

ORSAY

N° D'ORDRE : 6194

Université de PARIS-SUD
U.F.R. Scientifique d'Orsay

THÈSE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

PAR

Romuald DUPERRIER

SUJET : DYNAMIQUE DE FAISCEAUX INTENSES DANS LES RFQ

Soutenue le 7 juillet 2000 devant la commission d'examen :

MM. HAISSINSKI Jacques (président)
JOLY Serge (rapporteur)
LACLARE Jean-Louis
MUELLER Alexandre
PAGANI Carlo (rapporteur)
TKATCHENKO André

à mes parents,
à Evelyne,

Remerciements

Je tiens à remercier Jean-Michel Lagniel, chef du projet I.P.H.I., et André Tkatchenko, mon directeur de thèse, pour la bienveillance avec laquelle ils ont guidé ce travail. Très efficaces, ils ont toujours su m'accorder le temps nécessaire et ont suivi les résultats de cette thèse avec enthousiasme.

Un grand MERCI à Nicolas Pichoff. Il m'a fait profiter avec enthousiasme de ses connaissances, a toujours manifesté un vif intérêt pour mon travail, s'est montré à tout moment disponible et a fait preuve d'une pertinence rare. Qu'il voit ici l'expression de toute ma gratitude.

Je tiens à remercier Didier Uriot pour sa patience lors des longues séances de débogage du code TOUTATIS. Sa compétence en programmation m'a été d'un grand secours.

Je voudrais aussi remercier Pierre Mattéi et Robin Ferdinand qui m'ont fait profiter de leur expérience acquise lors de la conception du RFQ du projet I.P.H.I..

Je remercie Serge Joly (CEA-SP2A, Bruyères le Châtel) et Carlo Pagani (INFN, Milan), les rapporteurs de ma thèse, pour la pertinence de leurs remarques qui ont contribué à la cohérence de mon manuscrit.

Je remercie Jean-Louis Laclare (CEA, Saclay), Alexandre Mueller (IPN, Orsay) et Jacques Haissinski (LAL, Orsay) de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de ma thèse et d'accepter les responsabilités qui en découlent.

Un merci tout spécial à Alessandra Lombardi (CERN). Elle a pris sur son temps pour me faire profiter des mesures effectuées sur RFQ2 malgré le surcroît de travail que cela occasionait, fait de plus en plus rare. J'espère que cette collaboration n'en est qu'à ses débuts.

Enfin, je tiens à remercier Pierre-Yves Beauvais et son groupe qui m'ont apporté leur concours durant ces presque trois années. Ils m'ont toujours soutenu et répondu présent lorsque je les sollicitais.

Table des matières

1	Introduction	11
2	Le Quadripôle Radio Fréquence	19
2.1	Principe de fonctionnement d'un RFQ	19
2.2	L'approximation statique dans la zone utile	22
2.3	Les harmoniques cylindriques dans un RFQ	24
2.4	Adaptation temps / position	27
2.5	Conclusion du chapitre	27
3	Le code de transport PARMTEQM	31
3.1	Algorithme utilisé pour le transport	31
3.2	Le calcul des champs extérieurs	32
3.2.1	Le corps du RFQ	32
3.2.2	La section d'adaptation radiale en entrée	33
3.2.3	La section de fuite	34
3.2.4	La cellule de transition	35
3.2.5	L'évaluation du champ crête	37
3.3	L'intégration des équations de la dynamique	42
3.4	Les effets d'image	45
3.5	Les forces de charge d'espace	46
3.5.1	Calcul des champs	46
3.5.2	Reconstitution du paquet à mi-cellule	46
3.6	La gestion des pertes	47
3.6.1	Les pertes transverses	47
3.6.2	Les particules décrochées en phase	47
3.7	Conclusion du chapitre	47
4	Le code de transport TOUTATIS	51
4.1	Algorithme pour la simulation du transport dans un RFQ	51
4.2	Intégration des équations du mouvement	53
4.3	Le calcul du potentiel électrique	54
4.3.1	La méthode des différences finies	55
4.3.1.1	Les développements	55

4.3.1.2	Approximation du second ordre	56
4.3.1.3	Application aux branches normales pour les noeuds intérieurs .	56
4.3.1.4	Application aux branches inégales pour les noeuds intérieurs .	57
4.3.1.5	Conditions aux limites de la grille	58
4.3.1.5.1	Le plan transverse	58
4.3.1.5.2	Le plan longitudinal	58
4.3.2	Stratégie pour la création automatique de grilles avec conducteur	59
4.3.2.1	Dimensionnement de la grille	59
4.3.2.1.1	Taille transverse	59
4.3.2.1.2	Taille longitudinale	59
4.3.2.2	Discrétisation de la géométrie des lames	60
4.3.2.2.1	Paramétrage de la surface du conducteur	60
4.3.2.2.2	Repérage des intersections conducteur/grille	61
4.3.2.3	Etiquetage des noeuds	62
4.3.3	Les méthodes multigrille	63
4.3.3.1	Les concepts fondamentaux	63
4.3.3.2	Les principaux cycles	65
4.3.3.2.1	Le cycle en V	65
4.3.3.2.2	Le cycle en W	66
4.3.3.2.3	Le cycle total (<i>Full Algorithm Multigrid</i>)	66
4.3.3.2.4	Le cycle utilisé dans TOUTATIS	66
4.3.3.2.5	Les opérateurs de restriction et de prolongation	69
4.3.4	La convergence	71
4.3.4.1	Estimation de la convergence	71
4.3.4.2	Le critère de qualité	72
4.3.5	Le maillage adaptatif	72
4.3.6	Test avec une distribution cylindrique gaussienne	73
4.4	La gestion des pertes	75
4.4.1	Les pertes transverses	75
4.4.2	Les particules décrochées en phase	75
4.5	Conclusion du chapitre	76
5	Validités et comparaisons des méthodes	79
5.1	Le calcul des champs extérieurs	79
5.1.1	Le corps du RFQ	79
5.1.1.1	Calcul d'une référence avec le module TOSCA de Vector Fields	79
5.1.1.2	La projection	81
5.1.1.3	Le fit de la géométrie	81
5.1.1.4	Conséquence sur la dynamique des particules	83
5.1.1.5	Conclusion	86
5.1.2	La section d'adaptation radiale en entrée	87
5.1.2.1	Méthode pour optimiser la section	87
5.1.2.2	Les principales formulations	88

5.1.2.3	Calcul de F_e avec un code d'enveloppe	90
5.1.2.4	Calcul de F_e avec un code multiparticulaire	93
5.1.2.5	Limite de la méthode	96
5.1.2.6	Conclusion sur la section d'entrée	99
5.1.3	La cellule de transition ("trancell")	100
5.1.4	Le champ crête	103
5.1.4.1	Optimisation du maillage utilisé par TOSCA	103
5.1.4.1.1	Découpage de la cellule	103
5.1.4.1.2	Densité d'éléments	104
5.1.4.2	Comparaison CHARGE 3D/TOSCA	106
5.1.4.3	Comparaison entre le profil sinusoidal et le profil à "deux termes"	106
5.1.4.4	Conclusion sur l'étude du champ crête	110
5.2	L'intégration des équations de la dynamique	110
5.2.1	L'hypothèse de paraxialité	110
5.2.2	Erreur due à l'algorithme d'intégration	112
5.3	Les forces de charge d'espace et les effets d'image	114
5.4	La gestion des pertes	117
5.4.1	Les pertes transverses	117
5.4.2	Les particules décrochées en phase	119
5.5	Confrontation expérimentale	120
5.5.1	Description de la ligne	120
5.5.2	Comparaison entre simulations et mesures	122
5.6	Conclusion du chapitre	124
6	Développements complémentaires	129
6.1	Influence des gaps de couplage sur la dynamique	129
6.2	Conception d'un RFQ	132
6.2.1	Approximations initiales	132
6.2.2	Calcul des forces	133
6.2.2.1	Forces extérieures	133
6.2.2.2	Forces de charge d'espace	134
6.2.3	Détermination des paramètres	135
6.2.4	Critère d'adiabaticité	137
6.2.5	Passage au faisceau réel	138
6.2.5.1	Equivalence transverse	138
6.2.5.2	Equivalence longitudinale	139
6.2.6	Illustration de la méthode pour un cas particulier	139
6.3	Conception de deux RFQ	145
6.4	Conclusion du chapitre	149
7	Conclusion générale	153

A	Généralités sur les harmoniques	155
A.1	Le problème de Dirichlet	155
A.2	Le problème de Sturm-Liouville	156
A.3	Méthodes pour déterminer les coefficients des séries	156
A.3.1	La projection sur une base orthonormée dans le domaine	156
A.3.2	Méthodes avec base non orthonormée	157
A.3.2.1	La méthode de Galerkin	157
A.3.2.2	La méthode directe	158
A.3.2.3	La méthode des moindres carrés	158
B	La géométrie des lames dans un RFQ	163
C	Procédure pour obtenir A et B	167
D	Modèle analytique pour chanfrein	169
D.1	Introduction	169
D.2	Modèle analytique et outils de simulations	170
D.2.1	Solutions analytiques de l'équation de Laplace	170
D.2.2	Outils de simulations	171
D.2.2.1	Génération du maillage	171
D.2.2.2	Traitement des résultats et analyse harmonique	171
D.3	Application au dipôle	172
D.3.1	Description de l'aimant	172
D.3.2	Profil	173
D.4	Application au quadripôle	174
D.4.1	Description de l'aimant	174
D.4.2	Profil	174
D.5	Conclusion	176

Chapitre 1

Introduction

Le RFQ dans les accélérateurs de puissance

La fonction d'un accélérateur est de produire un faisceau de particules chargées à une énergie et une intensité déterminées selon les besoins des utilisateurs. Il est constitué d'une source, de modules d'accélération et de sections de transport des particules. La description du coeur¹ du faisceau que ce soit lors de mesures ou de simulation fut pendant bien longtemps suffisante pour permettre la réalisation de la plupart des machines de ce siècle. Ce n'est plus le cas aujourd'hui, notamment, avec le développement des accélérateurs de faisceaux intenses de protons ou d'ions légers (deutons,...)². Il s'est avéré qu'une petite proportion du faisceau peut venir percuter la paroi interne de la structure et provoquer l'activation de la machine [1]. Cette activation compliquerait grandement la maintenance du site. Cette petite portion de particules dont l'amplitude est plus grande que la taille du coeur du faisceau est appelée halo.

Ces accélérateurs à haute intensité ont de nombreuses applications [2] :

- La physique nucléaire et la physique des particules où des injecteurs délivrant des faisceaux de bonne qualité et de plus en plus intenses sont nécessaires (CERN, DESY, Fermilab,...).
- Les sources de neutrons par spallation où les flux gagneraient deux ordres de grandeurs au regard des performances des réacteurs actuels pour la biologie, la physique, ...
- Les accélérateurs médicaux pour la production de radio-isotopes (marqueurs pour l'imagerie médicale).
- L'irradiation des matériaux et l'injection de neutres pour le chauffage du plasma pour les tokamaks (fusion par confinement magnétique).
- Le traitement des déchets nucléaires en les soumettant à des flux intenses de neutrons produit par spallation, le processus pouvant ou non s'accompagner d'une production d'énergie.
- La production d'énergie en utilisant un cycle au thorium, plus abondant que l'uranium.
- La production de tritium.

¹partie étant comprise entre le centre de gravité et les dimensions quadratiques moyennes ou RMS (Root Mean Square).

²de quelques dizaines à quelques centaines de mA avec des cycles utiles élevés.

L'intérêt pour de telles machines est donc considérable ce qui explique que de nombreux projets aient été étudiés et pour certains réalisés depuis le début des années 50. Les configurations pour l'accélérateur sont multiples. Selon les projets, le cyclotron ou l'accélérateur linéaire (linac) sont considérés avec un fonctionnement continu ou un cycle utile élevé compatible avec une installation de type industriel. Le choix du cyclotron ou du linac est souvent un sujet de polémiques. Nous ne traiterons pas ici des avantages de l'un par rapport à l'autre. Notons simplement que c'est l'option linac qui est choisie dans la plupart des projets conduits actuellement. C'est cette structure que nous détaillerons. Pour atteindre des énergies de l'ordre du GeV et des intensités de quelques dizaines de mA, cette structure procède par étapes détaillées dans la section suivante.

Généralités sur les caractéristiques des linacs de puissance

Nous n'énumérerons pas dans cette section tous les types d'éléments possibles pour la réalisation d'un linac. Nous nous contenterons de dresser un schéma classique pour une telle structure dont la figure 1.1 représente une configuration typique.

La source

C'est généralement une source E.C.R. (Électron Cyclotron Résonance). C'est une enceinte où un plasma est confiné à l'aide de plusieurs bobines. Le plasma est chauffé par une source de puissance radiofréquence (magnétron ou klystron). Les électrons sont accélérés à l'aide d'une résonance entre le champ magnétique et la fréquence du générateur R.F., d'où le nom. Les particules chargées produites par ionisation (protons, deutons, ...) sont éjectées par un jeu d'électrodes à la haute tension qui fixe l'énergie du faisceau primaire (environ 100 keV). La tension du système peut être également pulsée afin d'obtenir un prédécoupage du faisceau. La source est suivie d'une ligne de transport composée de deux solénoïdes pour permettre l'injection dans un RFQ.

Le RFQ

(Radio Frequency Quadrupole)

Cet accélérateur linéaire, qui permet d'atteindre quelques MeV, a plusieurs fonctions :

- grouper les particules à la fréquence choisie
- accélérer, en minimisant les pertes, les paquets formés depuis 100 keV jusqu'à quelques MeV
- assurer les confinements radial et longitudinal du faisceau en régime de charge d'espace³

Toutes ces étapes sont réalisées de manière continue le long de l'axe de propagation des particules afin d'obtenir un processus le plus adiabatique possible. Cette structure sera analysée en détail dans le prochain chapitre.

³Les forces de charge d'espace sont dues au potentiel de déconfinement créé par le faisceau lui-même

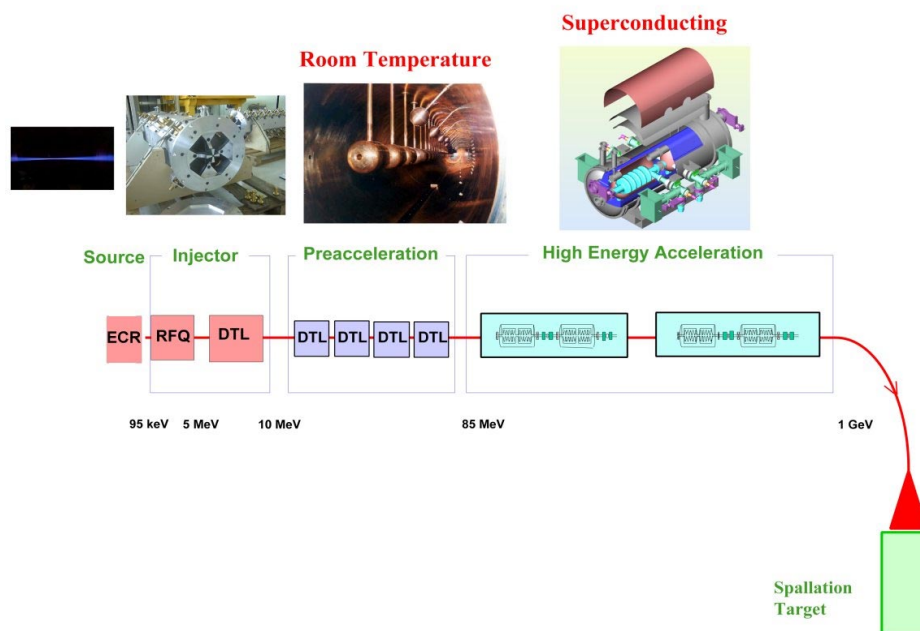


FIG. 1.1 – Schéma type d'un accélérateur de puissance.

Le D.T.L.

(Drift Tube Linac)

Cette structure reprend le faisceau de quelques MeV et accélère les paquets fournis par le RFQ jusqu'à environ 100 MeV. Cette cavité accélératrice, appelée aussi structure Alvarez [3], soustrait le faisceau lorsque le champ est décélérateur à l'aide de tubes de glissement. La focalisation radiale est assurée par des quadripôles magnétiques soit placés in situ (à l'intérieur des tubes de glissements [4]), soit placés entre les cavités [5].

Le C.C.L.

(Coupled Cavity Linac)

Cet étage est plus économique que le D.T.L. en puissance R.F. pour des énergies supérieures à 100 MeV. La focalisation est assurée par des quadripôles magnétiques placés entre les cavités. Ces cavités sont de plus en plus souvent supraconductrices (fort gradient accélérateur, rendement). Cette dernière étape permet d'atteindre une énergie de 1 à 2 GeV nécessaire à une production efficace de neutrons par spallation dans la cible placée à son extrémité.

Les principaux problèmes à résoudre

Les problèmes à étudier, en vue de la construction de tels linacs, sont nombreux et complexes ; les performances visées sont, en effet, d'environ deux ordres de grandeur supérieures à

celles des machines existantes. Les points critiques sont nombreux :

- génie civil et alignement de la machine
- quadripôles, correcteurs et alimentations associés
- vide
- distribution électrique et réfrigération
- mesures magnétiques et mesures des champs radiofréquences
- informatique et électronique, système de contrôle / commande
- calcul des cavités (champs, tenue mécanique)
- radioprotection, tenue au rayonnement, sûreté
- coupleurs et fenêtres R.F., asservissements R.F./faisceau
- usinage des éléments

Tous ces points clés subissent un cahier des charges compilant les tolérances données par la dynamique du faisceau. La validité de ces tolérances issues de simulations est donc un point critique. Il est par conséquent très important de mener des études théoriques et expérimentales approfondies conduisant à une meilleure compréhension de la dynamique des particules dans ces linacs. Plus particulièrement, afin d'évaluer le coût et la faisabilité de la partie haute énergie (cavités supraconductrices, 2/3 du coût total), il est indispensable de caractériser avec précision le faisceau issu de l'étage basse énergie (injecteur : source, RFQ, D.T.L. ≤ 10 MeV). C'est le but des projets I.P.H.I.⁴ et L.E.D.A.⁵ conduits respectivement par une collaboration CEA/CNRS⁶ et le Los Alamos National Laboratory [5, 6] (figure 1.2). Pour ces injecteurs, les pertes de particules sont critiques. Les conséquences de ces pertes sont en effet multiples : activation du cuivre⁷, dégazage dans la cavité induisant des claquages, érosion de la surface interne amplifiant le taux de claquages pour ne citer que les plus importantes. Pour simuler la dynamique dans les accélérateurs RFQ, le code PARMTEQM⁸ est la référence internationale depuis une vingtaine d'années. Ce code de transport du L.A.N.L., écrit initialement par Ken Crandall en 1979, a été modifié à maintes reprises depuis par Ken Crandall lui-même et d'autres contributeurs (Lloyd Young). Ces modifications portaient notamment sur les effets d'image, les forces de charge d'espace et la prise en compte de la configuration réelle des champs radiofréquences dans la zone faisceau (zone utile). PARMTEQM a été écrit en se basant sur des approximations simplifiant le traitement de la dynamique. Ces simplifications étaient nécessaires pour limiter le temps de calcul sur les ordinateurs disponibles à l'époque. De plus, les applications visées concernaient l'accélération de faisceaux avec des cycles utiles très faibles et l'objectif principal était de pouvoir simuler l'évolution du coeur du faisceau. Ce n'est plus le cas aujourd'hui. Il faut, en plus de l'évolution des paramètres RMS⁹, avoir une connaissance aussi parfaite que possible des caractéristiques

⁴Injecteur de Protons de Haute Intensité

⁵Low Energy Demonstration Accelerator

⁶Commissariat à l'Énergie Atomique / Centre National de Recherche Scientifique.

⁷le seuil d'activation du cuivre est de 2.16 MeV, il est donc très important de connaître avec précision l'énergie des particules perdues.

⁸Phase And Radial Motion in Transverse Electric Quadrupole with Multipoles.

⁹Root Mean Square.

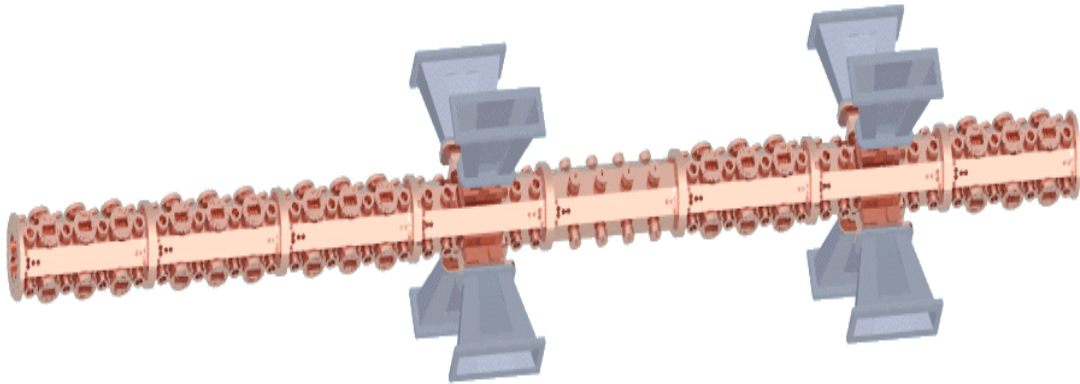


FIG. 1.2 – Vue d'artiste du RFQ du projet I.P.H.I..

des particules qui constituent le halo (localisation des pertes, énergie des particules perdues) et celles du faisceau en sortie du RFQ pour s'affranchir de toutes pertes dans la partie haute énergie. L'objet de cette thèse est d'analyser les approximations utilisées dans le code PARMTEQM et de quantifier leurs effets. Pour ce faire, le deuxième chapitre passera en revue l'essentiel des concepts utilisés pour la dynamique dans les RFQ. Le troisième chapitre détaillera les hypothèses et équations utilisées par PARMTEQM. Le quatrième chapitre détaillera l'écriture d'un nouveau code de transport, TOUTATIS, intégrant le temps comme variable indépendante et le calcul des champs à l'aide de maillages cartésiens tridimensionnels. Ce code, et des versions modifiées de ce code, nous serviront dans le cinquième chapitre pour mener des tests sur la validité des approximations utilisées par le code PARMTEQM. Dans le sixième chapitre, nous détaillerons différentes contributions supplémentaires sur la dynamique dans les RFQ.

Bibliographie

- [1] N. Pichoff, “Étude théorique et expérimentale du halo d’un faisceau intense de particules chargées dans un accélérateur”, thèse Université Paris Sud Orsay, 11 décembre 1997.
- [2] J.-M. Lagniel, “Vers la construction de linacs à haute intensité”, Journées accélérateurs de la Société Française de Physique, Roscoff, 20-22 mars 1995.
- [3] J. Le Duff, “Dynamics and acceleration in linear structures”, CERN Accelerator School, Volume I, proc. 1992.
- [4] R. Duperrier, “Optimisation des tubes de glissement du D.T.L. d’I.P.H.I.”, rapport interne CEA/DSM/GECA/9765.
- [5] J.-M. Lagniel, “High Intensity linac studies in France”, conférence Linac 98, Chicago, p. 706.
- [6] H. Vern Smith, Jr. David Schneider, “Status update on the Low Energy Demonstration Accelerator (LEDA)”, conférence Linac 98, Chicago, p. 418.

Chapitre 2

Le Quadripôle Radio Fréquence

Le quadripôle radiofréquence (RFQ) est un accélérateur linéaire d'origine assez récente. En dépit d'un principe de fonctionnement assez simple, il a seulement été inventé à la fin des années 1960 par Kapchinsky [1] et Teplyakov de l'Institut de Physique Expérimentale et Théorique de Moscou (ITEP). D'importantes contributions pour le RFQ ont été apportées par le Los Alamos National Laboratory (LANL)[2], où un démonstrateur appelé POP (Proof Of Principle) a été construit et fonctionna en 1980. Depuis, le RFQ est devenu si populaire qu'en quelques années plusieurs dizaines ont été construits et mis en service dans plusieurs laboratoires et universités à travers le monde.

Les principales qualités du RFQ sont qu'il regroupe en paquets, focalise et accélère un faisceau de particules chargées en utilisant uniquement les champs RF. Le RFQ est particulièrement adapté pour l'accélération d'ions à basse énergie (de 1 à 2 MeV par nucléon). C'est la meilleure structure connue pour réaliser cette opération.

Nous verrons dans ce chapitre le principe de fonctionnement d'un RFQ. Nous détaillerons plus particulièrement l'aspect dynamique de faisceau. L'aspect électrodynamique de cette structure ne sera pas développé en détail, mais le lecteur intéressé pourra se plonger dans la littérature qui est assez abondante sur ce sujet.

2.1 Principe de fonctionnement d'un RFQ

Le principe de fonctionnement d'un RFQ peut aisément être expliqué à l'aide de quelques schémas. Sur la figure 2.1 est représenté un quadripôle électrique ayant une polarité de ces électrodes alternative dans le temps. Si un faisceau de particules chargées est injecté le long de l'axe longitudinal de cette structure, et si les particules de ce faisceau la traversent pendant un temps tel que la polarité s'est inversée plusieurs fois¹, elles seront soumises à une force de focalisation alternant dans chaque plan transverse (focalisant puis défocalisant, etc ... dans un plan donné). L'effet global est un confinement du faisceau. Il est tout à fait comparable à celui produit par une

¹ ceci est un compromis entre la longueur du quadripôle, la vitesse des particules et la pulsation de la polarité. Autrement dit, il suffit que le quadripôle ait une longueur de quelques $\beta\lambda$ où $\beta = v/c$ (v la vitesse des particules, c celle de la lumière) et $\lambda = 2\pi c/\omega$ (ω la pulsation de la polarité).

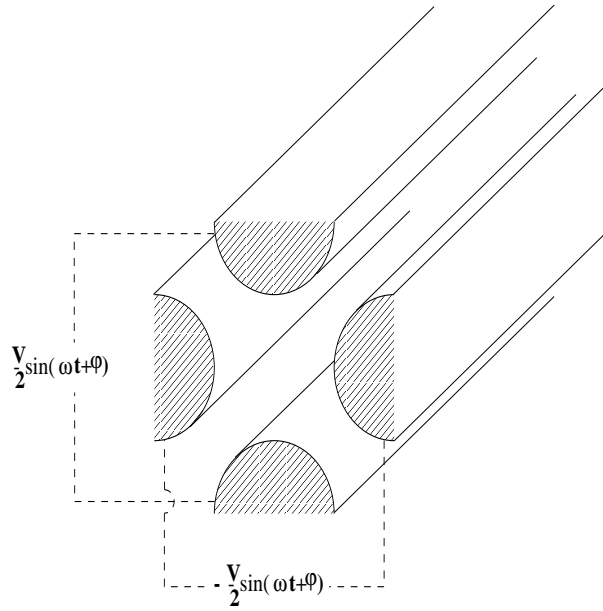


FIG. 2.1 – Quadripôle avec polarité alternative.

ligne de transport où ont été régulièrement disposés des quadripôles magnétiques, la polarité de deux quadripôles successifs étant opposées (focalisation alternée).

La géométrie des pôles, telle que nous venons de la décrire, ne permet pas la mise en paquets et l'accélération du faisceau. Pour réaliser ces fonctions, la symétrie quadripolaire des électrodes est perturbée (figure 2.2). Lorsque les pôles horizontaux sont à une distance a de l'axe, les pôles verticaux sont à une distance $m \times a$ de l'axe. m est appelé facteur de modulation. Sa valeur varie typiquement entre 1 et 2. a est l'ouverture minimum. La dissymétrie est inversée sur une distance égale à $\beta_s \lambda / 2$ où β_s est le facteur relativiste de la particule synchronisée avec les battements radiofréquences, λ leur longueur d'onde. Le potentiel sur l'axe varie alors périodiquement et une composante de champ longitudinal est créée. C'est le point clé du RFQ : la période de la modulation est appliquée de telle manière qu'il y a synchronisme entre la particule et l'onde. La force longitudinale est toujours focalisante et peut devenir accélératrice tandis que les forces transverses imposent une focalisation alternée. Il est intéressant de noter qu'il n'est pas possible d'obtenir une force focalisante dans les trois plans en même temps. Lorsque des particules sont en mouvement synchronisé avec une onde électromagnétique, la situation est quasi-statique et l'équation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

peut être appliquée. Une force focalisante dans chaque plan en même temps impliquerait que les trois termes soient de même signe et l'équation (2.15) ne serait alors vérifiée que si ils sont nuls.

Le RFQ opère à haute fréquence, typiquement de plusieurs dizaines à plusieurs centaines de MHz (352.2 MHz pour le RFQ d'I.P.H.I.). Si bien que pour les énergies considérées, les cellules

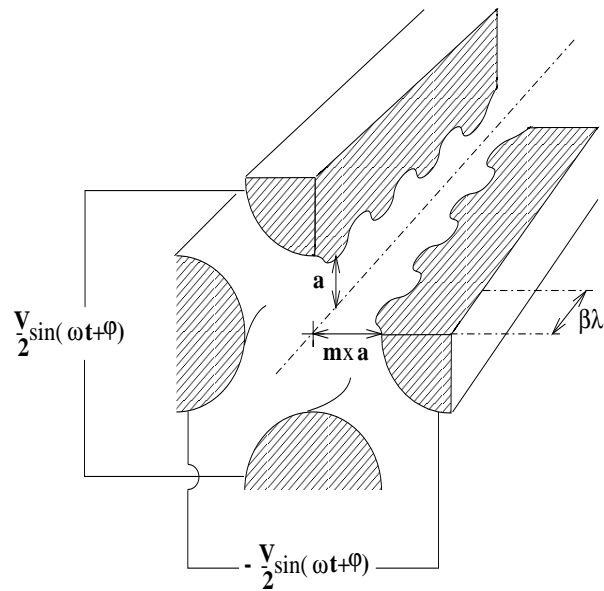


FIG. 2.2 – Quadripôle avec polarité alternative et pôles modulés (a : minimum d'ouverture ; $m \times a$: maximum d'ouverture ; $\beta \lambda$ période de modulation ; m : facteur de modulation). Une cellule correspond à une maille de cette géométrie de longueur $\beta \lambda / 2$.

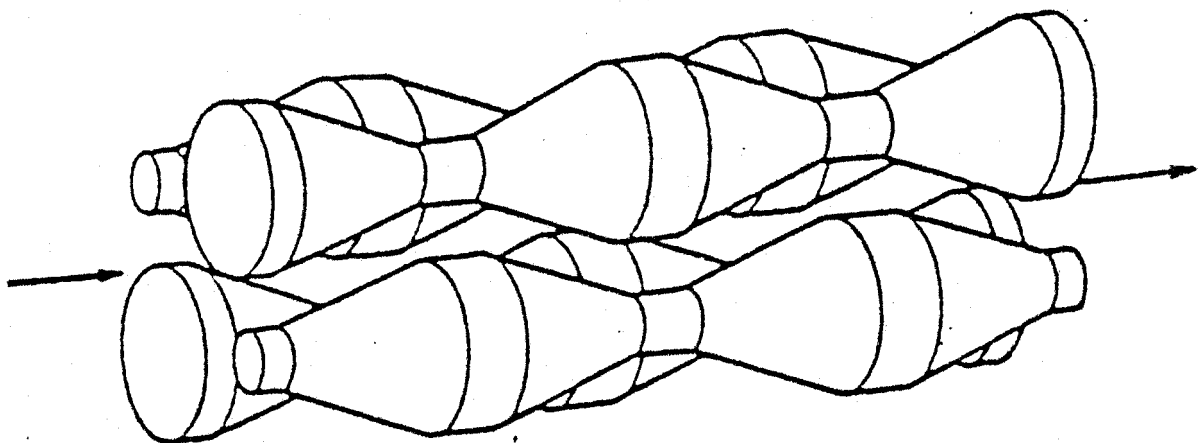


FIG. 2.3 – Géométrie des pôles dans les R.FQ. à barres.

ont des longueurs, $\beta\lambda/2$, de l'ordre du centimètre. Il existe deux types de géométrie de pôles. L'une consiste à insérer dans la cavité cylindrique quatre barres à section circulaires autour de l'axe de la structure [3,4]. La section de chacune des barres varie de façon à créer la modulation caractéristique du RFQ (figure 2.3). Cette géométrie est appelée "RFQ à barres" (*rods* en anglais). Pour la deuxième géométrie, la cavité est divisée en quadrants (figure 2.4). Ce type de design est nommé "RFQ à lames" (*vanes* en anglais). L'extrémité des lames est usinée selon la figure 2.2. Nous ne traiterons, dans cet exposé, que des RFQ à lames bien que l'essentiel des points que y seront développés sont parfaitement applicables aux RFQ à barres.

2.2 L'approximation statique dans la zone utile

Pour réaliser les fonctions spécifiques du RFQ, un mode transverse électrique à symétrie quadripolaire est nécessaire. C'est le mode TE_{210} qui est utilisé. Le troisième indice doit être nul pour ne pas provoquer de fluctuation longitudinale des forces de focalisation transverse². La répartition spatiale des champs électromagnétiques est représentée sur la figure 2.4. Les lignes de champs magnétiques traversent le plan de la page. Il est souvent bien pratique pour l'électrodynamicien de représenter sa cavité par un circuit équivalent. La figure 2.5 représente un circuit équivalent simplifié pour le RFQ à lames. Il est intéressant de remarquer que la zone utile est essentiellement capacitive, si bien que le potentiel vecteur, \vec{A} , peut être négligé pour cette région dans les équations de Maxwell. Le champ électrique :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Psi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2.2)$$

peut donc être écrit comme étant uniquement la divergence d'un potentiel scalaire Ψ :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Psi \quad (2.3)$$

Les conséquences sont très importantes. Les problèmes de l'électrodynamique et les problèmes de la dynamique du faisceau sont alors distincts³. La résolution des équations d'ondes peut, dans une large zone utile, être remplacée par la résolution de l'équation de Laplace :

$$\Delta\Psi = 0 \quad (2.4)$$

pour représenter au mieux les champs dans cette région. Deux méthodes sont alors possibles :

- Une solution analytique de l'équation (2.4) peut être choisie, son expression dicte la forme des pôles.

²Dans la pratique, il existe plusieurs écoles. Certains préconisent de faire varier cette amplitude dans des proportions de quelques 10 à 20%, d'autres estiment que cette amplitude doit restée constante. Dans tous les cas, c'est le TE_{210} qui est utilisé. La variation de son amplitude est assurée à l'aide d'ajustement géométrique.

³Ceci est vrai dans une certaine limite. La réalisation d'une telle structure implique nécessairement une interaction entre les différentes disciplines (mécanique, électrodynamique, dynamique de faisceau, vide, génie civil, électronique, ...).

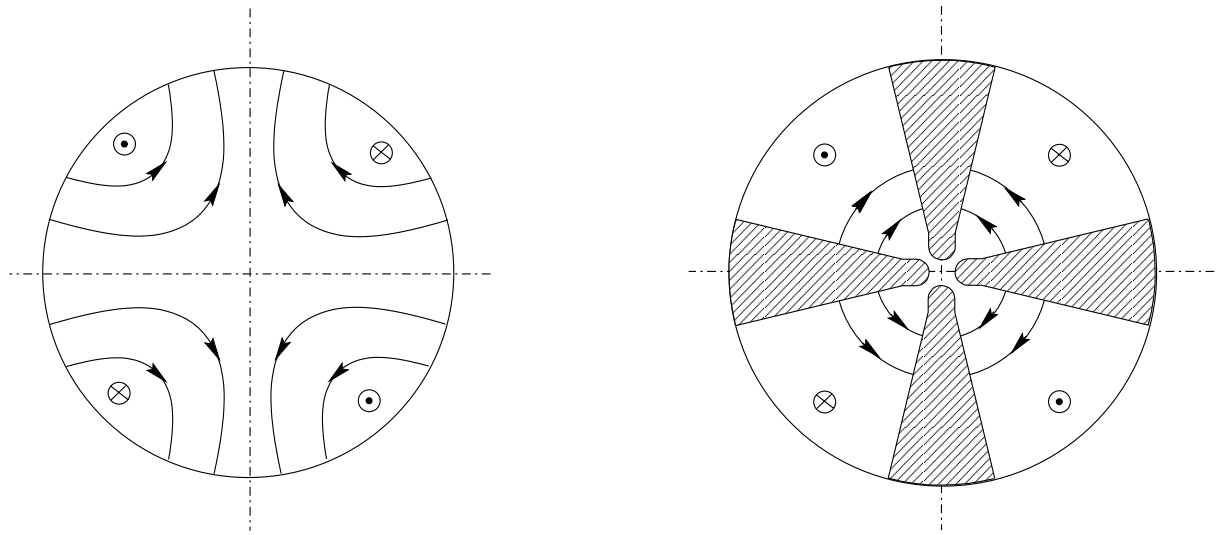


FIG. 2.4 – Mode TE_{210} dans une cavité cylindrique vide (i.e. non chargée) et dans un RFQ à lames (coupe transverse à la position intermédiaire en longitudinal).

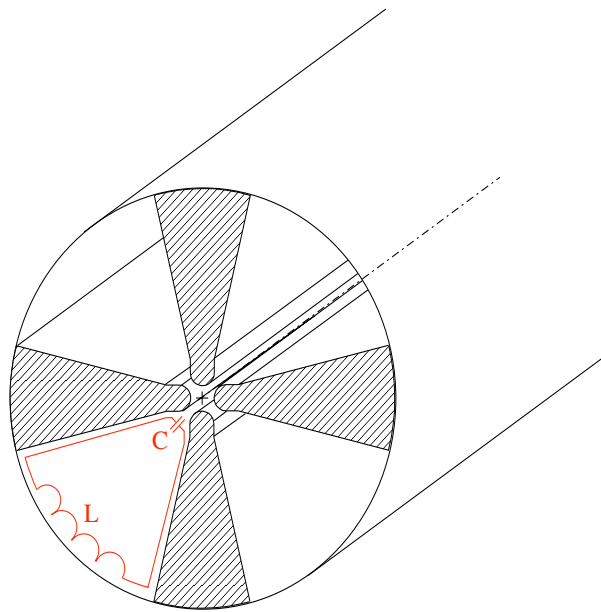


FIG. 2.5 – Circuit équivalent simplifié pour un RFQ à lames.

- Des critères sont choisis pour imposer la forme des pôles, le potentiel résultant est alors représenté soit par une base d’harmoniques appropriée, soit par une résolution numérique en discrétisant le domaine.

Il est intéressant de noter qu’il y a plusieurs possibilités, un fait souligné par Kapchinsky. Nous commencerons par développer la démarche qui a été suivie par Kapchinsky. C’est d’ailleurs sur cette démarche que s’appuie le code PARMTEQM. Elle consiste à utiliser deux bases d’harmoniques solutions de l’équation de Laplace en coordonnées cylindriques. La section suivante détaille cette technique. Le lecteur pourra se reporter à l’annexe A qui décrit quelques rappels sur les décompositions harmoniques. Pour plus de détails, le deuxième volume de Durand sur l’électrostatique intitulé “Conducteurs” est assez complet sur le sujet [5].

2.3 Les harmoniques cylindriques dans un RFQ

Pour décrire le potentiel dans la zone utile d’un RFQ, le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) semble le plus approprié (symétrie quadripolaire). L’équation (2.4) prend la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi(r, \theta, z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, z)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi(r, \theta, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.5)$$

où $\Psi(r, \theta, z)$ est le potentiel scalaire électrostatique qui sera multiplié par $\sin(\omega_{RF}t + \varphi)$ pour rendre compte du battement radiofréquence. La résolution de cette équation détaillée ci-après est un peu laborieuse et le lecteur pourra se reporter directement à la page 26 pour aboutir aux résultats. En cherchant la solution sous la forme :

$$\Psi(r, \theta, z) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \quad (2.6)$$

en insérant (2.6) dans (2.5), il vient :

$$Z(z) \cdot \Delta_{r,\theta} (R(r) \cdot \Theta(\theta)) + R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Delta_z (Z(z)) = 0 \quad (2.7)$$

où $\Delta_{u,v}$ est le laplacien par rapport au coordonnées u et v ce qui implique :

$$\begin{cases} \Delta_{r,\theta} (R(r) \cdot \Theta(\theta)) \mp k^2 \cdot R(r) \cdot \Theta(\theta) = 0 \\ \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \pm k^2 \cdot Z(z) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

où k est une constante arbitraire. La seconde équation dans (2.8) admet pour solutions :

$$\begin{aligned} Z(z) &= A \cdot \sinh(kz) + B \cdot \cosh(kz) \\ Z(z) &= A' \cdot \sin(kz) + B' \cdot \cos(kz) \\ Z(z) &= A'' \cdot z + B'' \end{aligned} \quad (2.9)$$

selon que (-), (+) ou ($k = 0$) ait été choisi dans la seconde équation de (2.8). Pour que la première équation de (2.8) soit vérifiée, il faut que :

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial R(r)}{\partial r} + [\pm m^2 \mp (kr)^2] \cdot R(r) = 0 \\ \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} \mp m^2 \cdot \Theta(\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

où m est une constante. Les solutions angulaires sont du même type que les solutions longitudinales :

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= A \cdot \sinh(m\theta) + B \cdot \cosh(m\theta) \\ \Theta(\theta) &= A' \cdot \sin(m\theta) + B' \cdot \cos(m\theta) \\ \Theta(\theta) &= A'' \cdot \theta + B'' \end{aligned} \quad (2.11)$$

selon que (-), (+) ou ($m = 0$) ait été choisi. Pour l'équation radiale, les cas où m et k sont nuls doivent aussi être envisagés. Si la combinaison (-) et (-), ou bien (-) et ($m = 0$) est choisie, la solution sera :

$$R(r) = A \cdot I_m(kr) + B \cdot I_{-m}(kr) + C \cdot K_m(kr) + D \cdot K_{-m}(kr) \quad (2.12)$$

où $I_{\pm m}$ et $K_{\pm m}$ sont les fonctions de Bessel modifiées, respectivement, de première et de seconde espèce d'ordre $\pm m$. Si la combinaison (+) et (-) est retenue, il suffit de remplacer m par $i \cdot m$ dans (2.12)⁴, la combinaison(-) ou ($m = 0$) et (+) dans l'équation différentielle radiale donne :

$$R(r) = A \cdot J_m(kr) + B \cdot J_{-m}(kr) + C \cdot Y_m(kr) + D \cdot Y_{-m}(kr) \quad (2.13)$$

avec $J_{\pm m}$ et $Y_{\pm m}$ les fonctions de Bessel, respectivement, de première et de seconde espèce d'ordre $\pm m$. L'expression (2.13) est aussi solution de la combinaison (+) et (+) en remplaçant m par $i \cdot m$. Le cas ($k = 0$) donne :

$$\begin{aligned} R(r) &= A \cdot r^m + B \cdot r^{-m} \\ R(r) &= A' \cdot \cos(m \cdot \log(r)) + B' \cdot \sin(m \cdot \log(r)) \\ R(r) &= A'' \cdot \log(r) + B'' \end{aligned} \quad (2.14)$$

pour (-), (+) et ($m = 0$) respectivement. En résumé, en ne tenant pas compte des fonctions de Bessel d'ordres imaginaires, avec m et k réels, une solution de l'équation de Laplace peut s'écrire en coordonnées cylindriques à l'aide de développements comme (2.15).

⁴ i est le nombre imaginaire pur valant $\sqrt{-1}$.

Coefficients s'annulant	Raisons invoquées
$E_k^1; E_k^3; E^6; E_m^7; F_m^7$	périodicité angulaire
$A_k^1; B_k^1; A_{km}^2; B_{km}^2; A_m^5; A^6; A_m^7$	périodicité longitudinale
$D_k^1; E_{km}^2; F_{km}^2; D_k^3; E_{km}^4; F_{km}^4; D_m^5; C^6; C_m^7; D_m^7$	potentiel fini sur l'axe (Oz)
$B^6; D^6; F^6$	potentiel nul sur l'axe (Oz) à mi-cellule
$H_{km}^4; E_m^5$	symétrie du quadripôle tourné

TAB. 2.1 – Tri des coefficients pour le RFQ dans l'expression (2.15).

$$\begin{aligned}
\Psi(r, \theta, z) = & \sum_k [A_k^1 \cdot \sinh(kz) + B_k^1 \cdot \cosh(kz)] \cdot [C_k^1 \cdot J_0(kr) + D_k^1 \cdot Y_0(kr)] \cdot [E_k^1 \cdot \theta + F_k^1] \\
& + \sum_k \sum_m [A_{km}^2 \cdot \sinh(kz) + B_{km}^2 \cdot \cosh(kz)] \cdot [C_{km}^2 \cdot J_m(kr) + D_{km}^2 \cdot J_{-m}(kr)] \\
& \quad \cdot [E_{km}^2 \cdot Y_m(kr) + F_{km}^2 \cdot Y_{-m}(kr)] \cdot [G_{km}^2 \cdot \cos(m\theta) + H_{km}^2 \cdot \sin(m\theta)] \\
& + \sum_k [A_k^3 \cdot \sin(kz) + B_k^3 \cdot \cos(kz)] \cdot [C_k^3 \cdot I_0(kr) + D_k^3 \cdot K_0(kr)] \cdot [E_k^3 \cdot \theta + F_k^3] \\
& + \sum_k \sum_m [A_{km}^4 \cdot \sin(kz) + B_{km}^4 \cdot \cos(kz)] \cdot [C_{km}^4 \cdot I_m(kr) + D_{km}^4 \cdot I_{-m}(kr)] \\
& \quad \cdot [E_{km}^4 \cdot K_m(kr) + F_{km}^4 \cdot K_{-m}(kr)] \cdot [G_{km}^4 \cdot \cos(m\theta) + H_{km}^4 \cdot \sin(m\theta)] \\
& + \sum_m [A_m^5 \cdot z + B_m^5] \cdot [C_m^5 \cdot r^m + D_m^5 \cdot r^{-m}] \cdot [E_m^5 \cdot \sin(m\theta) + F_m^5 \cdot \cos(m\theta)] \\
& + [A^6 \cdot z + B^6] \cdot [C^6 \cdot \log(r) + D^6] \cdot [E^6 \cdot \theta + F^6] \\
& + \sum_m [A_m^7 \cdot z + B_m^7] \cdot [C_m^7 \cdot \cos(m \cdot \log(r)) + D_m^7 \cdot \sin(m \cdot \log(r))] \\
& \quad \cdot [E_m^7 \cdot \sinh(m\theta) + F_m^7 \cdot \cosh(m\theta)]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Cette panoplie de séries nous sera très utile par la suite. Nous verrons que Ken Crandall a pioché abondamment dans ces séries et que bon nombre d'entre elles sont utilisées pour différentes parties du RFQ dans PARMTEQM. Il nous reste à isoler les termes qui possèdent les symétries du RFQ. Le tableau 2.1 résume cette étape.

La symétrie du quadripôle tourné impose que m soit un entier pair, $I_m(kr)$ et $I_{-m}(kr)$ sont alors identiques. En supposant que la structure est périodique en z , ce qui est vrai tant que le facteur de modulation varie peu d'une cellule à l'autre, il vient :

$$k \rightarrow n \cdot k \tag{2.16}$$

avec :

$$k = \frac{2\pi}{\beta\lambda} \tag{2.17}$$

où n est un entier. Le développement susceptible de représenter au mieux le potentiel de la zone utile d'un RFQ en coordonnées cylindriques est donc :

$$\Psi(r, \theta, z) = \frac{V}{2} \left[\sum_{m=1}^{+\infty} A_{0m} \cdot r^{2m} \cdot \cos(2m\theta) + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} A_{nm} \cdot I_m(kr) \cdot \cos(2m\theta) \cdot \cos(nkz) \right] \quad (2.18)$$

avec $(m + n)$ impair afin de respecter la symétrie quadripolaire, V la différence de potentiel entre deux pôles. Ce type de série présente une convergence rapide, autrement dit, les premiers termes suffisent pour obtenir une bonne précision.

2.4 Adaptation temps / position

Le RFQ est donc un accélérateur utilisant une focalisation dont la périodicité est temporelle. Ceci nous amène à considérer un point très important : l'adaptation du faisceau issu d'une structure indépendante du temps (une ligne de transport classique composé de quadripôles, solénoïdes magnétostatiques) à une structure dépendante du temps comme le RFQ dont l'acceptance varie avec la phase radiofréquence de la polarité des pôles. Ken Crandall réalisa une importante contribution en proposant de diminuer progressivement l'ouverture des pôles, ceci ayant pour effet de créer une rampe sur l'amplitude des forces de focalisation (figure 2.6). Si cette rampe s'effectue, disons, sur une certaine distance et d'une certaine manière, il est possible de rendre indépendant du temps les paramètres du faisceau aux extrémités de la structure (figure 2.7). Nous expliquerons plus en détails ce que nous entendons par une certaine distance et d'une certaine manière dans le chapitre suivant.

2.5 Conclusion du chapitre

Nous avons vu, dans ce chapitre, le principe de fonctionnement d'un RFQ, l'état de l'art pour la description de la zone utile qui s'appuie sur une décomposition en harmoniques cylindriques. Le principe de l'adaptation temps / position a également été décrit. Il nous reste à analyser d'avantage le code PARMTEQM. C'est l'objet du chapitre suivant qui détaille les principales approximations de ce code, notamment en ce qui concerne le calcul des champs dus à la structure, le calcul des forces de charge d'espace et l'intégration des équations de la dynamique.

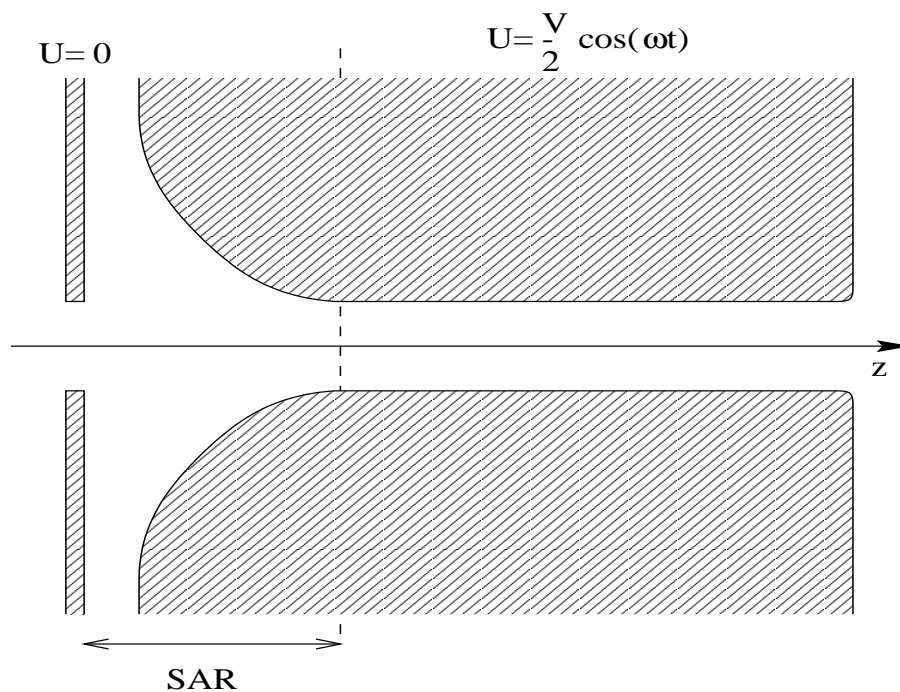


FIG. 2.6 – Profil longitudinal des lames d'un RFQ dans la Section d'Adaptation Radiale (S.A.R.).

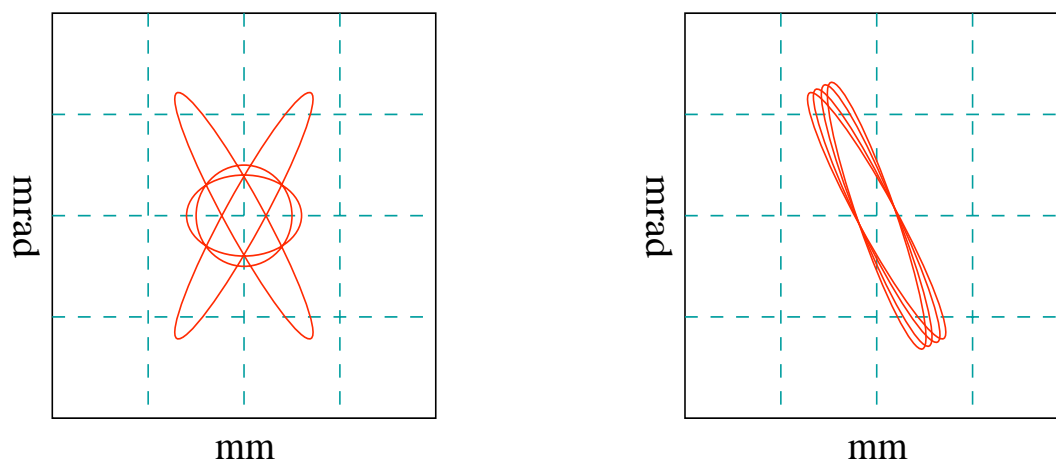


FIG. 2.7 – L'acceptance d'un RFQ sans et avec S.A.R. pour différentes phases radiofréquence.

