

N° d'ordre :

UNIVERSITE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

Présentée

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

Discipline : Physique des Accélérateurs

Par

Laurent NADOLSKI

Sujet : Application de l'Analyse en Fréquence à l'Etude de la
Dynamique des Sources de Lumière

Soutenue le 6 juillet 2001 devant la Commission d'Examen :

M.	O.	BOHIGAS	Président
M.	J.	LASKAR	Directeur de thèse
Mme	M.P.	LEVEL	Examineur
M.	A.	NADJI	Examineur
M.	L.	RIVKIN	Rapporteur
M.	D.	ROBIN	Rapporteur
M.	F.	RUGGIERO	Rapporteur
M.	A.	MOSNIER	Correspondant CEA

Au lecteur,
A l'amoureux de la Physique,
A celui qui sait lire au-delà du texte . . .

Remerciements

Je tiens à remercier du plus profond du cœur celui qui a guidé mes pas vers le monde de la recherche : Jacques LASKAR. Ce qu'il m'a enseigné, la confiance qu'il m'a accordée et l'amitié qui nous lie sont inestimables devant ma modeste contribution à la physique des accélérateurs.

Je suis reconnaissant à Phi NGHIEM de m'avoir initié au monde des accélérateurs. Son expérience et ses conseils m'ont été d'un très grand secours.

Ma gratitude va à Dave ROBIN pour m'avoir accueilli à l'ALS, m'avoir permis le premier contact avec un accélérateur, expérience impressionnante mais à laquelle j'ai très vite pris goût ! Sa disponibilité et sa gentillesse m'ont beaucoup touché.

Comment remercier Philippe ROBUTEL ? bien qu'astronome (ce n'est pas un défaut), je crois qu'il a été mon interlocuteur le plus attentif et le plus régulier. Sa gentillesse et sa bonté naturelles, sa clarté pour transformer un problème compliqué en solution évidente ont rendu ma thèse encore plus agréable.

Dois-je encore dire toute ma reconnaissance à Amor NADJI ? il est rare de trouver à la fois la compétence, la disponibilité et l'amitié chez une même personne.

Je mesure l'honneur que me font Lenny RIVKIN et Francesco RUGGIERO d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie Oriol BOHIGAS d'avoir accepté de participer à ce jury.

Mes remerciements vont à Yannis PAPAPHILIPPOU pour ses nombreuses suggestions lors de la relecture de ce mémoire.

Ma gratitude va aux équipes qui m'ont accueilli durant ces trois années :

- L'équipe Astronomie et Systèmes Dynamiques. Je ne peux pas citer tous ses membres, chercheurs et étudiants. Travailler dans un milieu si riche, si agréable est un trésor inestimable pour le périple d'une thèse.
- L'équipe du projet SOLEIL et spécialement Jean-Louis LACLARE toujours disponible pour la discussion.
- Le Service d'Etude des Accélérateurs, en particulier Alban MOSNIER et Jacques PAYET.
- Le groupe de l'ESRF, spécialement A. ROBERT
- Le groupe théorie de Super-ACO avec tout particulièrement Marie-Paule LEVEL, Pascale BRUNELLE et Henri ZYNGIER. Je suis conscient de la chance que j'ai eue de pouvoir « jouer » avec un accélérateur et de la confiance qu'il a été accordé à mon travail. Les discussions nombreuses et fructueuses m'ont permis d'approfondir ma connaissance expérimentale et théorique des accélérateurs.
- Le groupe Dynamique Faisceau de l'ALS et tout particulièrement Christoph STEIER qui a toujours pris le temps de répondre à mes nombreux et très long courriers électroniques. Ses conseils m'ont aidé bien plus qu'il ne le pense.

Je voudrais remercier spécialement Alexandre CORREIA d'avoir partagé mon chemin durant bientôt quatre années. Le seul point qui nous sépare vraiment est le titre de notre thèse. Alors que j'étudie la dynamique des accélérateurs, Alexandre se consacre à celle des planètes du Système Solaire.

Mes pensées vont enfin à ma famille qui a toujours été convaincue que je mènerais ce travail à son terme.

Table des matières

Introduction	vii
I Accélérateurs : Théorie et simulations	1
1 Dynamique d'un accélérateur circulaire	3
1.1 Présentation	3
1.1.1 Introduction	3
1.1.2 Description générale	3
1.2 Hamiltonien	6
1.2.1 Lagrangien relativiste	6
1.2.2 Hamiltonien relativiste	7
1.2.2.1 Moments canoniques	7
1.2.2.2 Définition des coordonnées de l'accélérateur	8
1.2.2.3 Changement de variable indépendante	10
1.2.2.4 Changement d'échelle	11
1.2.2.5 Expression finale du Hamiltonien à trois degrés de liberté	12
1.2.2.6 Approximations	12
1.2.3 Potentiel vecteur	13
1.3 Dynamique transverse	16
1.3.1 Dynamique linéaire	16
1.3.1.1 Particule <i>on momentum</i>	17
1.3.1.2 Particule <i>off momentum</i>	19
1.3.2 Dynamique nonlinéaire	20
1.4 Définitions complémentaires	22
1.4.1 Résonances	22
1.4.2 Acceptances et ouvertures	23
1.4.2.1 Définitions	23
1.4.2.2 Un schéma d'optimisation de l'ouverture dynamique	24
2 Méthodes et outils	27
2.1 Réalisation d'un intégrateur symplectique	28
2.1.1 Introduction	28
2.1.2 Ancienne approche	29
2.1.3 Approche moderne	30

2.1.3.1	Présentation	30
2.1.3.2	Le flot d'un système	31
2.1.3.3	Intégrateur symplectique <i>ab ovo</i>	32
2.1.3.4	Méthodes de construction	33
2.1.4	Intégrateurs utilisés	37
2.1.5	Intégration des éléments parfaits	38
2.1.5.1	Section droite	40
2.1.5.2	Aimant de courbure parfait	40
2.1.5.3	Quadripôle droit	44
2.1.5.4	Hexapôle parfait droit	45
2.1.6	Etude comparative	46
2.1.6.1	Introduction	46
2.1.6.2	Propriétés	46
2.2	Analyse en Fréquence	50
2.2.1	Introduction	50
2.2.2	Application fréquence	50
2.2.3	Propriétés de l'application fréquence numérique	53
2.2.4	Applications préliminaires	54
2.2.4.1	Le pendule	54
2.2.4.2	L'application d'Hénon	56
2.2.5	Accélérateurs : carte en fréquence	60
2.2.5.1	Application fréquence	60
2.2.5.2	Principe de construction	61
3	Analyse en Fréquence et Sources de Lumière	63
	Introduction	63
3.1	Le Projet SOLEIL	67
3.1.1	Optique	67
3.1.2	Dynamique	67
3.1.2.1	Optique faible émittance numéro 1	68
3.1.2.2	Optique faible émittance numéro 1 modifiée	71
3.1.2.3	Optique faible émittance numéro 2	72
3.1.2.4	Conclusion sur les optiques de SOLEIL	73
3.2	Super-ACO	75
3.2.1	Introduction	75
3.2.2	Description d'une maille	75
3.2.3	Choix du logiciel de <i>tracking</i>	77
3.2.3.1	Symplecticité et champ de fuite avec le code BETA	77
3.2.3.2	Symplecticité et faible rayon de courbure	78
3.2.3.3	Notes sur l'ordre <i>scaling</i> de BETA	79
3.2.4	Machine idéale	80
3.2.4.1	Optique	80
3.2.4.2	Dynamique	81
3.2.4.3	Défauts de gradients des quadripôles droits	84
3.2.5	Machine nominale	85

3.2.5.1	Optique	85
3.2.5.2	Dynamique	86
3.2.6	Premières conclusions	86
3.3	L'ESRF	89
3.3.1	Optique	89
3.3.2	Premier jeu hexapolaire	89
3.3.2.1	Dynamique <i>on momentum</i>	89
3.3.2.2	Dynamique <i>off momentum</i>	92
3.3.2.3	Conclusion préliminaire	94
3.3.2.4	Durée de vie Touschek	94
3.3.3	Second jeu hexapolaire	97
3.3.3.1	Dynamique <i>on momentum</i>	97
3.3.3.2	Dynamique <i>off momentum</i>	99
3.3.3.3	Conclusion préliminaire	102
3.3.3.4	Durée de vie Touschek	102
3.3.4	Conclusions sur les deux réglages nominaux	103
3.4	L'ALS	105
3.4.1	Optique	105
3.4.2	Dynamique	105
3.4.3	Vers un modèle plus réaliste (I)	106
3.4.4	Vers un modèle plus réaliste (II)	108
3.4.5	Dynamique <i>off momentum</i>	109
3.4.6	Conclusion	111
II Résultats expérimentaux		113
4	ALS : Premières cartes en fréquence expérimentales	115
4.1	Introduction	115
4.2	Etapes préparatoires	116
4.2.1	Conditions expérimentales	117
4.3	La décohérence <i>ab ovo</i>	118
4.3.1	Décohérence due à la chromaticité	119
4.3.1.1	Déphase chromatique induit	119
4.3.1.2	Densité de probabilité longitudinale	120
4.3.1.3	Expression finale	121
4.3.2	Décohérence 1D due à la dispersion des nombres d'ondes	122
4.3.2.1	Densité de probabilité transverse	122
4.3.2.2	Expression finale	123
4.3.3	Décohérence 2D due à la dispersion des nombres d'ondes	124
4.3.4	Résumé	124
4.4	Prétraitement des données	125
4.5	Premières cartes en fréquence mesurées	126
4.5.1	Première expérience	126
4.5.2	Deuxième expérience	127

4.5.3	Expériences avec Wigglers fermés	128
4.6	Conclusions	129
5	Super-ACO	131
5.1	Acquisition des matrices-réponse	132
5.1.1	Description du programme LOCO	132
5.1.1.1	Perturbation de l'orbite fermée par un <i>kick</i> dipolaire	132
5.1.1.2	Matrice-réponse	133
5.1.2	Application à Super-ACO	134
5.1.2.1	Procédure adoptée	135
5.1.3	Etude préliminaire	135
5.1.3.1	Conditions du test	135
5.1.3.2	Résultats	136
5.1.3.3	Test complet du modèle	136
5.1.4	Etapas préliminaires à l'analyse des matrices-réponse	137
5.1.4.1	Bruit moyen des BPM	137
5.1.4.2	Mesure de la fonction dispersion dans les BPM	138
5.1.5	Matrice-réponse hexapôles éteints et onduleurs ouverts	139
5.1.5.1	Introduction	139
5.1.5.2	Conditions expérimentales	140
5.1.5.3	Dispersion mesurée dans les BPM	141
5.1.5.4	Résultats obtenus avec LOCO	142
5.1.6	Matrice-réponse hexapôles allumés et onduleurs ouverts	150
5.1.6.1	Influence des hexapôles	150
5.1.6.2	Conditions expérimentales	150
5.1.6.3	Dispersion mesurée dans les BPM	151
5.1.6.4	Résultats obtenus avec LOCO	153
5.1.7	Matrice-réponse hexapôles allumés et onduleurs fermés	158
5.1.7.1	Conditions expérimentales	158
5.1.7.2	Dispersion mesurée dans les BPM	159
5.1.7.3	Résultats obtenus avec LOCO	160
5.2	Glissements expérimentaux des nombres d'ondes	165
5.2.1	Etalonnage de l'électrode à 45 degrés	165
5.2.2	Point de fonctionnement nominal	166
5.2.2.1	<i>Kick</i> avec le perturbateur P4	167
5.2.2.2	<i>Kick</i> avec le perturbateur P6	172
5.2.2.3	Utilisation de l'électrode à 45 degrés : familles H1 et H2 éteintes	174
5.2.3	Vers un nouveau modèle de Super-ACO	177
5.2.3.1	Observations	177
5.2.3.2	Champs de fuite des quadripôles	178
5.2.3.3	Conséquences sur la dynamique globale	181
5.3	Espace des Phases et glissement des nombres d'ondes	185
5.3.1	Etalonnage des BPM	185
5.3.1.1	Conditions expérimentales	185
5.3.1.2	Notes sur le BPM4	186

5.3.1.3	Notes sur le BPM12	188
5.3.2	Point de routine avec minimum de couplage	188
5.3.2.1	Conditions expérimentales	188
5.3.2.2	Espace des phases	189
5.3.2.3	Courbe en fréquence	190
5.3.3	Point de routine avec couplage fort	193
5.3.3.1	Conditions expérimentales	193
5.3.3.2	Espace des phases	194
5.3.3.3	Courbes en fréquence	194
5.3.4	Familles H1 et H2 éteintes avec minimum de couplage	196
5.3.4.1	Conditions expérimentales	196
5.3.4.2	Espace des phases	196
5.3.4.3	Courbe en fréquence	198
5.3.5	Familles H1 et H2 éteintes sans minimum de couplage	198
5.3.5.1	Conditions expérimentales	198
5.3.5.2	Espace des phases	199
5.3.5.3	Courbes en fréquence	199
5.3.6	Brève conclusion	201
5.4	Bilan et conclusion sur l'optique de Super-ACO	201
Conclusions et perspectives		205
Bibliographie		207
Annexes		215
A	Compléments sur les intégrateurs	215
A.1	Intégration exacte d'une section droite	215
A.2	Intégration d'un dipôle	216
A.2.1	Aimant secteur exact	216
A.2.2	Aimant dipolaire en coordonnées rectangulaires	218
A.2.3	Coin dipolaire	219
A.2.4	Dipôle combiné sans terme petite machine	219
A.2.5	Dipôle droit en coordonnées rectangulaires	221
A.2.6	Dipôle avec terme petite machine	221
A.2.6.1	Intégration de A	222
A.2.6.2	Intégration de B	223
A.2.6.3	Calcul du correcteur	223
A.3	Déplacements et rotations d'un élément	224
B	Figures en couleur	227
Introduction		227
B.1	Le projet SOLEIL	228
B.2	Super-ACO	229
B.2.1	Simulations : différents modèles de Super-ACO.	229

TABLE DES MATIÈRES

B.2.2	Expérience : prise en compte des champs de fuite quadripolaires.	231
B.3	L'ESRF : point de fonctionnement nominal	233
B.4	L'ALS	235

Introduction

La physique des accélérateurs a connu de profonds bouleversements ces dernières années. L'augmentation des performances des machines en termes d'énergie, de durée de vie, de taille de faisceau s'est accompagnée de l'utilisation de champs magnétiques de plus en plus intenses et complexes (wigglers, onduleurs, solénoïdes, aimants supraconducteurs). Aujourd'hui, le régime de fonctionnement d'un accélérateur est fortement marqué par des phénomènes non-linéaires (résonances, chaos). De nombreux effets aussi bien individuels que collectifs doivent être désormais compris pour obtenir de hautes performances. Parallèlement, les méthodes d'investigation se sont développées; beaucoup proviennent d'ailleurs de la Mécanique Céleste, «berceau» de l'étude des systèmes dynamiques (méthodes de perturbation, d'intégration, stabilité à long terme). A cela, il faut ajouter l'essor de l'informatique, un précieux outil du physicien des accélérateurs.

Le contenu de cette thèse est un exemple de ce lien entre la Physique des Accélérateurs et la Mécanique Céleste, puisque nous y appliquons une méthode récente, l'Analyse en Fréquence, qui a été initialement développée pour étudier la dynamique et la stabilité du Système Solaire sur plusieurs millions d'années (Laskar, 1990). En l'espace d'une seconde, une particule effectue environ 10 000 révolutions dans le collisionneur électron-positron de 27 km de circonférence du CERN (LEP). L'échelle de temps change mais pas les outils d'investigation.

Le travail ici-présenté est consacré à l'étude de la dynamique transverse des machines de rayonnement synchrotron. Il s'articule autour de deux grandes parties. Une première, théorique, présente les outils utilisés (Hamiltonien, intégrateurs symplectiques, Analyse en Fréquence); des simulations numériques ont été effectuées pour quatre machines : l'ALS (Berkeley), l'ESRF (Grenoble), SOLEIL (Saclay) et Super-ACO (Orsay). La seconde partie est dédiée à l'analyse d'expériences réalisées sur deux sources de lumière : l'ALS et Super-ACO.

Les machines de rayonnement synchrotron de troisième génération sont construites sur des optiques à forte focalisation afin d'atteindre de performances toujours plus extrêmes : les petites émittances créées permettent d'obtenir les hautes brillances recherchées. Cependant, de telles contraintes impliquent l'utilisation de champs magnétiques de forte intensité qui eux-mêmes vont exciter de nombreuses résonances et risquent ainsi de détériorer la dynamique globale du faisceau et de conduire à une faible ouverture dynamique et une faible acceptance en énergie. Il en résulte une injection lente et une faible durée de vie. Ces effets indésirables doivent être minimisés tout en conservant une haute brillance.

La dynamique des particules individuelles est une des causes principales de la limitation des performances actuelles des sources de lumière. Si les orbites sont instables aux grandes amplitudes, alors les électrons diffusés à ces grandes amplitudes lors de collisions avec les

atomes du gaz résiduel (durée de vie liée au vide) ou avec d'autres électrons (durée de vie Touschek) vont être perdus par le faisceau. Il en sera de même pour les particules injectées à grande amplitude (optimisation de l'injection).

Une des tâches principales du physicien des accélérateurs consiste d'abord à déterminer la meilleure optique possible de la machine, ensuite à définir une modélisation aussi proche que possible de la réalité et enfin, à développer des méthodes susceptibles d'améliorer la stabilité de la dynamique du faisceau.

La première étape consiste à modéliser chacun des éléments magnétiques d'un anneau de stockage. L'approche que nous avons retenue (chapitre 1) est une approche hamiltonienne locale : chaque élément magnétique (dipôle, quadripôle, multipôle) est modélisé par un Hamiltonien local à trois degrés de liberté, exprimé en coordonnées rectilignes ou curvilignes suivant la géométrie de l'élément. Dans chacun des cas, les approximations choisies sont explicitées. Le champ magnétique est toujours exprimé en considérant un profil magnétique longitudinal rectangulaire. Suivant le type d'élément et le rayon de l'accélérateur, les approximations des petits angles et des grandes machines seront ou non prises en compte.

La formulation hamiltonienne est particulièrement adaptée pour étudier la dynamique nonlinéaire et pour construire un intégrateur numérique des équations du mouvement. Bien que de nombreux codes dits de *tracking* existent déjà actuellement (*e.g.* les codes BETA, DESPOT, MAD et TRACY), ils ne sont pas optimisés et ne permettent pas de modéliser la dynamique à long terme aussi bien des petites et des grandes machines. Les spécificités recherchées sont d'obtenir un code numérique dédié exclusivement au *tracking*. Il doit pouvoir permettre d'intégrer en un temps optimum la trajectoire d'une particule (chargée) sur plusieurs millions de tours, et ceci pour de très nombreuses conditions initiales, de contrôler la précision et les approximations réalisées. Le but consiste à caractériser de manière quasi-exhaustive la dynamique du faisceau circulant dans un accélérateur. Pour toutes ces raisons, les approches matricielles, les approches fondées sur le calcul de l'application de premier retour de l'accélérateur ou permettant de calculer des formes normales n'ont pas été retenues.

La méthode d'intégration numérique que nous présentons est symplectique et repose sur l'utilisation de l'algèbre de Lie (chapitre 2). Ces nouvelles méthodes sont déjà très répandues aux Etats-Unis, elles ont plus de mal à s'établir en Europe. L'intégrateur le plus utilisé aujourd'hui pour les machines à électrons repose sur le travail de Forest et Ruth (1990) : c'est un intégrateur d'ordre 4. Nous présentons une nouvelle classe d'intégrateurs à pas d'intégration tous positifs (Laskar et Robutel, 2000). Ce sont des intégrateurs particulièrement adaptés à des Hamiltoniens H décomposables en deux parties A et B complètement intégrables où B joue le rôle d'un terme de perturbation : $H = A + \epsilon B$. Il est possible de construire des intégrateurs d'ordre n de reste $\mathcal{O}(s^n \epsilon + s^2 \epsilon^2)$ où s est le pas d'intégration. Il est souvent possible d'adjoindre un correcteur pour que le reste devienne un $\mathcal{O}(s^n \epsilon + s^4 \epsilon^2)$. L'intégrateur que nous avons retenu est plus précis que celui de Forest et Ruth d'un ordre de grandeur pour un nombre constant d'évaluations.

Les équations du mouvement intégrées, la dynamique des différentes machines de rayonnement synchrotron est étudiée au moyen de l'Analyse en Fréquence. C'est un outil extrêmement puissant reposant sur une technique de Fourier raffinée et permettant d'obtenir la décomposition complète d'un signal quasi-périodique. Nous commençons par l'appliquer à deux systèmes dynamiques simples : le pendule et l'application d'Hénon. Le pendule per-

met de décrire la dynamique au voisinage d'une résonance. L'application d'Hénon permet de modéliser les perturbations introduites par un hexapôle dans une maille.

L'Analyse en Fréquence est une méthode particulièrement adaptée à la description de la dynamique d'un système à trois degrés de liberté comme celle d'un accélérateur et permet de manière assez intuitive et pratique d'identifier des résonances et d'estimer leur amplitude. Cette méthode est appliquée à la description théorique de quatre sources de lumière (chapitre 3) : l'ALS, l'ESRF, le projet SOLEIL et Super-ACO. Pour chacune de ces machines, nous calculons une carte en fréquence ainsi que l'ouverture dynamique associée pour différentes configurations (chromaticités, points de fonctionnement, énergie de la particule, défauts du champ magnétique). Une carte en fréquence décrit la variation des nombres d'ondes avec les amplitudes d'oscillation horizontale et verticale. Nous montrons la grande sensibilité de la dynamique aux réglages magnétiques et définissons un indice de stabilité corrélé à la variation temporelle des nombres d'ondes (diffusion des orbites). L'ensemble des résultats ne prend en compte que la dynamique transverse en négligeant le mouvement longitudinal. Les cartes en fréquence mettent en évidence clairement les principales résonances, en particulier les résonances couplées non vues ni étudiées dans les processus traditionnels d'optimisation de l'optique d'une machine. L'utilisation de la diffusion des orbites permet également d'identifier les résonances dans l'espace des configurations (l'ouverture dynamique).

Dans un anneau de stockage, la périodicité interne permet d'améliorer la dynamique du faisceau en limitant le nombre de résonances pouvant être excitées ; cependant la présence de défauts quadripolaires est une des causes principales de brisure de cette symétrie et entraîne souvent une détérioration de la durée de vie et du taux d'injection *via* l'excitation de non-linéarités. Une connaissance précise des défauts magnétiques est donc nécessaire pour établir un modèle aussi réaliste que possible de la machine ; ce travail est délicat, si bien que souvent l'écart entre les performances escomptées et réelles pour une machine donnée peut atteindre plus d'un facteur deux. L'analyse en fréquence est ici utilisée pour réaliser ce lien entre théorie et expérience.

A ces fins, des expériences innovantes ont été menées à l'ALS et Super-ACO (deuxième partie). Pour obtenir une modélisation aussi réaliste que possible de l'ALS, les matrices réponses expérimentales sont analysées pour déduire les défauts de gradients droits et tournés. Ce travail essentiel (Robin, Safranek et Decking, 1999) a été obtenu en utilisant le programme LOCO (Safranek, 1997). L'étape suivante consistait à pouvoir comparer la dynamique simulée et réelle de l'accélérateur. Nous présentons au chapitre 4 la première carte en fréquence expérimentale d'un accélérateur (Robin, Steier, Laskar, Nadolski : 2000, « Global Dynamics of the Advanced Light Source Revealed through Experimental Frequency Map Analysis »). Sa réalisation a été possible grâce à l'utilisation conjointe de moniteurs de position tour par tour et de deux aimants rapides permettant de simuler les amplitudes initiales d'oscillations bêta-trons horizontales et verticales. Les cartes en fréquences mesurées et simulées sont en excellent accord. Les expériences ont été réalisées pour le point de fonctionnement nominal de l'anneau de stockage mais aussi pour des réglages magnétiques proches de nœuds de résonances. La diffusion des orbites y a été mesurée. Ces résultats permettent d'envisager l'utilisation de l'Analyse en Fréquence en tant qu'outil en ligne (diagnostic de la dynamique du faisceau) dans la salle de contrôle d'un accélérateur. L'Analyse en Fréquence peut aussi être utilisée indépendamment de tout modèle pour valider une modélisation. Ce point est fondamental

puisqu'il permet ensuite de faire des simulations fiables de l'impact de la modification de la structure de l'anneau.

Le dépouillement et l'analyse de l'ensemble des données expérimentales a nécessité de comprendre des effets connexes liés au fait que nous ne mesurons pas le signal d'une particule individuelle mais d'un faisceau d'environ 40 milliards d'électrons. Nous présentons une modélisation de la décohérence à une et deux dimensions.

Des expériences faites à Super-ACO (chapitre 5) nous ont permis d'améliorer notre compréhension de la dynamique linéaire et nonlinéaire. La première étape a nécessité d'adapter le programme LOCO pour déterminer le premier jeu de gradients mesurés de l'anneau. Trois matrices réponses ont été acquises et analysées pour trois configurations distinctes : hexapôles éteints, hexapôles allumés, hexapôles allumés et onduleurs fermés. Les défauts déduits sont compatibles avec les tolérances magnétiques. Pour comprendre les écarts importants de performances entre la théorie et la simulation, nous avons réalisé les premières mesures, à Super-ACO, du glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude horizontale pour les trois configurations précédentes. Super-ACO ne disposant pas de moniteur de position tour par tour, nous avons utilisé le signal collecté sur une simple électrode. Utilisant l'Analyse en Fréquence, le principal résultat est la mise en évidence d'un fort pseudo-octupôle (non modélisé jusqu'à présent) issu des champs de fuite des quadripôles. Les implications sont importantes et permettent de mieux comprendre les performances actuelles de l'anneau.

Première partie

Accélérateurs : Théorie et simulations

Chapitre 1

Dynamique d'un accélérateur circulaire

1.1 Présentation

1.1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de définir les notions de base de physique des accélérateurs circulaires. Cet exposé est loin d'être exhaustif ; le lecteur pourra se référer à des ouvrages classiques, par exemple (Wiedemann, 1993) et (Lee, 1998) pour une introduction complète sur la physique des accélérateurs ainsi que le *Handbook of Accelerator Physics and Engineering* édité par Chao et Tigner (1998) rassemblant les principales formules de bases et surtout de nombreuses références précieuses et utiles. La lecture des articles et ouvrages de référence de Courant et Snyder (1958), Bruck (1966) et Sands (1970) ont également guidé l'écriture de ce chapitre.

Après une introduction qualitative aux principaux phénomènes mis en jeu pour stocker un faisceau de particules, je définirai de manière rigoureuse l'expression du Hamiltonien la plus générale pour un accélérateur de particules. Cette formulation sera utile pour aborder le second chapitre où est construit un intégrateur des équations du mouvement (section 1.2). Je rappellerai ensuite succinctement les résultats principaux en approximation linéaire (section 1.3.1). Enfin, je discuterai de quelques grandeurs fondamentales utilisées pour définir les performances d'une source de lumière (section 1.4).

1.1.2 Description générale

Un anneau de stockage est une structure magnétique circulaire dans laquelle on accumule un faisceau intense de particules. Tout l'enjeu est de pouvoir conserver ce faisceau pendant plusieurs heures voire dizaines d'heures. Pour que le faisceau conserve de bonnes propriétés (taille, divergence, cohérence), un vide poussé doit exister dans l'anneau. Suivant le type de particules et les caractéristiques de l'anneau de stockage, le faisceau sera utilisé soit pour réaliser des collisions entre particules (*e.g.* le défunt anneau de collision LEP et le futur collisionneur LHC du CERN), soit pour produire de la lumière (*e.g.* les sources de rayonnement synchrotron de Grenoble (ESRF), de Berkeley (ALS), la future source de lumière de troisième génération SOLEIL (Saclay)). Dans le premier cas, le domaine d'application est principalement la physique des hautes énergies (particules, ions lourds) ; les sources de lumières sont,

1.1. PRÉSENTATION

quant à elles, utilisées comme microscopes géants aux propriétés inégalées dans les domaines de la recherche fondamentale et appliquée (biologie, propriétés structurales et électroniques de la matière, environnement, applications industrielles).

Plongeons à présent au cœur d'un anneau de stockage¹ :

- Un paquet d'électrons d'énergie nominale est injecté dans la chambre à vide de l'accélérateur (cf. Fig. 1.1). Les électrons y circulent à une vitesse proche de celle de la lumière. Un champ magnétique guide les particules tout au long de l'anneau autour d'une orbite fermée de référence. Il focalise les particules et leur imprime un mouvement quasi-périodique radial et vertical autour de cette orbite fermée. On parle alors d'*oscillations bétatrons*.

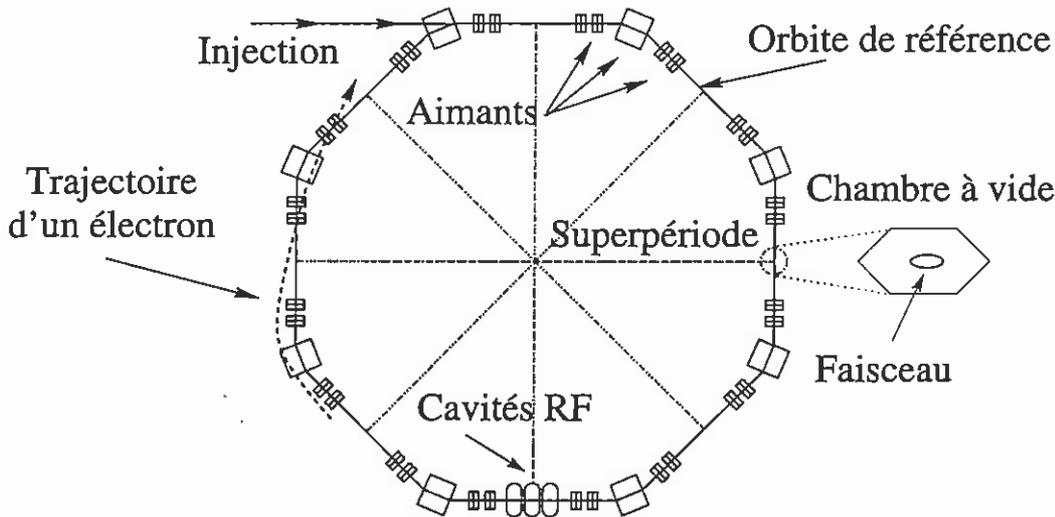


FIG. 1.1: Schéma d'un anneau de stockage à électrons constitué de huit super-périodes. Les particules circulent dans une chambre à vide tout au long de l'anneau constitué d'une succession d'éléments magnétiques.

- Dans le cadre d'une machine circulaire idéale, nous pouvons associer une fonction spécifique à chaque type d'éléments magnétiques. Chacun des M dipôles courbe la trajectoire du faisceau d'un angle $\theta = \frac{2\pi}{M}$. Des quadripôles sont utilisés comme lentilles magnétiques pour focaliser les particules. Ces deux principaux types d'éléments ainsi que la section droite (absence de champ électromagnétique) définissent l'optique linéaire de l'anneau, en référence à l'approximation paraxiale utilisée. L'agencement de ces éléments définit la maille de l'accélérateur. Si l'anneau de stockage est constitué de N secteurs identiques appelés super-périodes, alors il possède une symétrie interne qui permet d'augmenter la stabilité globale de la dynamique (ce point sera abordé dans la section 1.4).
- Durant chaque révolution, un électron perd une partie de son énergie sous forme de rayonnement synchrotron. Afin de stocker les électrons pendant plusieurs heures, il est nécessaire de compenser en moyenne cette perte d'énergie. C'est le rôle des cavités radiofréquences qui accélèrent longitudinalement la particule qui les traverse.

¹Cette visite guidée est fortement imprégnée de la lecture de l'introduction à la physique des accélérateurs d'électrons de Sands (1966).

- Cette accélération périodique a pour effet de regrouper les électrons en paquets. Dans chaque paquet, les électrons oscillent en longitude et en énergie par rapport à une particule de référence située au centre du paquet (cf. Fig. 1.2). Ces oscillations sont appelées *oscillations synchrotrons*.
- La combinaison perte d'énergie par rayonnement synchrotron et apport d'énergie des cavités RF induit un lent *amortissement radiatif* des amplitudes d'oscillation des particules : la trajectoire de chaque électron tend vers celle d'une particule de référence située au centre du paquet.
- L'amortissement des oscillations est arrêté par les *fluctuations quantiques*. Ce phénomène est lié à la quantification du rayonnement émis par les électrons et a tendance à exciter continûment les oscillations des particules : le faisceau atteint alors ses *dimensions d'équilibre*. Les particules ont leurs phases et amplitudes d'oscillations distribuées suivant une loi de Gauss transversalement et longitudinalement.

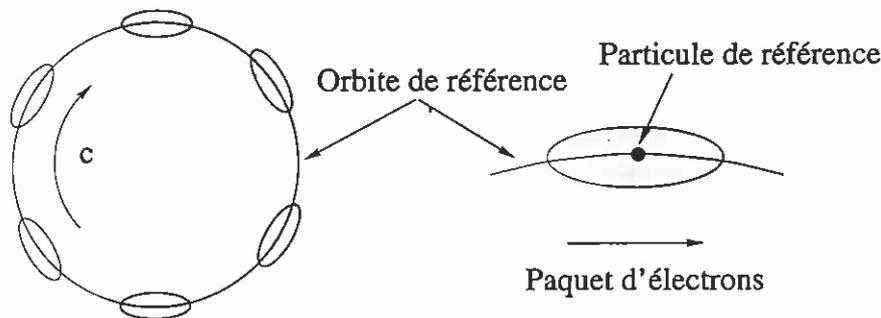


FIG. 1.2: Paquets circulant dans un anneau de stockage à une vitesse proche de la lumière c , autour de l'orbite de référence. Au sein de chaque paquet, les particules oscillent en longitude et en énergie (dynamique longitudinale) — inspiré de Sands, 1970 —

- Pour chaque degré de liberté, il existe une amplitude maximale d'oscillation au-delà de laquelle le mouvement devient instable. Cette amplitude définit l'*acceptance* du faisceau. L'amplitude limite peut être due à un élément physique qui arrête les électrons (*e.g.* les parois de la chambre à vide) ou à un effet non linéaire du champ électromagnétique conduisant à la divergence des trajectoires.
- Les électrons peuvent également être perdus suite à des diffusions sur les atomes du gaz résiduel présent dans la chambre à vide ou en raison des fluctuations statistiques induites par l'amortissement radiatif et l'excitation quantique.
- Pour être complet, il faut dire quelques mots sur les effets collectifs. Typiquement un paquet est constitué d'un milliard d'électrons. Les électrons peuvent interagir entre eux : lors de diffusions simples ou multiples, les électrons peuvent acquérir des amplitudes d'oscillation plus grandes que l'acceptance du faisceau. Les électrons peuvent également se mettre à osciller de manière cohérente ce qui, dans certains cas, conduit à l'instabilité.

L'objectif de la section suivante est d'établir l'expression générale du Hamiltonien d'une particule relativiste se déplaçant dans un champ électromagnétique. Nous pourrons alors en déduire les équations du mouvement et discuter de la dynamique linéaire et non linéaire d'une particule circulant dans un anneau de stockage.

1.2 Formulation hamiltonienne

Pour établir les équations du mouvement d'une particule circulant dans un accélérateur, nous partirons du principe de moindre action. Nous commencerons par établir l'expression du Lagrangien d'une particule libre relativiste de masse m , puis nous plongerons la particule de charge e dans un champ électromagnétique (section 1.2.1). Nous en déduirons l'expression générale du Hamiltonien relativiste que nous exprimerons en coordonnées de l'accélérateur (section 1.2.2). A chaque étape, nous définirons avec précision l'ensemble des hypothèses réalisées et l'expression générale du champ magnétique (section 1.2.3).

1.2.1 Lagrangien relativiste

Soit \mathcal{A} l'intégrale d'action pour une particule libre relativiste, m sa masse, $\mathbf{q} = (x, y, z)$ son vecteur position et $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$ son vecteur vitesse. Par application du principe de relativité, l'action doit être indépendante du choix du référentiel d'inertie, soit un invariant de Lorentz : l'intégrale d'action \mathcal{A} est donc un scalaire. De plus, il ne doit figurer que des différentielles du premier degré sous le signe d'intégration (cf. Landau et Lifchitz, *Physique théorique : Théorie des Champs*, chap. I et II). La seule solution pour une particule libre est alors l'intervalle relativiste ds à une constante de proportionnalité près, notée α .

Si l'intégrale est prise sur une ligne d'univers s'étendant entre deux événements a et b qui sont les positions initiale et finale de la particule aux instants respectifs t_1 et t_2 , alors l'action \mathcal{A} s'écrit :

$$\mathcal{A} = -\alpha \int_a^b ds \quad (1.1)$$

Or l'intervalle relativiste ds est donné par la métrique de Minkowski :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \Rightarrow ds = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (1.2)$$

où c est la vitesse de la lumière ; donc l'action 1.1 peut se réécrire :

$$\mathcal{A} = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (1.3)$$

Par définition du Lagrangien (\mathcal{L}), l'action est également définie par la relation (cf. Landau et Lifchitz, *Physique théorique : Mécanique*, chap. I) :

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (1.4)$$

On déduit des équations 1.3 et 1.4 l'expression du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \quad (1.5)$$

La constante α est déterminée en passant à la limite $c \rightarrow +\infty$ qui doit redonner l'énergie cinétique classique pour une particule libre ; en effectuant un développement limité à l'ordre un de l'expression 1.5, on obtient :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^{\text{classique}} \iff -\alpha c + \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^3}\right) = [-mc^2] + \frac{1}{2} mv^2 \quad (1.6)$$

d'où $\alpha = mc$. Le terme entre crochets est constant donc il n'intervient pas dans les équations du mouvement : il correspond à l'énergie de masse de la particule.

Le Lagrangien d'une *particule libre relativiste de masse m* s'exprime finalement par :

$$\mathcal{L}^{\text{libre}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.7)$$

Pour une *particule relativiste de charge e en mouvement dans un champ électromagnétique*, le Lagrangien total comporte un terme supplémentaire ($\mathcal{L}^{\text{inter}}$) caractérisant l'interaction de la particule avec le champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) (voir Landau et Lifchitz, *Théorie des Champs*, chap. III) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}^{\text{libre}} + \mathcal{L}^{\text{inter}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} - e\phi(\mathbf{q}) \quad (1.8)$$

avec \mathbf{A} le potentiel vecteur et ϕ le potentiel scalaire solutions des équations de Maxwell.

1.2.2 Hamiltonien relativiste

1.2.2.1 Moments canoniques

Par définition, les moments canoniques $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ s'obtiennent à partir du Lagrangien :

$$p_k \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{avec} \quad (p_1, q_1) = (p_x, x), \quad (p_2, q_2) = (p_y, y) \quad \text{et} \quad (p_3, q_3) = (p_z, z) \quad (1.9)$$

soit en utilisant l'expression 1.8 et le facteur de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad (1.10)$$

Le Hamiltonien autonome \mathcal{H} est obtenu à partir de la fonction de Lagrange 1.8 (voir Landau et Lifchitz, *Mécanique*, chap. VII) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
 &= \gamma m v^2 + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - (-\gamma^{-1} m c^2 + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi(\mathbf{q})) \\
 &= \gamma m c^2 + e\phi(\mathbf{q})
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

En introduisant l'impulsion m\'ecanique $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, on \u00e9tablit \u00e0 partir des \u00e9quations 1.10 et 1.11 la relation :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H} - e\phi(\mathbf{q}))^2 - \boldsymbol{\pi}^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
 &= m^2 c^4
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

L'expression du Hamiltonien 1.11 devient en utilisant la relation 1.12 :

$$\boxed{\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{q}))^2 + m^2 c^2} + e\phi(\mathbf{q})} \tag{1.13}$$

Les \u00e9quations du mouvement sont les *\u00e9quations dites de Hamilton* ou *canoniques* :

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, 3 \tag{1.14}$$

avec la relation suppl\u00e9mentaire si le Hamiltonien d\u00e9pend explicitement du temps t :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \tag{1.15}$$

Les variables (q, p) sont appel\u00e9es *variables canoniques*. Pour une description du formalisme Hamiltonien, le lecteur pourra se reporter par exemple au chapitre VII du tome de *M\u00e9canique* de Landau et Lifchitz.

1.2.2.2 D\u00e9finition des coordonn\u00e9es de l'acc\u00e9l\u00e9rateur

Pour la suite de l'expos\u00e9, il est utile d'obtenir une expression du Hamiltonien pour les jeux de coordonn\u00e9es cart\u00e9siennes et curvilignes. L'obtention g\u00e9n\u00e9rale du Hamiltonien va \u00eatre pr\u00e9sent\u00e9e en coordonn\u00e9es curvilignes dont les coordonn\u00e9es cart\u00e9siennes ne sont qu'un cas particulier (la courbure et la torsion sont nulles, cf. *infra*).

Les coordonn\u00e9es curvilignes, not\u00e9es (X, Y, s) , sont d\u00e9finies par rapport au rep\u00e8re de Serret-Frenet direct $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$; une particule de coordonn\u00e9es transverses X et Y est rep\u00e9r\u00e9e par son vecteur position \mathbf{r} par rapport \u00e0 l'orbite de r\u00e9f\u00e9rence \mathbf{r}_0 (voir Fig. 1.3) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(X, Y, s) &= \mathbf{r}_0(s) + X\mathbf{n}(s) + Y\mathbf{b}(s) \\
 &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

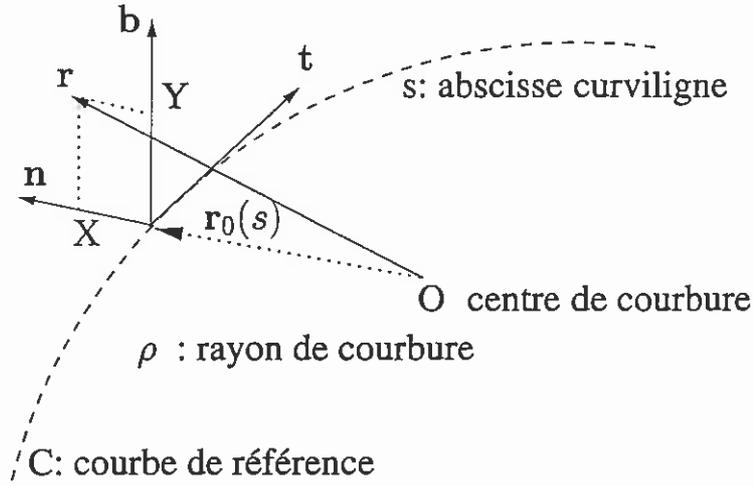


FIG. 1.3: Repère de Serret-Frenet $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$. Définition des coordonnées curvilignes (X, Y, s) utilisées pour écrire les équations du mouvement d'une particule autour de la trajectoire de référence.

Les vecteurs orthonormés $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$ sont respectivement les vecteurs tangent, normal et binormal définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{t} & \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{ds} \mathbf{r}_0(s) \\ \mathbf{n} & \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{\|\frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}_0(s)\|} \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}_0(s) \\ \mathbf{b} & \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{t} \times \mathbf{n} \end{cases} \quad (1.17)$$

où $h(s)$ et $\tau(s)$ décrivent la courbure et la torsion locales de la trajectoire à la longueur s :

$$\begin{cases} h(s) & = \frac{1}{\rho(s)} = \|\frac{d^2 \mathbf{r}_0(s)}{ds^2}\| \\ \tau(s) & = \frac{1}{h^2(s)} \det\left(\frac{d}{ds} \mathbf{r}_0(s), \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}_0(s), \frac{d^3}{ds^3} \mathbf{r}_0(s)\right) \end{cases}$$

Je rappelle les formules de Frenet :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau(s) & h(s) \\ \tau(s) & 0 & 0 \\ -h(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

On recherche une transformation canonique entre les anciennes variables notées $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ et les nouvelles variables $(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = (X, Y, s, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_s)$. Pour cela, on construit une fonction génératrice dépendant des anciens moments et des nouvelles positions, $F(\mathbf{p}, \mathcal{Q})$. Les changements de variables sont alors définis implicitement par :

$$\mathbf{q} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} F(\mathbf{p}, \mathcal{Q}) \quad (1.19a)$$

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{\partial}{\partial \mathcal{Q}} F(\mathbf{p}, \mathcal{Q}) \quad (1.19b)$$

L'équation 1.19a s'intègre simplement en utilisant la relation 1.16.

$$F(\mathbf{p}, \mathcal{Q}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}(\mathcal{Q}) + \Gamma(\mathcal{Q}). \quad (1.20)$$

Par convention la fonction $\Gamma(\mathcal{Q})$ est choisie nulle. L'équation 1.19b définit les nouveaux moments recherchés :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_X &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \stackrel{\text{déf}}{=} P_X \\ \mathcal{P}_Y &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{déf}}{=} P_Y \\ \mathcal{P}_s &= \mathbf{p} \cdot ((1 + hX)\mathbf{t} + X\tau\mathbf{n} - Y\tau\mathbf{b}) \stackrel{\text{déf}}{=} (1 + hX)P_s + X\tau P_X - Y\tau P_Y \end{cases}$$

avec (P_X, P_Y, P_s) les projections usuelles de l'impulsion sur la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. On note également que les coordonnées du potentiel vecteur \mathbf{A} se transforment comme celles du moment \mathbf{p} (cf. équation 1.10).

Dans la suite, on fait l'hypothèse que la trajectoire de référence est plane, *i.e.* que la torsion $\tau(s)$ est nulle². En remarquant que la base de Serret-Frenet est orthonormée, le nouveau Hamiltonien s'écrit en utilisant l'expression 1.13 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X, Y, s, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_s) &= \mathcal{H}(\mathbf{q}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}), \mathbf{p}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})) \\ &= c \sqrt{m^2 c^2 + (\mathcal{P}_X - e\mathcal{A}_X)^2 + (\mathcal{P}_Y - e\mathcal{A}_Y)^2 + \left(\frac{\mathcal{P}_s - e\mathcal{A}_s}{1 + hX}\right)^2} + e\phi(\mathcal{Q}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

L'expression 1.21 va être réécrite sous une forme plus standard pour la physique des accélérateurs au moyen de trois transformations canoniques (cf. Dragt et Forest, 1986).

1.2.2.3 Changement de variable indépendante

Dans un accélérateur, il est plus commode d'exprimer la trajectoire d'une particule en fonction de la coordonnée longitudinale prise comme variable indépendante à la place du temps t (z en coordonnées rectangulaires ou s en coordonnées curvilignes).

Comme nouveau Hamiltonien³, on choisit $\tilde{\mathcal{H}}(X, Y, t, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_t; s) = -\mathcal{P}_s$ en notant $\mathcal{P}_t = -\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(X, Y, t, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_t) &= -(1 + hX) \sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}_t + e\phi(\mathbf{e})}{c}\right)^2 - m^2 c^2 - (\mathcal{P}_X - e\mathcal{A}_X)^2 - (\mathcal{P}_Y - e\mathcal{A}_Y)^2} \\ &\quad - e\mathcal{A}_s \end{aligned} \quad (1.22)$$

²Bien traité, même pour des éléments tels des wigglers et solénoïdes, la notion de torsion est inutile (voir Forest et Ohmi, 1992 et Forest, Reusch, Bruhwiler et Amiry, 1994, p. 69).

³C'est une application le théorème des fonctions implicites avec pour hypothèse $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_t} \neq 0$, *i.e.* que la particule ne rebrousse pas chemin dans l'accélérateur.

On vérifie *a posteriori* que $\tilde{\mathcal{H}}$ conjugue les couples de variables (X, \mathcal{P}_x) , (Y, \mathcal{P}_y) et (t, \mathcal{P}_t) :

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}_t \stackrel{\text{déf}}{=} -d\mathcal{H} &= -\sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_k} d\mathcal{P}_k \right) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} ds - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} d\mathcal{P}_s - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \\ \Rightarrow -d\mathcal{P}_s \stackrel{\text{déf}}{=} d\tilde{\mathcal{H}} &= \sum_{k=1}^2 \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_k} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} dQ_k + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_k} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} d\mathcal{P}_k \right] \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} dt + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} d\mathcal{P}_t \end{aligned} \quad (1.23)$$

par identification en utilisant les équations 1.14, on obtient les nouvelles équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_k} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_k} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = \frac{dQ_k}{ds} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_k} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = -\frac{d\mathcal{P}_k}{ds} \end{cases} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (1.24)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_t} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = \frac{dt}{ds} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = -\frac{d\mathcal{P}_t}{ds} \end{cases} \quad (1.25)$$

La variable t est physiquement reliée à la notion de temps de vol et son moment canonique \mathcal{P}_t est l'opposé de l'énergie totale de la particule. Pour la suite des calculs, on suppose que le potentiel électrique ϕ est nul⁴.

En faisant l'hypothèse que le potentiel vecteur est nul le long de l'axe optique, *i.e.* $A(0, 0, s) = 0$, on constate l'existence de la trajectoire particulière : $(X, Y, \mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_s) = (0, 0, 0, 0, p_0)$, que l'on appelle *trajectoire de référence*.

1.2.2.4 Changement d'échelle

La seconde transformation revient simplement à introduire un facteur d'échelle dans les variables :

$$\begin{cases} \bar{x} = X \\ \bar{y} = Y \\ \bar{t} = -ct \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{p}_x = \frac{\mathcal{P}_x}{p_0} \\ \bar{p}_y = \frac{\mathcal{P}_y}{p_0} \\ \bar{p}_t = -\frac{\mathcal{P}_t}{p_0 c} \end{cases} \quad (1.26)$$

Pour conserver la nature hamiltonienne des équations, le nouveau Hamiltonien est simplement $\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\tilde{\mathcal{H}}}{p_0}$, soit :

$$\tilde{\mathcal{H}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_t) = -(1 + h\bar{x}) \sqrt{p_0^2 - \frac{m^2 c^2}{p_0^2} - (\bar{p}_x - e\bar{A}_x)^2 - (\bar{p}_y - e\bar{A}_y)^2 - e\bar{A}_s} \quad (1.27)$$

⁴Hypothèse non restrictive, le potentiel pourra facilement être réintroduit.

