partial_z U$ . It is shown in appendix that in the limit where  $\nu \rightarrow 0$ , the expression (26) can actually be expanded as

$$\overline{w} \equiv \frac{\eta}{\partial_z U} = \frac{\eta_0 \ln(\nu k_*^2 / \partial_z U) + \eta_1}{\partial_z U} + O(\nu k_*^2 / \partial_z U), \tag{27}$$

where  $k_*$  is a typical horizontal wavenumber and  $\eta_0 = 0$  for isotropic forcing.

Similar results can be obtained for the other Reynolds stresses  $\langle \overline{uw} \rangle$ . One finds [14] that the Reynolds stresses diverge in the limit  $\nu \rightarrow 0$  and can be written as

$$\langle \overline{uw} \rangle = \frac{\lambda}{\partial_z U}, \quad (28)$$

with

$$\lambda = \frac{\lambda_0 \partial_z U}{\nu k_*^2} + \lambda_1 \frac{\ln(\nu k_*^2 / \partial_z U)}{\partial_z U} + \lambda_2 + O(\nu k_*^2 / \partial_z U). \quad (29)$$

A detailed proof of this can be found in [14] and will not be repeated here. We can, however, make some remarks about the sign of  $\lambda$  by using the following results: as shown in appendix, the averaged product  $\langle \overline{uw} \rangle$  can also be written as a function of the product of solutions of the homogeneous part of (21)  $\tilde{u}\tilde{w}$  as:

$$\langle \overline{uw} \rangle = - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_h \int_{-\infty}^{\infty} dR (\cos \theta \partial_z U) \int_{-\infty}^R \langle \tilde{u}\tilde{w}(R, R_0) \rangle dR_0. \quad (30)$$

In the inviscid limit, straightforward manipulations of (21) produces the following relation between solutions of the homogeneous system

$$\tilde{u}\tilde{w} = \cos \theta \left( D_R \left[ \frac{\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}{2} \right] - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} D_R [\tilde{u}\tilde{v}] - \frac{1}{\sin \theta} D_R [R\tilde{v}\tilde{w}] \right), \quad (31)$$

Inserting (31) in (30) and exchanging the order of integrals over  $R$  and  $R_0$ , we find

$$\begin{aligned} \langle \overline{uw} \rangle &= \frac{\lambda}{\partial_z U}, \\ \lambda &= - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_h \int_{-\infty}^{\infty} dR_0 (\cos \theta \partial_z U)^2 \left[ \frac{\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}{2} \right] \\ &\quad - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} [\tilde{u}\tilde{v}] - \frac{1}{\sin \theta} [R\tilde{v}\tilde{w}]|_{R_0}^{\infty}, \end{aligned} \quad (32)$$

where the notation  $a|_{R_0}^{\infty}$  stands for  $a(\infty) - a(R_0)$ . Using the initial and asymptotic values of  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  and  $\tilde{w}$ , one finds finally that

$$\begin{aligned} \lambda &= - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_h \int_{-\infty}^{\infty} dR_0 \left[ - \frac{F_u^{\perp} F_w^{\perp} (1 + R_0^2) \arctan(1/R_0)}{\cos \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|F_w^{\perp}|^2}{2} \left( 1 + R_0^2 - 2R_0(1 + R_0^2) \arctan(1/R_0) - (1 + R_0^2)^2 \arctan^2(1/R_0) \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_h \int_{-\infty}^{\infty} dR_0 \frac{3F}{16\pi k_h^2 (1 + R_0^2)} \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \arctan^2(1/R_0) \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Here, we have used (18) to simplify the expression. The expression (33), which is derived in the inviscid limit, shows interesting features. First, note that removing the angular integration and setting  $\theta = 0$ , we obtain the expression of  $\lambda$  in the two-dimensional limit. This expression only depends on  $F$ , and is clearly *positive*. This means that the “turbulent” Reynolds stress  $-\langle \overline{uw} \rangle$  has the opposite sign of the viscous stress  $\nu \partial_z U$ . This result was previously obtained by [19]. It might be a consequence of the inverse cascade of energy arising in two-dimensional turbulence. In the three-dimensional case, the expression (33) is actually divergent, as noted in [14]. Taking into account the fact that viscosity regularizes the Reynolds stress at  $\theta = \pi/2$ , here we note that the divergence makes the expression of  $\lambda$  *negative*. This means that for small enough  $\nu$  (large Reynolds number), the turbulent stress can be expected to change sign and have the *same* sign as

the viscous stress. This discussion is strictly only valid for isotropic forcing. It might be interesting to investigate the effect of anisotropic forcing.

Summarizing, we have found that the two Reynolds stresses appearing in our model can be expressed as (28) and (27). Here  $\eta$ , and  $\lambda$  are function of  $z$  only via  $\partial_z U$  and are the only parameters (functions) appearing in our model. They are not arbitrary free parameters, however, but are connected with the energy cascade from the large scales to the small scales. Of course, the amount of energy cascading depends upon the filter which is used, so these constants are filter-dependent. The exact values of  $\eta$  and  $\lambda$  can be obtained, in principle, from a numerical LES simulation where the contribution from the subgrid-scales, expressed by equations (28), and (27) are computed self-consistently at each time step via the forces (8).

### 3.4 Resolved scale solution

Upon substitution of the Reynolds stresses by their expression, and neglecting the terms involving the viscosity-which are important only close to the surface (but see Section 4.2, for inclusion of these terms)- we get the resolved scale equations:

$$\partial_z \left( \frac{\eta \langle U \rangle}{\partial_z \langle U \rangle} + \frac{\lambda}{\partial_z \langle U \rangle} \right) = -u_*^2 g_3(z) - \langle \sigma_x \rangle. \quad (34)$$

We now nondimensionalize the length by  $L = d$  (channel case) or  $L = h$  (boundary layer case) and the velocities by  $u_*$ . Note that  $\lambda$  is dimensionally equivalent to an energy transfer ( $V^3/L$ ). So we may write:

$$\lambda = \frac{u_*^3}{L} \tilde{\lambda}, \quad (35)$$

where  $\tilde{\lambda}$  is a non-dimensional constant. We stress here again that it might be filter dependent, and that its exact value can be obtained via a LES simulation. For the term  $\eta$ , we note that the dimension of  $\eta$  is  $V^2/L$ . So, we write it:

$$\eta = \frac{u_*^2}{d} \tilde{\eta}, \quad (36)$$

where the  $\tilde{\cdot}$  refers to nondimensionalized quantities, such as  $z/L$ . With this nondimensionalization, and after one integration over  $\tilde{z}$  of (34), we obtain the ordinary differential equation

$$\tilde{\eta} \frac{\tilde{U}}{\partial_{\tilde{z}} \tilde{U}} + \tilde{\lambda} \frac{1}{\partial_{\tilde{z}} \tilde{U}} = \int_{z_0}^{\tilde{z}} (\mathcal{S}(x) + \langle \sigma_x \rangle) dx, \quad (37)$$

Here, we have introduced the location  $z_0$  where the total (viscous plus turbulent) Reynolds stresses vanish (e.g.  $z_0 = 0$  for channel flows). The mean profile can then be obtained via integration of (37) as a function of  $z$ , for a given filter shape, once the value of  $\tilde{\lambda}$  and  $\tilde{\eta}$  is fixed. This shape can be found in principle from a numerical implementation of our subgrid model. Leaving this for future work, we prefer instead to examine the qualitative behaviour of the parameters of our model, in order to construct qualitative analytical mean profiles.

### 3.5 Qualitative behaviour of the model parameters

Our model involves three parameter functions:  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\lambda}$  and

$$H = \int_{z_0}^{\tilde{z}} \left( \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{z}') + \langle \sigma_1 \rangle d\tilde{z}' \right). \quad (38)$$

Their qualitative behaviour can be found, for a given filter shape, via their definition and their high Reynolds number expansion. In the sequel, computations are done with a Gaussian filter of width  $l_*$ , leading to  $g_3(z) = N^{-1}(l_*) \exp[-z^2/(2l_*^2)]$ , where  $N(l_*)$  is a suitable normalizing quantity.

The computation of the function  $H$  from its definition (38) is straightforward, and  $H$  is shown in figures 2 and 1. Note the linear (channel case) or constant (boundary layer) behaviour in the core or bulk region, and the deviations from the linear law near the boundaries. To get the qualitative

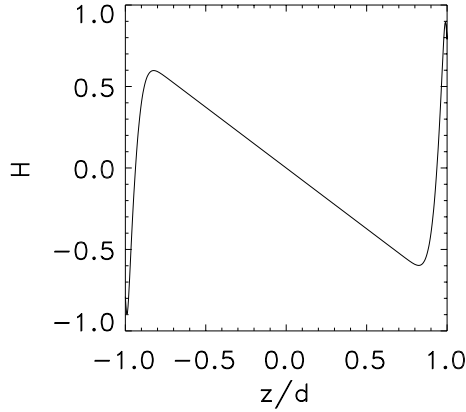


Figure 1: Function  $H$  defined by (38) for a channel with a Gaussian filter.

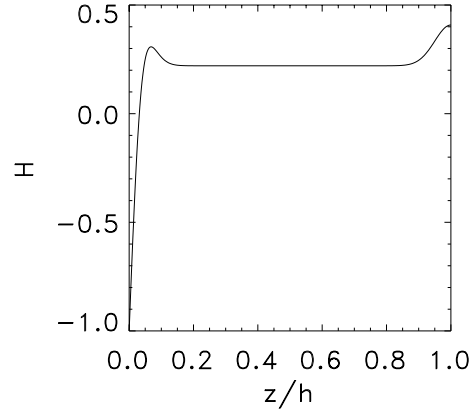


Figure 2: Function  $H$  defined by (38) for a boundary layer with a Gaussian filter.

behaviour of  $\tilde{\eta}$  we use the expansion (27) and consider two interesting limits. In the near-wall limit,  $\partial_z \tilde{U} \rightarrow u_* d / \nu$ , and so the contribution proportional to  $\eta_0$  (logarithmic in  $\partial_z U$ ) tends to zero. Then, to leading order in the viscosity,  $\tilde{\eta}$  tends to a constant. In the core region, the forcing is isotropic, and  $\eta_0$  tends to zero. Again,  $\tilde{\eta}$  is approximatively constant with only a weak Reynolds number dependence. In the sequel, we shall therefore assume that  $\tilde{\eta}$  is piecewise constant (one constant near the wall, matched to another constant in the core).

For  $\tilde{\lambda}$ , we use expansion (27) and arguments similar to those used above: near the wall, we find that  $\tilde{\lambda}$  tends to a constant, with correction in the form of a power series in  $\partial_z \tilde{U} - R_+$ . Since the turbulent Reynolds stresses at the wall must necessarily be zero, the constant is necessarily zero, and the expansion of  $\tilde{\lambda}$  starts with a term linear in  $(\partial_z U - R_+)$ . This property is used in §4.2. In the core, the forcing is isotropic, and  $\lambda_1$  vanishes, giving no logarithmic correction in  $\partial_z U$  to  $\lambda$ . Since  $\partial_z \tilde{U} \rightarrow 0$  in the core, the main behaviour of  $\tilde{\lambda}$  is then constant, with corrections proportional to  $(\partial_z U)^2$ , see §4.1. Because of the isotropy in the core region, this constant is expected to be negative.