Bibliographie

- [1] I.M. Kapchinsky and V.A Teplyakov, "Linear ion accelerator with spatially homogeneous strong focusing", ITEP, 1970, Prib. Tekh. Eksp., Vol. 2.
- [2] K. R. Crandall et al., "Radio Frequency Quadrupole beam dynamics design studies", Proc. Linear Accelerator Conference, 1979, Vol. 3, p.205.
- [3] J. Müller, A. Schempp, rapport interne 78-8, Université de Francfort, 1979.
- [4] A. Schempp et al., "RFQ development at Frankfurt", Proceedings conférence Linac 82, page 150.
- [5] E. Durand, "Electrostatique", Masson & Cie, 1966, Tome II.

Chapitre 3

Le code de transport PARMTEQM

Le code de transport PARMTEQM est la référence internationale pour le transport de particules chargées dans les RFQ. Avant d'entreprendre une étude sur les limites de sa validité pour le transport de faisceaux intenses, ce que nous ferons dans le chapitre 5, il convient tout d'abord d'approfondir les différentes techniques utilisées par ce code. Cette étape est un préalable indispensable aux chapitres suivants.

3.1 Algorithme utilisé pour le transport

Le calcul se fait à partir d'une distribution de particules dans l'espace 6D : (x, x', y, y', ϕ, W) . Toutes les particules sont à la même cote Z_s qui correspond à la position longitudinale de la particule synchrone. C'est la phase relative à cette particule synchrone :

$$\varphi = \phi - \phi_s \quad (3.1)$$

qui servira à estimer la distribution longitudinale du paquet nécessaire pour le calcul des forces de charge d'espace et d'image¹. Pour chaque particule, les forces sont calculées à l'aide d'expressions analytiques aux coefficients tablés pour les champs extérieurs. Ces forces sont appliquées aux particules via un schéma saut de mouton. Pour les forces de charge d'espace, la distribution de charge est discrétisée dans un maillage 2D à symétrie de révolution à chaque fois que le paquet se trouve à mi-cellule. La section du faisceau est alors quasi circulaire. Cette discrétisation dans des anneaux permet de calculer les forces, la contribution électrostatique d'un anneau uniformément chargé étant connue de manière exacte. Ces forces sont appliquées à chaque pas du calcul. Les effets d'images sont estimés en début et milieu de cellule par des expressions analytiques aux coefficients tablés, les forces étant intégrées sur une demi-cellule contrairement aux forces extérieures et de charge d'espace qui sont intégrées sur un dixième de cellule.

Ceci résume la stratégie pour la simulation du transport d'ions dans un RFQ utilisée par PARMTEQM : des champs radiofréquences et image s'appuyant sur des développements harmoniques aux coefficients tablés, des champs de charge d'espace calculés à partir d'une grille

¹Les effets d'images sont dus aux charges induites par le faisceau sur la surface du conducteur. Il en résulte une force qui perturbe le mouvement.

(r-z) pour un paquet reconstitué à l'aide d'une transformation ($z \rightarrow t \rightarrow z$), le paramètre d'intégration du mouvement est z , une cellule étant discrétisée en 10 éléments. Les sections suivantes détaillent plusieurs de ces étapes.

3.2 Le calcul des champs extérieurs

La représentation des champs extérieurs dans PARMTEQM s'appuie sur les développements en harmoniques présentés au chapitre précédent. Selon la zone du RFQ considérée, certaines harmoniques sont sélectionnées. La nécessité de cette représentation multipolaire a été introduite en 1982 par Jean-Louis Laclare et Annick Ropert [1]. Pendant longtemps, PARMTEQM s'est contenté du potentiel à deux termes décrit dans l'annexe B.

3.2.1 Le corps du RFQ

Pour le corps du RFQ, les huit premiers termes de l'expression (2.18) suffisent pour représenter la symétrie quadripolaire et la modulation à périodicité longitudinale des lames :

- le terme quadripolaire non périodique (A_{01})
- le terme dodécapolaire non périodique (A_{03})
- le premier terme monopolaire périodique (A_{10})
- le premier terme octupolaire périodique (A_{12})
- le premier terme dodécapolaire périodique (A_{23})
- le premier terme quadripolaire périodique (A_{21})
- le deuxième terme monopolaire périodique (A_{30})
- le deuxième terme octupolaire périodique (A_{32})

La périodicité est bien sûr longitudinale. Les coefficients non périodiques sont normalisés par rapport à R_0 , l'ouverture moyenne des pôles.

Le développement utilisé est donc :

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, \theta, z) = \frac{V}{2} \{ & A_{01} \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^2 \cos(2\theta) + A_{03} \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^6 \cos(6\theta) \\ & + A_{10} I_0(k\rho) \cos(kz) + A_{12} I_4(k\rho) \cos(4\theta) \cos(kz) \\ & + A_{21} I_2(2k\rho) \cos(2\theta) \cos(2kz) + A_{23} I_6(2k\rho) \cos(6\theta) \cos(2kz) \\ & + A_{32} I_4(3k\rho) \cos(4\theta) \cos(3kz) + A_{30} I_0(3k\rho) \cos(3kz) \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où V est la différence de potentiel entre deux lames successives. A chaque position longitudinale, les sections transverses des surfaces équipotentielles, définies par la formule ci-dessus, sont des courbes asymptotes dues à la combinaison de termes en $\cos(n\theta)$ où n est un entier. Il est donc impossible, dans la pratique, d'usiner des pôles se conformant exactement à cette formule car l'amplitude du champ deviendrait infinie. Le code PARMTEQM s'appuie donc sur une décomposition harmonique d'une solution numérique calculée par CHARGE 3D² sur la base

²Code pour calcul électrostatique écrit par Ken Crandall .

définie par l'équation (3.2) [2]. CHARGE 3D calcule la distribution de charges sur la surface des pôles d'un RFQ, ces derniers étant représentés par des demi cercles à rayons et à position transverse variables dans la direction longitudinale [3]. Cette variation est à définir par le concepteur de la structure. L'annexe B traite des différentes géométries utilisées pour des RFQ à lames. Une fois la géométrie des pôles calculée par CHARGE 3D, la solution numérique est donc projetée sur la base d'harmoniques dans un domaine où cette base est orthogonale. Compte tenu du système de coordonnées choisi, ce domaine est limité par un cylindre de rayon a . Nous reviendrons plus tard sur les conséquences de cette limitation. Les coefficients se calculent indépendamment à l'aide des relations :

$$A_{0m} = \frac{16}{\pi V a^{2m} L_c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{L_c} U(a, \theta, z) \cdot \cos(2m\theta) d\theta dz \quad (3.3)$$

$$A_{n0} = \frac{8}{\pi V I_0(nka) L_c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{L_c} U(a, \theta, z) \cdot \cos(nkz) d\theta dz \quad (3.4)$$

$$A_{nm} = \frac{16}{\pi V I_{2m}(nka) L_c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{L_c} U(a, \theta, z) \cdot \cos(2m\theta) \cdot \cos(nkz) d\theta dz \quad (3.5)$$

où $U(a, \theta, z)$ est la solution numérique de CHARGE 3D. Pour différentes configurations de cellules, des tables compilent les coefficients. C'est dans ces tables que le code PARMTEQM interpole pour obtenir les coefficients de chaque cellule de la structure qu'il simule.

3.2.2 La section d'adaptation radiale en entrée

Plusieurs développements ont été proposés pour la section d'adaptation radiale d'un RFQ [1,4]. Les codes LANL s'appuient sur la formulation suivante :

$$\Psi(\rho, \theta, z) = \frac{V}{2} \sum_{m=0}^3 A_m \left[I_{2m}(kr) \cdot \sin(kz) + 3^{-(2m+1)} I_{2m}(3kr) \cdot \sin(3kz) \right] \cdot \cos(2m\theta) \quad (3.6)$$

où les A_m sont ajustés de manière à assurer la quasi continuité avec la formulation pour la première cellule du RFQ (courbure des lames, amplitude du potentiel) [5] et :

$$k = \frac{\pi}{2L_{SAR}} \quad (3.7)$$

avec L_{SAR} la longueur de la section d'entrée. Les termes $m = 0$ laissent la possibilité de démarrer le RFQ avec une modulation, alternative rarement utilisée. Pour obtenir les paramètres faisceau adaptés à cette formulation et au canal qui suit la section d'entrée, l'utilisateur de PARMTEQM doit faire appel un autre code : TRACE 3D. Ce code, pour le transport de l'enveloppe du faisceau, utilise un formalisme matriciel 2×2 pour le RFQ. Il a été écrit par Ken Crandall et s'appuie sur une formulation simplifiée de l'expression (3.6). Cette formulation simplifiée néglige notamment la composante dodécapolaire et assimile la composante quadripolaire à une composante quadripolaire "pure" soit $A_{01} = 1$ dans le développement (3.2).

3.2.3 La section de fuite

A la sortie du canal RFQ, la modulation des lames produit un potentiel de fuite oscillant sur l'axe longitudinal. Selon le moment où les particules traversent cette région, elles peuvent gagner ou bien perdre de l'énergie. Afin de contrôler cet effet, en plus de la nécessité de rendre indépendant du temps le faisceau³, Ken Crandall a proposé [5] une géométrie générant le potentiel suivant sur l'axe :

$$\Psi(z, t) = \frac{3AV}{8} \left[\cos(kz) + \frac{1}{3} \cos(3kz) \right] \sin(\omega t) \quad (3.8)$$

où $z = 0$ au début de la section et $z = L_{ss}$ au niveau de la plaque d'extrémité, $k = \pi/2L_{ss}$, ω la pulsation radiofréquence, et $AV/2$ le potentiel sur l'axe en sortie de la dernière cellule. Le champ longitudinal sur l'axe est :

$$E_z = \frac{3AV}{8} k [\sin(kz) + \sin(3kz)] \sin(\omega t) \quad (3.9)$$

En posant φ la phase de la RF quand une particule est à $z = 0$, ωt peut être remplacé par $\varphi + k'z$, où $k' = 2\pi/\beta\lambda$. En supposant que la variation de vitesse de la particule traversant la section est négligeable, le gain d'énergie est :

$$\Delta W(\varphi, L_{sf}) = \int_0^{L_{ss}} E_z dz = \frac{3AV}{8} [\mathfrak{S}_1(L_{ss}) \sin(\varphi) + \mathfrak{S}_2(L_{ss}) \cos(\varphi)] \quad (3.10)$$

où :

$$\mathfrak{S}_1(L_{sf}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(kz) + \sin(3kz)] \cdot \cos(k'z) \cdot d(kz) \quad (3.11)$$

et :

$$\mathfrak{S}_2(L_{sf}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(kz) + \sin(3kz)] \cdot \sin(k'z) \cdot d(kz) \quad (3.12)$$

La figure 3.1 montre les variations du gain d'énergie en unité $AV/2$ en fonction de la longueur de la section L_{sf} en unité $\beta\lambda$ et de la phase de la particule en entrée de section. Il est intéressant de noter que lorsque L_{sf} est plus petit que $\sim \beta\lambda/2$, la section se comporte comme une cellule accélératrice focalisante en longitudinal ; cependant, la section est alors trop courte pour assurer sa fonction d'adaptation temps/position. Lorsque L_{sf} est plus grande que $\sim 3\beta\lambda/2$, le gain d'énergie devient négligeable et la fonction d'adaptation temps/position devient effective lorsque L_{sf} est plus grande que $\sim 2\beta\lambda$ ⁴. Dans ce cas, les paramètres de Twiss du faisceau deviennent alors identiques dans chaque plan transverse. Ceci est un avantage si un solénoïde est placé après le RFQ, un inconvénient si c'est un quadripôle magnétique. De plus, le paquet n'est plus tenu en longitudinal. Ces difficultés peuvent être levées en insérant une cellule spéciale entre cette

³Ceci est moins important en sortie qu'en entrée où le faisceau est continu. Le paquet étant formé, il comporte une faible extension en phase par rapport aux champs radiofréquences.

⁴Ceci dépend en fait de la dimension en phase du paquet, disons que $2\beta\lambda$ est un bon compromis.

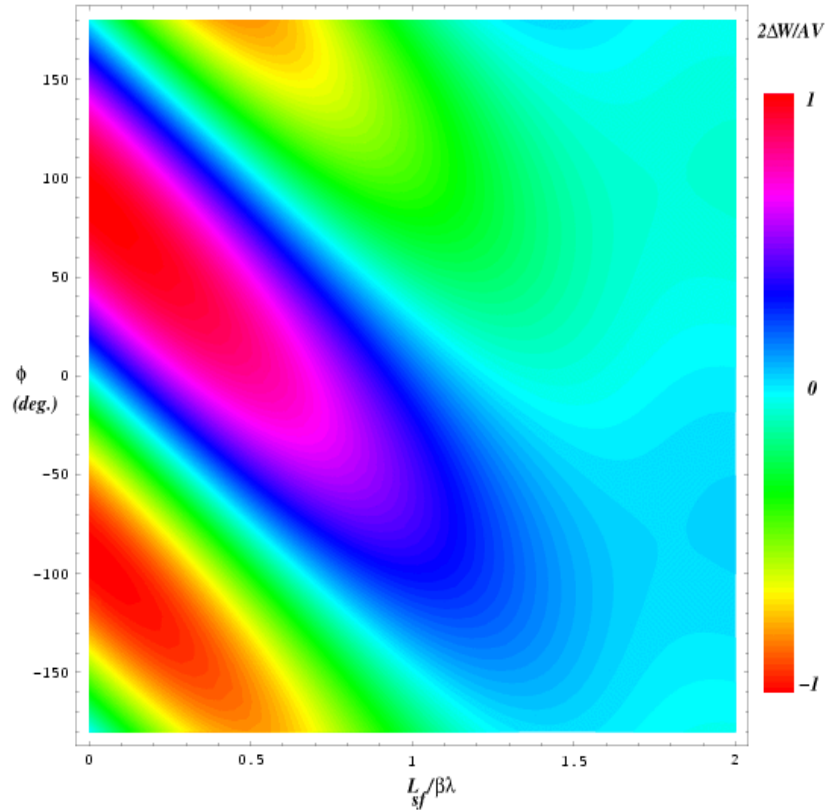


FIG. 3.1 – Variation du gain d'énergie en unité $AV/2$ en fonction de la longueur de la section L_{sf} en unité $\beta\lambda$ et de la phase de la particule en entrée de section.

section de sortie et la dernière cellule accélératrice : la cellule de transition. La section suivante décrit cette cellule.

3.2.4 La cellule de transition

Pour palier aux difficultés énoncées dans la section précédente et assurer une transition douce de la dissymétrie de la dernière cellule accélératrice à la section de fuite à symétrie quadripolaire, Ken Crandall a proposé d'introduire une cellule entre cette section de fuite et la dernière cellule accélératrice : la cellule de transition [6]. Cette cellule résout le problème de l'incertitude sur l'énergie introduite par la section de fuite et permet d'ajuster la taille et la divergence du faisceau en sortie avec une plus grande souplesse. Pour décrire le potentiel qui assurera ces fonctions, PARMTEQM utilise la formulation suivante :

$$\Psi(\rho, \theta, z) = \frac{V}{2} \left\{ \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^2 \cos(2\theta) \pm [A_{10}I_0(K\rho) \cos(Kz) + A_{30}I_0(3K\rho) \cos(3Kz)] \right\} \quad (3.13)$$

où $K = \pi/2L_{st}$ avec L_{st} , la longueur de la cellule de transition. Les paramètres A_{10} , A_{30} et

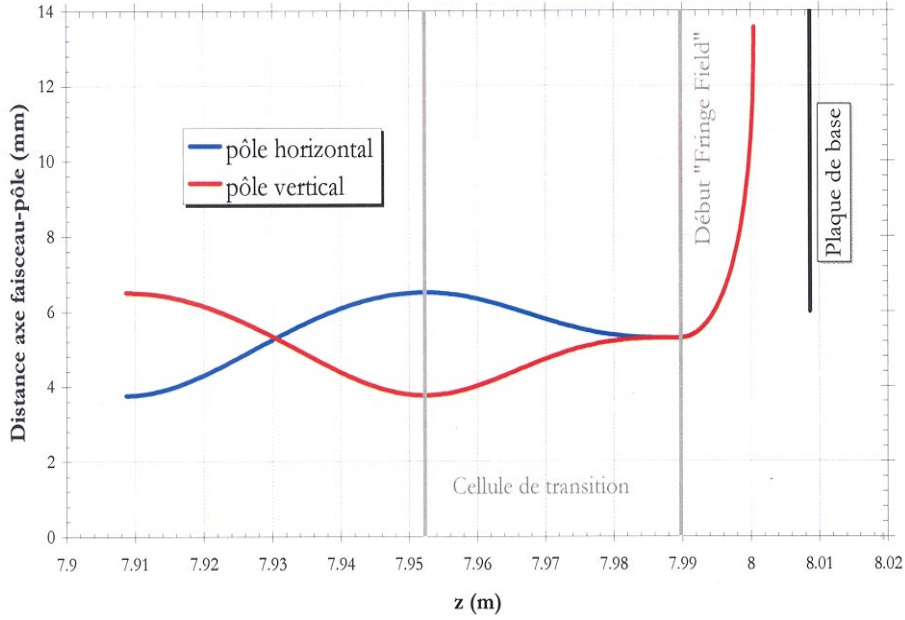


FIG. 3.2 – Profil longitudinal des lames en fin de RFQ (cellule de transition + section de fuite).

L_{st} sont déterminés de manière à assurer la continuité avec les sections adjacentes. Les profils des lames ,horizontale et verticale, sont alors donnés par :

$$\left(\frac{x}{R_0}\right)^2 - A_{10}I_0(Kx) \cos(Kz) - A_{30}I_0(3Kx) \cos(3Kz) = 1 \quad (3.14)$$

et :

$$-\left(\frac{y}{R_0}\right)^2 - A_{10}I_0(Ky) \cos(Kz) - A_{30}I_0(3Ky) \cos(3Kz) = -1 \quad (3.15)$$

Le signe $(-)$ est utilisé pour le second et le troisième terme ; de cette manière, la lame horizontale démarre en $m \times a$ et la verticale en a quand $z = 0$ (début de cellule). Comme les termes longitudinaux sont nuls en $z = L_{st}$, les deux lames sont bien en R_0 . Cependant, nous voulons également que la pente soit nulle en fin de cellule. En différentiant les équations (3.14) et (3.15) par rapport à z , et en imposant que ces dérivées soient nulles en $z = L_{st}$, une relation liant A_{10} et A_{30} est obtenue :

$$A_{30} = \frac{I_0(KR_0)}{3I_0(3KR_0)} A_{10} \quad (3.16)$$

La figure 3.2 montre une configuration typique du profil des pôles. Il reste à déterminer les deux paramètres A_{10} et K . Ceci peut être fait numériquement à partir des équations (3.14) et

(3.15) en utilisant les conditions aux limites suivantes :

$$\Psi(m \times a, 0, 0) = V/2 \quad (3.17)$$

et :

$$\Psi(a, \pi/2, 0) = -V/2 \quad (3.18)$$

comme $K = \pi/2L_{st}$:

$$\Psi(R_0, 0, L_{st}) = V/2 \quad (3.19)$$

et :

$$\Psi(R_0, \pi/2, L_{st}) = -V/2 \quad (3.20)$$

Lorsque ces conditions sont satisfaites, il peut être montré, au premier ordre, que :

$$K^2 \approx k^2/3 \quad (3.21)$$

ce qui donne la relation :

$$L_{st} \approx \sqrt{3/4} \frac{\beta\lambda}{2} \quad (3.22)$$

Il est également possible de démontrer que les rayons de courbure longitudinaux de cette formulation assurent bien une continuité avec ceux des cellules voisines [6]. C'est pourquoi cette cellule particulière est appelée cellule de transition.

3.2.5 L'évaluation du champ crête

Les avantages que l'on peut tirer d'une structure ayant des champs électriques élevés sont importants : un linac plus court et des courants limites plus élevés pour ne citer qu'eux. Il est donc très important, dès la conception de la machine, de connaître le champ crête, avant toute considération d'état de surface ou tout autre paramètre pour la tenue en tension de la ligne de transport. PARMTEQM donne une évaluation de ce champ crête. Il s'appuie sur des tables qui contiennent des facteurs de forme en fonction des paramètres géométriques (modulation, rayon moyen, longueur de la cellule, rayon de courbure transverse des pôles, type de profil longitudinal, voir annexe B). Ce facteur de forme, F , donne le champ crête \hat{E} à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{E} = F \frac{V}{R_0} \quad (3.23)$$

où V est la différence de potentiel entre deux pôles adjacents, R_0 le rayon moyen. Ces facteurs de forme ont été calculés à l'aide du code *CHARGE 3D* [3]. Ce code calcule la densité surfacique

de charges sur des pôles RFQ. Le champ crête peut alors aisément être calculé puisqu'il est proportionnel à cette quantité. Détaillons les quelques étapes utilisées par *CHARGE 3D* pour calculer cette densité surfacique de charges.

Le potentiel en un point \vec{r} près de surfaces conductrices, entre lesquelles existent une différence de potentiel, peut être écrit en fonction de la densité de charges σ induites sur ces surfaces :

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_i \int_{S_i} \sigma_i(\vec{s}) \cdot G(\vec{r}; \vec{s}) dS_i \quad (3.24)$$

où $G(\vec{r}; \vec{s})$ est le potentiel produit au point \vec{r} par la charge au point \vec{s} sur la $i^{\text{ème}}$ surface S_i et $\sigma_i(\vec{s}) dS_i$ est le module de cette charge. La technique utilisée par le programme pour trouver cette densité de charge σ est la suivante. La surface représentant la lame est paramétrée. C'est-à-dire que les coordonnées x , y et z du point que l'on considère sur la surface sont données par deux variables indépendantes, u et v , où $0 \leq u \leq 1$ et $0 \leq v \leq 1$:

$$\begin{cases} x = \alpha + \rho_t [1 - \cos(\pi u)] \\ y = \rho_t \sin(\pi u) \\ z = Lv \end{cases} \quad (3.25)$$

où α est le profil longitudinal de la lame et ρ_t est le rayon de courbure transverse qui peut dépendre de z (voir annexe B page 163)⁵. A chaque point du plan (u, v) correspond un point (x, y, z) de la surface du pôle. La densité de charge σ peut, elle aussi, être exprimée en fonction de u et v et l'intégrale (3.24) peut être remplacée par une intégrale sur le plan (u, v) . σ est représentée par des splines bicubiques dont les coefficients sont déterminés par minimisation de la quantité :

$$\mathfrak{R} = \int_S [\Psi(\vec{s}) - 1]^2 dS \quad (3.26)$$

Le résultat permet de calculer le potentiel en multipliant par la tension crête. Le champ crête directement proportionnel à $\hat{\sigma}$, peut également être calculé. Sur la figure 3.3, une cartographie de F issue des tables de PARMTEQM est tracée pour différentes valeurs de m et de longueur de cellule en unité R_0 . Sur les figures 3.4 à 3.9 ont été tracées des cartes pour différents rapports ρ_t/R_0 en conservant une échelle de 1.0 à 1.8. Ces cartes correspondent à un profil longitudinal extrapolé du potentiel à deux termes. Il est intéressant de noter l'accroissement de F pour ρ_t/R_0 croissant et pour des cellules longues. Ceci est dû à l'espace entre les lames et au couplage transverse, longitudinal induit par la fonction de Bessel du potentiel à deux termes [7]. La baisse de F pour des cellules courtes à modulation forte est due à une géométrie irréaliste [2].

⁵La lame est décrite par un cercle et seulement un cercle, tout autre considération géométrique n'est pas prise en compte.

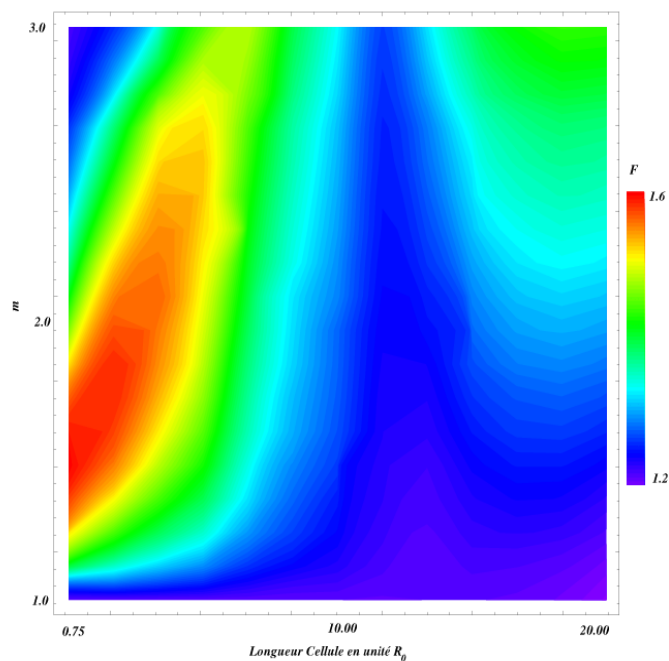


FIG. 3.3 – Cartographie de F en fonction de la longueur de la cellule (en unité R_0) et m pour un rayon de courbure transverse, ρ_t , de $0.89 \times R_0$ pour une échelle allant de 1.2 à 1.6.

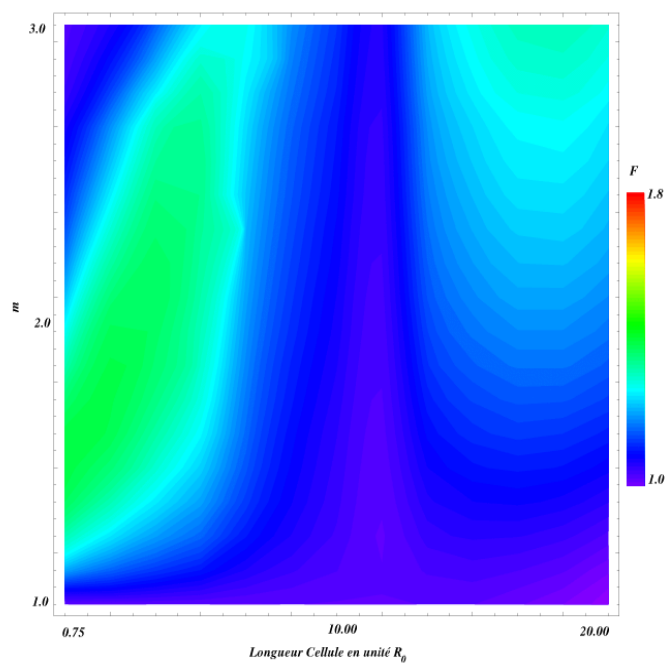


FIG. 3.4 – Cartographie de F en fonction de la longueur de la cellule (en unité R_0) et m pour un rayon de courbure transverse, ρ_t , de $0.6 \times R_0$.

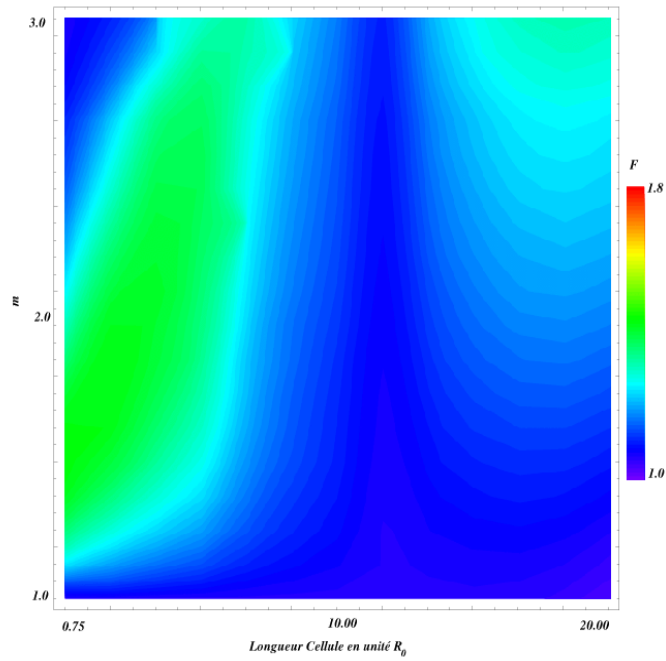


FIG. 3.5 – Cartographie de F en fonction de la longueur de la cellule (en unité R_0) et m pour un rayon de courbure transverse, ρ_t , de $0.75 \times R_0$.

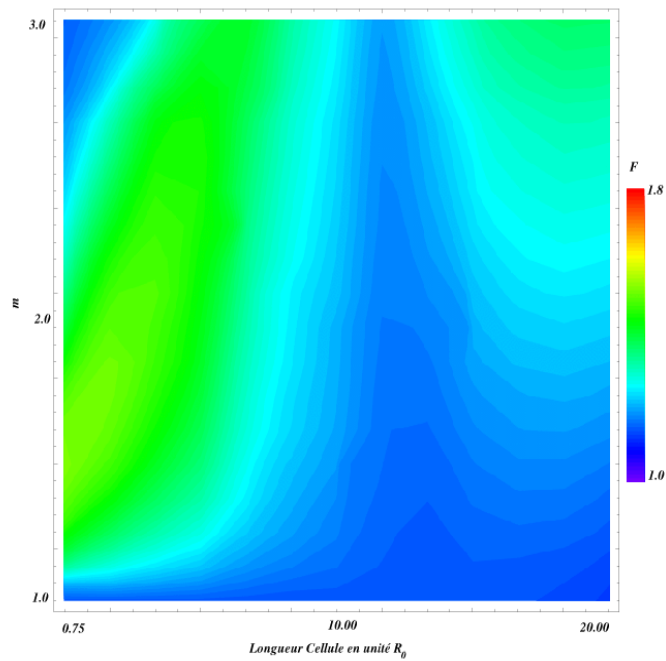


FIG. 3.6 – Cartographie de F en fonction de la longueur de la cellule (en unité R_0) et m pour un rayon de courbure transverse, ρ_t , de $0.89 \times R_0$.

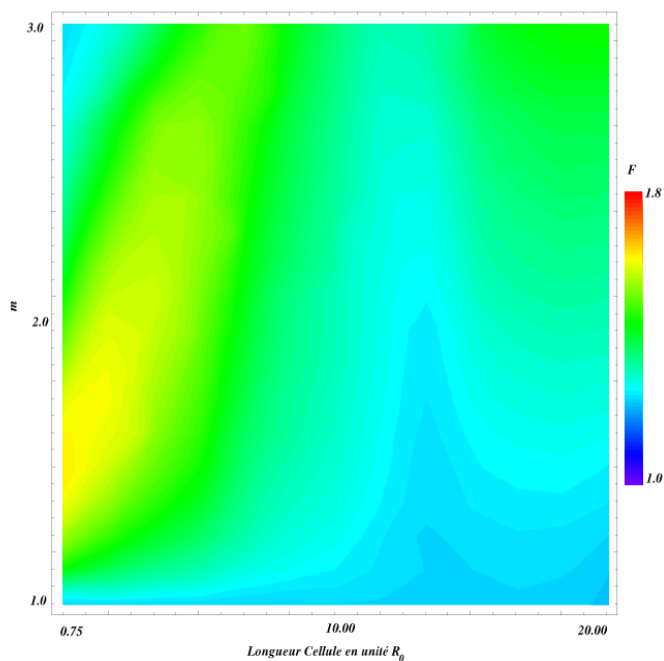


FIG. 3.7 – Cartographie de F en fonction de la longueur de la cellule (en unité R_0) et m pour un rayon de courbure transverse, ρ_t , de $1.00 \times R_0$.

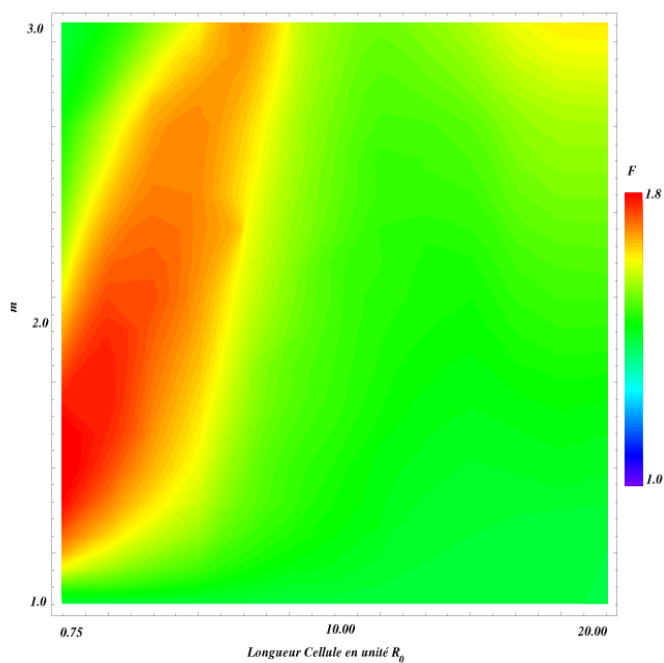


FIG. 3.8 – Cartographie de F en fonction de la longueur de la cellule (en unité R_0) et m pour un rayon de courbure transverse, ρ_t , de $1.15 \times R_0$.

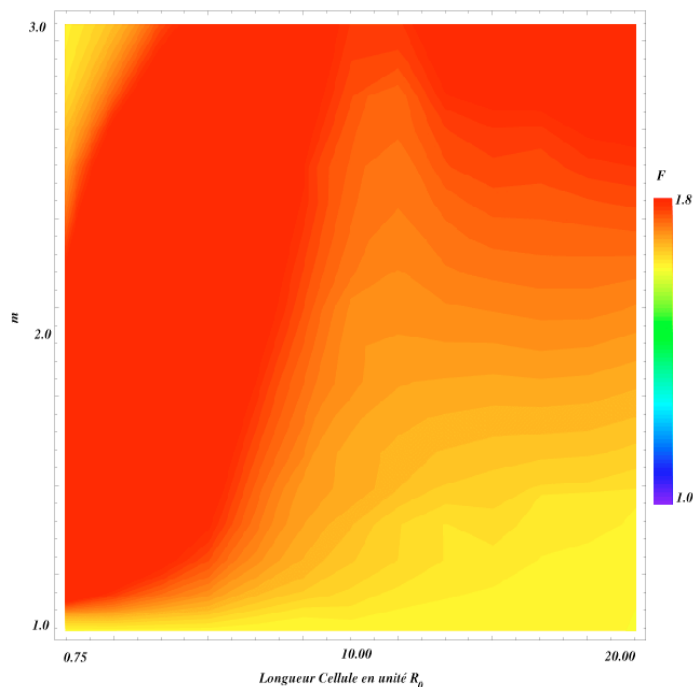


FIG. 3.9 – Cartographie de F en fonction de la longueur de la cellule (en unité R_0) et m pour un rayon de courbure transverse, ρ_t , de $1.30 \times R_0$.

3.3 L'intégration des équations de la dynamique

La complexité de l'expression du champ électrique (fonctions de Bessel entre autres) n'autorise pas une résolution analytique de l'équation du mouvement dans un RFQ. C'est donc une intégration pas-à-pas qui doit être considérée. Les algorithmes d'intégration pas à pas du mouvement sont nombreux dans la littérature. Citons l'algorithme de Runge-Kutta et l'utilisation de l'algèbre de Lie qui sont des algorithmes fréquemment utilisés dans la simulation du transport de faisceau dans les accélérateurs. Dans PARMTEQM, c'est un schéma dit saut de mouton qui est utilisé⁶. Cet algorithme est basé sur une discrétisation linéaire des trajectoires, linéaire par rapport à un paramètre indépendant. Pour PARMTEQM, ce paramètre est la position longitudinale de la particule : on parle alors de code en z . Le choix de la position longitudinale comme paramètre indépendant est historique. Il permet notamment une confrontation aisée avec les diagnostics sur le faisceau qui sont effectués à une position donnée de la ligne de transport. Il existe également des codes où c'est le temps qui est le paramètre indépendant, on parle de code en t (LIDOS, TOUTATIS). Dans la technique du saut de mouton, l'accélération, donc la force, est calculée à une position intermédiaire des positions où sont calculés les déplacements. Détaillons les équations du mouvement afin d'illustrer ces différents concepts.

⁶*leap frog* en anglais, allez comprendre !

Selon le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = Ze\vec{E} \quad (3.27)$$

où \vec{p} est la quantité de mouvement de la particule et \vec{E} le champ électrique résiduel, Z le nombre de charge, e la charge élémentaire. En tenant compte de la relativité restreinte, cette équation peut être réécrite :

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = \frac{Zec}{E_0}\vec{E} \quad (3.28)$$

avec E_0 , l'énergie de masse au repos et c la vitesse de la lumière. Afin de discrétiser cette équation, considérons la variation infinitésimale de la quantité $\gamma\vec{\beta}$, soit :

$$\delta(\gamma\vec{\beta}) = \frac{Zec}{E_0}\vec{E}\delta t \quad (3.29)$$

Pour utiliser la position longitudinale comme paramètre indépendant, effectuons le changement de variable suivant :

$$\delta t = \frac{\delta z}{\beta_z c} \quad (3.30)$$

où $\beta_z c$ est la vitesse moyenne de la macro-particule lorsqu'elle parcourt δz . Il nous est maintenant possible d'écrire les expressions nécessaires à l'intégration du mouvement pas-à-pas :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma\beta_x)_{i+1/2} = (\gamma\beta_x)_{i-1/2} + \frac{Ze}{\beta_z E_0} E_x (\overrightarrow{OM}_i) \sin(\varphi_i) \delta z \\ (\gamma\beta_y)_{i+1/2} = (\gamma\beta_y)_{i-1/2} + \frac{Ze}{\beta_z E_0} E_y (\overrightarrow{OM}_i) \sin(\varphi_i) \delta z \\ (\gamma\beta_z)_{i+1/2} = (\gamma\beta_z)_{i-1/2} + \frac{Ze}{\beta_z E_0} E_z (\overrightarrow{OM}_i) \sin(\varphi_i) \delta z \\ x_{i+1} = x_i + x'_{i+1/2} \delta z \\ y_{i+1} = y_i + y'_{i+1/2} \delta z \\ \varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\omega_{rf}}{(\beta_z)_{i+1/2} c} \delta z \end{array} \right. \quad (3.31)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_{i+1/2} = \frac{(\gamma\beta_x)_{i+1/2}}{(\gamma\beta_z)_{i+1/2}} \\ y'_{i+1/2} = \frac{(\gamma\beta_y)_{i+1/2}}{(\gamma\beta_z)_{i+1/2}} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

ω_{rf} est la pulsation radiofréquence. Les indices demi-entiers indiquent que la quantité considérée est calculée à une position intermédiaire des positions où sont calculées les quantités à indices entiers. La figure 3.10 illustre le principe : la croix correspond au calcul de la position tandis que les flèches correspondent au calcul de la vitesse.

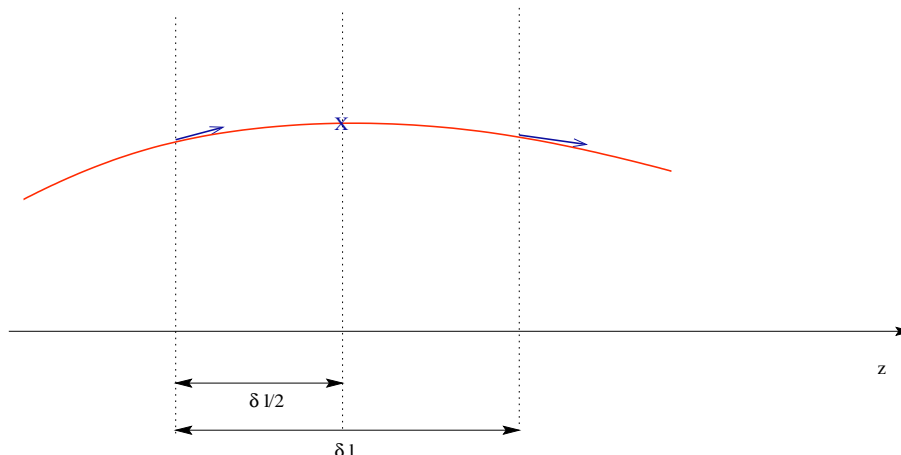


FIG. 3.10 – Discrétisation de la trajectoire en longitudinal par “saut de mouton”.

La précision de cet algorithme ne dépend que de la taille du pas δz , aucune autre approximation n’est introduite par ailleurs. Afin d’alléger le traitement et de diminuer le temps de calcul⁷, Ken Crandall a introduit une simplification supplémentaire dans cet algorithme : l’hypothèse de paraxialité. Cette hypothèse stipule que les trajectoires des particules étant quasi parallèles à l’axe de référence de la structure, la quantité β totale peut être assimilée à β_z et vice-versa :

$$\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2} \cong \beta_z \text{ car } \beta_z \gg \beta_x \text{ et } \beta_y \quad (3.33)$$

Il faut donc remplacer $\overline{\beta_z}$ et $(\beta_z)_{i+1/2}$ par $\overline{\beta}$ et $(\beta)_{i+1/2}$ respectivement dans les équations (4.4)⁸.

Pour évaluer ces quantités, le gain en énergie est tout d’abord calculé :

$$W_{i+1/2} = W_{i-1/2} + Ze \cdot E_z(\overline{OM}_i) \cdot \delta z \quad (3.34)$$

La contribution transverse à l’énergie cinétique totale est donc négligée. A l’aide de cette nouvelle valeur, un $\overline{\gamma}$ sur δz est calculé :

$$\overline{\gamma}_i = 1 + \frac{W_{i-1/2} + W_{i+1/2}}{2E_0} \quad (3.35)$$

d’où :

$$(\beta_z)_{i+1/2} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{W_{i+1/2}}{E_0}\right)^2}} \quad (3.36)$$

⁷Rappelons que ce code a été écrit en 1977, les calculateurs de l’époque n’étaient pas ceux d’aujourd’hui !

⁸En réalité, ce n’est pas $\overline{\beta_z}$ qui est utilisé dans PARMTEQM mais $\overline{\gamma\beta_z}$. γ étant proche de 1, cette option n’est pas catastrophique, cependant cela reste une erreur.

et :

$$\bar{\beta}_i = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_i^2}} \quad (3.37)$$

Les valeurs calculées peuvent être utilisées dans les équations (4.4). Le processus est ainsi bouclé jusqu'à atteindre la position longitudinale désirée. La taille du pas δz est un dixième de la longueur d'une cellule.

3.4 Les effets d'image

Pour estimer l'effet des charges images, le programme utilise le résultat du calcul issu de simulation avec CHARGE 3D. Ce code permettant de calculer la distribution surfacique de charges sur un conducteur [3], la charge image est calculée pour un faisceau matérialisé soit par une charge ponctuelle (paquet) soit par un fil uniformément chargé (faisceau continu) équivalent. La solution numérique est projetée sur une base d'harmoniques cylindriques :

$$\Psi(\rho, \theta, z) = K \cdot \left[\sum_{m=0}^4 A_{2m} \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^{2m} \cos(2m\theta) + \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^4 A_{n,2m} I_{2m} \left(\frac{2\pi r}{\beta\lambda} \right) \cos(2m\theta) \cos \left(\frac{2\pi z}{\beta\lambda} \right) \right] \quad (3.38)$$

où K est une constante de normalisation qui est définie par :

$$K = 30 \frac{I}{\beta} \quad (3.39)$$

pour le fil et :

$$K = 30 \frac{I\lambda}{R_0} \quad (3.40)$$

pour la charge ponctuelle. Le faisceau passant de l'état continu à l'état modulé en densité le long du RFQ, il est représenté comme étant la superposition d'un faisceau cylindrique et d'une sphère, tous deux uniformément chargés. La proportion de cette superposition est déterminée par deux constantes f_s et f_c qui pondèrent K . Ces deux quantités doivent respecter la relation suivante :

$$f_s + f_c = 1 \quad (3.41)$$

Pour les déterminer, il faut obtenir une deuxième relation. La longueur rms d'un faisceau cylindrique de longueur $\beta\lambda$ vaut $\beta\lambda/2\sqrt{3}$. La longueur rms, \tilde{z} , du paquet est intermédiaire entre celle d'une sphère et celle du cylindre ; elle est donnée par :

$$\tilde{z}^2 = f_c \times \frac{L_c^2}{3} + f_s \times R_s^2 \quad (3.42)$$

où $L_c = \beta\lambda/2$ est la demi-longueur du faisceau cylindrique, $R_s = \sqrt{\bar{x}\bar{y}}$ est le rayon rms de la sphère. En combinant les expressions (3.41) et (3.42), il vient :

$$f_s = \frac{\frac{L_c^2}{3} - \tilde{z}^2}{\frac{L_c^2}{3} - R_s^2} \quad (3.43)$$

Ces deux constantes calculées, les forces tabléées dues au cylindre et à la sphère peuvent être pondérées et appliquées aux particules⁹. L'amplitude de ces forces est faible. Pour fixer les idées, pour un faisceau ayant un rayon égal à la moitié de l'ouverture moyenne, R_0 , ces forces représentent 3% des forces de charge d'espace [8]. Lorsque le faisceau est désaxé, des harmoniques d'ordres impairs apparaissent. La méthode reste cependant identique.

3.5 Les forces de charge d'espace

3.5.1 Calcul des champs

(sous-programme SCHEFF)

A chaque pas du calcul, les forces de charge d'espace sont appliquées aux particules. Les forces sont calculées par interpolation dans une grille 2D (r-z). Cette grille est calculée à chaque fois que la particule synchrone se trouve à mi-cellule, le faisceau étant quasiment rond à ce moment. La distribution de charges reconstituée pour cet instant est discrétisée dans la grille. Des poids sont ainsi attribués pour chaque anneau. Cette étape terminée, les champs sont calculés en sommant la contribution de chaque anneau du maillage qui produit un champ connu de manière exacte. Ce dernier calcul s'appuie sur des tables afin de réduire le temps de calcul [8,9].

L'avantage de cette méthode est qu'il n'est pas nécessaire de connaître le potentiel à la limite de la grille à la différence des méthodes par relaxation. Cet avantage devient un inconvénient si l'on veut rendre compte des effets d'image. Ce schéma ne peut rendre compte de l'interaction entre la géométrie des pôles (potentiel imposé) et la distribution de charges. L'utilisation d'un maillage à symétrie de révolution simplifie le traitement et minimise le temps de calcul.

3.5.2 Reconstitution du paquet à mi-cellule

C'est la plus difficile des transformations qu'effectuent le code. Pour calculer proprement les forces de charge d'espace, il est nécessaire de connaître les positions de toutes les particules à un instant donné. Dans un code en z, c'est la phase absolue de la particule que l'on connaît à un endroit particulier dans le linac. Ces deux situations sont très différentes, surtout lorsque le faisceau a une grande extension en phase (partie basse énergie du RFQ). Pour pouvoir entamer le processus décrit ci-avant pour le calcul des champs, le code utilise une série de matrices de transformation qui ne considère que le terme quadripolaire. Ces matrices sont capables de transporter

⁹Les pôles étant en dehors du faisceau, les champs dus à la ligne et au point sont bien équivalents aux champs du cylindre et de la sphère, respectivement (théorème de Gauss).

les particules d'une phase à une autre pour un pas de 5° (transformation $z \rightarrow t$). Les matrices inverses sont également déterminées pour le retour à la situation initiale après le calcul des champs dans la grille [8] (transformation $t \rightarrow z$).

3.6 La gestion des pertes

3.6.1 Les pertes transverses

Le critère naturel pour estimer si une particule est perdue ou non est tout simplement le contact de cette particule avec les pôles. Il faut donc tenir compte de la géométrie des pôles à chaque pas de la trajectoire de chaque particule. Pour diminuer le temps de calcul et soustraire les particules à la zone externe à la boîte cylindrique ayant servie de domaine d'intégration pour les développements harmoniques, le code PARMTEQM applique un tout autre critère. Pour chaque pas du calcul, le code détermine si les coordonnées transverses de la particule sont comprises dans un carré de coté qui est deux fois le minimum d'ouverture pour la cellule considérée. Toute particule en dehors de ce carré est considérée perdue. Ce critère s'appuie donc sur l'hypothèse qu'une particule, ayant une amplitude telle qu'elle se trouve en dehors de ce carré, ne peut revenir dans ce carré.

3.6.2 Les particules décrochées en phase

A chaque pas du calcul, toutes les particules sont donc à la même cote azimutale et c'est leurs phases φ qui rendent compte de la distribution longitudinale du paquet. La mise en paquet n'ayant pas un rendement de 100%, plusieurs macro-particules, lors de la simulation, ne sont pas accélérées. Leurs écarts en phase ne cessent alors de croître. Si bien que la fenêtre de largeur 2π centrée sur la phase synchrone n'est plus assez grande pour contenir toutes les particules. Comme il est illusoire d'agrandir cette fenêtre¹⁰, l'astuce utilisée dans PARMTEQM consiste à translater de $\pm 2\pi$ la phase de ces particules décrochées :

- (+) si la particule est en retard
- (-) si elle est en avance (ceci peut arriver au début de la simulation, le bruit numérique couplé aux forces de charge d'espace peut éjecter des particules de la fenêtre).

Cette translation en phase s'appuie sur la périodicité des battements radiofréquence.

3.7 Conclusion du chapitre

Ce chapitre montre toutes les hypothèses simplificatrices utilisées dans le code PARMTEQM. Au regard des exigences aujourd'hui demandées par les projets de RFQ à forts courants, ces simplifications soulèvent plusieurs interrogations : quelles erreurs entraînent-elles et, si erreur

¹⁰Il faudrait alors tenir compte des paquets voisins.

il y a, quelles importances relatives ont-elles sur la transmission, la distribution du faisceau en sortie, la localisation des pertes ? Pour tenter de répondre à ces questions, il est nécessaire selon les cas, d'avoir une référence expérimentale ou théorique, ou bien de retirer l'approximation traitée dans le code PARMTEQM.

Le chapitre suivant détaille l'élaboration d'un nouveau code de transport qui minimise les hypothèses de travail et qui servira de référence pour plusieurs des études comparatives du chapitre 5.

Bibliographie

- [1] J.L. Laclare, A. Ropert, “The Saclay RFQ”, rapport interne L.N.S. 063, 1er Juin 1982.
- [2] K.R. Crandall, “Effects of vane-tip geometry on the electric fields in Radio-Frequency Quadrupole Linacs”, L.A.N.L. report LA-9695-MS, 1983.
- [3] K.R. Crandall, “Computation of Charge Distribution On or Near Equipotential Surfaces”, L.A.N.L. report LA-3512 , Decembre 1966.
- [4] N. Tokuda, S. Yamada, “New Formulation of the Radial Matching Section”, Proceedings Linac conference 81, 19-23 Octobre 1981, Santa Fe, LANL report LA-9234-C, 313 , Février 1982.
- [5] K.R. Crandall, “RFQ radial Matching Sections and fringe fields”, Proceedings Linac 84, p. 109, GSI-84-11.
- [6] K.R. Crandall, “Ending RFQ vanetips with quadrupole symmetry”, Proceedings Conférence Linac 94, 1994, p.227.
- [7] R. Duperrier, “Calculs du champ électrique maximum dans une cellule RFQ”, rapport CEA/DSM/DAPNIA/SEA/IPHI/9843, août 1998.
- [8] K. R. Crandall, R. H. Stokes, T. P. Wangler, “RF Quadrupole Beam Dynamics Design Studies”, Linac 1979.
- [9] N. Pichoff, “Etude théorique et expérimentale du halo d’un faisceau intense de particules chargées dans un accélérateur”, thèse Université Paris Sud Orsay, 11 décembre 1997.

Chapitre 4

Le code de transport TOUTATIS

Un accélérateur linéaire de forte puissance ne peut fonctionner que si l'activation de la structure demeure tolérable. Pour l'étage basse énergie, la structure RFQ est l'élément le plus sensible à ces pertes de particules qu'il faut prédire avec la plus grande précision possible. Le code TOUTATIS a été écrit dans ce but. Pour cela, il minimise les hypothèses et approximations pour le transport de faisceaux intenses dans les RFQ. Ce chapitre décrit les méthodes numériques qui ont été utilisées pour la mise au point de ce code de calcul.

4.1 Algorithme pour la simulation du transport dans un RFQ

La stratégie utilisée par le code TOUTATIS pour simuler le transport est décrite par le schéma de la figure 4.1. Le processus part d'une distribution de macro-particules dans l'espace 6D (i.e 3 pour la position, 3 pour la vitesse). Le centroïde des positions est calculé afin de déterminer la position longitudinale du paquet dans le RFQ. Toutes les grilles qui seront utilisées lors des calculs numériques seront centrées sur cette cote azimutale. Une fois cette position déterminée, un mailleur discrétise la géométrie des pôles du RFQ dans le voisinage de la distribution. La distribution de charges est discrétisée dans la même grille pour tenir compte des effets d'image et de la charge d'espace. Cette discrétisation des charges est effectuée par interpolation linéaire aux noeuds voisins¹. Lors de cette étape, les lames sont polarisées en tenant compte du temps et de l'amplitude du potentiel scalaire radiofréquence. Cette étape de préparation de la grille terminée, un processus de résolution de l'équation de Poisson est engagé. Une fois ce processus terminé, les forces issues de la solution numérique sont appliquées aux particules via un schéma saut de mouton. Le processus est ainsi bouclé jusqu'à atteindre la position longitudinale désirée.

Ce paragraphe résume, dans les grandes lignes, l'algorithme pour le transport utilisé par TOUTATIS. Les sections suivantes traitent plus en détails chacune des étapes.