1.2. HAMILTONIEN

avec $\bar{A}_k = \frac{A_k}{p_0}$. Le long de la trajectoire de référence, on a alors :

$$\begin{cases} \bar{p}_t & \stackrel{\text{déf}}{=} \bar{p}_t^0 = -\sqrt{\frac{p_0^2 c^2 + m^2 c^4}{p_0^2 c^2}} = \frac{1}{\beta_0} \\ \frac{d\bar{t}}{ds} & = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_t} = -\bar{p}_t^0 = -\frac{1}{\beta_0} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c} \quad (1.28)$$

1.2.2.5 Expression finale du Hamiltonien à trois degrés de liberté

Usuellement, on préfère définir le mouvement d'une particule par rapport à une trajectoire de référence nulle, ce qui nous conduit à faire le dernier changement de variables dépendant de s (d'après Eq. 1.28) :

$$\begin{cases} \hat{x} & = \bar{x} \\ \hat{y} & = \bar{y} \\ \hat{t} & = \bar{t} + \frac{s-s_0}{\beta_0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{p}_x & = \bar{p}_x \\ \hat{p}_y & = \bar{p}_y \\ \hat{p}_t & = \bar{p}_t - \frac{1}{\beta_0} \end{cases} \quad (1.29)$$

Ce changement de variables dépend explicitement de s . Si F est une fonction génératrice, le nouveau Hamiltonien sera donné par : $\hat{H} = \bar{H} + \frac{\partial F}{\partial s}$. Nous construisons la fonction génératrice dépendant des anciennes positions et des nouveaux moments $F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \hat{p}_t, \hat{p}_x, \hat{p}_y; s) = F(\bar{q}, \hat{p}; s)$ (Dragt et Forest, 1986) :

$$\bar{p} = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} \stackrel{(1.29)}{\implies} F(\bar{q}, \hat{p}; s) = \bar{x}\hat{p}_x + \bar{y}\hat{p}_y + \bar{t}(\hat{p}_t + \frac{1}{\beta_0}) + G(\hat{p}, s) \quad (1.30)$$

$$\hat{q} = \frac{\partial F}{\partial \hat{p}} \stackrel{(1.29)}{\implies} F(\bar{q}, \hat{p}; s) = \bar{x}\hat{p}_x + \bar{y}\hat{p}_y + \bar{t}(\hat{p}_t + \frac{1}{\beta_0}) + \frac{s-s_0}{\beta_0}\hat{p}_t + K(s) \quad (1.31)$$

La fonction $K(s)$ est *a priori* une fonction quelconque. Pour permettre des comparaisons avec la littérature, elle est choisie telle que :

$$F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \hat{p}_t, \hat{p}_x, \hat{p}_y; z) = \bar{x}\hat{p}_x + \bar{y}\hat{p}_y + (\bar{t} + \frac{s-s_0}{\beta_0})(\hat{p}_t + \frac{1}{\beta_0}) \quad (1.32)$$

On en déduit l'expression du nouveau Hamiltonien \hat{H} :

$$\hat{H} = -(1 + h\hat{x}) \sqrt{\left(\frac{1}{\beta_0} + \hat{p}_t\right)^2 - \frac{1}{\gamma_0^2 \beta_0^2} - (\hat{p}_x - e\hat{A}_x)^2 - (\hat{p}_y - e\hat{A}_y)^2} - e\hat{A}_s + \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{\beta_0} + \hat{p}_t\right) \quad (1.33)$$

en remarquant l'identité : $\frac{m^2 c^2}{p_0^2} = \frac{1}{\gamma_0^2 \beta_0^2}$.

1.2.2.6 Approximations

Dans le cas ultra-relativiste, le Hamiltonien 1.33 se simplifie encore⁵ puisque $\beta_0 \rightarrow 1$ et $\gamma_0 \rightarrow +\infty$. Pour alléger l'écriture, les variables « perdent leur chapeau » (si aucune confusion n'est possible) et on pose $l = \hat{t}$ et $\delta = \hat{p}_t$:

$$\mathcal{H} = -(1 + hx) \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x - e\hat{A}_x)^2 - (p_y - e\hat{A}_y)^2} - e\hat{A}_s + 1 + \delta \quad (1.34)$$

Interprétons physiquement les nouvelles variables l et δ :

⁵Par exemple pour Super-ACO, $E = 0.8 \text{ GeV}$, $\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{800}{0.511} = 1566$

- $\delta = \frac{E-E_0}{p_0c}$ représente l'écart à énergie nominale E_0 normalisée par l'énergie de la particule nominale ultra-relativiste.
- $t_0(s) = \frac{s-s_0}{\beta_0}$ est le temps de passage en s de la particule synchrone. On suppose que cette dernière se trouve en s_0 en $t = 0$. Si $l > 0$, l représente l'avance de la particule par rapport à la particule synchrone.

Lorsqu'on ne s'intéresse pas au cas du solénoïde, le potentiel vecteur n'a qu'une seule composante non nulle $\hat{A}_s(x, y)$ qui ne dépend que des coordonnées transverses :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta; s) = -(1 + h(s)x) \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x)^2 - (p_y)^2} - e\hat{A}_s + \delta + 1 \quad (1.35)$$

Pour la suite du travail, on a le choix entre conserver cette expression avec la racine carrée et effectuer un développement limité. Dans ce dernier cas, le Hamiltonien se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -(1 + hx)(1 + \delta) \left(1 - \frac{1}{2(1 + \delta)^2} (p_x^2 + p_y^2)\right) - e\hat{A}_s + \delta + 1 \\ &= (1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - (1 + hx)(1 + \delta) - e\hat{A}_s + \delta + 1 \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\mathcal{H} = (1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - hx(1 + \delta) - e\hat{A}_s(x, y) \quad (1.36)$$

Cette dernière expression sera utilisée pour déduire la dynamique linéaire. Pour l'instant, il ne reste plus qu'à déterminer l'expression du potentiel vecteur.

1.2.3 Potentiel vecteur

L'expression la plus générale du potentiel vecteur est calculée en partant des équations de Maxwell exprimées dans le vide et pour un champ électromagnétique statique en coordonnées curvilignes (Lee, 1998) :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.37)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+hx} \frac{\partial B_x}{\partial s} - \frac{h}{1+hx} B_s - \frac{\partial B_s}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B_s}{\partial y} - \frac{1}{1+hx} \frac{\partial B_y}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{1}{1+hx} \frac{\partial B_s}{\partial s} + \frac{h}{1+hx} B_x = 0 \quad (1.38)$$

La divergence nulle (Eq. 1.37) implique l'existence d'un potentiel vecteur \mathbf{A} vérifiant, à une condition de jauge près : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

En prenant l'hypothèse que le plan $y = 0$ est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique (cf. symétrie des aimants, Fig. 1.4), alors :

$$B_x(-y) = -B_x(y), \quad B_y(-y) = B_y(y), \quad B_s(-y) = -B_s(y) \quad (1.39)$$

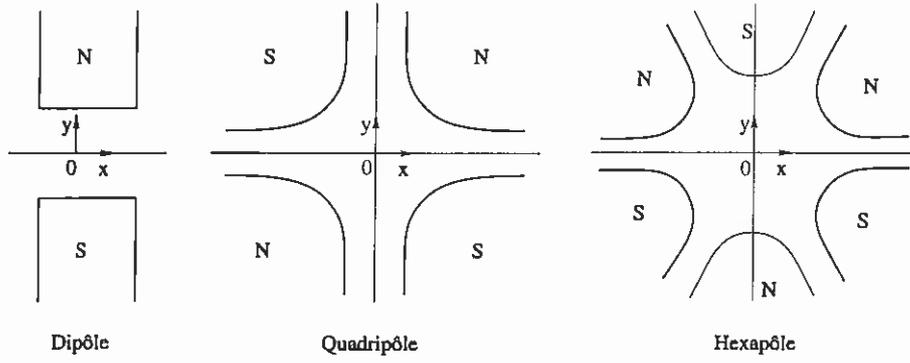


FIG. 1.4: Plan d'antisymétrie pour un dipôle, un quadripôle et un hexapôle droits.

Le champ magnétique peut alors être développé en série des variables transverses sous la forme (Voir Steffen, 1985 et pour une représentation plus complète, Papaphilippou *et al.*, 2001) :

$$\begin{cases} B_x = \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k}(s)x^i y^{2k+1} & \text{impair en } y \\ B_y = \sum_{i,k=0}^{\infty} b_{i,k}(s)x^i y^{2k} & \text{pair en } y \\ B_s = \sum_{i,k=0}^{\infty} c_{i,k}(s)x^i y^{2k+1} & \text{impair en } y \end{cases} \quad (1.40)$$

où les coefficients $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$ des fonctions de s à déterminer.

En injectant les solutions 1.40 dans les équations de Maxwell 1.38, on obtient les formules de récurrence (Steffen, 1985) :

$$\begin{cases} a'_{i,k} = (i+1)[c_{i,k} + hc_{i-1,k}] \\ a_{i,k} = \frac{i+1}{2k+1} b_{i+1,k} \\ b'_{i,k} = (2k+1)[c_{i,k} + hc_{i-1,k}] \\ c'_{i,k} = -2(k+1)[b_{i,k+1} + hb_{i-1,k+1}] - (i+1)[a_{i+1,k} + ha_{i,k}] \end{cases} \quad (1.41)$$

avec la dérivée par rapport à s notée $'$ et par convention d'écriture un coefficient ayant un de ses indices négatif est nul.

Si le champ magnétique B_y est mesuré en tant que fonction des coordonnées x, s dans le plan d'antisymétrie sous la forme :

$$B_y(y=0) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,0}(s)x^k \quad (1.42)$$

alors $b_{k,0} = B_{k,0}$ (cf. Eq. 1.40) et en utilisant les relations de récurrence 1.41, on déduit, après quelques lignes de calcul, l'expression générale du champ magnétique (Lee, 1998) :

$$\begin{cases} B_x = B_{1,0}y + 2B_{2,0}xy + 3B_{3,0}x^2y - \\ \quad \frac{1}{3} \left\{ 3B_{3,0} + 2hB_{2,0} - h(B_{2,0} + \frac{hB_{1,0}}{2} + \frac{B''_{0,0}}{2}) + \frac{1}{2}[B''_{1,0} - (hB'_{0,0})'] \right\} y^3 + \dots \\ B_y = B_{0,0} + B_{1,0}x + B_{2,0}x^2 - (B_{2,0} + \frac{B''_{0,0}}{2} + \frac{hB_{1,0}}{2})y^2 + B_{3,0}x^3 - \\ \quad \left\{ 3B_{3,0} + 2hB_{2,0} - h(B_{2,0} + \frac{hB_{1,0}}{2} + \frac{B''_{0,0}}{2}) + \frac{1}{2}[B''_{1,0} - (hB'_{0,0})'] \right\} xy^2 + \dots \\ B_s = B'_{0,0}y + (B'_{1,0} - hB'_{0,0})xy + (B'_{2,0} - hB'_{1,0} + h^2B'_{0,0})x^2y \\ \quad - \frac{1}{3} \left(B'_{2,0} + \frac{hB'_{1,0}}{2} + \frac{B''_{1,0}}{2} \right) y^3 + \dots \end{cases} \quad (1.43)$$

Lorsque $h \rightarrow 0$ (élément rectangulaire), le champ magnétique peut s'écrire à partir de l'expression 1.43 en représentation complexe :

$$B_y + jB_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,0}(x + jy)^n - \frac{B''_{0,0}}{2}y^2 + \frac{B''_{1,0}}{2}(x + jy)^2y^2 + \dots \quad (1.44)$$

avec $j^2 = -1$.

Pour simplifier les calculs, les coefficients $B_{n,0}$ sont souvent pris constants, donc l'équation 1.44 se simplifie encore (Lee, 1998) :

$$B_y + jB_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,0}(x + jy)^n \quad (1.45)$$

par convention, on pose $B_{n,0} = B_0(b_n + ja_n)$ avec B_0 choisi tel que $b_0 = 1$ et avec $B_0b_0 = -\frac{(B\rho)}{\rho}$ où $(B\rho)$ est la *rigidité magnétique*. Cette représentation complexe du champ magnétique est souvent appelée *représentation de Beth*.

A ce stade, il existe deux conventions : la sommation de l'équation 1.45 commence à 0 aux Etats-Unis et à 1 en Europe. Dans la suite, je prendrai la convention européenne, donc l'équation 1.45 devient :

$$B_y + jB_x = B_0 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + ja_n)(x + jy)^{n-1} \quad (1.46)$$

avec

$$b_n = \frac{1}{B_0 n!} \left. \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \right|_{x=y=0} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{1}{B_0 n!} \left. \frac{\partial^n B_x}{\partial y^n} \right|_{x=y=0} \quad (1.47)$$

Les coefficients multipolaires b_n et a_n décrivent respectivement les $2n$ -pôles parfaits droits et tournés.

Le potentiel vecteur (avec $A_x = A_y = 0$) est lié au champ magnétique par l'équation, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, soit exprimée en coordonnées curvilignes :

$$B_x = -\frac{1}{1 + hx} \frac{\partial A_s}{\partial y}, \quad B_y = \frac{1}{1 + hx} \frac{\partial A_s}{\partial x} \quad (1.48)$$

En coordonnées rectangulaires ($h = 0$), la formule 1.48 s'intègre immédiatement en utilisant l'expression 1.46 pour donner :

$$A_z(x, y) = B_0 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n + ja_n}{n} (x + jy)^n \right) \quad (1.49)$$

où Re désigne la partie réelle. Deux types de représentations nous intéressent :

Représentation curviligne : En coordonnées curvilignes, le potentiel vecteur A ne peut pas s'exprimer de manière aussi simple qu'en coordonnées rectangulaires (cf. Eq. 1.49). La solution s'exprime sous forme d'une série infinie qu'il faut tronquer à l'ordre n (voir par exemple la thèse de Fartoukh, 1997). Cette description est adaptée aux éléments type dipôle de rayon de courbure ρ_c .

$$A_s(x, y) = B_0 \left(x + \frac{x^2}{2\rho_c} \right) \quad (1.50)$$

L'expression qui nous intéresse est celle de $-e\hat{A}_s$ exprimée pour le Hamiltonien 1.36; en utilisant la rigidité magnétique $(B\rho) = e/p = -B_0/h$, on obtient :

$$\boxed{-e\hat{A}_s(x, y) = h \left(x + \frac{x^2}{2\rho_c} \right)} \quad (1.51)$$

Représentation rectangulaire : Ce cas est particulièrement adapté à la description des éléments sans courbure, *i.e.* les quadripôles, les hexapôles et les éléments multipolaires.

Pour le quadripôle droit et l'hexapôle droit la formule 1.49 donne respectivement :

$$A_s(x, y) = B_0 \frac{b_2}{2} (x^2 - y^2) \quad \text{et} \quad A_s(x, y) = B_0 \frac{b_3}{3} (x^3 - 3xy^2) \quad (1.52)$$

soit pour $-e\hat{A}_s$:

$$\boxed{-e\hat{A}_s(x, y) = \frac{b_2}{2} (x^2 - y^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{-e\hat{A}_s(x, y) = \frac{b_3}{3} (x^3 - 3xy^2)} \quad (1.53)$$

1.3 Dynamique transverse

1.3.1 Dynamique linéaire

Dans un accélérateur, la solution des équations transverses du mouvement peut se décomposer en deux termes, (a) l'orbite fermée qui, par définition, est une orbite de période 1 et (b) une oscillation de faible amplitude dite bétatron autour de cette orbite fermée. Nous verrons que l'orbite fermée dépend de l'énergie de la particule. Mais tout d'abord établissons les équations linéaires du mouvement.

Pour cela, nous partons de l'expression du Hamiltonien 1.36 que nous réécrivons en ne conservant que les parties linéaire et quadratique du potentiel vecteur 1.46, *i.e.* le potentiel d'un dipôle 1.51 et celui d'un quadripôle droit 1.53 :

$$\mathcal{H}_0 = (1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - hx\delta + (h^2 + b_2) \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{y^2}{2} \quad (1.54)$$

Les équations du mouvement transverse sont alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}, & \frac{dp_x}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}, & \frac{dp_y}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \end{cases} \quad (1.55)$$

Pour l'instant, nous adoptons les approximations classiques afin de retrouver les expressions données par la littérature, à savoir :

1. l'approximation des grandes machines en négligeant le terme hexapolaire $hx \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)}$ dans l'expression du Hamiltonien 1.54
2. la dépendance linéaire en l'écart en énergie δ .

Le Hamiltonien 1.54 devient en prenant en compte la première approximation classique :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)} - hx\delta + (h^2 + b_2) \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{y^2}{2} \quad (1.56)$$

Les équations du mouvement 1.55 s'écrivent comme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{1+\delta}, & \frac{dp_x}{ds} = h\delta - (h^2 + b_2)x \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{1+\delta}, & \frac{dp_y}{ds} = b_2y \end{cases} \quad (1.57)$$

Soit en termes d'équations différentielles du second ordre des variables x et y (en négligeant les termes d'ordre 2 en δ) :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + K_x^\delta x = h\delta + \mathcal{O}(h^2), \\ \frac{d^2y}{ds^2} + K_y^\delta y = 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_x^\delta(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{K_x}{1+\delta} = \frac{b_2+h^2}{1+\delta} \\ K_y^\delta(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{K_y}{1+\delta} = -\frac{b_2}{1+\delta} \end{cases} \quad (1.58)$$

Nous remarquerons les points suivants :

- un dipôle focalise dans le plan horizontal⁶ ;
- si un quadripôle droit focalise dans un plan, alors il défocalise dans l'autre plan, car $K_x = -K_y$ et $h = 0$;
- la focalisation dépend de l'énergie δ de la particule ;
- les fonctions K_x et K_y sont définies par morceaux à valeur constante dans chaque élément magnétique et L-périodiques⁷ pour une machine de circonférence L ;
- la solution des équations 1.58 est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Dans la suite, j'emploierai les anglicismes : particule *on momentum* si $\delta = 0$ et particule *off momentum* si $\delta \neq 0$. Le symbole ' désigne la dérivation par rapport à la longueur s et '' la dérivée seconde.

1.3.1.1 Particule *on momentum*

L'équation homogène du système 1.58 peut être réécrite pour $\delta = 0$ comme l'équation générique :

$$\begin{cases} u''(s) + K_u(s)u = 0 \\ K_u(s+L) = K_u(s) \end{cases} \quad \text{avec} \quad u = x, y \quad (1.59)$$

⁶pour un aimant secteur. Nous verrons au chapitre suivant que pour un aimant à coins, il existe un terme supplémentaire de focalisation horizontale et verticale.

⁷Pour une machine idéale composée de N super-périodes, K_u sera $\frac{L}{N}$ -périodique.

C'est donc une *équation de Hill*.

La solution générale $u(s)$ de l'équation de Hill 1.59 décrit le mouvement d'une particule d'énergie nominale de la machine, *i.e.* $\delta = 0$. Usuellement, la solution s'écrit de différentes manières dans la littérature :

– en utilisant le théorème de Floquet (voir par exemple Courant et Snyder, 1958), la solution s'exprime en fonction de la *fonction bêatron* $\beta_u(s)$:

$$u(s) = u_\beta(s) = \sqrt{\beta_u(s)\epsilon_u} \cos(\phi_u(s) + \phi_{0u}) \quad (1.60)$$

avec la phase $\phi_u(s) = \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta_u(\bar{s})}$, ϕ_{0u} la phase à l'origine et β_u vérifiant l'équation différentielle :

$$\beta_u''(s) + 2K_u(s)\beta_u(s) - 2\gamma_u(s) = 0 \quad (1.61)$$

en posant $\alpha_u = -\frac{1}{2}\beta_u'$ et $\gamma_u = \frac{1+\alpha_u^2}{\beta_u}$. Les paramètres α_u , β_u et γ_u sont appelés *fonctions ou paramètres de Twiss*. L'avance de phase sur un tour complet ramenée à 2π définit le *nombre d'ondes* ν_u :

$$\nu_u = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\bar{s}}{\beta_u(\bar{s})} \quad (1.62)$$

qui correspond au nombre moyen d'oscillations effectuées par la particule autour de l'orbite fermée.

L'invariant linéaire, aussi appelé *invariant de Courant-Snyder* ou encore *émittance*, est l'intégrale première du mouvement :

$$\gamma_u u^2 + 2\alpha_u u u' + \beta_u^2 u'^2 = \epsilon_u \quad (1.63)$$

Géométriquement, l'équation 1.63 est celle d'une ellipse d'aire $\pi\epsilon_u$ dans le plan (u, u') (cf. Fig. 1.5).

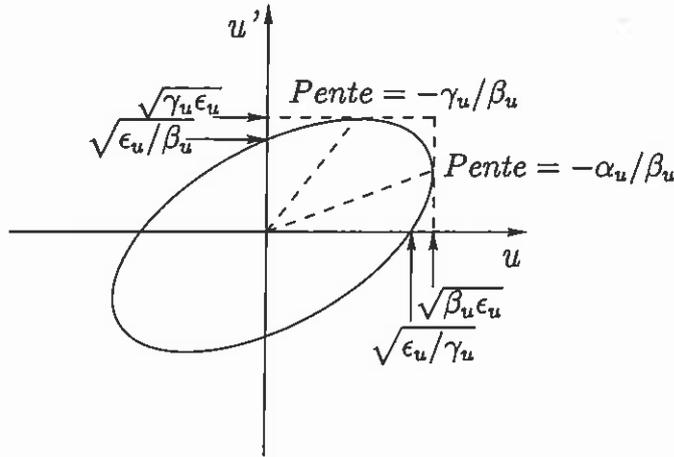


FIG. 1.5: Ellipse invariante dans l'espace des phases (u, u') . L'aire de l'ellipse est $\pi\epsilon_u$; α_u , β_u et γ_u sont les fonctions de Twiss.

– en utilisant la paramétrisation de Courant-Snyder (1958) :

$$\mathcal{M}(s_2|s_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{2u}} & 0 \\ -\frac{\alpha_{2u}}{\sqrt{\beta_{2u}}} & \frac{1}{\sqrt{\beta_{2u}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{12} & \sin \psi_{12} \\ -\sin \psi_{12} & \cos \psi_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{1u}} & 0 \\ -\frac{\alpha_{1u}}{\sqrt{\beta_{1u}}} & \frac{1}{\sqrt{\beta_{1u}}} \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

où $\mathcal{M}(s_2|s_1)$ est la *matrice de transfert* de la longitude s_1 à s_2 , ψ_{12} l'avance de phase entre s_1 à s_2 , $\beta_{i_u} = \beta_u(s_i)$. Sur un tour complet, l'expression 1.64 se simplifie pour donner l'application linéaire de premier retour :

$$\mathcal{M} = \mathcal{I}_2 \cos \psi_u + \mathcal{J}_u \sin \psi_u, \quad \text{avec} \quad \psi_u = 2\pi\nu_u \quad \text{et} \quad u = x, y \quad (1.65)$$

avec \mathcal{I}_2 la matrice identité et

$$\mathcal{J}_u = \begin{pmatrix} \alpha_u & \beta_u \\ -\gamma_u & -\alpha_u \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

– en utilisant les *fonctions principales* $C_u(s)$ et $S_u(s)$ qui par définition sont deux solutions indépendantes de l'équation de Hill 1.59 vérifiant :

$$\begin{cases} C_u(0) = 1, & S_u(0) = 0 \\ C'_u(0) = 0, & S'_u(0) = 1 \end{cases} \quad (1.67)$$

La solution générale avec pour conditions initiales (u_0, u'_0) peut alors s'écrire (Courant et Snyder, 1958) :

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_u(s) & S_u(s) \\ C'_u(s) & S'_u(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

1.3.1.2 Particule *off momentum*

Pour une particule n'ayant pas l'énergie nominale du faisceau, *i.e.* $\delta \neq 0$, l'équation 1.58 devient :

$$u''(s) + K_u(s)u(s) = h(s)\delta \quad \text{avec} \quad u = x, y \quad (1.69)$$

Par convention, on appelle fonction *dispersion* la solution particulière $\eta_u(s)$ périodique pour $\delta = 1$ de l'équation 1.69. En utilisant les fonctions principales $C_u(s)$ et $S_u(s)$, la dispersion linéaire est donnée par la formule (Lee, 1998) :

$$\eta_u(s) = S_u(s) \int_0^s h(\bar{s})C_u(\bar{s}) d\bar{s} - C_u(s) \int_0^s h(\bar{s})S_u(\bar{s}) d\bar{s} \quad (1.70)$$

En utilisant la linéarité des équations, on en déduit que la solution complète peut s'exprimer par :

$$u(s) = \sqrt{\epsilon_u \beta_u(s)} \cos(\phi_u(s) + \phi_{u0}) + \eta_u(s)\delta \quad (1.71)$$

$$= u_\beta(s) + u_\delta(s) \quad (1.72)$$

avec $u_\beta(s)$ la solution *bétatron* et $u_\delta(s)$ l'*orbite fermée chromatique*.

Similairement à l'optique géométrique où une lentille focalise plus faiblement les photons de petite longueur d'onde, *i.e.* de grande énergie, la focalisation d'un quadripôle est une

fonction intrinsèquement dépendante de l'énergie (δ). Si K_u est le gradient quadripolaire, alors on peut écrire (cf. Eq. 1.58) :

$$K_u^\delta = \frac{K_u}{1 + \delta} = K_u(1 - \delta + \mathcal{O}(\delta^2)) \quad (1.73)$$

Donc, les particules ayant une énergie supérieure à l'énergie nominale $\delta > 0$ sont moins focalisées. Il s'ensuit que l'avance de phase dans un élément quadripolaire devient une fonction de l'énergie, ce qui nous conduit à définir la *chromaticité* comme la variation du nombre d'ondes, ν_u , en fonction de l'énergie :

$$\xi_u = \frac{\partial \nu_u}{\partial \delta} \quad (1.74)$$

Suivant les cas, nous parlerons de *chromaticité* [globale] ou de *chromaticité réduite*, *i.e.* ramenée au nombre d'ondes $\xi_u^{red} = \frac{\xi_u}{\nu_u}$. La contribution produite uniquement par les éléments linéaires, *i.e.* les dipôles et les quadripôles est appelée *chromaticité naturelle*. Elle est toujours négative et a des conséquences très dommageables sur la dynamique globale du faisceau si elle n'est pas corrigée. Par exemple pour SOLEIL, les chromaticités naturelles sont $\xi_x^{nat} = -3.01 \times 18.28$ et $\xi_y^{nat} = -2.66 \times 8.38$, ce qui induit pour $\delta = 1 \%$ les déplacements des nombres d'ondes proches du demi-entier $(\Delta \nu_x, \Delta \nu_y) = (-0.5, -0.2)$. Ces glissements des nombres d'ondes peuvent amener le faisceau sur des lignes de résonance et conduire à des conséquences néfastes pour les performances de l'anneau.

La seconde raison nécessitant une correction de chromaticité provient des effets collectifs. Lorsqu'un paquet de particules circule dans l'accélérateur, les particules de tête laissent derrière elles un champ de sillage qui va être ressenti par les particules de queue du paquet et induire des instabilités. Au bout d'une demi-période synchrotron, les particules de tête deviennent les particules de queue et réciproquement. Ce type d'instabilité, dite *head-tail*, peut conduire à la perte du faisceau. Il peut être montré (voir par exemple Lee, 1998) que ces instabilités disparaissent à chromaticités nulles et sont plus néfastes pour des chromaticités négatives que positives.

Dans un anneau de stockage, la chromaticité doit être soit nulle soit légèrement positive. Pour la compenser, on introduit dans l'anneau des éléments nonlinéaires : les hexapôles⁸.

1.3.2 Dynamique nonlinéaire

Le Hamiltonien complet 1.36 peut maintenant être écrit sous la forme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (1.75)$$

où \mathcal{H}_0 décrit le mouvement linéaire d'une machine parfaite (cf. Eq. 1.54) et \mathcal{H}_1 contient les défauts de champs dipolaires, quadripolaires et le potentiel vecteur des multipôles. Si \mathcal{H}_1 est suffisamment faible, le mouvement va être encore stable. Toutes les grandeurs linéaires définies précédemment ne vont plus être des constantes du mouvement.

⁸Des octupôles peuvent être également utilisés mais la correction est du second ordre, *i.e.* les champs magnétiques doivent être plus élevés et donc induire des effets chromatiques plus importants.

En particulier, les nombres d'ondes vont varier avec l'amplitude et l'énergie et peuvent au premier ordre d'une théorie des perturbations s'écrire (voir par exemple Guignard, 1978, Ruth *et al.*, 1985 ou Wiedemann, 1995) :

$$\nu_u = \nu_{0u} + k_{uv}u^2 + k_{vu}v^2 + \xi_u\delta + \mathcal{O}(u^4 + v^4 + \delta^2) \quad (1.76)$$

avec si $u = x$, $v = y$ et *vice versa*. La contribution linéaire définit le *point de fonctionnement* de la machine (ν_{0x}, ν_{0y}) . Les coefficients k_{uv} et k_{vu} sont les premiers termes introduits par les nonlinéarités.

La principale cause de nonlinéarité dans un accélérateur d'électrons provient de l'introduction des hexapôles. Regardons succinctement les effets qu'ils induisent. Pour cela, décrivons brièvement le principe de correction de la chromaticité : lorsqu'un hexapôle n'est pas traversé en son centre, une composante quadripolaire apparaît et peut être judicieusement utilisée pour corriger la chromaticité. Les équations du mouvement pour un hexapôle de force $S = 2b_2$ s'écrivent (cf. Eq. 1.53 et Eq. 1.54) :

$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{2}S(x^2 - y^2) & = 0 \\ y'' - Sxy & = 0 \end{cases} \quad (1.77)$$

Pour un hexapôle de longueur infinitésimale ds , on a alors :

$$\begin{cases} dx' & = -\frac{1}{2}S(x^2 - y^2)ds \\ dy' & = Sxyds \end{cases} \quad (1.78)$$

Pour la correction chromatique, il est nécessaire de pouvoir distinguer les trajectoires correspondant aux différentes énergies : on se place donc dans une région dispersive⁹. En utilisant les équations 1.72 et 1.78, il advient :

$$\begin{cases} dx' & = S \left(\boxed{\eta_x \delta x_\beta} + \frac{1}{2}\eta_x^2 \delta^2 + \frac{1}{2}(x_\beta^2 - y_\beta^2) \right) ds \\ dy' & = S \left(\boxed{\eta_x \delta y_\beta} + x_\beta y_\beta \right) ds \end{cases} \quad (1.79)$$

Il peut être démontré simplement qu'un défaut de gradient intégré $\Delta K ds$ localisé en $s = s_0$ introduit le glissement des nombres d'ondes (voir par exemple Lee, 1998) :

$$\Delta \nu_u = \frac{1}{4\pi} \beta_u(s_0) \Delta K ds, \quad (1.80)$$

formule qui se généralise pour une distribution de défauts $k(s)$ à l'intégrale sur la circonférence de l'accélérateur :

$$\Delta \nu_u = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_u(s) k(s) ds \quad (1.81)$$

Si l'on ne considère que la partie quadripolaire de l'équation 1.79, le défaut local de focalisation $\pm S \eta_x \delta ds$ apparaît. En utilisant alors la définition de la chromaticité 1.74 et l'équation 1.81, on déduit immédiatement que la participation à la chromaticité des hexapôles s'écrit :

$$\begin{cases} \xi_x^{hex} & = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) S(s) \eta_x(s) ds \\ \xi_y^{hex} & = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) S(s) \eta_x(s) ds \end{cases} \quad (1.82)$$

⁹La dispersion verticale η_y est supposée nulle.

En principe, deux familles hexapolaires de force intégrée S_1 et S_2 suffisent pour compenser les deux chromaticités; les forces doivent alors satisfaire pour chaque maille d'une machine N -périodique :

$$\begin{cases} S_1\beta_x(s_1)\eta_x(s_1) + S_2\beta_x(s_2)\eta_x(s_2) & = \frac{\xi_x^{nat}}{N} \\ -S_1\beta_y(s_1)\eta_x(s_1) - S_2\beta_y(s_2)\eta_x(s_2) & = \frac{\xi_y^{nat}}{N} \end{cases} \quad (1.83)$$

en supposant que les deux hexapôles sont localisés respectivement en $s = s_1$ et $s = s_2$.

Les hexapôles (parfaits) introduisent deux sortes d'effets indésirables (cf. Eq. 1.79) :

1. un terme d'aberration chromatique $\eta_x^2\delta^2$
2. deux termes d'aberration géométrique $(x^2 - y^2)$ et xy

Ces termes d'aberration sont généralement corrigés partiellement en introduisant de nouvelles familles d'hexapôles dans la maille de la machine.

Dans un accélérateur circulaire, la deuxième contribution aux nonlinéarités provient des défauts magnétiques des aimants (déplacements, rotations d'un élément, champs de fuite, composantes multipolaires). Ces défauts sont systématiques ou aléatoires et inhérents à l'accélérateur. Nous verrons au cours des chapitres suivants qu'une bonne connaissance des défauts quadripolaires permet déjà de bien modéliser la dynamique de l'accélérateur.

Les défauts magnétiques induisent des phénomènes résonants qui détériorent la stabilité et les performances de la machine.

1.4 Définitions complémentaires

1.4.1 Résonances

La dynamique transverse est modélisée par un système à $(2+1)$ degrés de liberté. La condition de résonance est obtenue pour une combinaison linéaire entre les nombres d'ondes transverses ν_x, ν_y et le nombre d'ondes longitudinale normalisé à $\nu = 1$, *i.e.* :

$$p\nu_x + q\nu_y + r = 0 \quad \text{avec} \quad (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \quad (1.84)$$

Habituellement $|p|+|q|$ est appelé l'*ordre* de la résonance et correspond à l'ordre des polynômes du développement du potentiel vecteur. Cependant, il est souvent plus judicieux de définir l'ordre par l'entier $|p| + |q| + |r|$ à partir de l'équation :

$$p[\nu_x] + q[\nu_y] + r = 0 \quad \text{avec} \quad (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \quad (1.85)$$

où $[]$ désigne la partie fractionnaire des nombres d'ondes. Cette définition, plus naturelle, correspond à celle adoptée en Mécanique Céleste. Dans la suite, l'ordre des résonances défini avec cette convention sera noté par $p : q : r$.

Pour une machine N -périodique, *i.e.* constituée de N super-périodes, la condition de résonance est plus stricte : la dynamique de la machine totale est alors la même que pour une seule super-période avec pour fréquence longitudinale $\nu' = N$.

$$p\nu_x + q\nu_y + r' \times N = 0 \quad \text{avec} \quad (p, q, r') \in \mathbb{Z}^3 \quad (1.86)$$

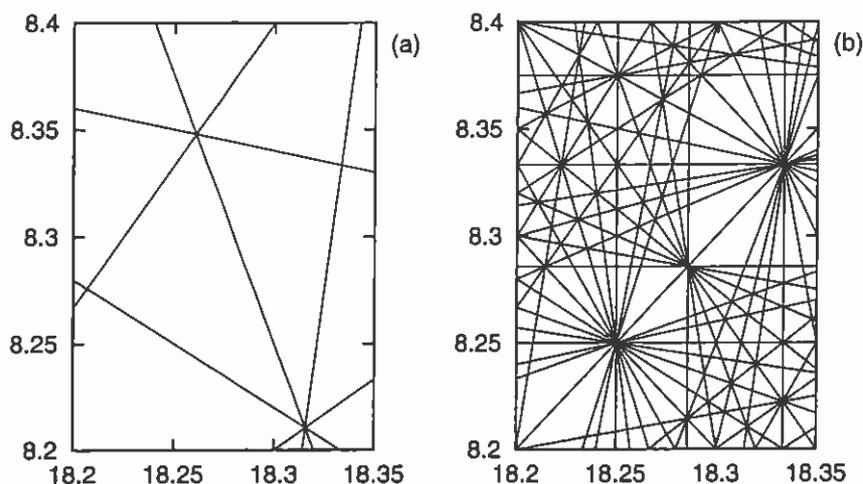


FIG. 1.6: Diagramme des résonances jusqu'à l'ordre 8 avec (a) et sans (b) 12-périodicité (exemple de l'ALS). La symétrie interne d'un accélérateur est utilisée pour augmenter la stabilité globale de la dynamique. Le point de fonctionnement d'une machine est choisi dans une région du diagramme où il y a peu de résonances.

Plus un accélérateur a une périodicité élevée, plus la condition de résonance est sévère (cf. Fig. 1.6). Dans la suite, nous parlerons de *résonances permises*, *systématiques* ou de *structure* et de *résonances interdites*, sous-entendu par la périodicité.

Dans une théorie de perturbation simplement résonante du premier ordre, il peut être montré que, pour des *résonances sommes* ($qp > 0$), la différence des émittances $\epsilon_x - \epsilon_y$ est conservée. Pour des *résonances différences* ($qp < 0$), c'est la somme des émittances $\epsilon_x + \epsilon_y$ qui est conservée (voir par exemple : *A General Treatment of Resonances in Accelerators*, Guignard, 1978). Dans le premier cas, il peut y avoir amplification mutuelle des amplitudes d'oscillation (proportionnelles à la racine carrée de l'émittance), ce qui conduira à la divergence des trajectoires des particules alors que pour des résonances différences, il ne peut y avoir que transfert d'amplitudes d'oscillation entre les deux plans. Durant ma thèse, j'ai parfois entendu dire que les résonances différences ne sont pas dangereuses pour la dynamique du faisceau. En conséquence, les largeurs des résonances différences ne sont pas toujours optimisées. Il est clair que ce résultat est celui d'une théorie de perturbation du premier ordre et qu'il n'est valide qu'au voisinage d'une résonance unique. Proche d'un nœud de résonances, les largeurs de résonances peuvent se recouvrir et la dynamique est toute autre.

1.4.2 Acceptances et ouvertures

1.4.2.1 Définitions

L'*acceptance physique* est par définition l'aire de la plus grande ellipse que l'accélérateur accepte (cf. Eq. 1.72) :

$$A_u = \left[\pi \frac{a_u(s) - |\eta_u(s)\delta|^2}{\beta_u(s)} \right]_{min} \quad \text{avec } u = x, y \quad (1.87)$$

et $a_u(s)$, la *demi-ouverture physique* et $\eta_u(s)$ la dispersion locale.

L'*acceptance dynamique* est définie comme la plus grande région de l'espace des phases (dimension 6) à l'intérieur de laquelle les trajectoires de particules sont bornées, ceci en ne considérant que la dynamique d'une particule isolée. Restreinte à l'espace transverse, on parle d'*ouverture dynamique*, restreinte à la dynamique longitudinale, d'*acceptance en énergie ou RF*.

La détermination des dimensions de l'ouverture dynamique est fondamentale mais non triviale. Sa définition dépend du nombre de tours d'intégration des orbites. Par exemple Irwin (*in* Chao et Tigner, pp. 87–91) donne comme nombre de tours optimum, vingt-cinq pour cent du temps d'amortissement du faisceau, soit environ 1 000 tours pour des électrons. Cette limite est cependant trop faible pour étudier finement la dynamique à long terme (estimation de la diffusion, coefficients de Lyapunov), car les trajectoires des particules peuvent diverger aussi bien au bout d'un très faible nombre de tours (diffusion rapide) que lentement (diffusion d'Arnold) comme nous le verrons plus tard. La définition de l'ouverture dynamique dépend aussi des phases auxquelles elle est tracée (généralement $x' = y' = 0$), car les orbites se déforment.

Un problème ouvert est actuellement la recherche d'un facteur de qualité pour l'optimisation de l'ouverture dynamique (voir Todesco, 1999).

1.4.2.2 Un schéma d'optimisation de l'ouverture dynamique

De par les nonlinéarités, il n'existe pas de méthode analytique générale pour optimiser l'ouverture dynamique. Je présente ici le processus empirique d'optimisation d'une maille utilisé pour le Projet SOLEIL (Nghiem *et al.*, 1997); c'est un processus en quatre étapes :

La première étape consiste à choisir un point de fonctionnement dans une région du diagramme des nombres d'ondes (cf. Fig. 1.6) où non seulement, une émittance faible peut être obtenue mais aussi où il y a un minimum de résonances systématiques. Il est en particulier primordial d'éviter la proximité (a) des résonances d'ordres entiers qui sont excitées par les erreurs d'orbite fermée; (b) des résonances d'ordres demi-entiers qui sont excitées par les erreurs de gradients quadripolaires; (c) des résonances sommes pour éviter l'amplification mutuelle des oscillations bétatrons horizontales et verticales; (d) des résonances du troisième ordre qui sont introduites par les hexapôles. Ces critères permettent d'obtenir une ouverture dynamique peu sensible aux défauts magnétiques et à l'introduction des insertions.

La deuxième étape concerne l'optimisation des fonctions bétatrons¹⁰ : (a) la fonction β_x doit être minimum dans les dipôles pour obtenir une faible émittance; (b) la création de hautes brillances issues des insertions contraint la fonction β_y ; (c) le rapport β_{max}/β_{min} doit être minimum pour l'injection du faisceau; de plus les fonctions bétatrons ne doivent pas être trop grandes pour éviter d'avoir une sensibilité trop importante aux erreurs magnétiques. Il est également souhaitable de conserver la symétrie la plus élevée possible.

La troisième étape est le positionnement des hexapôles dans la maille. Les forces hexapolaires doivent être les plus faibles possibles, car elles limitent l'ouverture dynamique. Les hexapôles sont placés dans les régions à grande dispersion où les fonctions β_x et β_y sont découplées (Eq. 1.79).

¹⁰Les fonctions bétatrons et les nombres d'ondes sont reliés par la relation intégrale 1.62.

La quatrième et dernière étape est dédiée à la correction de la chromaticité et l'optimisation de l'ouverture dynamique proprement dit. Seule l'ouverture dynamique *on momentum* ($\delta = 0$) est optimisée. La minimisation des résonances hexapolaires d'ordre 3 est fondée sur une méthode analytique du premier ordre (voir la thèse de Audy, 1989).

Chapitre 2

Méthodes et outils

Au cours de ce chapitre, je présenterai les deux outils fondamentaux utilisés durant ma thèse. Un code numérique d'intégration des équations du mouvement, en application directe du formalisme hamiltonien présenté précédemment, et l'Analyse en Fréquence.

Dans une première partie, je discuterai d'abord des motivations qui m'ont conduit à me lancer dans l'écriture d'un code numérique. Ensuite, je donnerai une brève description des différentes philosophies et méthodes employées et expliquerai leurs domaines de validité. Je m'attarderai plus particulièrement sur l'avantage des nouvelles méthodes (schéma symplectique, algèbre de Lie) utilisées dans le monde des accélérateurs. Bien que ces méthodes soient aujourd'hui très répandues aux Etats-Unis, elles ont plus de mal à s'établir en Europe¹. Je présenterai alors une nouvelle classe d'intégrateurs symplectiques à pas tous positifs développée par Jacques Laskar (2000). Puis, je l'appliquerai aux Hamiltoniens décrivant chacun des principaux éléments magnétiques d'un accélérateur. Enfin, je donnerai une comparaison avec l'intégrateur de Ruth (1983), intégrateur symplectique le plus utilisé pour les machines à électrons.

Après avoir intégré les équations du mouvement, la dynamique des différentes machines à rayonnement synchrotron sera étudiée au moyen de l'Analyse en Fréquence. L'Analyse en Fréquence est l'outil central de mon travail de thèse. Je commencerai, dans la seconde partie de ce chapitre, par décrire la méthode sans noyer le lecteur dans des détails trop techniques. C'est un outil extrêmement puissant qui a été développé par Jacques Laskar initialement pour étudier la dynamique du Système Solaire. Avant de l'appliquer à la dynamique des accélérateurs (voir le chapitre 3), je présenterai quelques résultats pédagogiques sur le pendule rigide et l'application d'Hénon. Ces deux applications à un et deux degrés de liberté auront la particularité de permettre au lecteur de pouvoir lire plus simplement les cartes en fréquence des accélérateurs; de plus, ils me permettront de présenter brièvement quelques résultats généraux sur les résonances et la stabilité des systèmes dynamiques.

¹Elles ont été introduites par le groupe de A. Dragt aux USA et par celui de E. Turchetti à Bologne.

2.1 Réalisation d'un intégrateur symplectique

2.1.1 Introduction

L'écriture d'un code d'intégration des équations du mouvement est arrivée tardivement dans mon travail de thèse. Dans le langage accélérateur, on parle souvent de *code de tracking*. De multiples raisons expliquent ce choix :

Pour commencer, de nombreux codes de *tracking* avaient déjà été écrits. Par exemple le programme MAD développé continuellement au CERN [50] est largement employé par la communauté des physiciens des accélérateurs. Cependant, généralement à chaque accélérateur correspond un ou plusieurs codes spécifiques. Ces codes sont modifiés, améliorés constamment et localement pour permettre de prendre en compte de nouveaux phénomènes physiques, de nouveaux éléments magnétiques. Très rapidement, le résultat peut être un code volumineux qui, souvent, est adapté à des tâches diverses et variées, allant de la conception d'un accélérateur à l'optimisation de sa dynamique et de ses performances. Le groupe théorie faisceau d'une machine peut être divisé schématiquement en deux sous-groupes : une personne spécialiste et développeur des codes utilisés par les membres du second groupe.

J'ai découvert le monde des accélérateurs au sein de l'équipe du Projet SOLEIL, il y a bientôt trois ans. Lorsque j'ai commencé à étudier la dynamique de SOLEIL, on m'a donné une description de la maille théorique de l'anneau de stockage et le manuel d'utilisation du logiciel BETA [93] pour faire le *tracking*. Le même processus s'est répété pour l'étude de l'Advanced Light Source avec le code DESPOT [42] (ici il n'y a pas de manuel d'utilisation).

Donc dans un premier temps, les codes d'intégrations se sont résumés à des boîtes noires « censées » donner les bons résultats. De plus, l'écriture d'un code de *tracking* est considérée comme une tâche ardue par les utilisateurs. Mon directeur de thèse, astronome, prétendait le contraire après avoir travaillé avec les physiciens de l'ALS (1993). Initialement, je ne l'ai pas cru. Puis, en travaillant sur différentes sources de lumières (cf. chapitre 3), j'ai dû presque utiliser un code de *tracking* différent par machine. J'ai été confronté à des problèmes de modélisation, à des incompatibilités entre codes. Plus préoccupant, les codes peuvent donner des résultats complètement différents aux grandes amplitudes du mouvement et parfois même pour les paramètres linéaires. Le temps de calcul peut également être du simple au double suivant les méthodes utilisées.

Enfin, à ces motivations doivent encore s'en ajouter deux autres. Premièrement à ma connaissance, il n'existe pas dans la communauté française² de code de *tracking* optimisé et adapté à l'étude de la dynamique à long terme des accélérateurs d'électrons. Deuxièmement, l'équipe Astronomie et Systèmes Dynamiques est un lieu regroupant toutes les compétences nécessaires pour l'écriture d'un tel intégrateur. Ces dernières années, plusieurs intégrateurs y ont d'ailleurs été développés pour la Mécanique Céleste.

Le but principal de ce travail est donc d'obtenir un code de calcul efficace permettant d'intégrer le mouvement d'une particule dans un élément magnétique puis dans l'accélérateur complet. L'intégrateur doit être à la fois rapide pour réaliser des études à long terme (plusieurs millions de tours), précis pour étudier finement la dynamique et valide à grande amplitude pour prendre correctement en compte l'effet des éléments multipolaires. Dans la première ver-

²du moins utilisé au CEA, au LURE et à l'ESRF (CERN exclu).

sion du code, la modélisation des défauts (déplacements, rotations des éléments magnétiques) ne nous intéresse pas ; cependant leur implémentation ne poserait aucune difficulté.

Je vais commencer par décrire les deux grandes approches selon lesquelles les codes numériques de *tracking* sont écrits. Mais tout d'abord, définissons les notions d'information locale et globale dans un accélérateur (cf. Forest et Hirata, 1992 et Forest, 1998).

Une quantité est appelée *locale* si elle dérive d'un élément magnétique indépendamment de sa position dans l'anneau et de l'anneau lui-même : intégration d'une particule à travers l'élément, le système de coordonnées de référence, la déviation de l'orbite nominale, le champ magnétique ou l'enveloppe du faisceau.

Une quantité est dite *globale* si elle ne peut être déduite qu'à partir de la connaissance de l'anneau complet : l'orbite fermée, les nombres d'ondes, les fonctions de Twiss ou l'émittance d'équilibre.

2.1.2 Ancienne approche

Dans l'*ancienne approche*, on définit un seul et unique système de référence (coordonnées curvilignes), le champ électromagnétique est alors développé dans ce système pour obtenir l'expression, soit d'un Hamiltonien global, soit d'équations newtoniennes globales. Les équations du mouvement sont exprimées de manière à permettre simultanément le *tracking* et le calcul des quantités globales caractérisant l'anneau. Bien que possible, cette approche devient très compliquée avec l'augmentation de la complexité et de la taille d'un anneau de stockage.

Les solutions (\mathbf{x}) du mouvement sont obtenues en effectuant un développement de Taylor des équations du mouvement autour d'une orbite dite de *référence* — typiquement l'*orbite fermée* qui doit préalablement avoir été calculée — ; cependant son obtention est pénible à partir de l'ordre 3. L'expression générale entre le vecteur position initial (\mathbf{x}^i) et final (\mathbf{x}^f) s'écrit :

$$\mathbf{x}_j^f = \mathcal{K}_j + \sum_k \mathcal{R}_{jk} \mathbf{x}_k^i + \sum_{km} \mathcal{T}_{jkm} x_k^i x_m^i + \sum_{kmn} \mathcal{U}_{jkmn} x_k^i x_m^i x_n^i + \mathcal{O}(|\mathbf{x}^i|^4) \quad (2.1)$$

où \mathcal{K}_j représente l'orbite fermée, \mathcal{R}_{jk} l'optique linéaire, \mathcal{T}_{jkm} , \mathcal{U}_{jkmn} , les aberrations optiques d'ordre un et deux (voir Brown, 1982). L'*optique linéaire* est obtenue en tronquant la série de Taylor au premier ordre. Les éléments magnétiques sont modélisés par des matrices, puis selon les besoins, on inclut les termes d'ordres supérieurs. Généralement, le développement est arrêté au second ordre pour permettre d'inclure les éléments multipolaires qui sont presque toujours exprimés sous forme de lentilles minces, en particulier les inévitables hexapôles (voir par exemple les logiciels BETA [93], TRANSPORT [50]).

Cette approche est historiquement la première à avoir été développée (Courant et Snyder, 1958 et Bruck, 1966). Initialement, elle été vouée à la conception des accélérateurs, au *tracking* sur quelques tours, afin de calculer les grandeurs linéaires et d'analyser la stabilité du mouvement au premier ordre. Une des hypothèses fondamentales utilisées est l'approximation des petits angles ou approximation dite des *grandes machines*, hypothèse qui rend les dipôles et quadripôles linéaires (et les sections droites : « éléments sans champ »).

Cette méthode a l'avantage de permettre d'obtenir simplement et rapidement les informations globales de l'anneau (*e.g.* fonctions de dispersion, orbite fermée, nombres d'ondes,

chromaticités, fonctions de Twiss). Autre avantage, le temps de calcul de l'ouverture dynamique (paramètre essentiel pour l'optimisation) est suffisamment faible (quelques minutes) pour permettre de tester un grand nombre d'optiques de la machine³.