## 4 Mean velocity profile in plane parallel geometry

### 4.1 Velocity defect laws in the core region

Equation (37) is valid far from the wall throughout the core region. To integrate it more easily, we introduce the path variable

$$s = - \int_0^{\tilde{z}} \frac{\tilde{\eta}(z') dz'}{\int_{z_0}^{z'} (\mathcal{S}(x) + \langle \sigma_x \rangle) dx}. \quad (39)$$

In terms of this path variable (37) becomes simply

$$\frac{d\tilde{U}}{ds} = (U_c - U), \quad (40)$$

where  $U_c = -\tilde{\lambda}/\tilde{\eta}$ . Since  $\tilde{\eta}$  and  $\tilde{\lambda}$  are *a priori* both functions of  $s$ ,  $U_c$  is also a function of  $s$ . In the core region  $U_c$  is approximatively constant and (40) can be integrated to give

$$U_c - U = (U_c - U_D) e^{s-s_D}, \quad (41)$$

where  $s_D$  is the value of the path variable at the edge of the core region (where our approximations fail), and  $U_D$  the value of the velocity at this location. Equation (41) is a velocity defect law, where the universal scaling function depends on the path variable, i.e. on the forcing and surface terms. Since these terms depends on the flow geometry, we can expect different velocity defect laws depending on the particular geometry of the flow.

#### 4.1.1 Channel flows

In the case of channel flows, the surface terms are concentrated near the wall, and there is a constant streamwise pressure gradient. The typical behaviour of  $H = dz/ds$  and  $s$  is shown schematically in figure 1 near the channel center. Near the center of the channel the surface terms vanish, and for constant or slowly varying  $\tilde{\eta}$  the function  $H$  is linear in  $\tilde{z}$ , which produces a logarithmic dependence of the path variable on  $\tilde{z}$ . Closer to the wall, the surface terms play a larger role, and small deviation from the logarithmic behaviour for  $s$  appear. These deviations are not universal, and depends weakly on the filter shape.

With a logarithmically varying path variable (41) leads to an *algebraic* defect law for the mean velocity

$$U_c - U = (U_c - U_D) \left| \frac{z}{z_D} \right|^\gamma, \quad (42)$$

where  $\gamma = -\tilde{\eta}/\langle\sigma_x\rangle$ . Oberlack [9] showed that this type of law is a consequence of a basic symmetry of the Navier–Stokes equations. It corresponds to the solution with the highest degree of symmetry. As such, he argued that the validity of this type of law is more likely to be confined to the channel center (as we have found where) than in the near-wall region, as claimed by Barenblatt [4]. This assertion was supported by a careful analysis of various high and low Reynolds number numerical and experimental data [9]. At high Reynolds number (between 18 000 and 40 000), Oberlack found  $\gamma = 1.69$ ,  $z_D = 0.8d$  and  $U_c - U_D = 4u_*$ . At lower Reynolds number, the exponent of the power law appeared to increase, suggesting that  $\gamma$  depends weakly on Reynolds number. In terms of our model this is not surprising, since  $\gamma$  is proportional to  $\tilde{\eta}$ , i.e. inversely proportional to  $U_c$ , which increases slowly with Reynolds number. The form of the dependence on Reynolds number can be derived using similarity arguments [15]. One finds that  $U_c = (1/K) \ln R_+ - U_{c0}$ , where  $K$  is the von Karman constant,  $R_+ = u_*d/\nu$  is the Reynolds number based on the wall shear velocity and  $U_{c0}$  is a constant which may depend on the geometry. If this law is valid, and if  $\lambda$  does not depend on the Reynolds number, then our model predicts that the exponent of the algebraic law should decrease like

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\ln(R_+/R_{+0})}.$$

This is exactly the dependence assumed by Barenblatt [4] and which leads, in the infinite Reynolds number limit, to the log defect law of the wall. Note, however, that we predict this behaviour for the *velocity defect law* in the core region, using the outer variable  $z$ , while Barenblatt assumed this law in the near wall region, using the inner variable  $z_+ = R_+(1 + z/d)$ . A recent analysis of superpipe data by Zagarola et al [11, 6] seems to contradict the theory by Barenblatt, while the study of Oberlack [9, 12] seems to confirm the existence of the algebraic defect law, even in the pipe geometry.

#### 4.1.2 Boundary layer

In the boundary layer, there is no pressure gradient, and surface terms are important both near the surface and at the top of the boundary layer. The typical behaviour of  $H = dz/ds$  and  $s$  can



then be shown by figure 1: in the core of the boundary layer the surface terms vanish, and  $\tilde{\eta}$  and the function  $H$  are constant, resulting in a linear dependence of the path variable on  $\tilde{z}$ . Near the surface and at the top of the boundary layer the surface terms become more important, and small deviations from the linear behaviour for  $s$  appear. As in the case of the channel, the deviations are not universal and depend weakly on the filter shape.

With a linearly varying path variable, the equation (41) leads to an *exponential* defect law for the mean velocity

$$U_\infty - U = (U_\infty - U_D) e^{-\beta z/z_D}, \quad (43)$$

where  $\beta = -\tilde{\eta}/H(h/2)$ . This type of law is also a consequence of a basic symmetry of the Navier–Stokes equation [9]. The experimental validation of this law is difficult, as discussed by Oberlack [9]. To check it one needs to subtract the free velocity  $U_\infty$ . Therefore, a few percent error in this quantity results in a large error in the determination of the coefficients, and a bad determination of the universal curve in log-coordinates. Oberlack nevertheless obtained a very good agreement with experimental data for  $\beta = 9.46$ ,  $z_D = \Delta_c$ , the Rotta–Clausius length, and  $U_\infty - U_D = 10.34u_*$ .

To our knowledge, our model is the first dynamical derivation of this exponential defect law predicted by Oberlack on symmetry arguments. Our model also explains why this type of law is observed in the boundary layer, rather than in channel flows: this appears to be linked to the absence of pressure gradients.

### 4.1.3 Plane Couette Flow

Plane Couette flow represents an interesting special case: because of the antisymmetry of the problem with respect to  $z \rightarrow -z$ , the mean flow is necessarily zero at the center. This has some important consequences on energy production and transfers in the core: in a shear flow, energy production and nonlinear transfers occur mainly as a result of interaction with the mean pressure gradient, or non-local nonlinear interactions with the mean flow. We thus expect the “forcing” (nonlinear energy transfer) on the small-scales to be zero at the core, i.e.  $\tilde{\eta}$  should zero at the center of the channel. With zero  $\tilde{\eta}$ , we may redefine the path variable as:

$$s = - \int_0^{\tilde{z}} \frac{\tilde{\lambda} dz'}{\int_{z_0}^{z'} (\mathcal{S}(x) + \langle \sigma_x \rangle) dx}. \quad (44)$$

Since there are no pressure gradients, this path variable is *linear* in  $z$ , as in the boundary layer case. The integration of (37) then leads to

$$U = \beta \tilde{z}, \quad (45)$$

where  $\beta = \lambda/H(0)$ . This linear law at the center is also a special case of symmetric solution of Navier–Stokes equations [9]. In fact, it corresponds to the solution with the lowest degree of symmetry. Investigation of experimental or numerical data led Oberlack to conclude that this linear law was valid to very high accuracy over about 80% of the core region [9]. It is remarkable that our model also leads to this linear case as a special outcome of the (anti)-symmetry of the mean flow.

## 4.2 Near-wall region and universal log-laws

We just saw that our model leads to general predictions about mean equilibrium profiles in the core region which are in remarkable agreement with those obtained using symmetry by Oberlack [9]. It is thus natural to investigate the kinds of predictions can we get from our model in the near wall region. For this, we need the behaviour of our subgrid tensors near the wall. We use (27) and (29) to perform simple Taylor expansions in the near wall region, as a function of  $\partial_z \tilde{U}$ . Specifically, we consider first the function  $\tilde{\lambda}$ . For our subgrid tensors to be zero at the wall, as

required by boundary conditions, we must have  $\tilde{\lambda} + \tilde{\eta}\tilde{U} = 0$  at the wall. This is guaranteed if and only if  $\tilde{\lambda}$  is itself zero at the wall. We may then expand it near the wall as

$$\tilde{\lambda} = \lambda_0(\partial_z U - R_+) + \lambda_1(\partial_z U - R_+)^2 + \dots, \quad \partial_z U \rightarrow R_+ \quad (46)$$

where  $\lambda_0$  and  $\lambda_1$  are some constants, and the Reynolds number  $R_+ = u_* L / \nu$  is the non-dimensional value of the viscous flux at the wall. We have kept the largest relevant order, as we shall see later. For  $\tilde{\eta}$ , we use the qualitative behaviour discussed in §3.5 and take it to be a constant (which can be zero).

To obtain the equilibrium equation in the near wall region, we then substituted this development into the original equation (14). After series expansions and rearrangements, these equations become (after a change of variable from outer to inner variables  $\tilde{z} \rightarrow z_+ = R_+(1 + \tilde{z})$ )

$$\frac{1 + KR_*\tilde{\eta}\tilde{U}}{\dot{U}} = KR_* \left( \frac{z_+}{R_*} - 1 \right) + (1 + KR_*)\dot{U}, \quad (47)$$

where the dot refers to a derivative with respect to  $z_+$  and we have introduced:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{R_+(1 - \lambda_1 R_+)}, \\ R_* &= R_+(1 + \lambda_0 - 2\lambda_1 R_+). \end{aligned} \quad (48)$$

The equation (47) encompasses two kinds of variation: very close to the wall, for  $z_+ \ll |R_*|$ , where  $\lambda \approx \lambda_0$  and  $U/R_+ \ll 1$ , we have the usual viscous behaviour  $\partial_{z_+}\tilde{U} = 1$ ,  $\tilde{U} = z_+$ . This suggests that  $|R_*|$  should be interpreted as the size of the viscous sublayer, which is usually observed to be of the order of 10 wall inner units. Further away from the wall, for  $|R_*| \ll z_+ < z_0$ , the equation can be simplified to

$$\frac{1 + KR_*\tilde{\eta}\tilde{U}}{\dot{U}} = Kz_+. \quad (49)$$

This equation has two types of solutions for slowly varying  $K$ ,  $R_*$  and  $\tilde{\eta}$ : when  $\tilde{\eta}$  is different from zero, the solution is algebraic in the inner variable

$$\begin{aligned} U - \frac{1}{KR_*\tilde{\eta}} &= \left( U_0 - \frac{1}{KR_*\tilde{\eta}} \right) \left( \frac{z_+}{z_0} \right)^\alpha, \\ \alpha &= \tilde{\eta}R_*. \end{aligned} \quad (50)$$

This solution is the *generic* near wall solution in the present model. It would be exactly the solution proposed by Barenblatt [4] if we allow the (unknown) parameter  $\alpha$  to decrease with the Reynolds number like  $\alpha \sim 1/\ln(R_+/R_0)$ . At the present time, we have no means to checking this possibility. We note however that Zagarola et al.'s [6] analysis of the superpipe data indicates the existence of a power law regime for  $50 < z_+ < 500$  which would correspond to  $\tilde{\lambda} = 0$  and  $\alpha = 0.137$ . In this near wall region, curvature effects are very small, and the pipe geometry is equivalent to a plane parallel geometry, so we may interpret this findings as a confirmation of our generic solution.

When  $\tilde{\eta} = 0$ , we obtain the celebrated log law of the wall

$$\tilde{U} = \frac{1}{K} \ln z_+ + B, \quad (51)$$

which shows that  $K$  may be interpreted as the von Karman constant. Note that we can obtain an exact expression of  $B$  in the case where  $R_*$  and  $K$  are constants, independent of  $z_+$ . Indeed, when  $\tilde{\eta} = 0$ , there is an exact analytical solution of (47)

$$\Delta(z_+) = \sqrt{(1 - z_+/R_*)^2 + 4 \frac{1 + KR_*}{(KR_*)^2}},$$

$$\begin{aligned}
\dot{U} &= \frac{KR_*}{2(1+KR_*)} \left(1 - \frac{z_+}{R_*} + \Delta\right), \\
U &= -\frac{KR_*^2}{4(1+KR_*)} [(1 - z_+/R_*)^2 + (1 - z_+/R_*)\Delta(z_+)] \\
&\quad - \frac{1}{K} \ln(2\Delta(z_+) + 2(1 - z_+/R_*)) + \frac{R_*}{2} + \frac{1}{K} \ln \frac{4(1+KR_*)}{KR_*}. \tag{52}
\end{aligned}$$

Note that (52) is the *generic* two parameter formula describing the whole near wall behaviour, from the viscous to logarithmic law. This formula is a direct consequence of our subgrid model, and could be used, for example, to better estimate the friction velocity at the wall.