¹Ce type de discrétisation est appelé *cloud in cell* en anglais.

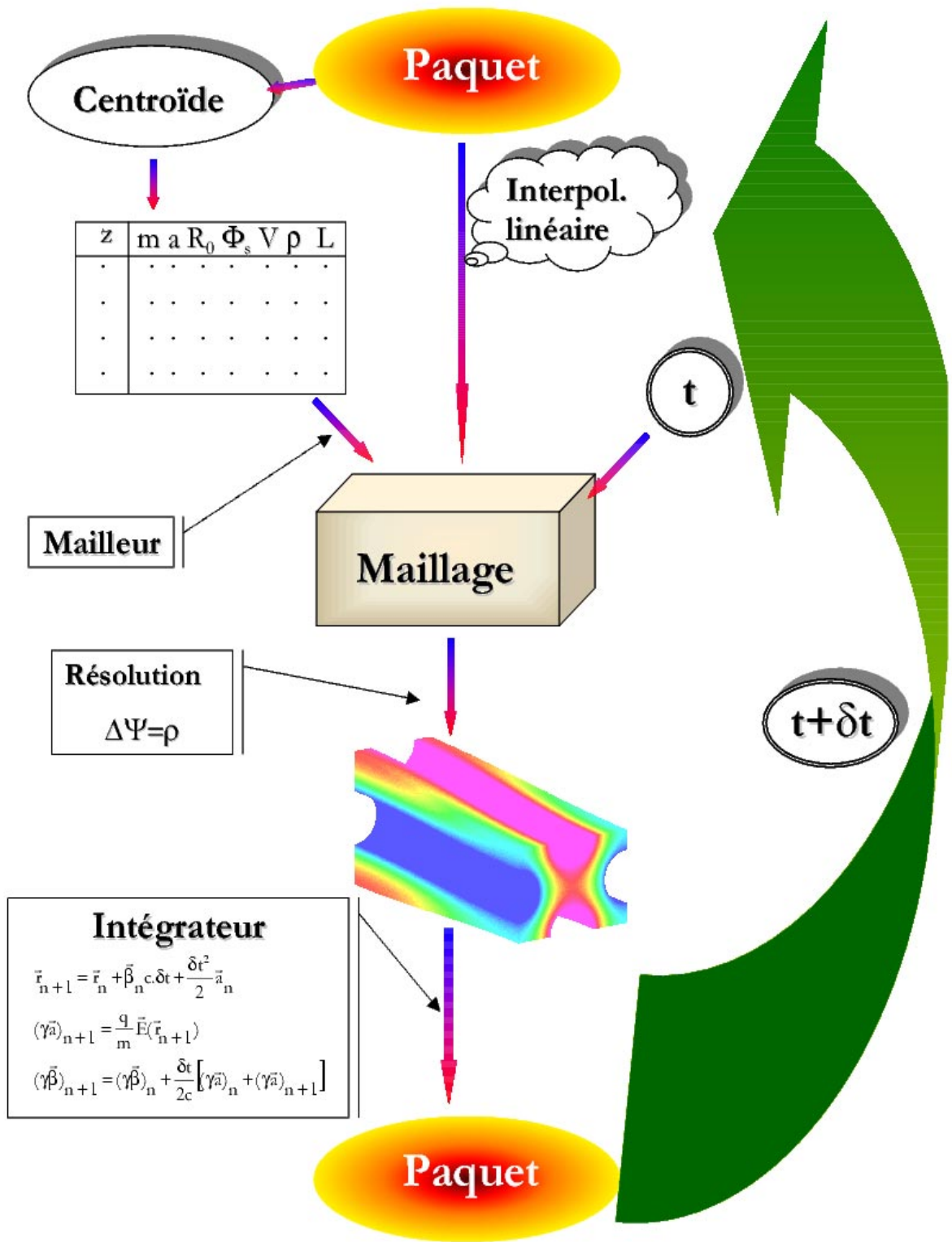


FIG. 4.1 – Algorithme utilisé par TOUTATIS.

4.2 Intégration des équations du mouvement

TOUTATIS s'appuie sur une intégration pas-à-pas du mouvement. Mais le schéma d'intégration est un peu plus complexe que celui de PARMTEQM. Une autre différence avec PARMTEQM est que le paramètre indépendant est le temps, on parle alors de code en t. Ce choix du temps comme paramètre indépendant dans TOUTATIS est naturel. Il est même obligatoire si l'on veut calculer avec précision et de manière simple les forces self-consistantes du faisceau (i.e. charge d'espace et effets d'image). Rappelons que LIDOS (code russe) est également un code en temps mais qu'il utilise un schéma type saut de mouton.

L'émittance du faisceau est directement proportionnel au Jacobien de la transformation. Pour que le schéma d'intégration n'induisse pas de variation factice de l'émittance, il faut que le Jacobien de la transformation soit égal à 1. En détails, selon le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = Ze\vec{E} \quad (4.1)$$

où \vec{p} est la quantité de mouvement de la particule et \vec{E} le champ électrique résiduel, Z l'état de charge, e la charge élémentaire. En tenant compte de la relativité restreinte, cette équation peut être réécrite :

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = \frac{Zec}{E_0}\vec{E} \quad (4.2)$$

avec E_0 , l'énergie de masse au repos et c la vitesse de la lumière. Afin de discrétiser cette équation, considérons la variation infinitésimale de la quantité $\gamma\vec{\beta}$, soit :

$$\delta(\gamma\vec{\beta}) = \frac{Zec}{E_0}\vec{E}\delta t \quad (4.3)$$

Il nous est maintenant possible d'écrire les expressions nécessaires à l'intégration du mouvement pas-à-pas [1] :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + (\beta_x)_i c \delta t + \frac{Zec^2}{\gamma_i E_0} E_x (\overrightarrow{OM}_i) \frac{\delta t^2}{2} \\ y_{i+1} = y_i + (\beta_y)_i c \delta t + \frac{Zec^2}{\gamma_i E_0} E_y (\overrightarrow{OM}_i) \frac{\delta t^2}{2} \\ z_{i+1} = z_i + (\beta_z)_i c \delta t + \frac{Zec^2}{\gamma_i E_0} E_z (\overrightarrow{OM}_i) \frac{\delta t^2}{2} \\ (\gamma\beta_x)_{i+1} = (\gamma\beta_x)_i + \frac{\delta t}{2} \frac{Zec}{E_0} [E_x(\overrightarrow{OM}_i) + E_x(\overrightarrow{OM}_{i+1})] \\ (\gamma\beta_y)_{i+1} = (\gamma\beta_y)_i + \frac{\delta t}{2} \frac{Zec}{E_0} [E_y(\overrightarrow{OM}_i) + E_y(\overrightarrow{OM}_{i+1})] \\ (\gamma\beta_z)_{i+1} = (\gamma\beta_z)_i + \frac{\delta t}{2} \frac{Zec}{E_0} [E_z(\overrightarrow{OM}_i) + E_z(\overrightarrow{OM}_{i+1})] \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où le facteur γ_i seul, nécessaire pour isoler les vitesses, est obtenu avec l'expression :

$$\gamma_i = \sqrt{1 + [(\gamma\beta_x)_i]^2 + [(\gamma\beta_y)_i]^2 + [(\gamma\beta_z)_i]^2} \quad (4.5)$$

Ce schéma implique de stocker les champs ressentis par la particule au pas i pour pouvoir calculer les vitesses au pas $i + 1$. La taille du pas δt vaut typiquement un vingtième de la période radiofréquence. Vérifions que le Jacobien de cette transformation est bien égal à 1 :

$$\mathfrak{S} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial u_i} & \frac{\partial u_{i+1}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial u_i} & \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

où $u = x, y, z$ et $v = \gamma\beta_x, \gamma\beta_y, \gamma\beta_z$. La force ne dépendant que de la position (champ électrique), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial u_i} &= 1 + \frac{Zec^2}{\gamma_i E_0} \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_i)}{\partial u_i} \\ \frac{\partial u_{i+1}}{\partial v_i} &= \frac{c\delta t}{\gamma_i} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial u_i} &= \frac{\delta t}{2} \frac{Ze}{\gamma_i E_0} \left\{ \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_i)}{\partial u_i} + \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_{i+1})}{\partial u_i} \left[1 + \frac{\delta t^2}{2} \frac{Zec}{\gamma_i E_0} \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_i)}{\partial u_i} \right] \right\} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} &= 1 + \frac{\delta t^2}{2} \frac{Zec}{\gamma_i E_0} \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_{i+1})}{\partial u_i} \end{aligned} \quad (4.7)$$

En injectant dans (5.23), le calcul de \mathfrak{S} donne :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \left[1 + \frac{Zec^2}{\gamma_i E_0} \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_i)}{\partial u_i} \right] \times \left[1 + \frac{\delta t^2}{2} \frac{Zec}{\gamma_i E_0} \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_{i+1})}{\partial u_i} \right] \\ &\quad - \frac{c\delta t^2}{2} \frac{Ze}{\gamma_i^2 E_0} \left\{ \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_i)}{\partial u_i} + \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_{i+1})}{\partial u_i} \left[1 + \frac{\delta t^2}{2} \frac{Zec}{\gamma_i E_0} \frac{\partial E_u(\overrightarrow{OM}_i)}{\partial u_i} \right] \right\} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Cet algorithme conserve donc bien l'émittance dans l'espace des phases à chaque pas d'un transport linéaire.

4.3 Le calcul du potentiel électrique

Le contrôle des pertes de particules implique une description aussi précise que possible des champs électriques. Conformément au chapitre 2, c'est l'équation de Poisson qui doit être considérée :

$$\Delta \Psi(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad (4.9)$$

avec $\Psi(\vec{r})$, le potentiel électrique, $\rho(\vec{r})$, la densité volumique de charges [1]. La forme particulière des pôles et les multiples configurations de $\rho(\vec{r})$ ne permettent pas d'utiliser des solutions analytiques de l'équation (4.9) (discontinuités des pôles [2, 3], enveloppe du faisceau épousant la modulation [4], ...). La résolution numérique de l'équation (4.9) reste la seule alternative fiable et les progrès de l'informatique rendent aujourd'hui cette alternative possible pour le RFQ. Les sections suivantes passent en revue des méthodes qui ont été implémentées pour la résolution de l'équation de Poisson dans le code TOUTATIS.

4.3.1 La méthode des différences finies

Pour fixer les idées, supposons que la zone utile soit recouverte d'un réseau à mailles cubiques de côté h et que le potentiel électrique soit connu pour quelques points de ce réseau (i.e électrodes). Comme le potentiel recherché obéit à l'équation (4.9), nous verrons que la valeur Ψ_i de ce potentiel au noeud i est égale à une combinaison linéaire des valeurs aux noeuds voisins. La valeur $\Psi_{(h)}$ obtenue en un point dans le problème discret pour une certaine valeur de h , diffère de la valeur exacte Ψ du problème continu, mais l'erreur :

$$\varepsilon_h = \Psi - \Psi_{(h)} \quad (4.10)$$

tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$ [5]. Il est donc possible de se rapprocher autant que nous voulons de la valeur exacte. La méthode des différences finies est de toutes la plus facile à mettre en oeuvre et la plus générale. Elle conduit au résultat dans tous les cas. Cette section détaille les principaux points pour la mise en oeuvre de cette méthode.

4.3.1.1 Les développements

Au voisinage d'un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , une fonction qui est régulière ainsi que ses dérivées, peut être développée en série de Taylor du type :

$$\Psi(x, y, z) = \Psi_0 + \sum_l \sum_m \sum_n a_{lmn} (x - x_0)^l (y - y_0)^m (z - z_0)^n \quad (4.11)$$

où $\Psi_0 = \Psi(x_0, y_0, z_0)$. Si le développement est limité à k termes et s'il est vérifié pour k points voisins de (x_0, y_0, z_0) , il en découle un système de k équations linéaires pour déterminer les coefficients a_{lmn} en fonction de $(\Psi_1 - \Psi_0) \dots (\Psi_k - \Psi_0)$. Les a_{lmn} sont les dérivées partielles de Ψ en $(x_0, y_0, z_0)^2$. Si cette fonction obéit à une équation aux dérivées partielles, cette équation pourra être transformée en une relation entre Ψ_0 et $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$. Ici l'équation aux dérivées partielles est l'équation de Poisson.

²Rappel : si $f(x)$ peut être développée en série de Taylor, cette fonction obéit à :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

avec :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

4.3.1.2 Approximation du second ordre

Lorsque la série (4.11) est limitée au second ordre, $\Psi(x, y, z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) = & \Psi_0 + (x - x_0) \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_0 + (y - y_0) \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_0 + (z - z_0) \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_0 \\ & + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_0 + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_0 + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right|_0 \\ & + (x - x_0)(y - y_0) \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right|_0 + (x - x_0)(z - z_0) \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right|_0 + (z - z_0)(y - y_0) \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} \right|_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

En écrivant que (4.12) est satisfaite en 6 points voisins de (x_0, y_0, z_0) , un système de 6 équations linéaires est obtenu. Il permet de déterminer les dérivées :

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_0 ; \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_0 ; \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right|_0 \quad (4.13)$$

au point (x_0, y_0, z_0) . Il reste à déterminer ces formules pour les cas où le point de référence est "loin" ou "proche" de la surface du conducteur. Cette surface constitue une limite de type Dirichlet (champ normal). Nous ne traiterons que le cas bidimensionnel pour ne pas alourdir inutilement les expressions. Les équations aux différences finies, pour le cas tridimensionnel, s'obtiennent en utilisant les mêmes principes.

4.3.1.3 Application aux branches normales pour les noeuds intérieurs

Nous appellerons branches normales le cas où les points voisins sont à égales distances du point de référence (figure 4.2). En écrivant (4.12) aux points 1, 2, 3, et 4, les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} h^2 \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_0 = \Psi_1 + \Psi_3 - 2\Psi_0 \\ h^2 \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_0 = \Psi_2 + \Psi_4 - 2\Psi_0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Si Ψ obéit à l'équation (4.9), à l'approximation du second ordre, en imbriquant (4.9) et (4.14), il vient :

$$4\Psi_0 = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 - h^2 \rho_0 \quad (4.15)$$

qui est bien la relation recherchée. ρ_0 est le terme source au point 0. Cette valeur résulte de la discrétisation des charges dans la grille. Cette relation est appliquée à chaque noeud du réseau par itération successive. Pendant chaque itération, au fur et à mesure que les nouvelles valeurs sont calculées, elles sont prises en compte pour les calculs des noeuds suivants : c'est la méthode de Gauss-Seidel³. La section suivante traite des noeuds se trouvant à une distance inférieure à h de la surface du conducteur.

³A l'inverse de la méthode de Jacobi où les valeurs recalculées ne seront utilisées qu'à la prochaine itération. La convergence est alors moins rapide et il faut réserver deux fois plus de mémoire.

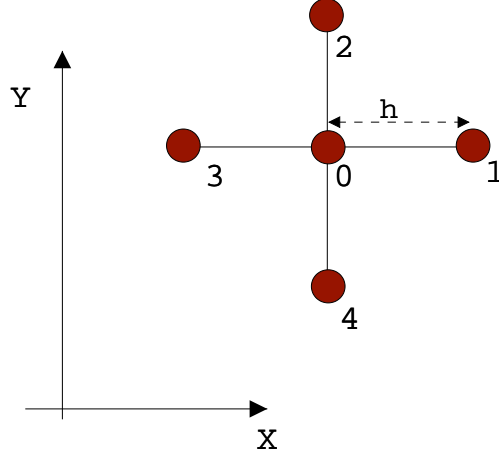


FIG. 4.2 – Configuration géométrique pour les branches normales.

4.3.1.4 Application aux branches inégales pour les noeuds intérieurs

Lorsque le noeud traité se trouve à une distance inférieure à h de la surface du conducteur, il est impératif de tenir compte de la réelle distance entre cette dernière et ce noeud pour ne pas aboutir à une représentation de la géométrie du conducteur du type “marche d’escalier”⁴. En considérant l’expression (4.12), aux points 1, 2, 3 et 4 de la figure 4.3, il vient :

$$\begin{cases} \left(\frac{h_1+h_3}{2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_0 = \frac{1}{h_1}(\Psi_1 - \Psi_0) + \frac{1}{h_3}(\Psi_3 - \Psi_0) \\ \left(\frac{h_2+h_4}{2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_0 = \frac{1}{h_2}(\Psi_2 - \Psi_0) + \frac{1}{h_4}(\Psi_4 - \Psi_0) \end{cases} \quad (4.16)$$

En portant ces expressions dans (4.9), l’équation de Poisson est obtenue sous la forme :

$$\left[\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} \right] \Psi_0 = \frac{1}{(h_1 + h_3)} \left(\frac{\Psi_1}{h_1} + \frac{\Psi_3}{h_3} \right) + \frac{1}{(h_2 + h_4)} \left(\frac{\Psi_2}{h_2} + \frac{\Psi_4}{h_4} \right) - \frac{1}{2} \rho_0 \quad (4.17)$$

C’est l’équation aux branches inégales recherchée. Cette expression est également très pratique lorsque les dimensions de la grille sont différentes selon les directions. Dans notre cas, les dimensions longitudinale et transverse, fonctions de $\beta\lambda$ et de l’ouverture moyenne, respectivement, peuvent être effectivement très différentes (β est la vitesse relativiste de la particule synchrone et λ la longueur d’onde radiofréquence). Ce point sera développé dans la section 4.3.2.1.

⁴Le numéricien est alors dans l’obligation d’accroître considérablement la densité des noeuds pour représenter au mieux le conducteur.

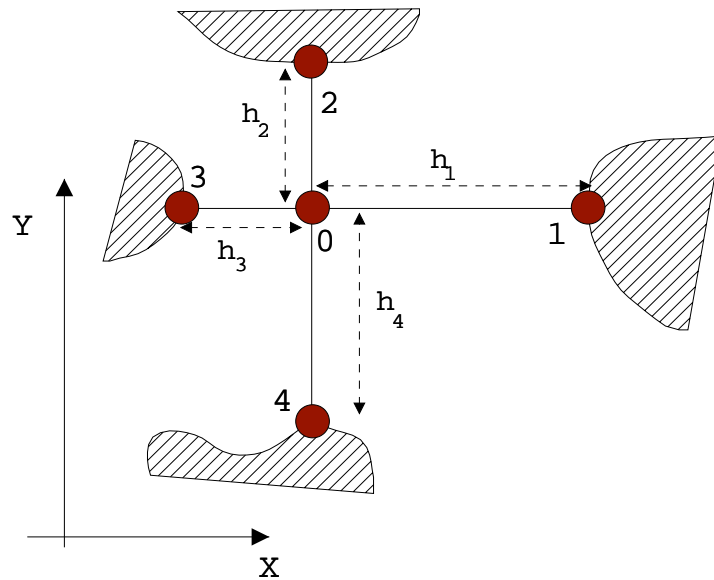


FIG. 4.3 – Schéma illustrant le cas des branches inégales.

4.3.1.5 Conditions aux limites de la grille

4.3.1.5.1 Le plan transverse

Lorsqu'un des nœuds du bord du réseau se trouve à une distance supérieure à h de tout conducteur dans la direction allant du centre de la grille vers ce bord, nous imposerons que le flux traversant cette limite est nul (Condition de Neumann). Le flux \vec{E} est défini par la relation :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Psi \quad (4.18)$$

Une condition de Neumann sur une face horizontale signifie donc $E_y = 0$. Cette approximation est acceptable tant que le flux réel existant à cette limite n'influe pas sur la solution dans la zone utile. Dans la pratique, cette condition de Neumann s'applique en imposant que $\Psi_2 = \Psi_0$ dans (4.14) avec 2, un point hypothétique, distant de h et en dehors du maillage (figure 4.4).

4.3.1.5.2 Le plan longitudinal

Deux cas sont à envisager :

- la grille se trouve dans une partie de la structure RFQ qui peut être assimilée à une maille du canal, les faces avant et arrière du maillage sont alors identiques (maillage torique à section carrée). Cette condition permet d'inclure l'effet dû aux paquets adjacents.
- la grille se situe soit aux extrémités de la structure, soit dans une zone où réside une discontinuité des pôles (i.e. gap de couplage radiofréquence), une condition de Neumann est imposée sur les deux faces. Il a d'ailleurs été vérifié que la perturbation induite par cette condition de Neumann est négligeable devant celle induite par le gap lui-même.

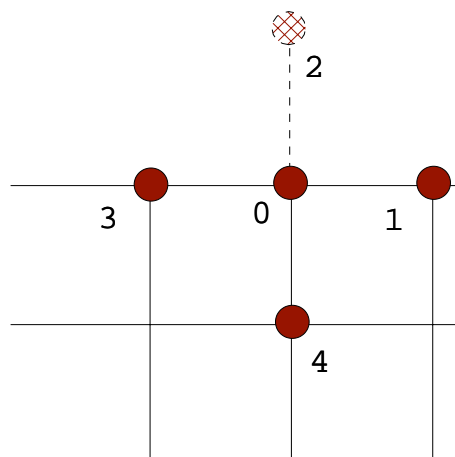


FIG. 4.4 – La condition de Neumann est appliquée au noeud 0, soit $\Psi_2 = \Psi_0$ dans (4.14).

Les principes fondamentaux de la méthode des différences finies établis, il reste à créer la grille qui servira de support aux relations présentées ci-avant.

4.3.2 Stratégie pour la création automatique de grilles avec conducteur

4.3.2.1 Dimensionnement de la grille

4.3.2.1.1 Taille transverse

Dans la section précédente, le choix de la taille transverse du maillage résulte d'un compromis entre la minimisation du nombre de noeuds (encombrement mémoire et vitesse de calcul) et la qualité de la solution dans la zone utile. Ce compromis fixe à 2 fois le rayon moyen (R_0) la demi-taille de la grille dans TOUTATIS.

4.3.2.1.2 Taille longitudinale

La longueur de la grille est choisie égale à $\beta\lambda$. Ce choix semble le plus judicieux compte tenu de la quasi-périodicité du faisceau et de la structure. Cependant, ce choix peut poser problème lorsque le paquet est bien formé. Il ne peut rester alors que très peu de noeuds pour représenter la distribution de macro-particules (figure 6.11). Un remède est d'augmenter le nombre de noeuds [6]. Mais cette méthode s'avère très pénalisante en temps de calcul et raffine le maillage dans des zones où cela n'était pas nécessaire. Nous verrons qu'une solution attrayante consiste à utiliser un raffinement du maillage sur le paquet.

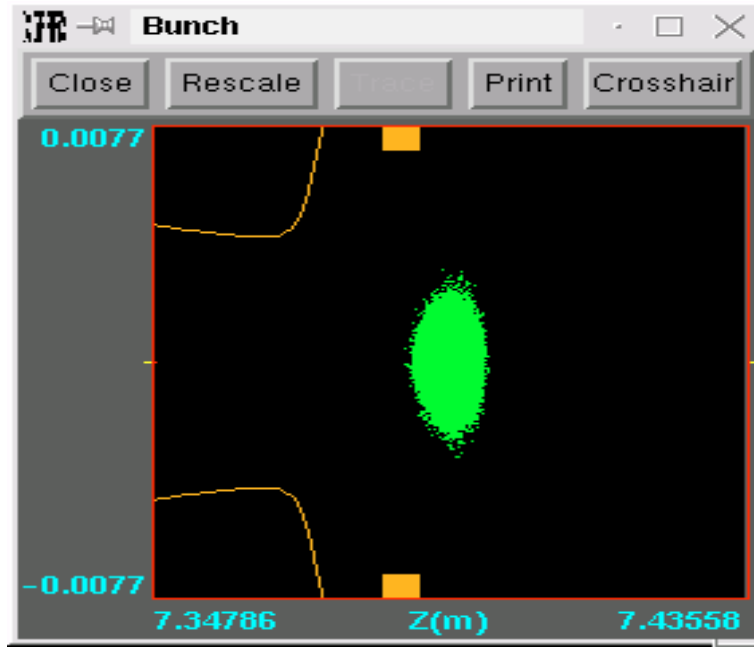


FIG. 4.5 – Paquet de particules en fin de RFQ

4.3.2.2 Discrétisation de la géométrie des lames

4.3.2.2.1 Paramétrage de la surface du conducteur

La surface du conducteur est définie analytiquement par une équation du type $S(x, y, z) = 0$. Le profil longitudinal de l'extrémité de la lame est choisi sinusoïdal, tel que le rayon moyen de la cellule est défini par :

$$R_0(z_0 + \frac{\beta\lambda}{4}) = \frac{1+m}{2}a \quad (4.19)$$

avec z_0 la côte du début de la cellule RFQ. Pour une cellule, le profil longitudinal s'obtient en appliquant l'expression suivante :

$$\begin{cases} R_h(z) = R_0(z) \left\{ 1 + \frac{m-1}{m+1} \cos\left[\frac{2\pi}{\beta\lambda}(z - z_0)\right] \right\} \\ R_v(z) = R_0(z) \left\{ 1 - \frac{m-1}{m+1} \cos\left[\frac{2\pi}{\beta\lambda}(z - z_0)\right] \right\} \end{cases} \quad (4.20)$$

où $R_h(z)$ et $R_v(z)$ sont les profils pour les pôles horizontaux et verticaux, respectivement. La fonction $R_0(z)$ est une interpolation linéaire entre les valeurs des rayons moyens de cellule à cellule. Ces rayons moyens ont des valeurs très proches mais cette interpolation est nécessaire pour permettre la variation de ce paramètre le long de la structure tout en assurant la continuité du profil des pôles.

La section transverse de chaque pôle dans la zone utile est en grande partie circulaire (figure 4.6). Cela simplifie grandement leur usinage. La partie circulaire est ensuite prolongée par un plat faisant un angle avec la verticale, le *Break Out Angle*. Cet angle peut varier en fonction du refroidissement ou de tout autre considération mécanique (typiquement, 10°).

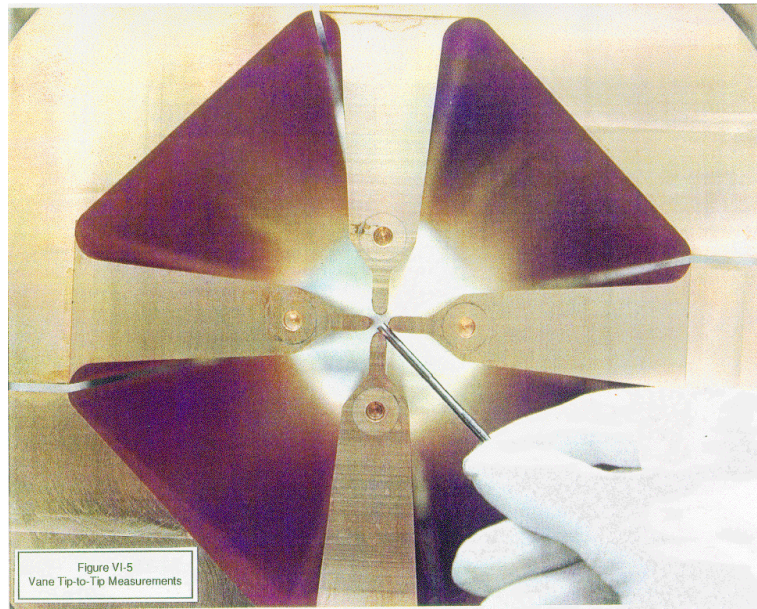


FIG. 4.6 – Photographie d'une coupe transverse de RFQ.

Le rapport entre le rayon moyen R_0 et le rayon de courbure du pôle ρ est, en général, gardé constant le long de la structure. Ce rapport varie autour de 0.85 selon les RFQ. Cette valeur résulte d'un compromis minimisant la non-linéarité et l'amplitude du champ crête :

$$\frac{\rho}{R_0} = 0.85 \quad (4.21)$$

Cette relation définit la variation de ρ en fonction de z via $R_0(z)$.

4.3.2.2.2 Repérage des intersections conducteur/grille

Le principe consiste à balayer les axes de références (Ox), (Oy) et (Oz) et chercher le noeud le plus proche de la surface mais en dehors du conducteur. Considérons la figure 4.7 pour un balayage selon (Ox) et (Oz). Le point recherché est le point 0. Ses indices (i, j, k) sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} i = \frac{x_0 + \hat{Y}}{h} \\ j = E \left[\frac{f(x_0, z_0) + \hat{Y}}{h} \right] \\ k = \frac{z_0 + \frac{\beta\lambda}{2}}{h_z} \end{cases} \quad (4.22)$$

où $E[\]$ est l'opérateur partie entière, h le pas transverse du maillage, h_z le pas longitudinal du maillage, \hat{Y} l'extension maximum du maillage en transverse, f est une fonction tirée de l'équation de la surface du conducteur donnant y en fonction de x et z . Afin d'appliquer les

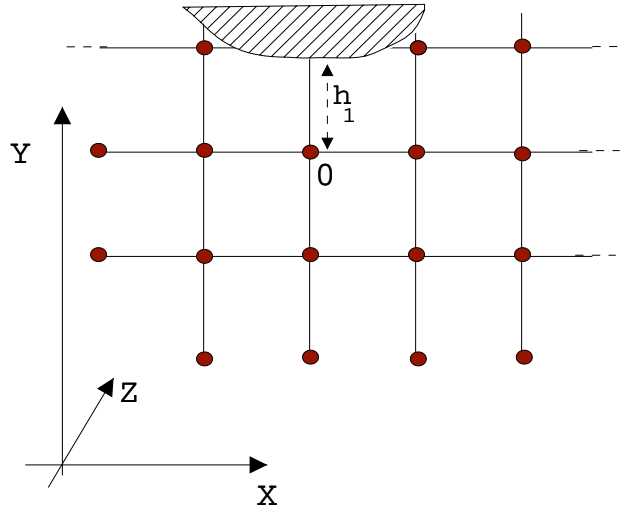


FIG. 4.7 – Cas pour le repérage des noeuds à proximité des conducteurs.

formules établies pour les branches inégales, il faut déterminer la distance exacte, h_1 (figure 4.7), qui sépare le métal de ce noeud, en utilisant la relation :

$$h_1 = f(x_0, z_0) + \hat{Y} - j \times h \quad (4.23)$$

Pour un balayage dans la direction (Oy) ou (Oz) , la même méthode peut être appliquée en prenant bien soin d'utiliser les bonnes fonctions tirées de $S(x, y, z)$.

4.3.2.3 Etiquetage des noeuds

Quatre grandeurs sont affectées à chaque noeud de la grille : le potentiel électrique Ψ , la densité volumique de charge ρ , le résidu $\tilde{\rho}$ et l'étiquette n . Ψ et ρ sont les grandeurs physiques classiques au point représenté par le noeud. La grandeur $\tilde{\rho}$ rend compte de l'erreur subsistant itération après itération lors de la résolution de (4.9). Le résidu après la $i^{\text{ème}}$ itération au noeud 0 est donné par la relation :

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0 - \frac{4\Psi_0 - \Psi_1 - \Psi_2 - \Psi_3 - \Psi_4}{h^2} \quad (4.24)$$

conformément à (4.15). Cette grandeur est indispensable pour l'application des méthodes multigrille et pour l'évaluation de la convergence. Nous reviendrons sur ce point plus en détail dans les prochaines sections.

L'étiquette n sert à identifier le type du noeud. n vaut -1 pour un noeud à l'intérieur au conducteur, le potentiel est imposé. n vaut 0 pour un noeud aux branches normales. Enfin n est un entier positif pour un noeud aux branches inégales (4.17). La valeur de n numérote alors

le noeud pour accéder aux tables compilant les valeurs de type h_1 conformément à la section 4.3.2.2.2.

Cette étape d'étiquetage des noeuds est réalisée en trois phases. Dans un premier temps, tous les noeuds ont une étiquette initialisée à 0. Pendant la phase de repérage des intersections conducteur/grille, les étiquettes des noeuds aux branches inégales sont affectées. Enfin, les noeuds internes aux conducteurs sont étiquetés -1 . L'étiquetage des noeuds terminé, il ne reste plus qu'à itérer selon les procédures décrites dans la section 4.3.1.

4.3.3 Les méthodes multigrille

L'application de la méthode de Gauss-Seidel, telle qu'elle a été décrite dans les premières sections, permet d'aboutir à une description aussi précise que possible du potentiel électrique dans la zone utile du RFQ. Cependant, elle s'avère très rapidement pénalisante en temps de calcul. A titre d'exemple, plusieurs jours de calcul peuvent être nécessaires pour décrire la structure d'un RFQ⁵. En considérant une étude d'erreur comportant la variation de nombreux paramètres (faisceau en entrée, désalignement, ...), il est clair que l'utilisation d'un code s'appuyant sur cette méthode réclame une accélération de la convergence par tous les moyens possibles. Ce souci d'accélération de la convergence n'est d'ailleurs pas une caractéristique des codes de transport de faisceau, c'est depuis longtemps le lot de tout calcul numérique par relaxation.

Frankel et Young ont apporté leur contribution par une étude mathématique du problème pour le cas simple d'une grille sans conducteur encapsulé [5]. Ils proposaient, à chaque itération, de multiplier la correction apportée à Ψ par une constante ω , appelée *accélérateur numérique*. Cette méthode permet de réduire le nombre d'itérations d'un facteur pouvant aller jusqu'à 30 et au-delà selon le nombre de noeuds considéré. La valeur de ω est calculée analytiquement en fonction des dimensions $N \times P \times Q \times \dots$ de la grille dans chaque direction [5]. Lorsqu'une géométrie particulière d'un conducteur est encapsulée dans la grille, ω ne peut pas être calculé analytiquement. Une détermination empirique est toujours possible mais elle peut s'avérer laborieuse et coûteuse en temps de calcul lorsque doivent être traitées différentes géométries. Dans ce cas, la méthode la plus performante jusqu'aux années 1970, est l'accélération de Chebyshev [6]. Elle permet, à l'aide du résidu, itération après itération, de calculer un accélérateur adapté [7]. Il est alors possible d'approcher les performances de la méthode de Frankel-Young.

Depuis les années 1970, les méthodes multigrille, introduites par Brandt, sont devenues le must pour l'accélération de la convergence [7]. Elles sont utilisées dans de nombreux laboratoires et organismes [8, 9, 10]. Cependant, il n'existe pas une méthode multigrille mais plusieurs. C'est au numéricien d'adapter les concepts fondamentaux de ces méthodes à son problème.

4.3.3.1 Les concepts fondamentaux

Il y a deux idées clés dans les méthodes multigrille. La première est de chercher à évaluer l'erreur sur Ψ lors des itérations successives plutôt que de corriger Ψ par de petits incréments.

⁵Pour un maillage N^3 avec $N=65$, une structure de 600 cellules calculée avec une station de travail HP-J282.

Cette recherche de l'erreur s'effectuera par relaxation. La deuxième idée est d'accomplir cette relaxation non pas sur un maillage du même type, mais sur un maillage plus grossier (maille plus grande). L'évaluation de l'erreur en est rendue plus rapide voire quasi immédiate. En détails, supposons que nous essayons de résoudre l'équation :

$$\Delta\Psi = \rho \quad (4.25)$$

où Δ est un opérateur linéaire et ρ représente les sources. En discrétisant (4.25) dans une grille uniforme de pas h , le problème se réduit à un ensemble d'équations du type :

$$\Delta_h\Psi_h = \rho_h \quad (4.26)$$

Lors de la première itération suivant la méthode de Gauss-Seidel⁶, une approximation de Ψ_h est obtenue. Notons la $\tilde{\Psi}_h$. L'erreur vaut alors :

$$\xi_h = \Psi_h - \tilde{\Psi}_h \quad (4.27)$$

Le résidu, ou défaut par rapport aux sources, est :

$$\delta_h = \Delta_h\tilde{\Psi}_h - \rho_h \quad (4.28)$$

Puisque Δ_h est linéaire, l'erreur satisfait l'équation :

$$\Delta_h\xi_h = -\delta_h \quad (4.29)$$

Le problème consiste donc maintenant à trouver ξ_h (i.e. l'erreur) afin de corriger $\tilde{\Psi}_h$ et donc d'aboutir à Ψ_h . Utiliser Δ_h ne nous ferait rien gagner vis-à-vis du temps de calcul. Utilisons plutôt une grille plus grossière de pas $H = 2h$. L'équation (4.29) devient alors :

$$\Delta_H\xi_H = -\delta_H \quad (4.30)$$

Comme Δ_H contient moins de noeuds que Δ_h (8 fois moins dans le cas tridimensionnel), (4.30) est plus rapide à résoudre. Pour déterminer ξ_H , il nous faut disposer de δ_H par le biais d'un nouvel opérateur nommé *restrieteur* :

$$\delta_H = \mathfrak{R}\delta_h \quad (4.31)$$

Cet opérateur est aussi appelé opérateur d'injection. Il permet le passage d'une grille *fine* à une grille *grossière*. Une fois ξ_H calculée, il nous faut un opérateur supplémentaire qui nous permette d'obtenir ξ_h :

$$\xi_h = \wp\xi_H \quad (4.32)$$

Ce dernier opérateur est appelé *prolongateur*. Il s'appuie sur des interpolations dans la grille grossière pour calculer les valeurs correspondantes dans la grille fine. Ces opérateurs, *restrieteur*

⁶en fait, il est souhaitable d'en effectuer au moins trois.

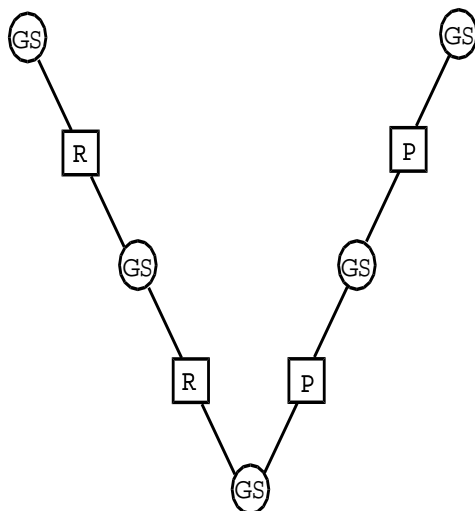


FIG. 4.8 – Un cycle en V .

et prolongateur, assurent la communication entre les différents niveaux. Ils n'existent pas de manière unique. Ils doivent être élaborés en fonction du problème considéré.

Enfin, il ne reste qu'à corriger $\tilde{\Psi}_h$:

$$\tilde{\Psi}_h^{i+1} = \tilde{\Psi}_h^i + \xi_h \quad (4.33)$$

La procédure doit être répétée jusqu'à obtenir le niveau de convergence souhaité. Ce schéma peut être combiné sur plusieurs niveaux. Chaque grille, toujours plus grossière, sert à estimer l'erreur de la grille du niveau supérieur. Les combinaisons ou cycles sont multiples. Le numéricien doit tester plusieurs types de cycles pour aboutir à un algorithme optimum.

Une dernière astuce, pour accélérer la convergence, consiste à stocker sur une période R.F. les solutions obtenues. Elles peuvent être ainsi utilisées comme solution préliminaire pour les calculs de la période suivante. Le nombre de cycles nécessaire est ainsi diminué d'un facteur 4 environ. La suite détaille quelques cycles parmi les plus utilisés ainsi que le cycle utilisé dans le code TOUTATIS.

4.3.3.2 Les principaux cycles

4.3.3.2.1 Le cycle en V

La figure 4.8 représente le principe du cycle en V. L'étape *GS* signifie que trois itérations de type Gauss-Seidel sont appliquées. *R* représente une restriction. *P* représente une prolongation. Les cycles en V peuvent être enchaînés jusqu'à aboutir à la réduction souhaitée du résidu sur la grille la plus fine.

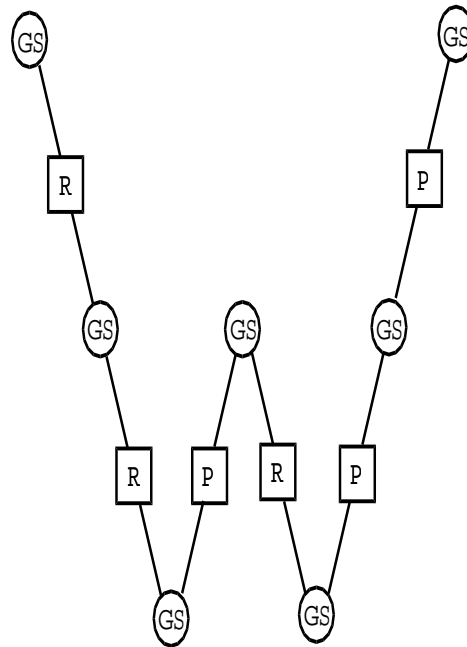


FIG. 4.9 – Un cycle en W.

4.3.3.2.2 Le cycle en W

Le principe de ce cycle est illustré sur la figure 4.9. Il peut permettre, dans certains cas, d'aboutir à la solution en minimisant le nombre d'itérations sur la grille la plus fine. Il devient alors une alternative intéressante au classique cycle en V.

4.3.3.2.3 Le cycle total (*Full Algorithm Multigrid*)

Toujours dans le but de minimiser le nombre de passages sur les grilles les plus fines⁷, le cycle total est, dans bien des cas, la façon la plus efficace d'utiliser les concepts fondamentaux de la section 4.3.3.1. Nous partions jusqu'ici d'une solution intermédiaire sur le maillage le plus fin et estimions l'erreur sur des grilles plus grossières en cascade. Dans l'algorithme multigrille total, les termes de sources ρ sont connus à tous les niveaux. Soit ρ a été discrétisé sur chaque grille, soit ρ_h a été restreint en cascade. Le processus démarre alors du plus bas niveau (figures 4.10 et 4.11). Puis la solution est prolongée au niveau supérieur. Ce dernier est calculé par un cycle en V, et ainsi de suite jusqu'au niveau final.

4.3.3.2.4 Le cycle utilisé dans TOUTATIS

Ce cycle est une composition des cycles précédents. Il reprend le principe du cycle total tout en évitant d'avoir à connaître les sources à tous les niveaux. Il permet de gagner 20 à 30% en temps de calcul par rapport aux cycles en V et W pour ce code. Il est représenté par la figure 4.12.

⁷plus pénalisant en temps de calcul.

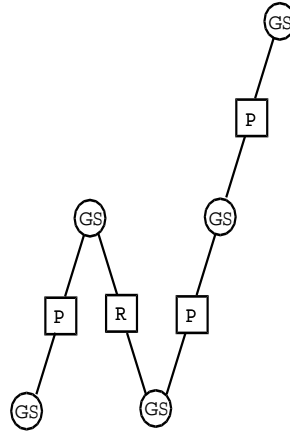


FIG. 4.10 – Un cycle total.

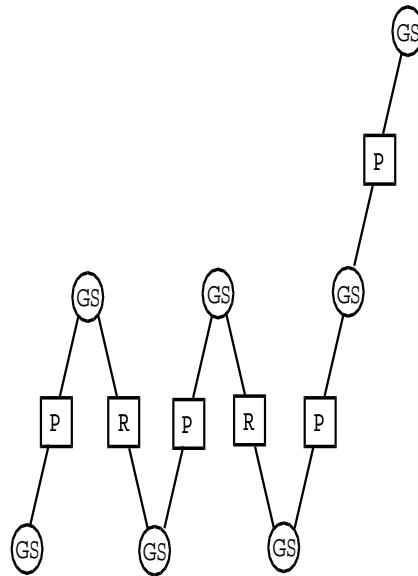
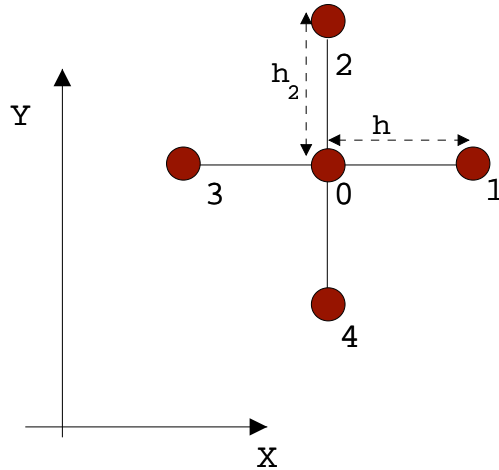


FIG. 4.11 – Un autre cycle total.

FIG. 4.13 – Configuration avec $h_2 < h$.

4.3.3.2.5 Les opérateurs de restriction et de prolongation

Ces opérateurs, chargés de la communication entre les niveaux, sont très importants. Leur qualité influe directement sur l'efficacité du processus multigrille. Dans le cas d'une grille sans conducteurs encapsulés, le potentiel est continu à l'intérieur du domaine si bien que le prolongateur, le plus populaire, est une simple interpolation linéaire à coefficients constants. Autrement dit, les valeurs aux points communs aux deux grilles sont conservées. Pour les points intermédiaires de la grille fine, les valeurs sont des moyennes calculées à l'aide des points voisins déjà initialisés. Pour la restriction, les valeurs aux points communs aux deux grilles sont conservées. On parle d'*injection directe*.

Lorsque des discontinuités du potentiel imposent l'utilisation des branches inégales, les coefficients d'interpolation du prolongateur doivent être différents selon le noeud considéré. Dans TOUTATIS, les valeurs correctrices sont pondérées en tenant compte des distances réelles existant entre le noeud aux branches inégales et la discontinuité. Plus le noeud est proche de la surface conductrice, plus l'erreur est faible.

Considérons la figure 4.13. Le noeud 2 se trouve sur le conducteur dans un plan transverse commun aux deux grilles : la grossière et la fine. Nous cherchons à calculer l'erreur ξ_0 sur le noeud 0 connaissant les erreurs $\xi_{1,3,4}$ sur les noeuds 1, 3 et 4, l'erreur sur le noeud 2 étant nulle (potentiel imposé). Les valeurs pour 1 et 3 sont obtenues par injection directe de la grille grossière. La valeur pour le noeud 4 est obtenue en calculant la moyenne des erreurs obtenues par injection directe des noeuds voisins de 4 et distants de $\sqrt{2}h$ tels les noeuds 1 et 3. L'erreur sur le noeud 0 s'obtient alors à l'aide de l'expression :

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_3) + \frac{h_2}{h_2 + h} \xi_4 \right] \quad (4.34)$$

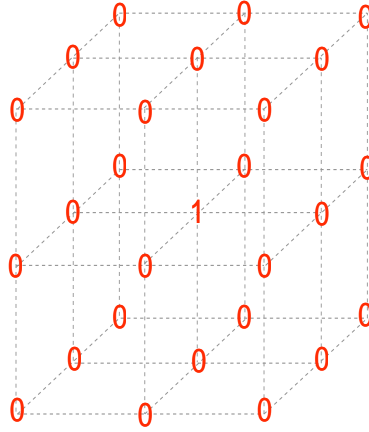


FIG. 4.14 – Représentation matricielle de l’injection directe pour la restriction. Le noeud central est un élément de la grille grossière. La totalité des noeuds sont éléments de la grille fine.

Si le noeud 3 est également sur le conducteur à une distance $h_3 < h$ du noeud 0, l’expression (4.34) devient :

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{h_3}{h_3 + h} \xi_1 + \frac{h_2}{h_2 + h} \xi_4 \right] \quad (4.35)$$

Tous les noeuds du plan peuvent ainsi être calculés. Les plans intermédiaires de la grille fine s’obtiennent enfin par simple interpolation entre deux plans reconstitués par la méthode précédemment décrite.

C’est cet algorithme qu’utilise TOUTATIS pour le cycle présenté à la section 4.3.3.2.4. La section 4.3.5 détaille un raffinement à l’aide d’une deuxième grille pour une meilleure description de la distribution de charges. Cette deuxième grille, sans conducteur encapsulé, est calculée à l’aide de cycle en V (section 4.3.3.2.1). Pour ce cycle, le prolongateur utilise les mêmes principes. Les relations du type (4.34) et (4.35) sont simplifiées puisqu’il n’y a pas de discontinuité du potentiel dans la grille. Pour le restricteur, il existe un opérateur plus efficace que l’injection directe que l’on trouve dans la littérature [7]. Pour le représenter, utilisons un formalisme matriciel. Etant en trois dimensions, la matrice est $3 \times 3 \times 3$. Pour fixer les idées, la représentation de l’injection directe utilisée par le cycle (4.3.3.2.4) dans ce formalisme est décrite par la figure 4.14. Le restricteur utilisé pour le cycle en V est décrit par la figure 4.15.

Cette matrice appliquée au voisinage du noeud commun permet d’obtenir un même niveau de convergence en diminuant le nombre de cycles. Il est intéressant de noter, qu’à l’inverse du restricteur du cycle (4.3.3.2.4), celui-ci fait intervenir les noeuds voisins de la grille fine. La

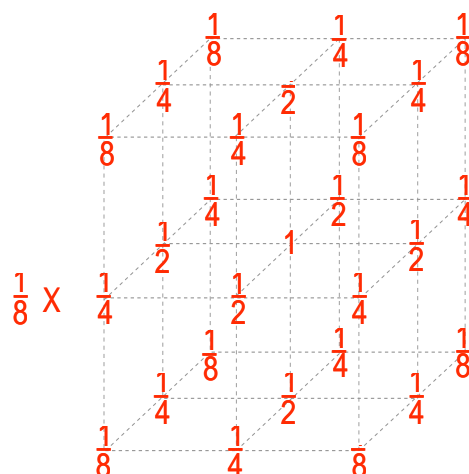


FIG. 4.15 – Représentation matricielle du restricteur du cycle en V.

restriction du cycle (4.3.3.2.4) pourrait probablement être améliorée en établissant des matrices plus complexes fonctions des valeurs $h_i < h$. Ce travail reste à effectuer.

4.3.4 La convergence

Les sections précédentes mentionnent à maintes reprises que le processus de relaxation doit être répété jusqu'à obtenir une réduction suffisante du résidu. Cela implique de définir un ou plusieurs critères pour estimer la qualité de la solution obtenue après chaque cycle. Il est également impératif, pour la robustesse du schéma numérique, de tester la convergence du processus pendant la relaxation.

4.3.4.1 Estimation de la convergence

Dans les cycles multigrille, la géométrie du RFQ doit être discrétisée sur toutes les grilles, de la plus fine à la plus grossière. La qualité des opérateurs de prolongation et/ou de restriction peut induire un mauvais transfert de l'information entre les niveaux. Ceci devient particulièrement critique lorsque la géométrie de cette structure devient complexe (extrémité avec plaque, gap de couplage). Les niveaux "bas" des cycles multigrille peuvent s'avérer alors trop grossiers ou mal initialisés pour obtenir une bonne estimation de l'erreur du niveau supérieur. Il convient alors de retirer ce niveau du cycle pour ne pas compromettre la qualité du calcul quitte à réduire l'efficacité de la méthode. Il nous reste à définir une quantité qui nous servira "d'alarme anti

divergence”. Le code TOUTATIS utilise pour cela la norme du résidu :

$$\aleph = \sum \delta^2 \quad (4.36)$$

qui est la somme du carré du résidu de chaque noeud du réseau. Cette quantité doit diminuer si le processus converge. Dans le cas contraire, la grille la plus grossière est retirée du cycle quitte à ne relaxer, au final, que sur le maillage le plus fin.

4.3.4.2 Le critère de qualité

Lorsque la norme du résidu, \aleph , diminue, il faut introduire un autre critère qui servira à déterminer si la “solution” a été trouvée. La “solution” entre guillemets car LA solution n’est atteinte que lorsque $h \rightarrow 0$ ce qui est, bien sûr, irréalisable dans la pratique (i.e. $\aleph = 0$). Dans certains codes de calculs utilisant un cycle multigrille, les auteurs fixent une valeur minimale pour \aleph . Cela suppose que celle-ci comporte une marge de sécurité par rapport à un éventail de cas assez large⁸. Cette marge peut donc s’avérer pénalisante en temps de calcul. Un autre critère plus dynamique est d’appliquer l’opérateur Laplacien après chaque cycle et de stopper les calculs lorsque le nombre de particules trouvé correspond à celui imposé sur chaque noeud avec une tolérance. Sachant que cette distribution initiale de charges est elle-même entachée d’une erreur due au tirage ($N \pm \sqrt{N}$), la tolérance à appliquer est toute trouvée. Il suffit de permettre la même erreur pour chaque noeud. Le calcul est arrêté au cycle j lorsque pour chaque noeud i :

$$N_i - \sqrt{N_i} \leq N_i^j \leq N_i + \sqrt{N_i} \quad (4.37)$$

Pour les noeuds où le nombre de macro-particules est faible, l’approximation reste acceptable (plus ou moins une particule pour les noeuds n’en comportant pas, par exemple).

4.3.5 Le maillage adaptatif

Lorsque le paquet de particules a une extension longitudinale faible par rapport à $\beta\lambda$, la résolution de la grille, pour décrire la distribution, devient pauvre (voir section 4.3.2.1.2). Cette dégradation peut également intervenir en transverse lorsque la section du faisceau est petite devant le rayon de gorge moyen des pôles (i.e. R_0). Une solution attrayante consiste à utiliser une autre grille encapsulée dans la grille principale. Cette seconde grille a des dimensions fonctions des dimensions du paquet dans les trois directions⁹. La figure 4.16 illustre les géométries respectives des grilles.

La méthode se décompose en plusieurs étapes. La grille principale est tout d’abord calculée indépendamment du second maillage. Une fois le critère de convergence atteint, le maillage adaptatif est initialisé par interpolation dans la grille principale. Comme pour la grille principale,

⁸Nombre de macro-particules, par exemple.