Je voudrais insister sur le fait qu'il n'existe pas de logiciel de calcul adapté à tous les besoins rencontrés dans le monde des accélérateurs : chaque code de calcul est écrit dans un cadre très précis (développement au voisinage de l'orbite fermée, approximation des grandes machines, conception de machines, optimisation d'optiques), cadre qui trop souvent est oublié par leurs utilisateurs. De plus, il faut ajouter que les performances exigées aujourd'hui pour les accélérateurs ne sont plus du tout les mêmes qu'il y a vingt ou trente ans. A l'époque, les machines étaient très linéaires, avaient de faibles acceptances en énergie et dynamique ; aujourd'hui, pour une machine comme SOLEIL, on exige des performances extrêmes — acceptance en énergie de six pour cent, grande ouverture dynamique, durée de vie de plus de dix heures, haute brillance, faible émittance, nombreux dispositifs d'insertion — et tout cela avec des composantes multipolaires de plus en plus fortes, rendant l'optimisation de plus en plus délicate du fait des nombreuses résonances induites.

Après cette parenthèse, nous convenons qu'il serait dangereux d'utiliser un code hors de son cadre. En particulier, si l'utilisation d'un développement de Taylor est adapté pour les LINAC (que la particule ne traverse qu'une seule fois), il serait illusoire de vouloir utiliser aujourd'hui cette approche pour une étude fine de la dynamique et pour des études à long terme, et qui plus est, à grande amplitude (cf. *infra* Super-ACO, une machine à faible rayon de courbure). De par la non symplecticité de la troncature de la série de Taylor (en général), lorsque la trajectoire d'une particule est intégrée sur plusieurs milliers de tours pour des électrons ou plusieurs dizaines de millions de tours pour des protons, on observe des amortissements artificiels conduisant à des orbites spirales et à la présence de résonances factices.

2.1.3 Approche moderne

La méthode dite *moderne* consiste à découpler la simulation de l'analyse, *i.e.* séparer la construction de l'application de premier retour et de l'intégrateur (problèmes locaux) de l'analyse des grandeurs caractéristiques déduites de l'application de premier retour (problèmes globaux) ; cette séparation doit avoir lieu autant du point de vue de la conception que du point de vue de la programmation.

2.1.3.1 Présentation

La construction d'un *code de tracking* est un problème *entièrement local* : chaque élément est défini par un Hamiltonien local dont le système de référence est choisi à partir de considérations purement géométriques (formes et symétries du champ magnétique). Suivant le type d'élément magnétique telles ou telles considérations seront privilégiées, considérations qui peuvent être contradictoires d'un élément à l'autre. Il faut donc trouver une méthode pour relier les éléments les uns avec les autres : c'est l'*approche LEGO* si l'on reprend la terminologie de Forest et Hirata (1992). Comme nous l'avons déjà dit, le choix du système de coordonnées

³Par exemple, un ordre intermédiaire entre le premier et le second ordre, dit *ordre scaling*, a été implémenté dans le code BETA [93]. Ce qui permet de prendre en compte les effets multipolaires (hexapôles, 2n-pôles) sans augmenter drastiquement le temps de calcul.

est entièrement libre ; cependant deux grandes familles de blocs sont à distinguer : le bloc courbe et le bloc rectiligne.

- Le *bloc rectiligne* est un bloc avec deux faces parallèles séparées d'une distance L , sur chacune desquelles est attaché un système local de coordonnées cartésiennes (Fig. 2.1-a). Les repères sont les mêmes pour les deux faces et sont reliés par une ligne droite. Ce type de bloc peut être utilisé pour la description des quadripôles, hexapôles, 2n-pôles, wiggler.
- Le *bloc courbe* est un bloc pour lequel les axes verticaux (Oy) des repères entrant et sortant sont parallèles alors que les axes horizontaux (Ox) se coupent suivant un angle θ (Fig. 2.1-b). Les origines des deux repères sont reliées par un arc de cercle de rayon ρ . Un tel bloc a pour premier but de courber la trajectoire d'une particule d'un angle d'environ θ degrés. Ce bloc sera plus particulièrement adapté à la description d'aimants de courbure (aimant dipolaire secteur ou droit).

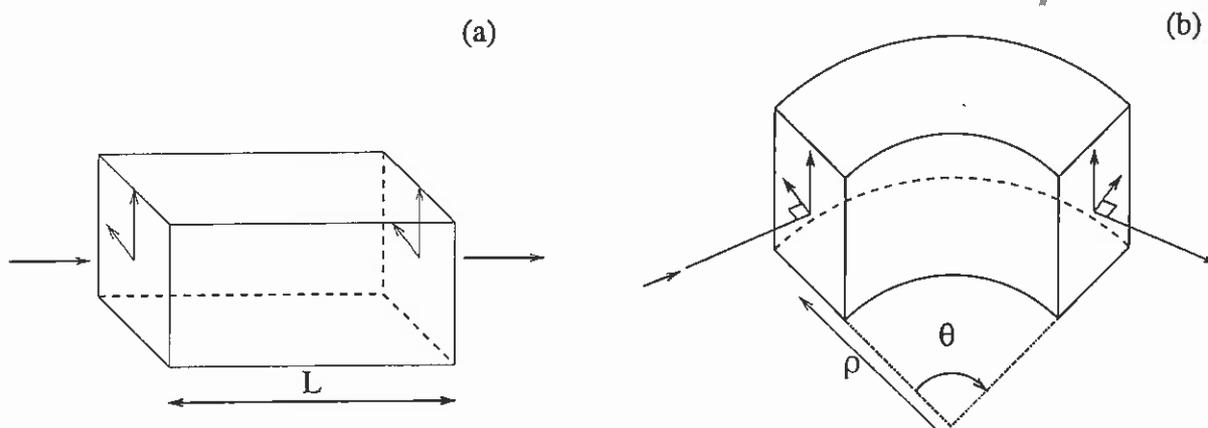


FIG. 2.1: Schéma succinct d'un bloc rectiligne (a) et courbe (b) de longueur L . Les axes de coordonnées sont portés par les faces d'entrée et de sortie des blocs — inspiré de Forest et Hirata (1992) —

2.1.3.2 Le flot d'un système

Le but des blocs de base est de permettre de construire et calculer l'application qui transporte une particule de la face d'entrée (i) à la face de sortie (f) ; cette application, \mathcal{M} , est généralement appelée *application de transfert* ou *flot* de l'élément :

$$\mathbf{x}^f = \mathcal{M}_{i \rightarrow f} \mathbf{x}^i \quad (2.2)$$

Remarquons qu'un élément magnétique pourra être composé de plusieurs blocs élémentaires. L'*élément physique* sera donc défini par le couple *bloc* (rectiligne, courbe) et un *modèle* qui donne l'application de transfert à travers l'élément.

Donnons dès à présent, deux propriétés essentielles du flot. Soit deux éléments notés (1) et (2), et $\mathcal{M}_{0 \rightarrow 1}$ est le flot associé à (1) et $\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}$ celui associé à (2) alors le flot résultant pour le système (1-2) est simplement l'application composée :

$$\mathcal{M}_{0 \rightarrow 2} = \mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} \mathcal{M}_{0 \rightarrow 1} \quad (2.3)$$

2.1. RÉALISATION D'UN INTÉGRATEUR SYMPLECTIQUE

Pour un système autonome qui possède une périodicité (l'anneau), on est amené à calculer le flot de l'anneau complet \mathcal{A} sur n tours de circonférence $2\pi R$, alors :

$$\mathcal{A}_{2n\pi R \rightarrow 2(n-1)\pi R} \cdots \mathcal{A}_{2\pi R \rightarrow 4\pi R} \mathcal{A}_{0 \rightarrow 2\pi R} = (\mathcal{A}_{0 \rightarrow 2\pi R})^n \quad (2.4)$$

Cette approche est bien locale, chaque élément est modélisé par un Hamiltonien exprimé dans les coordonnées naturelles (pour son intégration).

2.1.3.3 Intégrateur symplectique *ab ovo*

Nous allons introduire quelques notions d'algèbre de Lie et définir l'intégration symplectique (voir *Lectures on nonlinear orbit dynamics* de A. Dragt (1982) pour une introduction à l'algèbre de Lie appliquée au monde des accélérateurs).

Soit \mathcal{H} le Hamiltonien d'un système autonome à n degrés de liberté et $\mathbf{x} = (p_j, q_j)_{j=1..n}$ le vecteur de coordonnées et moments généralisés et s , la coordonnée indépendante. Alors les équations de Hamilton sont :

$$\frac{dp_j}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad \text{pour } j = 1..n \quad (2.5)$$

Si on définit les crochets de Poisson de deux fonctions f et g des variables \mathbf{x} par :

$$\{f, g\} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \quad (2.6)$$

alors les équations 2.5 peuvent se réécrire de manière plus concise :

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \{\mathcal{H}, \mathbf{x}\} = L_{\mathcal{H}}\mathbf{x} \quad (2.7)$$

avec $L_{\mathcal{H}}$ l'opérateur différentiel défini par $L_{\mathcal{H}}f \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathcal{H}, f\}$. On peut alors intégrer formellement les équations du mouvement pour des conditions initiales données \mathbf{x}^i :

$$\mathbf{x}^f = \sum_{n \geq 0} \frac{s^n}{n!} L_{\mathcal{H}}^n \mathbf{x}^i \stackrel{\text{déf}}{=} e^{sL_{\mathcal{H}}} \mathbf{x}^i \quad (2.8)$$

En pratique, la difficulté est l'évaluation du terme $e^{sL_{\mathcal{H}}} \mathbf{x}^i$ de l'équation 2.8, car bien qu'étant une série convergente, la convergence est souvent lente et nécessite l'évaluation d'un grand nombre de termes dépendant du pas de temps s et de la forme de \mathcal{H} . Le principe de base utilisé pour intégrer l'équation 2.7 consiste à approximer l'opérateur $e^{sL_{\mathcal{H}}}$ de manière symplectique.

Formellement, la solution exacte du système 2.8 est *symplectique* : le flot hamiltonien, transportant le vecteur de l'espace des phases \mathbf{x} du temps 0 au temps s le long d'une trajectoire du système d'énergie \mathcal{H} , conserve exactement la 2-forme symplectique⁴ :

$$dp^f \wedge dq^f = dp^i \wedge dq^i \quad (2.9)$$

⁴Pour un système à une dimension, la condition est équivalente à la conservation de l'aire algébrique (théorème de Liouville).

Une méthode d'intégration vérifiant cette propriété est appelée *intégrateur symplectique*. Un développement de Taylor à l'ordre n ne vérifie généralement ni la condition de symplecticité 2.9 ni la conservation de l'énergie. Remarquons qu'idéalement, on souhaiterait également que l'énergie soit exactement conservée, cependant Ge et Marsden (1988) ont montré qu'il n'existe pas en général de tel schéma d'intégration pour un Hamiltonien non intégrable. Cependant, l'intégrateur symplectique conserve exactement le Hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}$ d'un système perturbé voisin de celui décrit par le Hamiltonien \mathcal{H} initial :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \sum_{k \geq 1} s^k H_k \quad (2.10)$$

où H_k est fonction des dérivés d'ordre $j \leq k$ de \mathcal{H} (Yoshida, 1990a, 1990b). Par définition, un intégrateur symplectique est d'ordre n si :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \mathcal{O}(s^n) \quad (2.11)$$

2.1.3.4 Méthodes de construction

Brièvement, nous pouvons diviser les méthodes d'intégration en deux grands groupes (Yoshida, 1993) :

- les *méthodes implicites* reposant sur
 - un schéma de Runge-Kutta implicite (Sanz-Serna, 1988) ;
 - l'utilisation de fonctions génératrices (Channel et Scovel, 1990).
- les *méthodes explicites*
 - Ruth, le premier, a introduit l'utilisation d'intégrateur symplectique (1983), a initialement utilisé des transformations canoniques successives pour réaliser des intégrateurs jusqu'à l'ordre 4 ;
 - Neri (1988) a reformulé le problème en utilisant l'algèbre de Lie ;
 - Yoshida (1990) a donné un schéma général pour construire un intégrateur d'ordre $2n + 2$ à partir d'un intégrateur d'ordre $2n$;
 - Abell (1995) a introduit l'utilisation d'applications de Crémone (applications polynomiales symplectiques).

Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à un schéma explicite que nous détaillerons un peu plus loin. Tout d'abord, définissons un petit peu la philosophie de construction d'un intégrateur. Elle repose sur cinq points essentiels :

1. Le Hamiltonien est local ;
2. Il est strictement impossible de connaître le Hamiltonien réel de l'élément ou de l'accélérateur de par les erreurs de construction, les erreurs aléatoires (champs, déplacements, marées, vibrations) ;
3. Nous nous intéressons à la modélisation de la dynamique la plus proche de la dynamique réelle de l'accélérateur (nonlinéarités, stabilité) ;
4. Si la solution exacte d'un Hamiltonien est connue, alors elle est symplectique, sinon le sus-dit Hamiltonien est découpé en parties séparément intégrables ;

5. Si besoin, l'ordre de l'intégrateur peut être augmenté à volonté (aux dépens du temps de calcul).

A la suite de Forest (1998, *passim*), nous considérons que l'application générée par un intégrateur doit toujours être vue comme un nouveau modèle de l'aimant. C'est pourquoi les paramètres linéaires doivent — si besoin — être réajustés afin d'obtenir avec l'intégrateur symplectique une machine dont les nombres d'ondes et paramètres linéaires correspondent à un intégrateur « matrice de transfert-kick ». Nous ne rentrerons pas dans les discussions des partisans de l'ancienne école, qui prétendent que leur méthode d'intégration est plus exacte que celle fondée sur un schéma symplectique. Dans la première, les éléments sont dits *épais* car représentés matriciellement (de longueur non négligeable), dans la dernière, les éléments sont parfois interprétés comme « coupés en rondelles » suivant un schéma « section droite-lentille mince-section droite » (cf. Peggs et Talman (1986), Schachinger et Talman (1987)).

Nous allons maintenant présenter les deux principales approches rencontrées dans la plupart des codes modernes dans le monde des accélérateurs.

Décomposition en produit d'applications symplectiques : La première approche consiste à écrire le flot hamiltonien sous la forme d'un produit d'applications symplectiques (Dragt et Finn, 1976, Dragt *et al.*, 1988, Dragt, 1996), *i.e.* sous la forme :

$$\mathbf{x}^f = \mathcal{M}\mathbf{x}^i = e^{sL\eta}\mathbf{x}^i = e^{sL_{f_1}}e^{sL_{f_2}}e^{sL_{f_3}}e^{sL_{f_4}} \dots \mathbf{x}^i \quad (2.12)$$

où les fonctions f_k sont des polynômes homogènes de degré k déterminées à partir du Hamiltonien \mathcal{H} du système considéré. Le facteur $e^{sL_{f_2}}$ représente la partie linéaire de la transformation usuellement écrite par une matrice de transfert \mathcal{R} (cf. Eq. 2.1). L'application $e^{sL_{f_3}}$ décrit les termes nonlinéaires d'ordre deux (et parfois supérieurs) correspondant aux coefficients \mathcal{T}_{jkm} , \mathcal{U}_{jkmn} , etc. du développement de Taylor 2.1 (Dragt et Forest, 1986 – Dragt et Abell, 1996 – Dragt, 1996). Le produit d'applications symplectiques 2.12 peut être tronqué sans aucune difficulté à n'importe quel ordre n :

$$\mathbf{x}^f = \mathcal{M}\mathbf{x}^i = e^{sL_{f_1}}e^{sL_{f_2}} \dots e^{sL_{f_{n+1}}}\mathbf{x}^i \quad (2.13)$$

Par construction la troncature est symplectique. Formellement, cette procédure est appliquée pour chaque élément. Il est aussi possible de calculer l'application de transfert \mathcal{A} pour l'anneau complet, on obtient alors l'*application de premier retour* qu'il suffit d'itérer pour obtenir un logiciel de *tracking* symplectique d'ordre n .

Une difficulté pratique apparaît, car l'application de transfert \mathcal{M} n'est pas intégrable pour k supérieur à 2. Cette difficulté est levée par l'utilisation d'une fonction génératrice $F(\mathbf{q}^i, \mathbf{p}^f)$:

$$F(\mathbf{q}^i, \mathbf{p}^f) = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{p}^f + P(\mathbf{q}^i, \mathbf{p}^f) \quad (2.14)$$

où P est un polynôme à déterminer. On obtient alors la transformation canonique des variables :

$$\begin{cases} \mathbf{p}^i & \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}^i} = \mathbf{p}^f + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}^i}(\mathbf{q}^i, \mathbf{p}^f) \\ \mathbf{q}^f & \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}^f} = \mathbf{q}^i + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{p}^f}(\mathbf{q}^i, \mathbf{p}^f) \end{cases} \quad (2.15)$$

Le polynôme P est déterminé de manière à ce que les applications 2.13 et 2.15 soient égales jusqu'à l'ordre n : il s'exprime en fonction des générateurs f_k (pour plus de détail le lecteur pourra se rapporter par exemple au guide des méthodes physiques de logiciel MAD [58] ou au manuel de MARYLIE [29]).

On remarque que la première équation de l'expression 2.15 est implicite en p^f . Elle est résolue numériquement en utilisant une méthode de Newton. La deuxième équation peut ensuite être calculée.

Cette approche est suivie, par exemple, par les logiciels MARYLIE [29] et MAD [58]. Une approche voisine consiste à approximer \mathcal{M} par des fonctions de Crémone (voir par exemple Dragt et Abell, 1996).

Intégration directe : La seconde approche, que nous avons retenue, repose sur l'*intégration directe du Hamiltonien* d'un élément de l'anneau. Ce choix se justifie par notre volonté de réaliser un code d'intégration optimal en termes de vitesse et de précision. Cette méthode est simple à mettre en œuvre et découple deux problèmes distincts, à savoir la simulation et l'analyse globale de l'anneau. Si le Hamiltonien est intégrable et si la solution analytique se prête bien au calcul numérique, nous la conserverons. Dans le cas contraire, nous décomposons le Hamiltonien en deux parties séparément intégrables, $\mathcal{H} = A + \epsilon B$ où ϵ peut être vu comme un paramètre de perturbation ; puis nous utilisons le théorème de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) qui stipule que l'on peut écrire formellement :

$$e^{sL_A} e^{sL_{\epsilon B}} = e^{sL_{\tilde{\mathcal{H}}}} \quad (2.16)$$

avec le Hamiltonien formel :

$$\tilde{\mathcal{H}} = A + \epsilon B + \frac{s}{2}\{A, \epsilon B\} + \frac{s^2}{12}(\{A\{A, \epsilon B\}\} + \{\epsilon B\{\epsilon B, A\}\}) + \dots \quad (2.17)$$

Ainsi l'intégrateur symplectique du premier ordre le plus simple est :

$$e^{sL_{\mathcal{H}}} = e^{sL_A} e^{sL_{\epsilon B}} + \mathcal{O}(s\epsilon) \quad (2.18)$$

Avec l'aide du théorème BCH, des intégrateurs (S_n) d'ordre quelconque n peuvent être construits :

$$S_n(s) = \prod_{i=1}^n e^{c_i s L_A} e^{d_i s L_{\epsilon B}} \quad (2.19)$$

où les coefficients $(c_i, d_i)_{i=1..n}$ sont déterminées pour que le reste soit d'ordre n . En particulier, les deux relations suivantes doivent être vérifiées :

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n d_i = 1 \quad (2.20)$$

Dans la suite, on se restreint à la classe des intégrateurs symétriques, *i.e.* $S_n^{-1}(s) = S_n(-s)$. Par construction ces intégrateurs sont de reste paire $\mathcal{O}(s^{2n}\epsilon)$. Le célèbre intégrateur d'ordre 2 appelé dans la littérature *leapfrog integrator* (« saute-mouton ») s'écrit (Ruth, 1983) :

$$S_2 = e^{c_1 s L_A} e^{d_1 s L_{\epsilon B}} e^{c_1 s L_A} \quad (2.21)$$

2.1. RÉALISATION D'UN INTÉGRATEUR SYMPLECTIQUE

avec $c_1 = \frac{1}{2}$ et $d_1 = 1$.

Une manière simple pour obtenir des intégrateurs d'ordre plus élevé repose sur le travail de Yoshida (1990). L'idée principale est de composer le précédent intégrateur d'ordre 2 pour obtenir un intégrateur symétrique d'ordre plus élevé. Donc, on pourra écrire un intégrateur d'ordre 4 comme :

$$S_4(s) = S_2(as)S_2(bs)S_2(as) \quad (2.22)$$

avec pour condition de faire un pas total de longueur s et d'annuler le terme d'ordre 2, soit :

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 2a^3 + b^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{3}}} \\ b = -\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2-2^{\frac{1}{3}}} \end{cases} \quad (2.23)$$

De manière générale, Yoshida montre qu'un intégrateur d'ordre $2n + 2$ peut être construit à partir d'un intégrateur d'ordre $2n$ en utilisant le schéma symplectique :

$$S_{2n+2}(s) = S_{2n}(as)S_{2n}(bs)S_{2n}(as) \quad (2.24)$$

Immédiatement, on obtient : $a = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{2n+1}\sqrt{2}}}$ et $b = -\frac{2^{\frac{1}{2n+1}\sqrt{2}}}{2-2^{\frac{1}{2n+1}\sqrt{2}}}$.

Les deux intégrateurs les plus fréquemment utilisés en physique des accélérateurs circulaires⁵ sont :

– l'intégrateur d'ordre 4 (S_4) — initialement établi par Ruth (1983, puis reformulé par Forest et Ruth, 1990) — que l'on peut aussi écrire :

$$S_4(s) = e^{d_1 s L_A} e^{c_2 s L_{eB}} e^{d_2 s L_A} e^{c_3 s L_{eB}} e^{d_2 s L_A} e^{c_2 s L_{eB}} e^{d_1 s L_A} \quad (2.25)$$

avec $c_2 = \frac{1}{1+\alpha}$, $c_3 = (\alpha - 1)c_2$, $d_1 = \frac{c_2}{2}$, $d_2 = \alpha d_1$ et $\alpha = 1 - 2^{\frac{1}{3}}$.

– l'intégrateur d'ordre 6 (S_6) (Yoshida, 1990) :

$$S_6(s) = S_2(ds)S_2(cs)S_2(bs)S_2(as)S_2(bs)S_2(cs)S_2(ds) \quad (2.26)$$

avec trois jeux de solutions possibles (cf. Tab. 2.1) et avec toujours un grand pas négatif.

	Solution 1	Solution 2	Solution 3
a	-0.117767998417887E1	-0.213228522200144E1	+0.152886228424922E2
b	+0.235573213359357E0	+0.426068187079180E2	-0.214403531630539E1
c	+0.784513610477560E0	+0.143984816797678E1	+0.144778256239930E1
d	1-2(a+b+c)		

TAB. 2.1: Trois jeux de coefficients pour construire un intégrateur symplectique d'ordre 6 en utilisant la méthode de Yoshida. Dans chacun des cas, il existe un grand pas négatif provenant de la relation 2.20 : $d + 2(a + b + c) = 1$.

⁵Par exemple, dans les logiciels DESPOT [42], TRACY2 [11], SAD [85]

2.1.4 Intégrateurs utilisés

La classe d'intégrateurs que nous avons utilisée est présentée dans l'article de Laskar et Robutel (2000) auquel le lecteur pourra se référer pour plus de détails.

Si l'on distingue A et B dans l'expression générale du Hamiltonien, les intégrateurs symétriques peuvent appartenir à l'une des deux classes $SABA_k$ et $SBAB_k$ définies par :

$$\begin{aligned}
 SABA_{2n} & : e^{c_1 s L_A} e^{d_1 s L_{\epsilon B}} \dots e^{d_n s L_{\epsilon B}} e^{c_{n+1} s L_A} e^{d_n s L_{\epsilon B}} \dots e^{d_1 s L_{\epsilon B}} e^{c_1 s L_A} \\
 SABA_{2n+1} & : e^{c_1 s L_A} e^{d_1 s L_{\epsilon B}} \dots e^{c_{n+1} s L_A} e^{d_{n+1} s L_{\epsilon B}} e^{c_{n+1} s L_A} \dots e^{d_1 s L_{\epsilon B}} e^{c_1 s L_A} \\
 SBAB_{2n} & : e^{d_1 s L_{\epsilon B}} e^{c_2 s L_A} e^{d_2 s L_{\epsilon B}} \dots e^{d_n s L_{\epsilon B}} e^{c_{n+1} s L_A} e^{d_n s L_{\epsilon B}} \dots e^{d_2 s L_{\epsilon B}} e^{c_2 s L_A} e^{d_1 s L_{\epsilon B}} \\
 SBAB_{2n+1} & : e^{d_1 s L_{\epsilon B}} e^{c_2 s L_A} e^{d_2 s L_{\epsilon B}} \dots e^{c_{n+1} s L_A} e^{d_{n+1} s L_{\epsilon B}} e^{c_{n+1} s L_A} \dots e^{d_2 s L_{\epsilon B}} e^{c_2 s L_A} e^{d_1 s L_{\epsilon B}}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Par exemple l'intégrateur *leapfrog* (Eq. 2.21) appartient à la classe $SABA_1$. C'est un intégrateur d'ordre 2 avec pour Hamiltonien formel $\tilde{\mathcal{H}} = A + \epsilon B + \mathcal{O}(s^2 \epsilon)$. L'intégrateur d'ordre 4 de Forest et Ruth (Eq. 2.25) appartient à la classe $SABA_3$ avec $\tilde{\mathcal{H}} = A + \epsilon B + \mathcal{O}(s^4 \epsilon)$. Nous pouvons remarquer la présence de deux pas négatifs pour cet intégrateur, ce qui rend la valeur absolue de chaque pas intermédiaire relativement grande pour un pas total de 1 : $d_1 \approx 0.6756$, $d_2 \approx -0.1756$, $c_2 \approx 1.3512$ et $c_3 \approx -1.7024$. Il s'ensuit que pour de grands pas d'intégration, la méthode perd de son efficacité (coût élevé, instabilités numériques). Suzuki (1991) a démontré qu'il est impossible de réaliser un intégrateur symplectique d'ordre $n \geq 3$ avec des pas tous positifs. Cependant, le problème des pas négatifs peut être partiellement solutionné.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas pris en compte l'existence du petit paramètre ϵ . La méthode retenue consiste à déterminer les coefficients (c_j, d_j) des intégrateurs 2.27 pour avoir un reste d'ordre $\mathcal{O}(s^n \epsilon + s^2 \epsilon^2)$ et non plus d'ordre $\mathcal{O}(s^n \epsilon)$.

Par exemple pour un intégrateur de classe $SABA_2$ (ordre quatre), on a :

$$SABA_2 = e^{c_1 s L_A} e^{d_1 s L_{\epsilon B}} e^{c_2 s L_A} e^{d_1 s L_{\epsilon B}} e^{c_1 s L_A} \tag{2.28}$$

l'unique solution pour les coefficients est :

$$d_1 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{2}(1 - c_2) \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

avec

$$\tilde{\mathcal{H}} = A + \epsilon B + \underbrace{s^2 \epsilon^2 \left(-\frac{1}{24} + \frac{c_1}{4} \right) \{ \{A, B\}, B \}}_{\mathcal{O}(s^4 \epsilon + s^2 \epsilon^2)} + \mathcal{O}(s^4 \epsilon) \tag{2.29}$$

De manière similaire pour un intégrateur de classe $SBAB_2$,

$$SBAB_2 = e^{d_1 s L_{\epsilon B}} e^{c_2 s L_A} e^{d_2 s L_{\epsilon B}} e^{c_2 s L_A} e^{d_1 s L_{\epsilon B}} \tag{2.30}$$

les coefficients positifs solutions sont l'unique triplet :

$$d_1 = \frac{1}{6}, \quad d_2 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

2.1. RÉALISATION D'UN INTÉGRATEUR SYMPLECTIQUE

Ce sont ces deux intégrateurs qui ont été retenus pour l'écriture du code de *tracking*.

En fait, dans le cas particulier où A est quadratique en les impulsions et B ne dépend que des positions, il est possible d'améliorer encore la méthode en introduisant un correcteur C défini par (voir Laskar et Robutel, 2000) :

$$C = e^{-s^3 \epsilon^2 \frac{c}{2} L_{\{(A,B),B\}}} \quad (2.31)$$

où le coefficient du correcteur c est déterminé pour annuler le terme d'ordre $\mathcal{O}(s^2 \epsilon^2)$ (voir par exemple l'expression 2.29 pour l'intégrateur $SABA_2$). On notera que le correcteur introduit un pas négatif, mais qu'il est d'autant plus petit que l'ordre de la méthode est élevé (Tab 2.2).

n	$SABA_n$	$SBAB_n$
1	1/12	-1/24
2	$(2 - \sqrt{3})/24$	1/72

TAB. 2.2: Coefficient c du correcteur pour les intégrateurs $SABA_n$ et $SBAB_n$ (extrait de Laskar et Robutel, 2000)

Typiquement, le schéma symplectique avec correcteur s'écrit, par exemple pour un intégrateur $SABA_2$:

$$SABAC_2 = e^{-s^3 \epsilon^2 \frac{c}{2} L_{\{(A,B),B\}}} SABA_2 e^{-s^3 \epsilon^2 \frac{c}{2} L_{\{(A,B),B\}}} \quad (2.32)$$

L'intégrateur avec correcteur est encore symétrique et son reste est d'ordre $\mathcal{O}(s^n \epsilon + s^4 \epsilon^2)$.

Les intégrateurs que j'utiliserai sont d'ordre deux et quatre. Typiquement, un intégrateur d'ordre 4 sera utilisé pour intégrer les éléments de type dipôles, quadripôles alors qu'un intégrateur d'ordre 2 suffira pour l'intégration des multipôles individuels.

Nous montrerons qu'un intégrateur d'ordre deux avec correcteur est plus précis d'un ordre de grandeur que l'intégrateur de Ruth (cf. *infra*). Je vais maintenant présenter le Hamiltonien local pour chacun des principaux éléments magnétiques et les approximations réalisées.

2.1.5 Intégration des éléments parfaits

Nous avons vu page 13, l'expression la plus générale du Hamiltonien pour un accélérateur (cf. Eq. 1.35) exprimée en fonction des trois paires de variables canoniques (x, p_x) , (y, p_y) et (l, δ) . Cette expression dépend explicitement de la longitude s prise comme variable indépendante.

Dans toute la suite, sauf mention explicite, j'ai choisi de travailler sur la forme quadratique en les impulsions en réalisant un développement limité au premier ordre de la racine carrée. Pour mémoire, je rappelle son expression :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = (1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - hx(1 + \delta) - e\hat{A}_s \quad (2.33)$$

La première approximation réalisée a consisté à développer la racine carrée de l'expression 1.35, terme non linéaire qui caractérise le fait que les particules sont relativistes. Ce

développement permet d'obtenir une expression polynomiale dans les variables accélérateurs. Cette approximation est à la base de nombreux code de *tracking*. Cependant, il est intéressant de noter que le premier terme négligé est le terme octupolaire,

$$\Delta\mathcal{H} = \frac{(p_x^2 + p_y^2)^2}{4(1 + \delta)^3} \quad (2.34)$$

c'est un terme *purement cinématique*⁶ qui doit néanmoins être pris en compte comme correction quand l'émittance est grande et lorsque la fonction de Twiss γ est importante (voir Papaphilippou et Abell, 2000).

Dans ce cas, il suffira soit d'introduire des termes d'ordre supérieur du développement limité de la racine carrée, soit de garder la racine carrée. Ce qui a l'inconvénient majeur de compliquer les calculs ; de plus, un intégrateur du type $SABA_n$ ou $SBAB_n$ avec correcteur ne pourra plus être implémenté, car le correcteur $\{A, B\}, B$ n'est en général plus intégrable.

La deuxième approximation fondamentale concerne l'expression générale du champ magnétique (cf. Eq. 1.46 page 15) : on suppose que le champ magnétique est constant à l'intérieur d'un élément et nul à l'extérieur, si bien que le Hamiltonien devient *autonome* pour un élément donné. En réalité, la transition est plus douce. En anglais, on parle d'approximation *hard edge*, ce qui signifie que les éléments ont un *profil magnétique rectangulaire*. Cette approximation ne sera plus suffisante pour les machines de faible rayon de courbure. Pour prendre en compte les champs de fuite, une solution simple consiste à compléter la description des éléments ; nous en discuterons plus en détail au moment d'aborder les éléments dipolaires.

Les équations du mouvement sont données par les équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \frac{dt}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \delta} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dp_y}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{d\delta}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \quad (2.35)$$

Etrangement, bien que certains éléments (dipôle, quadripôles) soient complètement intégrables à la suite des deux approximations précédentes, l'intégration est généralement réalisée en utilisant une solution approchée au moyen d'un intégrateur symplectique. Une des raisons est que cette démarche est nécessaire si l'on désire obtenir l'application de premier retour de l'anneau et utiliser des méthodes automatiques d'algèbre différentielle (*e.g.* le *DA-Package* appelé plus tard *Truncated Power Series Algebra — TPSA* — développé en FORTRAN77 par Berz en 1989, voir aussi son livre : *Modern Map Methods in Particle Beam Physics*, 1999 et plus récemment *The Full Polymorphic Package* qui est une extension écrite en FORTRAN90 par Forest [47]).

Au cours de ce travail, je n'étais pas intéressé — dans un premier temps — par le calcul de l'application de premier retour (analyse globale de l'anneau), c'est pourquoi je conserve la solution exacte si elle existe — sauf temps prohibitifs de calculs, instabilités numériques, rendant l'intégration symplectique plus efficace — De plus, je reste convaincu qu'il est très souvent plus avantageux en termes de temps de calcul d'écrire un code de *tracking* construit sur le Hamiltonien local de chacun des éléments (au moins pour les machines à rayonnement synchrotron).

⁶*i.e.* un terme qui existe en l'absence de champ magnétique lié à la dynamique relativiste (cf. *infra* la section droite).

2.1.5.1 Section droite

Description et Hamiltonien : La section droite, *drift* en anglais, est l'élément le plus simple à modéliser dans un accélérateur, car c'est un élément sans champ magnétique ($A_s = 0$). Elle est caractérisée par un seul paramètre : sa longueur notée L . En coordonnées rectangulaires ($h = 0$), son Hamiltonien se réduit à la forme (cf. Eq. 2.33) :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} \quad (2.36)$$

Les variables (x, y, l) sont cycliques⁷, les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{1+\delta} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{1+\delta} \\ \frac{dl}{ds} = -\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{ds} = 0 \\ \frac{dp_y}{ds} = 0 \\ \frac{d\delta}{ds} = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Une seule hypothèse de calcul : La linéarité des équations est obtenue par le développement limité du terme cinématique (cf. *supra*) que j'appelle pour la suite *approximation des petits angles*.

Intégration des équations : Le système 2.37 est complètement intégrable de solution :

$$\begin{cases} x^f = x^i + \frac{p_x^i}{1+\delta} s \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{1+\delta} s \\ l^f = l^i - \frac{(p_x^i)^2 + (p_y^i)^2}{2(1+\delta)^2} s \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f = p_x^i \\ p_y^f = p_y^i \\ \delta^f = \delta \end{cases} \quad (2.38)$$

où les exposants i et f désignent les coordonnées canoniques respectivement à l'entrée et à la sortie de la section droite de longueur $L = s$.

Prise en compte des termes négligés : Si la racine carrée est conservée, les équations du mouvement sont nonlinéaires. Il est néanmoins encore aisé d'intégrer les équations du mouvement en coordonnées rectangulaires ou curvilignes (cf. annexe A.1 et annexe A.3 expression A.36). Il est ainsi possible de vérifier la validité des approximations réalisées.

2.1.5.2 Aimant de courbure parfait

Un dipôle simple est caractérisé par un rayon de courbure constant ρ_c et une longueur L ; en moyenne, il courbe la trajectoire d'une particule d'un angle $\theta = L/\rho_c$. Son Hamiltonien s'exprime naturellement en coordonnées curvilignes en utilisant les équations 2.33 et 1.51 :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = (1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - hx(1 + \delta) + h\left(x + \frac{x^2}{2\rho_c}\right) \quad (2.39)$$

⁷i.e. elles n'apparaissent pas dans l'expression du Hamiltonien, leurs moments conjugués sont donc des intégrales premières du mouvement.

Par la suite, je ne distinguerai plus le rayon de courbure ρ_c de l'élément et celui introduit par le système de coordonnées curvilignes ($\rho = h^{-1}$). Le terme quadratique en x de l'expression 2.39 traduit une focalisation horizontale purement géométrique du dipôle.

Pour intégrer le Hamiltonien 2.39, je vais me placer dans un cadre un peu plus général. En effet, dans certaines sources de lumière, comme à l'ALS, il existe des dipôles dits combinés, car ils comprennent en plus du terme dipolaire, une composante quadripolaire.

A) Dipôle combiné

Description et Hamiltonien : Le Hamiltonien d'un dipôle combiné est déduit des équations 2.33, 1.51 et 1.53 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) &= \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + hx \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - hx(1 + \delta) + h(x + h\frac{x^2}{2}) + \frac{b_2}{2}(x^2 - y^2) \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + \boxed{hx \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)}} - h\delta x + h^2 \frac{x^2}{2} + \frac{b_2}{2}(x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (2.40)$$

où le coefficient b_2 caractérise le gradient quadripolaire. Dans la plupart des codes de *tracking* (e.g. BETA [93], DESPOT [42], TRACY [11]), on fait de plus l'approximation dite *des grandes machines* en négligeant le terme encadré dans l'équation ci-dessus⁸, de type hexapolaire, qui contribue fortement à la chromaticité des petites machines (Dragt, 1982 et Forest, 1998). Si bien qu'au final, le Hamiltonien du dipôle combiné est simplement :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - h\delta x + h^2 \frac{x^2}{2} + \frac{b_2}{2}(x^2 - y^2) \quad (2.41)$$

On en déduit les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{1 + \delta} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{1 + \delta} \\ \frac{dl}{ds} = -\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)^2} - hx \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{ds} = h\delta - (h^2 + b_2)x \\ \frac{dp_y}{ds} = b_2 y \\ \frac{d\delta}{ds} = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Hypothèses de calcul : les approximations (a) des grandes machines, (b) des petits angles et (c) *hard edge* pour le champ magnétique ont été supposées pour exprimer le Hamiltonien du dipôle combiné sous la forme 2.41.

Intégration exacte des équations : Les équations du mouvement 2.42 sont complètement intégrables (cf. équations de deux oscillateurs harmoniques découplés). La solution exacte est donnée en annexe A.2 (p. 216) en termes de fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques.

⁸Ce terme est pris en compte dans le code MAD (Iselin, 1985b)

Intégration approchée des équations : Il est également possible d'utiliser un schéma symplectique pour intégrer le Hamiltonien 2.41 que l'on décompose en deux parties séparément intégrables⁹ :

$$\mathcal{H} = A + B \quad \text{avec} \quad A = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} \quad \text{et} \quad B = -h\delta x + h^2 \frac{x^2}{2} + \frac{b_2}{2}(x^2 - y^2) \quad (2.43)$$

Comme annoncé dans la section précédente, ce découpage du Hamiltonien va nous permettre d'utiliser un intégrateur de classe \mathcal{SABA}_n ou de classe \mathcal{SBAB}_n . Quelque soit le type d'intégrateur choisi, il suffit de savoir évaluer les deux opérateurs e^{sL_A} et e^{sL_B} . En fait le calcul est presque immédiat, dans chacun des cas, il y a au plus un seul crochet de Poisson à calculer. On obtient les applications respectivement pour A et B :

$$e^{sL_A} : \begin{cases} x^f &= x^i + \frac{p_x^i}{1+\delta} s \\ y^f &= y^i + \frac{p_y^i}{1+\delta} s \\ l^f &= l^i - \frac{(p_x^i)^2 + (p_y^i)^2}{2(1+\delta)^2} s - hx^i s - h \frac{p_x^i}{1+\delta} \frac{s^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f &= p_x^i \\ p_y^f &= p_y^i \\ \delta^f &= \delta \end{cases} \quad (2.44)$$

$$e^{sL_B} : \begin{cases} x^f &= x^i \\ y^f &= y^i \\ l^f &= l^i \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f &= p_x^i - ((b_2 + h^2)x^i - h\delta) s \\ p_y^f &= p_y^i + b_2 y^i s \\ \delta^f &= \delta \end{cases} \quad (2.45)$$

Nous avons également vu qu'il est possible d'améliorer l'intégrateur en introduisant un correcteur (cf. Eq. 2.31). Il suffit de savoir calculer et évaluer le double crochet de Poisson $C = \{\{A, B\}, B\}$:

$$\{\{A, B\}, B\} = \frac{1}{1 + \delta} ((\alpha + kx)^2 + b_2^2 y^2) \quad (2.46)$$

avec $\alpha = -\delta h$ et $k = b_2 + h^2$. L'application définie pour le correcteur est alors :

$$e^{sL_{\{\{A, B\}, B\}}} : \begin{cases} x^f &= x^i \\ y^f &= y^i \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f &= p_x^i - \frac{2k(\alpha + kx^i)}{1+\delta} s \\ p_y^f &= p_y^i - \frac{2b_2^2}{1+\delta} y^i s \end{cases} \quad (2.47)$$

avec $s = -s^3 \frac{c}{2}$ conformément à l'équation 2.31.

Correction due aux coins de l'aimant : Pour être rigoureux, l'expression du Hamiltonien du dipôle combiné 2.41 décrit un *aimant secteur* ou *aimant à faces tournées* (cf. la définition du bloc courbe page 31 et le schéma 2.2-a). Souvent, les aimants d'un accélérateur sont à faces parallèles (*e.g.* à l'ALS ou Super-ACO), il est donc nécessaire de corriger les effets de bord introduits par les coins des aimants (cf. Fig. 2.2-b). Au premier ordre, ces effets se

⁹Dans la littérature, on parle souvent de schéma *drift-kick*, car A contient le Hamiltonien d'une section droite (*drift*) et B , celui d'un $2n$ -pôles dont l'action est juste de donner une impulsion (un *kick*) sur les moments de la particule.

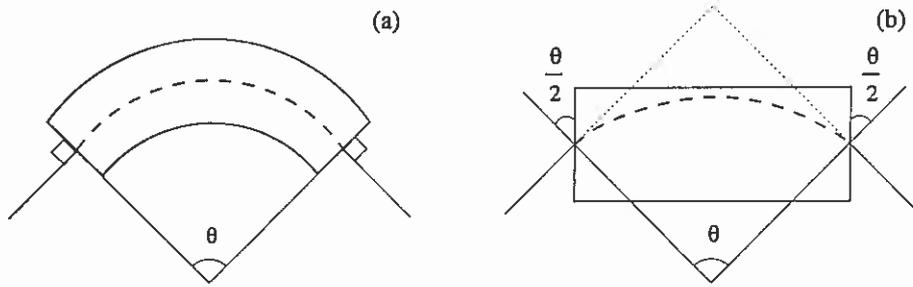


FIG. 2.2: Schéma d'un aimant secteur (a) et d'un aimant à faces parallèles (b). Les angles des coins d'entrée et de sortie sont ici égaux : $\theta_e = \theta_s = \frac{\theta}{2}$.

modélisent par un champ quadripolaire focalisant horizontalement et défocalisant verticalement¹⁰. L'application entre l'entrée et la sortie d'un aimant à faces parallèles est simplement — au premier ordre — la composition des applications d'un aimant secteur, $\mathcal{M}_{\text{secteur}}$, et des coins d'entrée, \mathcal{T}_e , et sortie, \mathcal{T}_s , $\mathbf{x}^f = \mathcal{T}_s \mathcal{M}_{\text{secteur}} \mathcal{T}_e \mathbf{x}^i$ (Forest *et al.*, 1994), soit pour un angle d'entrée ou de sortie de l'aimant θ_u :

$$\mathcal{T}_u(\theta_u) : \begin{cases} p_x^f &= p_x^i + h x^i \tan \theta_u \\ p_y^f &= p_y^i - h y^i \tan \theta_u \end{cases} \quad \text{avec } u = e, s \quad (2.48)$$

Notons que cet effet sera prépondérant pour les petites machines, car il est proportionnel à la courbure h .

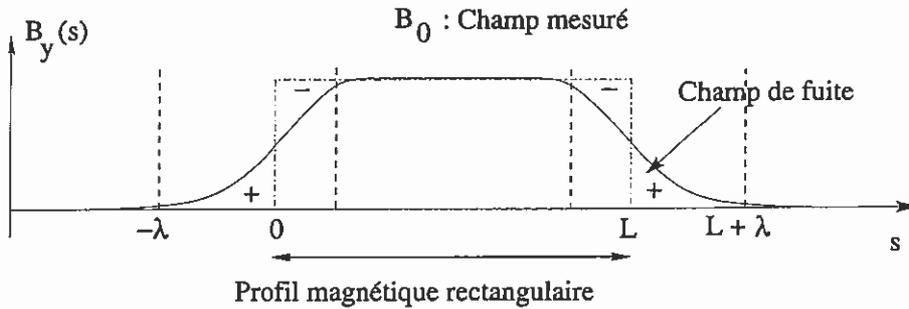


FIG. 2.3: Schéma du profil magnétique longitudinal d'un aimant de longueur L . En approximation *hard-edge*, le champ magnétique est constant dans l'élément et nul à l'extérieur. En réalité, le champ magnétique décroît jusqu'à une valeur nulle de part et d'autre sur une longueur λ : on parle de *champ de fuite*.

Champs de fuite : Pour les machines à faible rayon de courbure comme Super-ACO, un effet supplémentaire est encore à ajouter dans le modèle : les *champs de fuite*. Ce phénomène est simplement lié au fait que le champ magnétique décroît sur les bords de l'aimant et n'est pas tout à fait nul juste à l'extérieur du dipôle (l'approximation *hard-edge* doit être complétée). Au premier ordre, les champs de fuite induisent une composante quadripolaire

¹⁰Pour Super-ACO, les coins de l'ensemble des dipôles induisent les glissement de nombres d'ondes $\Delta\nu_x = -2.4 \times 10^{-2}$ et $\Delta\nu_y = 5.6 \times 10^{-2}$

verticale proportionnelle à la courbure h de l'anneau. Le déphasage vertical¹¹ (ψ_u) est donné par la formule (Brown, 1982, pp. 116–117) :

$$\psi_u = -\mathcal{K}hg \frac{1 + \sin^2 \theta_u}{\cos \theta_u} \quad \text{avec} \quad u = e, s \quad (2.49)$$

avec g la distance entre les deux pôles de l'aimant, h la courbure, θ_u l'angle d'entrée (e) ou de sortie (s) et \mathcal{K} , l'intégrale :

$$\mathcal{K} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_y(s)[B_0 - B_y(s)]}{gB_0^2} ds \quad (2.50)$$

où $B_y(s)$ est l'amplitude du champs de fuite sur le plan moyen à la longitude s mesurée depuis l'entrée de l'aimant et B_0 est la valeur asymptotique de $B_y(s)$ dans l'aimant (cf. Fig.2.3).

L'application symplectique \mathcal{F}_u du premier ordre incluant les coins et le champ de fuite de l'aimant :

$$\mathcal{F}_u : \begin{cases} p_x^f &= p_x^i + hx^i \tan \theta_u \\ p_y^f &= p_y^i - hy^i \tan(\theta_u - \psi_u) \end{cases} \quad \text{avec} \quad u = e, s \quad (2.51)$$

B) Dipôle simple

Pour un dipôle simple, il suffit de poser $b_2 = 0$ dans les formules établies pour le dipôle combiné.

En annexe A.2, les équations du mouvement sont intégrées pour différentes approximations et méthodes d'intégration : (a) sans approximations des grandes machines et des petits angles en géométrie curviligne et rectangulaire et (b) en prenant en compte le terme des petits machines.

2.1.5.3 Quadripôle droit

Description et Hamiltonien : Un quadripôle droit est un élément magnétique dont la vocation est de focaliser la particule qui le traverse; il a une longueur L et un gradient magnétique $b_2 = K$; son Hamiltonien s'exprime naturellement en géométrie cartésienne à partir des expressions 2.33 et 1.53 :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + \frac{K}{2}(x^2 - y^2) \quad (2.52)$$

Les équations du mouvement du quadripôle sont (l est cyclique) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} &= \frac{p_x}{1 + \delta} \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{p_y}{1 + \delta} \\ \frac{dl}{ds} &= -\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{ds} &= -Kx \\ \frac{dp_y}{ds} &= Ky \\ \frac{d\delta}{ds} &= 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

¹¹Pour Super-ACO, les champs de fuite des dipôles induisent le glissement du nombre d'ondes vertical, $\Delta\nu_y = 9.4 \times 10^{-2}$ et contribuent à la chromaticité.

Hypothèses de calcul : L'expression du Hamiltonien 2.52 est établie dans (a) l'approximation des petits angles et (b) l'approximation *hard-edge*.

Intégration « exacte » : Les équations du mouvement 2.53 s'intègrent directement pour une longueur s et pour $K > 0$, on obtient :

$$\begin{cases} x^f &= \cos(\omega s)x^i + \frac{1}{\omega(1+\delta)} \sin(\omega s)p_x^i \\ y^f &= \cosh(\omega s)y^i + \frac{1}{\omega(1+\delta)} \sinh(\omega s)p_y^i \\ l^f &= l^i + \Delta l \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f &= -\omega(1+\delta) \sin(\omega s)x^i + \cos(\omega s)p_x^i \\ p_y^f &= \omega(1+\delta) \sinh(\omega s)y^i + \cosh(\omega s)p_y^i \\ \delta^f &= \delta \end{cases} \quad (2.54)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{K}{1+\delta}}$, $s = L$ et

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{4}\omega \left(\frac{1}{2} \sin(2\omega s) - \omega s \right) (x^i)^2 - \frac{1}{4}\omega \left(\frac{1}{2} \sinh(2\omega s) - \omega s \right) (y^i)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{1}{(1+\delta)^2} \left(\frac{\sin(2\omega s)}{2\omega} + s \right) (p_x^i)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{(1+\delta)^2} \left(\frac{\sinh(2\omega s)}{2\omega} + s \right) (p_y^i)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\omega s)}{1+\delta} x^i p_x^i - \frac{1}{2} \frac{\sinh^2(\omega s)}{1+\delta} y^i p_y^i \end{aligned} \quad (2.55)$$

Cette application de transfert décrit un quadripôle focalisant dans le plan horizontal et défocalisant dans le plan vertical. Dans le cas $K < 0$, il suffit de poser $K = -K$ et d'inverser les fonctions circulaires et hyperboliques dans les équations 2.54. Le quadripôle est alors focalisant dans le plan vertical.

Intégrateur symplectique : Les solutions s'écrivent comme celles du dipôle combiné (cf. Eq. 2.44 à 2.47) en posant une courbure nulle, *i.e.* $h = 0$.