For  $z_+ \gg R_*$ , this solution reduces to

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{K} \ln z_+ + B, \\
B &= \frac{1}{2K} (1 + KR_* + 2 \ln(K)). \tag{53}
\end{aligned}$$

This fixes the value of  $B$  as a function of  $K$  and  $R_*$ . The general formula agrees very well with some old data on boundary layer, liked that compiled in [20]. In figure (3), we show a comparison of the formula (52) with the data of Kestin and al [20]. This best fit is obtained with  $R_* = 16.35$  and  $K = 0.425$ , resulting in  $B = 7.34$ . We also tried to fit our general formula with the most recent Super Pipe data. The best fit, obtained with  $R_* = 14.5$  and  $K = 0.45$ , leading to  $B = 6.59$  (independent of Reynolds number) is shown in figure (4) where the solution (52) is compared with the data taken at 26 different Reynolds numbers spanning three decades. We resolve the viscous to turbulent transition very well, and this fit captures the universal log-law observed at the different Reynolds numbers. However, in the transition zone between the viscous layer and the log-region, there is an additional bump in the data which is not captured by the model. Looking back at the data analysis by Zagarola et al., we see that this bump is associated with a possible algebraic intermediate region. Such algebraic behaviour can be obtained within our model only if  $\tilde{\eta}$  is different from zero. On the other hand, the existence of the log-law for  $z_+$  larger than a few  $R_*$  precludes the possibility that  $\tilde{\eta}$  is different from zero for  $z_+ \gg R_*$ . We then explored a simple refinement of our procedure, in which  $\tilde{\eta}$  is taken as a constant over  $0 < z_+ < R_*$ , and in which, for universality reasons, this constant is proportional to the Reynolds number  $\tilde{\eta} = \eta_0 R_+$  (figure 6). Tuning the three constants  $K$ ,  $R_*$  and  $\eta_0$  in this new model, we get the best fit as shown in Fig. (5) with  $K = 0.45$ ,  $R_* = 6.8$  and  $\eta_0 = 0.185$ . The fit is excellent over the whole spatial range, and over the 4 decades of Reynolds numbers which, for a three parameter model, is encouraging.

### 4.3 Models for the whole flow

To push our model to its limit, we now use it to develop a single model for the entire flow region, from the viscous layer to the core region or the top of the boundary layer (depending on the flow geometry). For this, we employ matched asymptotic expansions between the core region (§4.1) and the near-wall region (§4.2). The idea is to use the asymptotic constraints on  $\tilde{\lambda}$  and  $\tilde{\eta}$  at the wall and in the core, obtained through boundary conditions and the series (28) and (27). This results in a constant  $\tilde{\eta}$  at the wall and in the core (the two constants can be different). The asymptotic constraints for  $\tilde{\lambda}$  at the wall are given by (46). In the core, or at the top of the boundary, the constraints are obtained by the requirement of a *finite* subgrid tensor at the location  $\partial_z U = 0$  (the channel center, or the top of the boundary layer). This fixes the development of  $\tilde{\lambda}$  as

$$\tilde{\lambda} = -\tilde{\eta}U_c + \lambda_z \partial_z U - \nu_t (\partial_z U)^2 + \dots, \quad \partial_z U \rightarrow 0. \tag{54}$$

Here,  $U_c$  is the velocity at the channel center or at the top of the boundary layer, and  $\lambda_z$  and  $\nu_t$  are unknown functions of  $z$ . The parameter  $\nu_t$  is the equivalent of a non-dimensional turbulent

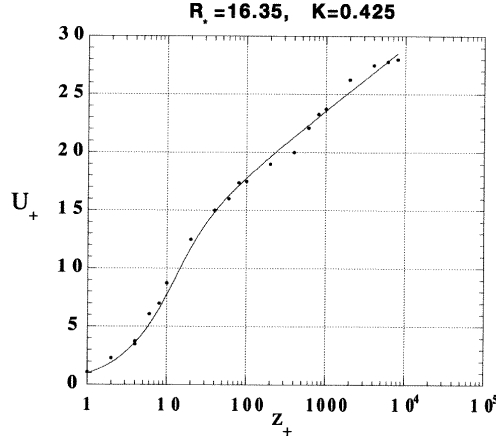


Figure 3: Velocity profiles:  $\bullet$ : our model (line),  $\circ$ : Data of Kestin et al [20] (symbol)

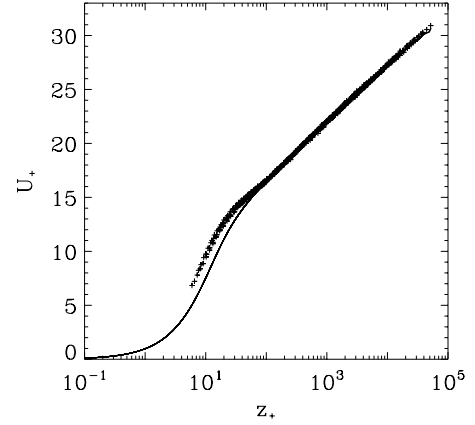


Figure 4: Velocity profiles obtained with our model (line) ( $R_* = 14.5$ ,  $K = 0.45$  et  $\eta = 0$ ) compared to the data of Zagarola [11] (symbols): results for 26 value of  $R_+$  between  $3.15E + 04$  and  $3.52E + 07$ .

viscosity (see §4.4). With this expansion, the total equation (14) becomes

$$\frac{\tilde{\eta}(U - U_c)}{(R_+^{-1} + \nu_t)\partial_z U} = \frac{\langle \sigma_x \rangle \tilde{z} - \lambda_z}{R_+^{-1} + \nu_t} + \partial_z U. \quad (55)$$

This equation is similar to the near wall equation, except that the “forcing function”  $H_{core} = (\langle \sigma_x \rangle \tilde{z} - \lambda_z)(R_+^{-1} + \nu_t)$ . This suggested to us the following procedure for fitting the whole flow: solve the equation

$$\frac{\lambda_{eff} + \tilde{\eta}_{eff} U}{\partial_z U} = H_{eff} + \partial_z U, \quad (56)$$

where  $H_{eff}$  is a continuous function going from its near wall behaviour  $H = -KR_*/(1 + KR_*)$  to the core behaviour  $H_{core}$ , and  $\lambda_{eff}$  and  $\eta_{eff}$  are simple smooth going from their near wall value (see Section 4.2), to their “core” value (Section 4.1). We obtained the following results.

#### 4.3.1 Channel flows

In this geometry, the integrated momentum flux must be zero at the center. This fixes  $\lambda_z = 0$ . The simplest smooth function which extrapolates the near-wall behaviour, and is linear in the core and zero at the center is shown in figure 9. We fixed the constant in the near-wall region so that the log-law is obtained with a von Karman constant of 0.45. We also fixed the velocity at the center  $U_c$ . We are then left with three free parameters: the location of the transition between near-wall and core behaviour  $z_t$  (see figure 7), the value of  $\eta$  and the value of  $R_*$ , which governs the viscous/turbulent transition. We varied the three parameters and used a least-square procedure to choose the best value to fit the data. An example of a fit of the numerical data is shown in figure 7. We fitted the numerical data of Moser et al [21] which are available on the web at <http://www.tam.uiuc.edu/Faculty/Moser/Channel>. The parameters for each of the three Reynolds number are listed in table 1. This fit was obtained with the function  $H_{eff}$  and  $\tilde{\eta}$  shown in figures 9 and 8. The corresponding turbulent momentum flux is shown in figure 10. It agrees very well with data from numerical simulations [18].

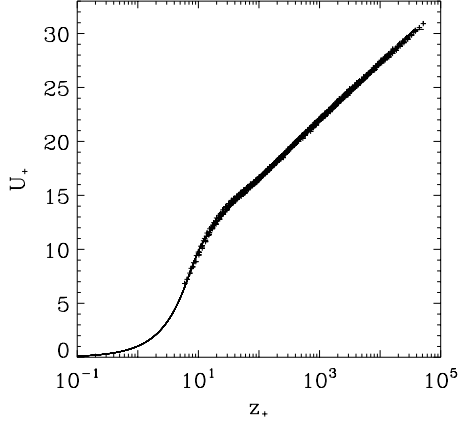


Figure 5: Velocity profiles obtained with our model (line) ( $R_* = 6.8$ ,  $K = 0.45$  et  $\eta = 0.185$ ) compared to the data of Zagarola [11] (symbols): results for 26 value of  $R_+$  between  $3.15E + 04$  and  $3.52E + 07$ .

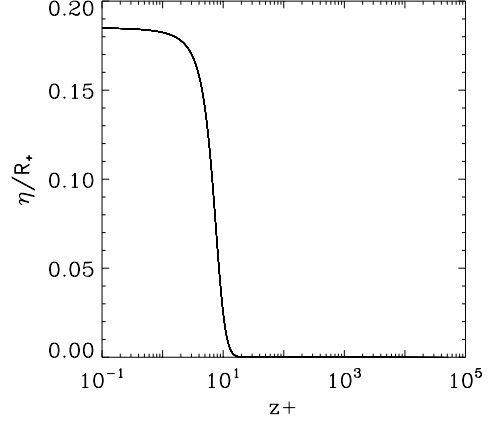


Figure 6: Function  $\eta(z_+)$  used in our model to fit the data figure (5)

Table 1: Parameter used for the fit of Moser's data

Reynolds	$z_t$	$R_*$	$\alpha$
178.82	-0.800	19.	1.04
392.27	-0.900	16.	1.68
587.19	-0.924	14.	1.85

### 4.3.2 Boundary layer

In this geometry, there is no pressure gradient, but there can be a non-zero integrated momentum flux near the top of the boundary layer. The simplest smooth function extrapolating the near wall behaviour and constant near the top of the boundary layer is shown in figure 13. We fixed the constant in the near-wall region so that the log-law is obtained with a von Karman constant of 0.44. We also fixed the velocity at the top of the boundary layer to  $U_\infty$ . We are then left with three free parameters: the location of the transition between near-wall and core behaviour  $z_t$  (see figure 11), the value of  $\eta$  and the value of  $R_*$ , which governs the viscous/turbulent transition. We varied the three parameters and used a least-square procedure to choose the best value to fit the data. An example of a fit to the numerical data of Nockemann and al [22] is shown in figure 11. This fit was obtained with the function  $H_{eff}$  and  $\tilde{\eta}$  shown in figures 13 and 12.