⁹Ce sont les dimensions R.M.S. qui sont utilisées afin de s’affranchir de toute fluctuation statistique. Les limites sont fixées à $3,5 Z_{rms}$ et $4 X_{rms}$ pour les demi-tailles du maillage dans chaque direction (pour le transverse, c’est la plus grande des valeurs, X_{rms} et Y_{rms} , qui est choisie).

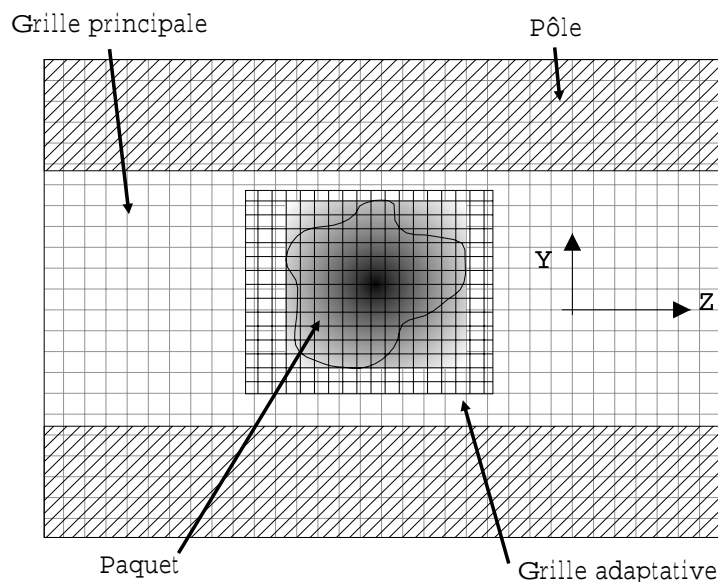


FIG. 4.16 – Schéma en coupe montrant le maillage adaptatif encapsulé dans le maillage principal.

cette initialisation permet d'atteindre la convergence plus rapidement. Les charges ayant été discrétisées initialement aux noeuds du réseau, le processus de relaxation est enclenché à l'aide de cycles en V. Ce cycle s'avère plus efficace dans cette structure sans conducteur et ayant le potentiel imposé sur les faces transverses. Pour les faces longitudinales, les conditions aux limites sont identiques à la grille principale tant que $3,5 \times Z_{rms} > 60\% \times L_c$, avec L_c la longueur de la cellule. La quantité Z_{rms} est définie par la relation :

$$Z_{rms} = \sqrt{(z - z_c)^2 - (\bar{x} - \bar{x})^2} \quad (4.38)$$

où z_c est le centroïde du faisceau et \bar{x} la moyenne de la quantité x sur la distribution. Lorsque cette condition n'est plus vérifiée, une condition de Dirichlet est imposée sur ces faces (potentiel donné par la grande grille). Cette valeur de 3,5 est un compromis entre la volonté de ne pas appauvrir la résolution du réseau sur la distribution et de ne pas sensiblement influencer la solution finale avec la condition Dirichlet. Une autre méthode aurait pu consister en une imbrication des deux grilles pendant le processus de calcul de la principale, ces dernières communiquant leur solution intermédiaire entre chaque cycle. Ces communications rendraient cette méthode plus lente et convergeraient probablement vers la même solution tant que la valeur de 3,5 n'est pas exagérément diminuée.

4.3.6 Test avec une distribution cylindrique gaussienne

L'usage, lors de l'écriture d'un programme qui résout l'équation de Poisson, est de le tester avec une distribution de référence. C'est ce que nous avons fait avec une distribution gaussienne

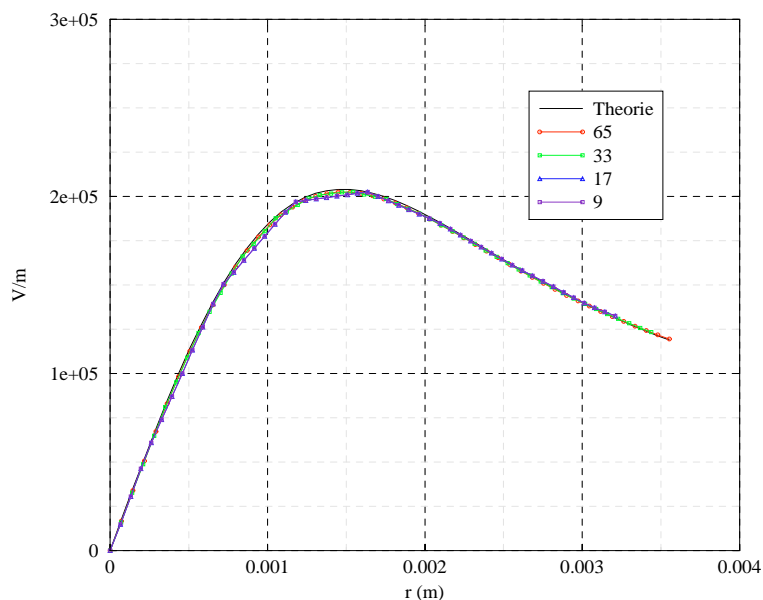


FIG. 4.17 – Différents profils de champ électrique radial pour différentes densités de grilles adaptatives par rapport au profil théorique.

cylindrique, définie par le relation :

$$\rho(r) = Q \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.39)$$

avec :

$$Q = \frac{-I}{2\pi\sigma^2\varepsilon_0\beta c} \quad (4.40)$$

où I est le courant (100 mA), σ l'écart-type de la gaussienne (0,934 mm), c la vitesse de la lumière, β le facteur relativiste (0,014229 pour des protons de 95 keV), ε_0 la permittivité du vide. $\rho(r)$ est homogène à une densité volumique de charges divisée par ε_0 . Le champ produit par cette distribution de charges est :

$$E_r = -Q\sigma^2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)}{r} \quad (4.41)$$

Les figures 4.17 et 4.18 montrent le profil du champ électrique radial prévu par la théorie (en noir) et les profils obtenus pour différentes finesses de grilles adaptatives (65 signifie qu'il y a $65 \times 65 \times 65$ noeuds dans la grille la plus fine). L'écart entre la valeur maximum théorique et celle donnée par les cas 33 et 65 est inférieur à 0.7%.

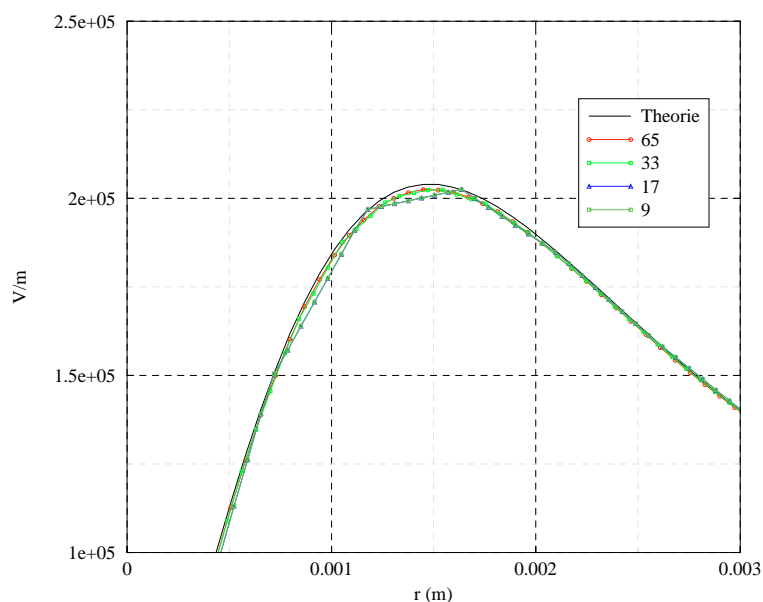


FIG. 4.18 – Zoom sur les valeurs maximums.

4.4 La gestion des pertes

4.4.1 Les pertes transverses

Le critère est simple. Une particule est déclarée perdue lorsque sa trajectoire rentre en contact avec les pôles. Il faut donc tenir compte de la géométrie des pôles à chaque pas de la trajectoire de chaque particule. Pour ne pas alourdir inutilement le traitement, et donc optimiser le temps de calcul, la prise en compte de la géométrie des pôles, pour une particule donnée, ne s'effectue que si cette particule est en dehors du carré de coté égal à $2a$.

4.4.2 Les particules décrochées en phase

Lorsque des particules ont une vitesse suffisamment éloignée de la vitesse synchrone, la fenêtre de largeur $\beta\lambda$ centrée sur le centroïde n'est plus assez grande pour contenir toutes les particules. Lorsqu'une particule décrochée est en avance, son transport est suspendu pendant une période RF, le temps que le paquet devienne le paquet situé en avant. Le devenir de cette particule, lorsqu'elle passait dans le paquet suivant, peut alors être estimé. Ce cas est assez rare. Le cas de la particule en retard est plus fréquent. Le traitement est du même type. TOUTATIS stockant les champs pendant une période pour l'initialisation des calculs numériques, le transport d'une particule en retard dans le paquet suivant a été implémenté.

4.5 Conclusion du chapitre

Le code de transport TOUTATIS a été écrit dans le but d'obtenir une meilleure précision en minimisant autant que possible les approximations pour la simulation de la dynamique de faisceau intense dans les RFQ. Ce chapitre décrit les méthodes numériques qui ont été utilisées pour la mise au point de ce code de calcul. Les principes fondamentaux (Différences Finies, multigrille) sont présentés. Une stratégie pour la discrétisation de la géométrie des électrodes du RFQ adaptée est développée. Plusieurs raffinements tel un maillage adaptatif, le stockage des solutions intermédiaires sont utilisés pour améliorer les performances du code.

Contrairement à PARMTEQM, ce code ne fait pas l'hypothèse de paraxialité, calcule les forces self-consistantes du faisceau pour chaque pas de temps, le potentiel dû à la géométrie est calculé numériquement en tenant compte de la forme exacte des pôles.

Bibliographie

- [1] Communication privée de J.-M. Lagniel.
- [2] Lloyd Young, “Segmented Resonant Coupled Radio Frequency Quadrupole (RFQ)”, Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference, Washington, D.C..
- [3] Romuald Duperrier et al., “Study of Coupling Gap Effects on Beam Dynamics in Favor of RFQ I.P.H.I. Design”, CEA/DSM/DAPNIA/SEA/IPHI 2000/07.
- [4] R. Duperrier et al. “Field Description in an RFQ and its Effect on Beam Dynamics”, M04029, Proceedings Linac 98.
- [5] E. Durand, “Electrostatique, Tome III, Méthodes de Calcul, Diélectriques”, Masson & C^{ie}, Editeurs, 1966.
- [6] B. Bondarev, A. Durkin, S.V. Vinogradov, “Multilevel Codes RFQ.3L For RFQ Designing”, IFMIF Accelerator Team Paris Meeting, CDE Workshop, 26-30 mai 1997.
- [7] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, “Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing”, Seconde édition, Cambridge University Press, 1992.
- [8] Marcus S. Day, Philip Colella, Micheal J. Lijewski, Charles A. Rendleman, “Embedded Boundary Algorithms for Solving the Poisson Equation on Complex Domains”, Lawrence Berkeley National Laboratory, Office of Energy Research, Applied Mathematical Sciences Program.
- [9] L. Adams, “A multigrid algorithm for immersed interface problems”, Seventh Copper Mountain Conference on Multigrids Methods, NASA Conference Publication 3339, NASA, p. 1-14 (1996).
- [10] P. Pierini, “A multigrid approach to modelling a high current superconducting linac for waste transmutation”, conférence ICAP 1998, 14-18 septembre, Monterey.

Chapitre 5

Validités et comparaisons des méthodes

Nous avons vu, dans le chapitre 3, les principales hypothèses et approximations utilisées par PARMTEQM pour la simulation du transport dans les RFQ. Dans ce chapitre, nous allons nous efforcer de quantifier les erreurs induites par ces approximations et de relativiser leur importance. Nous le ferons soit à l'aide de modifications apportées au code PARMTEQM lui-même, soit avec des simulations utilisant le code TOUTATIS et le module de calcul électrostatique TOSCA [1].

5.1 Le calcul des champs extérieurs

Le chapitre 3 présente les différents développements utilisés pour chaque portion du RFQ dans PARMTEQM. Les sections suivantes traitent de la qualité de ces développements pour décrire le potentiel.

5.1.1 Le corps du RFQ

Le code PARMTEQM s'appuie sur le développement multipolaire à huit termes détaillé dans la section 2.3 [2,3]. L'annexe A présente plusieurs méthodes pour calculer les coefficients des séries. Nous allons, dans cette section, essayer de délimiter la validité de ce développement dans la zone utile en utilisant deux méthodes : la projection et le fit de la géométrie des pôles.

5.1.1.1 Calcul d'une référence avec le module TOSCA de Vector Fields

Pour utiliser la méthode par projection, il nous faut disposer d'un potentiel de référence. Le potentiel électrostatique d'une cellule test a donc été calculée avec le code TOSCA¹. La figure 5.1 représente la distribution de potentiel obtenue pour une cellule ayant les caractéristiques résumées dans le tableau 5.1.

Cette simulation servira également de référence pour estimer la qualité du développement multipolaire obtenu par les différentes méthodes. La section traitant du champ crête détaillera davantage les techniques qui ont été utilisées pour obtenir cette simulation.

¹Rappelons que, pour PARMTEQM, ces calculs ont été effectués avec CHARGE 3D [3].

Paramètres	Valeur ou type
Rayon de courbure du pôle ρ_t/R_0	0.89
Longueur L_c/R_0	11
Facteur de modulation m	2
Profil longitudinal	sinusoïdal
Minimum d'ouverture, a	$2/(1+m)$

TAB. 5.1 – Caractéristiques de la cellule test.

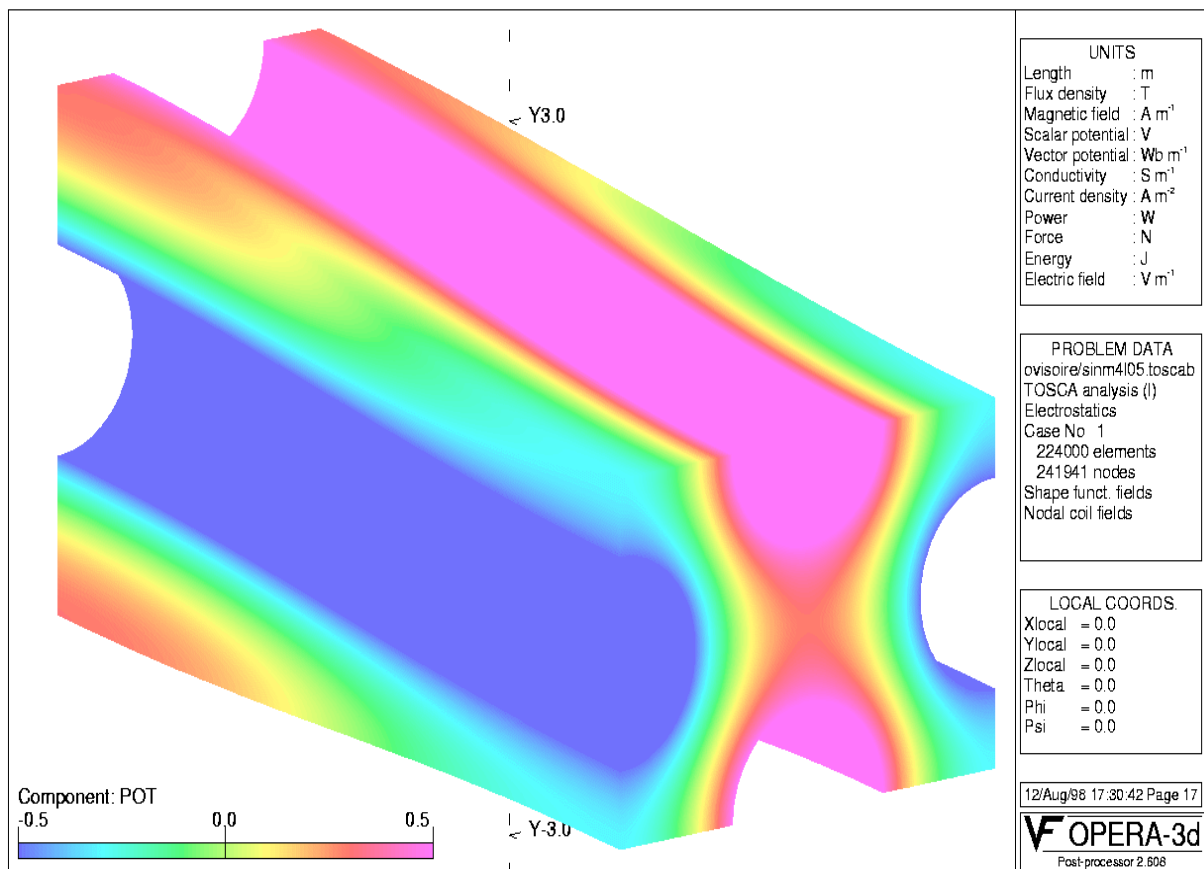


FIG. 5.1 – Répartition du potentiel électrostatique dans la cellule test calculée par TOSCA.

A_{01}	A_{03}	A_{10}	A_{12}	A_{21}	A_{23}	A_{30}	A_{32}
0.9267	0.00112	0.6006	307.6125	-0.8337	-30753.6794	-0.0109	-7.0949

TAB. 5.2 – Coefficients obtenus par projection.

5.1.1.2 La projection

Pour utiliser cette méthode, nous sommes contraints de limiter le domaine d'intégration à la surface d'une boîte cylindrique de rayon a et de longueur L_c . Compte tenu de la symétrie quadripolaire, nous pouvons même nous limiter à un quart de cette surface. Rappelons les formules utilisées pour ce calcul :

$$A_{0m} = \frac{16}{\pi V a^{2m} L_c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{L_c} U(a, \theta, z) \cdot \cos(2m\theta) d\theta dz \quad (5.1)$$

$$A_{n0} = \frac{8}{\pi V I_0(nka) L_c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{L_c} U(a, \theta, z) \cdot \cos(nkz) d\theta dz \quad (5.2)$$

$$A_{nm} = \frac{16}{\pi V I_{2m}(nka) L_c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{L_c} U(a, \theta, z) \cdot \cos(2m\theta) \cdot \cos(nkz) d\theta dz \quad (5.3)$$

où U est la référence numérique. Les résultats obtenus pour chaque coefficient sont résumés dans le tableau 5.2. Afin de relativiser les différents poids de chaque composante, le tableau 5.3 reprend ces valeurs mais chacune étant multipliée par sa fonction radiale associée en R_0 , le rayon moyen (fonction de Bessel ou bien r^n). Il apparaît que la convergence est rapide, les termes d'ordre élevé contribuant peu et ceci est d'autant plus vrai que l'on s'approche de l'axe.

La figure 5.2 montre la différence relative entre le potentiel calculé par TOSCA et la série obtenue par projection. L'échelle est logarithmique pour pouvoir représenter toute la zone utile. Les deux lignes à 100 % correspondent au bruit numérique sur les équipotentielles "zéro". Le cercle noir délimite la boîte cylindrique utilisée pour l'intégration. Au regard de ces cartes, il apparaît clairement que la solution de très bonne qualité à l'intérieur du cylindre ne peut être extrapolée en-dehors de celui-ci (<1% à l'intérieur, dépasse les 10% à l'extérieur). De plus, si l'on désire obtenir une précision inférieure au % pour toute la zone utile, il nous faut admettre que ce développement obtenu par projection est insuffisant, fait confirmé par Ken Crandall lui-même lors d'une entrevue à Saclay. Ce développement est, par contre, tout à fait satisfaisant tant que les particules demeurent dans cette boîte cylindrique.

5.1.1.3 Le fit de la géométrie

Les quadruplets de valeurs de type (x_i, y_i, z_i, U_i) nécessaires pour utiliser cette méthode sont pris sur la surface définie par la géométrie des lames. Les valeurs U_i sont alors évidentes. Les calculs sont effectués avec le logiciel Mathematica. Les résultats obtenus pour chaque coefficient sont résumés dans le tableau 5.4. Le tableau 5.5 reprend ces valeurs multipliées par leurs fonctions radiales associées en R_0 . Il est intéressant de noter que la composante octupolaire a été multipliée par 10. Ceci aura un impact direct sur la distribution du faisceau : le profil transverse

Coefficient \times fonction en R_0	Valeurs
$A_{01}R_0^2$	0.9267
$A_{03}R_0^6$	0.0012
$A_{10}I_0(kR_0)$	0.6129
$A_{12}I_4(kR_0)$	0.0054
$A_{21}I_6(2kR_0)$	-0.0349
$A_{23}I_6(2kR_0)$	-0.0235
$A_{30}I_0(3kR_0)$	-0.0130
$A_{32}I_4(3kR_0)$	-0.0103

TAB. 5.3 – Coefficients obtenus par projection pondérés par leur fonction radiale associée en R_0 .

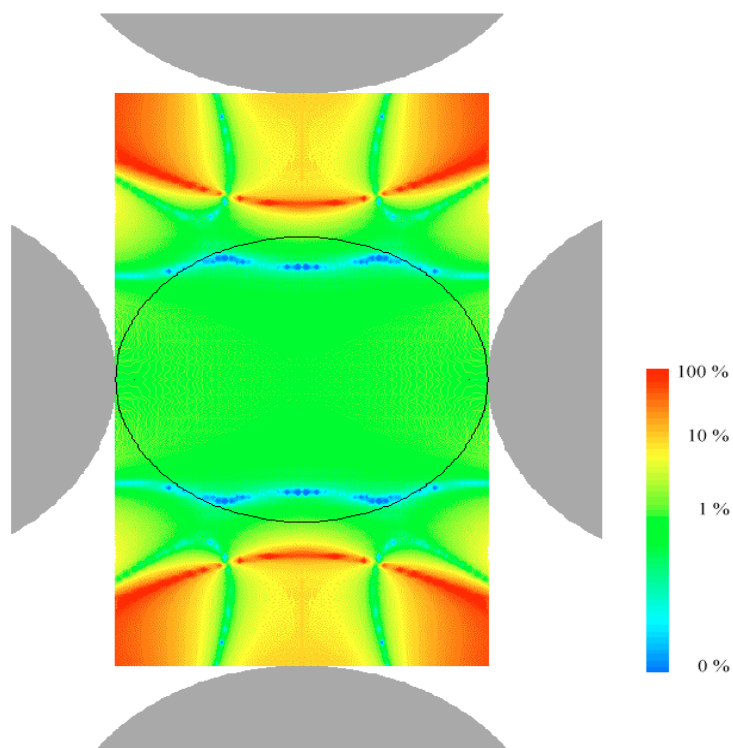


FIG. 5.2 – Différence relative entre le potentiel numérique et la série obtenue par projection avec une échelle logarithmique.

A_{01}	A_{03}	A_{10}	A_{12}	A_{21}	A_{23}	A_{30}	A_{32}
0.9587	0.0211	0.6064	3489.5500	-0.5960	3493.3200	-0.0093	-4.1060

TAB. 5.4 – Coefficients obtenus par fit de la géométrie.

Coefficient \times fonction en R_0	Valeurs
$A_{01}R_0^2$	0.9587
$A_{03}R_0^6$	0.0211
$A_{10}I_0(kR_0)$	0.6188
$A_{12}I_4(kR_0)$	0.0613
$A_{21}I_6(2kR_0)$	-0.0249
$A_{23}I_6(2kR_0)$	0.0027
$A_{30}I_0(3kR_0)$	-0.0111
$A_{32}I_4(3kR_0)$	-0.0059

TAB. 5.5 – Coefficients obtenus par fit pondérés par leur fonction radiale associée en R_0 .

ressemblant de plus en plus à un losange. Ce profil particulier induit une incertitude sur les calculs de charge d'espace de PARMTEQM (sous-programme SCHEFF) qui supposent un faisceau à symétrie de révolution.

La figure 5.4 montre les différences relatives entre le potentiel calculé par TOSCA et la série obtenue par fit de la géométrie. La précision est de quelques % dans toute la zone utile. Elle dépasse, cependant, le pour cent dans la zone centrale. Comme on pouvait s'y attendre, les multipôles dominent dès que l'on s'éloigne de l'axe.

5.1.1.4 Conséquence sur la dynamique des particules

Il nous est impossible de tirer des conclusions valables, pour tout RFQ, sur les conséquences pour la dynamique des particules dans l'utilisation de l'une ou l'autre de ces méthodes. Nous allons juste noter des différences sur un RFQ particulier et tenter de donner des tendances. Le RFQ utilisé est une version modifiée du RFQ2 du CERN. La modification réside dans l'allongement de la structure, l'énergie finale ayant été portée à 5 MeV au lieu des 750 keV initiaux. Le tableau 5.6 résume les principaux paramètres de ce RFQ. Le transport est calculé avec TOUTATIS pour chaque cas. Le potentiel extérieur est soit calculé soit issu du résultat des développements.

Les tableaux 5.7 et 5.8, rassemblant les émittances r.m.s. normalisées pour chaque plan et transmission en sortie de RFQ pour chaque méthode, montre que le fit ne peut permettre une estimation raisonnable des champs dans la structure. L'erreur moyenne est de l'ordre de 10% pour le plan transverse. La méthode de projection donne un assez bon accord en général. Cependant, il faut noter une variation de plus de 30 % pour la prévision des pertes pour cette méthode.

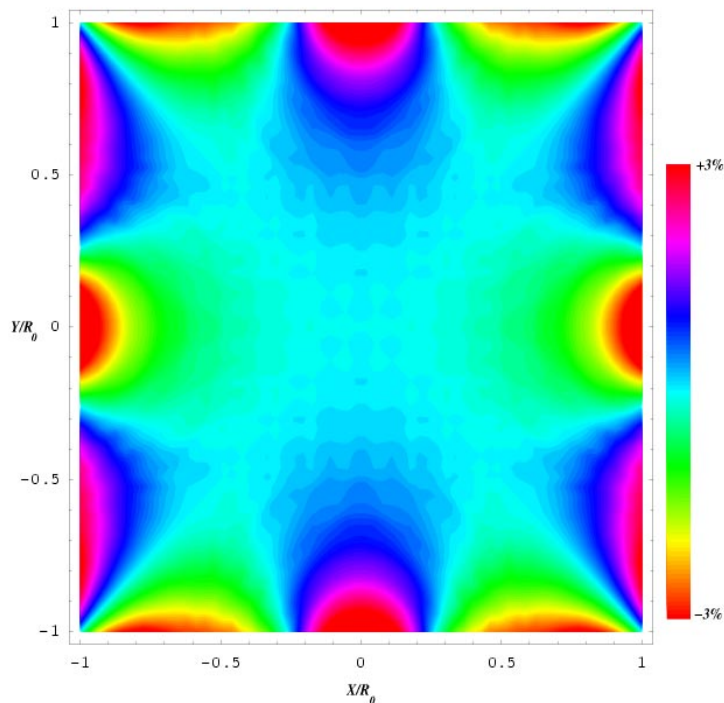


FIG. 5.3 – Cartographie de l'erreur obtenue par fit dans le plan transverse au centre de la cellule (échelle linéaire).

Paramètres	Valeurs ou type
distribution	4D Water Bag
$\varepsilon_{r.m.s.,norm.}$ en entrée	$0.4 \pi .\text{mm.mrad}$
courant d'entrée	225 mA
particules	protons
énergie cinétique en entrée	90 keV
énergie cinétique en sortie	5 MeV
fréquence	202.56 MHz
tension constante	178 kV
R_0 constant	8.203 mm
ρ_t/R_0 constant	0.85
m maximum	2.05

TAB. 5.6 – Principaux paramètres du RFQ simulé.

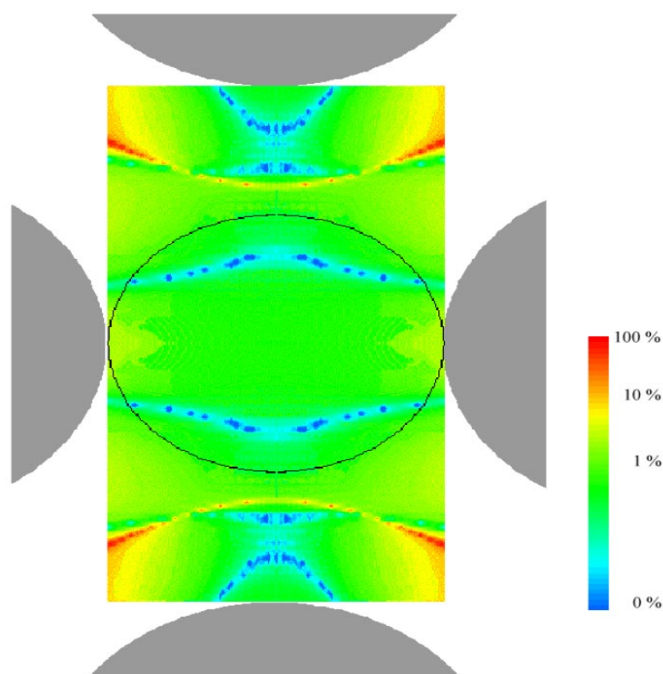


FIG. 5.4 – Différence relative entre le potentiel numérique et la série obtenue par fit (échelle logarithmique).

	$\tilde{\epsilon}_{x,n.}(\pi.\text{mm.mrad})$	$\tilde{\epsilon}_{y,n.}(\pi.\text{mm.mrad})$	$\tilde{\epsilon}_{z,n.}(\text{deg.MeV})$
Champ réel	0.584	0.597	0.202
Projection	0.598	0.612	0.206
Fit	0.518	0.540	0.196

TAB. 5.7 – Emittances r.m.s. normalisées pour chaque plan en sortie de RFQ suivant la méthode.

	Rendement	Transmission	Variation du Rendement	Variation en pertes totales
Champ réel	96.2 %	97.9 %	0. %	0. %
Projection	95.4 %	97.3 %	- 0.9%	+ 31.7%
Fit	90.9 %	95.0 %	- 5.5 %	+ 139.4 %

TAB. 5.8 – Rendement et transmission pour chaque méthode. Le premier cas est la référence pour le calcul des variations. Le rendement est la transmission en ne tenant compte que des particules accélérées.

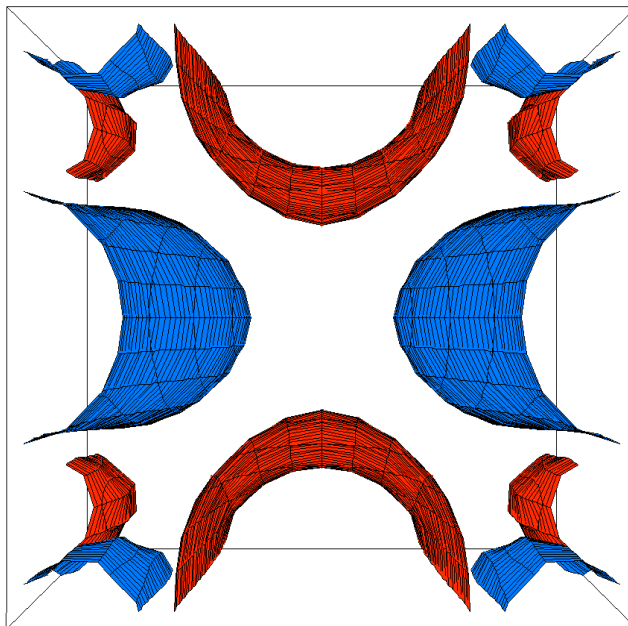


FIG. 5.5 – Surfaces équipotentielles $\pm V/2$ obtenues par fit de la géométrie.

5.1.1.5 Conclusion

La projection est la méthode qui permet d'obtenir la plus grande précision dans la zone occupée par le coeur du faisceau. Le développement obtenu s'avère par contre imprécis pour décrire le potentiel appliqué aux particules constituant le halo. Selon les tolérances que l'on veut bien se donner, cette méthode peut être utilisée ou non. Rappelons que rien ne garantit que les écarts soient identiques pour un autre RFQ. Pour le fit de la géométrie, bien que donnant un meilleur résultat dans la zone du halo, il demeure de qualité insuffisante vis-à-vis des tolérances minima pour les accélérateurs linéaires (<1% d'erreur maximum).

L'impossibilité de simuler entièrement la zone utile du RFQ avec une bonne précision découle de l'utilisation des coordonnées cylindriques. Les quatre pôles ne sont pas asymptotiques pour obtenir une bonne tenue en tension de la structure [2,4], leur rayon de courbure transverse est maintenu constant le long de la cellule alors que la distance axe / pôle peut varier du simple au double. Les harmoniques cylindriques ne possèdent pas ces propriétés. L'introduction de multipôles d'ordres plus élevés fait apparaître d'autres équipotentielles $\pm V/2$ induisant des géométries telles que les pôles ne peuvent pas être usinés (figure 5.5).

Pour s'affranchir de ces imperfections par une voie analytique, tout en conservant les propriétés géométriques qui sont imposées aux pôles, il faut trouver un système de coordonnées avec des développements harmoniques assurant une périodicité en longitudinal et conservant la courbure transverse des surfaces équipotentielles. Ceci implique qu'il n'y ait pas de couplage transverse/longitudinal dans ces harmoniques. Or, dès que l'on cherche à isoler des harmoniques périodiques dans une direction lors de la résolution de l'équation de Laplace, ce couplage apparaît presque systématiquement. Quand bien même, en admettant que de telles harmoniques

existent, l'introduction de discontinuité dans la structure (gaps de couplages radiofréquences, ...) implique que seule une simulation numérique sera satisfaisante. L'utilisation de ces simulations numériques est aujourd'hui rendu possible grâce au progrès obtenu sur les performances des calculateurs.

5.1.2 La section d'adaptation radiale en entrée

Le chapitre 2 a montré la nécessité d'introduire une section d'adaptation radiale en entrée de RFQ. Dans le chapitre 3, nous avons détaillé la formulation utilisée dans PARMTEQM pour décrire cette portion du RFQ. Nous allons maintenant quantifier les performances que l'on peut attendre de cette formulation tout en en testant d'autres.

5.1.2.1 Méthode pour optimiser la section

Rappelons brièvement la méthode utilisée pour optimiser cette section d'adaptation. Le concepteur de RFQ doit, tout d'abord, trouver les paramètres de Twiss² qui permettent d'obtenir la meilleure adaptation pour le canal FD (Focalisant Défocalisant) qui occupe la première partie du RFQ. Ce canal FD est décrit, avec une très bonne précision, par la formule suivante :

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \frac{V}{2} \left[A_{01} \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^2 \cos(2\theta) + A_{03} \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^6 \cos(6\theta) \right] \sin(\omega_{rf}t + \varphi_{rf}) \quad (5.4)$$

où R_0 est l'ouverture, V la différence de potentiel inter lames, A_{01} et A_{03} , respectivement, le coefficient quadripolaire et dodécapolaire. Ces coefficients ne dépendent que de ρ_t/R_0 où ρ_t est le rayon de courbure transverse du pôle.

Une fois le canal FD défini, les paramètres de Twiss adaptés à ce canal sont déterminés à l'aide d'un processus de minimisation. Le concepteur fait ensuite l'hypothèse que le transport dans cette section du RFQ est réversible. Ceci est équivalent à dire que les variations d'émittance sont suffisamment petites pour être négligées. Le faisceau adapté au canal FD est alors transporté de la fin de la section d'entrée vers son début. Cette étape est répétée pour différentes phases radiofréquences à l'entrée du canal FD. Les caractéristiques du faisceau, obtenues en entrée de RFQ pour ces différentes phases, doivent alors être très proches pour être considérées indépendantes du temps. Les paramètres de Twiss $\langle \alpha \rangle$ et $\langle \beta \rangle$ sont alors pris comme références d'entrée pour le calcul de l'acceptance du linac³.

Les questions qui peuvent maintenant être posées sont : quelle géométrie des lames faut-il imposer, et sur quelle longueur, pour obtenir la meilleure adaptation possible ? Ces questions

²Ces paramètres sont α, β, γ . Ils vérifient les relations : $X = \sqrt{\beta\varepsilon}$, $X' = \sqrt{\gamma\varepsilon}$, $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$. X est la taille transverse du faisceau, X' sa divergence et ε son émittance géométrique.

³ $\langle \rangle$ signifie qu'une moyenne est effectuée par rapport aux phases radiofréquences.

sous-entendent que l'on dispose d'un critère de qualité. Dans cette étude, nous utiliserons le facteur d'efficacité F_e qui est la valeur maximale du facteur de désadaptation, $F_{des}(z, \varphi_{rf})$, fonction de la position longitudinale z et de la phase, φ_{rf} dans le canal. Cette fonction est définie par la formule :

$$F_{des}(z, \varphi_{rf}) = \frac{\widehat{X}_{des}(z, \varphi_{rf})}{\widehat{X}_{ada}(z, \varphi_{rf})} - 1 \quad (5.5)$$

où \widehat{X}_{ada} est l'enveloppe du faisceau adapté qui a été calculée lors de la première étape de l'optimisation, \widehat{X}_{des} est l'enveloppe faisceau issue du transport complet partant de l'entrée du RFQ avec les caractéristiques faisceau obtenues par moyenne des transports inverses. Des valeurs de F_e de quelques % indiquent une section d'entrée performante et probablement que toute valeur en dessous d'environ 10 % est acceptable. En dessous de 1%, cela tient du raffinement. La figure 5.6 résume les différentes étapes de l'optimisation de la section d'entrée.

5.1.2.2 Les principales formulations

Plusieurs formulations ont été proposées pour définir le potentiel de la section d'entrée [5,6,7]. Rappelons que [7] (F2) est la référence pour PARMTEQM. Dans cette étude, nous considérerons les séries suivantes :

$$\begin{aligned} F1 : \Psi(\rho, \theta, z) &= \frac{V}{2} \frac{z}{L_{sar}} \sum_{m=1,3} \left[A_{0m} \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^{2m} \cos(2m\theta) \right] \\ F2 : \Psi(\rho, \theta, z) &= \frac{V}{2} \sum_{m=1,3} A_m \left[I_{2m}(k\rho) \sin(kz) + 3^{-(2m+1)} I_{2m}(3k\rho) \sin(3kz) \right] \cos(2m\theta) \\ F3 : \Psi(\rho, \theta, z) &= \frac{V}{2} \sum_{m=1,3} \sum_{n=0,N} \left[A_{0m} \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^{2n+m} \cos(m\theta) G_n(z) \right] \\ F4 : \Psi(\rho, \theta, z) &= \frac{V}{2} A_1 I_2(k\rho) \cos(2\theta) \sin(kz) \\ F5 : \Psi(\rho, \theta, z) &= \frac{V}{2} \frac{z}{L_{sar}} \left[A_{01} \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^2 \cos(2\theta) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

où :

$$G_n(z) = (-1)^n \frac{2!}{4^n n! (n+2)!} \frac{\partial^{2n} G_0(z)}{\partial z^{2n}} \quad (5.7)$$

avec :

$$G_0(z) = \frac{\exp\left(-\alpha_q \left(\frac{z-L_{sar}}{L_{sar}}\right)^{2m_q}\right) - \exp\left(-\alpha_q \left(\frac{z+L_{sar}}{L_{sar}}\right)^{2m_q}\right)}{1 - \exp(-2^{2m_q} \alpha_q)} \quad (5.8)$$

et :

$$k = \frac{\pi}{2L_{sar}} \quad (5.9)$$

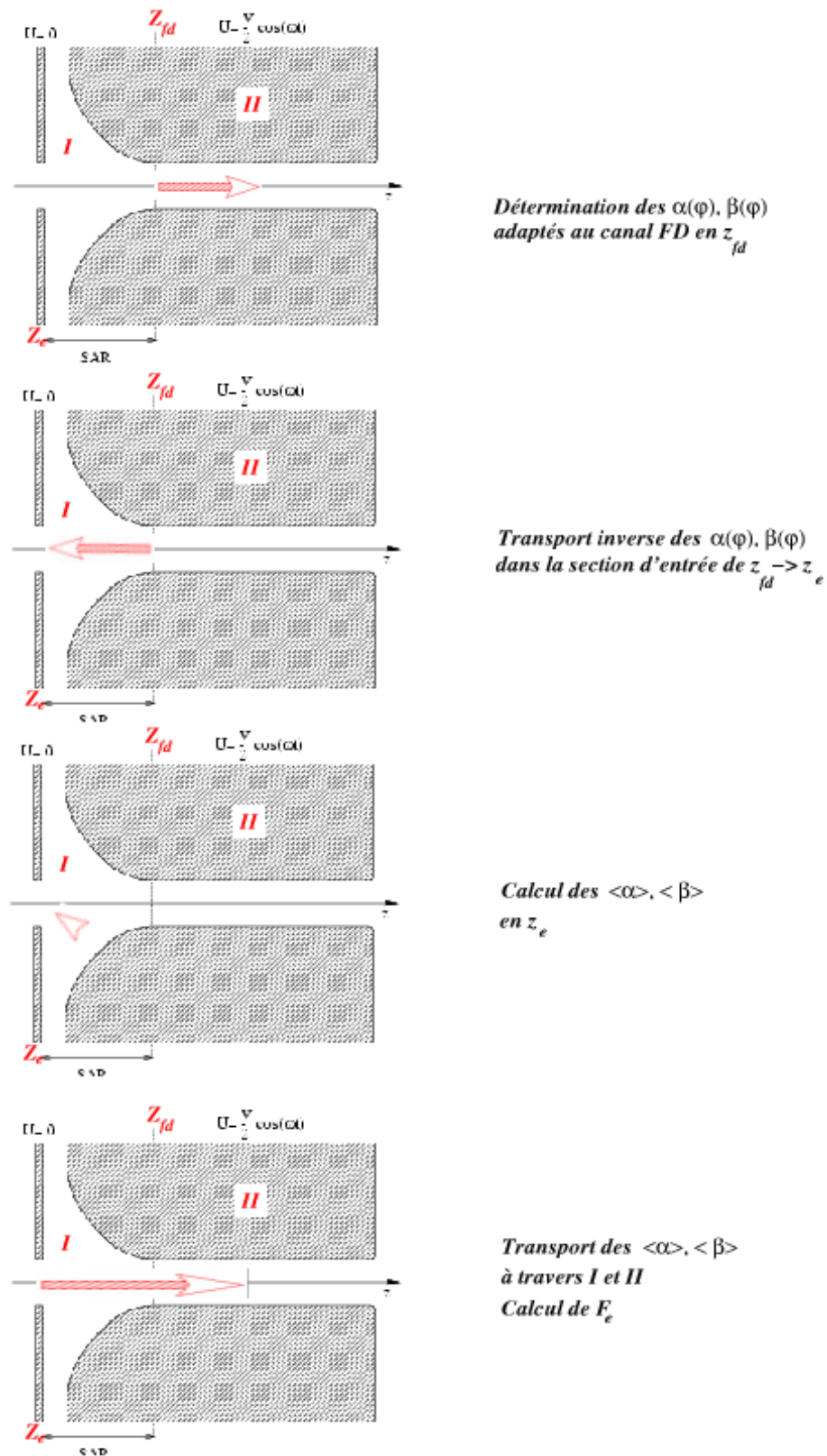


FIG. 5.6 – Schéma décrivant les différentes étapes de l'optimisation de la section d'entrée.

où L_{sar} est la longueur de la section d'adaptation radiale. Toutes ces séries font partie des solutions de l'équation Laplace (2.4) du chapitre 2. Les formulations $F2$, $F3$, $F4$ correspondent, respectivement, aux références [7], [6] et [5]. Pour chaque développement, les différents jeux de coefficients sont déterminés pour assurer la meilleure continuité avec la formule (5.4), exceptée la formulation $F4$ qui considère que le canal FD est décrit par un quadripôle pur (i.e. $A_{01} = 1$) [5]. Pour $F3$, α_q , m_q et L_{sar} peuvent être ajustés.

Avant d'entamer des études comparatives, notons les avantages et désavantages de chaque formulation :

- $F1$ donne la meilleure continuité avec les composantes transverses du champ issues de l'équation (5.4). La continuité dans la direction longitudinale est mauvaise, la composante $\partial_z \Psi(\rho, \theta, z)$ ne s'annulant pas.
- $F2$ donne une bonne continuité avec les composantes transverses du champ, elle permet également d'obtenir une annulation de la composante longitudinale à l'approche du canal FD.
- $F3$ est très similaire à $F2$. La flexibilité est, cependant, plus grande sur les divers paramètres. L'un des avantages est que le gap entre la plaque d'extrémité du RFQ et la lame peut être contrôlé [6].
- $F4$ donne une connexion douce en ce qui concerne le longitudinal mais est très simpliste en ce qui concerne la continuité transverse.
- $F5$ est intéressante car elle va nous permettre de quantifier l'importance relative de la composante dodécapolaire par rapport à la composante quadripolaire (i.e. par rapport $F1$).

Les différents facteurs d'efficacité F_e , que l'on peut atteindre avec ces différentes formulations, en fonction de la longueur L_{sar} sont évalués dans la section suivante.

5.1.2.3 Calcul de F_e avec un code d'enveloppe

Dans cette étude, nous allons utiliser la méthode décrite à la section précédente et calculer le transport à l'aide d'un code enveloppe écrit en utilisant les fonctionnalités du logiciel Mathematica 3.0 (Runge -Kutta adaptatif). Les paramètres, pour le faisceau et le canal FD, sont décrits dans le tableau 5.9.

Le transport s'appuie sur les équations d'enveloppe de Frank J. Sacherer [8]. Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_z^2 \widehat{X} + \frac{4\langle x F_x \rangle}{\gamma m(\beta c)^2 \widehat{X}} - \frac{2K}{\widehat{X} + \widehat{Y}} - \frac{\varepsilon^2}{\widehat{X}^3} = 0 \\ \partial_z^2 \widehat{Y} + \frac{4\langle y F_y \rangle}{\gamma m(\beta c)^2 \widehat{Y}} - \frac{2K}{\widehat{X} + \widehat{Y}} - \frac{\varepsilon^2}{\widehat{Y}^3} = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

avec :

$$K = \frac{qI}{2\pi\varepsilon_0 m(\gamma\beta c)^3} \quad (5.11)$$

Paramètres	Valeurs ou type
distribution	uniforme
$\varepsilon_{tot.,norm.}$	1 π .mm.mrad
courant	100 mA
particules	protons
énergie cinétique	95 keV
fréquence	352 MHz
tension	101.4 kV
R_0	4.11 mm
ρ_t/R_0	0.89
A_{01}	0.9826
A_{03}	0.0197

TAB. 5.9 – Tableau rassemblant les principaux paramètres des simulations.

où I est le courant, q et m sont, respectivement, la charge et la masse de la particule, γ et β les facteurs relativistes du faisceau, ε_0 la permittivité du vide, c la vitesse de la lumière dans le vide. K est appelée *pervéance généralisée* du faisceau. Lors du transport, ε est gardé constant. L'expression $\langle xF_x \rangle$ signifie que la force extérieure est linéarisée en intégrant sur toute la distribution. Afin de simplifier l'intégration numérique de l'équation (5.10), les séries de Bessel présentes dans les expressions des forces sont tronquées au-delà de l'ordre six. L'intégration numérique pas-à-pas de (5.10) permet de récupérer des couples de points (z_i, \widehat{X}_i) décrivant l'évolution de l'enveloppe du faisceau le long de l'axe de propagation. Partant de conditions initiales raisonnables, mais différentes des conditions adaptées, cette enveloppe est composée de différents modes d'oscillations dont le mode principal que nous cherchons à isoler. Pour trouver les conditions initiales adaptées pour différentes phases radiofréquences, nous allons chercher à minimiser l'écart entre cette enveloppe et l'expression :

$$A + B \cos\left(\frac{2\pi z}{\beta\lambda_{rf}} + \varphi_{rf}\right) \quad (5.12)$$

où A est l'enveloppe moyenne du faisceau, B l'amplitude de la modulation de l'enveloppe due aux forces de focalisation de période spatiale $\beta\lambda_{rf}$. Nous faisons donc l'hypothèse que cette fonction monofréquence représente au mieux l'enveloppe que nous recherchons, la fréquence des battements d'enveloppe étant bien sûr celle des forces de focalisation. Nous cherchons donc les valeurs de A et B pour lesquelles la quantité :

$$\sum_i \left\{ \widehat{X}_i - \left[A + B \cos\left(\frac{2\pi z_i}{\beta\lambda_{rf}} + \varphi_{rf}\right) \right] \right\}^2 \quad (5.13)$$

est minimale. La procédure utilisée est détaillée dans l'annexe C. Pour chaque transport sur une distance de plusieurs périodes $\beta\lambda_{rf}$, de nouvelles valeurs de A et B sont calculées et prises

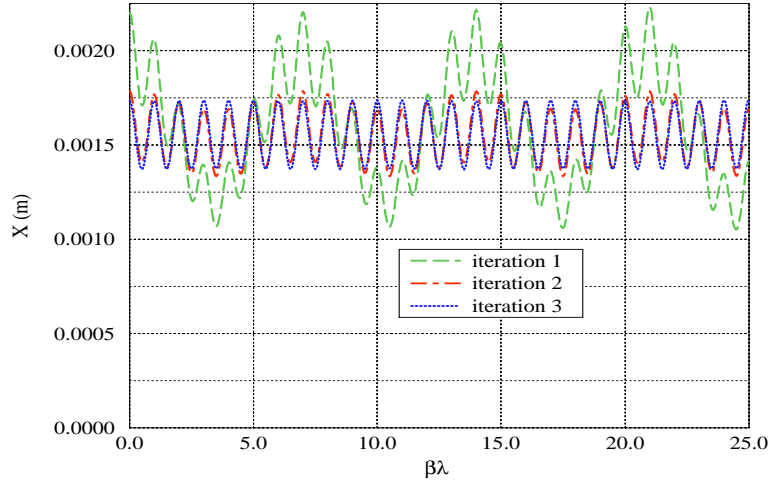


FIG. 5.7 – \widehat{X}_i pour les trois premiers transports avec minimisation par rapport à A et B .

comme valeurs initiales pour le transport suivant, soit :

$$\begin{cases} (\widehat{X}_0)_{j+1} &= (A)_j + (B)_j \cos\left(\frac{2\pi z_0}{\beta\lambda_{rf}} + \varphi_{rf}\right) \\ (\partial_z \widehat{X}_0)_{j+1} &= -(B)_j \frac{2\pi}{\beta\lambda_{rf}} \sin\left(\frac{2\pi z_0}{\beta\lambda_{rf}} + \varphi_{rf}\right) \\ (\widehat{Y}_0)_{j+1} &= (A)_j - (B)_j \cos\left(\frac{2\pi z_0}{\beta\lambda_{rf}} + \varphi_{rf}\right) \\ (\partial_z \widehat{Y}_0)_{j+1} &= (B)_j \frac{2\pi}{\beta\lambda_{rf}} \sin\left(\frac{2\pi z_0}{\beta\lambda_{rf}} + \varphi_{rf}\right) \end{cases} \quad (5.14)$$

où les quantités indicées j ont été calculées au j^{eme} transport pour obtenir les conditions initiales du $(j + 1)^{eme}$ transport. La convergence du processus est rapide. En moins de cinq transports, les valeurs de A et B ne varient plus que de quelques pour mille et sont telles que la quantité F_e est de quelques pour mille si nous prenons l'expression (5.12) pour $\widehat{X}_{ada}(z, \varphi_{rf})$ et $(\widehat{X}_i)_5$ pour $\widehat{X}_{des}(z, \varphi_{rf})$. La figure 5.7 montre l'évolution de l'enveloppe après trois transports.

Une fois les paramètres du faisceau pour le canal FD, obtenus, nous pouvons poursuivre le processus décrit dans la section 5.1.2.1. Nous obtenons alors différents F_e en fonction de la longueur de la section d'entrée pour chaque formulation (figure 5.8). Ces différents résultats suggèrent plusieurs commentaires :

- La figure 5.9 montre que la formulation ne prenant pas en compte la composante dodécapolaire et le fait que la composante quadripolaire n'est pas "pure" (i.e. $A_{01} \neq 1$), dégrade l'efficacité de la section.
- La figure 5.10 montre que ne prendre en compte que $A_{01} \neq 1$ n'est pas suffisant ; la composante dodécapolaire doit être incluse dans le développement utilisé.
- Sur la figure 5.11, il apparaît qu'une rampe linéaire des forces de focalisation donne une

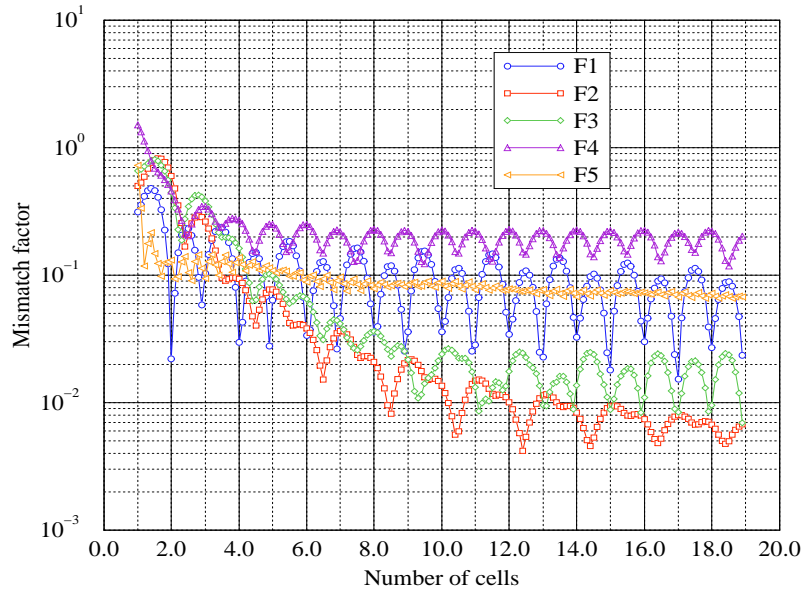


FIG. 5.8 – Facteur d’efficacité, F_e , pour des longueurs de 1 à 19 cellules pour les différentes formulations (1 cellule = $\beta\lambda/2$).

efficacité inférieure à celle obtenue avec une rampe de type sinusoïdale (F1 par rapport à F2 et F3).