2.1.5.4 Hexapôle parfait droit

Description et Hamiltonien : Les hexapôles sont inévitablement introduits pour corriger la chromaticité. Le Hamiltonien d'un hexapôle de force $b_3 = S$ et de longueur L s'exprime en utilisant les équations 2.33 et 1.53 en coordonnées rectangulaires par :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \underbrace{\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)}}_{A(p_x, p_y, \delta)} + \underbrace{\frac{S}{3}(x^3 - 3xy^2)}_{B(x, y)} \quad (2.56)$$

Les équations du mouvement sont (l est cyclique) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} &= \frac{p_x}{1+\delta} \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{p_y}{1+\delta} \\ \frac{dl}{ds} &= -\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{ds} &= -S(x^2 - y^2) \\ \frac{dp_y}{ds} &= 2Sxy \\ \frac{d\delta}{ds} &= 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Hypothèses de calcul : L'expression du Hamiltonien 2.56 est établie dans (a) l'approximation des grandes machines, (b) l'approximation *hard-edge*.

Le schéma d'intégration que nous allons présenter pour l'hexapôle peut simplement se généraliser pour modéliser un multipôle droit ou tourné quelconque. Par exemple, un $2n$ -pôles droit de force b_n est modélisable par un Hamiltonien de la forme :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + \frac{b_n}{n} \operatorname{Re}((x + jy)^n) \quad (2.58)$$

Intégration approchée des équations : La partie $A(p_x, p_y, \delta)$ contient le Hamiltonien d'une section droite dont la solution a déjà été calculée (cf. Eq. 2.38). Il ne reste plus qu'à intégrer la partie $B(x, y)$ contenant le potentiel hexapolaire, on obtient l'application :

$$e^{sL_B} x^i : \begin{cases} x^f = x^i \\ y^f = y^i \\ l^f = l^i \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f = p_x^i - S(x^2 - y^2) s \\ p_y^f = p_y^i + 2Sxy s \\ \delta^f = \delta \end{cases} \quad (2.59)$$

avec $s = L$. Usuellement, l'hexapôle est modélisé par une lentille mince de longueur infinitésimale, *e.g.* $L = 10^{-6}$ m. Dans ce cas, il suffira de prendre un intégrateur symplectique d'ordre 2. Si l'hexapôle est modélisé par une lentille épaisse, un intégrateur d'ordre 4 est utilisé comme pour les éléments magnétiques précédents.

2.1.6 Etude comparative

2.1.6.1 Introduction

Un code d'intégration numérique a été écrit en langage FORTRAN90. Ce code prend en compte l'ensemble des modèles d'éléments magnétiques précédemment présentés. Ce programme est écrit de manière modulaire afin de pouvoir traiter les petites et grandes machines ; il est possible d'introduire de nouveaux éléments magnétiques (*e.g.* les dispositifs d'insertion) ; le code est dédié et optimisé pour le *tracking*. Les intégrateurs avec ou sans correcteur de type $SABA_n$ et $SBAB_n$ ont été programmés pour $n = 1, 2$ et 3 . Des intégrateurs d'ordre plus élevé pourront sans difficulté être introduits par la suite. Pour les comparaisons internes, l'intégrateur d'ordre 4 de Forest et Ruth a également été programmé.

Différents types de comparaisons ont été effectués, en particulier avec les codes DESPOT et MAD respectivement sur une maille de l'ALS (grande machine) et de Super-ACO (petite machine). Les calculs ont été réalisés en double précision sur une station DIGITAL PWS 433 AU (EV56 à 433 MHz).

2.1.6.2 Propriétés

Précision : Nous avons vérifié la précision de l'intégration pour chaque élément magnétique modélisé. Le Hamiltonien est une intégrale première du mouvement. Nous présentons quelques résultats pour le dipôle combiné dans l'approximation des grandes machines. Son Hamiltonien

est rappelé :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \underbrace{\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)}}_A - \underbrace{h\delta x + h^2 \frac{x^2}{2} + \frac{b_2}{2}(x^2 - y^2)}_B$$

avec comme courbure $h = 0.2015 \text{ m}^{-1}$, gradient quadripolaire $b_2 = -4 \times 10^{-3} \text{ m}^{-2}$ et longueur $L = 0.86 \text{ m}$. Le dipôle est ainsi focalisant dans les deux plans.

Tout d'abord, il est nécessaire de remarquer que le Hamiltonien s'apparente à celui de deux oscillateurs. Les parties A et B sont comparables *i.e.* le petit paramètre ϵ est voisin de l'unité. Donc pour cet élément, il sera inutile de vouloir utiliser un intégrateur d'ordre supérieur à 4 puisque la nouvelle classe d'intégrateurs n'a d'intérêt que si ϵ est un petit paramètre.

Les erreurs sur l'énergie du dipôle combiné sont calculées sur un temps d'intégration de 1 000 passages à travers l'aimant (Fig. 2.4). Pour l'intégration exacte (cf. annexe A.2.4, page 219), l'erreur est aléatoire avec une dérive numérique linéaire du nombre d'itérations comme attendu (la précision machine est 2.26×10^{-16}).

Les trois schémas symplectiques choisis sont le schéma de Ruth et le schéma $SABA_2$ et $SBAB_2$ avec correcteur. Le dipôle de longueur L est intégré en trois étapes d'intégration ($k = 3$). La meilleure des méthodes est l'intégrateur $SABA_2$ qui est plus d'un ordre de grandeur plus précis que le schéma de Ruth (Fig. 2.4).

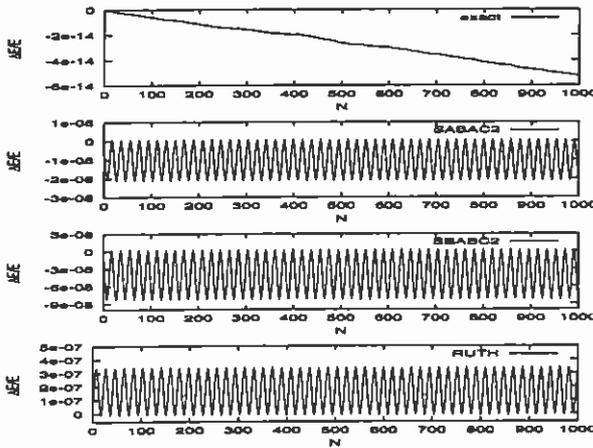


FIG. 2.4: Comparaison à coût constant des intégrateurs $SABA_2$, $SBAB_2$ avec correcteur et Ruth, pour un dipôle combiné. Erreur sur l'énergie $\Delta E/E$ en fonction du nombre N de passages dans l'aimant. Pour les schémas symplectiques l'erreur est bornée et périodique.

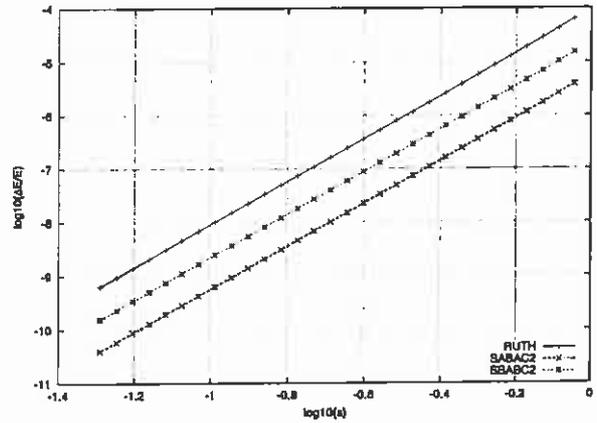


FIG. 2.5: Erreur relative sur l'énergie en échelle logarithmique en fonction de la taille du pas d'intégration $\log_{10}(s)$. Les intégrateurs $SABA_2$, $SBAB_2$ avec correcteur sont plus précis que l'intégrateur de Forest et Ruth respectivement d'un ordre et d'un demi ordre de grandeur.

Une étude systématique de la précision des méthodes a également été réalisée. Les intégrateurs $SABA_n$ et $SBAB_n$ avec correcteur sont comparés à coût constant (*i.e.* à nombre égal d'évaluations) avec le schéma de Ruth. L'erreur relative des intégrateurs symplectiques est présentée pour $n = 2$ en fonction du nombre d'étapes d'intégration pour un aimant de longueur L (Fig. 2.5). En échelle logarithmique, la pente des droites est 4, ce qui correspond

2.1. RÉALISATION D'UN INTÉGRATEUR SYMPLECTIQUE

à l'ordre des méthodes utilisées. La méthode $SABA_2$ avec correcteur est plus précise que le schéma de Ruth d'un ordre de grandeur.

Ce résultat va pouvoir être utilisé pour diminuer, à précision constante, le temps d'intégration des élément magnétique, soit de réduire le temps de *tracking*. Généralement, une à deux étapes d'intégration sont gagnées par comparaison avec l'intégrateur de Forest et Ruth.

Méthode	k=4		k=6		k=8	
	N	ν_x	N	ν_x	N	ν_x
« Exact »	-	0.185450	-	0.185450	-	0.185450
Ruth	5 441	0.185267	27 278	0.185414	87 163	0.185439
$SABA_2$	330 503	0.185453	1 664 687	0.185451	5 256 904	0.185450

TAB. 2.3: Comparaison du nombre N nécessaire d'itérations pour obtenir une solution déphasée de 2π par rapport à l'intégration de référence d'une maille de l'ALS. Le déphasage et le nombre d'ondes sont exprimés pour différentes valeurs du nombre k d'étapes d'intégration. Le schéma $SABA_2$ est à chaque fois plus précis de plus de un à deux ordres de grandeur.

Déphasage : Un autre point remarquable de cette nouvelle classe d'intégrateurs est sa faible dérive en phase à nombre égal d'itérations. En comparant la solution numérique obtenue par le schéma symplectique par rapport à la solution exacte, on note que le déphasage introduit par la méthode $SABA_2$ est très faible par rapport à l'intégrateur de Ruth et Forest (voir Fig. 2.6 pour le dipôle combiné et Fig. 2.7 pour une maille complète de l'ALS). Par exemple, le tableau 2.3 donne le nombre N de tours de l'ALS pour obtenir un déphasage Δ de 2π pour différentes valeurs du nombre d'étapes k d'intégration des dipôles et des quadripôles de l'anneau¹². Une loi d'échelle entre le temps d'intégration $T = N \times L$ et le nombre d'étapes k d'intégration peut être établie. Si L est la longueur de l'élément intégré N fois, et si k est le nombre d'étapes pour intégrer l'aimant. Alors le pas de l'intégrateur pour chaque étape est L/k et on établit :

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^4 = \frac{N_2}{N_1}$$

où N_1, N_2 correspondent au nombre de fois qu'il faut intégrer l'aimant de longueur L , respectivement en k_1 et k_2 étapes, pour obtenir un déphasage $\Delta = x^{symp}(T) - x^{exact}(T) = 2\pi$ entre le schéma symplectique (x^{symp}) et exact (x^{exact}). En effet, en se souvenant que la méthode est d'ordre 4 et en ne gardant que les termes de plus bas degré, on peut écrire :

$$\Delta = |x^{symp}(T) - x^{exact}(T)| = T \times \left(\frac{L}{k}\right)^4 = Cte$$

Notons que le déphasage n'est pas une grandeur fondamentale pour déterminer si un intégrateur numérique est meilleur qu'un autre. Nous avons vu précédemment qu'un intégrateur symplectique peut être vu comme un modèle d'un élément magnétique. Ainsi pour retrouver les bons nombres d'ondes, il suffirait d'ajuster les conditions initiales.

¹²Idéalement, pour retrouver la solution « exacte », il suffit de faire tendre k vers l'infini.

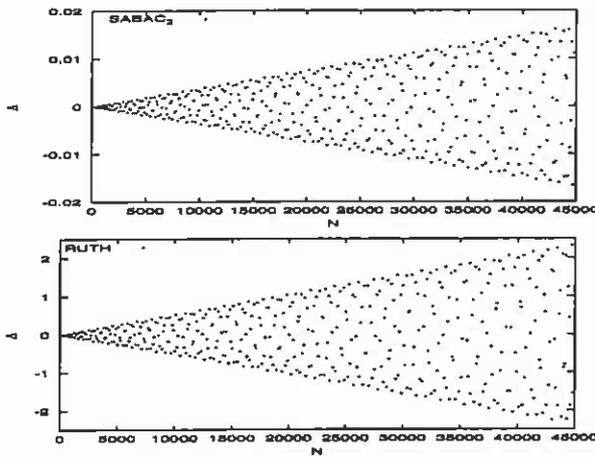


FIG. 2.6: Déphasage Δ des solutions du dipôle combiné introduit par les schémas $SABAC_2$ et de Ruth par rapport à la solution « exacte ». Le déphasage est inférieur de deux ordres de grandeur pour la nouvelle classe d'intégrateur.

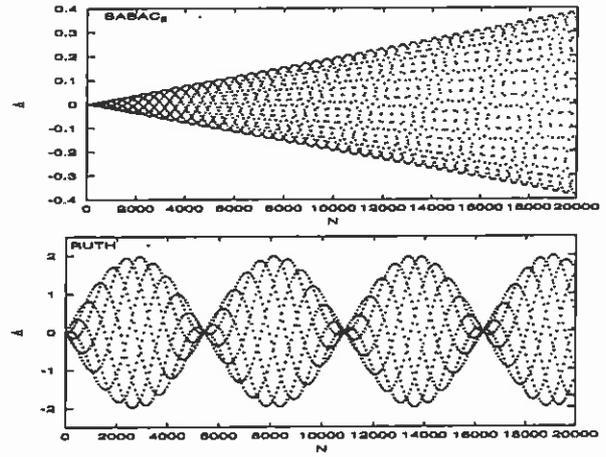


FIG. 2.7: Déphasage introduit par les schémas symplectiques pour l'intégration sur N tours de l'ALS. Les quadripôles et dipôles sont intégrés en $k = 4$ étapes. Dès 5 441 tours, le schéma de Ruth introduit un déphasage complet (remarquer la différence d'échelle verticale pour les deux méthodes).

Jusqu'à présent, l'analyse de la précision des méthodes symplectiques n'a pas été réalisée. Cependant, une remarque concernant la taille des pas d'intégration peut être faite. Pour cela, décrivons succinctement le schéma d'intégration numérique d'un élément de longueur $L = 1$ avec l'intégrateur $SABA_1$ dont l'expression est rappelée¹³ :

$$\mathbf{x}^f = e^{c_1 L A} e^{d_1 L B} \underbrace{e^{c_1 L A} \mathbf{x}^i}_{\mathbf{x}_{c_1}^i} \quad (2.60)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{x}_{d_1}^i}$

avec $2c_1 = 1$ et $d_1 = 1$. Dans ce cas l'intégration est réalisée en deux pas suivant A et un pas suivant B . Si l'intégration est réalisée en k étapes, le schéma d'intégration 2.60 est composé k fois avec un pas $L = L/k$.

Ce processus est illustré pour les intégrateurs $SABA_2$ et de Forest et Ruth (schéma 2.8 pour $k = 1$). Pour l'intégrateur $SABA_2$ les pas, tous positifs, sont petits, plus fins sur les bords de l'élément et plus grands en son centre (cf. condition 2.20). L'intégrateur de Forest et Ruth est caractérisé par la présence de grandes valeurs de pas. Pour intégrer A , on fait deux pas positifs $2 \times 0.6756 = 1.3512$ et deux pas négatifs $2 \times -0.1724 = -0.3512$; pour intégrer B , deux pas positifs $2 \times 1.3512 = 2.7024$ et un grand pas négatif -1.7024 .

La valeur des pas d'intégration a probablement une incidence sur la taille du reste des méthodes symplectiques et donc sur leur précision et phase. Des études plus complètes pourront être entreprises pour préciser ces phénomènes.

¹³Le lecteur pourra aisément étendre ce schéma aux autres classes d'intégrateurs.

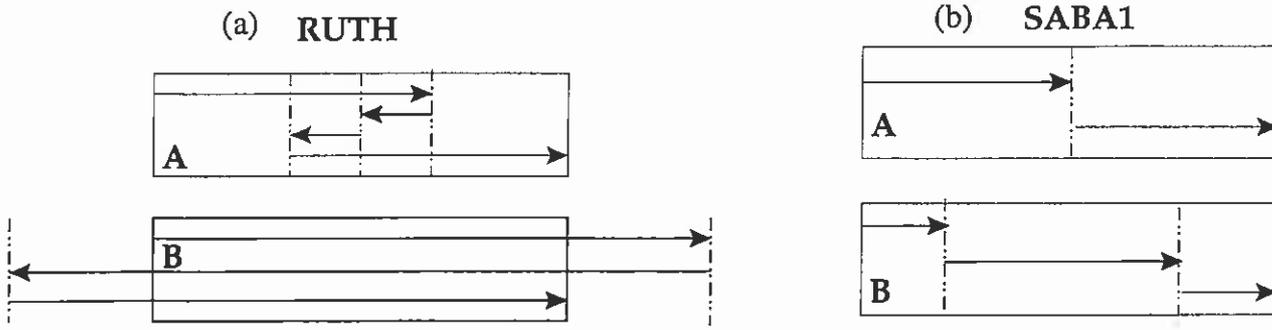


FIG. 2.8: Schéma pour l'intégration des parties A et B d'un Hamiltonien avec (a) l'intégrateur de Forest et Ruth et (b) l'intégrateur $SABA_1$.

Conclusion : Dans les approximations réalisées, il est nécessaire de trouver un compromis entre la précision et le temps de calcul. L'utilisateur peut selon les besoins modifier la précision de calcul en jouant sur le nombre d'étapes d'intégration d'un élément de longueur L . La nouvelle classe d'intégrateurs utilisée permet de d'obtenir un intégrateur plus efficace que le schéma classique de Forest et Ruth à précision de calcul égale.

2.2 Analyse en Fréquence

2.2.1 Introduction

Longtemps, le mouvement du Système Solaire a semblé être d'une régularité parfaite. Pour étudier sa dynamique globale, Jacques Laskar a développé l'Analyse en Fréquence qui lui a permis de mettre en évidence du chaos dans le Système Solaire (Laskar, 1988, 1990). Cette méthode numérique utilise une méthode de Fourier raffinée ; elle est adaptée pour l'analyse de la stabilité des orbites d'un système conservatif. Cette méthode a ensuite été appliquée à l'étude de la stabilité de l'obliquité des planètes puis de la Terre (Laskar et Robutel, 1993a et 1993b). Rapidement, elle a été utilisée pour caractériser la dynamique d'autres systèmes : application standard (Laskar, Froeschlé et Celletti, 1992 – Carletti et Laskar, 2000), dynamique galactique (Papaphilippou et Laskar, 1996 et 1998), dynamique des accélérateurs (Dumas et Laskar, 1993 – Laskar et Robin, 1996 – Papaphilippou, 1999).

L'Analyse en Fréquence permet de caractériser finement la dynamique d'un système à n degrés de liberté, est particulièrement adaptée aux systèmes à 3 degrés de liberté. Pour des orbites régulières, la méthode donne une représentation analytique des solutions alors que pour des orbites non régulières, elle fournit des critères permettant de caractériser le degré de nonlinéarité du système.

2.2.2 Application fréquence

Pour l'écriture de cette partie, je me suis inspiré des articles de J. Laskar décrivant de manière exhaustive la méthode d'Analyse en Fréquence (1992, 1993, 1994 et 1999).

Pour décrire la méthode d'Analyse en Fréquence, nous allons d'abord nous placer dans le cas général d'un système Hamiltonien autonome à n degrés de liberté écrit sous la forme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{H}_1 \quad (2.61)$$

où \mathcal{H}_0 représente la partie intégrable du mouvement et \mathcal{H}_1 un terme de perturbation — dans le cadre de la dynamique d'un accélérateur, nous avons vu au cours du chapitre 1 (page 20) que \mathcal{H}_0 décrit le mouvement bêatron et \mathcal{H}_1 décrit par exemple les défauts multipolaires —

Supposons qu'en l'absence de perturbation ($\epsilon = 0$), le système puisse s'écrire en variables actions-angles (\mathbf{I}, θ) . Alors les équations du mouvement se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{d\theta_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_k} = \nu_k(\mathbf{I}) \\ \frac{dI_k}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_k(t) = \nu_k(\mathbf{I})t + \theta_{0k} \\ I_k(t) = I_{k0} \end{cases} \quad \text{avec } k = 1, \dots, n \quad (2.62)$$

Les solutions 2.62 peuvent s'écrire sous forme complexe $z_k = I_{0k} e^{j\theta_k}$, soit :

$$z_k(t) = z_{0k} e^{j\nu_k t}, \quad \text{avec } z_{0k} = z_k(0) \quad \text{et } k = 1, \dots, n \quad (2.63)$$

Les orbites 2.63 sont confinées sur des tores de dimensions n , produits de cercles de rayons I_{0k} parcourus aux fréquences $\nu(\mathbf{I}_0) = (\nu_1(\mathbf{I}_0), \dots, \nu_n(\mathbf{I}_0))$ (cf. Fig. 2.9 pour $n = 2$). S'il existe une

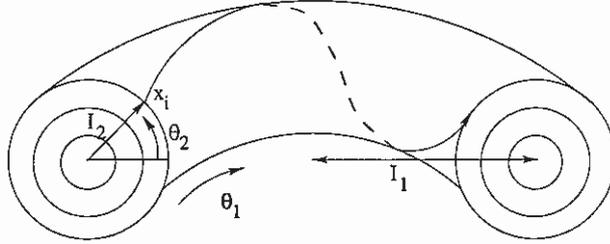


FIG. 2.9: Espace des phases d'un système à deux degrés de liberté en coordonnées actions-angles $(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$. Les orbites (x_i) sont confinées sur des tores de dimension 2.

bijection entre les actions et les fréquences, *i.e.* si la condition de non-dégénérescence suivante est vérifiée :

$$\det \left(\frac{\partial \nu(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}^2} \right) \neq 0 \quad (2.64)$$

alors le mouvement peut être décrit de manière équivalente par les actions I_k ou les fréquences ν_k ; on définit alors l'application, F , dite *application fréquence* :

$$F : (I_1, \dots, I_n) \mapsto (\nu_1, \dots, \nu_n) \quad (2.65)$$

Si de plus, on se place sur une surface d'énergie constante ($\mathcal{H}_0(I) = \Sigma$), alors seulement $(n-1)$ actions sont indépendantes et l'application fréquence 2.65 devient (si par exemple, $\nu_n \neq 0$) :

$$F : (I_1, \dots, I_{n-1}) \mapsto \left(\frac{\nu_1}{\nu_n}, \dots, \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n} \right) \quad (2.66)$$

Le problème qui nous préoccupe est de savoir ce qu'il advient de ces orbites sous l'effet d'une perturbation faible. La réponse est fournie par le théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser, voir par exemple les références incluses in Laskar, 1999) : sous des conditions très générales, pour une perturbation suffisamment faible, la plupart des tores du système non perturbé (\mathcal{H}_0) subsistent mais sont déformés. Ce sont les tores dont les vecteurs fréquences vérifient la condition dite *diophantienne* :

$$|\langle \mathbf{m}, \nu \rangle| \geq \frac{C_\epsilon}{|\mathbf{m}|^\tau}, \quad \tau > n \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \quad (2.67)$$

où C_ϵ est une constante dépendant de ϵ et de \mathcal{H}_0 : ils sont appelés *tors KAM*. Les tores de \mathcal{H}_0 pour lesquels $\langle \mathbf{m}, \nu \rangle = 0$ sont appelés *tors résonants* et sont détruits d'après le théorème KAM. Entre les tores KAM, les orbites sont en général chaotiques. Cependant, il est encore possible de construire une application fréquence (voir Laskar, 1999). Les solutions KAM peuvent alors s'exprimer sous la forme :

$$z_k(t) = z_{k0} e^{j\nu_k t} + \sum_{\mathbf{m}_i} a_{\mathbf{m}_i}^k e^{j\omega_{\mathbf{m}_i} t}, \quad \mathbf{m}_i \in \mathbb{Z}^n \quad (2.68)$$

Les coefficients $\omega_{\mathbf{m}_i}$ sont combinaison linéaire de n fréquences indépendantes appelées *fréquences fondamentales* du système, *i.e.* $\omega_{\mathbf{m}_i} = \langle \mathbf{m}_i, \nu \rangle = m_{i1}\nu_1 + \dots + m_{in}\nu_n$.

La méthode d'Analyse en Fréquence repose sur la construction de l'*application fréquence numérique*, F^T , en recherchant une décomposition quasi-périodique d'une trajectoire sur un temps d'intégration fini T et en utilisant une technique de Fourier raffinée (Laskar 1988, 1993 et 1999), *i.e.* sous la forme d'un nombre fini N de termes :

$$z_k(t) = z_{k0} e^{j\nu_k t} + \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{m}_i}^k e^{j\langle \mathbf{m}_i, \nu \rangle t}, \quad \mathbf{m}_i \in \mathbb{Z}^n \quad (2.69)$$

où les coefficients $a_{\mathbf{m}_i}^k$ sont ordonnés par amplitude décroissante¹⁴ et ν est le vecteur de fréquences fondamentales.

A énergie fixée, une trajectoire de l'espace des phases vit sur une surface d'énergie de dimension $2n - 1$. Habituellement, on observe le mouvement dans une surface de Poincaré, *i.e.* que l'on enregistre une trajectoire discrète en fixant un des angles θ_k , par exemple $\theta_n = 0$ modulo 2π (cf. Fig. 2.10). Les fréquences fondamentales déduites du signal quasi-périodique 2.69 sont exprimées par rapport à la section de Poincaré, donc par exemple dans notre cas $\nu_n = 1$. Le mouvement est donc restreint sur un espace de dimension $2n - 2$.

Pour l'Analyse en Fréquence, une condition plus stricte est adoptée : on fixe les n angles $\theta_k = \theta_{0k}$. Dans ce cas, le mouvement est étudié dans un espace de dimension $n - 1$. Il est caractérisé par la donnée de $n - 1$ actions.

En ne conservant que les fréquences fondamentales de la décomposition quasi-périodique (Eq. 2.69) obtenue après intégration sur un intervalle de temps $[\tau, \tau + T]$, on construit l'*application fréquence numérique* :

$$F_{\theta_0}^T : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ (\tau, I_1, \dots, I_{n-1}) \mapsto (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \quad (2.70)$$

¹⁴Pour un signal quasi-périodique, les coefficients $a_{\mathbf{m}_i}^k$ décroissent très vite, si bien qu'un nombre N faible de termes suffit pour reconstruire le signal avec une grande précision.

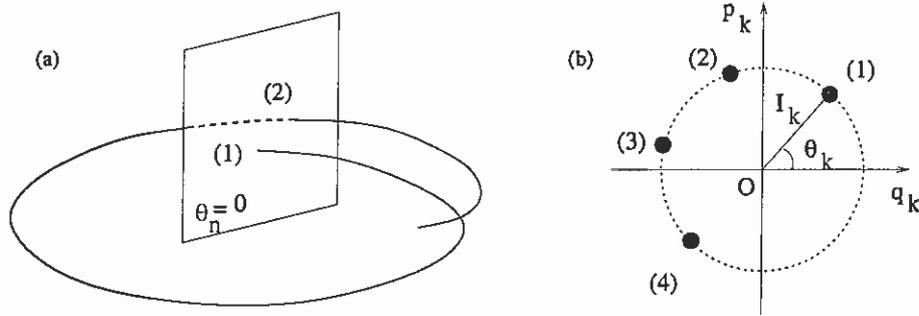


FIG. 2.10: Section de Poincaré (a) : à chaque tour de l'accélérateur, la trajectoire discrète de la particule est enregistrée dans le plan $\theta_n = 0$. (b) Espace des phases ($x_k = \sqrt{2I_k} \cos \theta_k$, $p_k = \sqrt{2I_k} \sin \theta_k$) au temps (i).

2.2.3 Propriétés de l'application fréquence numérique

L'étude des propriétés de l'application F^T va nous donner des informations sur le système dynamique (résonances, non-linéarités, chaos).

1. L'image $F_{\theta_0}^T(\tau, I)$ est indépendante du choix dans angles initiaux θ_0 (cf. sur un tore, les fréquences ne dépendent pas de la phase) et F^T est une fonction régulière pour une trajectoire KAM. Inversement, la non-régularité de $F^T(\tau, I)$ nous permettra de mettre en évidence les phénomènes résonants et les zones chaotiques.
2. La convergence de la méthode est rapide et suit une loi en $\frac{1}{T^4}$ en utilisant une fenêtre de Hanning alors qu'une transformée de Fourier rapide (FFT) converge en $\frac{1}{T}$ (Laskar, 1999). En effet, l'algorithme de la FFT présuppose que le signal recherché est périodique, alors que l'Analyse en Fréquence cherche à reconstruire une plus grande classe de signaux, à savoir les signaux quasi-périodiques de la forme (2.69) ; ce point fondamental rend la méthode plus apte à l'étude d'un système dynamique. Cette propriété permet de la calculer sur un temps d'intégration T court et de faire de la prédiction à long terme.
3. L'application $F_{\theta_0}^T$ est invariante par translation dans le temps τ pour une trajectoire régulière (trajectoire KAM). A l'inverse, la variation avec le temps des fréquences, appelée *diffusion*, pourra être utilisée comme indice de stabilité et de chaotité de la trajectoire.

La diffusion des orbites nous donnera de précieuses informations sur la stabilité globale de la dynamique du système étudié. Pour un système à deux degrés de liberté, l'espace des phases est de dimension 4, les surfaces d'énergie de dimension 3 et l'espace des fréquences de dimension 1 (cf. réduction par la conservation de l'énergie). Une orbite KAM est représentée par un point dans l'espace des fréquences et vit sur un tore de dimension 2. Une orbite non régulière n'est pas un point mais une courbe révélant la diffusion entre les orbites régulières (cf. Fig. 2.11-a). Il est clair que dans l'espace des fréquences, un point (dimension 0) sur une courbe de dimension 1 empêche tout mouvement régulier d'avoir de grandes excursions en amplitude. De manière équivalente, en se plaçant dans l'espace des phases, un tore de dimension 2 sépare une surface d'énergie (dimension 3) en une partie intérieure et une partie extérieure : c'est donc une *barrière topologique* à la diffusion.

Pour un système à trois degrés de liberté, la situation n'est plus du tout la même. Un point n'arrête pas la diffusion dans un plan (cf. Fig. 2.11-b). Vue dans l'espace des phases, les tores de dimension 3 ne sont plus des frontières topologiques à la diffusion pour une surface d'énergie de dimension 5. Cependant il peut être montré que la diffusion est quasi-nulle au voisinage des orbites régulières. Au voisinage d'une trajectoire KAM, la diffusion décroît exponentiellement si bien qu'un grand nombre de trajectoires régulières joue le rôle de *barrière effective* à la diffusion (résultat de Morbidelli et Gorgilli, 1995).

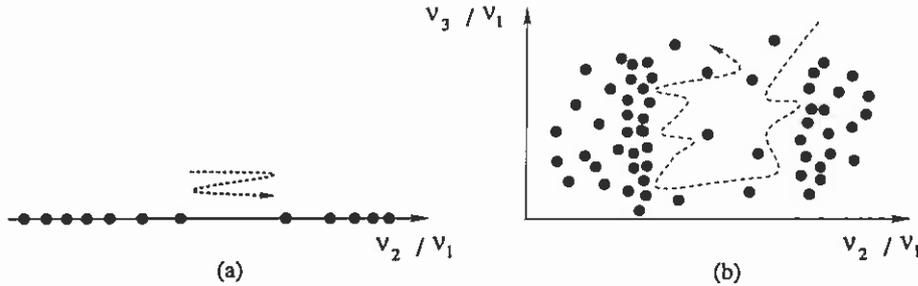


FIG. 2.11: Diffusion pour un système à deux degrés de liberté (a), e.g. l'application d'Hénon (cf. *infra*) : la diffusion est confinée par les trajectoires régulières qui sont des points dans l'espace des fréquences. Pour trois degrés de liberté (b), e.g. la dynamique transverse d'un accélérateur, la diffusion n'est plus confinée par les trajectoires régulières ; la diffusion est cependant faible en leur voisinage (Laskar, 1994)

2.2.4 Applications préliminaires

Avant d'appliquer l'Analyse en Fréquence à l'étude de la dynamique des accélérateurs, deux applications simples vont être présentées succinctement. Le pendule mécanique qui modélise la dynamique au voisinage d'une résonance. Puis, l'application d'Hénon qui est une application nonlinéaire et me permettra d'introduire quelques notions supplémentaires sur l'étude de la dynamique des systèmes.

2.2.4.1 Le pendule

Le Hamiltonien d'un pendule rigide peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - a \cos q, \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad (2.71)$$

où q est l'angle de rotation du pendule et p sa dérivée temporelle. Le pendule est un système dynamique à un degré de liberté complètement intégrable qui permet de modéliser la dynamique au voisinage d'une résonance (voir par exemple, Chirikov, 1979). Son portrait de phase (p, q) est tracé pour différentes valeurs de l'énergie (Fig. 2.12-a). Deux régimes peuvent être mis en évidence :

- le régime de libration ($\mathcal{H} < a$) où le pendule effectue des oscillations autour de l'origine de période :

$$T(\mathcal{H}) = \int_{-\arccos \frac{\mathcal{H}}{a}}^{\arccos \frac{\mathcal{H}}{a}} \frac{dq}{\sqrt{2(\mathcal{H} + a \cos q)}} \quad (2.72)$$

- le régime de circulation où l'énergie du pendule ($\mathcal{H} > a$) est assez grande pour lui permettre d'effectuer des mouvements de rotation de période :

$$T(\mathcal{H}) = \int_0^{2\pi} \frac{dq}{\sqrt{2(\mathcal{H} + a \cos q)}} \quad (2.73)$$

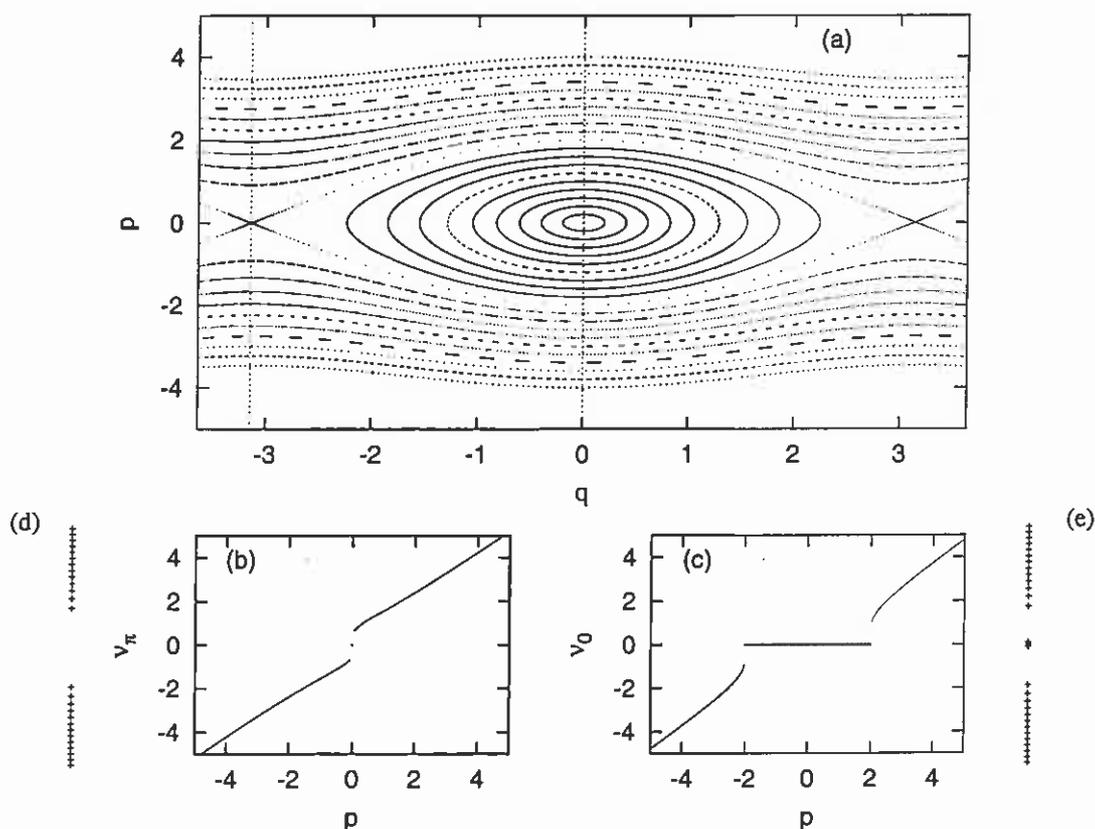


FIG. 2.12: Espace des phases (q, p) du pendule rigide (a) et courbes en fréquence $\nu(q)$. Au voisinage du point hyperbolique (b), la courbe en fréquence présente une singularité logarithmique. Au voisinage du point elliptique (c), la courbe en fréquence est nulle (plateau). Après échantillonnage en moment p , les projections (d et e) des courbes en fréquences sont identiques pour le régime de circulation.

Le pendule admet deux points fixes correspondant aux positions d'équilibre stable et instable : l'origine $(p, q) = (0, 0)$ est un point fixe elliptique et $(p, q) = (0, \pi)$ est un point fixe hyperbolique.

La courbe en fréquence $\nu_\pi(p) = \frac{2\pi}{T}$ est tracée pour $q = \pi$, *i.e.* passant par le point hyperbolique et y admet une singularité logarithmique. La période de rotation (Eq. 2.73) est alors (voir par exemple Tabor, 1988 p. 11 sqq. et Laskar, 1993) :

$$T(\mathcal{H}) = \frac{2}{\sqrt{p^2 + 4a}} \operatorname{sn} \left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{4a}{p^2 + 4a}} \right), \quad (2.74)$$

avec $\text{sn}(x, k)$, la fonction sinus elliptique de Jacobi :

$$\text{sn}(x, k) = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.75)$$

La courbe en fréquence $\nu_0(p)$ calculée pour $q = 0$ est identiquement nulle pour $p^2 < 4a$, car la fréquence de circulation est nulle. Par contre au-delà, elle vaut $\nu_0(p) = \nu_\pi(\sqrt{p^2 - 4a})$.

Ces deux courbes sont fondamentales, car elles décrivent le comportement de l'application fréquence au voisinage d'une résonance (Laskar, 1993). La courbe $\nu_\pi(p)$ décrit son comportement lorsqu'un point hyperbolique est traversé (Fig. 2.12-b), la courbe $\nu_0(p)$ lorsqu'une île de résonance est traversée (Fig. 2.12-c). Si l'on projette la courbe $\nu(q)$ sur l'axe des fréquences, pour un échantillonnage uniforme en p , l'allure de la courbe en fréquence ne dépend pas du choix de q_0 dans le régime libration (cf. courbes 2.12-d et 2.12-e et propriété (1) p. 53). Par contre l'échantillonnage est plus fin au voisinage de île de libration qu'au voisinage du point hyperbolique, car la variation de la fréquence est plus rapide (cf. singularité logarithmique).

2.2.4.2 L'application d'Hénon

L'application d'Hénon (Hénon et Heiles, 1964 et Hénon, 1969) est la plus simple des applications non triviales symplectiques polynomiales à deux degrés de liberté (Bazzani *et al.*, p. 77) :

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p + \epsilon q^2 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

où p et q sont des variables canoniques et ω est le nombre de rotation. Elle dérive du Hamiltonien dépendant explicitement du temps s :

$$\mathcal{H}(p, q; s) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \frac{\epsilon}{3}q^3 \delta_{2\pi}(s) \quad (2.77)$$

avec $\delta_{2\pi}$ la fonction de Dirac 2π -périodisée.

Malgré sa simplicité, l'application d'Hénon contient une grande partie de la dynamique nonlinéaire que nous rencontrerons dans les chapitres suivants. La partie quadratique du Hamiltonien 2.77 modélise le mouvement bétatron perturbé par un hexapôle situé en $s = 0$ (cf. Wiedemann, Tome II ou Lee, 1998). Je ne l'introduis ici que pédagogiquement pour illustrer les propriétés de l'application fréquence énoncées dans la section 2.2.3 et également pour discuter des résonances induites par une perturbation de type hexapolaire (pour plus de détails, voir le travail de Bazzani, Todesco, Turchetti et Servizi, 1994).

Dans ce cas, l'application fréquence est simplement définie par :

$$\begin{aligned} F^T : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \nu \end{aligned} \quad (2.78)$$

Les portraits de phases de l'application d'Hénon sont tracés pour différentes valeurs de la fréquence linéaire ω et pour un nombre d'itérations $T = 2000$ (Fig. 2.14) et mettent respectivement en évidence des résonances d'ordre 4, 5, 6 et 7 (cf. grands îlots de résonance). Pour

chacun des cas, la courbe en fréquence $\nu(q)$ pour $p = 0$ et $q > 0$ est adjointe. C'est une courbe monotone de l'amplitude p excepté au voisinage des résonances. L'étude de la régularité de $\nu(q)$ révèlent également des résonances d'ordre plus élevé.

Similairement au cas du pendule, lorsque $\nu(q)$ traverse une île, on observe un plateau, et au voisinage d'un point hyperbolique une discontinuité de l'application fréquence. L'application d'Hénon est suffisamment simple pour pouvoir calculer analytiquement la variation de ν avec q . Pour cela, on écrit une forme normale de l'application d'Hénon au voisinage de l'origine qui est un point fixe elliptique (voir Bazzani *et al.*, 1994). Les largeurs de résonance peuvent aussi être calculées et dépendent à la fois de q et de ϵ . A l'origine, on retrouve la fréquence linéaire, *i.e.* $\nu(0) = \omega$.

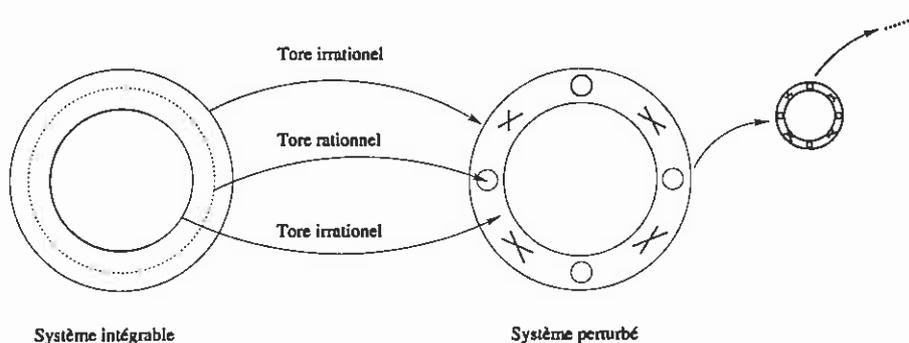


FIG. 2.13: Perturbation d'un système : destruction d'un tore rationnel de fréquence $\nu = \frac{1}{4}$ en quatre points fixes elliptiques et quatre points fixes hyperboliques. Les tores irrationnels sont faiblement déformés. Au voisinage de chaque point elliptique, le raisonnement peut être réappliqué.

L'apparition de résonances de tout ordre sous l'action d'une perturbation, me permet d'introduire un résultat général sur la dynamique d'un système Hamiltonien. En effet, d'après le théorème KAM (cf. page 52), nous avons vu que la majorité des trajectoires du système linéaire subsistent sous l'effet d'une faible perturbation¹⁵. Par contre, tous les tores résonants sont détruits. La condition de résonance pour deux degrés de liberté est :

$$\langle \mathbf{m}, \nu \rangle = 0 \iff q\nu - p = 0 \iff \nu = \frac{p}{q}, \quad \mathbf{m} = (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad (2.79)$$

Ces orbites sont q -périodiques. Quel est le destin des tores résonants sous l'action d'une perturbation? Le théorème des points fixes de Poincaré-Birkhoff (voir par exemple, Arnold et Avez, 1968) stipule que le cercle d'orbites périodiques de fréquence rationnelle $\nu = \frac{p}{q}$ pour le système non perturbé dégénère en nombre paire ($2kq$) points fixes : kq points fixes elliptiques

¹⁵En toute rigueur, le théorème KAM ne peut pas s'appliquer directement à l'application 2.76 en prenant comme partie non perturbée la rotation ($\epsilon = 0$), car elle est une application de torsion nulle (*i.e.* $\frac{d\omega}{dq} = 0$). Pour appliquer le théorème KAM, il faut construire une forme normale d'ordre 2. En notations complexes, l'application d'Hénon 2.76 s'exprime sous la forme : $z' = q - jp = e^{j\omega} (z - \frac{j}{4}(z + \bar{z})^2)$, où \bar{z} est la notation pour le complexe conjugué de z . Succinctement, on effectue un changement de variables $z \rightarrow \zeta$. Dans la nouvelle variable, la forme normale d'ordre deux s'écrit comme une rotation dépendant de la distance à l'origine $\zeta\bar{\zeta}$ (Bazzani, Todesco, Turchetti et Servizi, 1994, p. 96 sqq.) : $\zeta' = \exp(j\Omega(\zeta\bar{\zeta}))\zeta$ avec $\Omega(\zeta\bar{\zeta}) = \omega - \frac{1}{16} [3 \cot \frac{\omega}{2} + \cot \frac{3\omega}{2}] \zeta\bar{\zeta}$. Le deuxième terme de Ω est bien non nul et correspond à la torsion de la forme normale d'ordre 2.

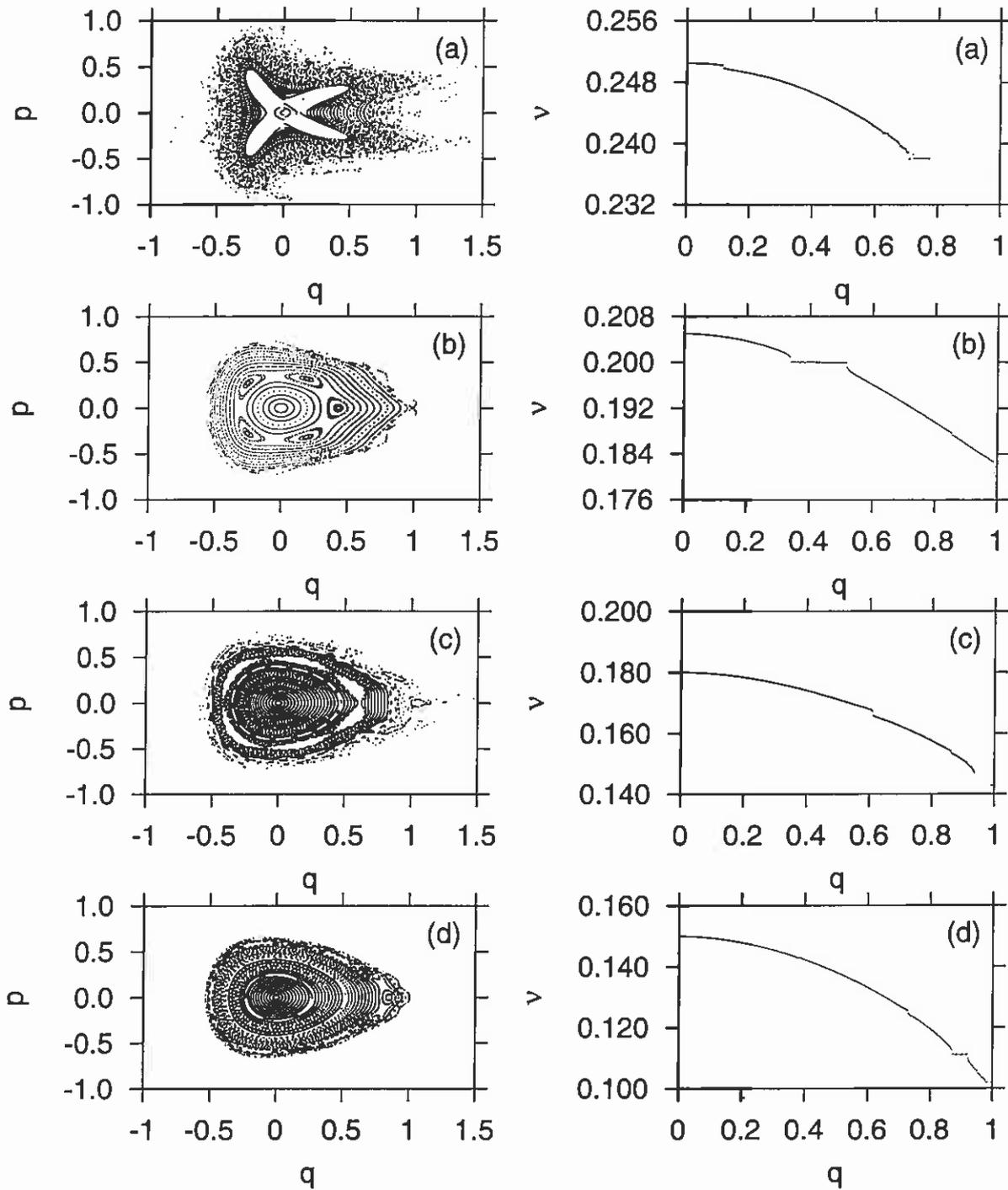


FIG. 2.14: Portraits de phase (q, p) et courbes en fréquence associées $\nu(q)$ pour $p = 0$ de l'application d'Hénon. La fréquence linéaire ω a été choisie dans chacun des cas pour mettre en évidence des résonances d'ordre 4 (a, $\omega = 0.251$), 5 (b, $\omega = 0.205$), 6 (c, $\omega = 0.180$) et 7 (d, $\omega = 0.150$). Des résonances d'ordre plus élevé apparaissent et limitent l'ouverture dynamique.

alternés avec kq point fixes hyperboliques. Dans chacune des files, ce schéma peut être appliqué de nouveau au voisinage des orbites elliptiques (cf. Fig. 2.13).

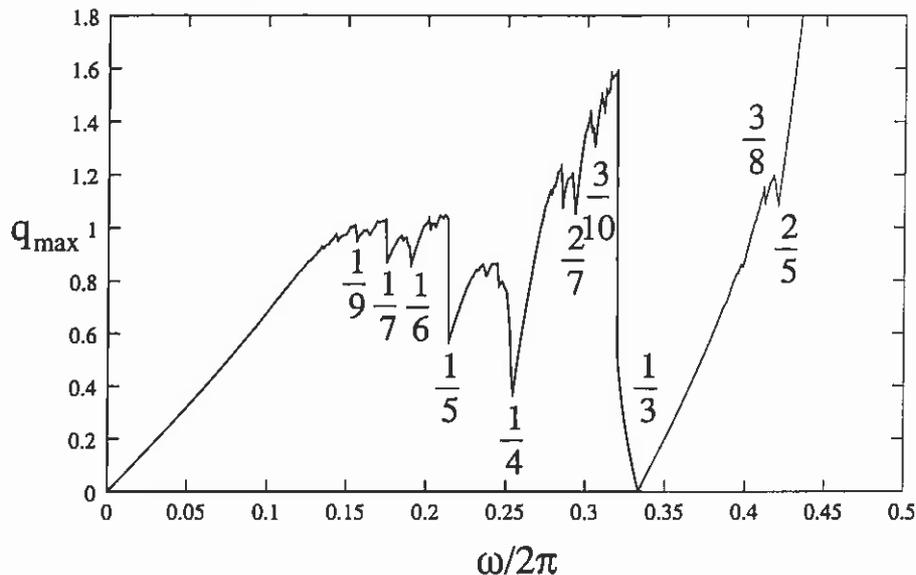


FIG. 2.15: Ouverture dynamique (q_{max}) associée à l'application d'Hénon en fonction de la fréquence linéaire ω normalisée par 2π . L'ouverture dynamique est limitée par la résonance entière pour $0 < \omega < 0.013$. Au-delà, elle est contrainte par des résonances d'ordre plus élevé. L'ouverture dynamique est nulle pour $\omega = 1$ et $1/3$; elle est infinie en $\omega = 0.5$.