## 4.4 Discussion

Traditional stochastic averaged approaches for shear flows usually attempt to model the entire Reynolds stress  $\tau_{13} = \langle (u + U)(w + W) \rangle$ . In the present approach, however, we first use a spatial vertical filter to separate the velocity into its resolved and subgrid-scale parts, and then model each term separately via a non-local approximation. We obtained the final result,

$$\tau_{13} = \frac{\lambda + \eta \langle U \rangle}{\partial_z \langle U \rangle}, \quad (57)$$

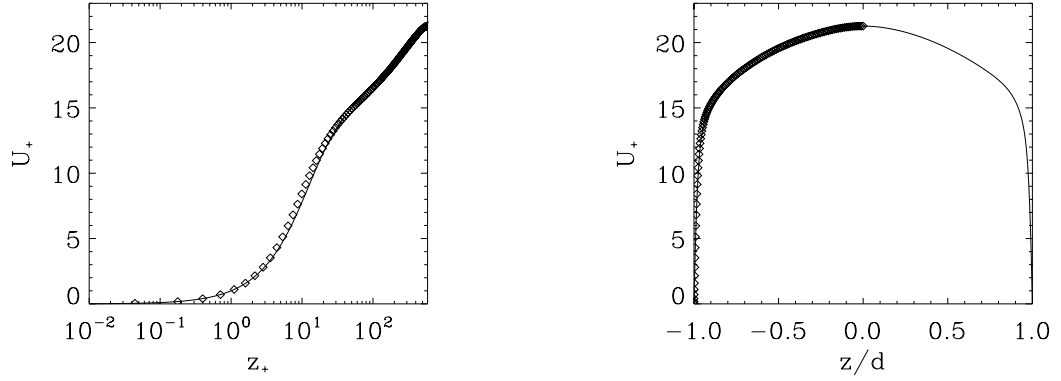


Figure 7: Velocity profile at  $Re = 587.19$ : Moser's Data [21] (symbol), our analytical law (line).

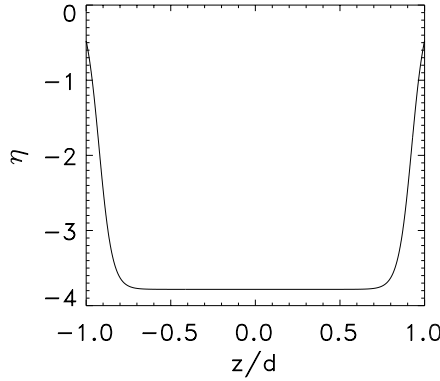


Figure 8: Function  $\tilde{\eta}_{eff}(\tilde{z})$  used to fit the data in figure (7)

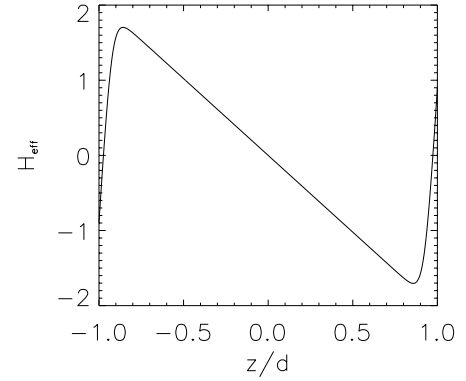


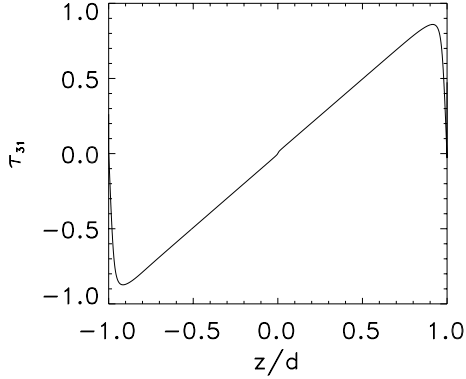
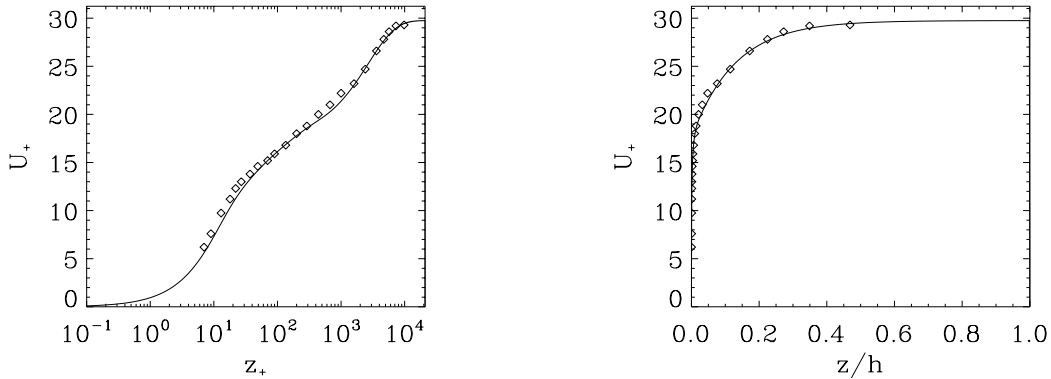
Figure 9: Function  $H_{eff}(\tilde{z})$  used to fit the data in figure (7)

where  $\lambda$  and  $\eta$  are *a priori* functions of  $\partial_z U$  only and depend on the energy transfers from the resolved to the subgrid scales. In addition, their behaviour is not known *a priori*, but we were able to obtain their near wall and core behaviour from asymptotic expansions, which provides a more quantitative picture of  $\tau_{31}$ . Using this expansion the Reynolds stress can be put in the form

$$\tau_{31} = -\nu_{t*} \partial_{\tilde{z}} \langle U \rangle + \tau_* + \frac{\lambda_0 + \eta_0 \langle U \rangle}{\partial_z \langle U \rangle}, \quad (58)$$

where  $\nu_{t*}$ ,  $\tau_*$ ,  $\lambda_0$  and  $\eta_0$  are constants which are different in the near-wall and core regions. The first term in (58) is the standard eddy-viscosity. A striking consequence of this result is that in order to fit the whole turbulent channel flow data, one needs to impose a *positive* eddy viscosity at the wall, of the order of  $\nu_t = KR_* u_\tau^2 / \nu \approx 3u_\tau^2 / \nu$ , and a *negative* eddy viscosity at the core, of the order of  $\nu_t = -3/(2R_+)$ . This last result is in good agreement with a previous theoretical asymptotic expansion for periodic shear flows (no boundary or wall regime), which showed that any eddy viscosity will necessarily become *negative* beyond a certain critical Reynolds number [23].

Our asymptotic expansion, based on a physical subgrid-scale model, allowed us for the first time to obtain an analytic expression for the transition between the viscous- and log-layer. This formulation depends on three parameters: the von Karman constant  $K$ , the size of the viscous

Figure 10: Turbulent momentum flux  $\tau_{31}$ Figure 11: Velocity profile at  $Re = 20\,920$ : Nockemann's Data [22] (symbol), our analytical law (line).

layer  $R_*$ , and  $\eta$  which characterizes the mean forcing acting on the subgrid velocities in the mean streamwise direction. The first two parameters are sufficient to describe the transition from the linear viscous profile near the wall, to the log-profile away from the wall. The third parameter  $\eta$  is required to describe the “bump” observed in the high Reynolds number superpipe data. This parameter, however, does not correspond to any classical turbulent viscosity. It is therefore interesting to compare our formulation, with previous empirical models of the turbulent subgrid-scale tensor. This is traditionally obtained via a turbulent viscosity model

$$\tau_{13} = \nu_t \partial_z U, \quad (59)$$

where  $\nu_t$  is the turbulent viscosity. In order to reproduce accurately the profile variations near the wall one is usually forced to take a turbulent viscosity that varies with  $z$ , such that it is zero at the wall. One popular model [24] includes exponential damping of the viscosity at the wall, over some characteristic length scale  $l_* = 26\nu/u_*$ . In our case, we have taken into account the near-wall damping in our asymptotic expansion. It occurs over a length-scale  $l_* = R_*\nu/u_* \approx 7\nu/u_*$ . The shape of the damping in our case, can be found by comparing (59) with (58). Our description

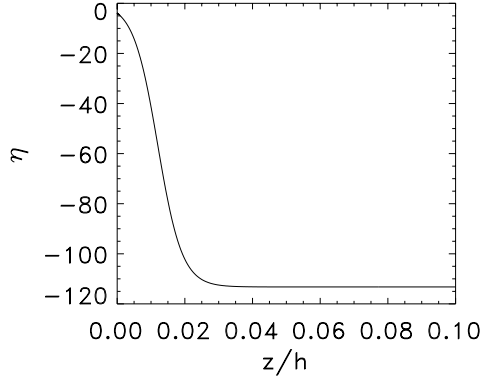


Figure 12: Function  $\tilde{\eta}_{eff}(\tilde{z})$  used to fit the data in figure (11)

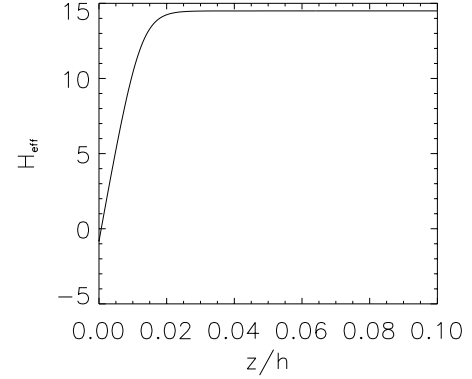


Figure 13: Function  $H_{eff}(\tilde{z})$  used to fit the data in figure (11)

corresponds to an “effective” turbulent viscosity

$$\nu_t^{eff} = \nu_{t*} + \frac{\tau_*}{\partial_z \langle U \rangle} + \frac{\lambda_0 + \eta_0 \langle U \rangle}{(\partial_z \langle U \rangle)^2}. \quad (60)$$

Thus, in our model the damping occurs self-consistently via the velocity gradients.

It is also interesting to interpret the “turbulent” length scale implied by our model. This length-scale appears when the turbulent viscosity is expressed as a function of the mean shear  $\partial_z \langle U \rangle$ :

$$\nu_t = C \ell^2 \partial_z \langle U \rangle. \quad (61)$$

Comparison of our model with (61) shows that the two models are compatible provided the turbulent length-scale varies like

$$\ell \sim \frac{\sqrt{\tilde{\lambda} + \tilde{\eta}U}}{\partial_z \langle U \rangle}. \quad (62)$$

Near the wall, the velocity profile is logarithmic and the mean velocity is small so the corresponding length-scale varies linearly with the distance from the wall. This is in agreement with the standard single length-scale description of turbulent flows near wall. Farther from the wall the change in length-scale depends on the geometry. For channel flows, one can actually show that the mean velocity profile in the core region varies algebraically (see §4.1) with the distance from the core, and one can expect a weak variation of the length-scale in the bulk of the flow, followed by a divergence at the center of the channel. This divergence may explain the scatter in measurements of the turbulent length-scale at that location. Note that the inverse dependence of the length-scale (62) on the mean gradient is similar to the empirical description of the length-scale proposed by Hunt et al [25],

$$\frac{1}{\ell} = \frac{A}{z_+} + B \frac{\partial_z U}{\sqrt{\langle w^2 \rangle}}, \quad (63)$$

where  $z_+$  is the distance from the wall, and  $A$  and  $B$  are arbitrary parameters. This description gives the same qualitative behaviour as ours: near the wall the behaviour is dominated by the first term (giving the usual linear law for the length scale), while far from the wall the second term dominates (giving a linear dependence of  $1/\ell$  with the mean velocity gradient). This is precisely the dependence predicted by our model.



## 5 Summary

In this paper we have developed a new model for plane parallel flows which involves no adjustable parameters. This model involves the coupling of two dynamical equations: one for the resolved scales (which depends upon the Reynolds stresses generated by the subgrid motions), and one for the subgrid-scales (which can be used to compute the subgrid-scale Reynolds stresses). The subgrid-scales evolve according to a linear inhomogeneous equation, which is forced by the energy cascade from resolved to subgrid-scales. Under the assumption of  $\delta$ -correlations of the forces the subgrid-scale equation can be formally integrated, which leads to an expression for the subgrid-scales as a function of the resolved motions only. Again, this expression involves no adjustable parameters.