- Six cellules pour la longueur semble être un bon compromis. Choisir une section plus longue pour les développements optimaux (F2 et F3) diminue F_e mais augmente la taille faisceau et la convergence nécessaire en entrée de structure (figure 5.13). Cela signifie que le solénoïde pour la focalisation du faisceau doit être placé plus près du RFQ pour obtenir ces nouveaux paramètres. Il devient alors de plus en plus difficile d’insérer des diagnostics pour caractériser le faisceau en entrée de RFQ.
- Les meilleures performances ont été obtenues avec les formulations F2 et F3.

5.1.2.4 Calcul de F_e avec un code multiparticulaire

Dans la section précédente, nous avons considéré que l’émittance était constante pour chaque transport. Cela signifie que les variations de cette émittance, dues à la charge d’espace et aux désadaptations, peuvent être négligées. Afin de vérifier cette hypothèse⁴, nous avons répété la même procédure mais avec un code multiparticulaire que nous avons développé pour rendre compte des variations de l’émittance. L’intégration des équations de la dynamique est assurée par un schéma “saut de mouton”. Les forces de charge d’espace sont calculées par relaxation avec accélération Frankel-Young. La distribution utilisée est de type 4D Water-Bag [8] ayant

⁴Cette hypothèse est également utilisée par les codes du LANL, notamment TRACE 3D qui donne les paramètres adaptés pour l’entrée du RFQ.

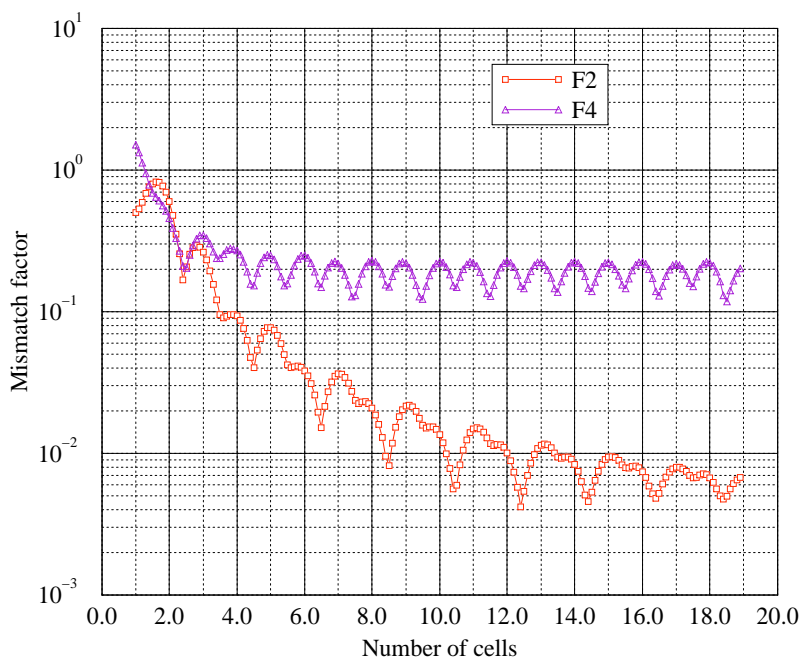


FIG. 5.9 – Résultats pour les formulations F2 et F4.

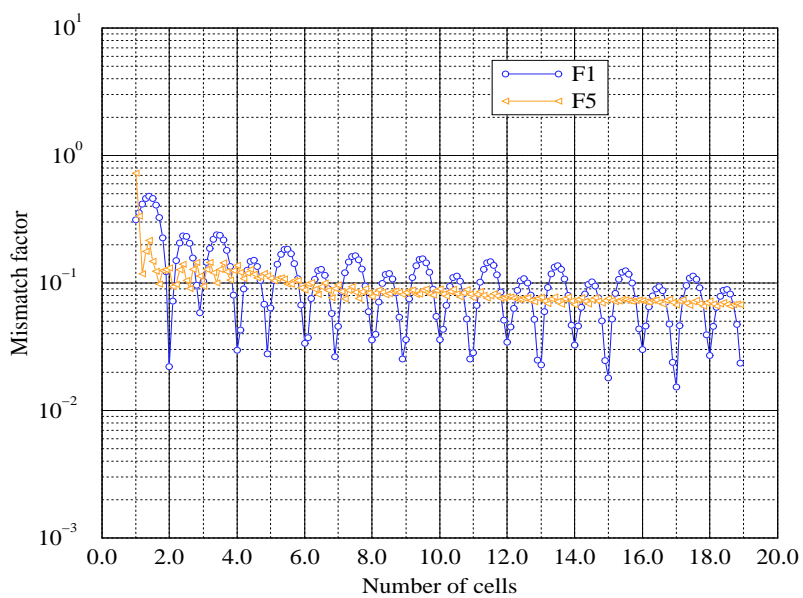


FIG. 5.10 – Résultats pour les formulations F1 et F5.

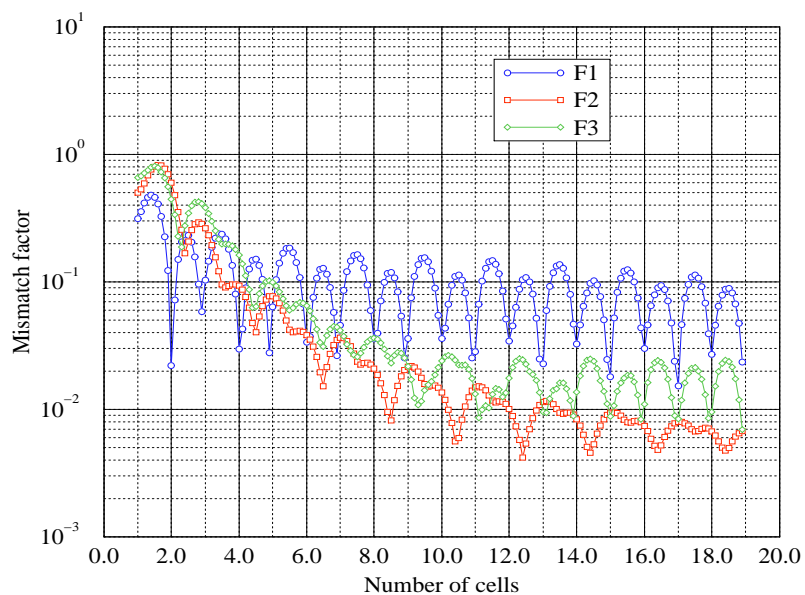


FIG. 5.11 – Résultats pour les formulations F1, F2 et F3.

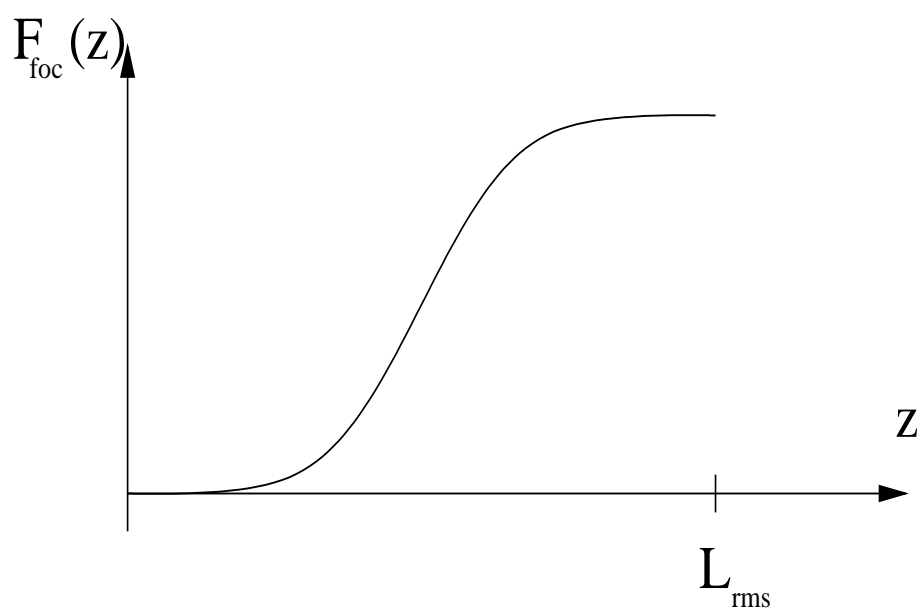


FIG. 5.12 – Profil optimum pour l'amplitude des forces extérieures dans la section d'entrée (par rapport à une rampe linéaire).

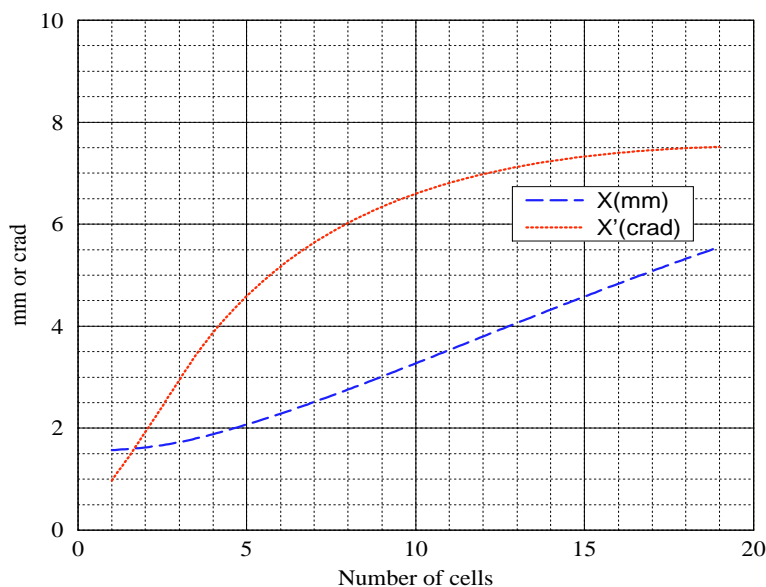


FIG. 5.13 – Taille et convergence du faisceau nécessaires en début de section en fonction du nombre de cellules pour la formulation F2.

les mêmes dimensions r.m.s. que celle décrite dans le tableau 5.9. L'émittance normalisée passe donc de 1 à 1.5π .mm.mrad. Comme le montrent les figures 5.14, 5.15 et 5.16, les évolutions de F_e en multiparticulaire et en enveloppe sont tout à fait comparables tant que l'on se contente d'une efficacité de $\sim 10\%$. Il semble que les fluctuations de l'émittance peuvent expliquer les écarts pour F_e inférieur à 10 %. En effet, si nous changeons de 5% la valeur de l'émittance de départ et simulons le transport avec le code d'enveloppe, nous obtenons une désadaptation de quelques pour cent par rapport aux quelques pour mille initiaux. Nous estimons donc que si l'on veut obtenir une désadaptation inférieure à 1 %, on ne peut pas utiliser la procédure décrite dans la section 5.1.2.1 avec un code d'enveloppe. Cependant, compte tenu des performances actuelles des diagnostics et de la maîtrise de l'adaptation du faisceau dans le RFQ dans son ensemble, il semble que des valeurs de quelques pour cent soient tout à fait acceptables. Il est également intéressant de noter qu'avec le code multiparticulaire l'adaptation ne s'améliore pas au-delà de six cellules (figures 5.14 et 5.15), ce qui conforte ce choix déjà discuté dans la section précédente.

5.1.2.5 Limite de la méthode

La principale hypothèse de la méthode est que les variations d'émittance observées en multiparticulaire peuvent être négligées et que le transport en code d'enveloppe à émittance constante est acceptable. Cependant, on peut penser que, lorsque les forces de charge d'espace sont très

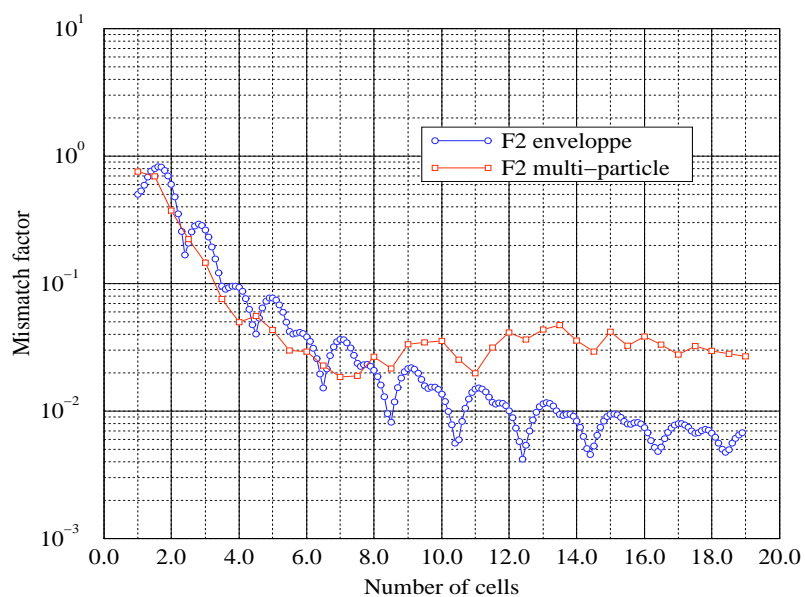


FIG. 5.14 – Résultats pour la formulation F2 en enveloppe et en multiparticulaire.

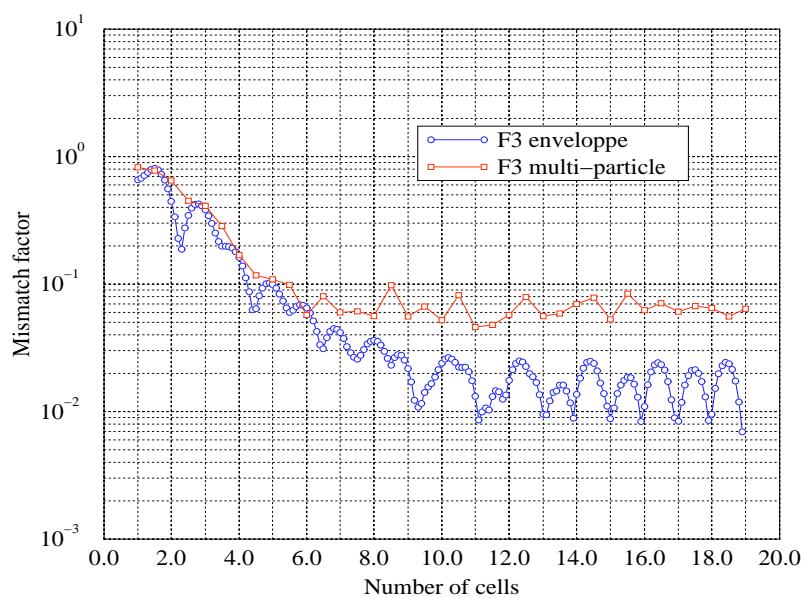


FIG. 5.15 – Résultats pour la formulation F3 en enveloppe et en multiparticulaire.

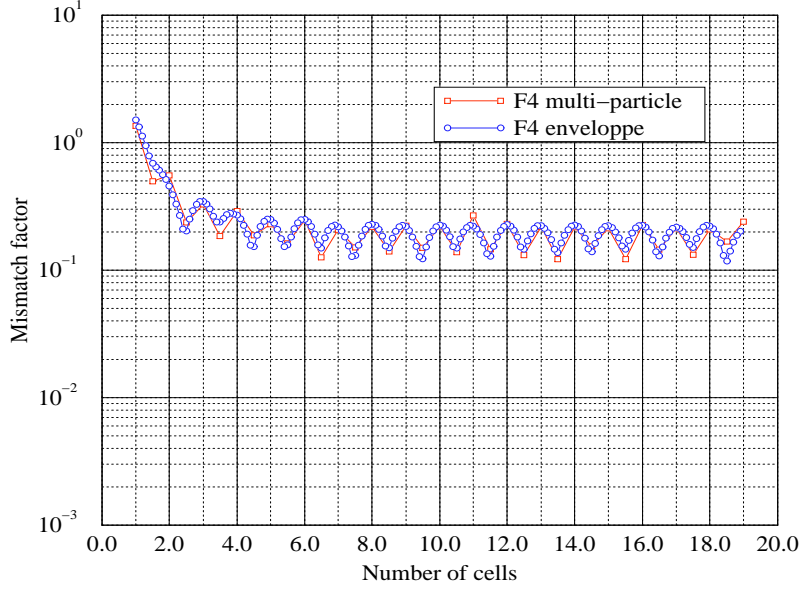


FIG. 5.16 – Résultats pour la formulation F4 en enveloppe et en multiparticulaire.

importantes, cette conclusion peut être mise à mal et le transport peut devenir irréversible⁵. Plus longue sera la section et plus critique pourra être le grossissement d'émission pour atteindre l'équilibre. Afin d'estimer une possible dégradation de la qualité de la méthode, il est intéressant de répéter la procédure pour des dépressions du nombre d'onde allant de 0.3 à 1. avec des sections de 6, 12 et 18 cellules en utilisant la formulation de PARMTEQM (F2). Les dépressions sont calculées au niveau du coeur du faisceau à l'aide de la formule suivante pour l'avance de phase σ :

$$\sigma = \int_0^{\beta\lambda} \frac{dz}{\beta_f(z)} \quad (5.15)$$

où β_f est le paramètre de Twiss lié à l'amplitude des oscillations transverses d'une particule du coeur. La dépression est alors le rapport σ/σ_0 où σ_0 est la valeur pour un courant nul. Pour chaque transport, nous avons calculé la différence Δ entre le facteur de désadaptation $(F_e)_{av.}$ obtenu dans le canal FD seul et celui, $(F_e)_{ap.}$, obtenu dans le canal FD après un aller-retour dans la section d'entrée. Cette grandeur Δ peut ainsi nous permettre de quantifier la contribution de cette section par rapport au critère de réversibilité :

$$\Delta = (F_e)_{ap.} - (F_e)_{av.} \quad (5.16)$$

Compte tenu des tolérances déjà admises dans la section précédente, il semble que les variations de Δ peuvent être négligées. La figure 5.17 montre qu'elles restent inférieures à 5%, même

⁵Pour les sections précédentes, la dépression du nombre d'onde était de 0.67.

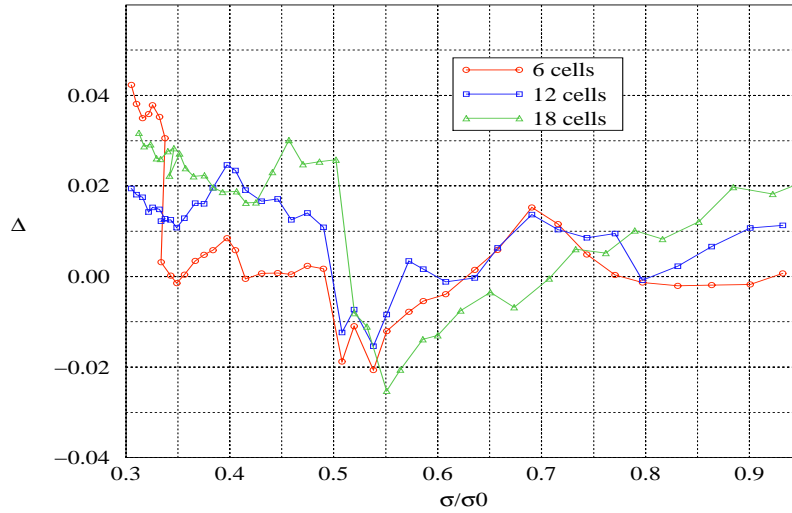


FIG. 5.17 – Δ pour des dépressions allant de 0.3 à 0.95 pour la formulation de PARMTEQM avec des longueurs de 6, 12 et 18 cellules.

pour des dépressions assez basses⁶ et des valeurs de F_e de quelques %. La méthode s'appuyant sur un transport réversible reste donc valable.

5.1.2.6 Conclusion sur la section d'entrée

Cette étude sur la section d'entrée montre que la méthode s'appuyant sur une réversibilité du transport pour obtenir les paramètres adaptés du faisceau en début de structure est valide pour une gamme de dépression du nombre d'onde assez large (0.3 à 1). La longueur optimum pour cette section est de six cellules soit $3\beta\lambda$ compte tenu du niveau d'adaptation atteint et de la souplesse qui en découle pour la ligne de transport en amont du RFQ. La formulation utilisée par PARMTEQM donne les meilleures performances aussi bien en enveloppe qu'en multiparticulaire. Ceci conforte le choix fait par les équipes des projets I.P.H.I. et L.E.D.A. : formulation F2 sur six cellules. Cependant, les paramètres de Twiss fournis par TRACE 3D pour l'entrée de PARMTEQM pourraient être de meilleure qualité si ce code tenait compte de la composante dodécapolaire.

Remarquons que, grâce à l'insertion d'une cellule de transition, la section de fuite présentée au chapitre 3 se comporte exactement comme la section d'entrée. La longueur peut donc également être ajustée pour obtenir la meilleure indépendance en temps du faisceau en sortie de RFQ.

⁶pour une dépression de 0.3, l'émittance a varié de 10%.

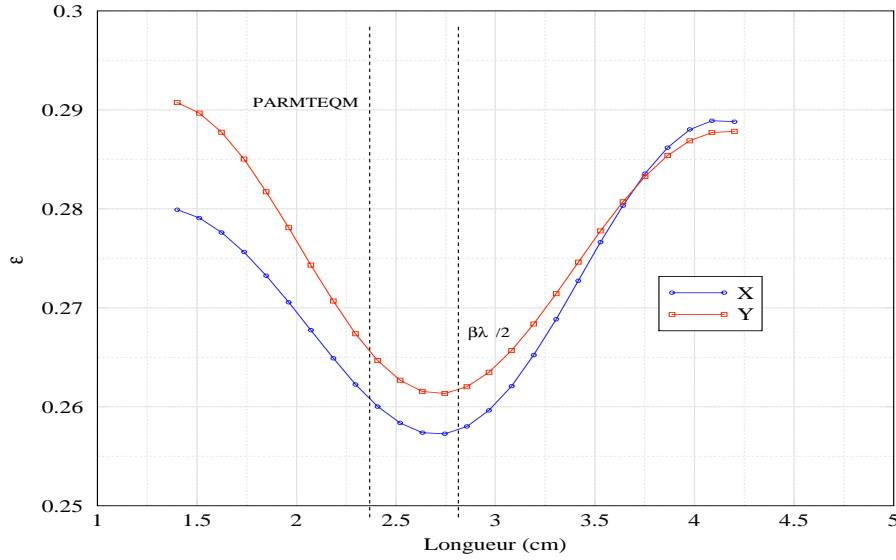


FIG. 5.18 – Variation des émittances transverses normalisées en π .mm.mrad en fonction de la longueur de la cellule de transition.

5.1.3 La cellule de transition (“trancell”)

La section 3.2.4 présente les avantages que l’on peut tirer de l’utilisation d’une cellule de transition : une annulation de la modulation de manière “douce” permettant une section de fuite courte idéale pour l’insertion de quadripôle magnétique après le RFQ sans induire d’incertitude sur l’énergie de sortie, une meilleure tenue du paquet en phase. PARMTEQM utilisant un développement analytique pour décrire cette cellule, une fois la continuité avec les cellules voisines assurées, la longueur de cette “trancell” est imposée :

$$L_t = \sqrt{3/4} \cdot \frac{\beta\lambda}{2} \simeq 0.866 \cdot \frac{\beta\lambda}{2} \quad (5.17)$$

Ceci induit un changement de phase synchrone qui peut être calculé :

$$\Delta\Phi_s = (\sqrt{3/4} - 1) \cdot 180 \simeq -24.12 \text{ deg.} \quad (5.18)$$

Il est intéressant de savoir si ce changement brusque de la phase synchrone induit une dégradation des qualités optiques du faisceau particulièrement dans l’espace longitudinal. TOUTATIS n’ayant pas de contrainte sur la longueur de cette cellule pour assurer la continuité avec les cellules voisines, l’évolution des émittances a été calculée pour chaque plan avec des longueurs allant de $(\beta\lambda/2 - \beta\lambda/4)$ à $(\beta\lambda/2 + \beta\lambda/4)$ (figures 5.18 et 5.19). Il apparaît clairement que la solution idéale consiste à conserver $\beta\lambda/2$ comme longueur de cellule. Cependant la différence avec PARMTEQM reste négligeable pour les trois plans ($\leq 2\%$). La variation des paramètres de Twiss longitudinaux est également négligeable (figure 5.22 et 5.23). Il est possible d’ajuster les paramètres de Twiss transverses (figure 5.20 et 5.21). Il est néanmoins préférable de fixer la longueur à $\beta\lambda/2$ quitte à ajuster la longueur de la section de fuite.

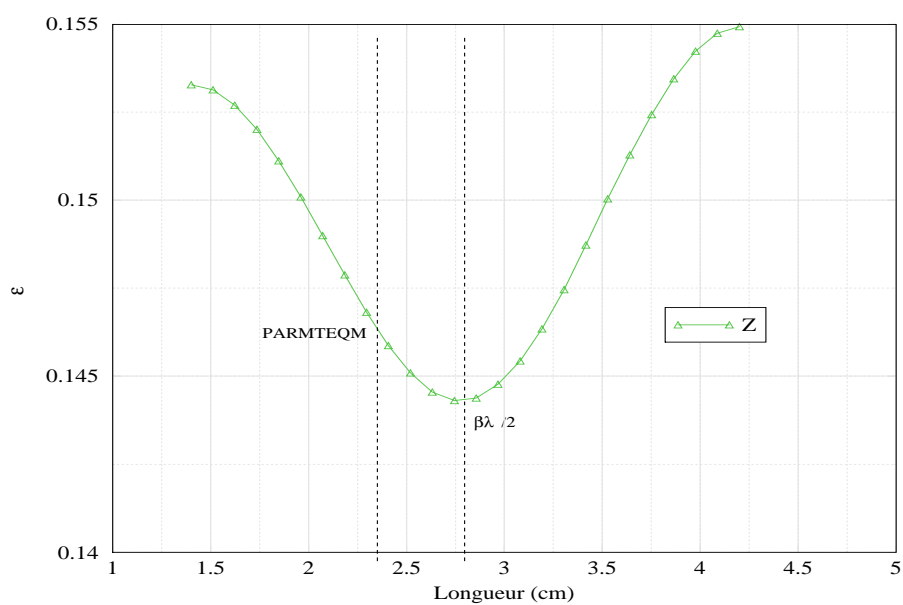


FIG. 5.19 – Variation de l'émittance longitudinale, en deg.MeV, en fonction de la longueur de la cellule de transition.

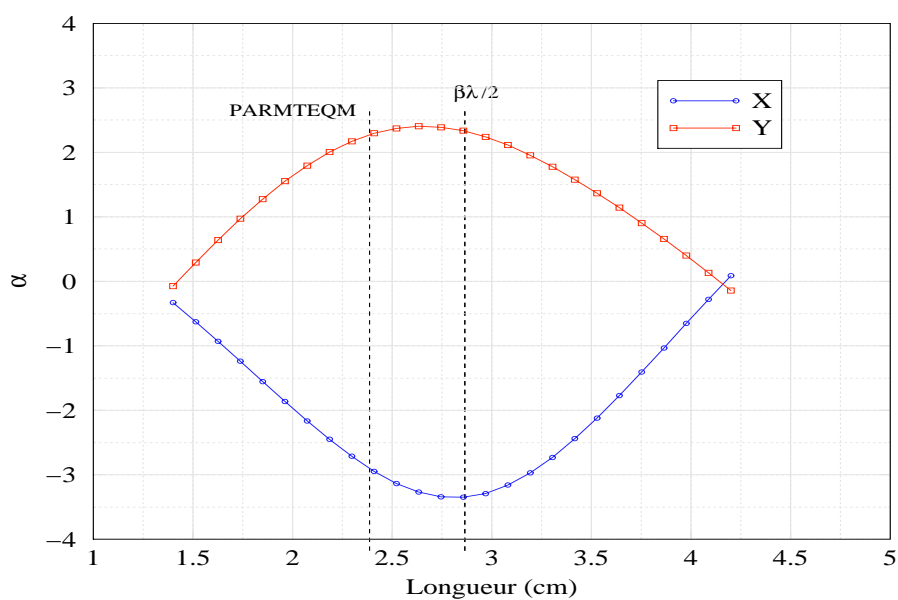


FIG. 5.20 – Variation des α_t transverses en fonction de la longueur de la cellule de transition.

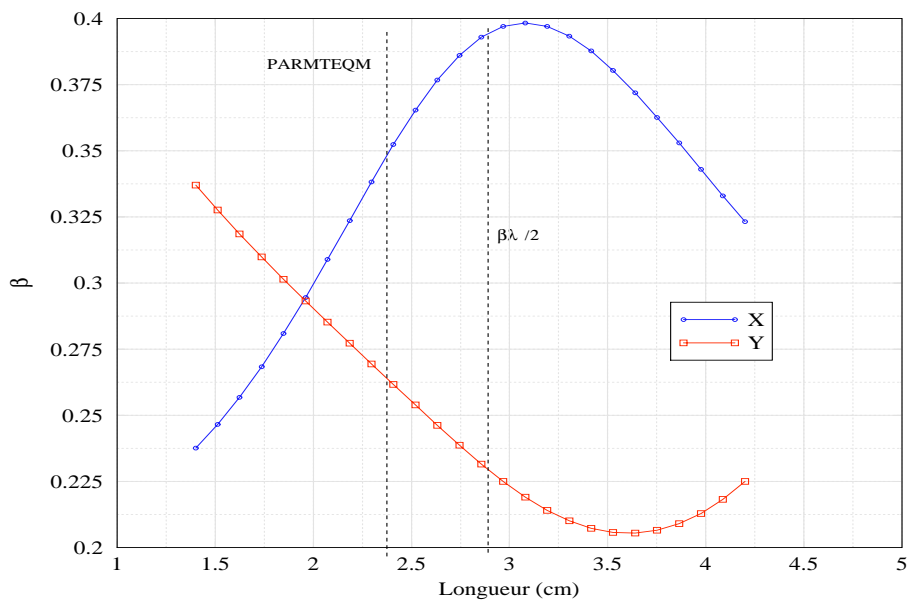


FIG. 5.21 – Variation des β_t transverses, en m/rad, en fonction de la longueur de la cellule de transition.

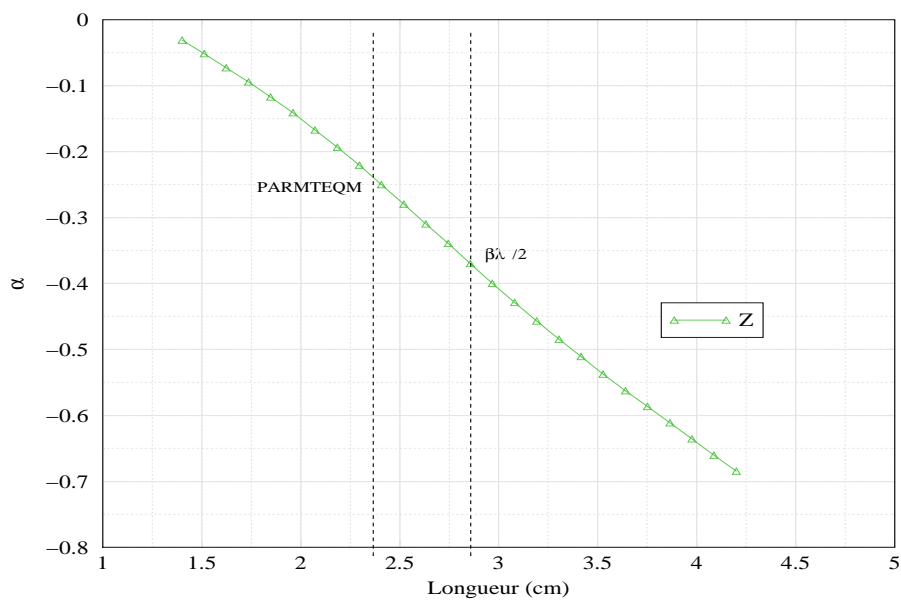


FIG. 5.22 – Variation du α_t longitudinal en fonction de la longueur de la cellule de transition.

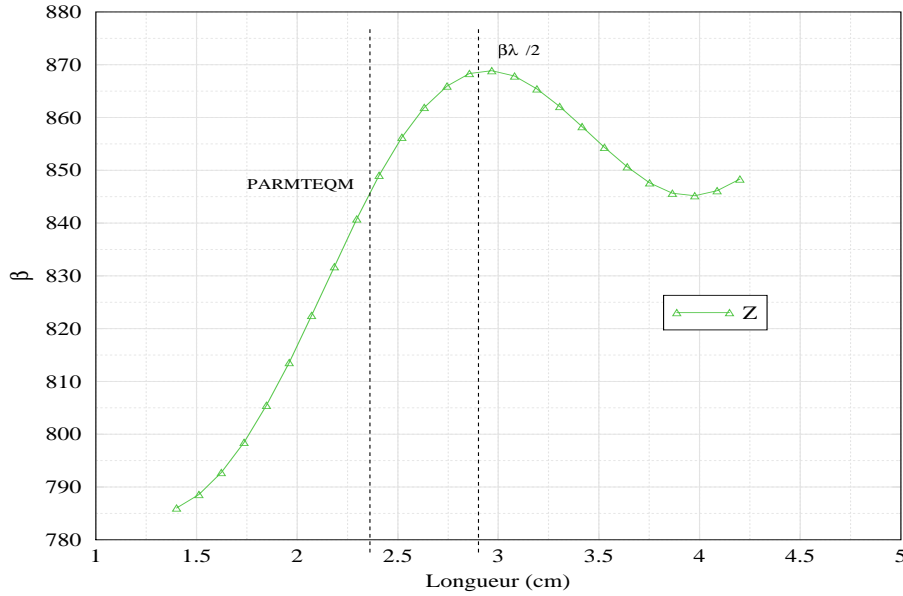


FIG. 5.23 – Variation du β_t longitudinal, en deg/MeV, en fonction de la longueur de la cellule de transition.

Paramètres	Valeurs
ρ_t/R_0	1.
m	1., 1.2, 1.4, 2., 2.4, 3.
L/R_0	0.75, 2, 4, 8, 11, 15, 20

TAB. 5.10 – Paramètres des cellules calculées avec TOSCA.

5.1.4 Le champ crête

Pour s'assurer de la validité des tables de facteur de forme F utilisées par PARMTEQM, il est intéressant de mener une étude comparative entre les valeurs données par CHARGE 3D [4] et TOSCA. Cette étude peut s'avérer instructive puisque la méthode de calcul par éléments finis de TOSCA est différente de l'approche utilisée par CHARGE 3D. Différentes cellules test ont été calculées pour le jeu de paramètres du tableau 5.10.

Les cas $L/R_0 = 0.75$ et $m = 2, 2.4, 3.$ ne sont pas traités, car ils correspondent à des cellules difficiles à usiner et sans intérêt pour la dynamique. Le profil longitudinal est extrapolé du potentiel à deux termes. Avant de rentrer dans une analyse des résultats de ces simulations, la section suivante détaille les techniques qui ont été utilisées pour parvenir à un résultat fiable.

5.1.4.1 Optimisation du maillage utilisé par TOSCA

5.1.4.1.1 Découpage de la cellule

Lors d'une simulation électromagnétique par la méthode des éléments finis, l'utilisateur du code est amené à mailler son dispositif. Pour pouvoir utiliser des éléments hexaédriques, les

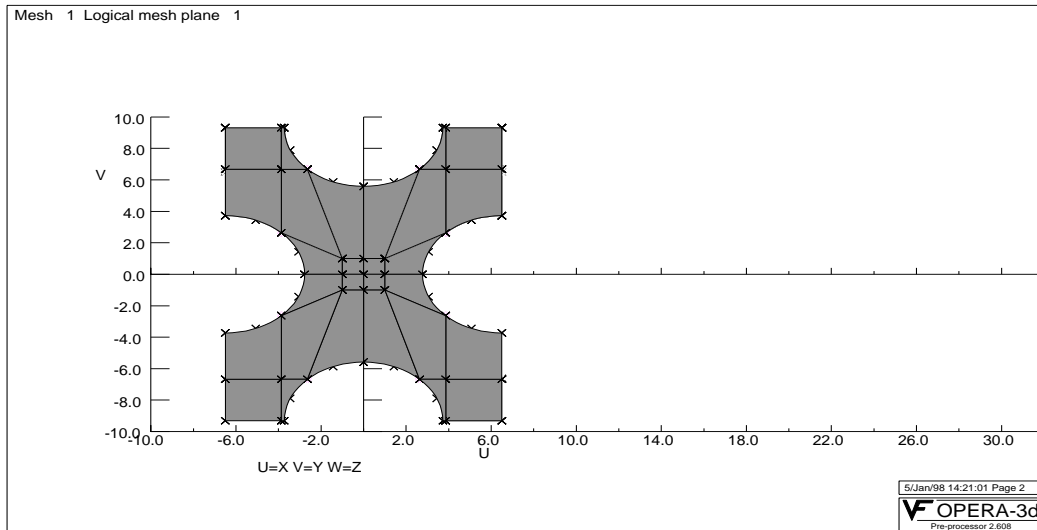


FIG. 5.24 – Découpage transverse avec carré au centre.

plus précis, la discrétisation doit s'appuyer sur des macroéléments hexaédriques eux-mêmes. Ces éléments servent de support pour l'obtention du maillage final, chaque macroélément étant discrétisé en briques élémentaires. Dans le cas du RFQ, un mauvais découpage de la cellule peut conduire à une déformation des éléments et induire des effets de pointe entraînant des renforcements factices du champ. Afin de ne pas être confronté avec ce genre d'artifice numérique, une méthode consiste à imposer une face plane en regard des zones à risque. C'est dans cet esprit que le découpage décrit par la figure 5.24 a été choisi. Cette méthode, appliquée avec le code TOSCA donne de très bons résultats, elle fut d'ailleurs validée par des mesures lors de simulation de pointes pour écran plasma [9]. La figure 5.25 décrit un découpage produisant les renforcements parasites du champ électrique montrés sur la figure 5.26.

5.1.4.1.2 Densité d'éléments

Pour améliorer la précision du calcul, la convergence vers la solution s'obtient en densifiant le nombre de briques élémentaires dans le maillage [10]. Cette démarche s'accompagne d'une augmentation du temps de calcul, le compromis est fonction de la précision souhaitée. Elle est fixée à quelques pour mille pour cette étude. Pour adapter le maillage à la forme des pôles, les discrétisations transverse et longitudinale de la cellule sont découplées. Le pôle est de plus en plus discrétisé sans faire varier le nombre d'éléments en longitudinal. La cellule simulée est sans modulation. La convergence sur F est obtenue à partir d'une quarantaine d'éléments sur chaque pôle (figure 5.27). Ce sont 80 éléments par pôle, en transverse, qui seront utilisés pour la suite de cette étude.

Pour la discrétisation longitudinale, la cellule de référence est celle qui connaît la plus forte modulation sur la plus courte distance (i. e. un rayon de courbure longitudinal élevé), soit $m=3$ et

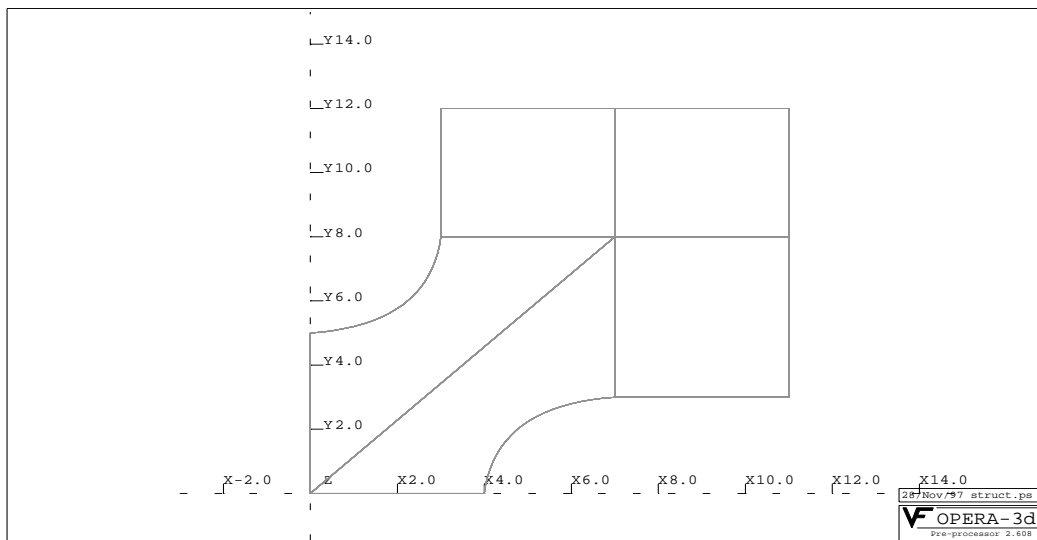


FIG. 5.25 – Découpage transverse induisant des effets de pointe factices (voir figure suivante).

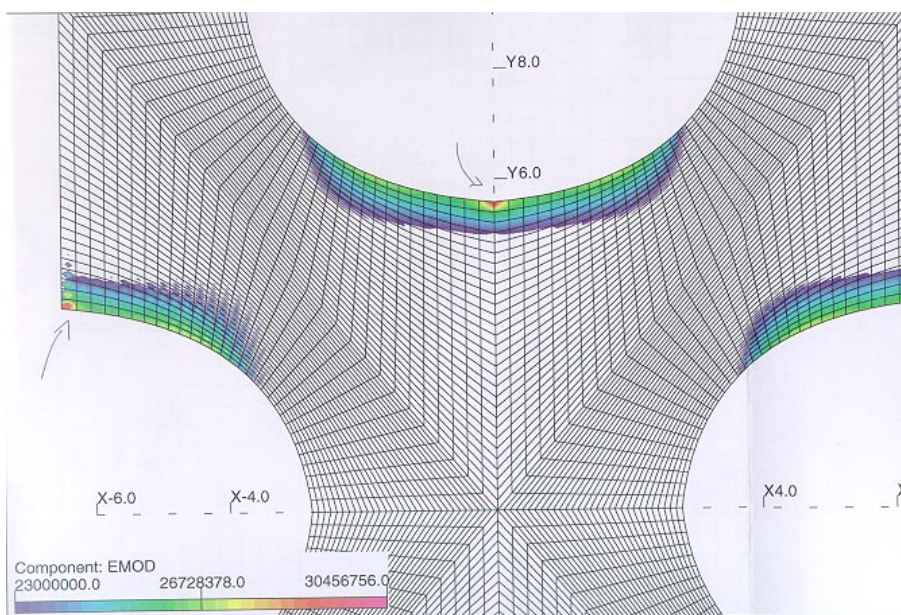


FIG. 5.26 – Localisation du champ crête obtenue avec le découpage de la figure 5.25.

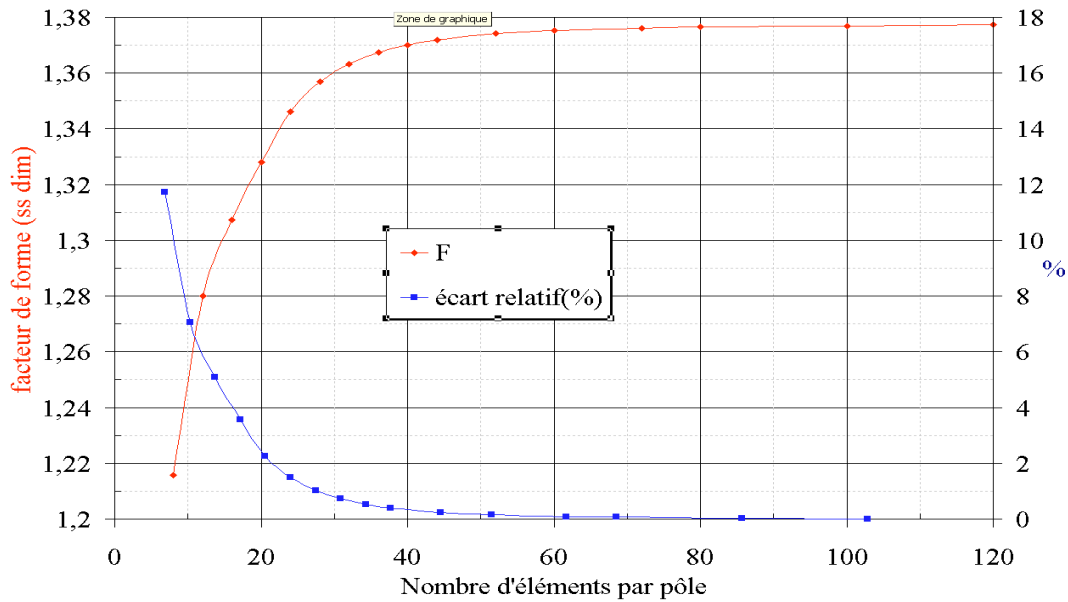


FIG. 5.27 – Convergence de F en fonction du nombre d'éléments par pôle pour une cellule sans modulation. La référence pour l'écart relatif est la valeur de F obtenue pour 120 éléments par pôle.

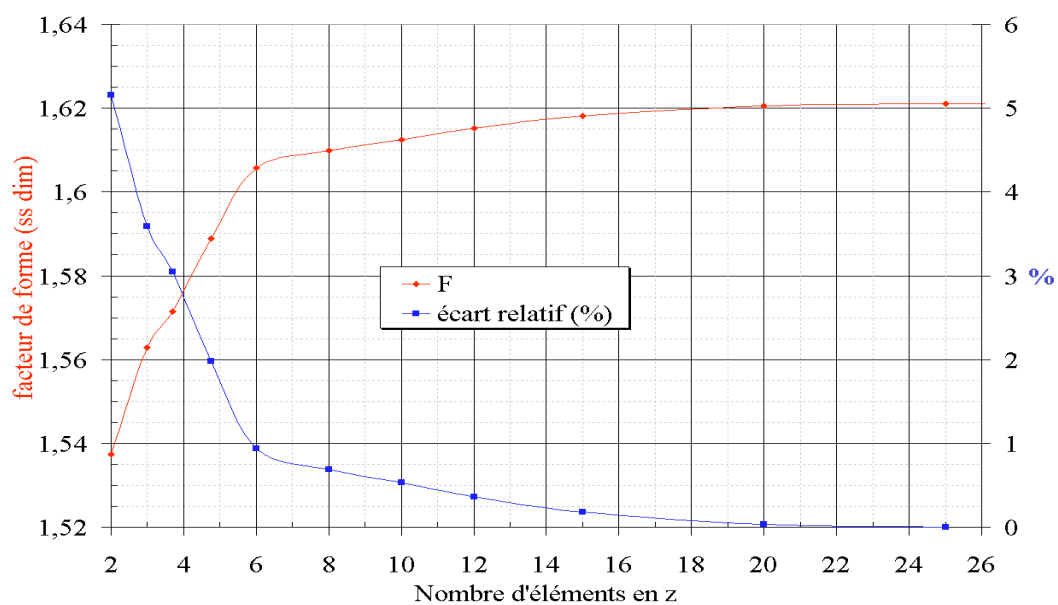
$(L/R_0)=2$. En augmentant le nombre d'éléments en z , la convergence finit par être atteinte pour une quinzaine de subdivisions (figure 5.28). La référence pour l'écart relatif est la valeur de F obtenue pour 25 subdivisions longitudinales.

5.1.4.2 Comparaison CHARGE 3D/TOSCA

Les écarts relatifs par rapport à TOSCA, pris comme référence, sont rassemblés dans le tableau 5.11 et tracés sur la figure 5.29. L'écart maximum atteint 4 % pour m supérieur à 2 et $(L/R_0)=4$. Cependant, cette combinaison de paramètres n'est guère utilisée dans les RFQ de type L.E.D.A. ou I.P.H.I.. Dans un cadre plus général, un doute peut subsister pour ces valeurs en fonction des tolérances fixées. Remarquons un phénomène curieux : ni TOSCA, ni CHARGE 3D ne donnent pas systématiquement la même valeur pour les cellules sans modulation avec différentes longueurs.

5.1.4.3 Comparaison entre le profil sinusoïdal et le profil à “deux termes”

Une des motivations qui peut pousser à choisir un de ces deux profils plutôt que l'autre est leur influence sur le champ crête. Les écarts relatifs donnés par TOSCA sur le facteur de forme F entre ces deux profils sont rassemblés dans le tableau 5.12 et représentés sur la figure 5.30. Le profil à “deux termes” est pris comme référence, si bien que lorsque l'écart est positif, le profil à “deux termes” donne un champ crête plus faible et vice-versa.

FIG. 5.28 – Convergence en longitudinal pour $m=3$ et $L/R_0=2$.

m\l	0.75	2	4	8	11	15	20
1	1.70	1.70	1.70	0.54	1.63	1.84	2.34
1.2	0.33	1.27	2.20	1.47	1.15	1.12	1.5
1.4	-0.20	1.85	2.53	1.53	0.96	0.67	1.01
2		1.53	3.26	1.30	-0.08	-0.37	0.00
2.4		1.79	2.73	1.10	-0.52	-0.95	-0.48
3		2.28	4.06	0.83	-0.93	-1.42	-1.14

TAB. 5.11 – Différence relative $(F_{TOSCA} - F_{CHARGE3D})/F_{TOSCA}$ en %.

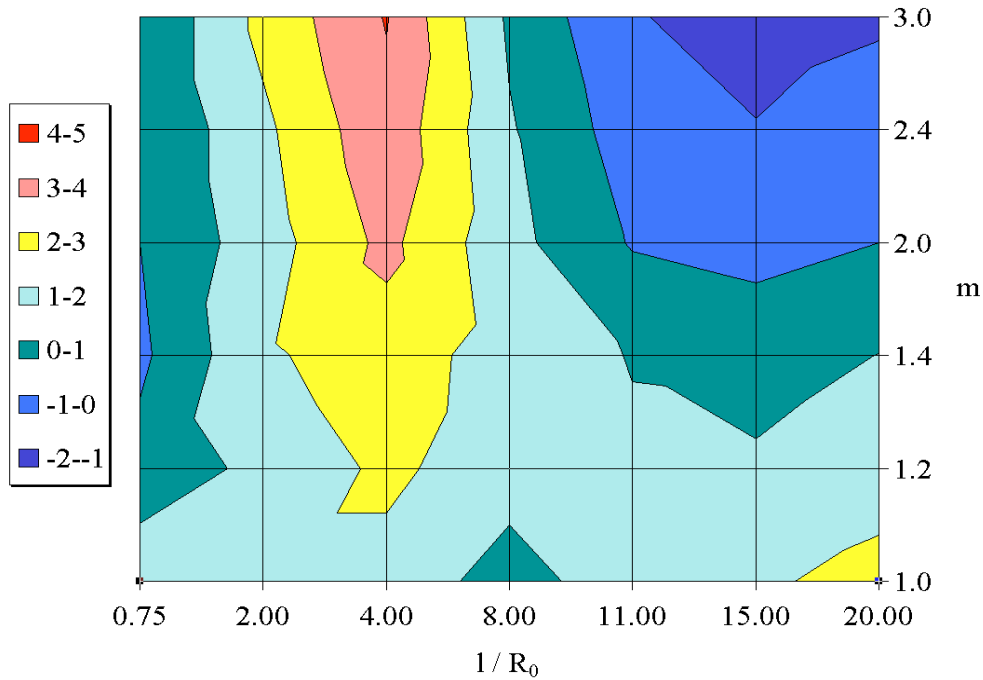


FIG. 5.29 – Différence relative $(F_{TOSCA} - F_{CHARGE3D})/F_{TOSCA}$ en %.

m\l	0.75	2	4	8	11	15	20
1	0.00	-0.75	-1.01	0.00	-1.11	-1.11	-1.11
1.2	6.45	0.69	-0.43	-0.60	-0.61	-0.59	-0.59
1.4	20.71	1.80	-1.07	-1.22	-1.25	-1.19	-1.16
2		4.57	-2.46	-3.58	-3.70	-3.99	-4.18
2.4		4.15	-3.38	-5.31	-5.43	-5.75	-6.18
3		3.35	-4.50	-7.19	-7.56	-8.03	-8.41

TAB. 5.12 – Différence relative $(F_{sinus} - F_{2termes})/F_{2termes}$ en %.

Deux zones de la figure 5.30 se démarquent :

- Pour des cellules courtes, le champ crête est plus faible pour un profil selon le potentiel à deux termes. Ceci s’explique par une courbure longitudinale plus prononcée avec le sinus. Cependant, les RFQ conventionnels n’utilisent pas de telles cellules.
- Pour des cellules longues, la sinusoïde donne de meilleurs résultats. Le phénomène est dû à un gap inter-électrodes plus petit en extrémité de cellule pour le “deux termes” (figure 5.31). Pour ce cas, le facteur de forme longitudinal est moins important compte tenu du fort rapport L/R_0 .