La notion de « dangerosité » d'une résonance pour la dynamique est un problème à part entière. Par exemple, les résonances 1 et $1/3$ conduisent toujours à des instabilités quelque soit l'amplitude d'oscillation initiale q_0 : l'ouverture dynamique est nulle; pour $\frac{\omega}{2\pi} = 1/2$, la dynamique est toujours stable : l'ouverture dynamique est infinie. Pour toutes les autres résonances, il existe une amplitude maximale non nulle (q_{max}) au-deçà de laquelle le mouvement est stable. Au voisinage des points hyperboliques le mouvement est chaotique mais borné. Par contre aux grandes amplitudes ($q > q_{max}$), les orbites résonantes sont suffisamment excitées pour détruire toutes les trajectoires. La dernière trajectoire fermée¹⁶ définit l'ouverture dynamique qui est fortement marquée par les résonances (cf. Fig. 2.14 et Fig. 2.15).

Ces résultats me permettent de rappeler, qu'un $2n$ -pôles peut engendrer des résonances de tout ordre. En effet, il est parfois affirmé, par exemple, que les hexapôles ne peuvent générer que des résonances d'ordre un et trois. Cette idée fautive provient du fait que si l'on applique une théorie de perturbation du premier ordre, seules des résonances d'ordre inférieur à n apparaissent (voir par exemple Hagedorn, 1957, Schoch, 1958 ou Guignard 1978); de plus, les calculs ne sont en général pas faits aux ordres supérieurs (voir par exemple, Bazzani *et al.*, 1994, Bengtsson, 1988).

¹⁶Mathématiquement, l'ouverture dynamique serait définie par l'existence de la dernière trajectoire KAM. Cependant, cette définition serait trop pessimiste.

2.2.5 Accélérateurs : carte en fréquence

2.2.5.1 Application fréquence

La première application de l'Analyse en Fréquence à l'étude de la dynamique des accélérateurs a été effectuée sur des modèles de l'Advanced Light Source (Dumas et Laskar, 1993, Laskar et Robin, 1996).

Nous avons vu au cours du premier chapitre que la dynamique transverse d'un accélérateur est modélisée par un système à $(2+1)$ degrés de liberté, où le troisième degré de liberté provient de la dépendance en longitude s du Hamiltonien global.

L'Analyse en Fréquence se trouve être un outil particulièrement adapté à l'étude d'un tel système. En effet, en adoptant les positions et moments canoniques usuelles, (x, y, s, p_x, p_y, p_s) , deux des conditions initiales peuvent être fixées, par exemple les moments $p_{0x} = p_{0y} = 0$, pour un jeu de conditions initiales (x_0, y_0) , la trajectoire de phase est intégrée numériquement et l'on enregistre la trajectoire phase discrète $(x^{(k)}(t), y^{(k)}(t), p_x^{(k)}(t), p_y^{(k)}(t))$ sur une section de Poincaré pour une longitude s donnée, typiquement $s = 0$ à chaque tour k pendant un temps d'intégration T (Fig. 2.16). L'approximation quasi-périodique du signal $z_u(t) = u(t) + iv(t)$ est recherchée sous la forme (cf. page 52) :

$$z_u(t) = a_u e^{i\nu_u t} + \sum_{k=1}^N a_{\mathbf{m}_k} e^{i\langle \mathbf{m}_k, \nu \rangle t}, \quad (2.80)$$

avec $u = x$ (resp. y) et $v = p_x$ (resp. p_y), $\nu = (\nu_x, \nu_y, 1)$ le vecteur de fréquences fondamentales qui correspond aux deux nombres d'ondes et à la fréquence de premier retour sur la surface de Poincaré; $\mathbf{m}_k = (m_{1k}, m_{2k}, m_{3k})$ un multi-indice et $\langle \mathbf{m}_k, \nu \rangle = m_{1k}\nu_x + m_{2k}\nu_y + m_{3k}$.

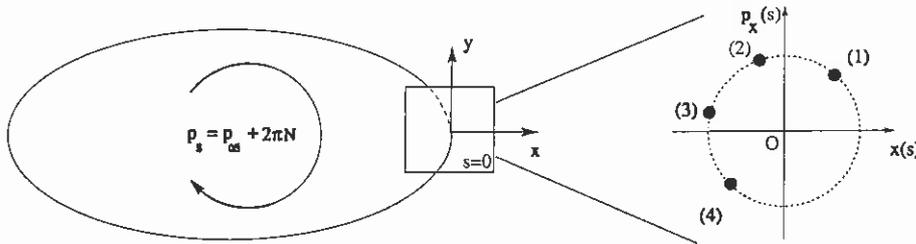


FIG. 2.16: Section de Poincaré en $s = 0$ pour un accélérateur de particules et trajectoire de phase (x, p_x) enregistrée aux temps discrets i .

L'application fréquence est alors de dimension deux :

$$\begin{aligned} F^T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\nu_x, \nu_y) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Donc, si l'on choisit les positions (x_0, y_0) sur une grille de conditions initiales balayant par exemple l'ensemble de l'ouverture physique de l'accélérateur, on va pouvoir construire une *carte en fréquence*. Toute la puissance de l'Analyse en Fréquence pour un système à 3 degrés de liberté repose sur le fait qu'une carte en fréquence dévoile la dynamique de manière exhaustive. L'étude des cartes en fréquence que je présenterai dans le chapitre suivant révélera de manière naturelle les principales résonances contraignant la dynamique transverse du faisceau.

2.2.5.2 Principe de construction

Nous allons décrire la construction de la carte en fréquence de l'Advanced Light Source, carte qui a la particularité d'être très simple à lire.

Pour chacune des conditions initiales (x_0, y_0) , la trajectoire de la particule est intégrée numériquement sur $2 \times 1\,000$ tours consécutifs. Ce nombre de tours est justifié par le temps d'amortissement qui, pour l'ALS, est dix fois supérieur.

Si la particule a survécu (*i.e.* sa trajectoire n'a pas divergé), ses conditions initiales (x_0, y_0) appartiennent à l'ouverture dynamique. Les 1 000 premiers tours de l'intégration sont utilisés pour calculer avec l'Analyse en Fréquence les nombres d'ondes $(\nu_x^{(1)}, \nu_y^{(1)})$. On a ainsi obtenu le premier point de l'ouverture dynamique de l'ALS et de sa carte en fréquence.

Les 1 000 tours suivants servent à calculer de nouveau les nombres d'ondes $(\nu_x^{(2)}, \nu_y^{(2)})$. Si l'orbite n'est pas régulière les deux jeux de fréquences vont différer, car l'orbite aura diffusé. On définit alors un indice de stabilité D :

$$D = \log_{10} \left(\sqrt{(\nu_x^{(2)} - \nu_x^{(1)})^2 + (\nu_y^{(2)} - \nu_y^{(1)})^2} \right) \quad (2.82)$$

La diffusion sera codée par des niveaux de gris ou des couleurs (Annexe B) à la fois sur la carte en fréquence et sur l'ouverture dynamique. Cet indice se révèle être un excellent critère de stabilité à long terme (voir le travail de Dumas et Laskar, 1993).

Ce processus de construction est réitéré pour chaque point de la grille de conditions initiales. Puisque la première contribution au glissement des nombres d'ondes est quadratique, $\nu_x = \nu_{0x} + k_{xx}x^2$ (cf. Eq. 1.76 page 21), le choix le plus judicieux comme pas d'incrémentation des conditions initiales est un pas suivant une loi en racine carrée (*i.e.* à choisir l'action). Ce qui nous permet d'obtenir une détermination plus grossière de l'ouverture dynamique au voisinage du point de fonctionnement mais beaucoup plus fine sur les bords de l'ouverture dynamique, *i.e.* là où précisément les résonances limitent la stabilité du faisceau.

La carte en fréquence et l'ouverture dynamique de l'ALS sont données par la figure 2.17. Le point de fonctionnement $(\nu_x, \nu_y) = (14.25, 8.18)$ est le coin supérieur droit de la carte. Le bord supérieur (respectivement inférieur) de la carte correspond à la variation des nombres d'ondes avec l'amplitude pour $\nu_y(y)$ à $x = 0$ (respectivement $\nu_x(x)$ à $y = 0$).

Trois types de zones peuvent être distinguées sur la carte en fréquence (Fig. 2.17) :

- les **zones régulières** (zones A) où les points de l'espace des fréquences sont régulièrement espacés et caractérisés par une faible diffusion. Le mouvement est typiquement un mouvement bétatron régulier.
- les **résonances** (zones B) qui sont les droites de pente rationnelle, $p\nu_x + q\nu_y + r = 0$. Si une résonance est traversée au voisinage d'une zone elliptique, on observe une droite dans l'espace des fréquences (ce phénomène est renforcé pour une résonance isolée). Si une résonance est traversée au voisinage d'une zone hyperbolique, il y a désertion de points autour de la résonance.
- les **zones chaotiques** (zones C) où toute structure est perdue avec une diffusion élevée et qui peut conduire à un comportement fortement nonlinéaire voire chaotique, par exemple aux grandes amplitudes et sur les bords de l'ouverture dynamique.

2.2. ANALYSE EN FRÉQUENCE

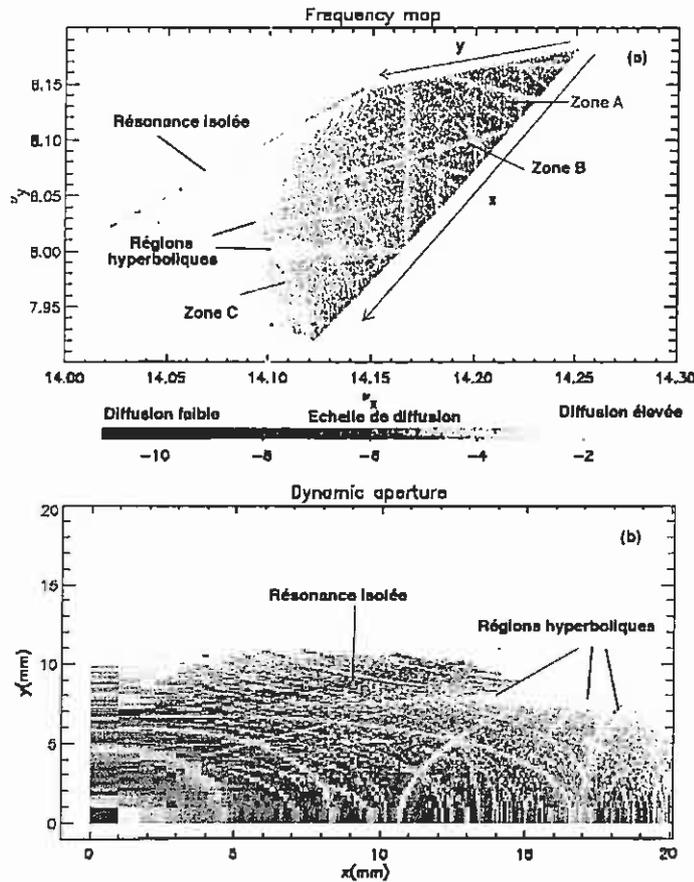


FIG. 2.17: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) calculées pour une maille parfaite de l'ALS pour la surface de section $s = 0$ ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$). Trois types de zones sont observés : zones régulières (A), les résonances (B) et les régions chaotiques (C). Une résonance est révélée différemment suivant qu'elle est traversée au voisinage des régions hyperboliques ou elliptiques. La diffusion des orbites est codée suivant une échelle logarithmique en niveaux de gris. L'échantillonnage dans l'ouverture dynamique suit une loi en racine carrée de la distance à l'origine.

Nous obtenons une bijection entre l'espace des configurations et l'espace des fréquences. Les résonances peuvent être directement localisées sur l'ouverture dynamique. Dans cet espace (Fig. 2.17-b), les régions complètement instables correspondent à celles sans points ; les résonances ne sont pas des droites mais des « courbes » dont l'épaisseur est proportionnelle à la largeur de la résonance.

- Pour une zone hyperbolique, la résonance est identifiée comme une courbe dont la diffusion est localement plus élevée.
- Pour une région elliptique, les îles de la résonance correspondent à grande amplitude non pas à une courbe mais à un ensemble de conditions initiales (voir Fig. 2.17-b). Toutes les particules capturées dans l'île de résonance ont les mêmes fréquences. Localement, il n'y a plus de bijection entre l'espace des fréquences et l'espace des configurations. Ce phénomène est particulièrement marqué pour les résonances isolées [sur la carte en fréquence] dont l'amplitude est très grande.

Chapitre 3

Analyse en Fréquence et Sources de Lumière

Introduction

Les machines de rayonnement synchrotron de troisième génération sont construites sur des optiques à forte focalisation afin d'atteindre de performances toujours plus extrêmes : les petites émittances créées permettent d'obtenir les hautes brillances recherchées. Cependant, de telles contraintes impliquent l'utilisation de champs magnétiques de forte intensité qui eux-mêmes vont exciter de nombreuses résonances et risquent ainsi de détériorer la dynamique globale du faisceau et de conduire à une faible ouverture dynamique et une faible acceptance en énergie. Il en résulte une injection lente et une faible durée de vie. Ces effets indésirables doivent être minimisés tout en conservant une haute brillance. Une des tâches principales du physicien des accélérateurs se résume d'abord à déterminer la meilleure optique possible de la machine, ensuite à définir une modélisation aussi proche que possible de la réalité et enfin, à développer des méthodes susceptibles d'améliorer la stabilité de la dynamique du faisceau.

L'optique des sources de lumière de troisième génération est construite généralement sur une maille dite Chasman-Green ou *double bend achromat*¹ (Super-ACO, SOLEIL, ESRF) ou une maille *triple bend achromat*² (ALS). Les faibles émittances y sont créées en minimisant les fonctions bêta dans les dipôles, ce qui se traduit par l'utilisation de forts champs dans les quadripôles adjacents. Nous avons vu (chap. 1, p. 20 sqq.) que ces derniers créent alors une grande chromaticité naturelle dans les deux plans qui est compensée par l'introduction de lentilles hexapolaires : deux familles, dites chromatiques, suffisent. Cependant très souvent, d'autres familles d'hexapôles sont également introduites dans la maille pour minimiser les largeurs des résonances. La principale difficulté est de déterminer l'emplacement optimum de ces hexapôles autour de l'anneau ainsi que leur force. Seuls des choix judicieux permettent de réduire les nonlinéarités.

La dynamique des particules individuelles est une des causes principales de la limitation des performances des sources de lumière. Si les orbites sont instables aux grandes amplitudes, alors les électrons diffusés à ces grandes amplitudes lors de collisions avec les atomes du gaz

¹ i.e. une maille construite sur une structure à deux aimants de courbure.

² i.e. une maille construite sur une structure à trois aimants de courbure.

résiduel ou avec d'autres électrons (effet Touschek) vont être perdus par le faisceau. Il en sera de même pour les particules injectées à grande amplitude (optimisation de l'injection).

À la connaissance de l'auteur, seule l'ouverture dynamique des particules d'énergie nominale est optimisée³ pour réduire l'influence des phénomènes non linéaires ; ces derniers peuvent conduire à la divergence rapide des trajectoires des particules et à une chute drastique des performances globales de la machine. Les ouvertures dynamiques des particules *off momentum* ne sont que rarement optimisées pour les sources de lumière. Ce point peut conduire à des situations paradoxales : par exemple, une très grande ouverture dynamique à $\delta = 0$ et des ouvertures dynamiques à $\delta \neq 0$ presque nulles conduisent une durée de vie du faisceau très faible (cf. dynamique longitudinale, limitation par l'acceptance en énergie).

Cependant à l'heure actuelle, il n'existe pas de méthode analytique systématique pour arriver à ces fins (même pour l'optimisation *on momentum*, *i.e.* pour $\delta = 0$), la difficulté provenant de la détermination des amplitudes des résonances. Généralement, le schéma retenu consiste à utiliser des familles d'hexapôles pour minimiser l'influence des résonances d'ordre trois, considérées comme les plus néfastes pour la dynamique. Il est souvent admis, mais à tort, que seules les résonances d'ordre faible sont à corriger (voir le rapport du CERN de Guignard, 1978 où l'auteur reformule une théorie des perturbations du premier ordre). Pourtant les hexapôles excitent les résonances de tout ordre (comme nous l'avons observé pour l'application d'Hénon, p. 56 sqq.). La méthode utilisée pour Super-ACO ou SOLEIL repose sur le travail réalisé par Audy (1989) : les coefficients analytiques des amplitudes des résonances d'ordre 3 sont calculés puis minimisés par ajustement (c'est une méthode de perturbation du premier ordre).

Deux questions viennent tout de suite à l'esprit : (1) est-il possible de prédire quelles résonances sont susceptibles d'être excitées sur la machine réelle ? (2) est-il possible d'établir une méthode pour identifier facilement les résonances et d'estimer leurs amplitudes ?

Un début de réponse peut être apporté par l'utilisation de la théorie des perturbations en calculant des formes normales. Elles ont été introduites en Physique des Accélérateurs principalement par Dragt et Forest (Université de Maryland) et sont très utilisées au CERN. Bien que donnant de bons résultats (voir par exemple Todesco, Gemmi et Giovannozzi, 1997 et une application au LHC par Papaphilippou et Schmidt, 1998), cette méthode est assez lourde à mettre en œuvre. Des corrections locales sont possibles mais cette méthode dépend fortement de la modélisation et ne permet pas d'effectuer simplement des comparaisons directes entre le modèle et la machine en fonctionnement.

L'Analyse en Fréquence est au contraire une méthode numérique qui permet de manière assez intuitive et pratique d'identifier des résonances et d'estimer leur amplitude. Nous allons l'appliquer à quatre sources de lumière : le Projet SOLEIL, l'ESRF, Super-ACO et l'ALS. Pour chacune de ces machines, nous calculerons des cartes en fréquence ainsi que les ouvertures dynamiques associées. Les résultats seront présentés soit pour une modélisation purement théorique, soit pour une machine en fonctionnement (cf. résultats expérimentaux, chapitres sur l'ALS et Super-ACO). Nous montrerons la grande sensibilité de la dynamique aux réglages magnétiques.

³Par contre, pour les machines à protons, la dynamique *off momentum* est pleinement considérée (voir par exemple, le travail de Papaphilippou, 2000).

Par soucis de clarification, je tiens à dire que ces deux approches sont complémentaires. La théorie des perturbations a été introduite à une époque où les gros ordinateurs n'existaient pas. Elle a permis et permet encore d'obtenir des formules analytiques relativement simples utilisées pour améliorer le réglage d'un accélérateur et comprendre sa dynamique (*e.g.* glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude, déformation de l'espace des phases, largeur des résonances). Cette méthode ne fonctionne plus si le système est trop perturbé. Elle est moins précise que les intégrateurs numériques pour déterminer les équations du mouvement. La seconde approche repose sur les outils numériques. Elle permet une détermination précise de la trajectoire d'une particule (intégrateurs, codes de *tracking*) aussi bien pour un régime faiblement que fortement perturbé. Son inconvénient majeur est d'être une « boîte noire » qui fournit peu d'informations pour une compréhension théorique du mouvement nonlinéaire (approche qualitative).

Pour l'ensemble des résultats qui vont être présentés, nous ne prenons en compte que la dynamique transverse en négligeant le mouvement longitudinal. Ce choix est justifié dans la mesure où le nombre d'ondes longitudinal ν_s est très faible devant les nombres d'ondes transverses : par exemple pour SOLEIL, la fréquence longitudinale est $\nu_s = 0.006$ et les nombres d'ondes sont $\nu_x = 18.28$ et $\nu_y = 8.38$.

La majorité des cartes en noir et blanc du corps du mémoire sont reproduites en couleur en annexe B.

3.1 Le Projet SOLEIL

SOLEIL [110], acronyme pour Source Optimisée de Lumière d'Énergie Intermédiaire de LURE, est une source de rayonnement de hautes performances. Après de nombreux et longs attermolements, sa construction devrait débuter sur le plateau de Saclay à partir de l'automne 2001 pour des premiers photons fin 2005. La machine vise à remplacer les installations vieillissantes du LURE et à doter la communauté française d'une installation de troisième génération optimisée dans une gamme spectrale complémentaire de l'ESRF, la source européenne de rayonnement synchrotron localisée à Grenoble.

3.1.1 Optique

La maille standard de SOLEIL est construite sur une structure dite Chasman-Green modifiée⁴ (APD SOLEIL, 1999) avec dispersion répartie⁵. Les principales caractéristiques et les fonctions optiques de la machine sont données par le tableau 3.1 et la figure 3.1. Pour cette étude, la maille de SOLEIL est sans défaut avec sa 4-périodicité. Les chromaticités naturelles sont parfaitement compensées. Les calculs ont été faits pour des particules ayant l'énergie nominale de la machine.

Énergie (GeV)	2.5
Circonférence (m)	337
Point de fonctionnement	18.28, 8.38
Chromaticités réd. nat.	-3.01, -2.66
Dispersion en énergie	9.24×10^{-4}
Emittance horiz. (nm.rad)	3
Ouverture physique (mm)	$\pm 35, \pm 6.5$
Familles hexapolaires	8
Périodicité	4

TAB. 3.1: Principaux paramètres de SOLEIL (APD, 1999).

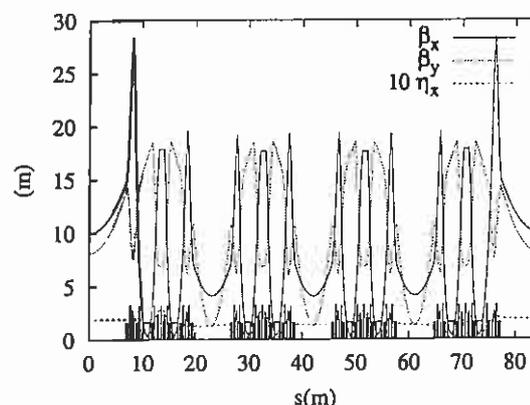


FIG. 3.1: Fonctions optiques pour une maille de SOLEIL.

3.1.2 Dynamique

En appliquant le schéma de construction précédemment énoncé (p. 60), les cartes en fréquence et les ouvertures dynamiques ont été calculées pour les deux optiques retenues pour SOLEIL. L'ensemble des calculs a été réalisé avec le code de *tracking* DESPOT [42] en intégrant la trajectoire d'une particule « test » sur 2×1000 tours. Ce choix est justifié par un temps d'amortissement transverse de 8.73 ms, *i.e.* 7 771 tours et un temps d'amortissement

⁴En anglais *Double Bend Achromat*.

⁵*i.e.* avec une fonction dispersion non nulle tout autour de la machine (cf. Fig. 3.1). Ceci permet de réduire l'émission minimale théorique d'un facteur trois (APD SOLEIL, 1999).

longitudinal de 4.35 ms soit 3 872 tours. Des intégrations à très long terme ont été également entreprises afin de vérifier la validité de ces hypothèses. Les deux optiques faible émittance retenues et optimisées par l'équipe faisceau de SOLEIL sont appelées optique faible émittance 1 et 2 (APD SOLEIL, chap. IV Sources).

3.1.2.1 Optique faible émittance numéro 1

Pour la première optique, le point de fonctionnement est $(\nu_x, \nu_y) = (18.28, 8.38)$; Les glissements des nombres d'ondes avec l'amplitude sont donnés par la figure 3.2-a. Cette optique a été optimisée pour contraindre la variation du nombre d'ondes horizontal ν_x entre les résonances $7\nu_x - 4 \times 32 = 0$ et $9\nu_x - 4 \times 41 = 0$.

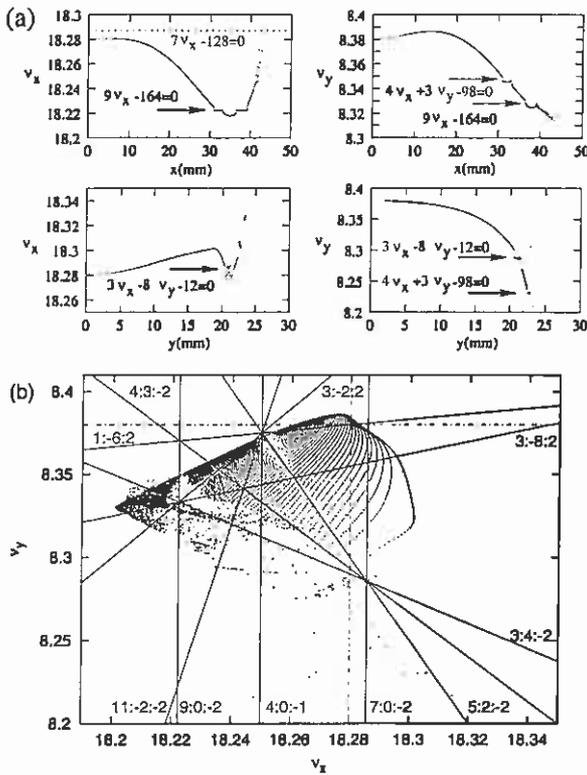


FIG. 3.2: (a) : Glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude. Dans chaque cas, une des positions x ou y est fixée à $1 \mu m$ (quasi-absence de couplage entre les deux plans). Cette optique a initialement été conçue pour contraindre les courbes en fréquence entre les résonances d'ordre 7 et 9. (b) : Carte en fréquence de l'optique numéro 1 de SOLEIL avec identification des principales résonances. La dynamique est perturbée par la résonance 5 :2 :-2 et à grande amplitude par la résonance entière d'ordre 9 (région chaotique). Le point de fonctionnement est à l'intersection des deux droites en pointillés.

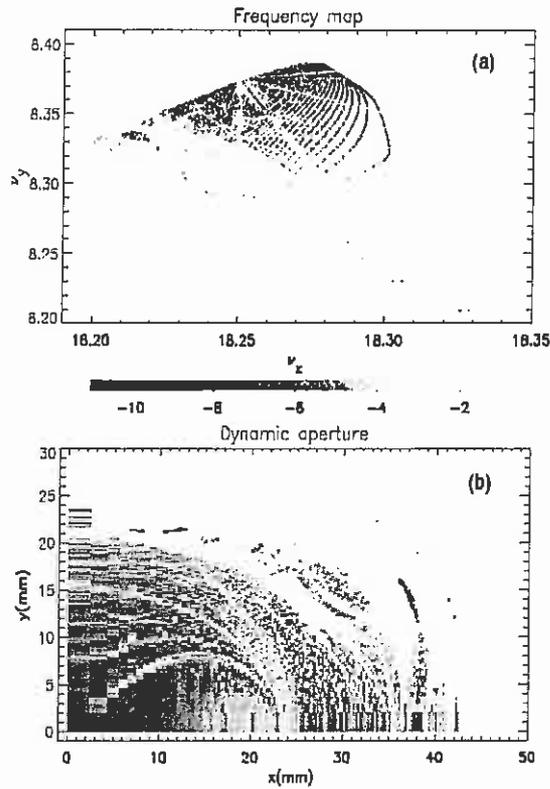


FIG. 3.3: (a) Carte en fréquence et (b) ouverture dynamique de l'optique faible émittance numéro 1 de SOLEIL calculées pour une surface de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 10$ m et $\beta_y = 8$ m). L'ouverture dynamique est grande. Elle est marquée par les résonances; en particulier, la protubérance observée vers $x = 38$ mm correspond à la résonance d'ordre 9. La diffusion est codée en niveaux de gris. Elle est plus importante au voisinage des résonances et sur le bord de l'ouverture dynamique (grande amplitude).

A la lecture de la figure 3.3-b, l'ouverture dynamique semble très grande : $[0, 40]_{y=0} \times [0, 24]_{x=0}$ mm cependant ces dimensions doivent être légèrement réduites à 35 mm selon x (présence d'une île due à la résonance d'ordre 9) et 20 mm selon y .

Le point de fonctionnement est représenté par une croix (en pointillés sur la carte 3.2-b). Il est presque confondu avec le coin en haut à droite de la carte en fréquence. Le bord supérieur (resp. inférieur) de la carte correspond au glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude horizontale (resp. verticale) pour la seconde amplitude fixée à $1 \mu\text{m}$ (faible couplage). Pour déchiffrer la carte 3.3-a (voir aussi la carte en couleur B.1), il est utile de distinguer trois types de zones :

zones régulières où les points de l'espace des fréquence sont régulièrement espacés avec une faible diffusion⁶ ($D < -6$). Le mouvement est typiquement un mouvement bêatron régulier comme au voisinage du point de fonctionnement $(\nu_x, \nu_y) = (18.28, 8.38)$ — aux faibles amplitudes bêatrons, le mouvement est évidemment linéaire —.

résonances qui sont les droites de pente rationnelle, $p\nu_x + q\nu_y + r = 0$. Selon que la résonance est traversée au voisinage d'une zone elliptique ou hyperbolique, on observe soit une accumulation de points soit une désertion (cf. Analyse en Fréquence et pendule p. 55). De manière générale, la diffusion est plus élevée. La particule aura tendance à osciller transversalement à la résonance. Si la région est bornée de zones régulières, le mouvement est confiné (cf. discussion sur la diffusion p. 54, le schéma 2.11 et *infra*).

zones chaotiques où toute structure est perdue avec une diffusion élevée ($D > -4$) et qui peut conduire à un comportement fortement non linéaire et même chaotique, par exemple aux grandes amplitudes et sur les bords de l'ouverture dynamique.

Pour l'optique ici considérée, la carte en fréquence révèle une dynamique relativement stable, néanmoins plusieurs résonances sont mises en évidence.

La résonance d'ordre 7, $5\nu_x + 2\nu_y - 4 \times 27 = 0$, est atteinte pour $x = 24$ mm (voir la carte 3.2-b où l'ordre des résonances est le triplet $p : q : r$ défini p. 22). On remarquera également un nœud de résonances juste au-dessus entre cette même résonance et les résonances $4\nu_x - 73 = 0$, $3\nu_x - 2\nu_y - 38 = 0$, $\nu_x - 6\nu_y + 4 \times 8 = 0$ et $11\nu_x - 2\nu_y - 4 \times 46 = 0$. Nous pouvons supposer que si ce nœud de résonances ou la résonance d'ordre 7 sont excités, par exemple par les inévitables défauts magnétiques, alors la symétrie 4 de l'anneau sera brisée et toutes les orbites au-delà seront instables. Dans ce cas, l'ouverture dynamique horizontale ne serait plus que de 24 mm selon x . Cet effet est observé lorsque que l'on simule le déplacement (sciemment exagéré) d'un hexapôle dans l'anneau (cf. carte en fréquence 3.4 à comparer avec Fig. 3.2-b).

Plus inquiétant pour la stabilité du faisceau est le nœud entre les résonances d'ordre 7, $3\nu_x + 4\nu_y - 4 \times 22 = 0$, d'ordre 9, $9\nu_x - 4 \times 41 = 0$, d'ordre 11, $3\nu_x - 8\nu_y + 4 \times 3 = 0$ et d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y - 38 = 0$ (cf. carte 3.2-b).

Il est important de noter que la dynamique est fortement contrainte non seulement par les résonances d'ordre faible, mais aussi par d'ordres plus élevés 9, 11, 13, et ceci, même pour une machine idéale⁷. Leur influence est importante à grande amplitude et au voisinage des nœuds de résonances — recouvrement des largeurs de résonances, critère de Chirikov —. Voir pour cela (Laskar, 1993).

⁶cf. le coefficient de diffusion D , défini p. 61, correspond à la variation des nombres d'ondes avec le temps.

⁷Toutes ces résonances sont excitées par les éléments non linéaires de la machine, i.e. ici par les hexapôles.

Le calcul exhaustif de l'ouverture dynamique ainsi que l'utilisation de la diffusion permet d'établir une bijection entre l'ouverture dynamique et la carte en fréquence (sauf dans les régions elliptiques). La localisation des résonances est plus aisée dans les deux espaces, en particulier celles qui limitent l'ouverture dynamique. Par exemple, la région dans l'ouverture dynamique vers $x \approx 38$ mm (protubérance de la figure 3.3-b) correspond aux îles de la résonance d'ordre 9, $9\nu_x - 4 \times 41 = 0$. Les résonances apparaissent nettement dans l'ouverture dynamique : ce sont les courbes où la diffusion est plus importante (cf. Fig. 3.3-b).

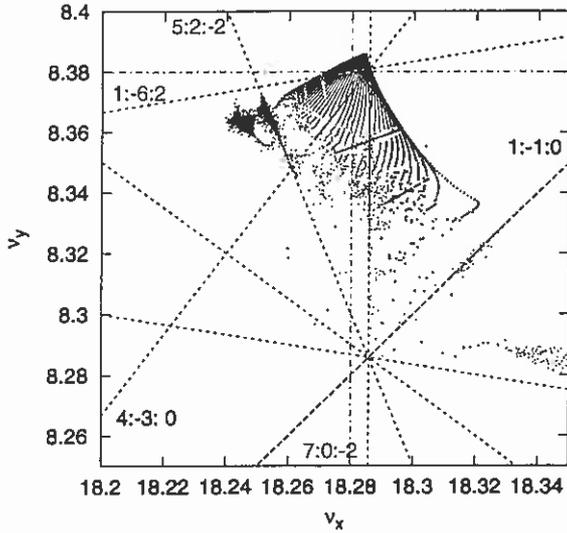


FIG. 3.4: Influence du déplacement d'un hexapôle sur la carte en fréquence de l'optique numéro 1 de SOLEIL : la résonance d'ordre 7, $5 : 2 : -2$ est fortement excitée. Toutes les orbites ayant des nombres d'ondes au-delà sont maintenant instables. L'extension de la carte en fréquence est réduite de plus d'un facteur deux selon ν_y .

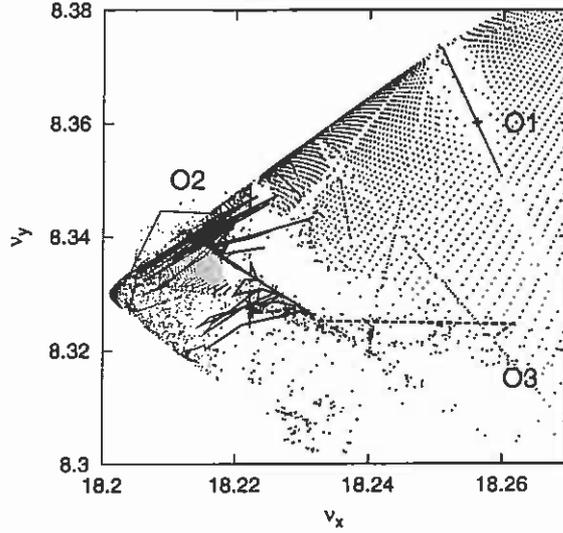


FIG. 3.5: Diffusion à long terme (grossissement de la carte 3.2-b de SOLEIL). (O1) Orbite régulière. (O2) Diffusion transverse rapide et longitudinale lente par rapport à la résonance $3 : 4 : -2$. (O3) Diffusion rapide dans une région chaotique : la particule est perdue après 5 380 tours de machine.

Enfin, remarquons que la carte en fréquence admet une torsion non définie au voisinage du point de fonctionnement ainsi qu'aux grandes amplitudes. La carte en fréquence 3.2-b se replie sur elle-même (le lecteur peut également s'aider de la figure 3.2-a). Il n'y a alors plus de bijection globale entre la carte en fréquence et l'ouverture dynamique. La torsion non définie a des implications sur la stabilité du faisceau, car elle permet en particulier des directions où la diffusion peut être très rapide (Laskar, 1999).

Pour illustrer différents processus de diffusion, la figure 3.5 (partie inférieure gauche de la carte 3.2-b) représente trois orbites intégrées à long terme, sur 100 000 tours (l'amortissement n'est pas pris en compte, seule la diffusion au voisinage d'une résonance est étudiée).

- une orbite (O1) de conditions initiales $(x_0, y_0) = (17, 13)$ mm et de nombres d'ondes initiaux $(\nu_x, \nu_y) = (18.256, 8.360)$. La particule est stable et reste sur la résonance d'ordre 7, $5\nu_x + 2\nu_y - 4 \times 27 = 0$.

- une orbite (O2) de conditions initiales $(x_0, y_0) = (25, 14)$ mm et de nombres d'ondes initiaux $(\nu_x, \nu_y) = (18.216, 8.341)$, *i.e.* au voisinage de la résonance $3\nu_x + 4\nu_y - 4 \times 22 = 0$. L'orbite diffuse rapidement transversalement à la ligne de résonance et lentement longitudinalement (diffusion souvent appelée *diffusion d'Arnold*). La particule est perdue au bout de 75 000 tours de machine.
- une orbite (O3) de conditions initiales $(x_0, y_0) = (17.2, 18.5)$ mm et de nombres d'ondes initiaux $(\nu_x, \nu_y) = (18.256, 8.360)$, *i.e.* au voisinage dans une région de forte diffusion. La particule diffuse dans l'espace des fréquences rapidement, puis reste capturée 2 000 tours par la résonance $3\nu_x + 4\nu_y - 4 \times 22 = 0$ et est perdue au bout de 5 380 tours.

3.1.2.2 Optique faible émittance numéro 1 modifiée

Les résultats précédents m'ont amené à proposer avec P. Nghiem une optique modifiée (Nadolski, 1998 et chap. IV de l'APD SOLEIL) : comme la résonance d'ordre 9 et le nœud associé semblent être néfastes pour la dynamique, tout en gardant le même point de fonctionnement, nous avons contraint la courbe en fréquence de sorte qu'elle n'atteigne pas cette résonance. Pour cela, nous avons modifié la pente à l'origine de la courbe en fréquence modifiée de la valeur $(\frac{d\nu_x}{dx^2})_{x=0} = 300$ à 700 en utilisant les hexapôles (cf. Fig. 3.7).

Comme attendu, le but est atteint tout en conservant pratiquement la même ouverture dynamique (cf. Fig. 3.9 et carte en couleur B.2). Les principales résonances identifiées pour ce réglage sont données par le tableau 3.2 et localisées sur la figure 3.6.

$p\nu_x + q\nu_y + r' \times 4 = 0$	Ordre
$7\nu_x - 32 \times 4 = 0$	7 : 0 :-2
$\nu_x - 6\nu_y + 8 \times 4 = 0$	1 :-6 :2
$3\nu_x - 8\nu_y + 3 \times 4 = 0$	3 : 8 :2
$\nu_x + 2\nu_y - 35 = 0$	1 : 2 :-1
$\nu_x - \nu_y - 10 = 0$	1 :-1 :0
$\nu_x - 7\nu_y + 10 \times 4 = 0$	1 :-7 :2
$\nu_x + 5\nu_y - 15 \times 4 = 0$	1 : 5 :-2
$6\nu_x + \nu_y - 118 = 0$	6 : 1 :-2
$5\nu_x - 10\nu_y - 8 = 0$	5 :-10 :2

TAB. 3.2: Résonances identifiées sur la carte en fréquence de l'optique faible émittance numéro 1 modifiée de SOLEIL. L'ordre correspond au triplet $p : q : r$ défini à partir de la partie fractionnaire des nombres d'ondes (cf. page 22).

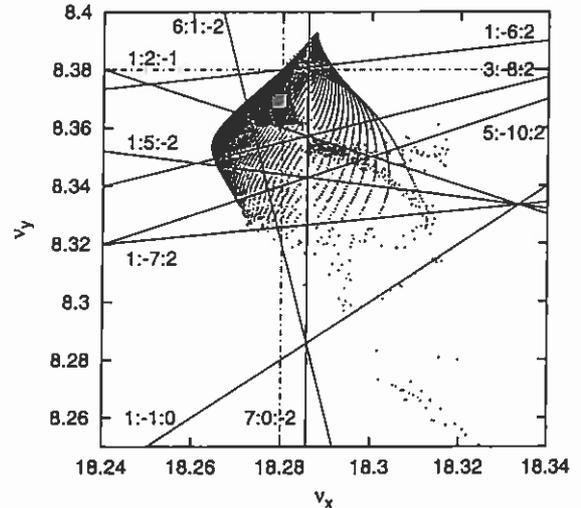


FIG. 3.6: Optique 1 modifiée de SOLEIL ($\beta_x = 10$ m et $\beta_y = 8$ m) : Carte en fréquence avec les principales résonances (surface de Poincaré en $s = 0$). La carte en fréquence est repliée sur elle-même, *e.g.* au voisinage du point de fonctionnement qui est à l'intersection des deux droites en pointillés.

Dans ce cas, l'extension de la carte en fréquence est réduite, moins de résonances perturbent la dynamique mais en contrepartie, la carte en fréquence est plus repliée sur elle-

même (cf. au voisinage du point de fonctionnement et sur la partie gauche de la carte en fréquence 3.6).

Il doit être remarqué que l'allure d'une carte en fréquence est très sensible à une faible modification des forces hexapolaires. La dynamique associée est alors complètement différente alors que les tailles des ouvertures dynamiques ont peu changé (comparer les cartes 3.3-a et 3.9-a).

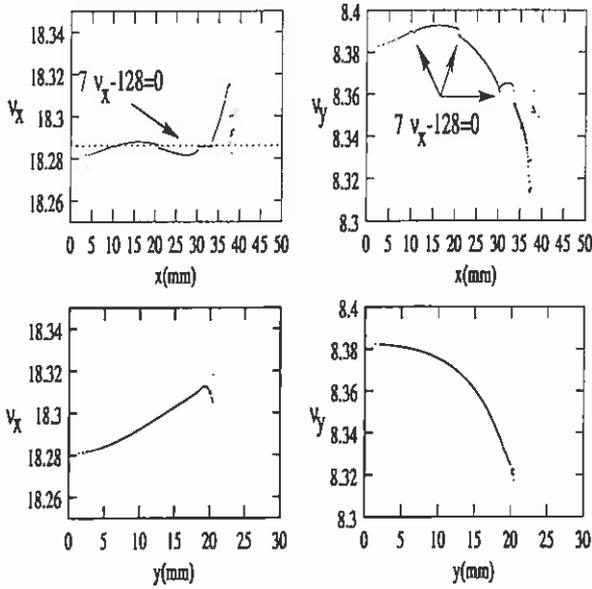


FIG. 3.7: Variation des nombres d'ondes avec l'amplitude à faible couplage ($1\mu m$) pour l'optique 1 modifiée de SOLEIL. La résonance d'ordre 7 est traversée à faible et grande amplitude. Par contre la résonance d'ordre 9 n'est plus atteinte (comparer avec les courbes 3.2-a).

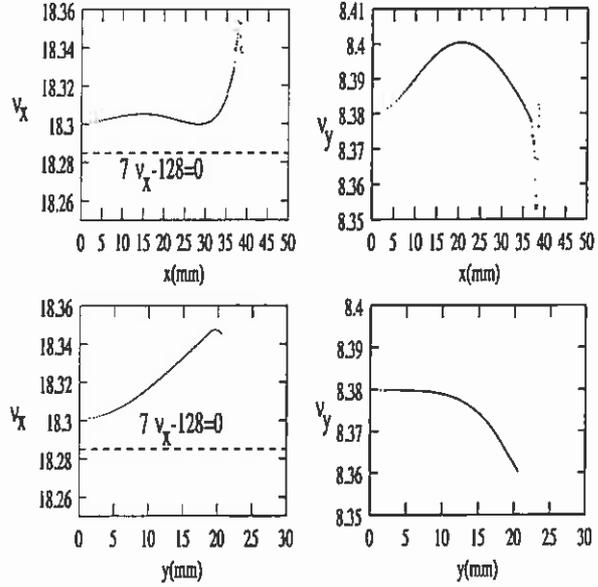


FIG. 3.8: Variation des nombres d'ondes avec l'amplitude à faible couplage ($1\mu m$) pour l'optique 2 de SOLEIL. Les hexapôles ont été réglés de manière à ne plus traverser les résonances d'ordre 7 et 9 qui marquaient la dynamique (comparer avec les courbes 3.2-a).

3.1.2.3 Optique faible émittance numéro 2

Pour l'optique faible émittance numéro 2, le point de fonctionnement est déplacé à $(\nu_x, \nu_y) = (18.30, 8.38)$ de manière à ne jamais traverser la résonance d'ordre 7, $7\nu_x - 4 \times 32 = 0$ (cf. courbes en fréquence 3.8).

La carte en fréquence et l'ouverture dynamique sont données par la figure 3.10 : bien que l'ouverture dynamique soit légèrement plus petite, elle reste néanmoins plus grande que l'ouverture physique (cf. Tab. 3.2) et surtout la diffusion est bien plus faible que pour la première optique (comparer avec les cartes 3.3 et 3.10).

La carte est deux fois repliée sur elle-même pour cette optique : elle a une faible extension dans l'espace des fréquences et le nombre de résonances rencontrées est bien plus faible. L'influence du repliement de la carte en fréquence sur la dynamique n'a pas fait l'objet d'une étude approfondie pour le présent travail (pour une discussion, voir Laskar, 1999).

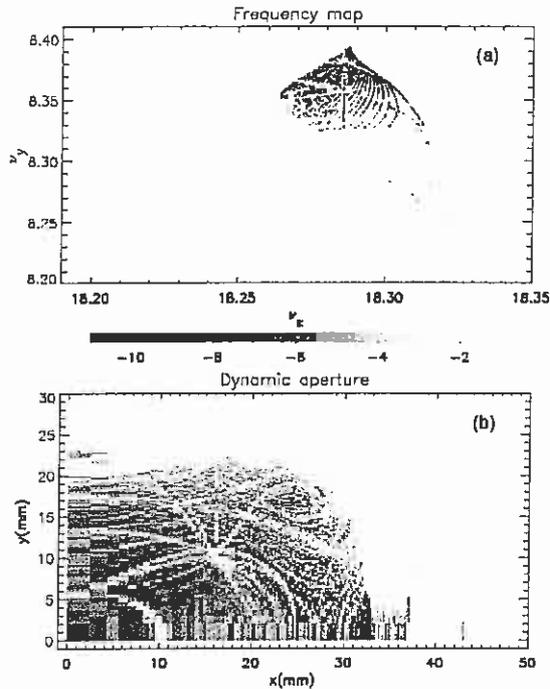


FIG. 3.9: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) pour une surface de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 10$ m et $\beta_y = 8$ m) pour l'optique 1 modifiée de SOLEIL. L'ouverture dynamique est presque aussi grande que pour la première optique ; la carte en fréquence est repliée sur elle-même : sa lecture en est rendue plus difficile. Son extension spatiale est réduite, moins de résonances sont rencontrées. La diffusion des orbites est globalement plus faible.

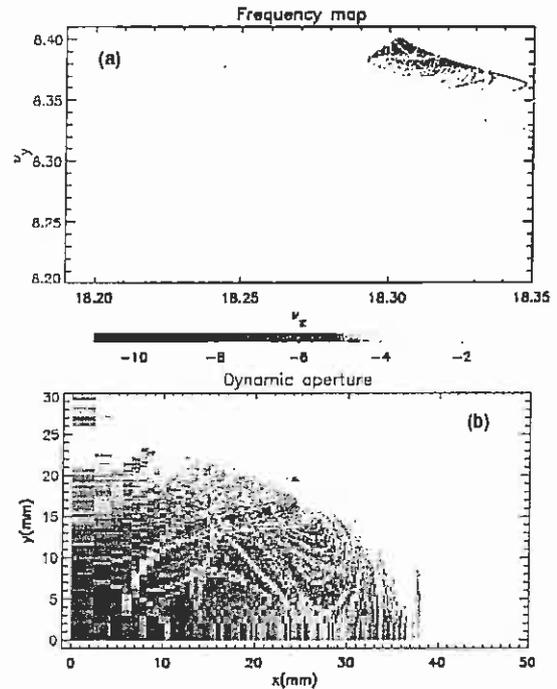


FIG. 3.10: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) pour une surface de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 10$ m et $\beta_y = 8$ m) l'optique 2 de SOLEIL. Les glissements des nombres d'onde sont faibles, ce qui se traduit par une faible extension de la carte en fréquence, une faible diffusion et une grande ouverture dynamique. La carte en fréquence est repliée sur elle-même par deux fois.

3.1.2.4 Conclusion sur les optiques de SOLEIL

Parmi les deux optiques principales retenues pour SOLEIL, l'optique faible émittance numéro 2 est la plus prometteuse en termes de stabilité du faisceau, taille de l'ouverture dynamique (grande vis-à-vis de l'ouverture physique) avec un très faible nombre de résonances excitées. En particulier, à ouverture dynamique égale, l'optique numéro 2 décrit une dynamique avec une plus faible diffusion que l'optique numéro 1. Nous avons vu néanmoins qu'il est possible d'améliorer l'optique faible émittance 1 sans diminution particulière des autres paramètres caractéristiques (cf. optique 1 modifiée).

En effet le groupe faisceau de SOLEIL a choisi de réaliser une machine relativement souple en termes de réglages et ajustements magnétiques. Six des huit familles d'hexapôles peuvent être utilisées pour modifier l'optimisation sans avoir besoin de déplacer le point de fonctionnement ; des ajustements fins et la réduction de l'influence des résonances peuvent être

ainsi facilement envisagés⁸. Nous devons cependant constater la très grande sensibilité de la dynamique aux forces hexapolaires : l'allure (repliement, extension spatiale) des cartes en fréquence des trois optiques présentées est complètement différente alors que les forces hexapolaires ont été faiblement modifiées.

Ces études devraient être complétées par le calcul de cartes en fréquence et d'ouvertures dynamiques *off momentum* pour évaluer l'impact des optiques sur l'efficacité d'injection et la durée de vie du faisceau. L'introduction de défauts magnétiques réalistes devrait permettre d'obtenir une estimation raisonnable des performances réelles de la machine en fonctionnement.

⁸Nous verrons plus tard que cette souplesse n'existe pas pour l'Advanced Light Source (ALS).

3.2 Super-ACO

3.2.1 Introduction

Super-ACO [75] est la première machine en France dédiée dès sa construction au rayonnement synchrotron. Mise en fonctionnement en 1987 afin de remplacer l'Anneau de Collision d'Orsay (ACO), Super-ACO est la première source de lumière ayant toutes ses sections droites libres équipées de dispositifs d'insertion⁹ ; à ce titre, c'est une machine intermédiaire entre la deuxième et la troisième génération (son émittance verticale est trop grande pour être classée dans la dernière catégorie). Les particules stockées sont des positrons.