We then used this analytical expression for the subgrid scales to study the possible equilibrium profiles arising in a plane geometry. In the core region our classification of the equilibrium profiles agrees with the system derived by Oberlack [12] from the basic symmetries of the Navier–Stokes equations. This shows that our model respects all the basic symmetries of the Navier–Stokes equations. In the near-wall region we used an asymptotic expansion to obtain a theoretical description of the complete transition region between the viscous layer and the log-region. We showed that an excellent fit to the recent data from the Super Pipe experiments can be found from our theory, which includes a new quantity describing the effect of the energy cascade from resolved to subgrid-scales. Finally, we showed that our formulation allows the description of the equilibrium profiles across the whole turbulent channel via a simple matching procedure.

From a theoretical point of view, it is interesting to compare the output of our approach with the recent similarity theories of Barenblatt [4] and George et al. [7, 8]: in the near wall region, we obtain that the relevant scaling variables are the friction velocity and the inner length scale  $z_+$ , in agreement with George. We also predict two different possible near-wall velocity profiles, the algebraic profile of Barenblatt and George, or the more traditional logarithmic profile. The selection of one or the other is made according to the properties of the forcing coming from the energy cascade from large to small scales (see also [14]) which we cannot study analytically. On the other hand, we have no clear indication that the exponent of the possible power law is Reynolds number dependent (like predicted by Barenblatt and George), nor do we obtain the shifted logarithmic law predicted by George (our general formula is given in (52) and is more complicated than a pure shifted log-law). In the core region, we obtain that the relevant scaling variables are the central velocity and the outer length scale  $z/d$ , in agreement with George. We obtain various different velocity defect laws according to the geometry: in channel flows, we predict the occurrence of algebraic (or logarithmic, for very special energy cascades) velocity profiles, in agreement with George. For zero-pressure boundary layer, however, our prediction is an exponential velocity profile, in contradiction with the algebraic prediction of George. Note that exponential laws might sometimes be confused with algebraic laws with very large exponent in a data analysis involving large error bars. This is typically the case of boundary layer experiments, since the determination of the velocity defect law implies the very precise knowledge of the asymptotic velocity, which is not always available.

Together, these results confirm the interest of our new subgrid-scale approach, which uses an approximation to subgrid-scale *velocities* to compute the subgrid-scale Reynolds stresses (and hence equilibrium flow profiles). We are now attempting to numerically integrate our set of coupled equation in order to find completely quantitative solutions to the problem of plane parallel flows at high Reynolds number.

**Acknowledgments** We thank M. Oberlack for many enlightening discussions about shear flow profiles and the meaning of algebraic laws. We also thank P. Sullivan for interesting comments on the manuscript. N. Kevlahan would like to thank McMaster University for research funding during this project. B. Dubrulle was partly supported by a NATO fellowship.

## Appendices

In these series of appendices, we present a number of technical results necessary in the derivation of our resolved and subgrid equations.

### 5.1 Filter and average

#### 5.1.1 Definition

In order to distinguish between large and small scales we introduce a filter function  $g(\mathbf{x})$ . For reasons of convenience which will become clear in §2.2, we choose the following separable function

$$g(\mathbf{x}) = \Pi_i g_i(x_i), \quad (64)$$

where  $g_i$  are positive functions, which are normalized to unity with a characteristic length-scale  $l_i^*$ . Thus, we can write them as

$$g_i(x_i) = \frac{1}{l_i^*} \tilde{g}_i\left(\frac{x_i}{l_i^*}\right), \quad (65)$$

where the  $\tilde{g}_i$  are functions which decay rapidly when their argument is larger than one. The choice of the characteristic length-scales  $l_i^*$  will be discussed further in §3. Physically, this scale represents a scale intermediate between the scale of the resolved field,  $L$ , and the scale of the subgrid field  $l$ . In the sequel, we shall assume that the ratio  $l/L$  is a small parameter, called the scale separation.

Note that the filter influences our results via constants which are filter dependent. We shall mention this dependence where appropriate. Using this filter, we can now decompose the velocity field into its mean (large-scale) and its fluctuating (small-scale) contribution,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &\equiv \bar{\mathbf{u}} = \int g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (66)$$

Notice that our filtering only concerns spatial scales, not time scales. In experimental measurements, however, time and space filtering are often linked because of the use of the Taylor hypothesis. In this spirit, we allow the possibility of adding time filtering to our spatial (or scale) filtering. This freedom will be used in our analytical computations, to assume a  $\delta$ -correlation in time. We now summarize some salient properties of our filtering procedure.

#### 5.1.2 Properties

Note that we are employ scale filtering, and not a statistical filtering via the usual ensemble averaging. This scale filtering is in the spirit of LES, where large and small scales are modelled separately in order to improve computational efficiency. In the present case, the separation between large and small scales is dictated by physical considerations (§3) which only apply because of the scale difference (scale separation) between the two components. This means that our hypothesis might not be valid for ensemble averaging. This also means that we should be cautious when averaging, since for example the filtering of the product of two filtered quantities is not necessarily the product of the filtered quantities:  $\overline{\bar{u}\bar{v}} \neq \overline{uv}$ . This is because the beating of two small (intermediate) wavenumbers can produce a large wavenumber, if the scale separation between the large and the small-scale is not enough. Similarly, the filtering of a product of a small-scale quantity and a large-scale filtered

quantity is not necessarily zero, since the beating of a large and small (intermediate) wavenumber can produce an intermediate wavenumber. As we shall see, this difference produces additional terms in the averaged equations with respect to the usual Reynolds average, based on ensemble averaging.

Another important difference between the LES filtering and the ensemble average is in the combination of derivatives and averaging: for ensemble averaging, derivatives and averaging commute. For LES filtering, this is not the case in general. To see this, consider the average of some derived quantity, say  $\partial_x u$ , and integrate by parts over  $x'$ . We get:

$$\begin{aligned}\overline{\partial_x u} &= \int g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_{x'} u(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \\ &= \int dydz g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') u(\mathbf{x}') \Big|_{x_{min}}^{x_{max}} - \int (\partial_{x'} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) u(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.\end{aligned}\quad (67)$$

By symmetry, the derivative over  $x'$  in the second term of the r.h.s. of (67) can be changed into minus a derivative over  $x$ , which can then be taken out of the integral, giving a term  $\partial_x \bar{u}$ . We then see that average and derivative commute only if the surface term (the first term in the r.h.s.) is zero. If not, this term has to be taken into account in the derivation of LES equations. When dealing with unbounded systems, this problem of commutativity is not important, since one usually considers physical quantities which tend to zero at infinity. The non-commutativity arises in finite size systems, where boundary conditions may reflect some physical processes. In plane parallel flows this is the case in the vertical direction at the bottom of the layer where we have to take into account the momentum and heat flux at the surface  $z = 0$ .

Finally, we can use the scale separation  $l/L \ll 1$  to get estimate of the average of resolved (or subgrid quantities) because the scale of  $g$  is just intermediate between  $l$  and  $L$ . So, it is large with respect to  $l$ , and small with respect to  $L$ . We then find, for a quantity  $Q$  with average  $\bar{Q}$  and subgrid part  $Q'$

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \int g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \overline{Q(x')} d\mathbf{x}', \\ &\approx \overline{Q(x)} \int g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \overline{Q(x)}, \\ \overline{Q'} &= \int g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') Q'(x') d\mathbf{x}', \\ &\approx g(x) \int Q'(x') d\mathbf{x}'.\end{aligned}\quad (68)$$

Here, we have used the fact that  $\bar{Q}$  is a slow function with respect to  $g$  and can be taken out of the integral. In the same way,  $g$  is a slow function with respect to  $Q'$  and can be taken out of the integral. This approximation is valid up to order  $\epsilon_* = l^*/L \approx l/l^*$  (if we take  $l^*$  as the geometrical mean of the large and small scales.)

## 5.2 Gabor transform

### 5.2.1 Definition

Our ultimate goal is to write an equation for the small (subgrid) scales, as a function of the large (resolved) scales. However, we would like to take into account the fact that the small scales are strongly inhomogeneous in space. A good way of representing inhomogeneous fields is to decompose them into wave packets, using for example, the Gabor transformation [27]

$$\hat{u}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'.\quad (69)$$

For reasons of convenience which will become clear later, we choose here  $f(\mathbf{x}) = \sqrt{g(\mathbf{x})}$  (since  $g$  is a positive function, this is always possible). We could also have achieved the same decomposition using a wavelet transformation [28], but it is more complicated for analytical computations.

## 5.2.2 Useful properties of the Gabor transform

A few properties of the Gabor transformation (69) are worth mentioning at this point. First, the inverse Gabor transform is easily obtained by an integration over  $\mathbf{k}$

$$f(0)\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (70)$$

Secondly, we note that as in filtering, the commutation of Gabor transform and partial derivative is subject to surface terms which depend on the boundary conditions (for reasons analogous to those given in §5.1.2). Also, there is an interesting approximation to the derivative of the Gabor transform,

$$\partial_i \hat{\mathbf{u}}' \approx ik_i \hat{\mathbf{u}}' + O(1/(Lk)), \quad (71)$$

where  $L$  is the typical scale of the large-scale flow. Technically speaking,  $\epsilon = 1/(kL)$  labels the scale separation between the large scales and the small scales. It is a parameter less than one. Rigorous expansions in terms of this parameter are possible [26, 27], but for pedagogical reasons we shall give here more heuristic derivations of the equations. Thirdly, it is interesting to consider the Gabor transform of a quantity involving the product of a function varying over large scales (e.g.  $\mathbf{U}$ ) and a function varying over small scales (e.g.  $\mathbf{u}'$ ):

$$\hat{\mathbf{U}}\mathbf{u}' = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \mathbf{U}(\mathbf{x}', t) \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'. \quad (72)$$

Because the kernel  $f$  varies over scales of the order of  $1/k_\epsilon$ , while  $U$  varies over scales of the order  $L$ , one can Taylor expand the function  $U$  around the point  $\mathbf{x}'$  as a function of  $\epsilon$ . To first order in  $\epsilon$ , and after integration by parts, we obtain

$$\hat{\mathbf{U}}\mathbf{u}'(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{u}}' + i\nabla_i (U_j(\mathbf{x}, t)) \nabla_{k_i} \hat{\mathbf{u}}'. \quad (73)$$

This expansion will be useful in our derivations.

Finally, it is interesting to consider the average of the product of two small-scale quantities, e.g. the Reynolds stress  $\overline{u'_i u'_j}$ . Using our definition of filtering (66) and the fact that  $(2\pi)^D \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') = \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')} d\mathbf{k}$  and  $f^2 = g$ , we can write the Reynolds stress at point  $\mathbf{x}$  and time  $t$  as a function of the Gabor transform,

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} = \frac{1}{2(2\pi)^D} \int & (\hat{u}'_i(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) \hat{u}'_j(-\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) \\ & + \hat{u}'_i(-\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) \hat{u}'_j(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)) d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (74)$$

## 5.3 Scale separation and asymptotic expansion

### 5.3.1 Spectra and choice of the cut-offs

The definition of our filtering involves the choice of the characteristic length-scale of the filter. To choose this scale in a physically meaningful way we can use the spectral measurements of [29]. Their result indicates that the streamwise and vertical velocity components of a wall-bounded turbulent flow have different spectral characteristics. Both are characterized by a Kolmogorov energy spectrum at small scales ( $E(k) \sim k_x^{-5/3}$ ), and by an approximately flat spectrum at large scales. However, the wavenumber of the transition between the two regions is approximately one order of magnitude larger for the vertical component than for the streamwise component (where

an additional transition region where  $E(k) \sim k_x^{-1}$  is present over one decade before the spectrum flattens). These features suggest choosing the filtering scale to be the scale corresponding to the peak wavenumber of the vertical velocity spectrum. In this way, we can expect the resolved vertical velocity to be smaller than the streamwise resolved velocity, enabling a substantial simplification of the resolved and subgrid-scale dynamics. Since this scale will nevertheless correspond to an inertial range scale of the streamwise velocity spectrum, the subgrid streamwise velocities should still be much smaller than the resolved streamwise velocities. This guarantees that the dynamics between small and large scales will be essentially non-local (i.e. between resolved and subgrid scales only) at the subgrid level, allowing for a linearization of the small-scale dynamics, and, therefore, analytical solutions.