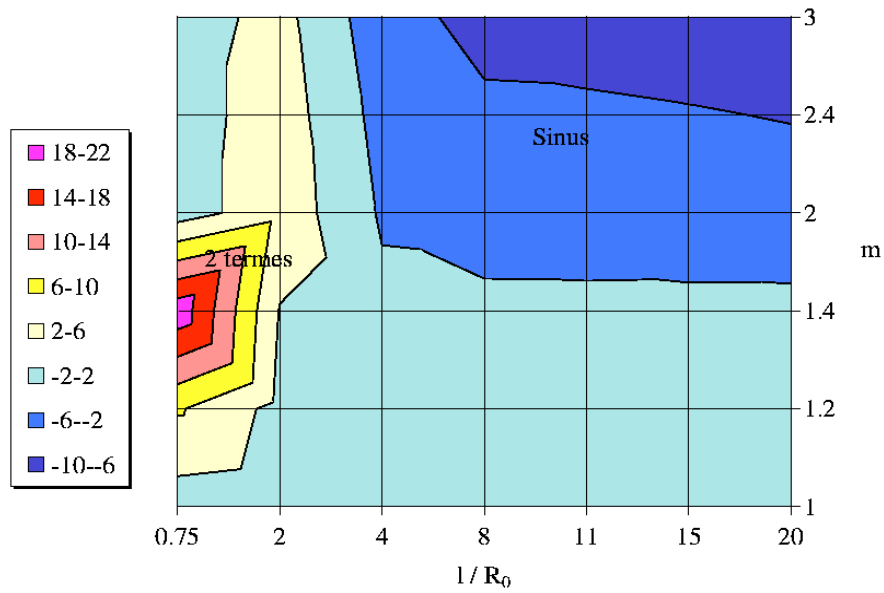


FIG. 5.30 – Différence relative $(F_{sinus} - F_{2termes})/F_{2termes}$ en %.

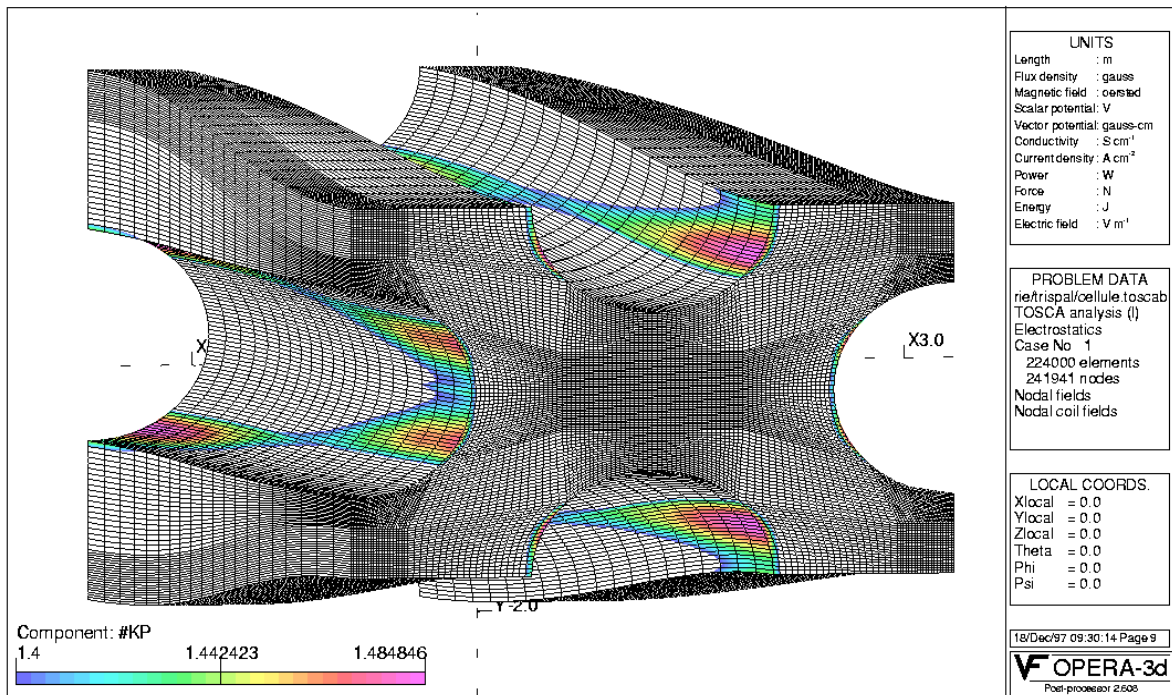


FIG. 5.31 – Répartition du champ crête dans une cellule avec un profil à “deux termes” pour $L/R_0=11$.

5.1.4.4 Conclusion sur l'étude du champ crête

Les facteurs de forme utilisés par PARMTEQM sont en très bon accord avec ceux calculés par TOSCA. Les quelques différences notables observées concernent des géométries de cellules rarement utilisées. Pour l'influence du type de profil longitudinal sur le champ crête, il n'y a guère de grande différence à utiliser l'un ou l'autre des profils. Pour des RFQ à haut $\beta\lambda$ (L.E.D.A. et I.P.H.I.), le profil sinusoïdal semble préférable [11]. Ceci s'ajoute aux autres avantages de ce type de profil : une composante accélératrice plus importante [2], une cellule symétrique en longitudinal à capacité identique à celle calculée pour le plan transverse à mi-cellule et une réalisation mécanique facilitée [12].

5.2 L'intégration des équations de la dynamique

5.2.1 L'hypothèse de paraxialité

La méthode d'intégration du mouvement pas-à-pas utilisée par PARMTEQM s'appuie sur les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma\beta_x)_{i+1/2} = (\gamma\beta_x)_{i-1/2} + \frac{Ze}{\beta_z E_0} E_x (\overrightarrow{OM}_i) \sin(\varphi_i) \delta z \\ (\gamma\beta_y)_{i+1/2} = (\gamma\beta_y)_{i-1/2} + \frac{Ze}{\beta_z E_0} E_y (\overrightarrow{OM}_i) \sin(\varphi_i) \delta z \\ (\gamma\beta_z)_{i+1/2} = (\gamma\beta_z)_{i-1/2} + \frac{Ze}{\beta_z E_0} E_z (\overrightarrow{OM}_i) \sin(\varphi_i) \delta z \\ x_{i+1} = x_i + x' \delta z \\ y_{i+1} = y_i + y' \delta z \\ \varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\omega_{rf}}{(\beta_z)_{i+1/2} c} \delta z \end{array} \right. \quad (5.19)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{(\gamma\beta_x)_{i+1/2}}{(\gamma\beta_z)_{i+1/2}} \\ y' = \frac{(\gamma\beta_y)_{i+1/2}}{(\gamma\beta_z)_{i+1/2}} \end{array} \right. \quad (5.20)$$

ω_{rf} est la pulsation radiofréquence, les indices demi-entiers indiquant que la quantité considérée est calculée à une position intermédiaire des positions où sont calculées les quantités à indices entiers.

L'hypothèse de paraxialité introduite par Ken Crandall soulève quelques questions lorsque l'on sait que les divergences de plusieurs particules atteignent quelques centaines de milliradians. Calculons l'erreur induite par cette hypothèse pour une divergence purement horizontale de 300 mrad⁷. En remplaçant $\overline{\beta_z}$ et $(\beta_z)_{i+1/2}$ par $\overline{\beta}$ et $(\beta)_{i+1/2}$, respectivement, dans les équations (5.19),

⁷valeur assez typique !

Paramètres	Valeurs ou type
distribution	4D Water Bag
$\varepsilon_{r.m.s.,norm.}$ en entrée	0.25π .mm.mrad
courant d'entrée	100 mA
particules	protons
énergie cinétique en entrée	95 keV
énergie cinétique en sortie	1 MeV
fréquence	352.2 MHz
tension constante	67 kV
R_0 constant	2.844 mm
ρ_t/R_0 constant	0.85
m maximum	1.46

TAB. 5.13 – Principaux paramètres du RFQ simulé.

	$\tilde{\varepsilon}_{x,n.}(\pi$.mm.mrad)	$\tilde{\varepsilon}_{y,n.}(\pi$.mm.mrad)	$\tilde{\varepsilon}_{z,n.}(\text{deg.})$
Avec paraxialité	0.259	0.266	0.169
Sans paraxialité	0.263	0.276	0.160

TAB. 5.14 – Emittances rms normalisées en sortie pour les deux versions de PARMTEQM.

le terme :

$$\frac{Ze}{\beta_z E_0} \quad (5.21)$$

devient :

$$\frac{Ze}{\beta_z E_0 \sqrt{1+x'^2}} \approx \frac{Ze}{\beta_z E_0} \left(1 - \frac{1}{2}x'^2\right) = 0.955 \times \frac{Ze}{\beta_z E_0} \quad (5.22)$$

Ce qui est équivalent à une erreur de 4.5% sur le champ. La plupart des particules ont des divergences bien inférieures, si bien que pour donner une idée de l'impact d'une telle hypothèse, un RFQ particulier a été simulé avec deux versions de PARMTEQM : une avec l'hypothèse de paraxialité, l'autre sans. Le tableau 5.13 résume les paramètres du RFQ utilisé, celui-ci ayant été généré à l'aide des codes du LANL (CURLI→RFQUICK→PARI).

Les résultats des simulations sont rassemblés dans les tableaux 5.14 et 5.15. L'hypothèse de paraxialité induit une multiplication par deux des pertes pour ce RFQ. Ce pessimisme est dû à une rigidité artificielle de la trajectoire induite par cette hypothèse.

	Rendement	Transmission	Variation du rendement	Variation des pertes
Avec paraxialité	87.22 %	87.58 %	- 5.69 %	+ 93.45 %
Sans paraxialité	92.48 %	93.58 %	0.%	0.%

TAB. 5.15 – Rendement et transmission totale pour les deux versions de PARMTEQM.

5.2.2 Erreur due à l'algorithme d'intégration

Pour assurer la conservation de l'émittance dans un transport linéaire, le Jacobien de la transformation doit être égal à 1 [13]. Pour quantifier la qualité du schéma saut de mouton, il faut calculer l'expression suivante :

$$\mathfrak{S} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial u_i} & \frac{\partial u_{i+1}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial u_i} & \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} \end{vmatrix} \quad (5.23)$$

Ici, la transformation s'écrit :

$$\begin{cases} v_{i+1} = v_i + \frac{Zec^2}{2E_0} [E_u(\overrightarrow{OM}_i) + E_u(\overrightarrow{OM}_{i+1})] \delta t \\ u_{i+1} = u_i + \frac{1}{2} [v_i + v_{i+1}] \delta t \end{cases} \quad (5.24)$$

où $u = x, y, z$ et $v = v_x, v_y, v_z$. La force ne dépendant que de la position (champ électrique), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial u_i} &= 1 \\ \frac{\partial u_{i+1}}{\partial v_i} &= \frac{1}{2} \delta t \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial u_i} &= \frac{\delta t}{2} \frac{Zec^2}{E_0} \frac{\partial}{\partial u_i} [E_u(\overrightarrow{OM}_i)] \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} &= 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

en injectant dans (5.23), le calcul de \mathfrak{S} donne :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= 1 - \frac{Zec^2}{E_0} \frac{\delta t^2}{4} \frac{\partial}{\partial u_i} [E_u(\overrightarrow{OM}_i)] \\ &= 1 - F(\overrightarrow{OM}_i) \frac{\delta t^2}{4} \end{aligned} \quad (5.26)$$

où :

$$F(\overrightarrow{OM}_i) = \frac{Zec^2}{E_0} \frac{\partial}{\partial u_i} [E_u(\overrightarrow{OM}_i)] \quad (5.27)$$

Le Jacobien n'est donc pas strictement égal à 1. Notons que si les vitesses et les positions n'étaient pas calculées à des instants intermédiaires, il n'y aurait pas de facteur 1/4 dans l'expression (5.26). Plusieurs remarques découlent de ce premier calcul :

- L'erreur est proportionnelle à $\delta t^2/4$.
- Si la force est linéaire, l'erreur est constante dans le plan considéré.
- Si l'expression de la force comporte des termes non linéaires, l'erreur devient une fonction des coordonnées des particules.

Pour estimer l'erreur cumulée sur tout le transport, il est nécessaire de calculer le produit des Jacobiens pour chaque pas. Pour simplifier, nous considérerons le champ suivant :

$$E_u(\overrightarrow{OM}_i, t) = \frac{V}{R_0^2} u \sin(2\pi ft) \quad (5.28)$$

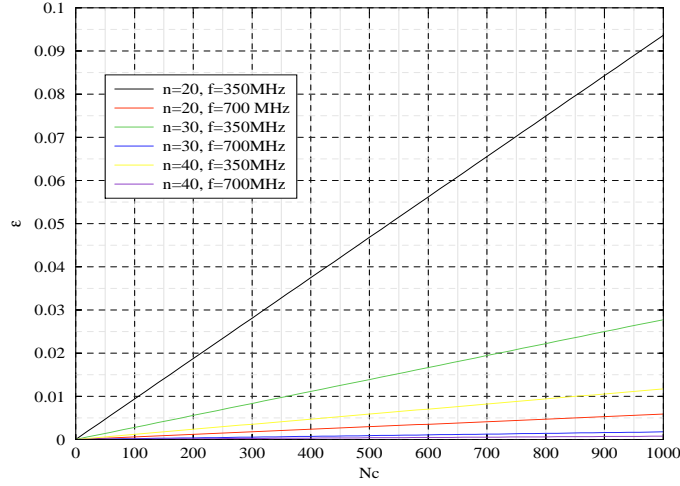


FIG. 5.32 – Variation du majorant de l'erreur en fonction du nombre de cellules parcourues N_c pour différentes fréquences et pas de temps.

avec $V=100$ kV, $R_0=4$ mm et $f=350$ MHz. Le produit cherché s'écrit :

$$\prod_{i=1}^N \mathfrak{S}_i = \prod_{i=1}^N \left[1 - \frac{Zec^2 \delta t^2 V}{E_0} \frac{1}{4 R_0^2} \sin(2\pi ft) \right] \quad (5.29)$$

où N est le nombre de pas de calcul. Si ce nombre est grand, l'expression (5.29) peut être majorée par :

$$\prod_{i=1}^N \mathfrak{S}_i < 1 - N \left[\frac{Zec^2 V}{E_0 R_0^2} \right]^2 \frac{\delta t^4}{16} \quad (5.30)$$

Puisque le grand nombre de termes nous permet de négliger les doubles produits et que \sin^2 est majoré par 1. Si le pas δt est une fraction de la période $1/f$, le majorant de l'erreur, ε , peut s'écrire :

$$\varepsilon = N \left[\frac{Zec^2 V}{E_0 R_0^2} \right]^2 \frac{\delta t^4}{16} = N_c \left[\frac{Zec^2 V}{E_0 R_0^2} \right]^2 \frac{1}{32 f^4 n^3} \quad (5.31)$$

avec $\delta t = 1/(n \cdot f)$, N_c , le nombre de cellules parcourues, une cellule étant traversée en une demi-période. La figure 5.32 montre la variation de cette erreur en fonction de N_c pour des protons avec $n = 20, 30, 40$ et $f = 350, 700$ MHz. Pour le cas du RFQ du projet IPHI (600 cellules à 350 MHz), le majorant vaut environ 5% pour $n=20$ et quelques pour mille pour $n=40$. Le transport avec un schéma de type saut de mouton dans TOUTATIS donne une variation de l'émittance rms normalisée de 2% dans le plan horizontal et 0.3% dans le plan vertical entre $n=20$ et $n=40$. La variation en z n'est que de 0.1%. Il peut être conclu que le découpage en 10 segments de la cellule dans PARMTEQM n'est pas critique. Cependant si l'on veut prédire l'émittance de sortie avec une précision inférieure au pour cent, un découpage en 20 segments est préférable. Notons également que l'erreur est proportionnelle au gradient de la force et inversement proportionnelle à la fréquence à la puissance 4.

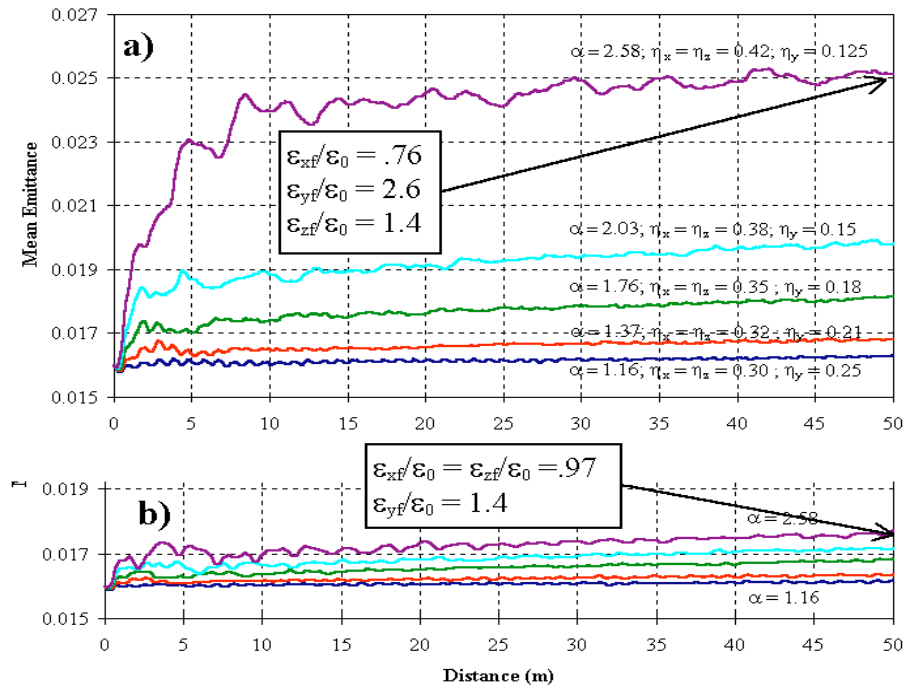


FIG. 5.33 – Grossissement d’émission pour un ellipsoïde de demi taille $X=Z=Y/\alpha$ dans un canal de focalisation continue : a) SCHEFF (Space CHARGE EFFects), b) PICNIC (Particle In Cell Numerical Integration between Cubes).

5.3 Les forces de charge d’espace et les effets d’image

Ce calcul comporte plusieurs incertitudes : la validité de la transformation qui permet de reconstituer la distribution du paquet pour n’importe quel instant (seul le terme quadripolaire étant considéré pour cette transformation), la symétrie de révolution du paquet en milieu de cellule et pour le reste de la cellule (les champs de charge d’espace n’étant pas recalculés), la représentation du paquet comme la superposition d’une sphère et d’un cylindre uniformément chargés pour les effets d’image.

Pour l’hypothèse de symétrie de révolution (sous-programme SCHEFF), il a été démontré que cette approximation posait problème pour un faisceau à symétrie transverse elliptique dans un canal de focalisation continue à l’aide du sous-programme PICNIC [14]. PICNIC utilise les mêmes principes que SCHEFF mais s’appuie sur un maillage 3D cartésien. Dans cette étude, le paquet de forme ellipsoïdale conservait en moyenne un profil elliptique en transverse (rapport d’axe α variant de 1.16 à 2.58). La figure 5.33 montre les grossissements d’émissions, pour chaque plan, selon la valeur de rapport d’axe α . L’erreur se manifeste, notamment, par un grossissement factice d’émission dans certains plans induit par un couplage dû à l’hypothèse de symétrie.

Dans notre cas, il est intéressant de noter, que lorsque la modulation intervient dans le RFQ, la distribution transverse du paquet ressemble davantage à un losange (figure 5.34). Ceci est la manifestation d’un effet octupolaire. Un autre cas intéressant est celui des études d’erreur où l’on

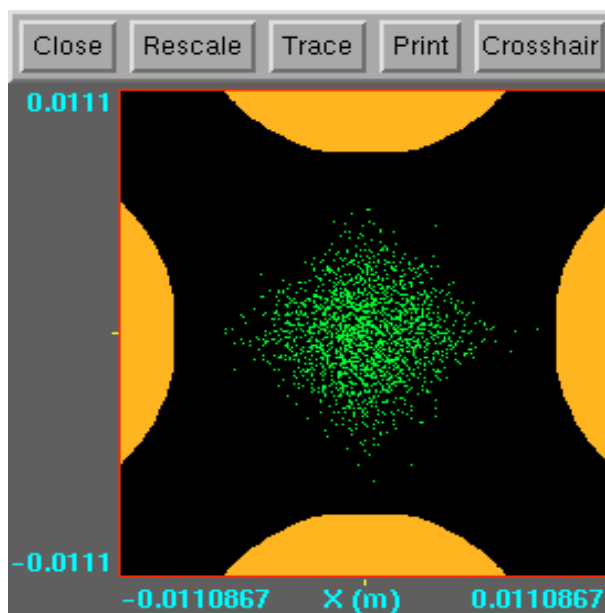


FIG. 5.34 – Profil transverse typique du faisceau induit par la modulation.

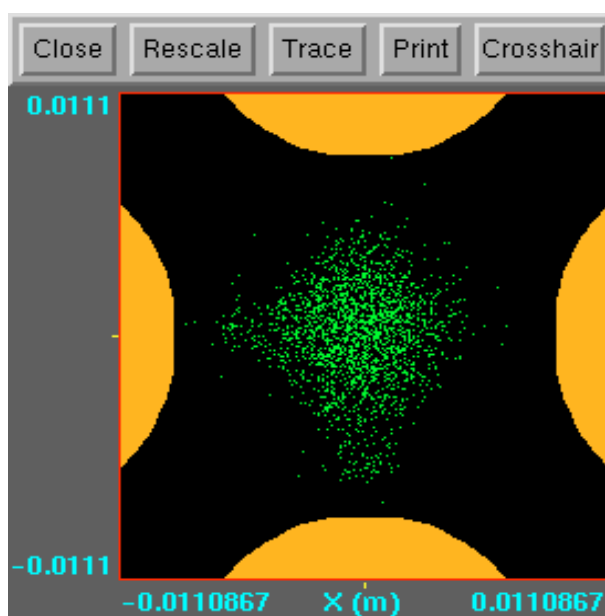


FIG. 5.35 – Profil transverse du faisceau obtenu lors d'une étude de désalignement.

	$\tilde{\epsilon}_{x,n.}/\tilde{\epsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\epsilon}_{y,n.}/\tilde{\epsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\epsilon}_{z,n.}$ (deg.MeV)
TOUTATIS	1.33	1.34	0.209
PARMTEQM	1.28	1.29	0.237

TAB. 5.16 – Grossissement d'émittances transverses rms normalisées et émittance longitudinale pour PARMTEQM et TOUTATIS pour le cas à 225 mA sans désalignement. Les deux codes ont, pour ces simulations, le même schéma d'intégration (saut de mouton) et le même critère de pertes (un carré de coté deux fois le minimum d'ouverture).

	$\tilde{\epsilon}_{x,n.}/\tilde{\epsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\epsilon}_{y,n.}/\tilde{\epsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\epsilon}_{z,n.}$ (deg.MeV)
TOUTATIS	1.35	1.23	0.519
PARMTEQM	1.28	1.28	0.501

TAB. 5.17 – Grossissement d'émittances transverses rms normalisées et émittance longitudinale pour PARMTEQM et TOUTATIS pour le cas à 0 mA sans désalignement.

	$\tilde{\epsilon}_{x,n.}/\tilde{\epsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\epsilon}_{y,n.}/\tilde{\epsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\epsilon}_{z,n.}$ (deg.MeV)
TOUTATIS	1.37	1.45	0.219
PARMTEQM	1.60	1.60	0.269

TAB. 5.18 – Grossissement d'émittances transverses rms normalisées et émittance longitudinale pour PARMTEQM et TOUTATIS pour le cas à 225 mA avec désalignement de +600 μm en X et Y.

	$\tilde{\varepsilon}_{x,n.}(\pi.\text{mm.mrad})$	$\tilde{\varepsilon}_{y,n.}(\pi.\text{mm.mrad})$	$\tilde{\varepsilon}_{z,n.}(\text{deg.MeV})$
Critère “carré”	0.259	0.269	0.168
Critère “électrodes”	0.270	0.282	0.176
Variation	- 4.07 %	-4.61 %	-4.55 %

TAB. 5.19 – Evolution des emittances rms normalisées pour les deux versions de TOUTATIS. La variation est celle induite par le “carré”

cherche, par exemple, à connaître la sensibilité de la machine à un désalignement du faisceau. Là encore, le profil moyen du faisceau ne correspond pas à un faisceau rond (figure 5.35). Ce point laisse donc penser que les forces de charge d’espace et d’image ne sont pas strictement bien représentées dans le code PARMTEQM, bien que ce code rende probablement compte de l’essentiel de l’effet perturbatif. Encore une fois, cela peut être accepté en fonction des tolérances que l’on veut bien se donner. A titre de complément, les tableaux 5.16, 5.17 et 5.18 rassemblent les émittances de sortie calculées pour un RFQ à fort courant⁸ avec PARMTEQM et TOUTATIS. L’écart, pour la prédiction de l’émittance longitudinale, atteint 13% pour le cas à 225 mA contre 3% à 0 mA, les grossissements d’émittances transverses étant tout à fait comparables pour les deux codes. Pour le cas du faisceau désaligné, SCHEFF prédit un grossissement d’émittances transverses de 60 % alors qu’il n’est que de 40 % pour TOUTATIS. Les transmissions données par les deux codes sont identiques.

5.4 La gestion des pertes

5.4.1 Les pertes transverses

Dans PARMTEQM, toute particule en dehors du carré de côté égal à deux fois le minimum d’ouverture est considérée perdue. Ce critère s’appuie donc sur l’hypothèse qu’une particule, ayant une amplitude telle qu’elle se trouve en dehors de ce carré, ne peut revenir dans ce carré. Pour vérifier cette hypothèse, ce critère a été introduit dans TOUTATIS et deux simulations d’un même RFQ ont été effectuées ; l’une avec le critère du “carré”, l’autre avec le critère prenant en compte la géométrie réelle des pôles que nous appellerons “électrodes”. Le RFQ considéré est celui de la section 5.2.

Les résultats de ces simulations sont rassemblés dans les tableaux 5.19 et 5.20. Les tableaux 5.21 et 5.22 comparent les résultats obtenus avec TOUTATIS en configuration “carré” et les deux versions de PARMTEQM avec et sans l’hypothèse de paraxialité. Cette comparaison est également intéressante puisque nous nous préoccupons ici surtout des particules à grandes amplitudes transverses.

Ces résultats montrent que cette approximation peut s’avérer très mauvaise si l’on veut prédire avec précision l’activation de la machine et qu’elle est certainement la plus néfaste de celles utilisées par PARMTEQM. Cependant, il nous faut, une nouvelle fois, souligner que les chiffres

⁸Ce RFQ est une version du RFQ2 du CERN portée à 5 MeV. Cette structure est décrite dans la section 15.

	Rendement	Transmission
Critère "carré"	92.45 %	93.81 %
Critère "électrodes"	96.72 %	98.31 %
Variation	-4.41 %	-4.57 %
Variation en pertes	+130.20%	+266.27 %

TAB. 5.20 – Evolution du rendement et de la transmission totale pour les deux versions de TOUTATIS. La variation est celle induite par le "carré".

	$\tilde{\varepsilon}_{x,n.}(\pi.\text{mm.mrad})$	$\tilde{\varepsilon}_{y,n.}(\pi.\text{mm.mrad})$	$\tilde{\varepsilon}_{z,n.}(\text{deg.MeV})$
TOUTATIS "carré"	0.259	0.269	0.168
PARMTEQM avec paraxialité	0.259	0.266	0.169
PARMTEQM sans paraxialité	0.263	0.276	0.160

TAB. 5.21 – Evolution des emittances rms normalisées pour les deux versions de PARMTEQM et la version "carré" de TOUTATIS.

	Rendement	Transmission
TOUTATIS "carré"	92.45 %	93.81 %
PARMTEQM avec paraxialité	87.22 %	87.58 %
PARMTEQM sans paraxialité	92.48 %	93.58 %

TAB. 5.22 – Evolution du rendement et de la transmission totale pour les deux versions de PARMTEQM et la version "carré" de TOUTATIS.

assemblés ci-dessus sont valables uniquement pour le RFQ simulé dans cette étude. Pour le RFQ d'I.P.H.I., pour lequel cette comparaison a aussi été faite, il n'y a pas de différence notable, le faisceau étant assez bien confiné dans un rayon inférieur au minimum d'ouverture. Néanmoins, cette approximation pose certainement un problème pour tout RFQ dès que l'on entreprend les études d'erreurs où le confinement du faisceau est considérablement dégradé.

La comparaison entre les deux versions de PARMTEQM dénote l'amélioration apportée au code en enlevant l'hypothèse de paraxialité.

5.4.2 Les particules décrochées en phase

La gestion de ces particules a été détaillée à la section 3.6.2. Le traitement consiste en une translation de la phase pour "ramener" la particule dans la fenêtre de simulation. Cette translation, bien que légitime, est insuffisante pour rendre compte de manière exacte des conséquences pour la simulation de ce décrochage.

Imaginons un RFQ sans pertes transverses mais n'accélérait que 90 % du paquet injecté. La vitesse du faisceau en entrée serait de $0.01 \times c$ et celle de sortie de $0.1 \times c$, la charge initiale par $\beta\lambda$, Q . Les particules non accélérées ayant gardé une vitesse de $0.01 \times c$, la charge totale est alors sous-estimée dans les calculs de charge d'espace de PARMTEQM puisque ce code donne toujours Q alors que la valeur exacte est $1.9 \times Q$. L'explication est la suivante. Lorsque le paquet est accéléré, notre fenêtre de simulation de longueur $\beta\lambda$ s'agrandit avec β et des particules non accélérées des paquets précédents viennent s'insérer. Il existe alors deux faisceaux dans l'accélérateur : un faisceau modulé suivant la loi en β du canal, un faisceau non accéléré⁹. Pour le cas précédent, la charge de ce faisceau continu, en fin de RFQ, est donc sous-estimée d'un facteur 10, celle du faisceau total d'un facteur 1.9.

En pratique, l'impact de cette erreur sur la simulation est très probablement négligeable. Il y a plusieurs raisons à cela. Les forces de focalisation transverses sont souvent augmentées pendant la phase de capture, les particules décrochées, ne subissant pas la même dépression que le paquet, deviennent instables et sont, pour la plupart, perdues dans la première partie du RFQ. A la fin du RFQ, où cette erreur pourrait avoir le plus de conséquence, ce faisceau a une densité de charge bien plus faible que le paquet et contribue peu à la charge d'espace.

Pour tenter de mettre en évidence le phénomène, la possibilité d'ajouter arbitrairement des charges pendant le transport a été implémentée dans TOUTATIS. Arbitrairement car les réelles coordonnées transverses de ces particules sont inconnues. Le code utilise une particule décrochée du paquet comme particule témoin pour estimer la densité longitudinale réelle. De manière pratique, si une particule décroche avec une vitesse 10 fois plus faible que la vitesse synchrone, 9 particules de coordonnées transverses identiques, espacées de $\beta_d\lambda$ en longitudinal, sont injectées pour le calcul de la charge d'espace. β_d vaut un dixième de $\beta_{synchrone}$. Deux RFQ ont été calculés avec et sans cette implémentation : une version du RFQ d'I.P.H.I., avec sa tension nominale ; la même version mais avec une tension abaissée de 10 % sur l'ensemble de la structure. Ce dernier cas est particulièrement intéressant puisqu'il y a alors un grand nombre de particules décrochées

⁹En fait, ce faisceau n'est pas forcément monocinétique, il est peuplé de particules ayant des vitesses fonction des zones où les particules ont été décrochées.

	$\tilde{\epsilon}_{x,n.}/\tilde{\epsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\epsilon}_{y,n.}/\tilde{\epsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\epsilon}_{z,n.}$ (deg.MeV)	Transmission	Rendement
Tension nominale (ss)	1.04	1.04	0.148	99.72%	99.60%
Tension nominale (av)	1.04	1.04	0.153	99.66%	99.58%
Tension abaissée (ss)	1.08	1.09	0.182	95.48%	78.75%
Tension abaissée (av)	1.11	1.11	0.238	95.45%	75.29%

TAB. 5.23 – Emittances en sortie, transmission et rendement pour les différents cas (ss = sans particules ajoutées, av = avec particules ajoutées).

et une transmission totale encore satisfaisante. Le tableau 5.23 rassemble les résultats. Les écarts ne semblent effectivement pas démontrer un défaut majeur pour le cas à tension nominale. Le cas à tension abaissée aboutit à une différence entre émittances longitudinales de 30%. Il peut, cependant, être conclu que l'erreur est du second ordre.

5.5 Confrontation expérimentale

En 1993, RFQ2 a été inséré dans la ligne à basse énergie du Linac 2 pour améliorer les performances du PS [16]. Durant l'été 1992, RFQ2 a été monté sur un banc de test afin de comparer les mesures sur le faisceau avec les simulations obtenues à l'époque avec le code PARMULT et une version du code PARMILA¹⁰. PARMULT est une version ancienne de PARMTEQM n'ayant que les quatre multipôles principaux (quadripôle, dodécapôle, monopôle périodique, octupôle périodique) et n'incluant pas les effets d'images. Cette différence est minime au regard des différences que nous observerons par la suite. Nous allons, dans cette section, renouveler cette étude comparative à l'aide de TOUTATIS et d'une version modifiée par Nicolas Pichoff, CEA, de PARMILA. Une des modifications apportées au code est, notamment, l'implémentation de la routine de charge d'espace 3D PICNIC en remplacement de SCHEFF. L'utilisation de PARMILA est nécessaire pour simuler la ligne de diagnostics.

5.5.1 Description de la ligne

Le faisceau de protons est généré par une source duoplasmatron et extrait à 90 keV. La ligne de transport est composée de deux solénoïdes qui permettent l'injection du faisceau dans le RFQ (figure 5.36). Le faisceau de protons ainsi adapté rentre dans RFQ2 pour être porté de 90 keV à 750 keV (tableau 5.24). La transmission est d'environ 90 %, environ car le courant d'entrée n'est pas connu avec précision, probablement entre 220 et 230 mA de protons. Le RFQ est suivi par la ligne de diagnostics (tableau 5.25).

Le principe de chaque mesure est détaillé dans la référence [15]. Les auteurs estiment que l'erreur systématique pour les données de l'espace transverse est de l'ordre de 5%. Aucune indication n'est donnée pour l'erreur dans l'espace longitudinal.

¹⁰Phase And Radial Motion in Ions Linear Accelerator.

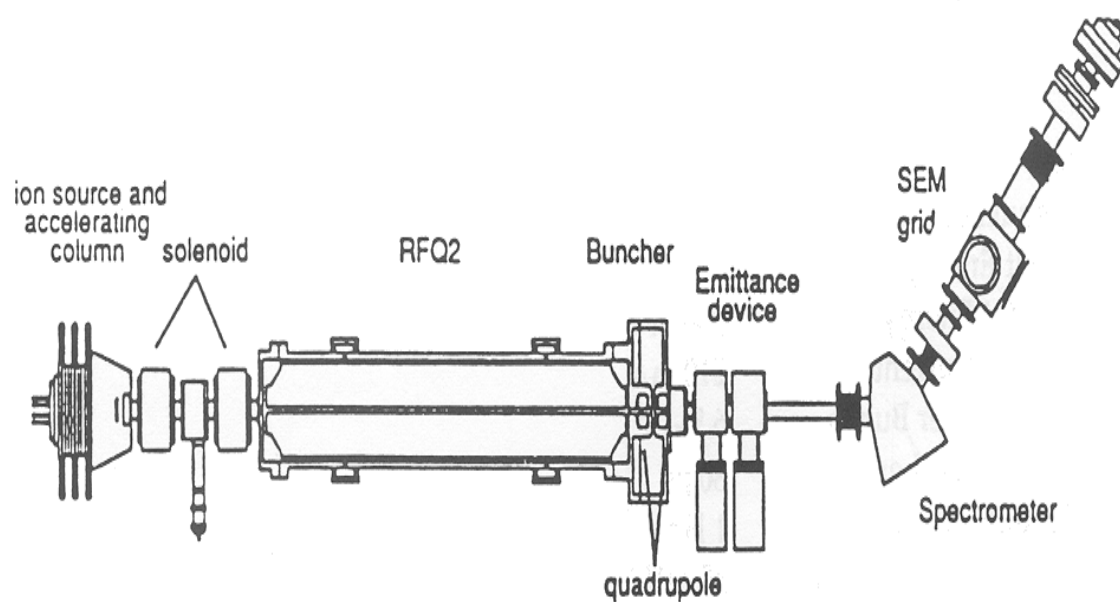


FIG. 5.36 – Banc de test pour RFQ2.

Paramètres	Valeurs ou type
Ion	H^+
Fréquence	202.56 MHz
Energie d'entrée	90 keV
Energie de sortie	750 keV
Courant en sortie	210 mA
Nombre de charges par paquet	$6.5 \cdot 10^9$
Longueur du pulse	80 μs
Taux de répétition	1 Hz
Champ crête	35 MV/m (2.4 Kp)
Ouverture moyenne	7.87 mm
Tension	178 kV
Nombre de cellules	126

TAB. 5.24 – Principaux paramètres de RFQ2.

Positions	Eléments
$z = 0$ cm	Fin des pôles RFQ
$z = 5.5$ cm	Entrée du quadripôle Q10
$z = 11.0$ cm	Sortie du quadripôle Q10
$z = 13.5$ cm	Centre du groupeur
$z = 15.5$ cm	Entrée du quadripôle Q20
$z = 21.0$ cm	Sortie du quadripôle Q20
$z = 40.1$ cm	Fentes pour la mesure

TAB. 5.25 – Positions longitudinales des différents éléments de la ligne diagnostics.

	TOUTATIS	PARMULT	Ecart (%)
α_x	-2.338	-2.787	-19.20
β_x (m/rad)	0.1819	0.1865	+2.53
$\varepsilon_{x,rms,norm.}$ (π .mm.mrad)	0.642	0.545	-15.11
\tilde{X}_{rms} (mm)	3.03	2.83	-6.60
α_y	2.758	2.771	+0.47
β_y (m/rad)	0.2509	0.2004	-20.13
$\varepsilon_{y,rms,norm.}$ (π .mm.mrad)	0.721	0.727	+0.83
\tilde{Y}_{rms} (mm)	3.77	3.39	-10.08
α_z	0.049	-0.214	-536.73
β_z (deg/MeV)	866	1592	+83.83
$\varepsilon_{z,rms,norm.}$ (deg.MeV)	0.174	0.126	-27.59

TAB. 5.26 – Paramètres du faisceau en sortie de RFQ2 calculés avec TOUTATIS et PARMULT.

5.5.2 Comparaison entre simulations et mesures

Notons tout d'abord les différences en sortie de RFQ entre le code PARMULT et TOUTATIS. Le tableau 5.26 résume les paramètres de sortie pour chaque code. Les écarts sont calculés en prenant TOUTATIS comme référence. Les tailles rms sont calculées et seront notre critère principal pour estimer la qualité des simulations. C'est, en effet, ce paramètre qui est certainement le mieux mesuré.

Il est intéressant de noter que l'écart est de 10 % pour la taille verticale. Partant de la distribution de sortie de TOUTATIS, plusieurs simulations PARMILA ont été effectuées pour trois configurations de la ligne de diagnostics. Les tableaux 5.27, 5.28 et 5.29 rassemblent les mesures et valeurs calculées par PARMULT+PARMILA et TOUTATIS+PARMILA pour chacune de ces configurations.

Il a été vérifié que les deux versions différentes de PARMILA n'induisaient pas de différence au regard des résultats obtenus en utilisant les paramètres RMS donnés par PARMULT en entrée de la version de PARMILA maintenue par Nicolas Pichoff. Les écarts avec les mesures sont du même ordre de grandeur : 22 % / 23 % d'écart pour tous les paramètres, 15 % / 17 % d'écarts pour les tailles. Les écarts entre les performances des deux codes proviennent donc des codes

	Mesures	TOUTATIS+P	Ecart (%)	PARMULT+P	Ecart (%)
α_x	-5.71	-7.140	25	-7.04	23
β_x (m/rad)	1.200	1.620	35	1.6	33
$\varepsilon_{x,rms, norm.}$ (π .mm.mrad)	0.720	0.780	8	0.74	3
\tilde{X}_{rms} (mm)	8.25	9.97	21	9.66	17
α_y	-1.300	-1.640	26	-2.3	77
β_y (m/rad)	1.100	1.160	5	1.2	9
$\varepsilon_{y,rms, norm.}$ (π .mm.mrad)	0.890	0.810	9	0.900	1
\tilde{Y}_{rms} (mm)	8.78	8.60	2	9.22	5
$\Delta\Phi$ (deg)	48	44	8	40	17
ΔW (MeV)	0.037	0.040	8	0.060	62
Moyenne des écarts			15		22
Moyenne des écarts sur la taille			10		13

TAB. 5.27 – Comparaison simulations / mesures avec groupeur allumé, G(Q10)=47.4 T/m et G(Q20)=28.7 T/m. Le P symbolise PARMILA.

	Mesures	TOUTATIS+P	Ecart (%)	PARMULT+P	Ecart (%)
α_x	-6.8	-5.27	23	-5.0	26
β_x (m/rad)	1.3	1.03	21	0.9	31
$\varepsilon_{x,rms, norm.}$ (π .mm.mrad)	0.62	0.82	32	0.68	10
\tilde{X}_{rms} (mm)	7.97	8.15	2	6.94	13
α_y	-1.8	-1.87	4	-2.3	28
β_y (m/rad)	1.2	1.11	7	1.7	42
$\varepsilon_{y,rms, norm.}$ (π .mm.mrad)	0.82	0.93	13	0.83	1
\tilde{Y}_{rms} (mm)	8.80	9.02	2	10.54	20
$\Delta\Phi$ (deg)	185	195	5	202	9
ΔW (MeV)	0.100	0.148	48	0.160	60
Moyenne des écarts			16		24
Moyenne des écarts sur la taille			3		14

TAB. 5.28 – Comparaison simulations / mesures avec groupeur éteint, G(Q10)= 46.7 T/m et G(Q20)= 21.9 T/m.

	Mesures	TOUTATIS+P	Ecart (%)	PARMULT+P	Ecart (%)
α_x	-3.8	-2.82	26	-2.1	45
β_x (m/rad)	0.75	0.63	16	0.46	39
$\varepsilon_{x,rms,norm.}$ (π .mm.mrad)	0.70	0.76	9	0.67	4
\tilde{X}_{rms} (mm)	6.43	6.14	5	4.93	23
α_y	-2.6	-2.84	9	-3.6	38
β_y (m/rad)	1.5	1.45	3	2.1	40
$\varepsilon_{y,rms,norm.}$ (π .mm.mrad)	0.84	0.79	6	0.81	4
\tilde{Y}_{rms} (mm)	9.96	9.50	5	11.57	16
Moyenne des écarts			10		26
Moyenne des écarts sur la taille			5		20

TAB. 5.29 – Comparaison simulations / mesures avec groupeur éteint, $G(Q10)= 42.6$ T/m et $G(Q20)= 19.6$ T/m.

	Distribution	rms
Moyenne des écarts	13%	13%
Moyenne des écarts sur la taille	6%	8%

TAB. 5.30 – Comparaison simulations / mesures pour les trois cas en moyenne avec conservation de la distribution de sortie de TOUTATIS ou non (paramètres rms seulement).

RFQ ou dans la façon d'utiliser leur distribution de sortie. Les résultats de la référence [15] ont été obtenus en utilisant les paramètres rms et non la distribution de sortie de PARMULT. Pour vérifier si cette approximation est responsable des écarts, le transport a été recalculé avec TOUTATIS et PARMILA mais en utilisant seulement les paramètres rms donnés par TOUTATIS en sortie. Le tableau 5.30 compare les résultats en conservant la distribution et en ne conservant que les paramètres rms en sortie de TOUTATIS. Les écarts sont un ordre de grandeur en dessous de ceux observés dans les tableaux 5.27, 5.28 et 5.29. Il peut être conclu que la différence de précision entre les calculs PARMULT+PARMILA et TOUTATIS+PARMILA est uniquement due aux différences entre les paramètres rms en sortie donnés par ces deux codes. Remarquons que l'écart entre les résultats de TOUTATIS et les mesures est du même ordre de grandeur que l'incertitude sur ces mêmes mesures pour le transverse. Le cas avec groupeur reste celui qui donne les plus gros écarts entre les codes et les mesures. Faut-il chercher du côté de la mesure ou des codes ? Les auteurs des mesures semblent douter de leurs résultats pour ce cas [16]. Le problème reste posé. Enfin notons que les moyennes calculées sont purement symboliques, le petit nombre de cas ne permet pas de faire de la statistique.

5.6 Conclusion du chapitre

Il a été démontré que les approximations faites dans PARMTEQM pour le calcul des champs extérieurs, de la charge d'espace, des effets d'image, pour le traitement des pertes, pour l'inté-

gration des équations du mouvement ont toutes des conséquences appréciables sur la dynamique. L'amplitude de ces erreurs est fonction du RFQ mais s'avèrent négligeables pour des cas standards. Si certaines des approximations peuvent être facilement corrigées, comme l'hypothèse de paraxialité, la plupart font partie intégrante du code comme la formulation analytique des champs, le choix de z comme paramètre indépendant. Une correction complète du code s'avérerait laborieuse voire impossible.

S'il devait être effectué un classement par ordre d'importance des défauts induits par ces approximations, le critère de pertes transverses serait probablement le premier suivi de l'hypothèse de paraxialité. Les défauts induits par le traitement de la charge d'espace et des effets d'images restent du second ordre. Ceci est dû au fait que le faisceau est d'abord dominé par les forces de focalisation. Ceci est moins vrai dans le plan longitudinal où l'erreur sur la charge d'espace donne des écarts plus sensibles [17]. Ce code pourrait donc être considérablement amélioré en retirant l'hypothèse de paraxialité et le critère de pertes transverses (carré).

Au titre des validations des techniques utilisées par le code, il faut noter la méthode utilisée pour définir la section d'adaptation radiale pour une large gamme de dépression du nombre d'onde en transverse et l'estimation du champ crête.

Bibliographie

- [1] Vector Fields, TOSCA version 6.6, OPERA-3D reference manual version 2.5.
- [2] K.R. Crandall, "Effects of vane-tip geometry on the electric fields in Radio-Frequency Quadrupole Linacs", L.A.N.L. report LA-9695-MS, 1983.
- [3] R. Duperrier et al., "Fields description in an RFQ and its effect on beam dynamics", conférence linac 98, Chicago.
- [4] K.R. Crandall, "Computation of Charge Distribution On or Near Equipotential Surfaces", L.A.N.L. report LA-3512, Decembre 1966.
- [5] N. Tokuda, S. Yamada, "New Formulation of the Radial Matching Section", Proceedings Linac conference 81, 19-23 Octobre 1981, Santa Fe, LANL report LA-9234-C, 313, Février 1982.
- [6] J.L. Laclare, A. Ropert, "The Saclay RFQ", rapport interne L.N.S. 063, 1er Juin 1982.
- [7] K.R. Crandall, "RFQ radial Matching Sections and fringe fields", Proceedings Linac 84, p. 109, GSI-84-11.
- [8] K. J. Sacherer, "RMS envelope equations with space charge", conférence linac 84, Darmstadt.
- [9] C. Constancias, "Microtips field effect electron emitter simulation", L.E.T.I. C.E.A. Grenoble, Département de Microtechnologie, France, XIII F.F. European User Group Meeting, San Margarita de Ligure, Italie.
- [10] Suzanne C. Brenner, L. Ridgway Scott, "The mathematical theory of finite elements methods", Springer-verlag New York Edition, 1994.
- [11] R. Duperrier, "Calculs du champ électrique maximum dans une cellule RFQ", rapport CEA/DSM/DAPNIA/SEA/IPHI/9843.
- [12] "Effects of RFQ Vane-Tip Modulation on Local Resonant Frequency", Los Alamos National Laboratory memorandum AT-1 :82-68 to R. H. Stokes, 26 mars 1982.
- [13] A. Tkatchenko, "Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique", cours D.E.A. Physique et Technologie des Grands Instruments, page 47.
- [14] N. Pichoff, J.M. Lagniel, S. Nath, "Simulation results with an alternate 3D space charge routine, PICNIC", MO4042, conférence LINAC 1998, Chicago.
- [15] A. Lombardi, E. Tanke, T.P. Wangler, M. Weiss, "Beam dynamics of the CERN RFQ2 comparison of theory with beam measurements", rapport interne CERN/PS93-13 (HI), mars 1993.

- [16] Communication privée de A. Lombardi.
- [17] N. Pichoff, “Etude théorique et expérimentale du halo d’un faisceau intense de particules chargées dans un accélérateur”, thèse Université Paris Sud Orsay, 11 décembre 1997.

Chapitre 6

Développements complémentaires

Ce chapitre consiste en une revue de différents développements pour la dynamique des faisceaux dans les RFQ. Sont décrits : l'influence des gaps de couplage radiofréquence sur la dynamique de faisceau ; une méthode rapide pour concevoir un RFQ ; une méthode pour concevoir deux RFQ consécutifs. Ce dernier cas est étudié pour permettre l'insertion d'un système rapide de découpage du faisceau ("chopper") dans la partie basse énergie d'un linac haute intensité.

6.1 Influence des gaps de couplage sur la dynamique

Pour des RFQ assez longs (de l'ordre de 8 mètres par exemple), la cavité est segmentée en plusieurs tronçons (figure 6.1). Ce type de structure est communément appelée "structure compensée". Le principal avantage de cette segmentation est un amortissement longitudinal de toute perturbation sur l'amplitude du champ le long de la cavité [1]. Les limites de ces segments sont matérialisées par des plaques insérées régulièrement dans la structure¹. A la limite des segments, les quatre lames sont coupées. Le gap obtenu est alors ajusté pour rendre équidistants les modes

¹Tous les 2 m pour les RFQ de LEDA et d'IPHI.

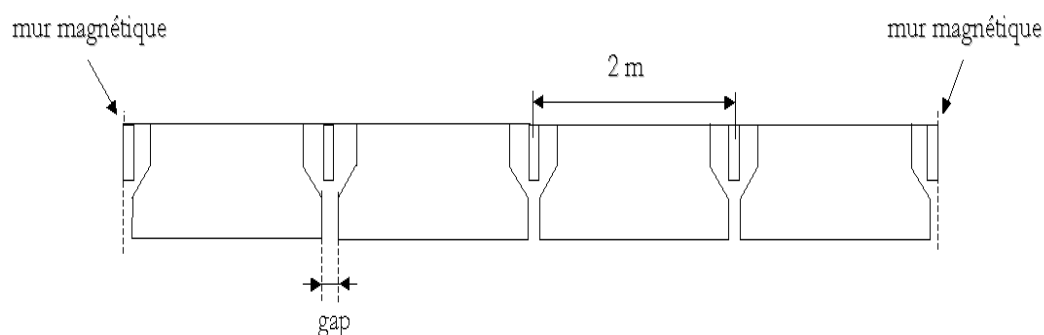


FIG. 6.1 – Schéma représentant la segmentation d'un RFQ.

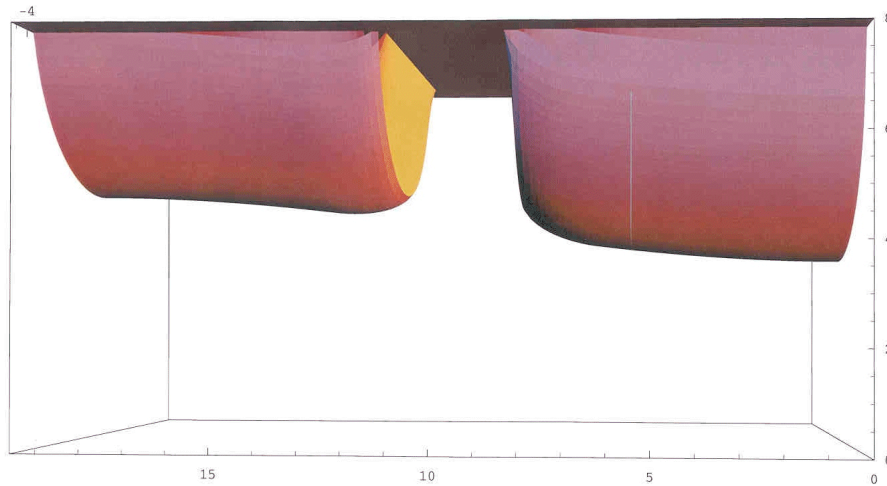


FIG. 6.2 – Profil des pôles avec un gap de couplage radiofréquence.

quadripolaires parasites du mode fondamental [2] (figure 6.2).

L'effet de la coupure des pôles sur le faisceau était inconnu par les concepteurs de RFQ. Afin de minimiser cet effet, Lloyd Young a proposé de situer ce gap dans une cellule RFQ à la position longitudinale traversée par la particule synchrone au moment où l'amplitude des champs alternatifs est nulle [3]. Pour appliquer ce concept à une cellule particulière, la position du centre du gap est donnée par :

$$z = L_c \frac{|\phi_s|}{\pi} \quad (6.1)$$

avec $z = 0$ au début de la cellule ; L_c , la longueur de la cellule ; ϕ_s , la phase synchrone au centre de la cellule.