3.2.2 Description d'une maille

Super-ACO est une machine d'énergie intermédiaire, $E = 800 \text{ MeV}$, constituée de quatre super-périodes (cf. synoptique de la machine 3.11). La maille standard, *i.e.* une super-période, suit une structure Chasman-Green avec un plan de symétrie (cf. schéma 3.12). Les principales caractéristiques de l'anneau de stockage sont rassemblées dans le tableau 3.3.

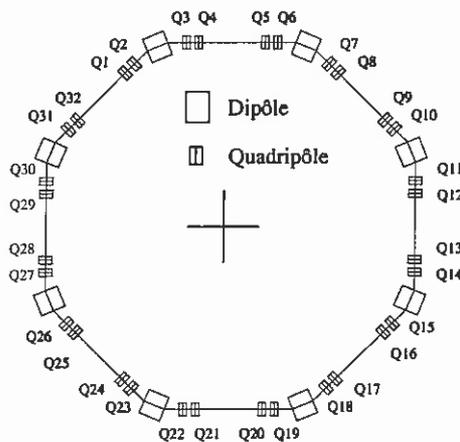


FIG. 3.11: Synoptique de Super-ACO. L'anneau possède une symétrie 4. Ses 32 quadripôles sont répartis en 4 familles. Chacun des 8 dipôles courbe la trajectoire d'une particule d'un angle moyen de 45° .

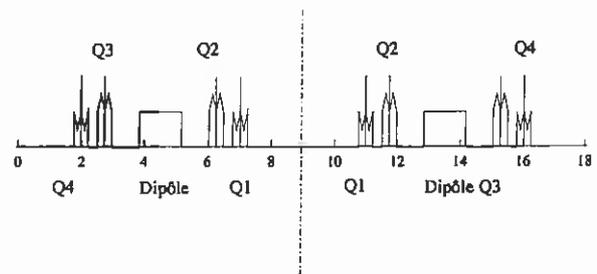


FIG. 3.12: Une des 4 mailles de Super-ACO à symétrie centrale. La structure suit un schéma de Chasman-Green (deux dipôles). Les familles de quadripôles Q1 et Q2 servent à ajuster les nombres d'ondes, la fonction dispersion est réglée avec les deux autres familles.

De par leurs particularités, il est intéressant de donner une brève description des différents éléments magnétiques de Super-ACO :

- Les dipôles sont modélisés avec de forts champs de fuite¹⁰ qui induisent un glissement du nombre d'ondes vertical non négligeable de $\Delta\nu_y = -0.094$. La valeur de l'angle des

⁹Les dispositifs d'insertions sont des structures magnétiques périodiques installées dans les sections droites d'un anneau : ils permettent de renforcer le flux de photons émis dans une gamme d'énergie donnée. Ces éléments peuvent être classés dans deux catégories : les *onduleurs* et les *wigglers*.

¹⁰L'approximation *hard-edge* doit être complétée, car le rayon de courbure de Super-ACO est faible. L'effet des champs de fuite est à prendre en compte pour des aimants de faible longueur et pour de grandes émittances (voir Papaphilippou, Wei et Talman, 2001).

3.2. SUPER-ACO

coins des dipôles est ajustée sur les mesures expérimentales (Level et Nghiem, 1986). Pour obtenir la même avance de phase, l'angle n'est pas $\frac{\theta}{2} = 22.5^\circ$ mais $\frac{\theta^{mes}}{2} = 21.8^\circ$ (cf. le schéma d'un aimant à faces parallèles 2.2 p. 43).

Circonférence (m)	72.04
Energie (MeV)	800
Rayon de courbure des dipôles (m)	1.7
Fréquence de révolution (MHz)	4.162
Périodicité	4
Nombre de familles d'hexapôles	4

TAB. 3.3: Caractéristiques machine de Super-ACO.

- Un quadripôle combiné comprend (cf. schéma 3.13) une bobine principale pouvant créer un gradient maximum de $8 T.m^{-1}$, une bobine hexapolaire de champ maximum $11 T.m^{-2}$, une bobine dipolaire, pour compenser la composante dipolaire créée par la bobine hexapolaire et deux bobines de correction (pour correction dipolaire horizontale, dipolaire verticale ou quadripolaire). L'hexapôle (H) possède un terme décapolaire important simulé par une lentille décapolaire (LD). Le quadripôle est ainsi modélisé par un champ quadripolaire, une composante hexapolaire et une lentille décapolaire (cf. schéma équivalent 3.14).

Le point de fonctionnement est ajusté à l'aide des familles quadripolaires $Q1$ et $Q2$, la fonction dispersion à l'aide des familles $Q3$ et $Q4$.

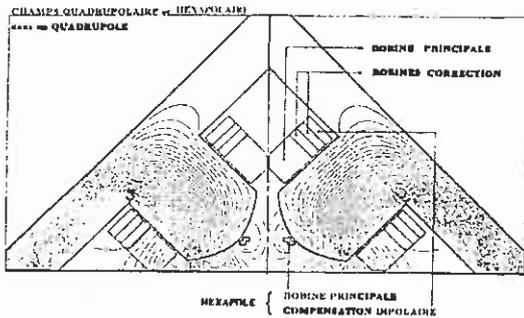


FIG. 3.13: Schéma d'une coupe d'un demi-quadripôle de Super-ACO. L'hexapôle est créé par un mauvais dipôle. Deux bobines de corrections peuvent être utilisées pour la correction dipolaire ou quadripolaire (extrait de Barthès *et al.*, 1990).

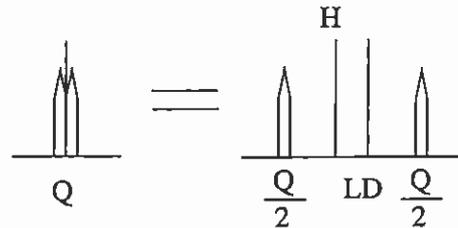


FIG. 3.14: Schéma équivalent d'un quadripôle combiné de Super-ACO. L'hexapôle (H) et le décapôle (LD) sont modélisés par des lentilles minces.

- Les familles hexapolaires $H3$ et $H4$ situées dans l'*achromat*¹¹ sont utilisées pour ajuster les chromaticités; les familles $H1$ et $H2$ sont réglées pour minimiser l'amplitude des résonances d'ordre trois induites par les hexapôles (Audy, 1989).

¹¹L'achromat correspond à la région de l'anneau où la fonction dispersion est non nulle.

- Les forces intégrées décapolaires (LD) et hexapolaires (H) sont reliées par la relation $LD = -27H$ (Brunelle *et al.*, 1999 et communication personnelle de Pascale Brunelle).

L'ouverture physique horizontale est limitée par le *septum*¹² situé à -20 mm vers l'intérieur de l'anneau et vers l'extérieur par la chambre à vide à $+60$ mm. Verticalement, la limite est donnée par les dimensions de la chambre à vide dans les onduleurs, soit ± 15 mm.

3.2.3 Choix du logiciel de *tracking*

Pour effectuer cette étude, plusieurs logiciels pouvaient être utilisés¹³ :

- MAD8 : logiciel développé au CERN [50]
- BETA : logiciel développé au CEA [93]
- DESPOT : code de calcul développé au Lawrence Berkeley National Laboratory [42]

Le programme DESPOT a dû être abandonné dès le début pour cette étude, car il ne modélise pas les champs de fuite d'un dipôle : tout le code est écrit dans l'approximation des grandes machines.

Le programme BETA a l'inconvénient d'être lourdement interfacé et interactif, rendant son utilisation difficile pour des calculs longs tels ceux d'une carte en fréquence. Cependant étant utilisé au LURE, dans un premier temps, il n'a pas été écarté.

3.2.3.1 Symplecticité et champ de fuite avec le code BETA

L'ensemble de la discussion va porter sur une description de Super-ACO sans défaut, *i.e.* pour une machine idéale.

Lorsque les champs de fuite sont inclus dans le modèle de la dynamique, les calculs effectués avec le code BETA à l'ordre 2 ne sont plus symplectiques. En fait, leur inclusion dans le développement de Taylor d'ordre 2 « tue » la symplecticité de l'intégrateur (cf. Fig. 3.15). Si l'on appelle \mathcal{M} l'application de transfert et M sa matrice jacobienne, alors par définition la transformation est symplectique si et seulement si (Goldstein, 1980) :

$${}^t\text{MSM} = S \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} O_3 & I_3 \\ -I_3 & O_3 \end{pmatrix}$$

avec I_3 et O_3 respectivement les matrices identité et nulle de rang 3. Ces conditions de symplecticité se traduisent par 15 relations pour un système à 3 degrés de liberté. Dans le logiciel BETA, la matrice de transfert prend en compte les termes du second ordre. Ainsi programmé, le nombre de relations de symplecticité est plus élevé (quelques conditions devant être théoriquement nulles, si le schéma d'intégration est symplectique, sont données par le tableau 3.4). Il ne faut donc pas utiliser BETA au second ordre pour Super-ACO mais utiliser l'ordre dit *scaling*¹⁴ qui prend correctement en compte les champs de fuite.

¹²Le septum est un dispositif magnétique de déflexion permettant l'injection ou l'extraction du faisceau.

¹³Lorsque cette étude a été entreprise, je n'avais pas encore écrit d'intégrateur.

¹⁴Premier ordre avec prise en compte des lentilles multipolaires (hexapôles, $2n$ -pôles) et des champs de fuite. Mélange entre premier et deuxième ordre du développement de Taylor autour de l'orbite fermée, l'ordre *scaling* a été conçu pour optimiser le temps de calcul lors de la conception d'un accélérateur.

Avec champs de fuite		Conditions de symplecticité		
1.07E-09	-9.41E-09	3.72E-08	3.27E-04	6.04E-03
6.04E-03	-1.24E-02	1.77E-02	-2.80E-01	4.79E-04
1.77E-02	-3.55E-14	-1.07E-13	1.56E-13	
Sans champ de fuite		Conditions de symplecticité		
1.07E-09	-9.41E-09	3.72E-08	4.44E-16	-5.84E-14
-1.46E-13	-1.42E-12	-2.61E-13	1.58E-11	-5.33E-15
6.39E-14	-8.70E-14	-3.23E-13	1.58E-13	

TAB. 3.4: Variations des conditions de symplecticité avec et sans champ de fuite dans les dipôles de Super-ACO (calculs avec le code BETA). Normalement, toutes ces conditions devraient être proche d'un zéro numérique.

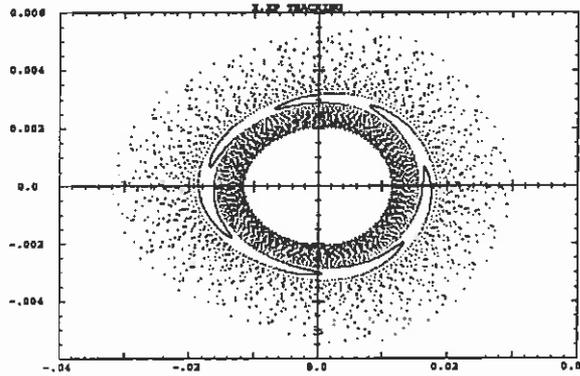


FIG. 3.15: Un exemple de non symplecticité : une particule test de conditions initiales $x_0 = 3$ cm et $x'_0 = 0$ est intégrée sur 5 000 tours au second l'ordre avec le code BETA. Normalement, la trajectoire des phases devrait être une ellipse passant par la condition initiale (le système est dans ce cas à un degré de liberté). On observe au contraire une trajectoire spirale vers le centre de l'espace des phases (x,x') comme en présence d'un terme d'amortissement. Les points de la trajectoire ne sont pas reliés par soucis de lisibilité.

3.2.3.2 Symplecticité et faible rayon de courbure

Si les champs de fuite des dipôles sont négligés, au second ordre, le système intégré reste symplectique (comme on l'attend), mais uniquement à très faible amplitude (*e.g.* $x_0 = 1$ mm). Par contre dès $x_0 > 5$ mm, l'espace des phases se peuple de trajectoires spirales caractéristiques ici encore de la non-symplecticité. Après quelques discussions fructueuses avec J. Payet, il s'avère que la seconde raison de non-symplecticité est le faible rayon de courbure de Super-ACO, $\rho_c = 1.7$ m. Notons cependant que ce problème est général pour pratiquement tous les logiciels de *tracking* — second ordre de MAD compris — car l'approximation des grands rayons de courbure, abusivement utilisée, est souvent oubliée.

La conclusion est l'obligation d'utiliser le code BETA à l'ordre *scaling* pour tous les calculs de Super-ACO.

3.2.3.3 Notes sur l'ordre *scaling* de BETA

Une fois ces premiers problèmes cernés, une comparaison des résultats obtenus avec les logiciels BETA et MAD a été réalisée. Rappelons que parmi les critères recherchés, la rapidité de calcul et la validité du code à grandes amplitudes sur un grand nombre de tours sont primordiales pour utiliser l'Analyse en Fréquence.

La figure 3.16 illustre un bogue lors du calcul de la contribution des multipôles dans BETA. Alors qu'à l'ordre *scaling*, les résultats devraient être strictement identiques en mode¹⁵ XZ ou QXZ, ils sont totalement dissemblables, en particulier pour la variation du nombre d'ondes horizontal avec l'amplitude. Après discussion avec J. Payet, il s'avère que les calculs doivent être réalisés en mode XZ (plus lent que le mode QXZ mais « moins imprécis »!).

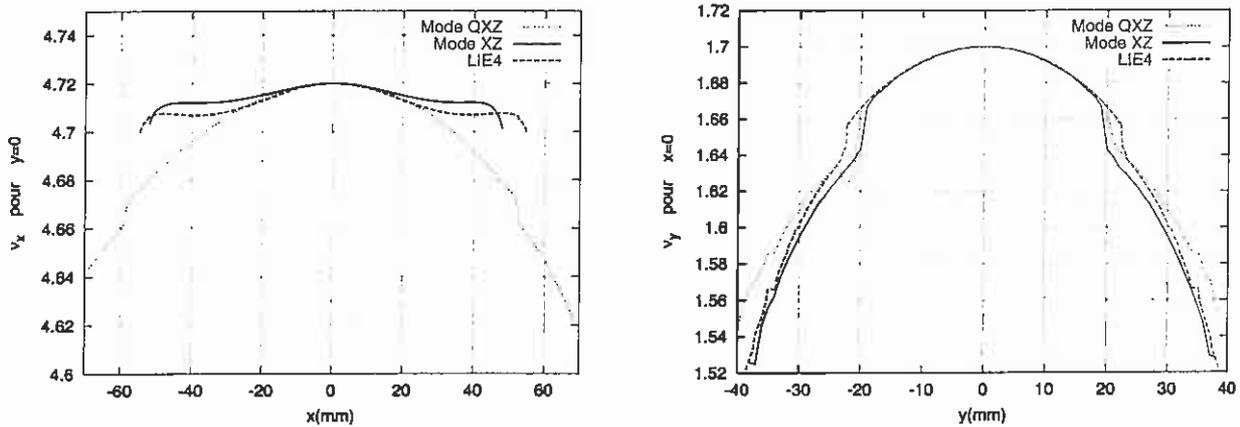


FIG. 3.16: Comparaison des glissements des nombres d'ondes calculés à l'ordre *scaling* en mode QXZ, XZ de BETA et avec l'intégrateur LIE4 de MAD sur 1 000 tours de Super-ACO. Les calculs des décipôles ne sont pas corrects à grandes amplitudes ($x > 20$ mm) avec le code BETA (cf. faible rayon de courbure de l'anneau).

Ajoutons enfin, que l'ordre *scaling* est une approximation qui est valide seulement à faible amplitude. En comparant les résultats entre BETA et MAD, il s'avère que les résultats diffèrent dès $x = \pm 20$ mm¹⁶, amplitude relativement faible puisque l'acceptance physique de la machine est $+60$ mm! Au-delà, les résultats de BETA sont complètement faux, car les approximations de calcul ne sont plus vérifiées.

Dans la suite, sauf cas explicitement dit, je n'utilise plus que l'intégrateur LIE4 de MAD qui est assez lent mais « exact » à grande amplitude car symplectique d'ordre quatre.

Pour finir, remarquons qu'on n'observe pas de différence notable pour le calcul de $\nu_y = f(y)$ avec BETA mode QXZ, XZ ou LIE4 de MAD. Ce résultat se comprend immédiatement, car les lentilles décipolaires induisent le champ magnétique suivant :

$$\begin{cases} B_x &= b_5(x^4 + y^4 - 6x^2y^2) \\ B_y &= b_5(4x^3y - 4xy^3) \end{cases} \quad (3.1)$$

¹⁵Il s'agit de « modes de *tracking* » spécifiques au logiciel BETA.

¹⁶Estimation du domaine de validité de BETA en fonction du rayon de courbure (ρ_c) de l'anneau et de l'amplitude maximum (x_{max}) pour laquelle les calculs sont corrects : $\frac{x_{max}}{\rho_c} = \frac{0.02}{1.7} \approx 1\%$.

où b_5 est la force octupolaire (cf. l'expression générale 1.46 du champ magnétique, p. 15). Or les calculs précédents ont été réalisés pour $x = 0$ ou $y = 0$ (couplage non pris en compte dans ce type de calcul par le code BETA) ; les champs magnétiques se simplifient dans le premier cas à $(B_x, B_y) = b_5(y^4, 0)$ et dans le second cas à $(B_x, B_y) = b_5(x^4, 0)$. Donc, il n'y a pas d'influence notable dans le plan vertical.

Malgré ses qualités, le code BETA n'est pas adapté pour effectuer de longues intégrations numériques et des optimisations à grandes amplitudes (pour une machine à faible rayon de courbure). D'ailleurs, il n'a pas été écrit dans cette optique (cf. les approximations réalisées).

3.2.4 Machine idéale

Super-ACO est considéré comme machine parfaite, *i.e.* sans défauts avec sa 4-périodicité. Les onduleurs ou wigglers ne sont pas modélisés et de plus les forces des lentilles décapolaires sont surestimées¹⁷ d'un facteur 2.5 : $LD = -70H$.

3.2.4.1 Optique

Le point de fonctionnement a pour nombres d'ondes $\nu_x = 4.72$ et $\nu_y = 1.70$ et les hexapôles chromatiques sont ajustés pour une chromaticité nulle dans les deux plans (tableau 3.5). L'ensemble des calculs est réalisé pour des particules d'énergie nominale ($\delta = 0$). Les fonctions optiques pour une super-période sont données par la figure 3.17.

ν_x, ν_y	4.72, 1.70
ξ_x, ξ_y	0.0, 0.0
ν_s	0.0034
ϵ_x (nm.rad)	38
T_{amort} (tours)	75 000

TAB. 3.5: Caractéristiques faisceau de l'anneau considéré comme machine idéale avec sa 4-périodicité. La fréquence longitudinale (ν_s) est 1 000 fois plus faible que les nombres d'ondes. Avec une grande émittance (ϵ_x), le faisceau de Super-ACO est amorti au bout d'un grand nombre de tours (T_{amort}).

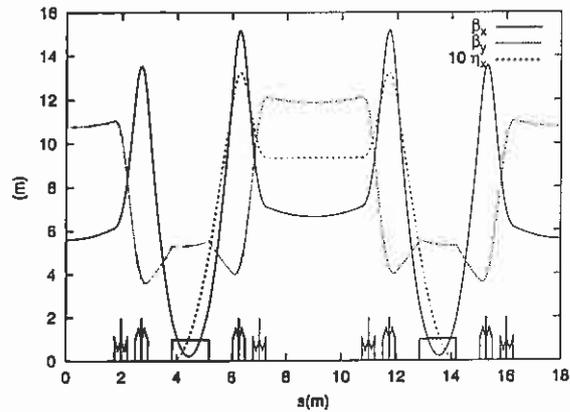


FIG. 3.17: Fonctions optiques pour une des quatre super-périodes de Super-ACO : machine idéale.

Les calculs effectués avec le logiciel BETA diffèrent de ceux du logiciel MAD tout particulièrement pour des intégrations à grandes amplitudes. Nous l'avons déjà vérifié dans la section précédente. Les courbes de glissement des nombres d'ondes (Fig. 3.18) sont obtenues en utilisant l'intégrateur LIE4 de MAD.

Il est intéressant de comparer les ouvertures dynamiques calculées avec le logiciel BETA et avec le code MAD (Fig. 3.19). La méthode de calcul de l'ouverture dynamique de BETA et celle

¹⁷Modèle utilisé jusqu'en l'an 2000.

présentée avec MAD sont radicalement différentes. La philosophie de BETA est de ne tracer que le bord de l'ouverture dynamique selon le schéma suivant. On se donne une amplitude y à x fixé, on commence l'intégration, si l'on est stable (resp. instable), on incrémente (resp. décrémente) y jusqu'à être instable (resp. stable). Ensuite, x est incrémenté et l'on réitère le processus précédent. Notons que par cette méthode, on n'explore pas l'intérieur de l'ouverture dynamique qui peut alors contenir des régions conduisant à des mouvements instables. Un des points forts de cette méthode est la rapidité du temps de calcul qui permet de l'utiliser pour l'optimisation d'une machine pour un faible nombre de tours.

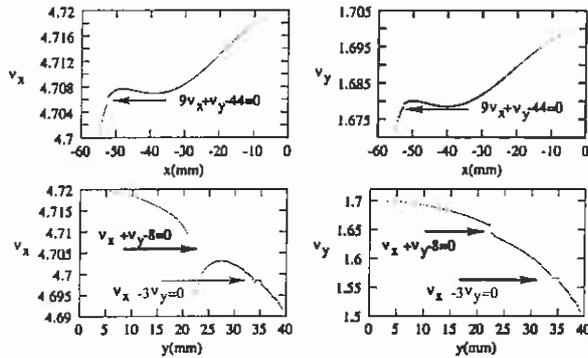


FIG. 3.18: Maille idéale de Super-ACO : Glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude obtenus avec le programme MAD (LIE4) sur 1 000 tours (à couplage faible $1 \mu m$).

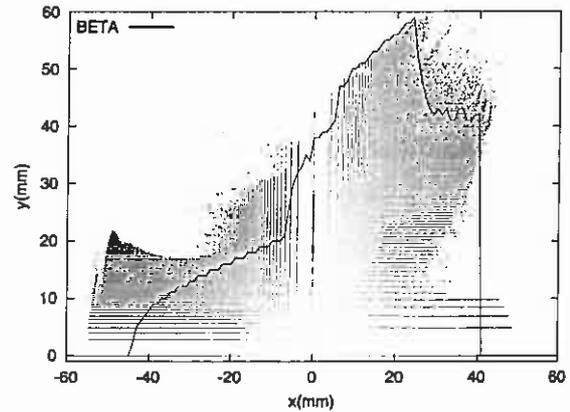


FIG. 3.19: Ouverture dynamique de Super-ACO ($\beta_x = 5.6$ m et $\beta_y = 10.8$ m) obtenue avec les codes BETA (contour, calcul rapide) et MAD sur 1 000 tours (calcul long).

Dans le second cas, on n'utilise MAD que pour réaliser l'intégration numérique de la trajectoire. On se donne une grille de conditions initiales $(x_0, x'_0, y_0, y'_0) = (x, 0, y, 0)$ et pour chaque nœud du maillage, on effectue l'intégration et l'on ne garde que les conditions initiales qui ont conduit à un mouvement stable. Ce type de calcul est beaucoup plus long, mais il est exhaustif au sens où l'on est assuré de ne pas avoir de région instable contenue dans l'ouverture dynamique, pourvu que le maillage soit assez fin (typiquement 150×150 conditions initiales avec un pas suivant une loi en racine carrée).

Dans la présente étude, cette méthode donne des résultats peu différents qualitativement mais complètement différents quantitativement (bijection entre ouverture dynamique et carte en fréquence, localisation des résonances, stabilité).

3.2.4.2 Dynamique

L'ouverture dynamique (figure 3.20-d) et la carte en fréquence (figure 3.20-c) ont été calculées en intégrant la trajectoire de 150×150 conditions initiales réparties dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$) de l'espace des configurations $(x, y) \in [0, 50] \times [0, 60]$ mm. L'intégration est effectuée sur deux fois 1 000 tours. Les 1 000 premiers tours sont utilisés pour calculer les fréquences associées au mouvement d'une particule survivante et les 1 000 suivants pour calculer la diffusion de l'orbite. Ce choix n'est pas arbitraire mais est justifié par une rapide

convergence de l'application fréquence. Rappelons que, grâce aux propriétés de l'Analyse en Fréquence, l'on est dispensé de réaliser une intégration numérique des trajectoires pour un nombre de tours de 75 000 correspondant au temps d'amortissement de Super-ACO.

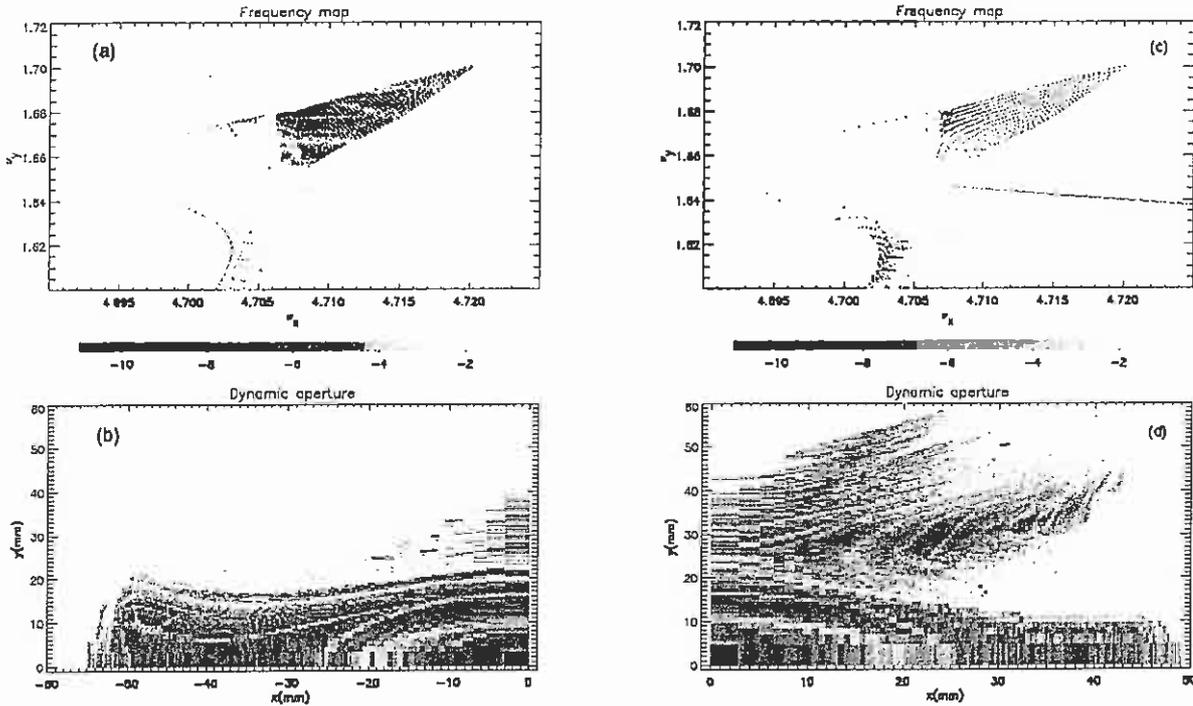


FIG. 3.20: Cartes en fréquence (c et a) tracées pour le premier ($x > 0, y > 0$) et second ($x < 0, y > 0$) quadrant de l'ouverture dynamique (d et b). Super-ACO est modélisé comme machine idéale ($\beta_x = 5.6$ m et $\beta_y = 10.8$ m). Le point de fonctionnement est le coin supérieur droit de la carte. La dynamique est principalement dominée par la résonance d'ordre 3 ($\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$) qui donne la limite verticale de l'ouverture dynamique ($y = 20$ mm). Toute la partie $y > 20$ mm sur l'ouverture dynamique (d) correspond à l'île de cette résonance. La diffusion est codée en niveaux de gris suivant une échelle logarithmique.

Nous pouvons succinctement commenter l'ouverture dynamique calculée (Fig. 3.20-d) :

A première vue, l'ouverture dynamique semble très grande : extension horizontale jusqu'à 50 mm et verticale au-delà de 50 mm. Cependant, on observe que pour des conditions initiales verticales (y) excédant 23 mm (pour $x=0$ mm), la zone de stabilité résiduelle n'est qu'une immense île de résonance ($\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$). De plus aux grandes amplitudes, la diffusion est importante.

Une étude plus fine permet d'affirmer que toutes les particules survivantes ayant des conditions initiales dans la sus-dite zone ont leurs nombres d'ondes situés soit sur la résonance principale soit au-delà.

En conclusion, les dimensions de l'ouverture dynamique pour le premier quadrant ($x > 0, y > 0$) doivent être ramenées à des valeurs plus raisonnables : $[0, 50] \times [0, 23]$ mm.

La carte en fréquence associée (Fig. 3.20-c) a également une grande extension dans l'espace des fréquences. La figure 3.20-c ne la montre pas dans sa totalité : elle est tronquée dans sa partie basse qui s'étend jusqu'à $\nu_y = 1.51$. Cependant cette partie n'a pas d'intérêt pour la dynamique, car elle ne sera jamais atteinte pour la machine réelle (hors de l'ouverture physique,

la résonance principale ne peut être traversée). La description de la carte en fréquence peut être décomposée en deux parties séparée par la résonance $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$ (voir aussi Fig. 3.21 et les cartes en couleur B.3) :

(1) une première partie au voisinage du point de fonctionnement $(\nu_x, \nu_y) = (4.72, 1.70)$, coin supérieur droit de la figure. Cette partie est très régulière avec une diffusion faible (équipartition des points, diffusion faible : $D < -5$).

(Frontière 1-2) la dynamique est dominée par la résonance systématique d'ordre 3, $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$. En pratique, en son voisinage, on observe une grande vitesse d'éjection des particules. Sur la carte en fréquence soit les particules sont capturées dans l'île de résonance soit il y a désertion de points : très proche de la résonance, la diffusion est très élevée ($D > -3$) correspondant à la proximité des zones hyperboliques associées à la résonance (les particules vont être perdues si l'intégration est poursuivie). La largeur de la résonance est grande : $\Delta\nu \approx 0.01$.

(2) au-delà de la résonance d'ordre 3, la diffusion est importante, la stabilité est faible (les particules ayant des amplitudes initiales horizontales presque nulles sont tout de même stables). Les résonances révélées par la carte en fréquence sont répertoriées dans le tableau 3.6 et localisées sur la figure 3.21.

$p\nu_x + q\nu_y + r' \times 4 = 0$	Ordre
$\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$	1 : 2 :-2
$3\nu_x - 6\nu_y - 4 = 0$	3 :-6 :2
$\nu_x - 4\nu_y + 2 = 0$	1 :-4 :2
$6\nu_x + 4\nu_y - 35 = 0$	6 :4 :-7
$\nu_x - 7\nu_y + 7 = 0$	1 :-7 :4
$3\nu_y - 5 = 0$	0 :3 :-2
$\nu_x + 8\nu_y - 18 = 0$	1 :8 :-6
$7\nu_x - 33 = 0$	7 :0 :5
$9\nu_x + \nu_y - 4 \times 11 = 0$	9 :1 :-7

TAB. 3.6: Principales résonances identifiées sur la carte en fréquence de Super-ACO modélisé comme machine idéale. Des résonances d'ordres aussi bien faibles qu'élevés sont observées (origine : les hexapôles).

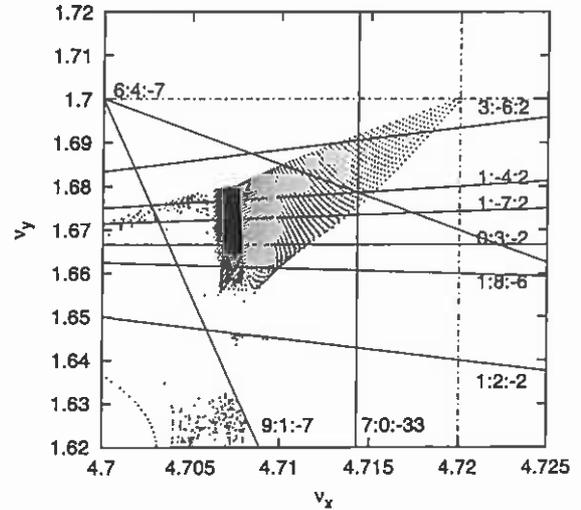


FIG. 3.21: Résonances principales (traits pleins) et point de fonctionnement (traits pointillés) pour Super-ACO modélisée comme machine idéale. La carte est repliée sur elle-même pour $\nu_x \approx 4.7075$.

La carte en fréquence est repliée dans la région $\nu_x \approx 4.7075$ (cf. Fig. 3.21). Il semble qu'au-delà de ce repliement plus aucune trajectoire ne soit stable. Ce repliement correspond dans l'ouverture dynamique aux amplitudes horizontales supérieures à 30 mm (cf. Fig. 3.20-d).

La figure 3.20-b exhibe le second quadrant ($x < 0, y > 0$) de l'ouverture dynamique. La carte en fréquence (figure 3.20-a) est bien entendu inchangée si ce n'est le caractère hyperbolique ou elliptique des résonances rencontrées (et l'échantillonnage dans l'espace des fréquences).

3.2. SUPER-ACO

L'ouverture dynamique négative a comme extension $[-55, 0] \times [0, 23]$ mm. Comme précédemment, toutes les conditions initiales des particules au deçà de la résonance principale $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$ conduisent à des mouvements peu stables ($D > -3$).

La résonance principale, $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$, est maintenant de nature hyperbolique : c'est pourquoi on n'observe plus d'île de résonance dans l'ouverture dynamique.

3.2.4.3 Défauts de gradients des quadripôles droits

La modélisation de Super-ACO peut être améliorée en introduisant les défauts de gradient des quadripôles droits. Les valeurs utilisées sont celles mesurées en 1990 (Barthès *et al.*, 1990) sur l'ensemble des quadripôles de la machine pour un point de fonctionnement équivalent.

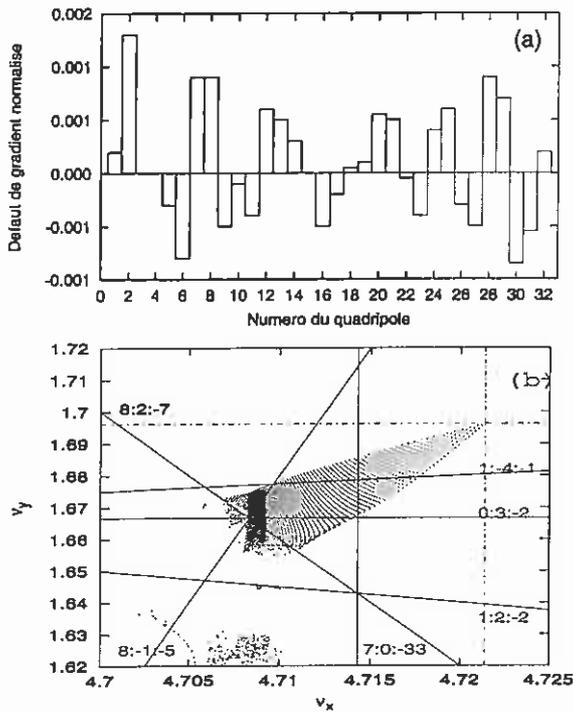


FIG. 3.22: (a) Ecart entre le gradient mesuré et nominal de chaque quadripôle normalisé par le gradient nominal du quadripôle 3 (mesures magnétiques aléatoires de l'ordre du pour mille, Barthès *et al.*, 1990). (b) Carte en fréquence de Super-ACO et résonances (traits pleins) identifiées lorsque les défauts de gradients sont modélisés. Le point de fonctionnement est le coin supérieur droit de la carte.

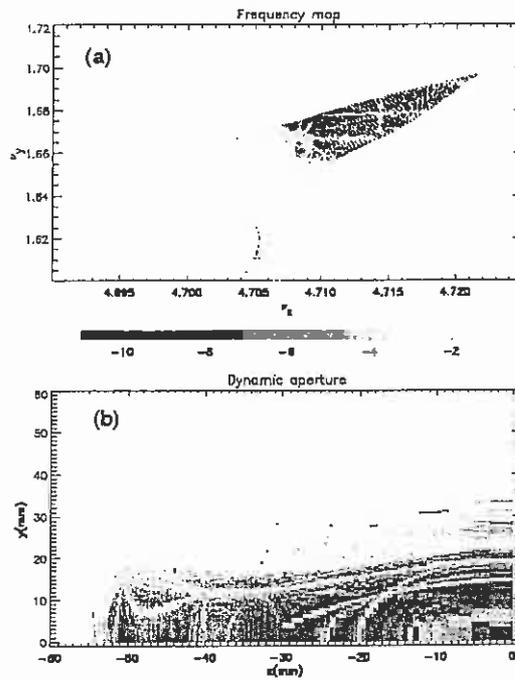


FIG. 3.23: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) calculées en incluant dans le modèle les mesures magnétiques des quadripôles droits de Super-ACO ($\beta_x = 5.8$ m et $\beta_y = 10.8$ m). La diffusion est globalement plus élevée, les largeurs de résonances plus grandes. L'influence des défauts magnétiques reste faible (mêmes dimensions de l'ouverture dynamique).

La figure 3.22 indique les valeurs relatives des gradients de chacun des 32 quadripôles de Super-ACO en prenant le troisième quadripôle comme référence. Ces valeurs sont aléatoires et relativement faibles (de l'ordre du pour mille) ; la dynamique globale devrait être peu modifiée

bien que la périodicité de l'anneau soit réduite de 4 à 1 : de nouvelles résonances devraient apparaître .

En comparant les cartes en fréquence et ouvertures dynamiques de la machine idéale (Fig. 3.20-a et b) et de la machine avec les défauts de gradients déduits des mesures magnétiques (Fig. 3.23), plusieurs remarques peuvent être faites (voir aussi la carte en couleur B.4).

Le point de fonctionnement est légèrement différent : $(\nu_x = 4.7214, \nu_y = 1.6962)$, contre auparavant $(\nu_x = 4.7201, \nu_y = 1.7005)$; toutes les résonances vont être atteintes avec des amplitudes plus faibles. Cette différence s'explique par la modification des gradients des familles quadripolaires $Q1$ et $Q2$ (le point de fonctionnement n'a pas été réajusté après l'introduction des défauts).

L'ouverture dynamique est très légèrement réduite. La diffusion est partout plus élevée et en particulier au voisinage des lignes de résonance (cf. Fig. 3.22-b) et au-delà de la résonance d'ordre 3 $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$ (grandes amplitudes). Le nœud des résonances d'ordre 3, $3\nu_y - 5 = 0$, 9, $8\nu_x - 1\nu_y - 9 \times 4 = 0$, 10, $8\nu_x + 2\nu_y - 41 = 0$ et 7, $7\nu_x - 33 = 0$ est excité.

En conclusion, une détérioration globale de la dynamique est observée mais elle reste faible.

3.2.5 Machine nominale

3.2.5.1 Optique

Suite aux études précédentes, nous souhaitons calculer une carte en fréquence correspondant aux conditions expérimentales nominales en termes de chromaticités, valeurs de courants quadripolaires et hexapolaires. Peut-être comprendrions-nous alors mieux les performances actuelles de Super-ACO. Seuls les dispositifs d'insertions n'ont pas été modélisés.

Super-périodes	4
ν_x, ν_y	4.725, 1.698
ξ_x^{red}, ξ_y^{red}	0.275, 0.766
ν_s	0.0034
α_p	1.48×10^{-2}
ϵ_x (nm.rad)	35
Ouv. Phys. Hori. (mm)	-20+60 (septum)
Ouv. Phys. Vert. (mm)	-15+15 (onduleur)

TAB. 3.7: Caractéristiques machine nominale de Super-ACO. Les dimensions de l'ouverture physique sont données dans les sections droites de l'anneau.

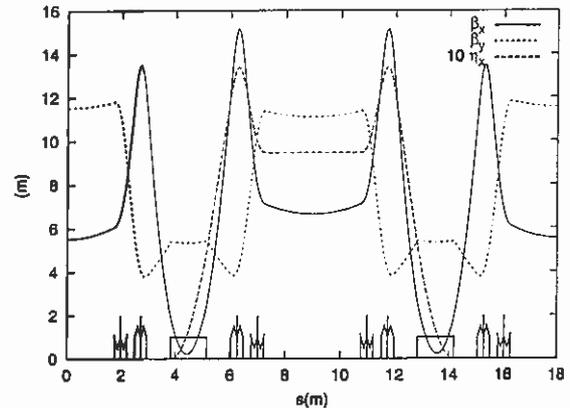


FIG. 3.24: Fonctions optiques sur une super-période de Super-ACO : réglage nominal.

Le point de fonctionnement a pour nombres d'ondes : $\nu_x = 4.725$ et $\nu_y = 1.698$ (cf. tableau 3.7). Les valeurs des chromaticités réduites désormais non nulles, $\xi_x^{red} = 0.275$ et $\xi_y^{red} = 0.766$, sont réglées par ajustement des forces de deux familles hexapolaires $H3$ et $H4$. Les valeurs des courants des quadripôles et hexapôles sont données dans le tableau 3.8 et les fonctions optiques par la figure 3.24. La fonction dispersion est toujours nulle en dehors des achromats.

Quadrupôles	Courant (A)	Gradient normalisé (m^{-2})
Q1	222,25	-1,463349
Q2	400,22	2,606294
Q3	379,77	2,478277
Q4	215,50	-1,418968
Hexapôles	Courant (A)	Force intégrée (m^{-3})
H1	54	0,249077
H2	100	0,461255

TAB. 3.8: Valeurs expérimentales des courants et champs magnétiques pour les quatre familles de quadrupôles (Q1, Q2, Q3, Q4) et les deux familles hexapolaires non chromatiques le point nominal de Super-ACO.

3.2.5.2 Dynamique

Les glissements de nombres d'ondes avec l'amplitude sont donnés en comparaison avec ceux calculés par le code BETA (Fig. 3.25).

L'ouverture dynamique est réduite dans le plan horizontal à -30 mm (cf. Fig. 3.26-b). La carte en fréquence (cf. Fig. 3.26-a, voir aussi la carte en couleur B.5) présente un repliement important, sa lecture est alors difficile. La dynamique est fortement marquée par la résonance d'ordre 3, $3\nu_x - 5 = 0$ qui limite l'ouverture dynamique verticale à 20 mm. Il faut cependant noter qu'en expérience, l'ouverture dynamique verticale mesurée est bien plus petite, de l'ordre de 12 mm (l'ouverture physique est à 15 mm).

3.2.6 Premières conclusions

Nous avons vu que Super-ACO est une machine singulière de par son faible rayon de courbure, ses champs de fuite et coins dipolaires non négligeables. L'approximation traditionnelle des grandes machines n'est plus valable et l'approximation *hard edge* n'est plus suffisante. Nous avons insisté également à plusieurs reprises sur le fait que le code BETA n'est pas adapté pour réaliser des études d'optimisation de la dynamique à long terme et pour des amplitudes supérieures à environ 20 mm pour une machine telle que Super-ACO, même si l'optique linéaire est toujours bien traitée.

Des cartes en fréquence et ouvertures dynamiques ont été calculées pour différentes configurations machines qui juste qu'en l'an 2000 étaient considérées comme reflétant la machine en fonctionnement. Cependant, cette étude n'a pas permis d'expliquer correctement certaines observations expérimentales. En effet, l'ouverture dynamique est limitée dans le plan vertical en expérience, la dynamique du faisceau est sensible à une résonance d'ordre 3 ($3\nu_y = 5$). Or nous n'avons pas réussi à confirmer ses observations (à faibles amplitudes) à partir du modèle de l'anneau.

Un problème crucial est de pouvoir arriver à définir un modèle aussi réaliste que possible de l'anneau de stockage. Ce besoin se justifie, car d'une part, il permettrait de mieux prédire le comportement de la machine réelle et d'autre part de pouvoir rapidement identifier les causes d'une modification des performances de l'accélérateur.

Il est utile de dresser un bref tableau des principaux accords et désaccords entre le modèle actuel et l'expérience — en nous restreignant à la seule dynamique transverse —.

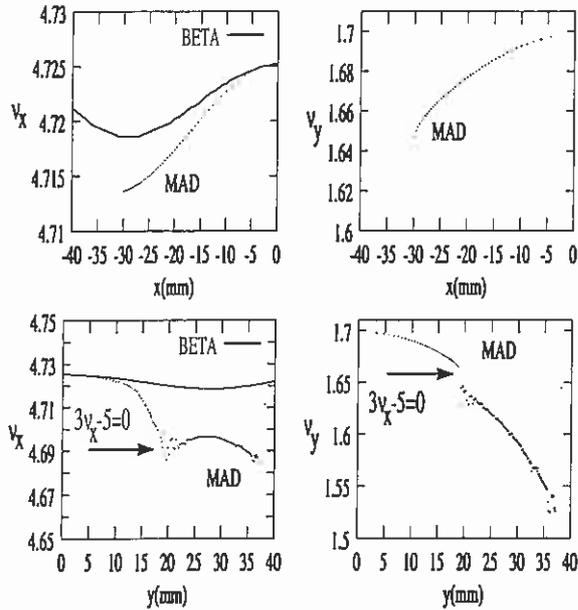


FIG. 3.25: Glissement des nombres d'ondes ν_x et ν_y avec l'amplitude : calculs effectués avec l'intégrateur LIE4 de MAD et l'ordre *scaling* de BETA sur 1 000 tours de l'anneau Super-ACO. A grande amplitude ($|x| > 20$ mm), le désaccord est flagrant : les lentilles décapolaires ne sont plus correctement prises en compte par le code BETA (la résonance $3\nu_x - 5 = 0$ n'est donc pas observée).

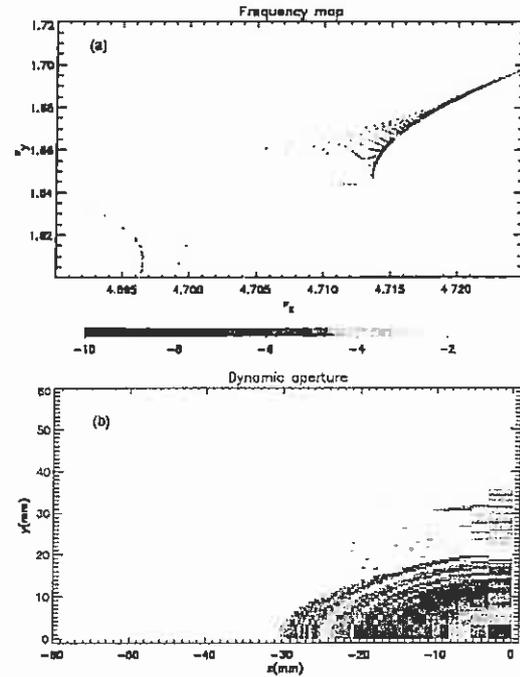


FIG. 3.26: Super-ACO deuxième quadrant ($x < 0$, $y > 0$) : carte en fréquence et ouverture dynamique pour le point de fonctionnement nominal ($\beta_x = 5.5$ m et $\beta_y = 11.5$ m). La carte en fréquence est très compacte : peu de résonances sont rencontrées. Il est difficile de comprendre avec cette modélisation les observations expérimentales.

Nous disposons d'un excellent modèle de l'optique linéaire : point de fonctionnement, faible battement des fonctions bêtatrons, bonne efficacité des correcteurs dipolaires utilisés pour corriger l'orbite fermée.

Les valeurs des coins et champs de fuite des dipôles ont été ajustées sur l'expérience (Level et Nghiem, 1986). La caractérisation non linéaire des forces des quadripôles et hexapôles a été faite en 1989 par P. Nghiem, des mesures magnétiques sur banc d'essai à la fin des années 1990 (Barthès *et al.*, 1990). Le glissement des nombres d'ondes avec l'énergie est également en accord avec les mesures expérimentales suite à l'introduction d'une composante décapolaires induites par les hexapôles qui sont créés par un « mauvais dipôle » (Brunelle *et al.*, 1999). Un important travail de caractérisation de l'impact des éléments d'insertion sur la dynamique transverse a été réalisé à Super-ACO (Brunelle, 1992, Sommer *et al.*, 1992)

Par contre, les mesures de durée de vie Touschek, de valeurs de chromaticités, de taille de l'ouverture dynamique et d'acceptance en énergie ne sont pas encore bien comprises.

Nous devons également rappeler que Super-ACO n'est pas équipé de moniteur de position tour par tour ni de perturbateur vertical. Si bien qu'aucune caractérisation de la variation des nombres d'ondes avec l'amplitude n'a été réalisée (nous verrons qu'une des caractéristiques

de l'ALS est de disposer d'un grand nombre d'outils de diagnostic et d'exploration de la dynamique de l'anneau).

Dans la seconde partie dédiée aux résultats expérimentaux, nous verrons comment nous pouvons améliorer le modèle de Super-ACO. La première idée sera d'obtenir une estimation réaliste des défauts magnétiques de la machine. Peut-être, qu'à l'image de l'ALS (voir page 105 sqq.), la dynamique se trouverait fortement modifiée. Puis, nous explorerons la dynamique de l'anneau à travers les glissements des nombres d'ondes avec l'amplitude horizontale en utilisant une électrode tour par tour, le perturbateur horizontal et l'Analyse en Fréquence.

3.3 L'ESRF

3.3.1 Optique

L'installation européenne de radiation synchrotron (European Synchrotron Radiation Facility, ESRF [38] et [37]) est actuellement la meilleure source de lumière de troisième génération en termes de performances. Mise en service en 1992 (premiers photons), l'optique possède une périodicité 16, ce qui permet de réduire drastiquement le nombre de résonances permises. La maille suit un schéma Chasman-Green avec dispersion distribuée et des sections droites alternant faibles et grandes fonctions bêta-trons (cf. Fig. 3.27). En opération, il est nécessaire de surcompenser les chromaticités à des valeurs légèrement positives. Les principaux paramètres de l'ESRF sont donnés par le tableau 3.9. L'acceptance en énergie mesurée est de $\pm 2\%$, l'injection est réalisée au voisinage du point ($x = -19, y = 0$) mm.