### 5.3.2 Dimensional estimates

Domaradzki et al [16] studied the energy transfer between resolved and subgrid-scales in a channel flow, and found certain remarkable results detailed in §2.2. These results can actually be justified by simple dimensional analysis, as we show now. We introduce a small parameter,  $\epsilon = l_x/L_x$ , labeling the ratio between the typical scale of the subgrid streamwise velocities,  $l_x$ , and the typical horizontal scale of the resolved large-scale velocities  $L_x$ . Because of the Kolmogorov spectrum, we can estimate the ratio of the subgrid horizontal velocity  $u'$  to the resolved horizontal velocity  $U$  as  $(l_x/L_x)^{1/3} = \epsilon^{1/3}$ . If we consider the case of an infinite plane channel flow in the  $y$ -direction, all dimensional arguments are equivalent for  $U$  and  $V$  components. Now, because of incompressibility, we have the following relation,

$$\frac{u' l_z}{l_x w'} \sim 1, \quad (75)$$

where  $l_z$  is a typical subgrid vertical scale. In the previous section, we chose the cut-off to be isotropic at the subgrid level ( $l_x \sim l_z$ ), leading to  $u' \sim w'$  from (75). The natural anisotropy of the plane parallel flows however shows up at the resolved level, where we have  $L_x \ll L_z$ , where  $L_z$  is a typical resolved vertical length. In the sequel, we shall assume for simplicity that  $L_z \sim l_z^*$ , the scale of the filter in the vertical direction, so that  $l_z/L_z = \epsilon_* \ll 1$ . With these dimensional considerations, we can provide asymptotic estimates of the nonlinear terms appearing in the resolved and subgrid equations, given in table 2. The estimates are found using the following rule: the reference quantity is indicated in the table by an estimate 1, derivatives at a resolved scale correspond to bringing down a factor  $1/L_x$  or  $1/L_z$ , derivatives at the subgrid level are estimated by bringing down a factor  $1/l_x$  or  $1/l_z$ . Correlations are neglected in the estimation: for example, a factor  $\overline{uw}$  will be estimated simply by  $uw$ , where  $u$  and  $w$  are characteristic subgrid-scale velocities. One can estimate the order of the  $V$  equation terms by the transformation  $x \rightarrow y$ ,  $U \rightarrow V$  and  $u \rightarrow v$ .

From the results in the table 2, one can see that the subgrid Reynolds stresses involving subgrid-subgrid interactions are indeed much smaller than the Reynolds stresses involving resolved-resolved interactions, and are in general also smaller than Reynolds stresses involving resolved-subgrid interactions. At the subgrid level, the supergrid-scale transfers from subgrid-subgrid interactions are also in general smaller than supergrid transfers coming from (non-local) interaction involving a resolved and a subgrid-scale. This observation could be used to justify our non-local approximations, which consists in neglecting any subgrid-subgrid interaction for describing the subgrid-scale dynamics.

Table 2: Asymptotic estimate of nonlinear terms appearing in the resolved-scale and subgrid-scale equations

NL term $Q$	Relevant equation.	Resolved $\overline{Q}$		Subgrid $Q - \overline{Q}$	
$\partial_x U^2$	U or u	$\frac{U}{w} \frac{L_z}{L_x}$	$\sim \epsilon^{2/3} \epsilon_*^{-1}$	$\frac{U}{w} \frac{l_z}{l_x}$	$\sim \epsilon^{-1/3}$
$\partial_y UV$	U or u	$\frac{V}{w} \frac{L_z}{L_y}$	$\sim \epsilon^{2/3} \epsilon_*^{-1}$	$\frac{V}{w} \frac{l_z}{l_y}$	$\sim \epsilon^{1/3}$
$\partial_z UW$	U or u	$\frac{W}{w}$	$\sim \epsilon^{2/3} \epsilon_*^{-1}$	$\frac{W}{w}$	$\sim \epsilon^{2/3} \epsilon_*^{-1}$
$\partial_x Uu$	U or u	$\frac{u}{w} \frac{L_z}{L_x}$	$\sim \epsilon \epsilon_*^{-1}$	$\frac{u}{w} \frac{l_z}{l_x}$	$\sim 1$
$\partial_y Uv$	U or u	$\frac{v}{w} \frac{L_z}{L_y}$	$\sim \epsilon \epsilon_*^{-1}$	$\frac{v}{w} \frac{l_z}{l_y}$	$\sim 1$
$\partial_y Vu$	U or u	$\frac{V}{U} \frac{u}{w} \frac{L_z}{L_y}$	$\sim \epsilon \epsilon_*^{-1}$	$\frac{V}{U} \frac{u}{w} \frac{l_z}{l_y}$	$\sim 1$
$\partial_z Uw$	U or u	1	1	1	1
$\partial_z Wu$	U or u	$\frac{W}{U} \frac{u}{w}$	$\sim \epsilon \epsilon_*^{-1}$	$\frac{W}{U} \frac{u}{w}$	$\sim \epsilon \epsilon_*^{-1}$
$\partial_x u^2$	U or u	$\frac{u}{U} \frac{u}{w} \frac{L_z}{L_x}$	$\sim \epsilon^{4/3} \epsilon_*^{-1}$	$\frac{u}{U} \frac{u}{w} \frac{l_z}{l_x}$	$\sim \epsilon^{1/3}$
$\partial_y uv$	U or u	$\frac{u}{U} \frac{v}{w} \frac{L_z}{L_y}$	$\sim \epsilon^{4/3} \epsilon_*^{-1}$	$\frac{u}{U} \frac{v}{w} \frac{l_z}{l_y}$	$\sim \epsilon^{1/3}$
$\partial_x uw$	U or u	$\frac{u}{U}$	$\sim \epsilon^{1/3}$	$\frac{u}{U}$	$\sim \epsilon^{1/3}$
$\partial_x WU$	W or w	$\frac{U}{w} \frac{L_z}{L_x}$	$\sim \epsilon^{2/3} \epsilon_*^{-1}$	$\frac{U}{w} \frac{l_z}{l_x}$	$\sim \epsilon^{-1/3}$
$\partial_y WV$	W or w	$\frac{V}{w} \frac{L_z}{L_y}$	$\sim \epsilon^{2/3} \epsilon_*^{-1}$	$\frac{V}{w} \frac{l_z}{l_y}$	$\sim \epsilon^{1/3}$
$\partial_z W^2$	W or w	$\frac{W}{w}$	$\sim \epsilon^{2/3} \epsilon_*^{-1}$	$\frac{W}{w}$	$\sim \epsilon^{2/3} \epsilon_*^{-1}$
$\partial_x Wu$	W or w	$\frac{u}{w} \frac{L_z}{L_x}$	$\sim \epsilon \epsilon_*^{-1}$	$\frac{u}{w} \frac{l_z}{l_x}$	$\sim 1$
$\partial_x wU$	W or w	$\frac{U}{W} \frac{L_z}{L_x}$	$\sim 1$	$\frac{U}{W} \frac{l_z}{l_x}$	$\sim \epsilon^{-1} \epsilon_*$
$\partial_y Wv$	W or w	$\frac{v}{w} \frac{L_z}{L_y}$	$\sim \epsilon \epsilon_*^{-1}$	$\frac{v}{w} \frac{l_z}{l_y}$	$\sim 1$
$\partial_y wV$	W or w	$\frac{V}{W} \frac{L_z}{L_y}$	$\sim 1$	$\frac{V}{W} \frac{l_z}{l_y}$	$\sim \epsilon^{-1} \epsilon_*$
$\partial_z Ww$	W or w	1	1	1	1
$\partial_x uw$	W or w	$\frac{u}{W} \frac{L_z}{L_x}$	$\sim \epsilon^{1/3}$	$\frac{u}{W} \frac{l_z}{l_x}$	$\sim \epsilon^{-2/3} \epsilon_*$
$\partial_y vw$	W or w	$\frac{v}{W} \frac{L_z}{L_y}$	$\sim \epsilon^{1/3}$	$\frac{v}{W} \frac{l_z}{l_y}$	$\sim \epsilon^{-2/3} \epsilon_*$
$\partial_x w^2$	W or w	$\frac{w}{W}$	$\sim \epsilon^{-2/3} \epsilon_*$	$\frac{w}{W}$	$\sim \epsilon^{-2/3} \epsilon_*$

#### 5.4 Forcing in the $\delta$ -correlated approximation

For our asymptotic expansions, it is of interest to derive some properties of the forcing in the space and time  $\delta$ -correlated approximation. The properties we find here can be generalized to the less restricted case of Gaussian forcing [14], but the proofs are more complicated. Consider the following time average,

$$\overline{\hat{F}(k_x, x, t_1) \hat{F}(k_y, y, t_2)} = \int dx' dx'' e^{ik_x(x-x') + ik_y(y-x'')} \overline{F(x', t_1) F(x'', t_2)}, \quad (76)$$

where  $F$  is a space and time correlated forcing, so that

$$\overline{F(x, t_1) F(y, t_2)} = A^2 \delta(x - y) \delta(t_1 - t_2). \quad (77)$$

Using the definition (77) and after a change of variables  $x'' = \xi + x'$ ,  $x' = u + \frac{x+y}{2}$ , we can re-express (76) as

$$\begin{aligned} \overline{\hat{F}(k_x, x, t_1) \hat{F}(k_y, y, t_2)} &= A^2 e^{i(k_x - k_y)(x-y)/2} \\ &\int du e^{-i(k_x + k_y)u} f\left(-u + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) f\left(-u - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) \delta(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (78)$$

In the sequel, we shall consider averages in (78) only for rays emanating from the same origin  $(x, k)$ , i.e. for  $x, y, k_x$  and  $k_y$  obeying

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x} - \mathbf{U}(t - t_i), \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{k} + \nabla(\mathbf{U}\mathbf{k})(t - t_i). \quad (79)$$

This means that  $x - y$  can be taken as 0 in (78), and that the time  $\delta$  can be replaced by  $\delta(k_x - k_y)/(\partial_z U \cos \theta)$  in simple shear flows. We then find that for rays with the same origin

$$\overline{\bar{F}(k_x, x, t_1) \bar{F}(k_y, y, t_2)} = -\frac{A^2}{\cos \theta \partial_z U} \int e^{-i(k_x + k_y)u} f(-u) f(-u) \delta(k_y - k_x) du, \quad (80)$$

which is a function only of, say,  $k_x$ . This independence of spatial coordinates  $x$  or  $y$  is crucial in allowing the coefficients in the expansion of  $\tilde{\lambda}$  to be independent of the position.