Les surfaces équipotentielles induites par une telle géométrie dans la zone utile peuvent être calculées numériquement ; cette géométrie a été implémentée dans le code TOUTATIS. Les figures 6.3 et 6.4 représentent la distribution du potentiel dans un plan, sans et avec gap de couplage, respectivement.

Une autre alternative, pour minimiser cet effet, consiste tout simplement à réduire la taille du gap sans dégrader sensiblement la qualité de la compensation de la structure. Pour déterminer l'influence de ces gaps selon les configurations (méthode de Young, gap plus ou moins grand), une version intermédiaire du RFQ du projet I.P.H.I. a été simulée. Le tableau 6.1 rassemble les différents résultats. Les cas marqués d'un astérisque indique que la méthode de Young a été appliquée. Les autres cas correspondent à un gap centré dans la cellule.

Ces simulations font apparaître clairement que les gaps de couplage ne doivent pas être négligés lorsque l'on cherche à simuler la dynamique du faisceau dans les RFQ des projets I.P.H.I. et L.E.D.A.. La combinaison des deux méthodes rend quasi nul l'effet des gaps sur la dynamique pour ce cas. Pour le RFQ du projet I.P.H.I., il était initialement prévu d'utiliser des gaps de 3.5 mm de large situés au centre des cellules, ils sont désormais placés en tenant compte de la phase synchrone et d'une largeur de 2.2 mm.

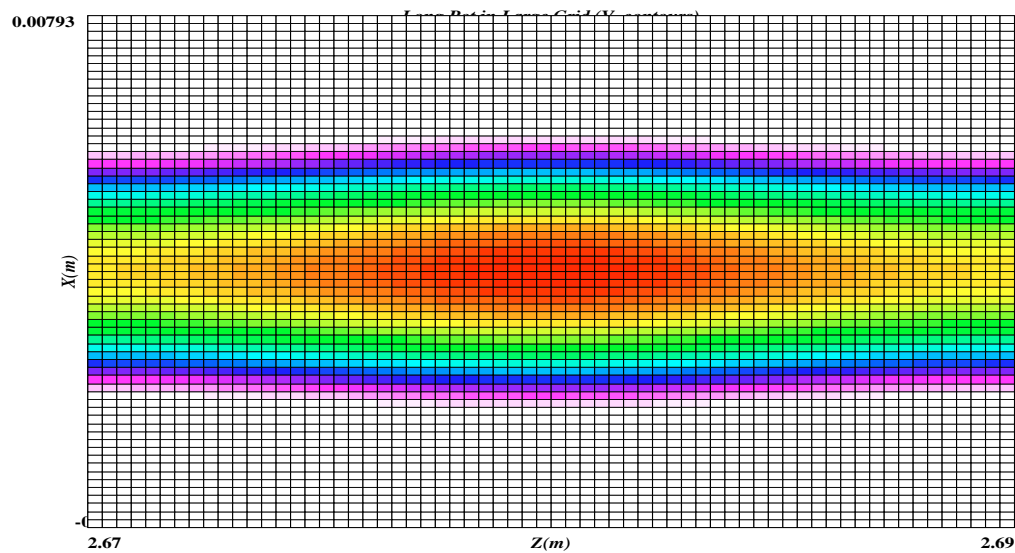


FIG. 6.3 – Distribution du potentiel dans un plan sans gap de couplage.

XGrafix 2.50

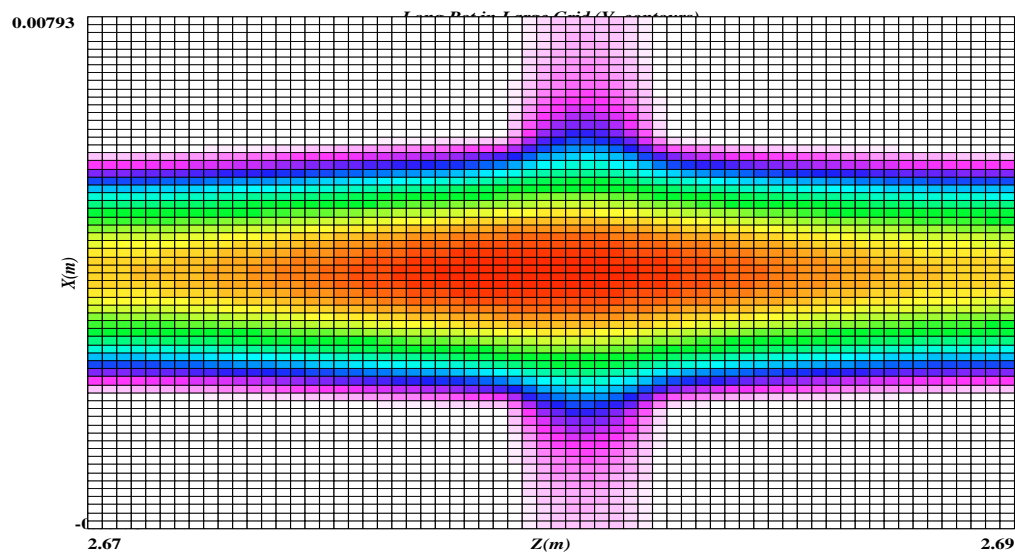


FIG. 6.4 – Distribution du potentiel dans un plan avec gap de couplage.

XGrafix 2.50

Largeur de gap (mm)	\emptyset	3.5	2.2	3.5*	2.2*
$\tilde{\varepsilon}_x$ (π .mm.mrad)	0.264	0.325	0.277	0.285	0.267
α_x	2.07	1.70	1.88	1.99	2.06
β_x (m.rad $^{-1}$)	0.451	0.383	0.411	0.433	0.445
$\tilde{\varepsilon}_y$ (π .mm.mrad)	0.259	0.325	0.278	0.283	0.266
α_y	-2.11	-1.95	-2.09	-1.94	-2.03
β_y (m.rad $^{-1}$)	0.464	0.431	0.467	0.428	0.451
$\tilde{\varepsilon}_z$ (deg.MeV)	0.156	0.182	0.162	0.174	0.159
α_z	-0.175	-0.132	-0.147	-0.162	-0.181
β_z (deg.MeV $^{-1}$)	668	539	629	577	642
Transmission (%)	98.79	97.01	98.72	98.67	98.75
Rendement (%)	96.89	94.95	96.79	96.53	96.76

TAB. 6.1 – Résultats pour différentes configurations des gaps de couplage (largeur, position).

6.2 Conception d'un RFQ

Les chapitres précédents ne traitaient que d'une seule question : comment simuler au mieux une structure RFQ aux paramètres connus ? Cette question est certes fondamentale mais elle en appelle une autre qui est tout aussi fondamentale : quels paramètres doit-on imposer à une structure RFQ afin de réaliser les fonctions de groupement et d'accélération du faisceau en régime de charge d'espace ? Pour répondre à cette question, le lecteur trouvera dans la littérature plusieurs pistes intéressantes combinant plusieurs critères de réalisations [4-8]. Dans cette section, nous allons développer une méthode simple basée sur les équations d'enveloppe en charge d'espace [9], qui permet la conception rapide d'une structure RFQ avec des performances honorables.

6.2.1 Approximations initiales

Nous ne nous intéresserons qu'aux effets moyens ressentis par le faisceau. Pour cela, plutôt que de tenir compte du caractère alternatif (i.e. focalisant défocalisant) des forces de confinement extérieures, nous utiliserons un canal de focalisation continue équivalent. Ces simplifications réduisent alors les paramètres caractéristiques de la taille du faisceau de trois à deux, soit :

$$(\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}) \Rightarrow (\widehat{R}, \widehat{Z}) \quad (6.2)$$

où \widehat{R} est le rayon moyen du faisceau et \widehat{Z} la demi taille longitudinale du paquet. Dans un RFQ, le faisceau est tout d'abord continu puis en paquets, faute de pouvoir appréhender cette transition proprement par une équation d'enveloppe, nous représenterons toujours le faisceau à l'aide d'un ellipsoïde uniformément chargé à symétrie de révolution transverse, la demi-taille longitudinale variant le long de la structure. Le modèle considérera l'émittance longitudinale toujours nulle. En réalité, celle-ci vaut initialement zéro puis augmente le long du RFQ, mais nous verrons que cette approximation donne de bons résultats, le plan longitudinal étant principalement dominé par la charge d'espace.

Les équations des enveloppes rms deviennent :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{r}}{ds^2} + \frac{\langle r F_r \rangle}{\gamma m (\beta c)^2 \tilde{r}} - \frac{\tilde{\varepsilon}_r^2}{\tilde{r}^3} = 0 \\ \frac{d^2 \tilde{z}}{ds^2} + \frac{\langle z F_z \rangle}{\gamma m (\beta c)^2 \tilde{z}} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

où m est la masse de la particule, γ et β les facteurs relativistes du faisceau, c la vitesse de la lumière dans le vide, s la position longitudinale du paquet dans la structure. L'expression $\langle u F_u \rangle$ signifie que la force totale est linéarisée en intégrant sur toute la distribution. Elle comprend les forces extérieures et les forces de charge d'espace.

6.2.2 Calcul des forces

6.2.2.1 Forces extérieures

Afin de simplifier les calculs de $\langle u F_u \rangle$, nous ne prendrons que le premier terme du développement représentant E_r et E_z , soit :

$$\begin{cases} F_r(r) = \frac{qV}{R_0^2} r \\ F_z(z) = qkVA_{10} \sin(kz) \end{cases} \quad (6.4)$$

où q est la charge de l'ion, $k = 2\pi/\beta\lambda$, V la tension inter-électrodes, R_0 l'ouverture moyenne des pôles, A_{10} le coefficient pondérateur dû à la modulation². Ces forces sont les forces moyennes ressenties par le paquet dans son référentiel (r, z) . Pour utiliser les équations du mouvement (6.3), il faut calculer les quantités $\langle u F_u \rangle$, soit :

$$\begin{aligned} \langle r F_r \rangle_{ext} &= \frac{2\pi \int_{-\hat{Z}}^{\hat{Z}} \int_0^{\hat{R}} \sqrt{1-(z/\hat{Z})^2} r \cdot \frac{qV}{R_0^2} r \cdot r dr dz}{2\pi \int_{-\hat{Z}}^{\hat{Z}} \int_0^{\hat{R}} \sqrt{1-(z/\hat{Z})^2} r dr dz} \\ &= \frac{2}{5} q \frac{V}{R_0^2} \hat{R}^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

et :

$$\begin{aligned} \langle z F_z \rangle_{ext} &= \frac{2\pi \int_{-\hat{Z}}^{\hat{Z}} \int_0^{\hat{R}} \sqrt{1-(z/\hat{Z})^2} z \cdot qkVA_{10} \sin(kz) \cdot r dr dz}{2\pi \int_{-\hat{Z}}^{\hat{Z}} \int_0^{\hat{R}} \sqrt{1-(z/\hat{Z})^2} r dr dz} \\ &= \frac{3qVA_{10} [3k\hat{Z} \cos(k\hat{Z}) + (k^3\hat{Z}^3 - 3) \sin(k\hat{Z})]}{4k^3\hat{Z}^3} \end{aligned} \quad (6.6)$$

²Remarquons que le modèle a été simplifié en prenant $A_{01} = 1$ pour la focalisation transverse.

Par commodité, ces deux forces peuvent être réécrites :

$$\begin{cases} \langle rF_r \rangle_{ext} = \frac{V}{R_0^2} \hat{R} f(\hat{R}) \\ \langle zF_z \rangle_{ext} = VA_{10} g(\hat{\varphi}) \end{cases} \quad (6.7)$$

où $\hat{\varphi} = k\hat{Z}$.

6.2.2.2 Forces de charge d'espace

Deux cas sont à considérer : l'ellipsoïde allongé ($\hat{R} < \hat{Z}$) et l'ellipsoïde aplati ($\hat{R} > \hat{Z}$). Le cas intermédiaire (la sphère) n'est pas nécessaire, l'égalité stricte de \hat{R} et \hat{Z} étant improbable. Les champs, pour de telles géométries à densité de charges uniforme, sont donnés dans le premier tome d'Émile Durand : "Les distributions" aux Éditions Masson. Les forces sont calculées avec des intégrales du type (6.6).

Pour l'ellipsoïde allongé :

$$\langle rF_r \rangle_{ce} = \frac{3qI\lambda}{20c\pi\varepsilon_0(\hat{R}^2 - \hat{Z}^2)} \left\{ \frac{\hat{R}^2 \log \left[\frac{\sqrt{2\hat{Z}(\hat{Z} + \sqrt{\hat{Z}^2 - \hat{R}^2}) - \hat{R}^2}}{\hat{R}^2} \right]}{\sqrt{\hat{Z}^2 - \hat{R}^2}} - \hat{Z} \right\} \quad (6.8)$$

et :

$$\langle zF_z \rangle_{ce} = \frac{3qI\lambda\hat{Z}}{40c\pi\varepsilon_0(\hat{R}^2 - \hat{Z}^2)^{3/2}} \left\{ \hat{Z} \log \left[\frac{2\hat{Z}(\hat{Z} + \sqrt{\hat{Z}^2 - \hat{R}^2}) - \hat{R}^2}{\hat{R}^2} \right] - 2\sqrt{\hat{Z}^2 - \hat{R}^2} \right\} \quad (6.9)$$

Pour l'ellipsoïde aplati :

$$\langle rF_r \rangle_{ce} = -\frac{3qI\lambda}{20c\pi\varepsilon_0(\hat{Z}^2 - \hat{R}^2)} \left\{ \frac{\hat{R}^2 \arctan \left[\frac{\sqrt{\hat{R}^2 - \hat{Z}^2}}{\hat{Z}} \right]}{\sqrt{\hat{R}^2 - \hat{Z}^2}} - \hat{Z} \right\} \quad (6.10)$$

et :

$$\langle zF_z \rangle_{ce} = \frac{3qI\lambda\hat{Z}}{20c\pi\varepsilon_0(\hat{Z}^2 - \hat{R}^2)} \left\{ \frac{\hat{Z} \arctan \left[\frac{\sqrt{\hat{R}^2 - \hat{Z}^2}}{\hat{Z}} \right]}{\sqrt{\hat{R}^2 - \hat{Z}^2}} - 1 \right\} \quad (6.11)$$

avec I , le courant du faisceau, en ampère, et λ , la longueur d'onde.

6.2.3 Détermination des paramètres

Les équations du mouvement sont maintenant complètes. Il reste à déterminer les valeurs initiales des paramètres et leur variation. Pour cela, nous allons imposer plusieurs critères :

- pour minimiser les pertes transverses, imposons $\hat{R} = cte$, soit $d_s^2 \hat{R} = 0$. Cette constante est déterminée par adaptation du faisceau pour le canal en entrée de RFQ défini par la tension et l'ouverture. Cette étape peut s'effectuer par minimisation de l'enveloppe selon la procédure décrite dans le chapitre précédent.
- le canal est découpé en deux parties : une partie où la phase synchrone est maintenue à -90° (grande acceptation) pour le groupement du faisceau, appelons la *zone de groupement* (ZG) ; une partie où la phase synchrone est augmentée jusqu'au environ de -30° pour l'accélération du paquet formé. Cette dernière sera appelée *zone d'accélération* (ZA).
- la variation de la demi taille longitudinale $\hat{Z}(s)$ est imposée. Elle suit une fonction allant de $\beta\lambda/2$ à la valeur souhaitée dans la zone de groupement et est maintenue constante le plus longtemps possible dans la zone d'accélération. La limitation est fonction de critères propres au concepteur (modulation maximum, ...).

Ces différents critères ne font que refléter les souhaits de beaucoup de concepteurs de RFQ. En remplaçant $\hat{Z}(s)$ par l'extension en phase $\hat{\varphi}(s)$ équivalente, soit :

$$\hat{\varphi}(s) = \hat{Z}(s) \frac{2\pi}{\beta\lambda} = k\hat{Z}(s) \quad (6.12)$$

et en utilisant l'équivalence $\hat{Z} = 5\tilde{z}$ pour un ellipsoïde, le système défini par les expressions (6.3) devient :

$$\begin{cases} \left(\frac{V}{R_0^2}\right)(s) &= \frac{\tilde{r}\gamma m(\beta c)^2}{f(R)} \left(\frac{\langle r F_r \rangle_{ce}}{\gamma m(\beta c)^2 r} + \frac{\tilde{\varepsilon}_r^2}{r^3}\right) \\ (VA_{10})(s) &= \frac{\gamma m(\beta c)^2 \hat{\varphi}(s)}{5k g(\hat{\varphi}(s))} \left(\frac{5k \langle z F_z \rangle_{ce}}{\gamma m(\beta c)^2 \hat{\varphi}(s)} - \frac{\partial_s^2 \hat{\varphi}(s)}{k}\right) \end{cases} \quad (6.13)$$

pour la zone de groupement où β est constant selon s . Pour la zone d'accélération, le paquet étant formé, nous choisissons de conserver les forces de focalisation constantes. Ce choix a deux avantages : le premier est de maintenir la forme du paquet ; le deuxième est de donner directement la variation de la modulation une fois la loi de phase fixée. En effet, en maintenant la force de focalisation longitudinale constante pendant l'accélération il vient :

$$(VA_{10})(s) = (VA_{10})(l_{ZG}) \frac{g\left(\frac{2\pi}{\beta(l_{ZG})\lambda} \hat{Z}(l_{ZG})\right)}{g\left(\frac{2\pi}{\beta(s)\lambda} \hat{Z}(l_{ZG})\right)} \quad (6.14)$$

où l_{ZG} est la longueur de la zone de groupement.

La fonction $\beta(s)$ est complètement déterminée par la loi de phase puisque le gain en énergie par cellule vaut :

$$\Delta W(s) = q \frac{\pi}{4} (VA_{10})(s) \cos(\Phi_S(s)) \quad (6.15)$$

où $(VA_{10})(s)$ varie suffisamment lentement pour que l'on puisse prendre la valeur calculée à la cellule précédente comme étant celle de la cellule considérée [4]. Le processus est alors intéressant : partir de $(VA_{10})(l_{ZG})$, valeur obtenue en fin de zone de groupement et $\Phi_S > -90^\circ$ implique un gain pour $\beta(s)$ et donc un gain de $(VA_{10})(s)$ via l'expression (6.14), etc... La modulation augmente "d'elle-même" via l'accélération et vice-versa. Pour ne pas obtenir des modulations trop fortes qui conduisent à une diminution excessive de a , l'ouverture minimum, le concepteur peut fixer un plafond pour la modulation. Cette deuxième option implique, cependant une augmentation de la taille longitudinale du paquet.

Pour la loi de phase synchrone, $\Phi_S(s)$, le même principe peut être utilisé. L'acceptance en phase, $\Delta\Psi$, du linac est définie par l'expression [4] :

$$\tan(\Phi_S) = \frac{\sin(\Delta\Psi) - \Delta\Psi}{1 - \cos(\Delta\Psi)} \quad (6.16)$$

Pour maintenir la stabilité du paquet, il faut remplir la condition :

$$2\hat{\varphi}(s) < \Delta\Psi \quad (6.17)$$

Cette condition lie l'acceptance à la vitesse si l'on veut maintenir la dimension longitudinale du paquet. La variation de $\Delta\Psi$ le long de la structure devient :

$$\Delta\Psi(s) = 2\pi \frac{\beta_0}{\beta(s)} \quad (6.18)$$

où β_0 est la valeur en entrée de structure. La valeur de $\Phi_S(s)$ s'obtient directement en utilisant l'expression (6.16). Il est nécessaire d'introduire une certaine marge puisque l'acceptance n'est pas symétrique par rapport à Φ_S . Pour obtenir cette marge à accélération équivalente, la phase synchrone peut être modifiée à l'aide de l'expression :

$$(\Phi_S)_f = -\arccos\left(\frac{(\Phi_S)_i}{\alpha}\right) \quad (6.19)$$

Typiquement, des valeurs de α autour de 1.1 sont acceptables. Plus α est élevé, plus la marge est importante mais plus le RFQ sera long pour une même énergie finale.

Une remarque supplémentaire doit être faite pour compléter et finaliser la méthode. Si la phase synchrone, en fin de zone de groupement, n'est pas arbitrairement incrémentée, le processus "d'auto-augmentation" de la phase synchrone, de la modulation et de la vitesse ne démarre pas. Cet incrément est à l'initiative du concepteur. Il semble qu'une augmentation linéaire de 5° sur une dizaine de cellules soit acceptable.

6.2.4 Critère d'adiabaticité

Le modèle, tel qu'il a été décrit, laisse au concepteur le choix de la longueur de la zone de groupement. Cette distance ne peut, cependant, pas être trop courte, au risque d'induire une perturbation trop rapide s'accompagnant d'un grossissement irréversible de l'émittance "transverse" du système, "transverse" car l'émittance longitudinale ne peut, elle, qu'augmenter dans cette zone. Un critère pour le taux de variation de l'amplitude des forces de focalisation transverses est donc nécessaire. Lorsque l'on considère la détente d'un gaz à l'aide d'un piston, le processus est dit adiabatique si la vitesse du piston est faible devant la vitesse du son dans le gaz. Autrement dit, les forces extérieures doivent varier plus lentement que les forces d'interaction dans le système [10]. La dynamique du milieu est alors une succession d'états d'équilibre et l'entropie n'augmente pas. Dans notre cas, les forces d'interaction sont les forces de charge d'espace. La distance de relaxation d'un faisceau en régime de charge d'espace, l , est :

$$l \approx \frac{l_0/4}{1 - \eta_r} = \mu\beta\lambda \quad (6.20)$$

où l_0 est la longueur d'onde bêatron et η_r est la dépression du nombre d'onde due à la charge d'espace [11]. La constante μ permet d'exprimer cette distance comme une fraction de la période spatiale de focalisation. Il faut donc s'assurer que la variation de la force appliquée est négligeable sur cette distance. Plutôt que la force totale, nous prendrons le rapport entre la force de charge d'espace et la force de confinement radiale, χ , pour simplifier le traitement :

$$\chi(s) \propto \frac{\langle rF_r \rangle_{ce}}{\langle rF_r \rangle_{ext}} \quad (6.21)$$

Pour 60° d'avance de phase et 100 mA, cette distance nécessaire à l'établissement de l'équilibre est de quelques mailles. D'une manière plus générale, pour respecter ce critère, en considérant que la variation est infinitésimale sur une période spatiale, χ doit respecter l'inégalité suivante :

$$\Lambda(\chi) < \varepsilon \quad (6.22)$$

en posant :

$$\Lambda = \mu\beta\lambda \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial s} \quad (6.23)$$

où ε est de l'ordre de quelques 10^{-2} . Après plusieurs tests, il semble que cet ordre de grandeur pour ε soit un bon compromis. Imposer une valeur plus faible améliore la qualité du canal mais allonge la zone de groupement.

6.2.5 Passage au faisceau réel

6.2.5.1 Equivalence transverse

Le canal du RFQ n'étant pas un canal de focalisation continue mais alternativement focalisant et défocalisant dans un plan, il est nécessaire d'établir des correspondances pour transposer le modèle au cas réel. Pour que les deux canaux soient équivalents, il faut que les avances de phase des particules soient identiques sur une période du canal FD. Les forces du canal FD sont modulées par $\sin(\omega t)$ soit $\sin(ks + \varphi)$ où φ est la phase de la particule au moment où elle rentre dans le canal. Dans un canal de focalisation continue, la trajectoire des particules d'un faisceau uniforme peut être modélisée par la relation :

$$R_c(s) = R \sin\left(\frac{2\pi}{l}s\right) \quad (6.24)$$

où l est la longueur d'onde betatron et R l'amplitude maximum de l'oscillation de la particule. Si l est grand devant $\beta\lambda$, ce qui est d'autant plus vrai que la charge d'espace est importante, la moyenne de $\widehat{F}_r r$ sur une période est :

$$\begin{aligned} \overline{F_r} &= \frac{1}{\beta\lambda} \int_0^{\beta\lambda} \widehat{F}_r \cdot R_c(s) ds \\ &\simeq \widehat{F}_r \cdot R_c(\beta\lambda/2) \end{aligned} \quad (6.25)$$

où \widehat{F}_r est le gradient de la force. Pour le canal de focalisation périodique, la trajectoire d'une particule, ayant la même avance de phase que celle définie par (6.24), est :

$$R_p(s) = R \sin\left(\frac{2\pi}{l}s\right) \cdot [1 + \delta \sin(ks)] \quad (6.26)$$

où la trajectoire est modulée d'une petite amplitude δ . Cette modulation a la même période que les forces de focalisation et correspond à la modulation de l'enveloppe du faisceau. Le calcul de $R_p(s) \cdot \widehat{F}_x$ devient un peu plus compliqué :

$$\begin{aligned} \overline{F_x} &= \frac{1}{\beta\lambda} \int_0^{\beta\lambda} \widehat{F}_x \sin(ks + \varphi) \cdot R_p(s) ds \\ &\simeq \widehat{F}_x \cdot R_c(\beta\lambda/2) \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Si bien que, pour que les canaux soient équivalents, l'amplitude des forces de focalisation périodiques doit obéir à la relation :

$$\widehat{F}_x = \frac{2}{\delta} \widehat{F}_r \quad (6.28)$$

Typiquement, le facteur $2/\delta$ vaut environ 20. Cette valeur est à calculer lors de l'adaptation au canal FD. Pour les équivalences sur les tailles, la technique consiste à égaliser \widehat{X} et \widehat{R} .

Paramètres	Valeurs ou type
Ion	H^+
Fréquence	352.2 MHz
Energie d'entrée	95 keV
Courant	100 mA
Ouverture moyenne	4.13 mm
Tension	100 kV
Nombre de cellules pour l'adaptation	6
Emittance totale normalisée en X (4D Water Bag)	1.5π .mm.rad
Emittance totale normalisée en X (Uniforme) équivalente	1.0π .mm.rad
Emittance totale normalisée radiale (Uniforme) équivalente	2.0π .mm.rad
dépression du nombre d'onde	0.67
μ	4.5

TAB. 6.2 – Paramètres initiaux du RFQ.

6.2.5.2 Equivalence longitudinale

L'amplitude de la force de focalisation longitudinale est modulée par le battement radio-fréquence et la géométrie des lames. Ces deux modulations de l'amplitude aboutissent à une variation de type :

$$F_z \propto \sin(ks) \sin(\omega t) = \sin^2(ks) \quad (6.29)$$

Si bien qu'en moyenne, la force est deux fois plus faible que celle obtenue à la section 6.2.2, la moyenne de $\sin^2(x)$ sur une période valant $1/2$. Il faut donc multiplier par 2 l'expression (6.13) pour obtenir la force longitudinale à appliquer.

6.2.6 Illustration de la méthode pour un cas particulier

Pour illustrer la méthode, nous considérerons des paramètres initiaux typiques d'un RFQ pour fort courant dont les paramètres sont résumés dans le tableau 6.2. La recherche des paramètres adaptés en entrée de structure donne une valeur de 1.5 mm pour \hat{R} et de 20 pour $2/\delta$.

La fonction analytique choisie pour imposer un groupement est :

$$\hat{\varphi}(s) = 180 - 50 \times \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{l_{ZG}}s\right) \right] \quad (6.30)$$

qui permet d'imposer une réduction de l'extension en phase de 180° à 80° pour la demi-taille. Les fonctions de focalisations en radial, $(V/R_0^2)(s)$, et en longitudinal, $(VA_{10})(s)$, qui en découlent sont calculées à l'aide des expressions (6.13). Pour minimiser le champ crête, R_0 est

$\tilde{\varepsilon}_{x,n.}/\tilde{\varepsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\varepsilon}_{y,n.}/\tilde{\varepsilon}_{0,n.}$	$\tilde{\varepsilon}_{z,n.}$ (deg.MeV)	Rendement	Transmission
1.07	1.08	0.145	99.98%	99.98%

TAB. 6.3 – Grossissement d'émittances transverses rms normalisées, émittance longitudinale, rendement, et transmission totale.

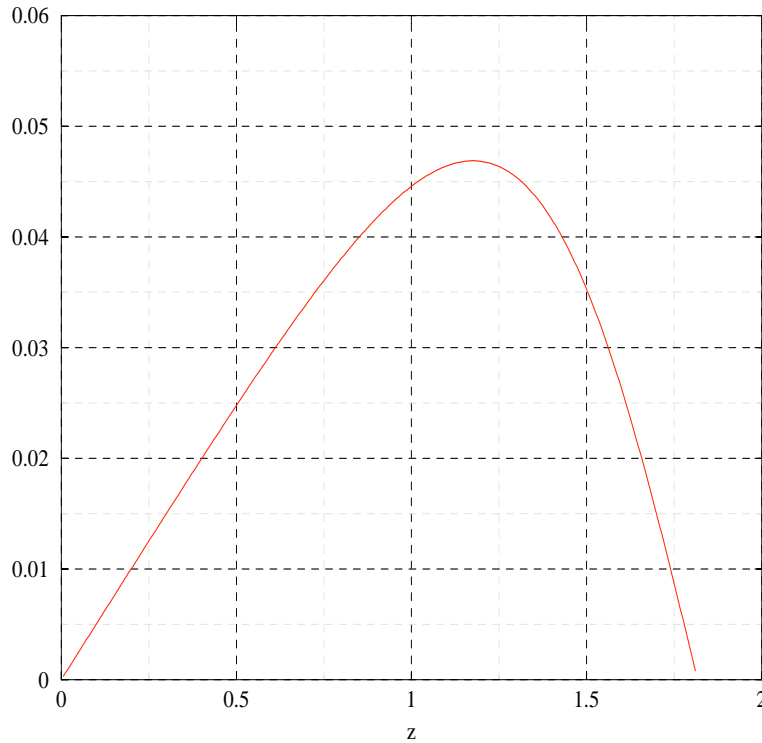


FIG. 6.5 – Variation de Λ le long de la zone de groupement.

constant sur une première portion du RFQ puis diminue (voir chapitre 3). La tension varie de manière à respecter $(V/R_0^2)(s)$ via $R_0(s)$. Pour la zone d'accélération, la modulation est limitée à 1.7 et la phase synchrone majorée par -33° . La constante α , nécessaire au calcul de la loi de phase, est prise égale à 1.1. Nous aurions pu faire un tout autre choix pour chacune de ces valeurs. C'est une affaire de compromis par rapport à d'autres contraintes comme la longueur du RFQ, le champ crête, ou bien la sensibilité à baisser la puissance radiofréquence. Ce jeu de paramètres choisi aboutit à une longueur de RFQ de 6.35 m et à un champ crête supérieur à 42 MV/m (soit 2.3 fois le champ Kilpatrick). Plusieurs des paramètres de la structure sont décrits sur les figures 6.5 à 6.9. Le tableau 6.3 rassemble les performances du RFQ obtenu. La figure 6.10 montre l'évolution de l'enveloppe du faisceau. Différentes distributions en sortie sont décrites par les figures 6.11 et 6.12. Un point intéressant de la méthode : est que la structure obtenue n'a pas de pertes à haute énergie (figure 6.13).

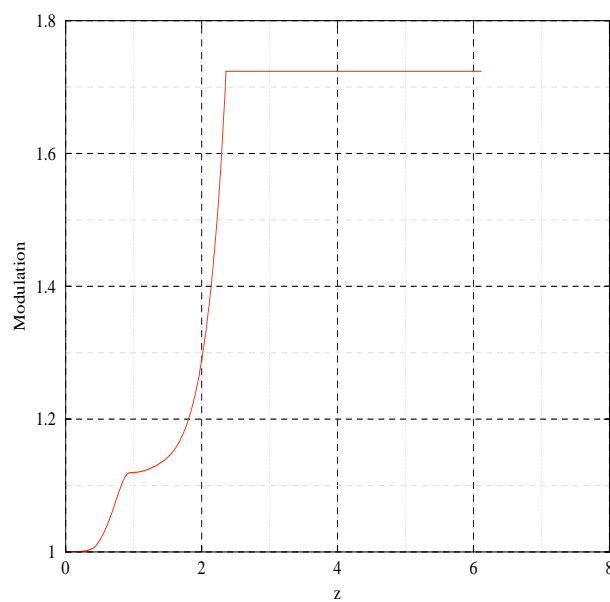


FIG. 6.6 – Variation de la modulation le long du RFQ. La première variation est issue du modèle pour la zone de groupement, la seconde du modèle pour la zone d'accélération avec un plafonnement à 1.7.

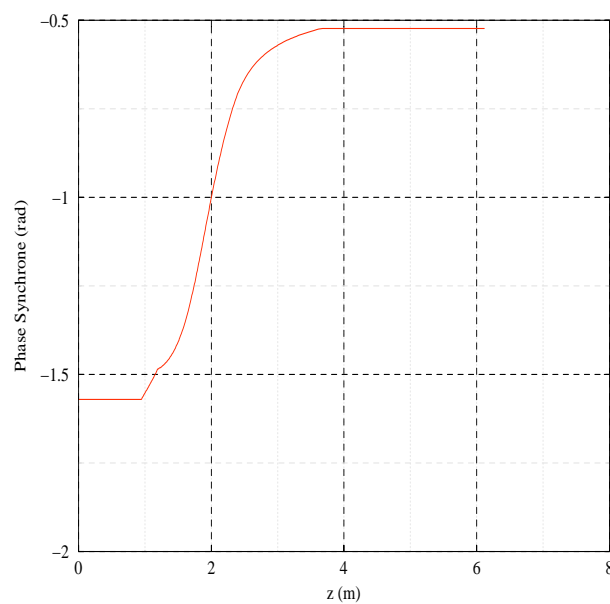


FIG. 6.7 – Variation de la phase synchronique le long du RFQ.

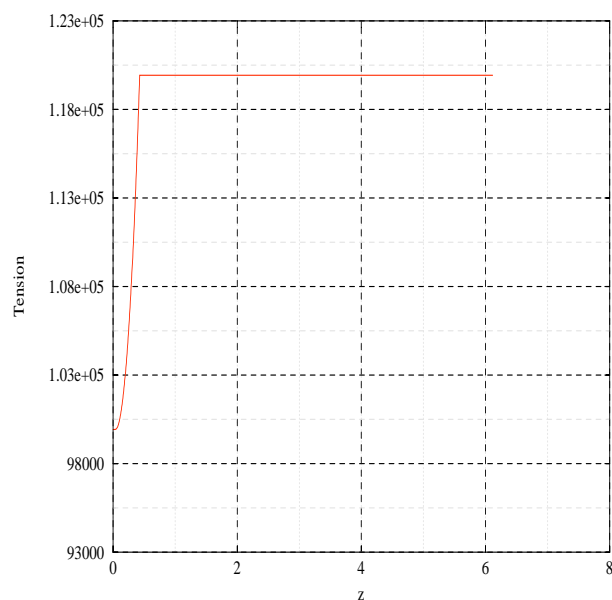


FIG. 6.8 – Variation de la tension le long du RFQ. L'augmentation n'a lieu que dans la zone de groupement.

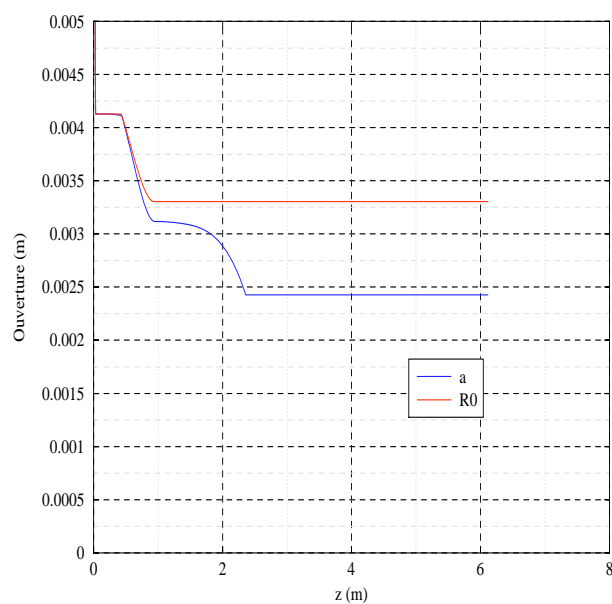


FIG. 6.9 – Variation de R_0 et a le long du RFQ.

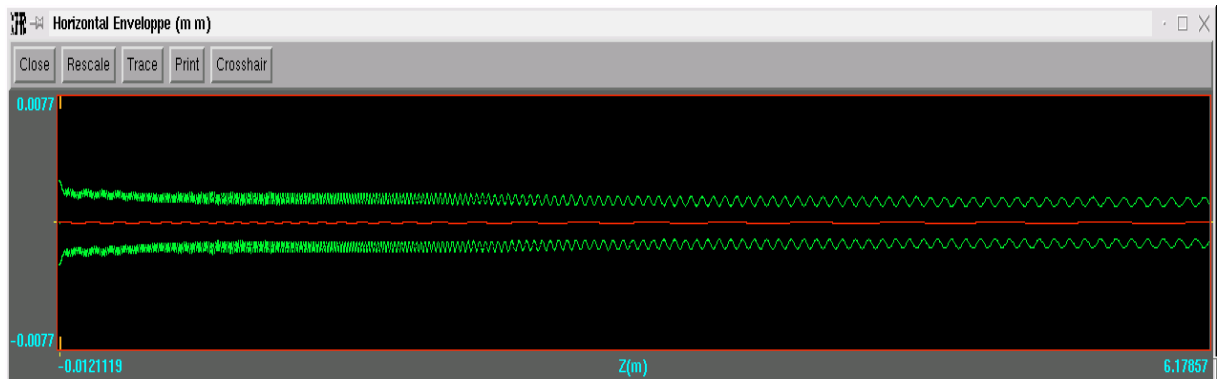


FIG. 6.10 – Variation de l'enveloppe horizontale du faisceau. Cette enveloppe montre l'intérêt à limiter la force de focalisation longitudinale en gardant constante la force transverse dans la zone d'accélération ; les pertes à haute énergie sont minimisées par la diminution progressive de la taille transverse qui en découle.

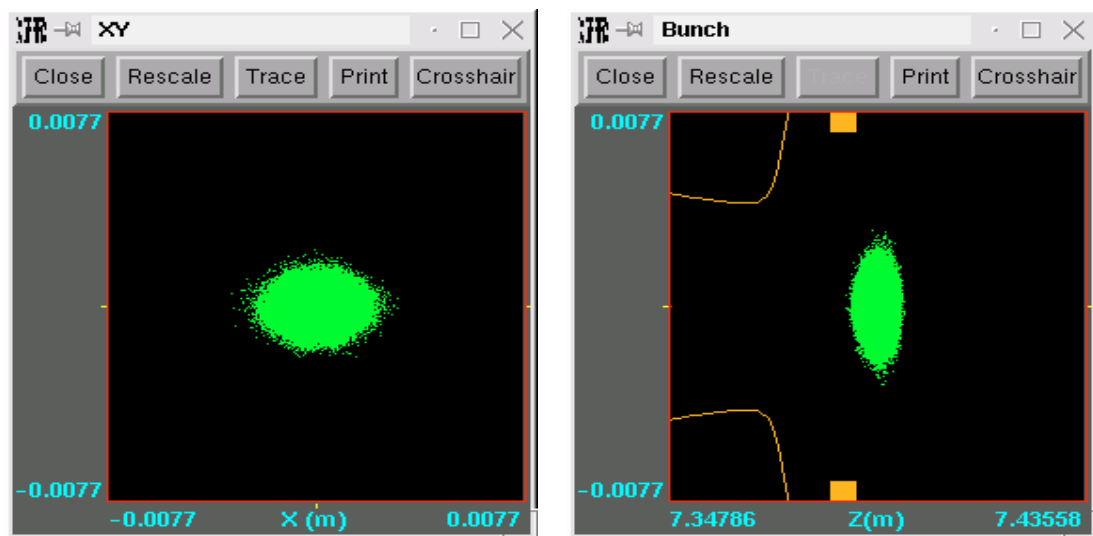


FIG. 6.11 – 6.12 Paquet de face et de coté en sortie du RFQ. La géométrie est bien celle d'un ellipsoïde, ceci démontre que les particules ont été principalement soumises aux forces linéaires rendant cohérent le modèle utilisé.

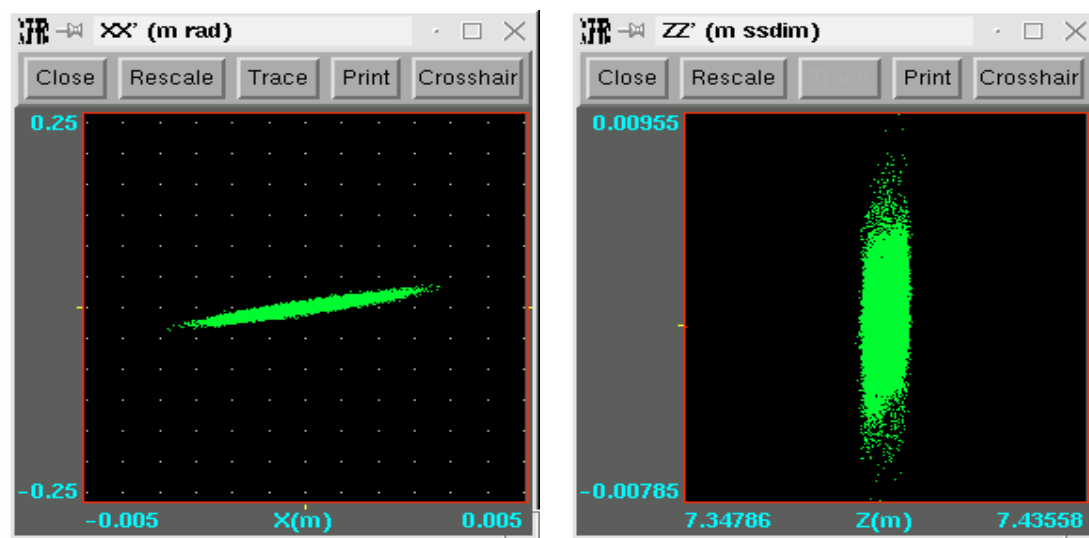


FIG. 6.12 – Distribution du paquet dans les espaces de phase transverse XX' et longitudinal ZZ' en sortie du RFQ.



FIG. 6.13 – Variation des deux émittances transverses et dépôt de puissance en watt le long du RFQ. Aucune particule n'est perdue avec une énergie supérieure à 2 MeV, seuil d'activation du cuivre.

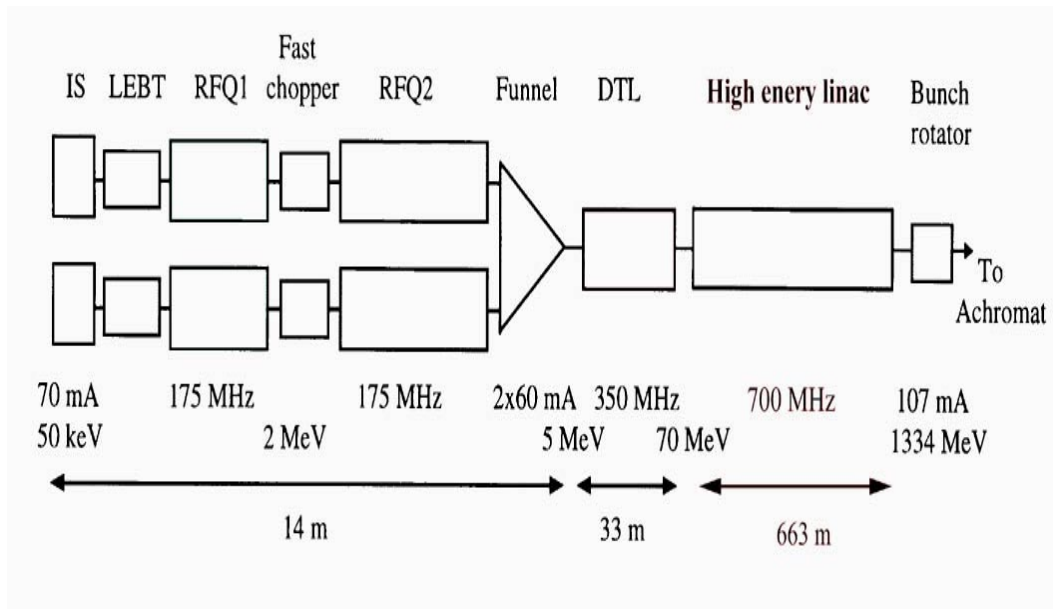


FIG. 6.14 – Schéma du linac du projet E.S.S. avec sa partie basse énergie (2 RFQ + “chopper”).

6.3 Conception de deux RFQ

Pour plusieurs projets d'accélérateurs de fortes puissances (European Spallation Source, Spallation Neutron Source, Machine Polyvalente Européenne³), il est nécessaire de découper le faisceau pour permettre l'injection dans un anneau de stockage. Cette opération est réalisée par un “chopper” à une énergie de l'ordre de 2 MeV. La partie basse énergie obtenue s'apparente alors à un RFQ, type I.P.H.I., coupé en deux pour permettre l'insertion du “chopper” (figure 6.14).

Pour concevoir cette ligne du point de vue de la dynamique dans le RFQ, une méthode peut consister à n'optimiser finalement qu'une seule structure, choisir un point de coupure, placer une cellule de transition suivie d'une section de fuite en fin du premier RFQ et une section d'entrée suivie d'une cellule de transition permettant d'assurer la continuité avec la modulation en entrée du deuxième. Les paramètres du faisceau adaptés pour le deuxième RFQ peuvent s'obtenir par transport inverse en injectant un peu en aval le paquet adapté pris lors de la simulation du grand RFQ initial (figure 6.15).

Pour permettre une certaine souplesse dans la mise au point du transport dans la ligne “chopper”, il est intéressant de faire varier les longueurs des sections de sortie pour le premier RFQ et d'entrée pour le deuxième (figure 6.16). Les figures 6.17 à 6.21 représentent les paramètres de Twiss, pour chaque plan, en fonction de ces longueurs pour le premier des deux RFQ actuellement en cours d'étude à Saclay pour le projet ESS. La figure 6.19 montre bien que les variations d'émittances sont négligeables et que le transport inverse est donc valide.

³Les applications seraient multiples : neutrons par spallation, production d'ions radioactifs, traitement des déchets,...

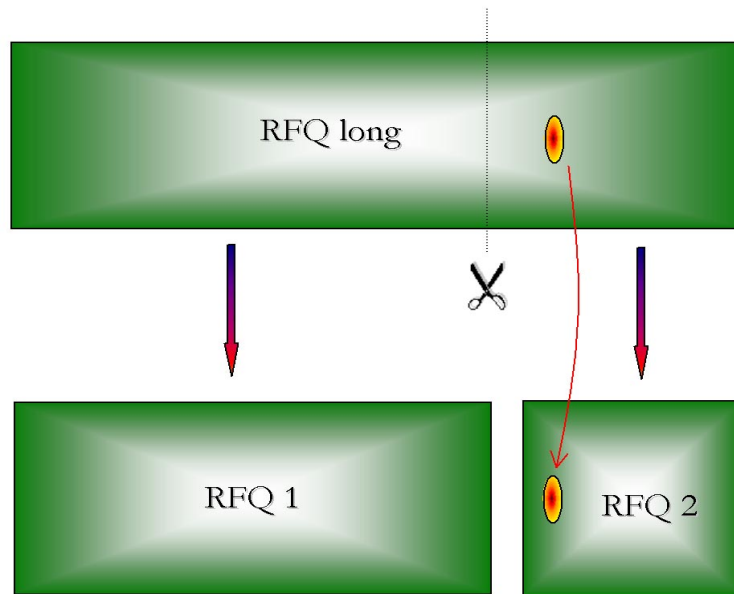


FIG. 6.15 – Schéma illustrant la méthode pour concevoir deux RFQ.

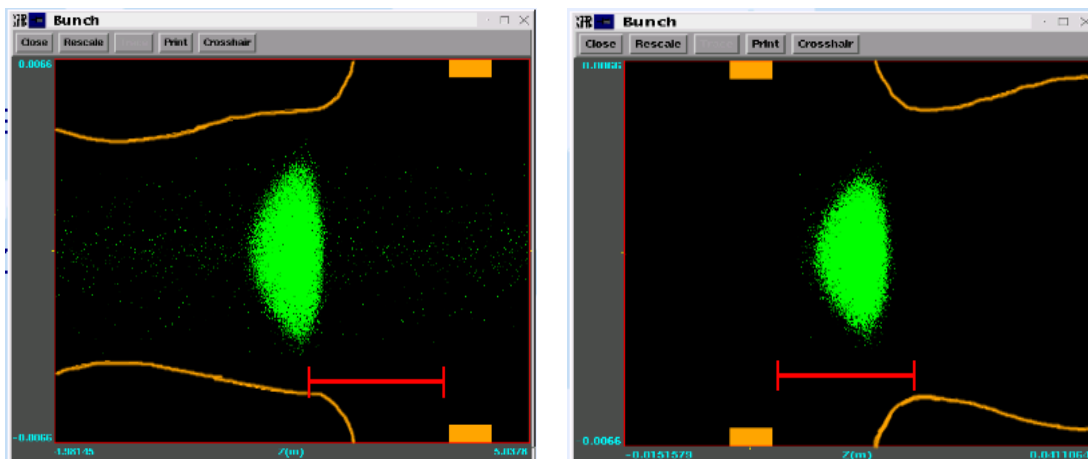
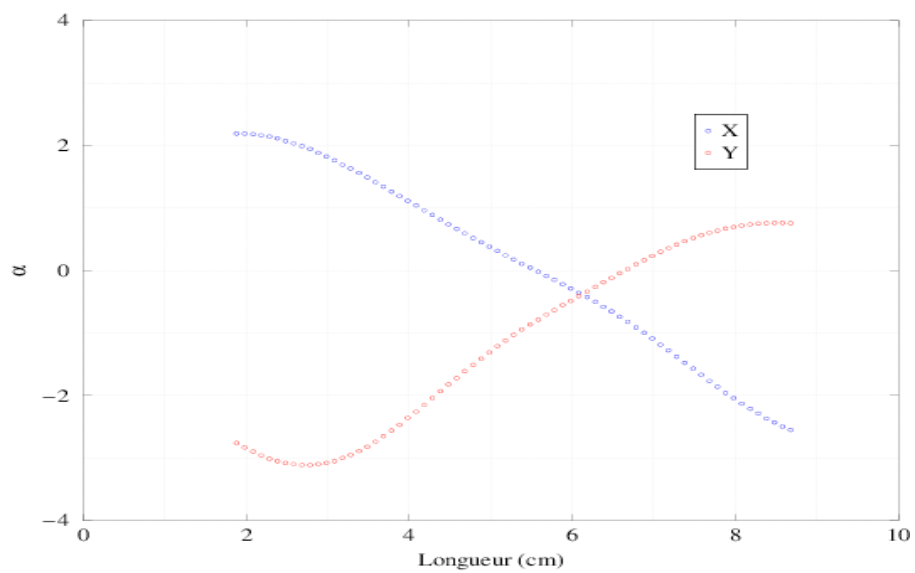
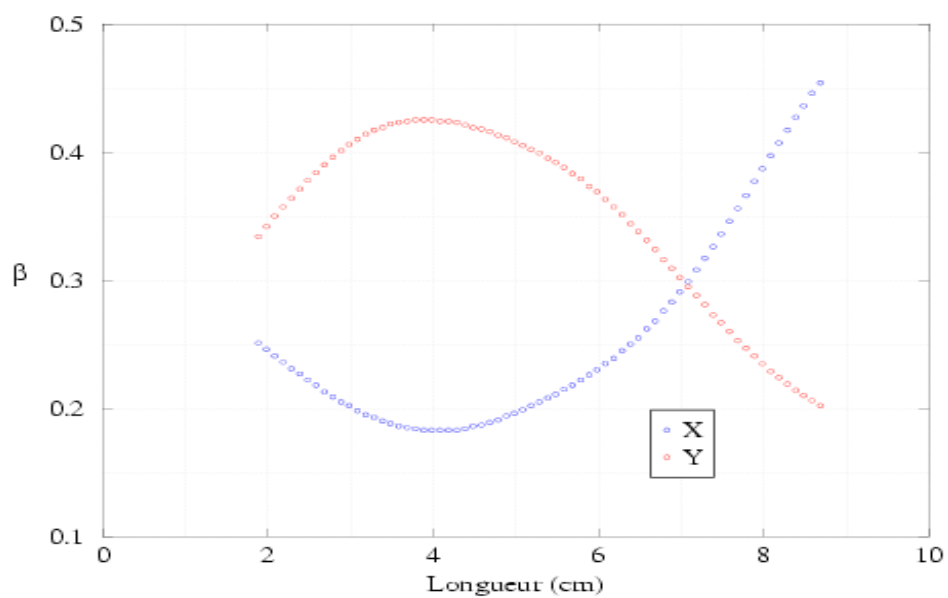


FIG. 6.16 – Schéma montrant les distances (segments rouges) à faire varier pour obtenir un jeu de paramètres faisceau adaptés permettant une souplesse dans la mise au point de la ligne “chopper”.

FIG. 6.17 – Variation de α adapté pour chaque plan transverse.FIG. 6.18 – Variation de β adapté pour chaque plan transverse.