Energie (GeV)	6
Circonférence (m)	844
Dispersion en énergie	1×10^{-4}
Emittance (nm.rad)	4
Chromaticités réduites	0.1, 0.4
Point de fonctionnement	36.44, 14.39
Ouverture physique (mm)	-19/35, ± 4
Familles hexapolaires	6
Périodicité	16

TAB. 3.9: Principaux paramètres de l'ESRF

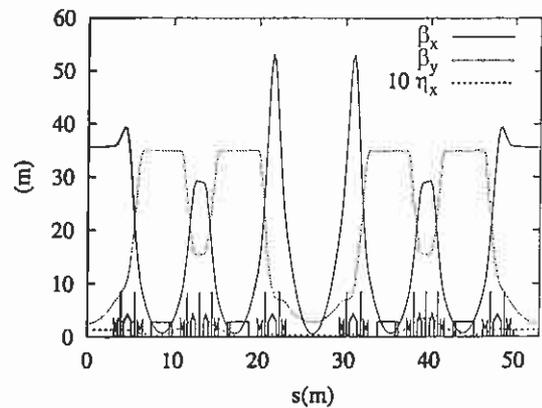


FIG. 3.27: Fonctions optiques de l'ESRF

La présente étude est restreinte aux deux jeux hexapolaires nominaux. Expérimentalement, le second semble meilleur pour un fort courant par paquet où la durée de vie est plus courte (communication personnelle de A. Ropert, 1999). Nous allons essayer de le comprendre à travers l'Analyse en Fréquence. L'intégration numérique a été effectuée avec le programme MAD version 8 [50] pour des particules *on* et *off momentum*, sur deux fois 1 000 tours d'une machine constituée d'une seule super-période, soit 125 tours de machine réelle. Le temps d'amortissement de l'ESRF est d'environ 2 000 tours.

3.3.2 Premier jeu hexapolaire

3.3.2.1 Dynamique *on momentum*

La figure 3.28 exhibe l'ouverture dynamique *on momentum* de l'ESRF ; à première vue, elle semble très grande, irrégulière, fortement marquée par les résonances et dissymétrique : $[-56, 42]_{y=0} \times [-16, 16]_{x=0}$ mm ($\beta_x = 36$ m et $\beta_y = 2.5$ m). Néanmoins, ces dimensions sont beaucoup trop optimistes et doivent être réduites. En effet, une analyse plus détaillée de l'intérieur de l'ouverture dynamique révèle de nombreux îlots de résonance.

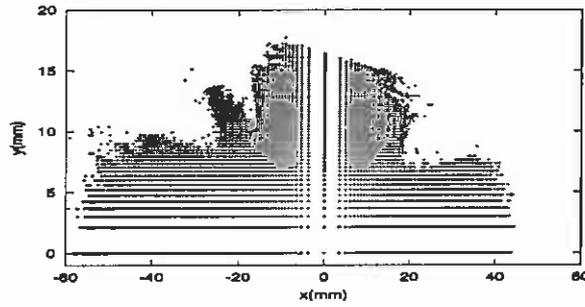


FIG. 3.28: Ouverture dynamique de l'ESRF : premier jeu hexapolaire, section de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 35.6 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). Bien que très grande, elle est irrégulière, fortement marquée par les résonances et dissymétrique.

Pour lever toute hypothétique interrogation au sujet des calculs des cartes en fréquence, je rappelle au lecteur que la dynamique de la particule ne change pas si les conditions initiales des particules sont choisies dans le quart de l'espace des configurations ($x > 0, y > 0$) ou ($x < 0, y > 0$).

La lecture d'une carte en fréquence de l'ESRF (Fig. 3.29-a, voir aussi les cartes B.10) est plus délicate que celle de SOLEIL, puisque la carte présente un repliement important. Afin de faciliter la lecture, la carte peut être divisée en deux parties (voir Fig. 3.30) :

- *première partie* : autour du point de fonctionnement (Fig. 3.30-a,b), i.e. le coin supérieur droit qui s'étend jusqu'à des amplitudes de 20 mm selon x ; les limites sont données par la résonance entière $\nu_x - 36 = 0$ et l'amplitude verticale $y \approx 7$ mm ; la diffusion y est faible. Notons cependant la présence de la résonance d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ atteinte pour $x = 17$ mm dans l'espace des configurations ($x = -20$ mm si l'on considère l'ouverture dynamique négative).
- *deuxième partie* : au-delà (Fig. 3.30-c,d) où le glissement des nombres d'ondes est supérieur à l'unité. Très peu de trajectoires régulières subsistent, l'indice de diffusion y est plus important. De nombreuses droites et nœuds de résonances apparaissent d'ordres aussi bien faibles — 4, 5 — qu'élevés — 8, ... , 16 — (voir la carte en fréquence Fig. 3.31). Par exemple, toutes les particules ayant leurs conditions initiales vérifiant $x \in [-41, -28] \cup [20, 30]$ mm sont capturées dans l'île de la résonance entière $\nu_x - 36 = 0$.

Le codage de la diffusion sur l'ouverture dynamique met bien en exergue les régions hyperboliques, les régions elliptiques et les résonances. L'injection est réalisée au voisinage de la résonance d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$.

Forts de ces résultats, nous pouvons donner des dimensions de l'ouverture dynamique plus réalistes, sachant qu'en pratique une résonance entière ne peut être traversée sans perte significative des performances du faisceau : $[-27, 21]_{y=0} \times [-7, 7]_{x=0}$ mm, soit une réduction d'un facteur deux dans les deux directions transverses.

Bien évidemment, si l'on prend en compte les défauts multipolaires, la symétrie 16 est brisée, les largeurs de résonance sont plus importantes et risquent de se recouvrir ; la zone de stabilité dans l'espace des fréquences sera encore plus petite.

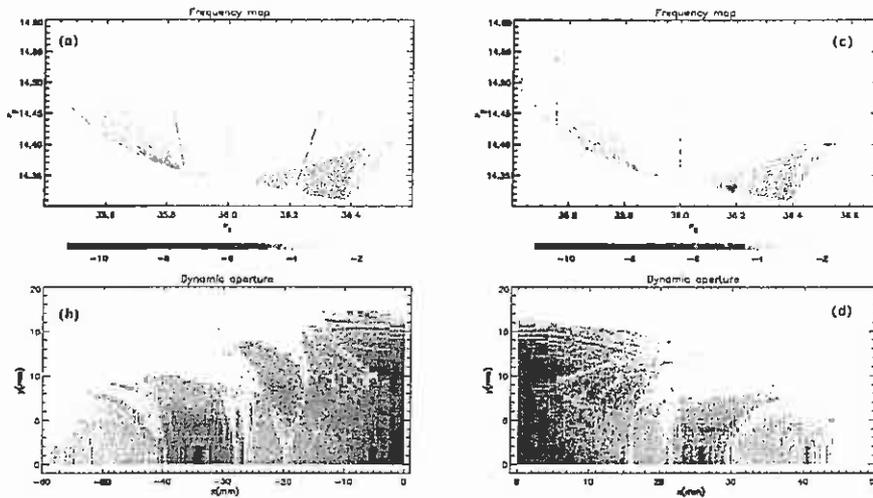


FIG. 3.29: Carte en fréquence (a et c) et ouverture dynamique (b et d) de l'ESRF : premier jeu hexapolaire pour une surface de section en $s = 0$ ($\beta_x = 35.6 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). La dynamique est dominée par la résonance de couplage $3 : -2 : 0$ et la résonance entière $\nu_x = 36$. Les zones elliptiques et hyperboliques associées sont nettement identifiables sur l'ouverture dynamique (b).

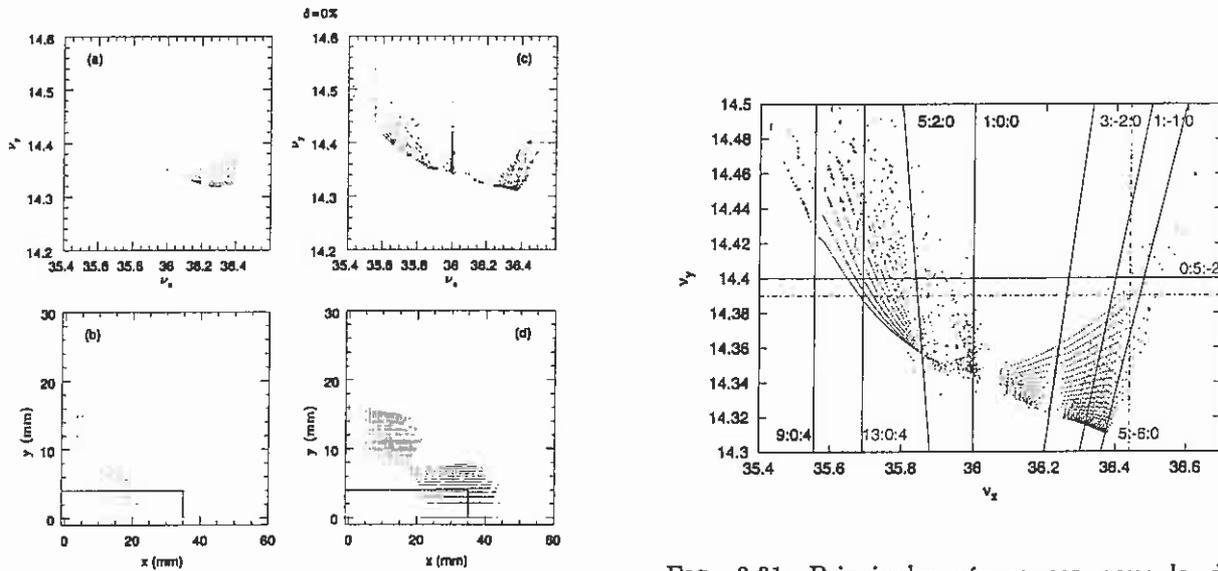


FIG. 3.30: Carte en fréquence de l'ESRF séparée en deux parties (a et c) pour faciliter la lecture : premier jeu hexapolaire, pour $s = 0$, ($\beta_x = 36 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). L'ouverture physique représentée par un rectangle dans l'ouverture dynamique (b et d).

FIG. 3.31: Principales résonances pour la dynamique du premier jeu hexapolaire de l'ESRF. Le point de fonctionnement est à l'intersection des droites en pointillés. La dynamique est marquée par la résonance de couplage $3 : -2 : 0$ et la résonance entière $\nu_x = 36$.

Enfin lorsque l'on calcule le glissement des nombres d'ondes avec l'énergie, la résonance entière $\nu_x - 36 = 0$ risque d'être atteinte plus tôt pour des particules *off-momentum*. C'est ce que nous allons maintenant vérifier.

3.3.2.2 Dynamique *off momentum*

A l'ESRF, la chromaticité est surcompensée à une valeur légèrement positive : $\xi_x^{red} = 0.1$ et $\xi_y^{red} = 0.4$. Pour différents écarts à l'énergie nominale, le point de fonctionnement va donc varier avec δ suivant une courbe $\Delta\nu_u = \xi_u\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$ (Fig. 3.32). En particulier, les résonances vont être atteintes avec des amplitudes différentes par rapport au cas *on momentum*. D'autres résonances vont également apparaître puisque d'autres régions de l'espace des fréquences vont être explorées.

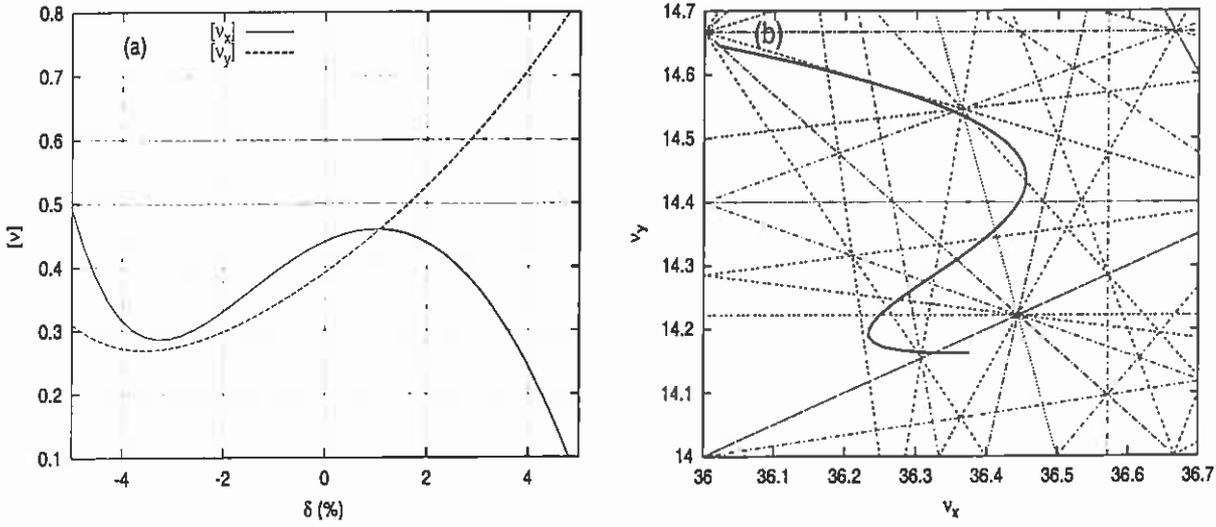


FIG. 3.32: (a) : Variation de la partie fractionnaire des nombres d'ondes avec l'énergie δ pour le premier réglage de l'ESRF. (b) : Excursion du point de fonctionnement dans l'espace des fréquence pour $-5\% < \delta < 5\%$. Les résonances systématiques sont tracées jusqu'à l'ordre 9.

Les cartes en fréquence ont été tracées en balayant à la fois les ouvertures dynamiques positive et négative en x pour des écarts à l'énergie nominale de $\pm 1\%$, $\pm 2\%$ et $\pm 3\%$ (Fig. 3.33). Nous allons donner une brève description des cartes en fréquence et ouvertures dynamiques (plusieurs nouvelles résonances apparaissent cf. Tab. 3.10) :

- $\delta = 1\%$ L'acceptance dynamique diminue (mais reste encore importante). Aussi bien pour les positions x positives que négatives, l'ouverture dynamique est fortement marquée par des résonances (présences d'îles importantes) qui se traduit par des bords irréguliers et des protubérances.

La carte en fréquence est maintenant vraiment irrégulière au-delà de la résonance entière : la diffusion est élevée. Que dira-t-on s'il y a quelques défauts qui viennent perturber la dynamique ? Il y aura augmentation de la diffusion des orbites.

- $\delta = 2\%$ L'ouverture dynamique se détériore de plus en plus au-delà de la résonance entière qui est atteinte à amplitude de plus en plus faible de par le glissement du point de fonctionnement.
- $\delta = 3\%$ On observe un trou dans l'ouverture dynamique au voisinage de la résonance entière (comportement hyperbolique) qui est atteinte très tôt. Si l'on ne considère que l'acceptance avant cette résonance, alors elle est très petite : -8 mm, $+16$ mm par rapport à la chambre à vide. On observe nettement la « nocivité » de la résonance entière.

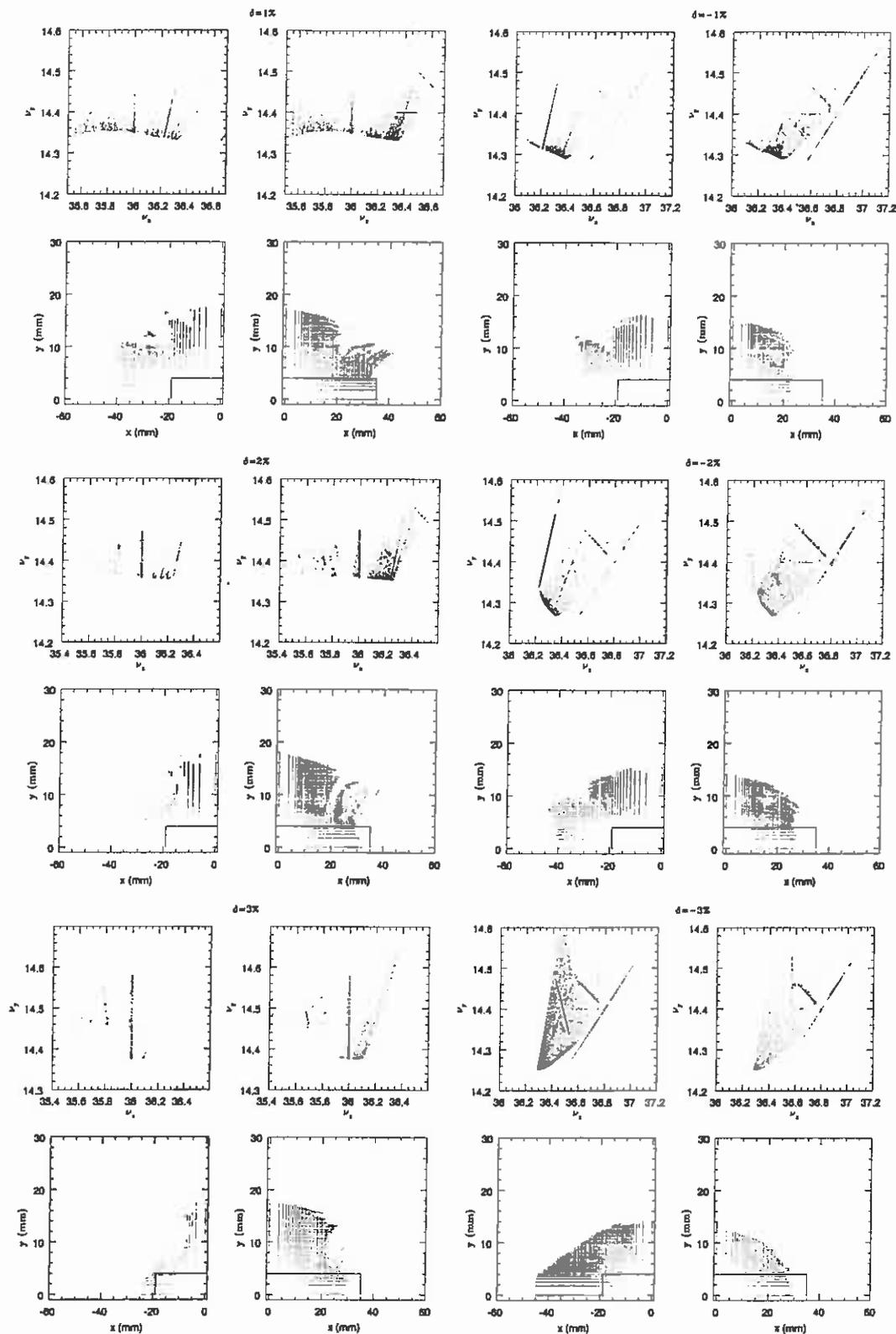


FIG. 3.33: Dynamique *off momentum* pour le premier jeu hexapolaire de l'ESRF (Colonne 1 : $\delta > 0$, colonne 2 : $\delta < 0$). Les cartes en fréquence sont profondément modifiées entre $\delta = -3\%$ et $\delta = 3\%$ (extension spatiale, repliement, résonances). Le point de fonctionnement se rapproche de la résonance entière qui détruit la dynamique pour $\delta > 0$, alors que pour $\delta < 0$ la dynamique est de plus en plus stable. L'ouverture physique est représentée par un rectangle en traits pleins.

- $\delta = -1\%$ On note l'apparition d'une nouvelle résonance d'ordre 6. La résonance entière n'est plus atteinte. La carte en fréquence « se déplie ». La dynamique est dominée par la résonance d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$.
- $\delta = -2\%$ L'ouverture dynamique est plus grande qu'à 1% (il n'y a plus la résonance entière). La carte est presque plate. Au voisinage de la résonance $10\nu_y = 144$, la dynamique est perturbée.
- $\delta = -3\%$ L'ouverture dynamique est très grande car à faible amplitude, il y a peu de résonances. Seuls les bords sont fortement irréguliers et incisés par les résonances. Paradoxalement, la dynamique est plus régulière dans ce cas que pour les particules *on momentum*.

$q\nu_x + p\nu_y + r = 0$	Ordre
$2\nu_x - 4\nu_y - 16 = 0$	1 :-2 :0
$5\nu_x + 4\nu_y - 240 = 0$	5 :4 :-4
$3\nu_x + 8\nu_y - 224 = 0$	3 :8 :-4

TAB. 3.10: Principales résonances rencontrées à $\delta \neq 0$ pour le premier réglage hexapolaire de l'ESRF. Voir aussi les cartes en fréquence (Fig. 3.33) pour $-3\% < \delta < 3\%$.

3.3.2.3 Conclusion préliminaire

La dynamique est très altérée par les résonances qui détériorent fortement la dynamique (diffusion élevée). Les deux résonances principales sont la résonance d'ordre 5 au voisinage de laquelle est faite l'injection et la résonance entière qui va réduire l'ouverture dynamique. Si l'on fait l'hypothèse que cette résonance ne peut pas être traversée, alors l'acceptance dynamique peut limiter la durée de vie du faisceau comme nous allons le voir.

3.3.2.4 Durée de vie Touschek

Dans un anneau de stockage, le faisceau a une durée de vie finie du fait des différents mécanismes de perte : excitation quantique, diffusions simples ou multiples entre les électrons, diffusions sur les atomes du gaz résiduel. Pour les sources de lumière de troisième génération (faible émittance) comme l'ESRF, la durée de vie est déterminée principalement par la *durée de vie Touschek* que nous allons définir. Lors d'une collision entre deux électrons d'un même paquet, une partie de leurs moments transverses est transférée en moments longitudinaux. Si ces transferts sont plus grands que l'acceptance en énergie donnée par le système RF, les électrons sont perdus après la collision. De plus, les électrons diffusés qui restent à l'intérieur de l'acceptance longitudinale peuvent aussi être perdus dans le plan transverse dû à la limite de l'ouverture physique ou dynamique pour l'écart en énergie considéré.

La durée de vie Touschek a été calculée en mode multipaquets et en mode faible nombre de paquets qui sont deux des principaux modes de fonctionnement de l'ESRF. Les paramètres adoptés pour les calculs avec le logiciel BETA sont donnés par le tableau 3.11.

Les calculs ont été faits en approximation linéaire et nonlinéaire et sont présentés dans le tableau 3.12. Dans chaque cas, nous avons pris comme longueur de paquet la longueur

naturelle σ_l à courant nul; en fonctionnement réel, le paquet s'allonge, *e.g.* d'un facteur 3 à 16 mA par paquet et la durée de vie est environ trois fois plus grande (Besnier, Laclare, Limborg, 1996). En approximation linéaire, la durée de vie Touschek ($T_{\frac{1}{2}}$) est donnée par la formule classique (voir par exemple Le Duff, 1995 ou chap. XXX de Bruck, 1966) :

$$\frac{1}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{N\tau_e^2 c}{8\pi\gamma^2\sigma_x\sigma_y\sigma_l\epsilon_{acc}^3} D(\xi), \quad \xi = \left(\frac{\epsilon_{acc}}{\gamma\sigma'_x}\right)^2 \quad (3.2)$$

$$D(\xi) = \sqrt{\xi} \left\{ -\frac{3}{2}e^{-\xi} + \frac{\xi}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\ln u e^{-u}}{u} du + \frac{1}{2}(3\xi - \xi \ln \xi + 2) \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right\}$$

avec σ_x , σ_y les dimensions transverses et σ'_x la divergence horizontale du faisceau, ϵ_{acc} l'acceptance en énergie de la machine, $\tau_e = 2.8 \times 10^{-15}$ m le rayon classique de l'électron, N le nombre d'électrons par paquet.

Pour le calcul dit nonlinéaire, nous avons pris en compte l'orbite fermée chromatique nonlinéaire et la dépendance en l'énergie des fonctions optiques. Pour une description détaillée, le lecteur peut se reporter à la méthode développée pour SOLEIL (Nadji *et al.*, 1997).

Fréquence RF	f_{RF} (MHz)	352.2
Nombre d'harmonique	h	992
Dispersion en énergie	σ_E	1.05×10^{-3}
Intensité faib. nb. paquets	I_1 (mA)	15
Nombres d'électrons par paquet	N_1	2.8×10^{11}
Intensité multipaquet	I_2 (mA)	662×0.302
Nombres d'électrons par paquet	N_2	5.3×10^9
Tension RF	V_{RF} (MV)	8–12
Couplage	χ (%)	1

TAB. 3.11: Paramètres pour le calcul de la durée de vie Touschek pour deux des principaux modes de fonctionnement de l'ESRF : (1) multipaquets et (2) faible nombre de paquets.

			Multipaquets		Faible nombre de paquets	
V_{RF} (MV)	ϵ_{RF} (%)	σ_l (mm)	T_{tous}^{lin} (h)	T_{tous} (h)	T_{tous}^{lin} (h)	T_{tous} (h)
8	3.38	4.7	231	172	4.4	4.27
9	4.03	4.3	378	238	7.1	5.89
10	4.60	4.0	555	288	10.5	6.44
11	5.13	3.8	760	320	14.4	7.41
12	5.61	3.6	947	337	17.9	7.63

TAB. 3.12: Modes multipaquets et faible nombre de paquets : durée de vie Touschek pour le premier réglage de l'ESRF en calcul linéaire et nonlinéaire pour une tension RF comprise entre 8 MV et 12 MV . Pour chaque tension, l'acceptance RF (ϵ_{RF}) et la longueur naturelle du paquet (σ_l) sont également données.

De manière générale, la durée de vie Touschek est limitée soit par l'acceptance physique, soit par l'acceptance dynamique ou soit par l'acceptance en tension RF. Pour ces calculs, nous avons inclus les dimensions de l'ouverture dynamique *off momentum* (cf. Fig. 3.35).

3.3. L'ESRF

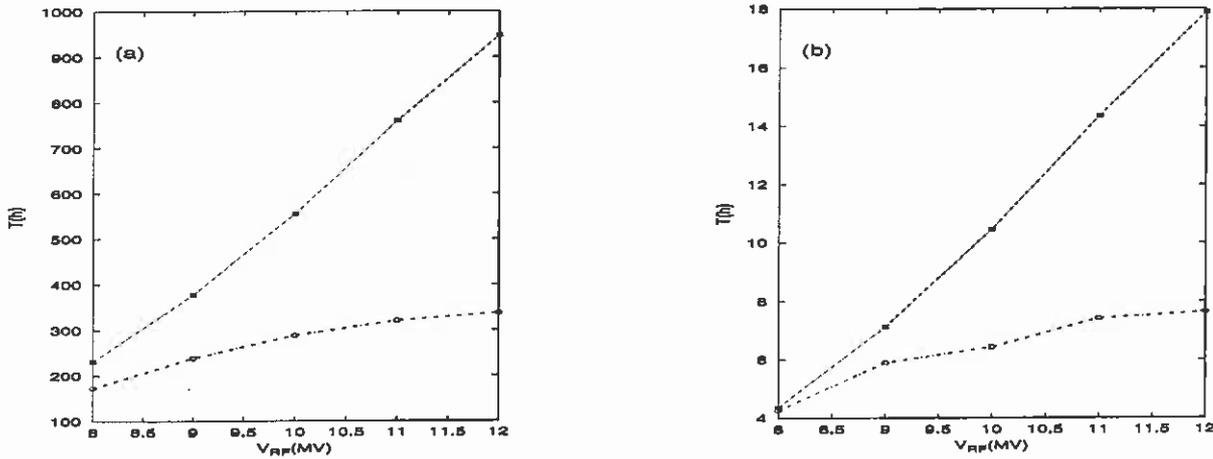


FIG. 3.34: Durée de vie Touschek (T) en fonction de la tension RF (V_{RF}) pour le premier réglage de l'ESRF en mode multipaquets (a) et faible nombre de paquets (b). Une saturation de la durée de vie est observée pour les calculs en mode nonlinéaire (cercles) par rapport au calcul linéaire (carrés).

A 8 MV, nous constatons que la tension RF est limitative ($\epsilon_{V_{RF}} = 3.4\%$) alors qu'à 12 MV c'est l'acceptance physique ($\epsilon_{V_{RF}} = 5.6\%$) et même l'acceptance dynamique si toute la dynamique au-delà de la résonance entière est négligée.

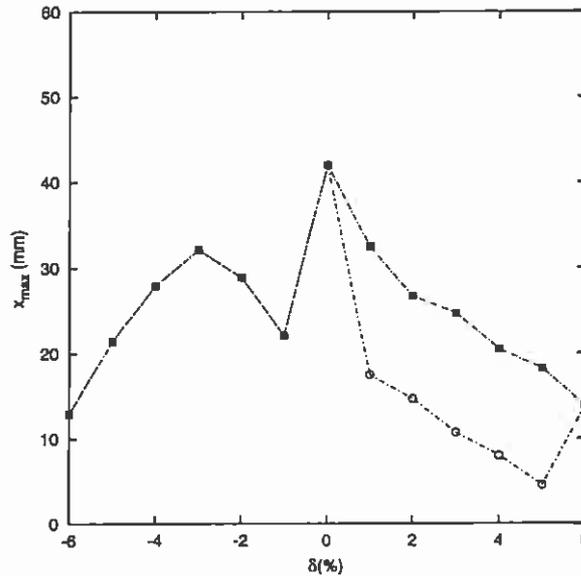


FIG. 3.35: Variation de l'ouverture dynamique horizontale (x_{max}) de l'ESRF avec l'énergie (δ) pour le premier réglage hexapolaire. Les dimensions (carrés) sont données par rapport à l'orbite fermée. En supposant que la résonance entière $\nu_x - 36 = 0$ limite l'ouverture dynamique, les dimensions (cercles) sont restreintes pour $\delta > 0$. Ces dimensions sont prises en compte pour le calcul de la durée de vie Touschek en mode nonlinéaire.

Dans tous les cas, il est absolument nécessaire prendre en compte le second ordre pour calculer la durée de vie Touschek. En effet, au-delà de 8 MV, les résultats obtenus par les calculs linéaire et nonlinéaire sont très différents; cette différence atteint un facteur 3 à 12 MV (cf. Fig. 3.34).

3.3.3 Second jeu hexapolaire

Le second jeu hexapolaire est une tentative d'optimisation du point de fonctionnement précédent (pas d'améliorations expérimentales notables sauf à fort courant¹⁸). Seule la pente à l'origine de la courbe en fréquence est modifiée de -2.3×10^4 à -8.4×10^3 en modifiant les réglages hexapolaires. Cependant la dynamique du faisceau est complètement modifiée (cf. Fig. 3.36). Nous nous attarderons sur la comparaison des deux optiques.

3.3.3.1 Dynamique *on momentum*

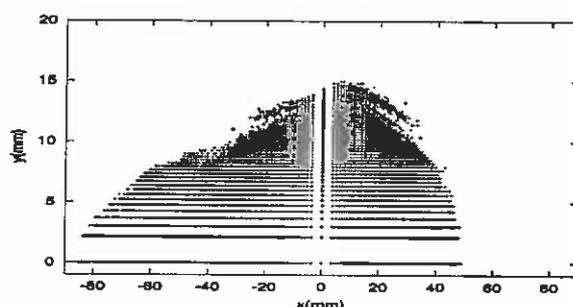


FIG. 3.36: Ouverture dynamique : second jeu hexapolaire de l'ESRF pour $s = 0$, ($\beta_x = 35.6 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). Elle est toujours très dissymétrique mais plus régulière que pour le premier jeu hexapolaire.

L'ouverture dynamique (cf. Fig. 3.36) est encore plus grande que celle obtenue pour le premier réglage (cf. Fig. 3.28) : $[-80, 45]_{y=0} \times [-15, 15]_{x=0}$ mm, plus régulière mais elle est toujours surestimée. Comme précédemment, la carte en fréquence (Fig. 3.37, voir aussi les cartes en couleur B.11) présente un repliement et peut être scindée en deux parties (Fig. 3.38) :

- *première partie* (Fig. 3.38-a,b) correspondant aux amplitudes initiales $[-30, 20] \times [-8, 8]$ mm dans l'espace des configurations, avec un glissement des nombres d'ondes très faible ($\Delta\nu_x \approx 0.2$, $\Delta\nu_y \approx 0.1$). Cette partie est extrêmement régulière et pratiquement exempte de résonances avec peu de diffusion.
- *seconde partie* (Fig. 3.38-c,d) qui est fournie en résonances ; les principales résonances sont données par la figure 3.39. Bien que la résonance entière $\nu_x - 36 = 0$ ne soit jamais atteinte, la résonance d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ est déjà fortement excitée pour une machine idéale puisqu'elle capture toutes les particules de conditions initiales $x \in [-74, -42] \cup [32, 35]$ mm.

De manière générale pour ce réglage, la dynamique est moins « compliquée » et beaucoup plus stable. Le glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude est plus faible, si bien que la résonance $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ est atteinte à une amplitude $x \approx 32$ mm soit aussi grande que l'ouverture physique ($x \approx 17$ mm pour le premier réglage hexapolaire).

¹⁸Communication personnelle de A. Ropert, 1999.

3.3. L'ESRF

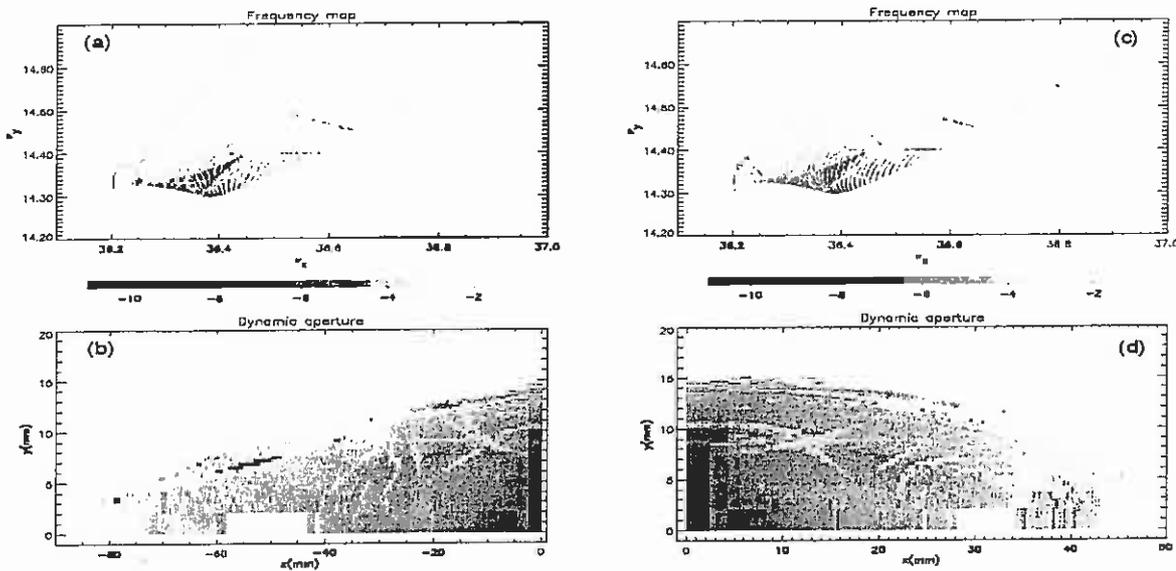


FIG. 3.37: Carte en fréquence et ouverture dynamique calculées pour le second réglage hexapolaire de l'ESRF pour une surface de section à $s = 0$ ($\beta_x = 36 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). La dynamique est dominée par la résonance d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$. La diffusion (niveaux de gris) est assez faible avec une grande ouverture dynamique.

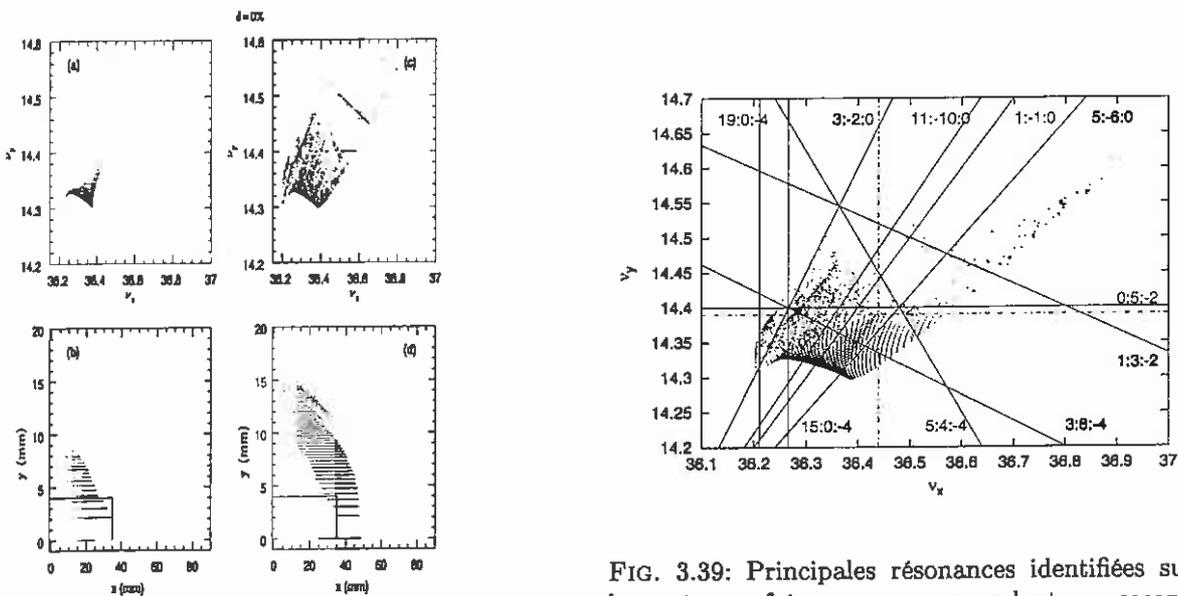


FIG. 3.38: Carte en fréquence de l'ESRF séparée en deux parties (a et c) pour faciliter la lecture : second réglage hexapolaire, pour $s = 0$, ($\beta_x = 36 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). L'ouverture physique représentée par un rectangle dans l'ouverture dynamique associée (b et d).

FIG. 3.39: Principales résonances identifiées sur la carte en fréquence correspondant au second réglage hexapolaire de l'ESRF. Le point de fonctionnement est à l'intersection des deux droites en traits pointillés. La carte en fréquence est repliée sur elle-même (voir aussi Fig. 3.38).

Deux orbites particulières ont été intégrées pour illustrer la diffusion au voisinage d'une résonance dans une zone de mouvement régulier et irrégulier (Fig. 3.40-a,b) :

La première orbite (O1) correspond aux conditions initiales $(x_0, y_0) = (15.81, 8.05)$ mm avec pour nombres d'ondes initiaux $(\nu_{0x}, \nu_{0y}) = (36.3728, 14.3728)$. L'intégration est réalisée sur 1 million de tours, les fréquences sont recalculées tous les 1 000 tours ; la particule oscille rapidement transversalement à la résonance $\nu_x - \nu_y - 22 = 0$ et lentement longitudinalement (voir aussi Fig. 3.39).

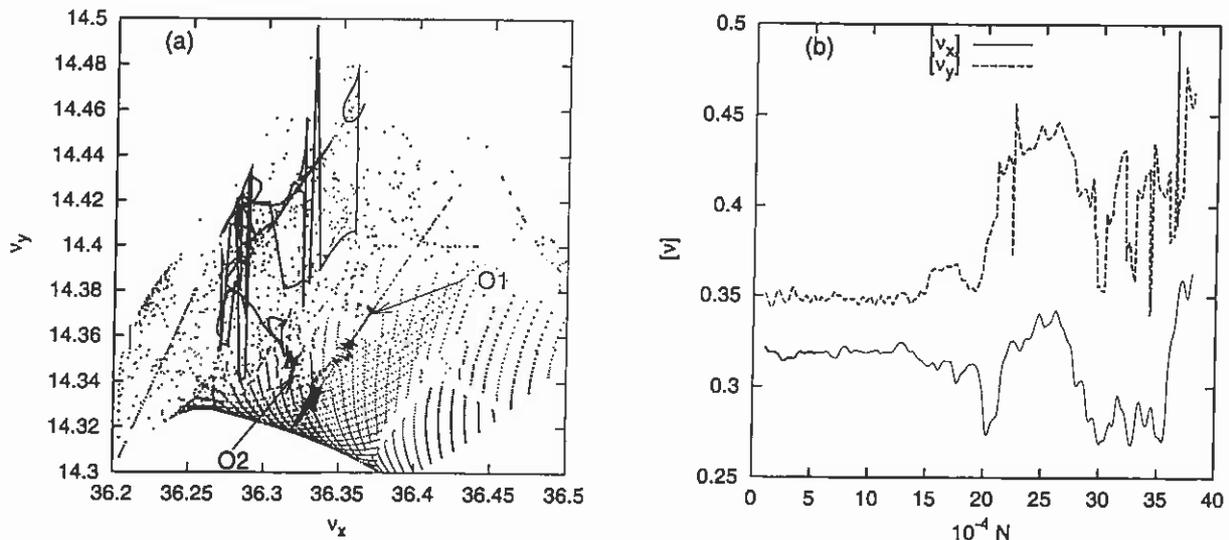


FIG. 3.40: Exemple de diffusion d'orbites (a) pour le second réglage de l'ESRF. La première orbite (O1) est intégrée sur 1 million de tours ; la particule oscille rapidement transversalement à la résonance $\nu_x - \nu_y - 22 = 0$ et lentement longitudinalement. La seconde orbite (O2) reste piégée 15 000 au voisinage de la résonance $11 : -10 : 0$ avant de diffuser rapidement dans la zone chaotique de la carte en fréquence. La variation de ses nombres d'ondes avec le nombre de tours N est tracée (b) jusqu'à sa perte au bout de 38 000 tours.

La seconde orbite (O2) est perdue au bout de 38 026 tours de l'anneau. Ses conditions initiales en amplitudes et en fréquences sont $(x_0, y_0) = (19.37, 9.86)$ mm et $(\nu_{0x}, \nu_{0y}) = (36.3216, 14.3520)$, soit au voisinage de la résonance $11\nu_x - 10\nu_y - 16 \times 16 = 0$. La particule y reste environ 15 000 tours avant de diffuser rapidement. L'évolution de la partie fractionnaire des nombres d'ondes avec le nombre de tours est donné par la figure 3.40-b.

3.3.3.2 Dynamique *off momentum*

Comme pour le premier réglage, les valeurs réduites des chromaticités sont légèrement positives ($\xi_x^{red} = 0.1$ et $\xi_y^{red} = 0.4$). Le glissement des nombres d'ondes avec l'énergie δ est illustré par la figure 3.42.

Les cartes en fréquence ont été tracées pour des écarts à l'énergie nominale compris entre -3% et 3% (Fig. 3.41) en considérant toujours une machine parfaite.

L'ouverture dynamique diminue avec δ (cf. Fig. 3.43) ; cette diminution est plus importante pour des écarts à l'énergie positifs.

L'allure et le repliement des cartes varient beaucoup avec δ . Pour de grands écarts en énergie, les cartes sont pratiquement « plates » ; notons cependant que pour $\delta = 2\%$, les

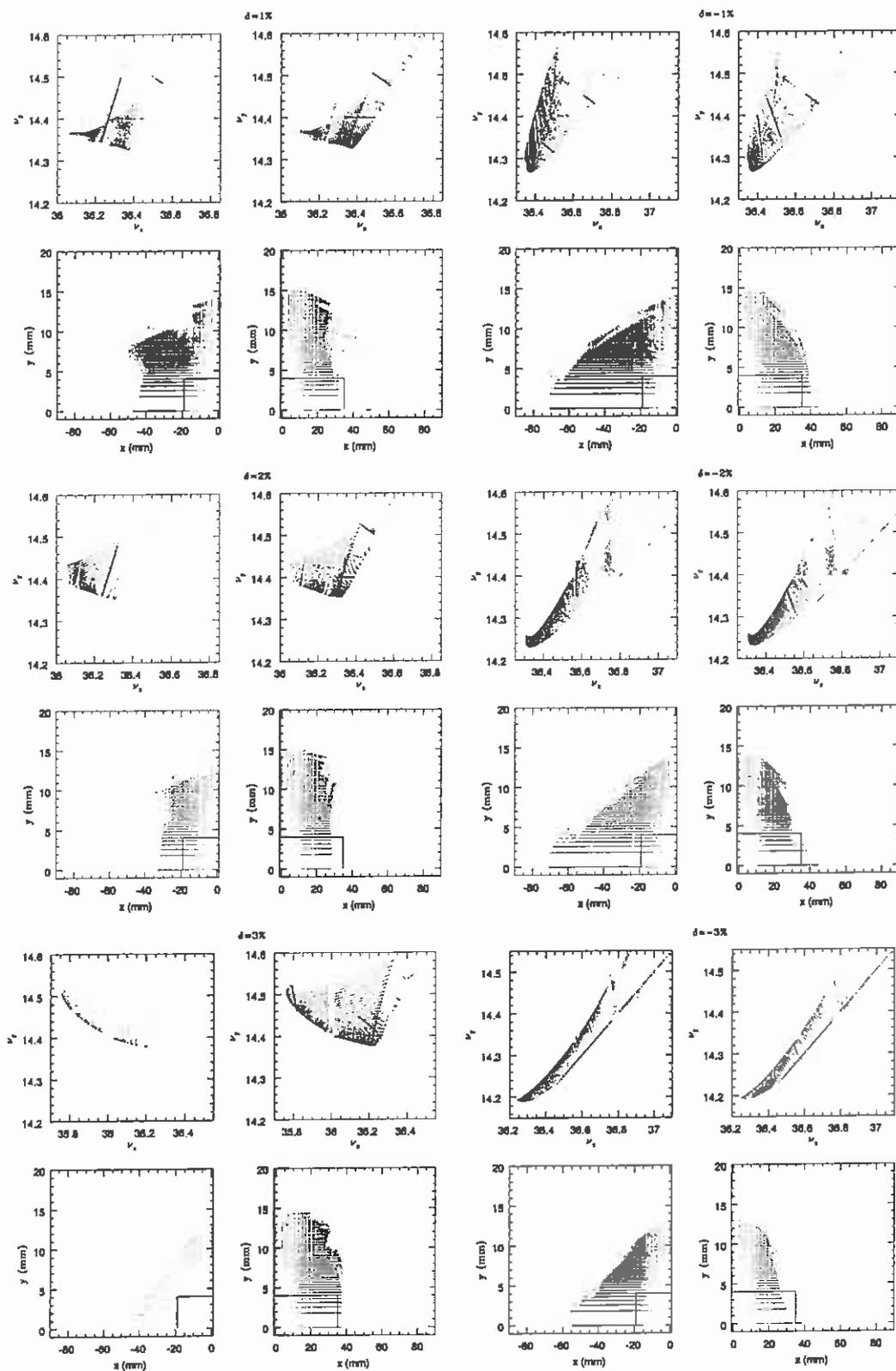


FIG. 3.41: Dynamique *off momentum* pour le second jeu hexapolaire de l'ESRF (colonne 1 : $\delta > 0$, colonne 2 : $\delta < 0$). Les cartes en fréquence sont profondément modifiées entre $\delta = -3\%$ et $\delta = 3\%$ (extension spatiale, repliement, résonances). Pour $\delta > 0$, la dynamique est dominée par la résonance d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ qui est atteinte à des amplitudes de plus en plus faibles.

nombre d'ondes diminuent avec l'amplitude (distances au centre du faisceau) alors que pour $\delta = -2\%$, ils augmentent avec l'amplitude.

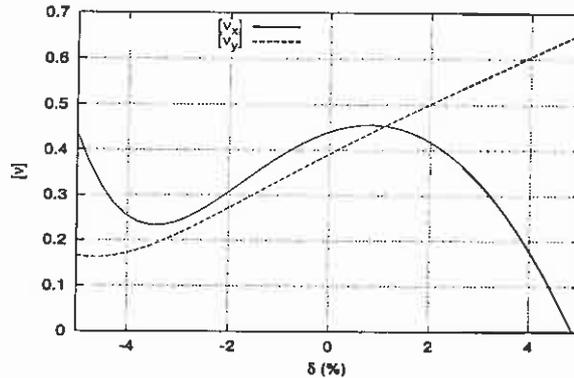


FIG. 3.42: Second réglage hexapolaire de l'ESRF : variation de la partie fractionnaire des nombres d'ondes avec l'énergie δ .

Pour $\delta > 0$, la résonance d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y = 80$ est atteinte beaucoup plus tôt, et surtout, la résonance $\nu_x = 36$, systématique d'ordre 4 et destructive ici, limite la dynamique ; ce qui explique la diminution drastique de plus de 50 % de l'ouverture dynamique entre 0% et +2%. Par contre au-delà de +3%, la résonance $\nu_x = 36$ n'est plus destructive pour une machine idéale : l'ouverture dynamique est de nouveau plus grande (frontière 2.3%).

Pour $\delta < 0$, de nouvelles résonances de couplages (Tab. 3.13) apparaissent de par le déplacement du point de fonctionnement avec l'énergie.

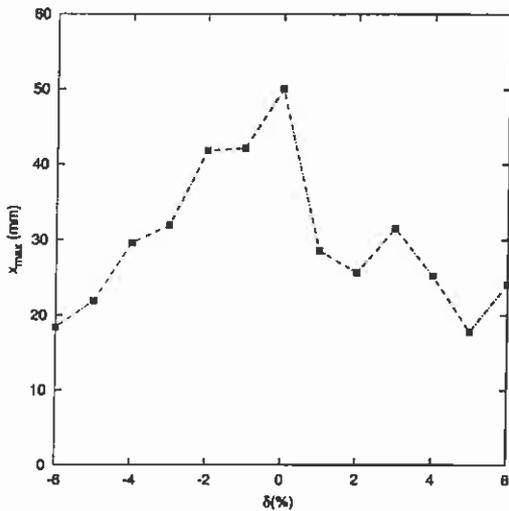


FIG. 3.43: Second réglage de l'ESRF : variation de l'ouverture dynamique horizontale avec l'énergie (δ). Les dimensions sont données par rapport à l'orbite fermée. Elles sont prises en compte pour le calcul de la durée de vie Touschek en mode non-linéaire.

$p\nu_x + q\nu_y + r = 0$	Ordre
$\nu_x - 36 = 0$	1 : 0 : 0
$4\nu_x + 1\nu_y - 10 \times 16 = 0$	4 : 1 : 2
$1\nu_x - 2\nu_y - 8 = 0$	1 : -2 : 0
$7\nu_x - 16 \times 16 = 0$	7 : 0 : 4
$5\nu_x + 2\nu_y - 13 \times 16 = 0$	5 : 2 : 0
$7\nu_x - 2\nu_y - 14 \times 16 = 0$	7 : -2 : 0
$11\nu_x - 25 \times 16 = 0$	11 : 0 : 4
$\nu_x + 12\nu_y - 13 \times 16 = 0$	1 : 12 : 4

TAB. 3.13: Résonances identifiées sur les cartes en fréquence *off momentum* à $\delta \neq 0$ pour le deuxième réglage hexapolaire de l'ESRF.

3.3.3.3 Conclusion préliminaire

Comme annoncé précédemment, les résonances $3\nu_x - 2\nu_y = 80$ et $\nu_x = 36$ ont une grande amplitude qu'il faudrait essayer de réduire pour améliorer l'ouverture dynamique pour $\delta > 0$.

Pour $\delta \neq 0$, l'extension des cartes en fréquence est plus importante que pour l'énergie nominale. D'autres résonances vont alors dominer dans la dynamique aux différentes amplitudes.

L'acceptance dynamique diminue avec δ , mais dans le pire des cas elle reste comparable avec l'acceptance physique.