## 5.5 Analytical solutions of small-scale equation

In this appendix, we provide the analytical solution to the system of ray equations (21). To solve this system of equations, we first solve the homogeneous system (i.e. with  $F_u = F_v = F_w = 0$ ). First, we note that by introducing

$$\begin{aligned} (u^\dagger, v^\dagger, w^\dagger) &= (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})D, \\ D &= \exp\left(\frac{\nu k^2}{\partial_z U} (R + R^3/3)\right), \end{aligned} \quad (81)$$

we can eliminate the viscous terms from the homogeneous equations. The ray equations can then be integrated in the standard way, starting from  $\hat{w}$ . We find three independent solutions to the homogeneous system, two trivial ones,

$$\begin{aligned} \hat{w}_1 &= \hat{v}_1 = 0, \quad \hat{u}_1 = D, \\ \hat{w}_3 &= \hat{u}_3 = 0, \quad \hat{v}_3 = D, \end{aligned} \quad (82)$$

and a more complicated one,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_2}{D} &= -\cos \theta \frac{R}{1 + R^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \text{atan} R \\ \frac{\hat{v}_2}{D} &= -\sin \theta \left( \frac{R}{1 + R^2} + \text{atan} R \right), \\ \frac{\hat{w}_2}{D} &= \frac{1}{1 + R^2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Now, we introduce the 3 by 3 matrix  $K(R)$  whose columns are made up of the three independent solutions. We also introduce the vector  $\mathbf{F} = (\partial_z U \cos \theta)^{-1} (F_u^\perp, F_v^\perp, F_w^\perp)$ . The general solution of the inhomogeneous system (21) can then be written  $\phi(R) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ , with.

$$\phi(R) = K(R)K^{-1}(R_0)\phi_0 + K(R) \int_{R_0}^R K^{-1}(r)\mathbf{F}(r)dr. \quad (84)$$

Taking as initial condition  $\phi = 0$  at  $R_0 = -\infty$  (no small-scales at  $t = -\infty$ ), we can finally write the general solution as

$$\phi(R) = \int_{-\infty}^R K(R)K^{-1}(r)\mathbf{F}(r)dr. \quad (85)$$

Note that the integrand is just the solution of the homogeneous system, with initial condition  $\phi(R = r) = \mathbf{F}(r)$ . This point is used in §4. Also, consider a product of two components of  $\phi$ , say

$\phi_u \phi_w^* = \hat{u} \hat{w}^*$ . Upon using (85), and the definition of the average using Gabor transform (74), we can write

$$\langle \overline{uw} \rangle = \sum_{j,l,j',l'=1}^2 \sum d\theta k_h dk_h dR \int_{-\infty}^R dr_0 \int_{-\infty}^R dr_1 K_{1j}(R) K_{1j'}^*(R) K_{jl}(r_0) K_{j'l'}^*(r_1) \langle F_l(r_0) F_{l'}^*(r_1) \rangle. \quad (86)$$

Because of the delta correlations of the force (see Appendix 5.4), the average brings down a factor  $-\cos\theta \partial_z U \tau \delta(r_1 - r_0)$  (because  $t - t_0 = -\cos\theta \partial_z U (R - R_0)$ , where  $\tau$  is a typical time scale (necessary for dimensional reasons)). So after integration over say,  $r_1$ , (86) becomes

$$\langle \overline{uw} \rangle = -\partial_z U \tau \int \cos\theta d\theta k_h dk_h dR \int_{-\infty}^R dr_0 k \sum_{j,l,j',l'=1}^2 K_{1j}(R) K_{1j'}^*(R) K_{jl}(r_0) K_{j'l'}^*(r_1) \langle F_l(r_0) F_{l'}^*(r_0) \rangle. \quad (87)$$

Here, the integrand of (87) is just the product of two solutions of the homogeneous system with initial condition  $\phi(R=r) = \mathbf{F}(r)$ . This property is also used in §4. We stress once again that this simplification is only valid when one performs the averaging procedure.

## 5.6 Divergences

The expression (26) for  $\overline{w}$  involves a divergence in the inviscid limit, which can be used to study the asymptotic expansion of  $\hat{\eta}$ . The divergence actually occurs at  $\theta = \pm\pi/2$  due to the inverse cosine factor. To study it, we use symmetries of the forcing to write the  $\theta$  dependent part of the integral as

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{F_w^\perp}{\cos\theta} e^{-\nu k_h^2 \int_{R_0}^R (1+X^2) dX / \cos\theta \partial_z U} = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{F_w^\perp}{\cos\theta} e^{-\alpha / \cos\theta}, \quad (88)$$

where  $\alpha = \nu k_h^2 \int_{R_0}^R (1+X^2) dX / \partial_z U$  will be our small parameter in the limit  $\nu \rightarrow 0$  (see [14].) A change of variables  $\cos\theta \rightarrow s$  allows us to write the integral involved in (88) as

$$4 \int_0^1 \left( \frac{F_w^\perp(s)}{s\sqrt{1-s^2}} - \frac{F_w^\perp(0)}{s} \right) e^{-\alpha/s} + 4 \int_0^1 \frac{F_w^\perp(0)}{s} e^{-\alpha/s}. \quad (89)$$

The first integral is convergent at  $s=0$ , and its leading-order approximation can be easily found by expanding the exponential. The second integral is proportional to the exponential integral function  $E_i(x) = \int_0^1 e^{-t/x} dt/t$ , whose expansion near  $x=0$  is

$$E_i(x) = C + \ln x + O(x),$$

where  $C$  is Euler's constant. Overall, the expansion for  $\overline{w}$  is

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \frac{\eta}{\partial_z U}, \\ \eta &= \eta_0 \ln \alpha + \eta_1 + O(\alpha), \\ \eta_0 &= -4 \int_0^\infty k_h dk_h \int_{-\infty}^\infty dR \int_{-\infty}^R F_w^\perp(0, k_h, k_h R_0) \frac{1+R_0^2}{1+R^2}, \\ \eta_1 &= -4 \int_0^\infty k_h dk_h \int_{-\infty}^\infty dR \int_{-\infty}^R \frac{1+R_0^2}{1+R^2} \int_0^1 ds \left[ C F_w^\perp(0, k_h, k_h R_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s} \left( \frac{F_w^\perp(k_h s, k_h \sqrt{1-s^2}, k_h R_0)}{\sqrt{1-s^2}} - F_w^\perp(0, k_h, k_h R_0) \right) \right]. \quad (90) \end{aligned}$$

In the isotropic case, (when  $F_w^\perp$  only depends on  $k_h(1+R_0^2)$ , symmetries of the integral defining  $\eta_0$  make it equal to 0).



## References

- [1] J.O. Hinze *Turbulence* (McGraw Hill, New York, 1975), 2nd ed.
- [2] K. S. Yajnik, Asymptotic theory of turbulent shear flows *J. Fluid Mech.* **42** 411 (1970)
- [3] G. L. Mellor, The large Reynolds number asymptotic theory of turbulent boundary layers *Int. J. Engng Sci.* **10** 851 (1972).
- [4] G.I. Barenblatt, Scaling laws for fully developed turbulent shear flow. Part 1. Basic hypotheses and analysis *J. Fluid Mech* **248** 513 (1993)
- [5] J. Nikuradse, Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren. *Forsch. Arb. Ing-Wes* No 356, 1932 (English translation NACA TT F-10, p. 359).
- [6] M.V. Zagarola, A.E. Perry and A.J. Smits, Mean-flow scaling of turbulent pipe flow *Phys. Fluids* **9**, 2094 (1997).
- [7] W. K. George, L. Castillo and M. Wosnik, A theory for turbulent pipe and channel flows, *TAM Report No. 872*, (1997).
- [8] W. K. George and L. Castillo, The zero pressure-gradient turbulent boundary layer, *Applied Mechanics Reviews* **50**, 689-729. (1997)
- [9] M. Oberlack, Unified theory for symmetries in plane parallel turbulent shear flows Center for Turbulence Research, Stanford University/NASA Ames, manuscript no. **163** (1997), under review in *J. Fluid Mech.*
- [10] G.L. Niederschulte, Turbulent flow through a rectangular channel, *Ph. D. Thesis, University of Illinois, Department of Theoretical and Applied Mechanics*, 1996.
- [11] M.V. Zagarola, Mean-flow scaling of turbulent pipe flow, *PhD Dissertation, Princeton University*, 1996.
- [12] M. Oberlack, Similarity in non-rotating and rotating turbulent pipe flows *J. Fluid Mech.* **379**, 1 (1999).
- [13] S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E.S. Titi and S. Wynne, Camassa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5338 (1998).
- [14] S. Nazarenko, N. Kevlahan and B. Dubrulle, Nonlinear RDT theory of near wall turbulence, *submitted to Physica D* (1999)
- [15] A.A. Townsend, The structure of turbulent shear flow (second edition), *The structure of turbulent shear flow* Cambridge University Press, 1976, 2nd ed.
- [16] J.A. Domaradzki, W. Liu, C. Härtel and L. Kleiser Energy transfer in numerically simulated wall-bounded turbulent flows. *Phys. Fluids* **6** 1583 (1994)
- [17] J-P. Laval, B. Dubrulle and S. Nazarenko, Nonlocality of interaction of scales in the dynamics of 2D incompressible fluids, *submitted to Phys. Rev. Letter*, 1999.
- [18] J. A. Domaradzki and E. M. Saiki, A subgrid-scale model based on the estimation of unresolved scales of turbulence *Phys. Fluid A* **9**, 2148 (1997)
- [19] S. Nazarenko, On exact solutions for near-wall turbulence theory, *Submitted to Europhys. Lett.* (1999).

- [20] J. Kestin and P.D. Richardson, Heat transfert across turbulent, incompressible boundary layers, *Int. J. Heat Mass Transfer.* **6**, 147 (1963).
- [21] R.D. Moser, J. Kim and N.N. Mansour, Direct Numerical simulation of turbulent channel flows up to  $Re_\tau = 590$  *Phys. Fluids* **11**,943 (1999).
- [22] M. Nockemann, M. Schober, J. Bruns, R. Abstient and D.W. Eckert (DNW), Vermessung der wandgrenzschicht im Deutsch-Niederländischen windkanal bei hohen Reynoldszahlen *Abhln. Aerodynamisches Institut RWTH Aachen Heft 32*, 1994.
- [23] B. Dubrulle and U. Frisch, Eddy viscosity of parity-invariant flow, *Phys. Rev A* **43** 5355 (1991).
- [24] T. Cebeci and A.M.O. Smith, *Analysis of Turbulent Boundary Layers* Academic, New York, 1974.
- [25] J.C.R. Hunt, D.D. Stretch and R.E. Britter *Proc. I.M.A. Conf on Stability stratified flow and dense gas dispersion*, (ed J.S. Puttock), Clarendon (1988).
- [26] B. Dubrulle and S. Nazarenko, Interaction of turbulence and large-scales vortices in incompressible 2D fluid *Physica D* **110** 123-138 (1998).
- [27] S. Nazarenko, N. Kevlahan and B. Dubrulle, Semi-classical theory for rapid distortion of homogeneous turbulence, *J. Fluid Mech.* **390**, 325 (1999).
- [28] A. Arneodo, J-F. Muzy, and S. Roux, Experimental analysis of self-similarity and random cascade process: application to fully developped turbulence data *J. Phys. II France* **7** (1997), 363.
- [29] A.E. Perry, S. Henbest and M.S. Chong, A theoretical and experimental study of wall turbulence, *J. Fluid Mech.* **165**, 163 (1986).