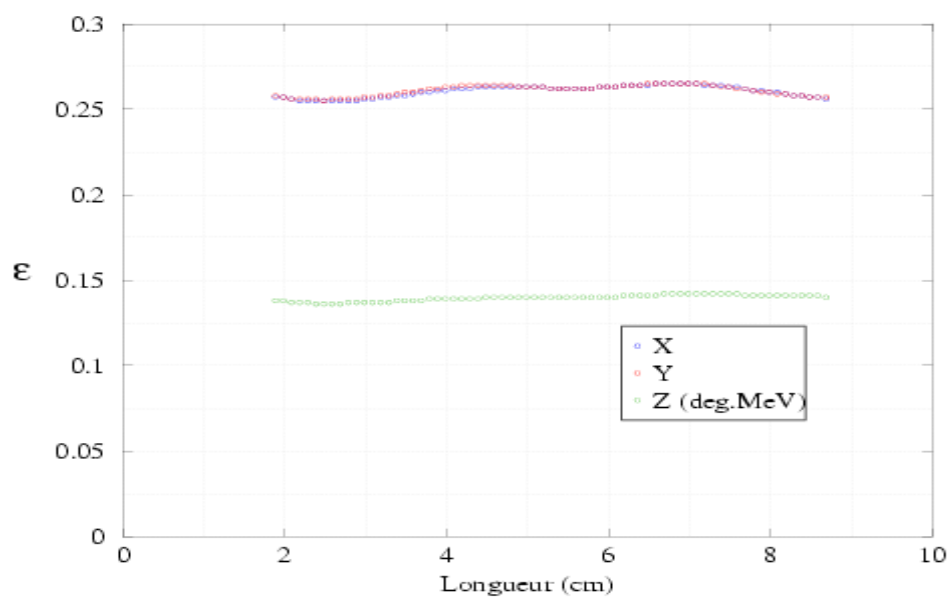
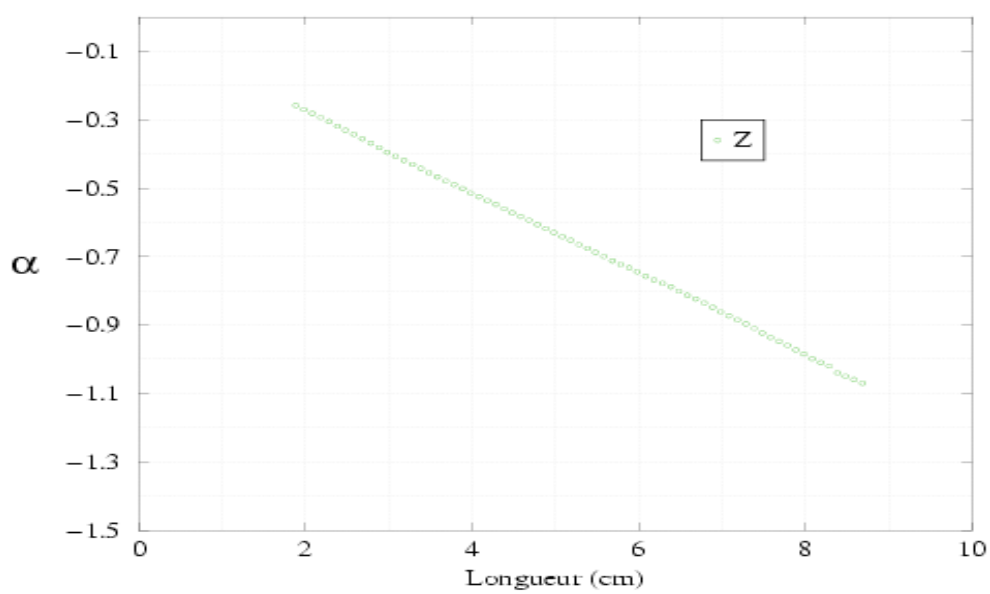


FIG. 6.19 – Variation des émittances pour chaque plan.

FIG. 6.20 – Variation de α adapté pour le plan longitudinal.

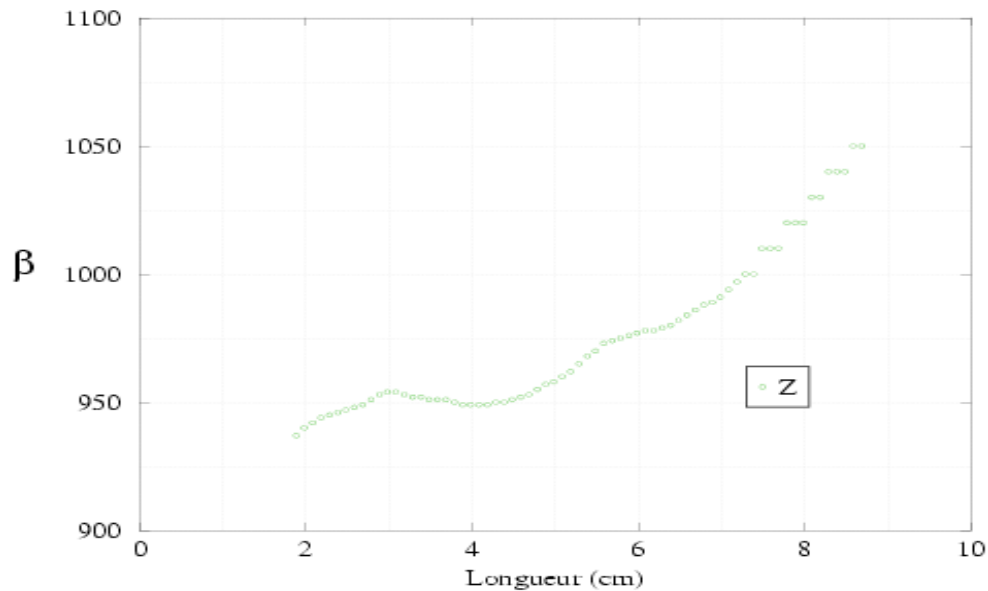


FIG. 6.21 – Variation de β adapté pour le plan longitudinal.

6.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis d'estimer l'impact des gaps de couplage radiofréquence sur la dynamique des particules. Pour rendre négligeable leur effet, il est nécessaire de réduire la largeur des gaps autant que possible et de les placer dans la cellule en tenant compte de la phase synchrone.

Une méthode simple et rapide à mettre en oeuvre pour concevoir un RFQ a été décrite. Elle s'appuie avant tout sur la volonté de garder constante, autant que possible, les dimensions du paquet obtenues dans la zone de groupement. Cette zone de groupement est conçue en s'appuyant sur des équations d'enveloppe du faisceau dans un canal équivalent au RFQ.

Un façon simple d'appréhender la conception de deux RFQ pour des projets comme ESS, SNS et la Machine Polyvalente Européenne a été détaillée. Elle s'assortit d'indications qui donnent une certaine souplesse pour la mise au point de la ligne "chopper" qui prend place entre les deux RFQ.

Bibliographie

- [1] Lloyd Young, "Segmented Resonant Coupled Radio Frequency Quadrupole (RFQ)", Proceedings PAC 1993, Washington, D.C..
- [2] P. Balleyguier, "Dimensionnement des gaps de couplage du RFQ d'I.P.H.I.", rapport CEA/DIF/DPTA/SP2A n° 147 :99, 22 septembre 1999.
- [3] Communication privée de Lloyd Young, Robin Ferdinand.
- [4] K. R. Crandall, R. H. Stokes, T. P. Wangler, "RF Quadrupole Beam Dynamics Design Studies", Linac 1979.
- [5] R. Ferdinand et al., "Optimization of RFQ Design", THP23G, conférence EPAC 1998, Stockholm, juin 1998.
- [6] J.-M. Lagniel, "Tools for the design of high-current linacs", conférence LINAC 1994.
- [7] C. Biscari, M. Weiss, "Choice of parameters for the CERN high intensity RFQ (RFQ2 project)", conférence LINAC 1984, Darmstadt.
- [8] "Multilevel Codes RFQ.3L for RFQ Designing", rencontres groupe accélérateurs IFMIF, Workshop, Paris, mai 26-30 1997.
- [9] Frank J. Sacherer, "RMS envelope equations with space charge", IEEE trans. Nucl. Sci. NS-18, 1105 (1971).
- [10] L. Landau, E. Lifchitz, "Physique statistique", éditions MIR, Moscou 1967.
- [11] N. Pichoff, "Etude théorique et expérimentale du halo d'un faisceau intense de particules chargées dans un accélérateur", thèse Université Paris Sud Orsay, 11 décembre 1997.

Chapitre 7

Conclusion générale

Nous avons vu le principe de fonctionnement d'un RFQ, l'état de l'art pour la description de la zone utile qui s'appuie sur une décomposition en harmoniques cylindriques. Le principe de l'adaptation temps / position a également été décrit.

Les hypothèses simplificatrices utilisées dans le code PARMTEQM ont été détaillées. Au regard des exigences aujourd'hui demandées par les projets de RFQ à forts courants, ces simplifications soulevaient plusieurs interrogations : quelles erreurs entraînent-elles et, si erreur il y a, quelles importances relatives ont-elles sur la transmission, la distribution du faisceau en sortie, la localisation des pertes ? Pour tenter de répondre à ces questions, un nouveau code de transport a été écrit pour minimiser les hypothèses simplificatrices et servir de référence pour plusieurs études comparatives. Ce code s'appuie sur une résolution de l'équation de Poisson dans des grilles tridimensionnelles. Il utilise le temps comme paramètre indépendant pour l'intégration du mouvement, tient compte de la géométrie des pôles, des forces de charge d'espace, des effets d'images.

Ces études démontrent que les approximations faites dans PARMTEQM pour le calcul des champs extérieurs, de la charge d'espace, des effets d'image, pour le traitement des pertes, pour l'intégration des équations du mouvement ont toutes des conséquences sur la dynamique. L'amplitude de ces erreurs dépend du RFQ, si bien que la plupart de ces approximations peuvent s'avérer acceptables pour plusieurs cas. Si certaines des approximations peuvent être facilement corrigées, comme l'hypothèse de paraxialité, la plupart font partie intégrante du code, comme la formulation analytique des champs, le choix de z comme paramètre indépendant. Une correction du code point par point s'avèrerait laborieuse voire impossible.

S'il devait être effectué un classement, par ordre d'importance, des défauts induits par ces approximations, le critère pour les pertes transverses serait probablement le premier suivi de l'hypothèse de paraxialité. Les défauts induits par le traitement de la charge d'espace et des effets d'images restent du second ordre dans la plupart des cas. Ceci est dû au fait que le faisceau est d'abord dominé par les forces de focalisation. Ceci est moins vrai dans le plan longitudinal où l'erreur sur la charge d'espace donne des écarts plus sensibles. Ce code pourrait cependant être très sensiblement amélioré en retirant l'hypothèse de paraxialité et son critère pour les pertes transverses (carré de côté deux fois le minimum d'ouverture).

Au titre des validations du code, il faut noter la méthode utilisée pour définir la section

d'adaptation radiale pour une large gamme de dépression du nombre d'onde en transverse et l'estimation du champ crête.

Un dernier chapitre nous a permis d'estimer l'impact des gaps de couplage radiofréquence sur la dynamique des particules. Pour minimiser leur effet, il est nécessaire de réduire la largeur des gaps autant que possible et de les placer dans la cellule en tenant compte de la phase synchrone.

Une méthode simple et rapide à mettre en oeuvre a été mise au point pour concevoir un RFQ. Le modèle s'appuie sur la conservation des dimensions du paquet obtenues en fin de zone de groupement. Cette zone de groupement est conçue en utilisant les équations d'enveloppe du faisceau en régime de charge d'espace dans un canal équivalent au RFQ.

Une façon simple d'appréhender la conception de deux RFQ pour des projets comme ESS, SNS et la Machine Polyvalente Européenne a été détaillée. Elle s'assortit d'indications qui donnent une certaine souplesse pour la mise au point de la ligne "chopper" qui prend place entre les deux RFQ.

Au chapitre des perspectives, le code TOUTATIS pourrait probablement être amélioré en poussant jusqu'à l'ordre quatre les développements de Taylor dans la méthode des différences finies. Un nombre inférieur de noeuds pourrait, alors, être nécessaire pour une précision identique. La méthode développée pour la conception de RFQ est assez récente et demande, encore, plusieurs améliorations comme la maîtrise du champ crête.

Annexe A

Généralités sur les harmoniques¹

A.1 Le problème de Dirichlet

Tout potentiel électrique est dû à la présence de charges dans l'espace. Si nous considérons *tout* l'espace, y compris l'infini, il n'existe pas de fonction obéissant à l'équation de Laplace. Dans un tel cas, c'est l'équation de Poisson qu'il faut considérer :

$$\Delta\Psi = \rho \tag{A.1}$$

où ρ est une fonction de l'espace qui représente la densité volumique de charges (i.e. la répartition spatiale des sources). Mais en considérant des portions limitées de l'espace, des solutions de l'équation (2.4) peuvent être trouvées et c'est là un problème rencontré d'une manière continue. Les sources sont supposées résider quelque part en dehors du domaine considéré. Il s'agit alors de déterminer une solution dans un domaine Ω , prenant des valeurs données sur la limite Γ du domaine :

$$\Delta\Psi = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \Psi \text{ donné sur } \Gamma$$

C'est le *problème de Dirichlet*. Si le domaine est un volume limité par une surface fermée (cas tridimensionnel ; pour le cas bidimensionnel, c'est une courbe fermée), il s'agit d'un *problème intérieur*. Si le domaine est extérieur à une surface fermée (courbe fermée pour le 2D) et s'étend à l'infini, il s'agit d'un *problème extérieur*. C'est le premier cas de figure qui sera considéré dans cette annexe, et c'est, d'ailleurs, le cas le plus fréquent.

¹Cette annexe compile plusieurs méthodes pour la représentation d'un potentiel scalaire par une base d'harmoniques décrites dans la référence [1].

A.2 Le problème de Sturm-Liouville

Si l'équation de Laplace est décrite dans un système de coordonnées (u, v, w) et si des solutions à variables séparées sont recherchées, c'est-à-dire :

$$\Psi(u, v, w) = \Xi(u) \cdot \Theta(v) \cdot \Phi(w) \quad (\text{A.2})$$

En insérant l'expression (A.2) dans l'équation (2.4), il apparaît trois équations différentielles distinctes du type :

$$\frac{d}{dw} \left[f(w) \frac{d\Phi(w)}{dw} \right] + [g(w) + \nu \cdot h(w)] \Phi(w) = 0 \quad a < w < b \quad (\text{A.3})$$

où ν est une constante arbitraire, a et b , sont les limites du domaine dans la direction de w . Le problème de Sturm-Liouville consiste à trouver des solutions de (A.3) qui, aux limites a et b satisfassent aux conditions linéaires et homogènes :

$$\begin{cases} A \cdot \Phi(a) + A' \cdot \partial_w \Phi(a) = 0 \\ B \cdot \Phi(b) + B' \cdot \partial_w \Phi(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A, A', B, B' sont des constantes arbitraires et $\partial_w \Phi(w)$, la dérivée de $\Phi(w)$ par rapport à w . Quand l'intervalle $[a, b]$ est borné, les conditions ne peuvent être satisfaites que si la constante ν a des valeurs bien déterminées ν_k appelées valeurs caractéristiques [1]. A chaque valeur ν_k correspond une fonction $\Phi_k(w)$ dite fonction caractéristique (i.e. harmonique). Une solution générale de l'équation de Laplace s'écrira :

$$\Psi(u, v, w) = \sum_l \sum_m A_{lm} \cdot \Xi_l(u) \cdot \Theta_m(v) \cdot \Phi_{lm}(w) \quad (\text{A.5})$$

Il reste maintenant à déterminer les coefficients A_{lm} ; c'est l'objet de la section suivante. En conclusion de ces deux dernières sections, il est très important de remarquer que ces fonctions caractéristiques $\Phi_k(w)$ ont une validité pour représenter un potentiel, solution de l'équation Laplace limitée à un domaine borné.

A.3 Méthodes pour déterminer les coefficients des séries

A.3.1 La projection sur une base orthonormée dans le domaine

Pour qu'une fonction $F(u)$ soit représentée par un développement du type :

$$F(u) = \sum_k A_k \cdot \Phi_k(u) \quad (\text{A.6})$$

avec :

$$\int_a^b \Phi_k^*(w) \Phi_j(w) dw = \delta_{jk} \quad (\text{A.7})$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker², il faut que la fonction soit de carré intégrable dans l'intervalle $a < u < b$. Les coefficients sont alors donnés par la projection (i.e. produit scalaire) :

$$A_k = \int_a^b \Phi_k^*(u) \cdot F(u) \cdot du \quad (\text{A.8})$$

Dans ces conditions, l'erreur quadratique moyenne :

$$\varepsilon_N = \int_a^b \left| F(u) - \sum_{k=1}^N A_k \cdot \Phi_k(u) \right|^2 du \quad (\text{A.9})$$

est minimisée [1].

A.3.2 Méthodes avec base non orthonormée

S'il est toujours possible, en principe, d'orthogonaliser une suite de fonctions, il apparaît que, aussi bien pour un domaine simple que pour un domaine compliqué, c'est une opération laborieuse. La méthode devient plus un jeu pour mathématiciens ! Nous allons voir que, dans ces conditions, les coefficients ne se calculent pas indépendamment les uns des autres, les relations de fermetures ne pouvant plus être utilisées. Par contre il existe plusieurs autres méthodes qui permettent de les trouver en résolvant un système d'équations linéaires. Nous allons brièvement en détailler trois : la méthode de Galerkin, la méthode directe, la méthode des moindres carrés (*fit*).

A.3.2.1 La méthode de Galerkin

Imaginons que nous cherchions toujours à représenter la fonction $F(u)$ dans un domaine Ω à l'aide d'un développement fini à l'ordre N :

$$F(u) = \sum_{k=0}^N A_k \cdot \Phi_k(u) \quad (\text{A.10})$$

mais cette fois-ci, la base n'est pas orthogonale dans Ω . Les coefficients A_k ne se calculent donc pas séparément. Il faut trouver les relations entre ces coefficients. Pour cela, considérons de nouveaux coefficients B_l et C_{kl} tels que :

$$\begin{cases} B_l = \oint_C \Phi_l^*(M) \cdot F(M) \cdot dl \\ C_{kl} = \oint_C \Phi_l^*(M) \cdot \Phi_k(M) \cdot dl \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

²Cette expression est appelée relation de fermeture.

où M est un point qui parcourt la courbe fermée C limite du domaine Ω^3 . L'équation (A.10), multipliée par Φ_l^* et intégrée, devient :

$$\sum_{k=0}^{n=N} A_k \cdot C_{kl} = B_m \quad (\text{A.12})$$

C'est la relation recherchée. Il n'y a plus qu'à résoudre $(N + 1)$ équations pour déterminer les $(N + 1)$ coefficients A_k . Cette méthode a l'avantage de ne pas avoir à orthogonaliser la base utilisée dans le domaine considéré, mais elle oblige à calculer une multitude d'intégrales, ce qui, pour des domaines au contour compliqué est particulièrement fastidieux, voire inutilisable. Si nous acceptons de résoudre un système d'équations linéaires il y a une méthode plus simple et plus efficace : c'est la méthode directe.

A.3.2.2 La méthode directe

La solution approchée est toujours sous la forme :

$$F(u) = \sum_{k=0}^N A_k \cdot \Phi_k(u) \quad (\text{A.13})$$

Si $(N + 1)$ valeurs de $F(u)$ sont connues aux points M_l , un système de $(N + 1)$ équations peut être écrit pour déterminer les $(N + 1)$ coefficients A_k :

$$F(M_l) = \sum_{k=0}^N A_k \cdot \Phi_k(M_l) \quad (\text{A.14})$$

Les $(N + 1)$ points M_l doivent être choisis judicieusement pour améliorer la qualité de la méthode. Cette méthode est, de beaucoup, la plus efficace et la plus simple pour déterminer les coefficients des séries. Elle comporte, cependant, l'inconvénient de devoir connaître autant de valeurs au préalable que de coefficients voulus. Il est possible de s'affranchir de ce problème en utilisant la méthode des moindres carrés.

A.3.2.3 La méthode des moindres carrés

C'est la plus populaire des méthodes. Elle est incluse dans bon nombre de logiciels numériques [2]. Elle consiste à minimiser la quantité :

$$\varepsilon = \sum_{l=1}^P \left[F(M_l) - \sum_{k=0}^N A_k \cdot \Phi_k(M_l) \right]^2 \quad (\text{A.15})$$

qui peut être considérée comme la somme du carré des erreurs apportées par la représentation de $F(u)$ par la base sur les points M_l . Il faut donc connaître P valeurs de $F(u)$, mais P peut être plus petit que N . C'est là tout l'intérêt de la méthode : le nombre de point connus est indépendant du nombre de coefficients désirés. La méthode est cependant plus efficace si le nombre de points

³Courbe pour le cas bidimensionnel, surface en 3 dimensions.

est élevé. Pour rendre minimum la quantité ε , il faut trouver les coefficients A_k qui vérifient les $(N + 1)$ équations du type :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_k} = \frac{\partial}{\partial A_k} \sum_{l=1}^P \left[F(M_l) - \sum_{k=0}^N A_k \cdot \Phi_k(M_l) \right]^2 = 0 \quad (\text{A.16})$$

La solution finale obtenue ne permet pas de retrouver exactement les valeurs utilisées à l'inverse de la méthode directe, mais elle permet d'obtenir une solution en ne connaissant que peu de points du domaine.

Bibliographie

- [1] E. Durand, "Electrostatique", Masson & Cie, 1966, Tome II.
- [2] S. Wolfram, Mathematica 3.0, Cambridge University Press, 1996.

Annexe B

La géométrie des lames dans un RFQ

Pour simplifier l'analyse, il est souvent d'usage de ne considérer que les deux premières harmoniques de chaque série de l'équation (2.18). L'expression, pour le potentiel électrique, se réduit alors à :

$$\Psi(\rho, \theta, z) = \frac{V}{2} \left\{ X \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^2 \cos(2\theta) + A \cdot I_0(k\rho) \cos(kz) \right\} \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$A = \frac{m^2 - 1}{m^2 I_0(ka) + I_0(mka)} \quad (\text{B.2})$$

et :

$$X = 1 - AI_0(ka) \quad (\text{B.3})$$

afin de satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$\Psi(a, 0, 0) = \Psi(ma, 0, L_c) = \frac{V}{2}$$

et :

$$\Psi(ma, \frac{\pi}{2}, 0) = \Psi(a, \frac{\pi}{2}, L_c) = -\frac{V}{2}$$

Ce potentiel simplifié permet de définir plusieurs grandeurs caractéristiques de la dynamique dans un RFQ, très utiles pour la conception de la structure (calcul des avances de phases, etc...). Ce potentiel simplifié présentant les mêmes inconvénients que celui comportant huit termes en ce qui concerne l'usinage des pôles, nous pouvons au moins chercher à évaluer les rayons de courbure transverse et longitudinal du pôle et de la surface équipotentielle définie par l'équation (B.1). En considérant le pôle horizontal, l'évolution du rayon de courbure transverse normalisé

ρ_t/R_0 est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\rho_t}{R_0} = \frac{\alpha}{R_0} \left(\frac{\frac{2\alpha}{R_0} + \beta}{\frac{2\alpha}{R_0} - \beta} \right) \quad (\text{B.4})$$

où $\alpha = x$ (abscisse de l'extrémité du pôle) et :

$$\beta = AkR_0 \cos(kz)I_1(k\alpha) \quad (\text{B.5})$$

La trajectoire suivie par α peut être obtenue par dichotomie en faisant varier z . La valeur minimale pour le rayon de courbure longitudinal est atteinte pour $x = ma$, et son amplitude vaut :

$$\frac{\rho_l(ma, 0, L_c)}{R_0} = \frac{\frac{2ma}{R_0} - AkR_0I_1(mka)}{Ak^2R_0^2I_0(mka)} \quad (\text{B.6})$$

C'est effectivement le minimum qui est pertinent pour l'usinage. Il faut donc que le rayon de la fraise soit plus petit que ρ_l . Ces valeurs ont été tablées pour différentes caractéristiques de cellules par Ken Crandall[1]. Il en ressort deux remarques pour les cellules courtes (typiquement pour L_c/R_0 allant de 0.75 à 2) :

- le champ crête augmente considérablement,
- l'usinage est difficile.

Pour y remédier, Crandall propose de garder le rayon de courbure transverse constant, la valeur optimale tournant autour de $0.75 \times R_0$. Un autre intérêt est que la capacité inter-lame est alors quasi constante le long du gap [2]. Crandall propose également d'appliquer une modulation de type sinusoïdale, plutôt que tirée de l'équation (B.1) tout en conservant le rayon de courbure transverse constant. Le rayon de courbure longitudinal, en $x = ma$, vaut alors :

$$\frac{\rho_l(ma, 0, L_c)}{R_0} = \frac{m + 1}{(m - 1)k^2R_0^2} \quad (\text{B.7})$$

Les dimensions de la fraise peuvent alors être augmentées pour des cellules courtes. En conclusion, deux types de profils longitudinaux sont à prévoir : un profil sinusoïdal et un profil extrapolé du potentiel simplifié à deux termes, la section transverse étant circulaire à rayon de courbure constant pour les RFQ à lames.

Bibliographie

- [1] K.R. Crandall, “Effects of vane-tip geometry on the electric fields in Radio-Frequency Quadrupole Linacs”, L.A.N.L. report LA-9695-MS, 1983.
- [2] K.R. Crandall, “Effect of RFQ Vane-Tip Modulation on Local Resonant Frequency”, Los Alamos National Laboratory memorandum AT-1 :82-68, 26 Mars 1982.

Annexe C

Procédure pour obtenir A et B

(A = enveloppe moyenne, B= modulation de l'enveloppe moyenne)

Nous voulons minimiser l'expression (5.13) par rapport à A, soit :

$$\frac{\partial}{\partial A} \sum_{i=0}^N \{ \widehat{X}_i - [A + BC(z_i)] \}^2 = 0 \quad (\text{C.1})$$

avec :

$$C(z_i) = \cos \left(\frac{2\pi z_i}{\beta \lambda_{rf}} + \varphi_{rf} \right) \quad (\text{C.2})$$

En effectuant la dérivée, l'expression (C.1) peut être réécrite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \widehat{X}_i &= \sum_{i=0}^N A + \sum_{i=0}^N BC(z_i) \\ &= NA + B \sum_{i=0}^N C(z_i) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

De la même manière pour B :

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum_{i=0}^N \{ \widehat{X}_i - [A + BC(z_i)] \}^2 = 0 \quad (\text{C.4})$$

qui donne :

$$\sum_{i=0}^N \widehat{X}_i C(z_i) = A \sum_{i=0}^N C(z_i) + B \sum_{i=0}^N C(z_i)^2 \quad (\text{C.5})$$

Il faut donc résoudre le système à deux inconnues suivant :

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=0}^N C(z_i) \\ \sum_{i=0}^N C(z_i) & \sum_{i=0}^N C(z_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N \widehat{X}_i \\ \sum_{i=0}^N \widehat{X}_i C(z_i) \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

finalement :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N C(z_i)^2 & -\sum_{i=0}^N C(z_i) \\ -\sum_{i=0}^N C(z_i) & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N \widehat{X}_i \\ \sum_{i=0}^N \widehat{X}_i C(z_i) \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

avec :

$$\Delta = N \sum_{i=0}^N C(z_i)^2 - \left[\sum_{i=0}^N C(z_i) \right]^2$$

Annexe D

Modèle analytique pour chanfrein ¹

D.1 Introduction

Durant les 10 dernières années, la technologie des calculateurs a réalisé des progrès considérables et permet aujourd'hui d'étudier des problèmes électromagnétiques complexes notamment à l'aide de codes basés sur la méthode des éléments finis comme le logiciel TOSCA [1]. Il est maintenant possible de calculer des aimants pour accélérateurs avec une grande précision. Si bien que des défauts de l'ordre de 10^{-5} par rapport au champ idéal peuvent être estimés. Il est maintenant nécessaire pour certains projets d'atteindre de telles performances. Pour le projet SOLEIL, les tolérances requises pour les aimants atteignent quelques 10^{-4} [2]. Il est maintenant possible d'atteindre une précision telle, pendant la conception de l'aimant, qu'elle permet de supprimer la phase de shimming² dû aux composantes multipolaires systématiques détectées pendant l'étape des mesures.

Le contrôle du contenu multipolaire est assez bien maîtrisé lors des calculs 2D. Mais l'étape tridimensionnelle s'avère beaucoup plus difficile. Pour éviter une finition à angle droit du pôle dans la direction du faisceau, le concepteur opère par petites touches successives une découpe de l'extrémité. Plusieurs tentatives ont été réalisées pour obtenir un modèle consistant pour la conception de chanfrein. Langenbeck et Francsak avaient obtenu de bons résultats dans ce sens [3]. Mais la géométrie obtenue n'était pas facile et coûteuse à usiner. Leur modèle induisait également un couplage transverse / longitudinal néfaste pour la dynamique des particules. Dans la plupart des cas, les concepteurs se contentent d'un chanfrein à 45° ou bien raffinent avec quelques pentes [4, 5]. Nous proposons, dans cet article, de construire des électroaimants avec un profil d'extrémité de pôle qui réduit considérablement l'amplitude des composantes multipolaires. Ce profil s'appuie sur une solution particulière de l'équation de Laplace. La géométrie induite par le modèle a également l'avantage d'être facilement usinable.

¹Cette annexe est la traduction d'un article publié dans IEEE Transactions On Magnetics de Mars 2000. Ce travail, qui sort du cadre de la thèse, avait été inspiré par l'étude faite sur la section d'adaptation radiale du RFQ. Je tiens à remercier Olivier Delferrière et Denis de Menezes pour la réalisation de toutes les simulations. Elles représentent une très grande quantité de travail.

²Cette étape consiste à coller des pièces de matières magnétiques, en général de petites tailles, aux pôles de l'aimant ; ceci afin de corriger le contenu multipolaire.

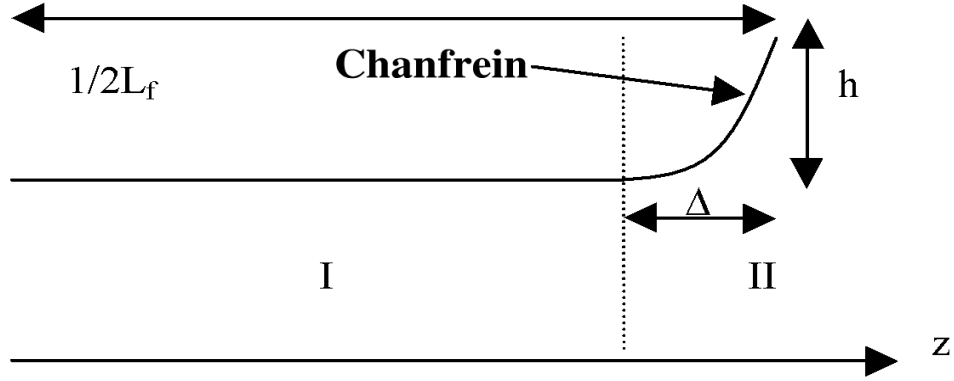


FIG. D.1 – Profil longitudinal du centre à la fin de l'aimant.

D.2 Modèle analytique et outils de simulations

D.2.1 Solutions analytiques de l'équation de Laplace

La façon la plus commune, pour le transport de particules chargées, de décrire le canal magnétique est d'utiliser la série 2D suivante pour le potentiel scalaire :

$$V(r, \theta) = \sum_n r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \quad (\text{D.1})$$

le champ magnétique s'obtient alors simplement en appliquant l'opérateur divergence :

$$\vec{B} = -\overline{\nabla}(V) \quad (\text{D.2})$$

Dans la pratique, les aimants ne sont pas infinis dans la direction longitudinale, ceci implique l'introduction de composantes azimutales. Afin d'obtenir une représentation complète du champ et d'assurer une bonne continuité entre la région centrale (I) et la fin de l'aimant (II) (figure D.1), nous proposons d'utiliser la série suivante [6, 7] :

$$V(r, \theta, z) = (az + b) \sum_n r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \quad (\text{D.3})$$

Nous faisons alors l'hypothèse que la discontinuité induite sur B_z est négligeable. En écrivant l'équation précédente pour un seul multipôle d'ordre n et en égalisant la longueur fer L_f et la longueur magnétique L_m , nous obtenons une formule qui décrit un profil longitudinal pour le chanfrein :

$$r(z) = d \left(\frac{\Delta}{\frac{1}{2}L_f - z} \right)^{1/n} \quad (\text{D.4})$$

où d est la distance minimum entre l'axe et le pôle, Δ la distance sur laquelle s'opère le chanfrein. Cette formule est d'autant plus efficace que le contenu multipolaire de la région centrale est pauvre. Nous verrons que cette approximation donne de bons résultats.

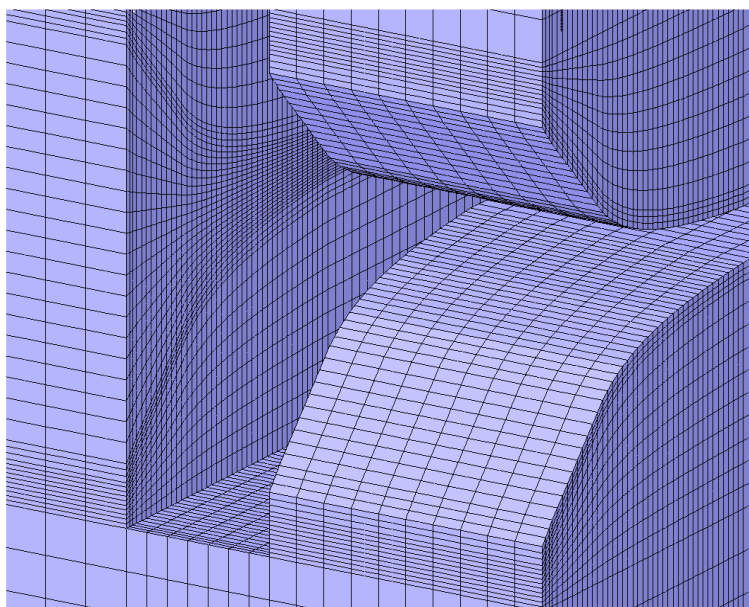


FIG. D.2 – Profil typique pour le dipôle.

D.2.2 Outils de simulations

D.2.2.1 Génération du maillage

Les différents modèles ont été construits à l'aide du code TOSCA qui utilise la méthode des éléments finis. Plusieurs implémentations de ce code ont été développées au CEA/Saclay qui nous ont permis d'obtenir rapidement des géométries avec gestion du chanfrein (figure D.2).

Une fois maillés, les modèles sont soumis au solveur. Les calculs sont exécutés sur une station de travail HP-J282, configurée avec 512 Mo de RAM. Le temps CPU nécessaire pour réaliser les 15 itérations non linéaires (saturation) est d'environ 15 heures pour quelques 450 000 noeuds afin d'assurer une très bonne précision.

D.2.2.2 Traitement des résultats et analyse harmonique

Les tolérances multipolaires données par le transport ont été calculées en intégrant, selon z , le champ magnétique. Nous utiliserons donc le même critère pour nos simulations. Les composantes seront projetées sur la base (D.1) pour rester cohérentes avec les calculs d'orbite. La projection s'effectuera sur la surface latérale d'un cylindre de rayon égal au demi-entrefer pour le dipôle et au rayon de gorge pour le quadripôle. L'intégrale est effectuée de $-\infty$ à $+\infty$ (en fait de $-L$ à $+L$, avec L suffisamment grand).

Nous démarrons la procédure avec le potentiel scalaire magnétique 2D suivant :

$$V(r, \theta) = \sum_n^n \alpha_n r^n \sin(n\theta) \quad (\text{D.5})$$

Par projection du potentiel de la région centrale calculé par TOSCA, nous obtenons la composante α_n :

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} V_T(r, \theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (\text{D.6})$$

Nous définissons la composante harmonique intégrée A_n par :

$$A_n = \frac{1}{2\pi L r^n} \int_{-L}^{+L} \int_0^{2\pi} V_T(r, \theta, z) \sin(n\theta) d\theta dz \quad (\text{D.7})$$

où V_T est la solution calculée par TOSCA. De l'équation (D.2), nous pouvons obtenir le coefficient harmonique pour la composante radiale du champ B_r :

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi r^{n-1}} \int_0^{2\pi} (B_r(r, \theta))_T \sin(n\theta) d\theta \quad (\text{D.8})$$

et donc le terme intégré :

$$A'_n = \frac{1}{2\pi L r^{n-1}} \int_{-L}^{+L} \int_0^{2\pi} (B_r(r, \theta, z))_T \sin(n\theta) d\theta dz \quad (\text{D.9})$$

Toujours pour être en accord avec les calculs d'orbite, nous avons normalisé tous les termes par la longueur magnétique L_m :

$$\frac{\int_{-L}^{+L} \int_0^{2\pi} (B_r(r, \theta, z))_T \sin(p\theta) d\theta dz}{\int_0^{2\pi} (B_r(r, \theta, 0))_T \sin(p\theta) d\theta} = L_m \quad (\text{D.10})$$

où p est l'ordre de l'harmonique ($p=1$ pour le dipôle, $p=2$ pour le quadripôle, ...).

Des procédures automatiques ont été écrites en langage OPERA-3D pour calculer les intégrales de surfaces A'_n pour $n=1$ à $n=20$ [8]. Dans les sections suivantes, nous comparerons le contenu multipolaire d'un dipôle et d'un quadripôle avec différents profils caractérisés par la profondeur Δ (voir section D.2.1). En théorie la hauteur de chanfrein h (figure D.1), est infinie selon la formule (D.4) mais, pour des raisons de faisabilité évidentes, nous choisirons d'utiliser $h_0 < h$ en prenant soin de rendre tangentielle au plan vertical la fin du chanfrein. Toutes les simulations seront également comparées avec le cas sans chanfrein (i.e. coin droit). Chaque profil est décrit par dix pentes.

D.3 Application au dipôle

D.3.1 Description de l'aimant

Le dipôle testé est un profil transverse en "C" droit en longitudinal adapté pour la conception de l'anneau SOLEIL avec quelques simplifications pour pouvoir le réaliser plus facilement. Sa longueur est de 1 mètre et son entrefer de 37 mm pour un champ nominal de 1.56 T (figure D.3). Les chanfreins latéraux ont été supprimés pour simplifier.

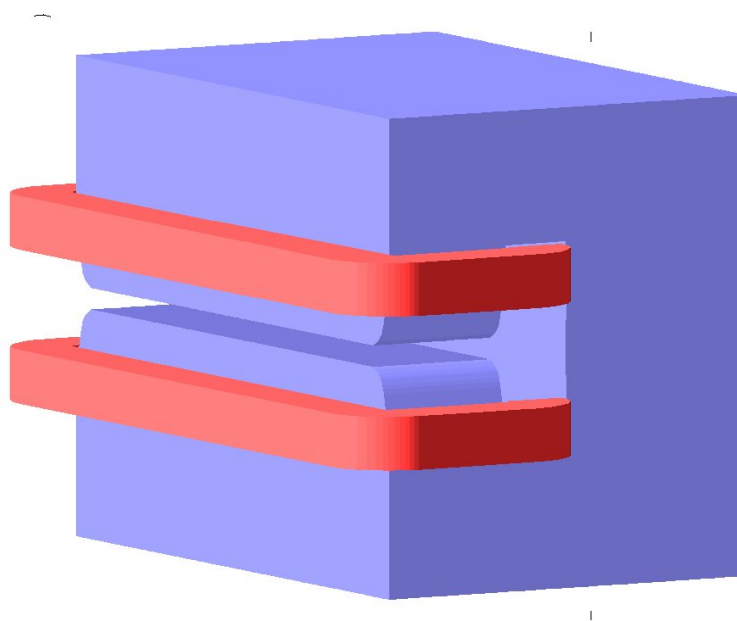


FIG. D.3 – Géométrie complète du dipôle avec conducteurs.

D.3.2 Profil

De l'équation (D.4), nous pouvons tirer l'expression suivante pour le profil du dipôle dans la région II où g est le demi-entrefer :

$$r(z) = g \frac{\Delta}{\frac{1}{2}L_f - z} \quad (\text{D.11})$$

La profondeur Δ est une fonction de l'intégrale de champ magnétique requise par la dynamique de faisceau $B_{dyn}L_m$ (où B_{dyn} est la valeur du champ supposée constante). En se rappelant que nous imposons $L_f=L_m$, cette fonction peut s'écrire :

$$\Delta = L_f \left(1 - \frac{B_{dyn}g}{\mu_0 NI} \right) \quad (\text{D.12})$$

Dans notre étude, nous avons cherché à augmenter Δ pour s'éloigner du cas du "coin droit". Dans certains cas, nous avons pris en compte la diminution de l'intégrale du champ due à l'enlèvement de matière. Ceci se traduit par une compensation en ampères-tours. Si nous avons $(NI)_1$ ampères-tours pour une profondeur Δ_1 , les ampères-tours $(NI)_2$ compensant une profondeur Δ_2 sont :

$$(NI)_2 = \frac{L_f - \Delta_1}{L_f - \Delta_2} (NI)_1 \quad (\text{D.13})$$

Suivant la procédure décrite dans la section D.2.2.2, nous avons calculé les amplitudes de chaque composante harmonique par rapport à la composante principale. La figure D.4 montre ces

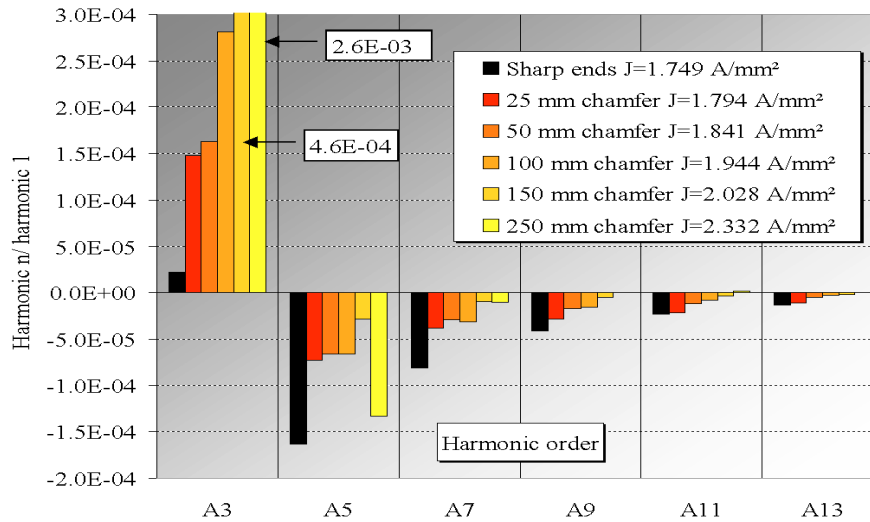


FIG. D.4 – Amplitudes relatives des harmoniques avec compensation.

amplitudes pour différentes valeurs de Δ . Il apparaît que le contenu multipolaire peut être considérablement réduit. Mais en compensant les ampères-tours, nous avons provoqué une très forte saturation dans les coins transverses des pôles, augmentant alors très sensiblement le sextupôle (A3). Il est possible, à l'aide d'un chanfrein transverse, de palier cet inconvénient. Cependant, ce phénomène implique un optimum sur Δ fonction du niveau de saturation.

La figure D.5 montre les amplitudes relatives des harmoniques dans le cas où l'intégrale de champ n'a pas été compensée pour différentes valeurs de Δ . Il a été vérifié, que pour les deux cas, les résultats restaient identiques pour un ensemble raisonnable de valeurs de h_0 .

D.4 Application au quadripôle

D.4.1 Description de l'aimant

Le quadripôle utilisé pour cette étude est un autre aimant du projet SOLEIL pour lequel un premier chanfrein à 45° avait été effectué. Ce quadripôle a une longueur de 0.4 m avec une ouverture de 57 mm. Son cahier des charges prévoit un gradient magnétique nominal de 15.2 T.m^{-1} (figure D.6).

D.4.2 Profil

L'équation (D.4) fournit à nouveau l'évolution du rayon de gorge en fonction de z :

$$r(z) = r_g \sqrt{\frac{\Delta}{\frac{1}{2}L_f - z}} \quad (\text{D.14})$$

où r_g est le rayon de gorge au centre de la région I.

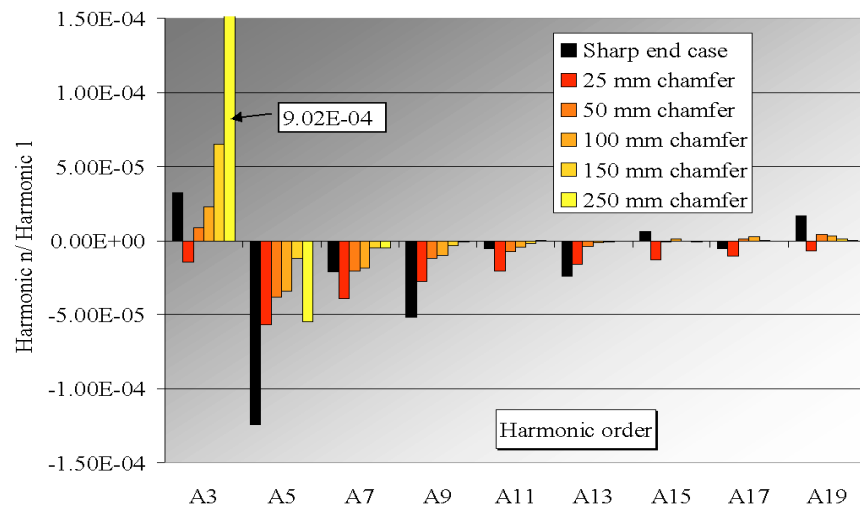


FIG. D.5 – Amplitudes relatives des harmoniques sans compensation.

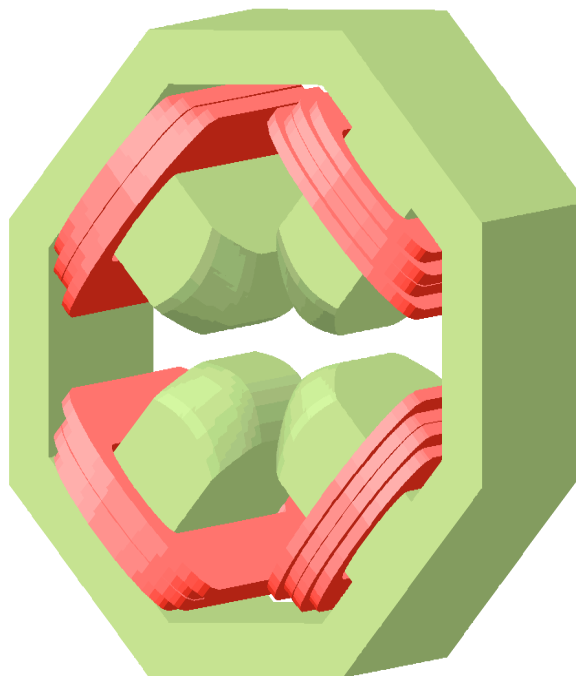


FIG. D.6 – Quadripôle complet avec ses conducteurs.

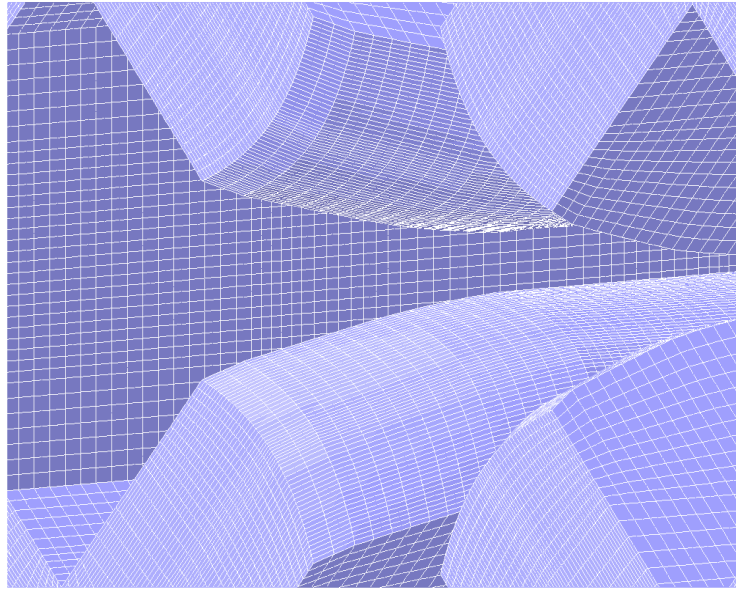


FIG. D.7 – Géométrie du chanfrein pour le quadripôle.

L'équation de la surface du pôle est alors :

$$xy - \frac{1}{2} [r(z)]^2 = 0 \quad (\text{D.15})$$

Il est intéressant de noter que les sections transverses sont des hyperboles différentes pour chaque position longitudinale (figure D.7). De la même manière, la profondeur Δ est donnée par l'expression suivante :

$$\Delta = L_f \left(1 - \frac{G_{dyn} r_g}{2\mu_0 N I} \right) \quad (\text{D.16})$$

où G_{dyn} est le gradient du cahier des charges.

Pour travailler à intégrale constante, il est aussi nécessaire de compenser la variation de la valeur du gradient intégré sur la longueur avec les ampères-tours. Comme pour le dipôle, l'optimum est fonction de la saturation. La figure D.8 montre les différentes amplitudes relatives des composantes indésirables pour le cas non compensé. Pour ce cas également, il a été vérifié que les résultats restaient identiques pour un ensemble raisonnable de valeurs de h_0 . Ceci prouve que seules les premières pentes sont critiques lorsque le pôle est le plus proche de l'axe, comme on pouvait s'y attendre.

D.5 Conclusion

Un modèle analytique cohérent, sans couplage transverse/longitudinal, pour la réalisation de chanfrein a été développé. La formulation utilisée est très proche de celle utilisée lors du calcul du transport du faisceau. De bonnes performances ont été obtenues dans le but de minimiser

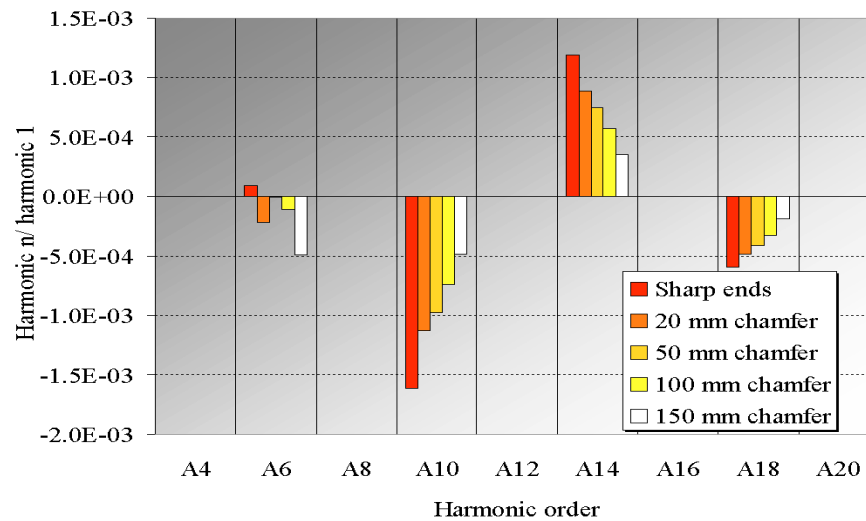


FIG. D.8 – Amplitudes relatives des harmoniques sans compensation pour le quadripôle.

l'amplitude des composantes multipolaires indésirables. La méthode a été développée pour le cas du dipôle et du quadripôle mais peut très bien être appliquée à n'importe quel multipôle. Il a également été démontré que la pente idéale n'est pas nécessairement de 45° , cela dépend de plusieurs paramètres comme la profondeur du chanfrein, l'entrefer, la longueur de l'aimant et l'harmonique principale. En variant la profondeur de chanfrein Δ , la longueur magnétique peut être ajustée. La limitation de la méthode est due à la saturation, bien qu'il soit possible, dans de nombreux cas, de palier cet inconvénient par des chanfreins transverses.

Nous espérons que le concepteur d'aimants trouvera dans ce travail des bases intéressantes pour une réalisation facile et précise de chanfrein.

Bibliographie

- [1] Opera-3D/TOSCA, copyright Vector Fields Limited, Oxford, England.
- [2] SOLEIL, rapport d'Avant Projet Détaillé, CEA-CNRS, juin 1999.
- [3] B. Langenbeck, B. Francsak, "Shaping of pole ends to optimize field errors in quadrupole magnets", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, n°2, mars 1988.
- [4] O. Delferrière, C. Evesque, J.P. Pénicaud, "Wide aperture conventional quadrupole for the t_{20} experiment at CEBAF", Proc. MT15, Vol. 1, p. 195, (1997).
- [5] M. Kumada, H. Sasaki, H. Someya et I. Sakai, "Optimization on the end-shaping of a quadrupole magnet", Nuclear Instrument and Method 211, p. 283-286, (1983).
- [6] R. Duperrier, "Le potentiel électrique dans la zone utile d'un RFQ", rapport interne CEA/DSM/DAPNIA/SEA/IPHI/9844, (1998).
- [7] R. Duperrier, "A study of the RFQ Radial Matching Section", rapport interne CEA/DSM/DAPNIA/SEA/IPHI/9967, (1999).
- [8] O. Delferrière, "Décomposition harmonique sous OPERA-3D", rapport interne CEA/DSM/DAPNIA/SEA/IPHI/9923, (1999).