# Références Bibliographiques

- [1] A. Babiano, C. Basdevant, P. Le Roy, and R. Sadourny. Relative dispersion in two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 214:535, 1990.
- [2] A. Babiano, C. Basdevant, B. Legras, and R. Sadourny. Vorticity and passive scalar dynamics in two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 183:379–397, 1987.
- [3] A. Babiano, B. Dubrulle, and P. Frick. Some properties of two-dimensional inverse energy cascade dynamics. *Phys. Rev. E*, 55:2693–2706, 1997.
- [4] J. Bardina, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds. Improved subgrid models for large eddy simulation. *AIAA paper*, 80:1357, 1980.
- [5] G. I. Barenblatt. Scaling laws for fully developed turbulent shear flow. part 1. basic hypotheses and analysis. *J. Fluid Mech.*, 248:513–520, 1993.
- [6] G. K. Batchelor. The effect of rapid distortion of fluid in turbulent motion. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, 7:83–103, 1954.
- [7] G. K. Batchelor. Small-scales variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. *Fluid Mech.*, 5:113–133, 1958.
- [8] C. K. Birdsall and A. B. Langdon. *Plasma physics via computer simulation*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- [9] V. Borue. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 72:1475–1478, 1994.
- [10] M. E. Brachet, M. Meneguzzi, H. Politano, and P. L. Sulem. The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 194:333–349, 1988.
- [11] N. Brummell, F. Cattaneo, and J. Toomre. Turbulent dynamics in the solar convection zone. *Science*, 269:1313–1484, 1995.
- [12] J. A. Domaradzi, W. Liu, C Härtel, and L. Kleiser. Energy transfer in numerically simulated wall-bounded turbulent flows. *Phys. Fluids*, 6:1583, 1994.
- [13] T. Dubois and F. Jauberteau. A dynamic multilevel model for the simulation of the small structures in three dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Journal of Scientific Computing*, 13:323–367, 1998.

- [14] T. Dubois, F. Jauberteau, and R. Temam. Incremental unknowns, multilevel methods and the numerical simulation of turbulence. *Computer method in applied Mechanics and Enineering*, 6:503–688, 1998.
- [15] B. Dubrulle and U. Frisch. Eddy viscosity of parity-invariant flow. *Phys. Rev. A*, 43:5355–5364, 1991.
- [16] B. Dubrulle, J.-P. Laval, and P. Sullivan. The new dynamical subgrid model for the planetary surface layer. I analytical result. *En préparation*, 1999.
- [17] B. Dubrulle and S. Nazarenko. Interaction of turbulence and large-scales vortices in incompressible 2D fluid. *Physica D*, 110:123–138, 1997.
- [18] P. A. Durbin and O. Zeman. Rapid distortion theory for homogenous compressed turbulence with application to modeling. *J. Fluid Mech.*, 242:349–370, 1992.
- [19] M. M. M. El Telbany and A. J. Reynolds. Velocity distribution in plane turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 100:1–29, 1980.
- [20] G. Falkovich. Bottleneck phenomenon in developed turbulence. *Phys. Fluids*, 6:1411–1414, 1994.
- [21] M. Farge, N. K.-R. Kevlahan, V. Perrier, and E. Goirand. Wavelets and turbulence. *Proceeding of the IEEE*, 84:639–669, 1996.
- [22] H. H. Fernholz, E. Krause, M. Nockemann, and M. Schober. Comparative measurement in the canonical boundary layer at  $Re_{\delta_2} \leq 6 \times 10^4$  on the wall of the german-dutch windtunnel. *Phys. Fluids*, 7:1275, 1995.
- [23] U. Frisch, P. L. Sulem, and M. Nelkin. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.*, 87:719–736, 1978.
- [24] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A dynamical subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3:1760–1765, 1991.
- [25] M. A. Gonze. Revue, amélioration et validation de modélisations sous-maille. *Rapport de stage post-doctoral*, 1994.
- [26] D. Gottlieb and S.A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. SIAM, Philidelphia, 1977.
- [27] A. E. Hansen, D. Marteau, and P. Tabeling. Two-dimensional turbulence and dispersion in a freely decaying system. *Phys. Rev. E*, 58:7261, 1998.
- [28] J. O. Hinze. *Turbulence*. McGraw Hill, New York, 2nd ed., 1975.
- [29] J. C. R. Hunt and D. J. Carruthers. Rapid distortion theory and the "problems" of turbulence. *J. Fluids Mech.*, 212:497–532, 1990.
- [30] W. P. Jones and B. E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.

- [31] R. D. Joslin. Discussion of DNS: past, present and future. In *First international conference on direct numerical simulation and large eddy simulation (DNS/LES)*., Ruston, Louisiana, 1997.
- [32] Kevlahan N. K.-R., S. Nazarenko, and B. Dubrulle. Reduction of large-scale strain by inhomogenous turbulence. *to be published in J. Fluids Mech.*, 1998.
- [33] Th. Von Kármán. Mechanische ähnlichkeit und turbulenz. In *Proc. 3rd Intl Congress for Applied Mechanics*, volume 1, Stockholm, 24-29 August 1930, 1930.
- [34] J. Kestin and P. D. Richardson. Heat transfert across turbulent, incompressible boundary layers. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 6:147–189, 1963.
- [35] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluids Mech.*, 177:133–166, 1987.
- [36] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *C.R. Acad. Sci URSS*, 30:301–305, 1941.
- [37] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13:82–85, 1962.
- [38] M. J. Lee and Kim. J. The structure of turbulence in a simulated plane couette flow. In *8th Symposium on Turbulent Shear Flows*., Munich, 1991.
- [39] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, 103:16–42, 1991.
- [40] A. Leonard. *Direct numerical simulations, in turbulence and its simulation*. (T. Gatski, ed.), Springer, 1995.
- [41] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. 2nd edn. Kluwer, 1990.
- [42] M. Lesieur and O. Métais. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 28:45–82, 1996.
- [43] D. K. Lilly. On the computational stability of numerical solutions of time-dependent, nonlinear, geophysical fluid dynamic problems. *Mon. Wea. Rev.*, 93:11, 1965.
- [44] A. Mariotti, B. Legras, and D. G. Dritschel. Vortex stripping and erosion of coherent structures in two-dimensional flows. *Phys. Fluids*, 6:3954–3962, 1994.
- [45] P. J. Mason and D. J. Thomson. Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 242:51–78, 1992.
- [46] G. L. Mellor. The large Reynolds number asymptotic theory of turbulent boundary layers. *Int. J. Engng Sci.*, 10:851, 1972.
- [47] O. Metais and M. Lesieur. Spectral large-eddy simulation of isotopic and staby stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239:157–194, 1992.

- [48] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flows up to  $Re_\tau = 590$ . *Phys. Fluids*, 11:943–945, 1999.
- [49] B. T. Nadiga and S. Shkoller. A conservative numerical model for vortex merger. *submitted to J. Fluids Mech.*, 1999.
- [50] C. L. M. H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mém. Acad. Roy. Sci.*, 6:349–440, 1823.
- [51] S. Nazarenko, N. K.-R. Kevlahan, and B. Dubrulle. Nonlinear RDT theory of near wall turbulence. *in preparation*, 1999.
- [52] S. Nazarenko, N. Zabusky, and T. Scheidegger. Nonlinear sound-vortex interactions in an inviscid isentropic fluid: a two fluid model. *Phys. Fluid*, 7:2407, 1995.
- [53] G. L. Niederschulte. *Turbulent flow through a rectangular channel*. PhD thesis, University of Illinois, Departement of Theoretical and Applied Mechanics, 1996.
- [54] J. Nikuradze. Gesetzmässigkeiten der turbulenten strömung in glatten röhren. *VDI Forschungsheft*, 356, 1932.
- [55] M. Nockemann, M. Shober, J. Bruns, R. Abstiens, and D. W. (DNW) Eckert. Vermessung der wangrenzschicht im deutsch-niederländischen windkanal bei hohen reynoldszahlen. Technical report, Abhln. Aerodynamisches Institute RWTH Aachen Helf 32, 1994.
- [56] M. Oberlack. Unified theory for symmetries in plane parallel turbulent shear flows. Technical Report manuscript no. 163, under review in *J. Fluid Mech.*, Center for Turbulence Research, Stanford University/NASA Ames, 1997.
- [57] S. A. Orszag. Comparison of pseudospectral and spectral approximation. *Stud. Appl. Math.*, 51:253–259, 1972.
- [58] G. Parisi and U. Frisch. On the singularity structure of fully developed turbulence. In M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, editors, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics, Proceed. Inter. School of Physic 'E. Fermi', 1983, Varenna, Italy*. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [59] T. Passot, H. Politano, and M. Meneguzzi. Instability of strained vortex layers and vortex tube formation in homogenous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 282:313–338, 1995.
- [60] G. S. Patterson and Orszag. Spectral calculations of isotropic turbulence: efficient removal of aliasing interactions. *Phys. Fluids*, 14:2538–2541, 1971.
- [61] U. Piomelli, T. A. Zang, C. G. Speziale, and M. Y. Hussani. On the large-eddy simulation of transitional wall-bounded flows. *Phys. Fluids A*, 2:257–265, 1990.
- [62] L. Prandtl. Zur turbulenten strömung in röhren und längs platten. *Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst.*, 4:18–29, 1925.



- [63] L. F. Richardson. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proc. R. Soc. Lond.*, 110:709–737, 1926.
- [64] S. G. Saddoughi and S. V. Veeravalli. Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 268:333–372, 1994.
- [65] R. Sadourny and C. Basdevant. Une classe d’opérateur adaptés à la modélisation de la diffusion turbulent en dimension deux. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, Serie II*, 292:1061–1064, 1981.
- [66] P. Santangelo, R. Benzi, and B. Legras. The generation of vortices in high-resolution, two-dimensional decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breaking of self-similarity. *Phys. Fluids A*, 1:1027–1034, 1989.
- [67] K. Schneider, N. K.-R. Kevlahan, and M. Farge. Comparison of an adaptative wavelet method and nonlinearly filtered pseudospectral methods for two-dimensional turbulence. *Theore. Comput. Fluid Dynamics*, 9:191–206, 1997.
- [68] A. Simone, G. N. Coleman, and C. Cambon. The effect of compressibility on turbulent shear flow: a rapid-distortion theory and direct-numerical-simulation study. *J. Fluids Mech.*, 330:307–338, 1997.
- [69] J. Smagorinsky. General circulation experiment with the primitive equations, part i: The basic experiment. *Mon. Wea. Rev.*, 91:99, 1963.
- [70] L. M. Smith and V. Yakhot. Finite-size effects in forced two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 274:115–138, 1994.
- [71] P. P. Sullivan, J. C. McWilliams, and C. H. Moeng. A subgrid-scale model for large-eddy simulation of planetary boundary-layer flows. *Boundary-Layer Meteorology*, 71:247–276, 1994.
- [72] P. Tabelling, G. Zocchi, and H. Willaime. Probability density functions, skewness, and flatness in large Reynolds number turbulence. *Phys. Rev. E*, 53:1613–1621, 1996.
- [73] A. A. Townsend. *The structure of turbulent shear flow (second edition)*. Cambridge university press, Cambridge, 1976.
- [74] A. Troelis. *Computational signal processing with wavelets*. Birkhauser, Boston, 1998.
- [75] A. Vincent and M. Meneguzzi. The spatial structure and statistical properties of homogenous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 225:1–20, 1991.
- [76] R. G. Voigt, D. Gottlieb, and M. Y. Hussaini. *Spectral methods for partial differential equations*. SIAM, Philadelphia, 1984.
- [77] J. Werne and D. C. Fritts. Stratified shear turbulence: Evolution and statistics. *Geophys. Research Lett.*, 26:439–442, 1999.

- [78] T. Wey and W. W. Willmarth. Reynolds-number effects on the structure of a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 204:57–95, 1989.
- [79] K. S. Yajnik. Asymptotic theory of turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 42:411–427, 1970.
- [80] M. V. Zagarola. *Mean-flow scaling of turbulent pipe flow*. PhD thesis, Princeton University, 1996.

*Si quelqu'un, en l'éveil de son intelligence, n'a pas été capable de s'enthousiasmer pour une telle architecture, alors jamais il ne pourra réellement s'initier à la recherche théorique.*

*A. Einstein ( ... en parlant de la géométrie d'Euclide )*