La surcompensation de la chromaticité a l'inconvénient majeur de compliquer l'optimisation, puisque les points de fonctionnement dépendent fortement de l'énergie de la particule. Idéalement, il faudrait pouvoir optimiser la dynamique aux différentes énergies.

3.3.3.4 Durée de vie Touschek

La durée de vie Touschek est calculée de la même manière que pour le premier réglage hexapolaire. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 3.14 (voir aussi les figures 3.44-a et b).

			Mode multipaquets		Mode faible nombre de paquets	
V_{RF} (MV)	ϵ_{RF} (%)	σ_l (mm)	T_{tous}^{lin} (h)	T_{tous} (h)	T_{tous}^{lin} (h)	T_{tous} (h)
8	3.38	4.7	231	225	4.4	4.2
9	4.03	4.3	377	313	7.1	5.9
10	4.60	4.0	555	378	10.1	7.1
11	5.13	3.8	760	418	14.3	7.9
12	5.61	3.6	947	440	17.9	8.3

TAB. 3.14: Modes multipaquets et faible nombre de paquets : durée de vie Touschek pour le second réglage hexapolaire de l'ESRF en calcul linéaire et nonlinéaire pour une tension RF comprise entre 8 MV et 12 MV. Pour chaque tension, l'acceptance RF (ϵ_{RF}) et la longueur naturelle du paquet (σ_l) sont également données.

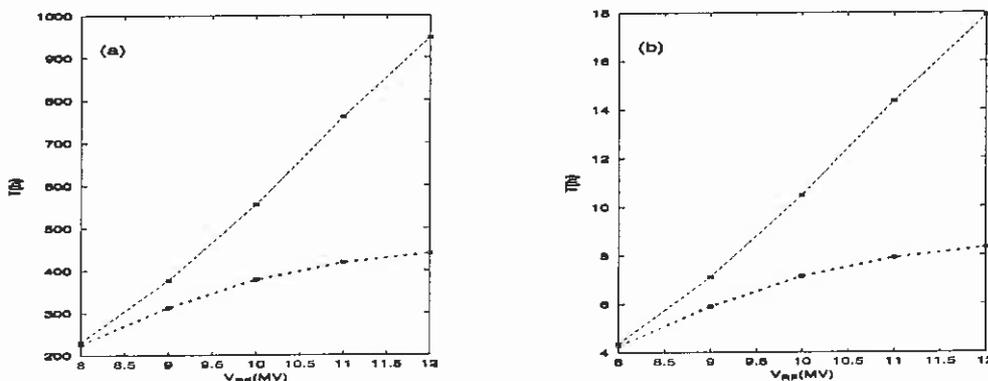


FIG. 3.44: Durée de vie Touschek pour le second réglage de l'ESRF en mode multipaquets (a) et faible nombre de paquets (b). Une saturation de la durée de vie est observée pour les calculs en mode nonlinéaire (cercles) par rapport au calcul linéaire (carrés) et donnent des résultats deux fois plus faibles à 12 MV.

En comparant les durées de vie Touschek obtenues pour les deux réglages hexapolaires de l'ESRF (Fig. 3.34 et Fig. 3.44), nous constatons que le second réglage est meilleur. Ce résultat se comprend bien si l'on se rappelle que la dynamique *off momentum* du premier réglage est fortement marquée par la résonance entière $\nu_x - 36 = 0$, si bien qu'il faut prendre en compte dans les calculs l'ouverture dynamique *off momentum* qui est alors le facteur limitatif. Ces résultats tendraient à corroborer les mesures expérimentales. Il faut toutefois reconnaître que les durées de vie mesurées sont bien plus faibles.

3.3.4 Conclusions sur les deux réglages nominaux

Pour le point de fonctionnement $(\nu_x, \nu_y) = (36.44, 14.39)$ la dynamique du deuxième jeu hexapolaire semble être la plus « stable » : peu de résonances au voisinage du point de fonctionnement, faible diffusion, ouverture dynamique plus grande que l'acceptance physique jusqu'à $\delta = \pm 3\%$.

Pour le premier jeu hexapolaire, nous constatons qu'il y a plus de résonances qui induisent une diffusion globalement plus importante. La dynamique est fortement perturbée par la résonance entière. Si nous faisons l'hypothèse que celle-ci limite l'ouverture dynamique, la durée de vie Touschek serait alors réduite.

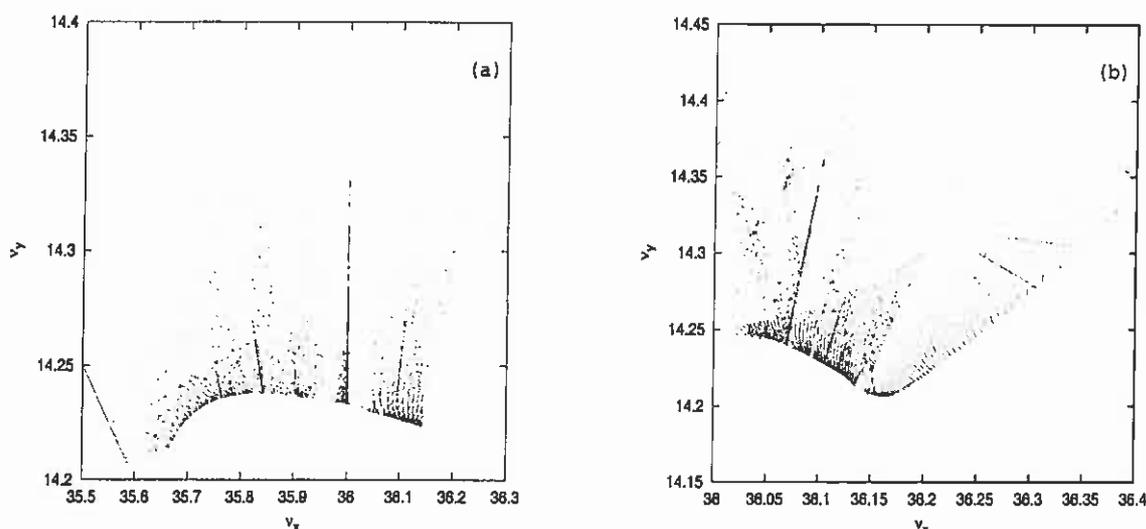


FIG. 3.45: Cartes en fréquence pour le point de fonctionnement historique de l'ESRF pour les deux réglages hexapolaires choisis (a et b). Le point de fonctionnement est beaucoup trop proche des résonances entières : la zone effective de stabilité est petite, l'injection est réalisée au voisinage de résonances et la diffusion des orbites est globalement très élevée.

Le point de fonctionnement historique de l'ESRF avait pour nombres d'ondes $(\nu_x, \nu_y) = (36.2, 14.3)$. Une étude a également été faite pour comprendre pourquoi les performances de l'anneau étaient bien trop faibles pour les deux réglages hexapolaires nominaux. En fait la dynamique est globalement plus mauvaise, car la résonance entière, plus proche du point de fonctionnement, est atteinte à plus faible amplitude. Les cartes en fréquence pour les deux réglages hexapolaires (cf. Fig. 3.45) sont peuplées de résonances avec une diffusion des orbites très élevée et des ouvertures dynamiques petites. Pour le premier jeu hexapolaire (cf.

Fig. 3.45-a), la dynamique est « catastrophique » : le point de fonctionnement est trop proche des résonances entières $\nu_x = 36$ et $\nu_y = 14$, résonances qui sont les premières à éviter lorsque l'on choisi le point de fonctionnement d'un accélérateur. L'auteur est perplexe et ne comprend pas quels critères ont pu amener à ce choix. Le point de fonctionnement actuel de l'ESRF, choisi à la suite de discussion avec le groupe faisceau du projet SOLEIL, diffère uniquement par l'éloignement de la résonance entière $\nu_y = 14$.

3.4 L'ALS

La Source de Lumière Avancée du *Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory* (Advanced Light Source, ALS [3] et [4]) a eu sa première lumière en 1993. Mise en service juste après l'ESRF, son énergie est plus basse, 1.5–1.9 GeV contre 6 GeV, elle est donc plus optimisée pour les rayons UV et « X-mou ».

Une première étude théorique de l'ALS avec l'Analyse en Fréquence a été réalisée dès 1993 par Dumas et Laskar. Le point de fonctionnement actuel de l'ALS est très voisin de celui proposés en 1996 par Laskar et Robin.

3.4.1 Optique

L'ALS a une périodicité 12, sa maille est construite sur une structure *triple bend achromat* (TBA) avec symétrie centrale (cf. fonctions optiques Fig. 3.46). Les nonlinéarités sont introduites par les deux uniques familles d'hexapôles utilisées pour corriger la chromaticités à des valeurs légèrement positives, $(\xi_x^{red}, \xi_y^{red}) = (0.5, 1)$ (cf. Tab. 3.15). Les logiciels DESPOT [42] et TRACY2 [11] ont été utilisés pour intégrer les particules « test » sur deux fois 1 000 tours, *i.e.* deux fois un vingtième du temps d'amortissement de l'anneau.

Energie (GeV)	1.5–1.9
Circonférence (m)	196.8
Emittance (nm.rad)	4
Chromaticités naturelles	−24.6 , −26.7
Chromaticités réduites	0.5 , 1.0
Point de fonctionnement	14.25, 8.18
Ouverture physique (mm)	25, ±2.5

TAB. 3.15: Paramètres nominaux de l'ALS

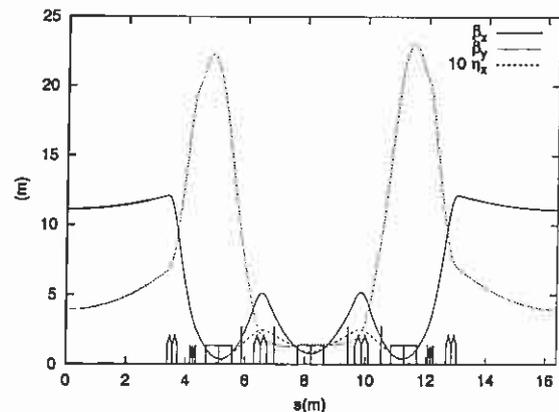


FIG. 3.46: Une des douze cellules TBA de l'ALS

3.4.2 Dynamique

Nous avons commencé par étudier une maille parfaite de l'ALS. L'anneau a alors sa périodicité 12 permettant de réduire grandement le nombre de résonances permises. Il s'ensuit que l'ouverture dynamique est très grande $[0, 22] \times [0, 10]$ mm alors qu'expérimentalement, le faisceau commence à être perdu dès l'amplitude $x \approx 11$ mm (cf. Fig. 3.47).

Contrairement autres machines étudiées, la carte en fréquence est très simple sans repliement : le point de fonctionnement $(\nu_x, \nu_y) = (14.25, 8.18)$ est le coin supérieur droit de la carte en fréquence 3.47. Le bord supérieur (respectivement inférieur) de la carte correspond à la variation des nombres d'ondes avec l'amplitude pour $x = 0$ (respectivement $y = 0$).

L'ensemble des résonances principales identifiées est donné par la figure 3.48. Les deux résonances les plus néfastes pour la dynamique sont la résonance entière $\nu_x = 8$ et la résonance de couplage¹⁹ $\nu_x - \nu_y - 6 = 0$. Loin du point de fonctionnement, les largeurs de résonance se recouvrent induisant des mouvements de nature chaotique avec une diffusion élevée. C'est également vrai sur les bords de l'ouverture dynamique (cf. Fig. 3.47, voir aussi la carte en couleur B.12).

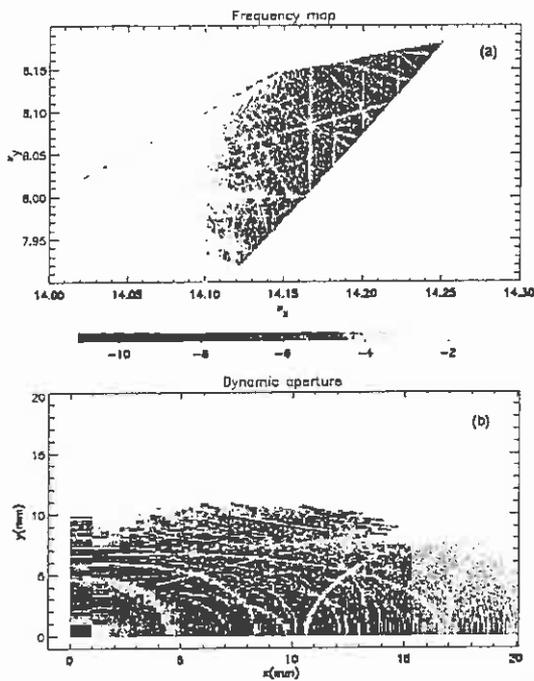


FIG. 3.47: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) calculées pour une maille parfaite de l'ALS pour la surface de section $s = 0$ ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$). La diffusion permet de nettement distinguer le réseau de résonance sur les deux figures.

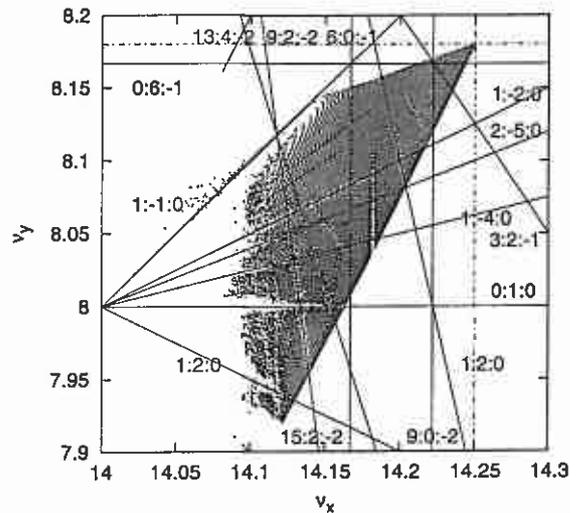


FIG. 3.48: Carte en fréquence de l'ALS sans défaut magnétique avec les principales résonances pour la surface de section $s = 0$ ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$). Le point de fonctionnement est à l'intersection des lignes en traits pointillés. Les résonances les plus néfastes pour la dynamique sont la résonance de couplage 1 :-1 :0 et la résonance entière $\nu_y = 8$ qui ne sera jamais traversée en pratique.

3.4.3 Vers un modèle plus réaliste (I)

Une maille plus réaliste de l'ALS peut être modélisée en prenant en compte les erreurs de gradients déduites de l'analyse de la matrice-réponse²⁰ non couplée (Robin, Safranek et Decking, 1998 et 1999) en utilisant le programme LOCO (Safranek, 1997). Les matrices-réponse de l'anneau sont mesurées chaque semaine pour déterminer si l'optique de la machine a changé ou non de manière significative. Les défauts mesurés sur les forces quadripolaires

¹⁹La résonance de couplage est volontairement excitée en expérience afin d'augmenter artificiellement le couplage. Un couplage de 4% permet d'obtenir des durées de vie satisfaisantes pour les utilisateurs.

²⁰La matrice-réponse d'un accélérateur circulaire est définie rigoureusement au chapitre 5, p. 133.

correspondent en moyenne à des variations de 0.36% rms des valeurs nominales pour les quadripôles défocalisants et 0.2% rms pour les quadripôles focalisants ; ces variations sont loin d'être négligeables et vont induire de profondes modifications de la dynamique.

Les nouvelles carte en fréquence et ouverture dynamique sont données par la figure 3.49 (voir aussi la carte en couleur B.13) : la dynamique globale est complètement modifiée, la 12-périodicité brisée, donc la condition de résonance est beaucoup moins sévère. En particulier la résonance entière $\nu_x = 8$ est excitée par les défauts quadripolaires comme la théorie le prévoit (voir par exemple chap. II *in Accelerator Physics*, Lee, 1998) et toutes les orbites dans son voisinage et à plus grandes amplitudes sont instables (quelques centaines de tours).

Les nouvelles dimensions de l'ouverture dynamique sont maintenant $[0, 12] \times [0, 8]$ mm. L'ouverture dynamique horizontale est maintenant plus petite que l'ouverture physique (cf. Tab. 3.15). En effet dans le plan horizontal, elle est limitée par la résonance de couplage $\nu_x - 2\nu_y + 2 = 0$. Expérimentalement, en utilisant un *scraper*²¹ horizontal ou en déplaçant le faisceau, nous retrouvons une ouverture dynamique similaire (Decking et Robin, 1999).

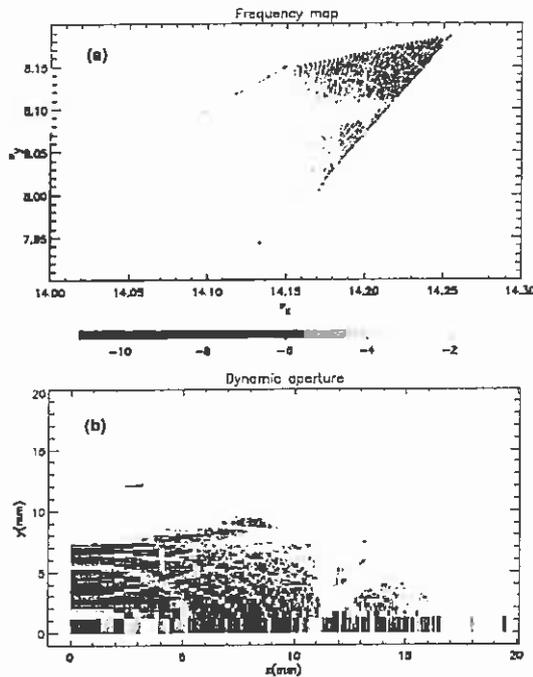


FIG. 3.49: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) de l'ALS : maille avec défauts quadripolaires mesurés pour un surface de section en $s = 0$ ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$). La 12-périodicité de l'anneau est brisée, l'extension spatiale de la carte en fréquence est réduite d'un facteur 2 dans le plan vertical.

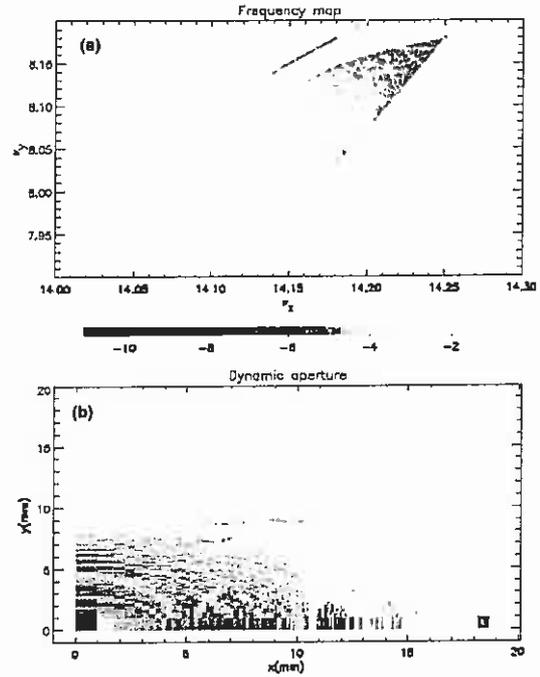


FIG. 3.50: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) de l'ALS ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$) : influence d'un couplage effectif de 1% ajusté à partir des quadripôles tournés. La diffusion est globalement plus élevée. Seule la région voisine du point de fonctionnement reste régulière.

²¹En français, « épilucheur » de faisceau : élément physique que l'on insère dans la chambre à vide de l'anneau de stockage pour arrêter le faisceau.

L'extension de la carte en fréquence est réduite verticalement d'un facteur deux. Les résonances d'ordre 5 sont excitées : $4\nu_x + \nu_y - 65 = 0$, $3\nu_x + 2\nu_y - 59 = 0$ et $2\nu_x + 3\nu_y - 53 = 0$, ce sont des résonances non permises par la 12-périodicité (cf. Fig. 3.51).

De manière générale, la zone de stabilité est réduite au voisinage du point de fonctionnement. Toutes les particules ayant un indice de diffusion inférieur à moins six seront sans doute perdues si l'on intègre les trajectoires plus longtemps.

3.4.4 Vers un modèle plus réaliste (II)

Le modèle de l'ALS peut encore être affiné en introduisant du couplage modélisé par des erreurs de gradients de quadripôles tournés. Ces défauts sont également déduits des mesures de matrices-réponses couplées (Robin, Safranek, Decking, 1999) pour avoir un couplage effectif de 1%. Les écarts en valeur rms sont de l'ordre de 0.3%.

Il apparaît clairement à la lecture de la nouvelle carte en fréquence (cf. Fig. 3.50 à comparer avec Fig. 3.49, voir aussi la carte en couleur B.14) que la dynamique est encore plus instable : la diffusion est plus élevée, les largeurs de résonances sont plus grandes ; la majorité des orbites situées sur la carte en fréquence à gauche de la résonance d'ordre 5, $4\nu_x + \nu_y - 65 = 0$ ont un coefficient de diffusion très élevé ($D > -2$) : les lignes de résonances sont moins lisibles dénotant la superposition des largeurs de résonances. Les particules peuvent plus facilement et rapidement diffuser, toute structure régulière est perdue. En fonctionnement réel, la dynamique du faisceau de l'ALS est certainement encore moins stable : en effet d'autres défauts magnétiques ainsi que l'influence de la dynamique longitudinale ont été négligés dans cette étude. La résonance $4\nu_x + \nu_y - 65 = 0$ peut être considérée comme limitant l'ouverture dynamique (cf. Fig. 3.51).

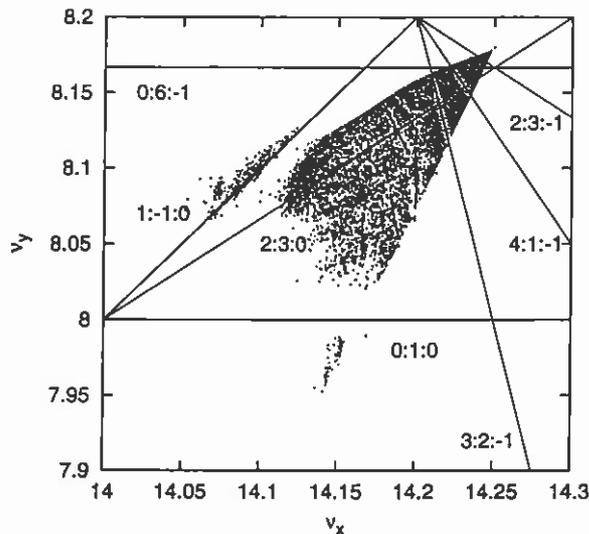


FIG. 3.51: Carte en fréquence de l'ALS avec les erreurs de gradients des quadripôles droits et tournés. Le point de fonctionnement est à l'intersection des lignes en traits pointillés. Des résonances d'ordre 5 non permise par la périodicité sont excitées par les défauts magnétiques, la diffusion est très élevée (cf. zones irrégulières).

3.4.5 Dynamique *off momentum*

La dynamique *off momentum* de l'ALS n'a pas été étudiée de manière exhaustive. Elle a pourtant un rôle déterminant sur la durée de vie du faisceau. Les figures 3.52 représentent la variation des nombres d'ondes en fonction de l'énergie, $\nu_u = f(\delta)$ ainsi que la variation du point de fonctionnement dans l'espace des fréquences. Les cartes en fréquence (Fig. 3.53) ont été tracées pour une machine idéale 12-périodique et pour des écarts à l'énergie nominale $\delta = \pm 1\%, \pm 2\%, \pm 3\%$. En s'appuyant sur la comparaison des cartes en fréquence 3.47, 3.49 et 3.50 le lecteur pourra aisément prédire l'évolution des cartes en fréquence 3.53 si les défauts magnétiques mesurés sont incorporés au modèle.

Nous donnons quelques indices de lecture de ces cartes en fréquence. L'introduction des défauts magnétiques ne peut que détériorer la dynamique du faisceau. S'ils sont suffisamment élevés, comme nous l'avons vu, alors la 12-périodicité de l'anneau est brisée. Les résonances non permises vont en particulier être plus excitées. Ceci se traduit par l'augmentation des largeurs des résonances et une plus grande probabilité de recouvrement des résonances, siège du chaos. Cette détérioration globale de la dynamique est d'autant plus importante que les particules oscillent avec de plus grandes amplitudes.

Une des caractéristiques de l'Analyse en Fréquence est sa capacité de prédiction lorsque l'on lit une carte en fréquence. Par exemple, la dynamique *off momentum* de l'ALS est déjà, pour une machine idéale, fortement marquée par le nœud entre les résonances $\nu_x - 4\nu_y + 18 = 0$, $5\nu_x + 2\nu_y - 87 = 0$ et $6\nu_x - 2\nu_y - 69 = 0$ (cf. carte 3.53 pour $\delta = -3\%$) et le nœud entre les résonances $6\nu_x + 4\nu_y - 117 = 0$, $\nu_x - \nu_y - 6 = 0$ et $2\nu_x + 8\nu_y - 93 = 0$ (cf. carte pour $\delta = +3\%$). Toute la dynamique en leur voisinage respectif et aux amplitudes plus élevées sera instable pour la machine réelle.

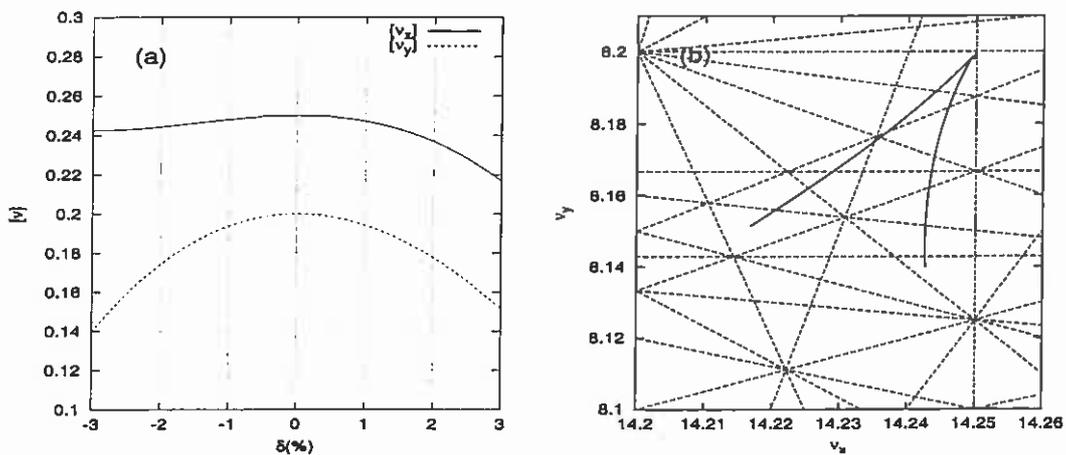


FIG. 3.52: (a) : Variation de la partie fractionnaire des nombres d'ondes de l'ALS en fonction de l'énergie (δ). (b) : Déplacement du point de fonctionnement dans le diagramme des résonances tracées jusqu'à l'ordre 7.

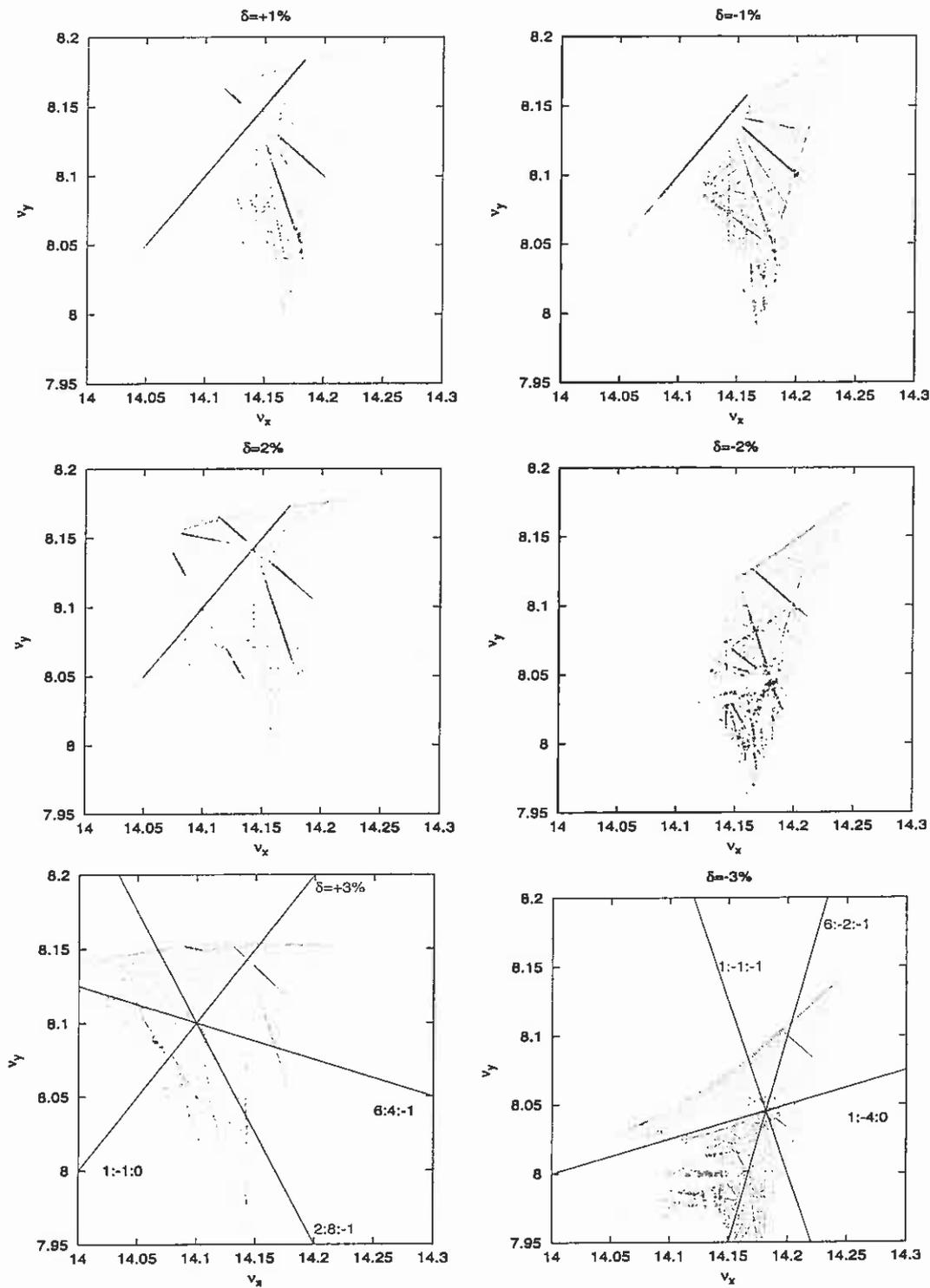


FIG. 3.53: Dynamique *off momentum* (colonne 1 $\delta > 0$, colonne 2 $\delta < 0$) de l'ALS considérée comme machine idéale. Pour $\delta > 0$ la résonance de couplage $1:-1:0$ est atteinte pour des amplitudes de plus en plus faibles. Ceci est bien confirmé expérimentalement. Les cartes en fréquence ne présentent pas de repliement, car il n'y a que deux familles d'hexapôles utilisées pour ajuster les chromaticités.

3.4.6 Conclusion

L'ALS est une machine relativement « simple ». Les cartes en fréquence sont « plates » sans repliement. Il n'y a que deux familles d'hexapôles utilisées pour ajuster la chromaticité. En contrepartie, si la dynamique est très nonlinéaire, le seul recours est de déplacer le point de fonctionnement dans une région du diagramme des résonances vierge de résonance. Il n'existe pas de famille hexapolaire pour réduire les largeurs des résonances. L'Analyse en Fréquence permet de mettre en évidence clairement toutes les résonances principales, en particulier les résonances de couplage (couplées) non vues ni étudiées dans les processus d'optimisation traditionnels.

Pour étudier l'influence des défauts magnétiques sur la dynamique globale du faisceau, on procède habituellement par tirages aléatoires de jeux de défauts (méthodes statistiques, Méthode de Monte Carlo). Cette méthode est très coûteuse en termes de temps de calcul mais est la seule possible lorsque la machine n'est pas encore construite.

La méthode que nous avons retenue est d'utiliser les défauts magnétiques mesurés sur l'anneau de stockage — uniquement possible si la machine est en fonctionnement —. Cette méthode ne nécessite qu'un seul jeu de défaut et donne des résultats très satisfaisants comme nous l'avons vu pour l'ALS

Les cartes en fréquence calculées pour l'ALS permettent d'expliquer un certain nombre de résultats expérimentaux, en particulier l'efficacité de l'injection ; la prise en compte de la dynamique *off momentum* devrait permettre d'obtenir des durées de vie s'approchant des mesures expérimentales. Les dimensions de l'ouverture dynamique déduite de cette étude sont compatibles avec les mesures sur l'anneau. Ce dernier point est également remarquable, car généralement l'écart entre théorie et expérience est souvent supérieur à un facteur deux sur la plupart des sources de lumière (*e.g.* à l'ESRF). D'autres résultats plus spectaculaires ont été obtenus sur l'ALS. Je renvoie le lecteur à la partie expérimentale de cette thèse (chapitre suivant).

Je voudrais insister sur le fait que ces premiers résultats n'ont été possibles que parce qu'au préalable un long travail de caractérisation de la machine avait été réalisé. L'ALS est un anneau de stockage équipé d'un grand nombre d'outils de diagnostic prévus dès la construction : moniteurs de position tour par tour, aimants rapides permettant de perturber le faisceau sur un seul tour de machine, perturbateurs horizontal et vertical. Ce sont les « yeux et les oreilles » du physicien des accélérateurs. Il est ainsi possible d'explorer la dynamique du faisceau. A cela, il convient d'ajouter que chaque année, de nombreuses heures ont été et sont encore réservées uniquement à l'amélioration de la modélisation de l'anneau.

Deuxième partie

Résultats expérimentaux

Chapitre 4

ALS : Premières cartes en fréquence expérimentales

4.1 Introduction

Nous avons vu qu'il est difficile de modéliser correctement la dynamique réelle d'un anneau de stockage, car il faut être capable d'identifier les principales résonances pour essayer ensuite de limiter leur influence. Ce travail est délicat si bien que souvent l'écart entre les performances escomptées et réelles pour une machine donnée peut atteindre plus d'un facteur deux. L'Analyse en Fréquence est ici utilisée pour réaliser ce lien entre théorie et expérience.

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé des cartes en fréquence de l'ALS considérée soit comme une machine idéale avec sa 12-périodicité, soit comme une machine réelle, *i.e.* incorporant les défauts magnétiques mesurés. Pour mémoire, les nombres d'ondes choisis correspondent au point de fonctionnement nominal de l'ALS, tout comme les chromaticités qui sont légèrement surcompensées. Les deux cartes en fréquence obtenues (voir figure 4.1) mettent en évidence combien la dynamique est sensible aux défauts magnétiques : leur introduction réduit d'un facteur deux l'extension spatiale de la carte en fréquence, les largeurs de résonances sont plus importantes, de nouvelles droites de résonance apparaissent et la stabilité du faisceau est fortement détériorée. Les performances déduites de ce nouveau modèle sont maintenant beaucoup plus proches de l'expérience. L'ultime étape est désormais de pouvoir comparer notre modélisation de l'ALS directement avec la machine en fonctionnement.

Les résultats que nous avons obtenus s'inscrivent dans une longue collaboration entre J. Laskar et le groupe accélérateur de D. Robin à Berkeley. Une première étude théorique de l'ALS avec l'Analyse en Fréquence a été réalisée dès 1993 (Dumas et Laskar, 1993). Les réglages magnétiques utilisés actuellement sur l'ALS sont très voisins de ceux proposés en 1996 (Laskar et Robin, 1996) et avaient permis d'améliorer significativement les performances machine (temps d'injection du faisceau dans l'anneau, durée de vie). Cependant des écarts encore importants subsistaient entre la théorie et l'expérience. Un long et délicat travail de caractérisation des défauts magnétiques expérimentaux de chaque type d'aimant a été entrepris jusqu'à ce jour.

Cette étape préliminaire est fondamentale et est une condition *sine qua non* avant toute tentative d'étude de la dynamique nonlinéaire. Elle a permis d'obtenir une calibration du

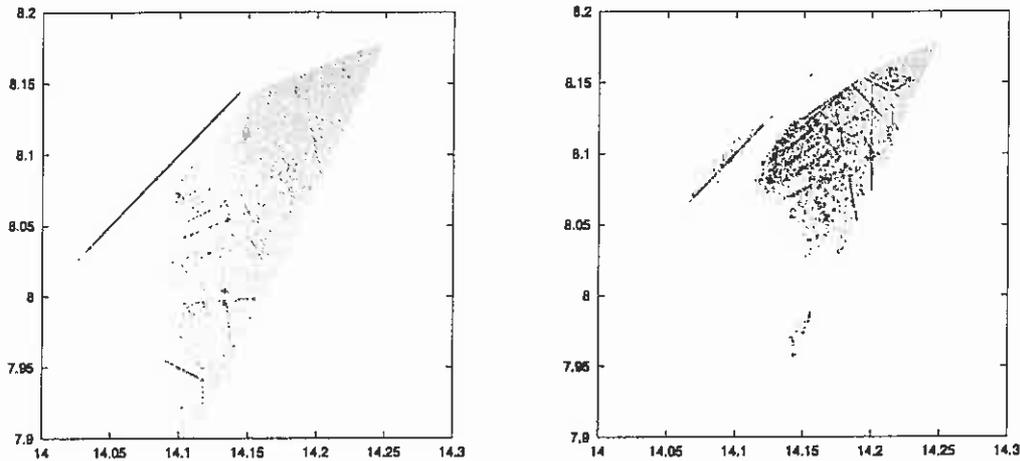


FIG. 4.1: Cartes en fréquence de l'ALS idéal (à gauche) et en incluant les défauts magnétiques (à droite) tracées pour une surface de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$). Les défauts des quadripôles droits et tournés déduits des matrices-réponse expérimentales brisent la symétrie 12 de l'anneau ; seule la région voisine du point de fonctionnement reste régulière (Robin, Steier, Laskar et Nadolski, 2000).

modèle linéaire de l'ALS. Pour cela, les matrices-réponse expérimentales¹ sont analysées depuis de nombreuses années (Robin, Safranek et Decking, 1999) en utilisant le programme LOCO (Safranek, 1997) que nous décrivons dans le chapitre 5. Dans cette analyse, tous les gradients quadripolaires (naturels et induits dans les hexapôles) sont déterminés avec une précision d'environ un millième. Après correction, les battements des fonctions β sont relativement faibles, 1% et 2% respectivement dans les plans horizontal et vertical. De plus, le programme LOCO a été récemment modifié pour permettre de modéliser le couplage à partir des matrices-réponse de l'anneau en un temps de calcul non prohibitif (Steier, 2000).

Les questions que l'on se pose actuellement sont : quelle fiabilité accorder à ce modèle de l'anneau ? Que se passe-t-il si nous modifions l'optique de la machine ? Quel est l'impact des sections à faible fonction β (*low beta insertion straight sections*), l'impact de l'introduction de nouveaux éléments ? Par exemple, au mois d'août 2001, trois des trente-six dipôles (à 1.3 Tesla) de l'ALS seront remplacés par des aimants supraconducteurs (à 5 Tesla). Comment améliorer les performances de l'anneau aujourd'hui ?

4.2 Etapes préparatoires

Pour commencer, il est important de rappeler, que le type de mesure que nous allons décrire étaient les premières de cette catégorie, si bien qu'un certain nombre de petites expériences préparatoires (calibration, réponse de l'électronique, écriture des routines de contrôles) ont été faites dès mon arrivée dans le groupe théorie de l'Advanced Light Source.

Deux outils fondamentaux ont permis de réaliser les mesures. Le premier consiste en un couple d'aimants rapides capables de donner une impulsion au faisceau ; l'un délivre une

¹La matrice-réponse de l'ALS non couplée contient 15 744 éléments, les paramètres d'ajustement sont les 50 gradients quadripolaires, les gains des (96+96) BPM, des (94+70) correcteurs, soit un total d'environ 500 paramètres (pour plus de détails, voir l'article Robin *et al.*, 1999).

impulsion horizontale (H), l'autre une impulsion verticale (V). Chaque aimant a un temps de réponse de 600 ns, soit un temps inférieur à celui mis par le faisceau pour faire un tour de machine (660 ns). Les deux aimants synchronisés permettent d'imprimer au faisceau des conditions initiales (x_0, y_0) . Le second outil est un jeu de deux moniteurs de position (BPM : *Beam Position Monitor*) tour par tour. Chaque BPM peut stocker 1 024 données consécutives et est synchronisé avec les aimants rapides. Les deux BPM ont été choisis de manière à avoir un bon rapport signal-sur-bruit respectivement dans le plan horizontal et vertical. Les amplitudes données aux faisceaux restent dans la gamme linéaire de réponse des BPM². Il est ainsi possible d'enregistrer la position du faisceau pendant les 1 024 premiers tours après l'impulsion.

4.2.1 Conditions expérimentales

Durant une expérience, l'anneau est rempli avec 40 paquets soit un huitième de l'anneau. Ce nombre a été choisi pour permettre tout à la fois d'obtenir une résolution satisfaisante sur les BPM et de ne pas avoir d'oscillation inter-paquets (phénomènes collectifs, champ de sillage, charge d'espace). Le courant injecté est de 10 mA, soit environ 4×10^{10} électrons.

Pour chaque expérience, deux jeux de mesures sont réalisés. D'abord, la matrice-réponse est enregistrée pour permettre de calibrer ultérieurement le modèle linéaire. Ensuite, les données tour par tour sont collectées pour construire la carte en fréquence. Comme en théorie et par soucis de temps d'expérience, le pas d'incrément des tensions des aimants rapides est choisi suivant une loi en racine carrée, ce qui permet d'obtenir des points espacés régulièrement dans l'espace des fréquences. Le temps d'acquisition est de 20 secondes pour chaque point (principalement dû à la réponse de l'électronique et à la bande passante du réseau), soit environ 4 heures pour une carte en fréquence complète.

Pour la première expérience, nous nous sommes placés dans les conditions de fonctionnement standard en ce qui concerne les nombres d'ondes et les chromaticités (cf. Tab. 4.1). L'optique linéaire a été mesurée et ajustée de telle manière à être aussi proche que possible d'une symétrie 12. Les battements de fonctions β sont de l'ordre de 2–3%, le couplage est de 1%.

Energie (GeV)	1.5–1.9
Circonférence (m)	196.8
Point de fonctionnement	14.25, 8.20
Chromaticités naturelles	–24.6, –26.7
Chromaticités réduites	0.5, 1.0

TAB. 4.1: Paramètres expérimentaux de l'ALS

L'étalonnage des aimants rapides avait antérieurement été réalisé : $1 \text{ kV} \leftrightarrow 1 \text{ mm}$ (H) et $3 \text{ kV} \leftrightarrow 1 \text{ mm}$ (V).

Avant de présenter les cartes en fréquence expérimentales, il est intéressant de dire quelques mots sur l'analyse des données expérimentales.

²Lors de notre premier essai, un courant de 2 mA avait été injecté dans un seul paquet, le courant était trop fort et le signal trop bruité pour des exploitations fines. Au second essai, 10 mA dans 80 paquets, de fortes instabilités et oscillations inter-paquets ont été observées.

La principale différence entre les résultats théoriques que nous avons présentés jusqu'ici et les mesures expérimentales tient dans le fait que nous observons non pas le mouvement d'un seul électron mais du centroïde d'un paquet d'environ un milliard d'électrons. La dynamique d'un paquet de particules est bien plus complexe à étudier, l'objectif étant d'extraire la dynamique d'une particule individuelle. Le nouveau phénomène mis en cause est la *décohérence du faisceau*³. En effet, avant qu'une impulsion ne soit donnée, le faisceau est amorti. Juste après l'impulsion (temps t_1), les particules d'un paquet oscillent toutes avec pratiquement la même amplitude et la même phase, on parle alors d'*oscillations cohérentes*. A cause de la dispersion des fréquences avec l'amplitude, les particules vont avoir un mouvement bêatron avec des fréquences d'oscillation également différentes. Petit à petit, les particules vont se déphaser les unes par rapport aux autres (temps t_2). Au bout d'un temps suffisamment long dit *temps de décohérence*, les phases des particules du paquet seront distribuées uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi[$; il n'y a plus aucune cohérence des oscillations et l'amplitude moyenne du faisceau, *i.e.* celle du centroïde, tend vers zéro. Ce processus est illustré par le schéma 4.2 où le paquet est constitué de n particules dont les amplitudes sont distribuées selon une gaussienne autour de la valeur imprimée par l'aimant rapide. On a supposé que le temps de décohérence est beaucoup plus court que les temps d'amortissement transverses du faisceau. La décohérence a deux origines principale : la dépendance nonlinéaire des nombres d'ondes avec l'amplitude bêatron et la dépendance linéaire des nombres d'ondes avec l'énergie (en première approximation) que nous allons décrire de manière exhaustive.

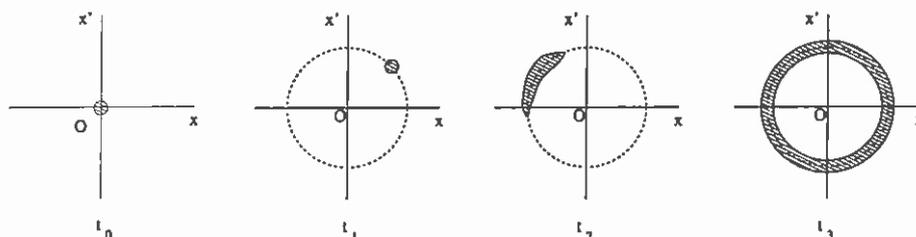


FIG. 4.2: Schéma descriptif de la décohérence dans l'espace des phases (x, x') . Au temps t_0 , le faisceau est amorti. Il est déplacé « d'un bloc » (t_1). Puis, les particules commencent à se déphaser les unes par rapport aux autres (t_2). Au temps t_3 , le faisceau a entièrement « décohéré », les particules sont réparties dans un anneau autour de la trajectoire de la particule centrale. La position du centroïde du faisceau est alors nulle.

Une question légitime est de savoir quelle va être l'influence de la décohérence sur l'analyse des résultats, et en particulier sur les nombres d'ondes déterminés.

4.3 La décohérence *ab ovo*

Le modèle que nous allons présenter est inspiré de la publication de Lee (1992), donnée lors du *Workshop on Nonlinear Problems In Accelerator Physics* de Berlin. Ce modèle est bidimensionnel, les particules sont supposées distribuées transversalement et longitudinalement suivant une loi de Gauss et la variation des nombres d'ondes est supposée linéaire en

³La décohérence est parfois appelée *filamentation du faisceau*.

l'écart en énergie δ et quadratique en l'amplitude, *i.e.* :

$$\begin{cases} \nu_x = \nu_{0x} + \xi_x \delta + k_{xx} x^2 + k_{xy} y^2 \\ \nu_y = \nu_{0y} + \xi_y \delta + k_{yx} x^2 + k_{yy} y^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

D'autres papiers ont été également très instructifs, voir par exemple Meller *et al.* (1987) et Ian (1990), ainsi que pour une formulation en variables actions-angles Shi et Ohnuma (1993).

Pour la présente formulation de la décohérence, les phénomènes suivants sont négligés :

- le couplage transverse x-y,
- le couplage synchro-bétatron,
- les phénomènes d'amortissement, d'excitation quantique, de mutuelle interaction des particules.

4.3.1 Décohérence due à la chromaticité

4.3.1.1 Déphase chromatique induit

Considérons une particule animée d'un mouvement bétatron (cf. chap. 1, Eq. 1.60). La variation du nombre d'ondes horizontal dépend de l'énergie de la particule à travers la chromaticité :

$$\nu_x = \nu_{0x} + \xi_x \delta + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (4.2)$$

où ξ_x est la fonction chromaticité et $\delta = \frac{dp}{p}$ l'écart à l'énergie nominale⁴.

Si l'on appelle (δ, Φ) ses coordonnées canoniques⁵ dans l'espace des phases longitudinal, alors dans l'approximation linéaire, la dynamique longitudinale est gouvernée par le Hamiltonien (voir par exemple Lee, 1998) :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \bar{h} \omega_0 \eta_c \delta^2 - \frac{\omega_0 e V \cos \Phi_s}{4\pi \beta^2 E} \Phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \bar{h} \omega_0 \eta_c \delta^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_s^2}{\bar{h} \eta_c \omega_0} \Phi^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec $\omega_s = 2\pi\nu_s = \omega_0 \sqrt{\frac{\bar{h} V e |\eta_c \cos \Phi_s|}{2\pi \beta^2 E}}$ la fréquence synchrotron, ω_0 la fréquence de révolution, Φ_s la phase synchrone, V la tension radiofréquence effective, E l'énergie de la particule, $\eta_c = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2} \approx \alpha_c$, \bar{h} le nombre d'harmoniques et t la variable indépendante.

La trajectoire de phase est une ellipse d'équation dont nous choisissons d'écrire le paramétrage sous la forme :

$$\begin{cases} \delta = \sigma_\delta \frac{\hat{\delta}}{\sigma_\delta} \cos(2\pi\nu_s t + \hat{\Phi}) \\ \Phi = \sigma_\Phi \frac{\hat{\delta}}{\sigma_\delta} \sin(2\pi\nu_s t + \hat{\Phi}) \end{cases} \quad (4.4)$$

⁴Si la chromaticité est parfaitement compensée, il est possible de décrire une expression de la décohérence avec la chromaticité nonlinéaire $\xi_{2x} : \nu_x = \nu_{0x} + \xi_{2x} \delta^2$ — voir par exemple (Lee, 1992) —.

⁵ ϕ est le déphasage par rapport à la phase synchrone et δ l'écart en énergie.

avec σ_δ et σ_Φ les dimensions d'équilibre des variables δ et Φ et $\pi\sigma_\delta\sigma_\Phi = \pi\sigma_\delta^2$, l'aire de l'ellipse de phase. Le glissement de la fréquence bétatron mesuré au n -ième tour s'écrit (Eq. 4.2 et 4.4) :

$$\Delta\nu_x(\hat{\delta}, \hat{\Phi}, n) = \xi \frac{\sigma_\delta}{\sigma_\delta} \hat{\delta} \cos(2\pi\nu_s n + \hat{\Phi}) \quad (4.5)$$

et le déphasage induit sur n tours pour la particule considérée est par définition :

$$\Delta\varphi_x(\hat{\delta}, \hat{\Phi}, n) = 2\pi \int_0^n \Delta\nu_x(\hat{\delta}, \hat{\Phi}, k) dk$$

soit en utilisant l'expression 4.5 :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_x(\hat{\delta}, \hat{\Phi}, n) &= \xi \hat{\delta} \frac{\sigma_\delta}{\sigma_\delta} \nu_s^{-1} (\sin(2\pi\nu_s n + \hat{\Phi}) - \sin(\hat{\Phi})) \\ &= [2\xi \nu_s^{-1} \sigma_\delta \sin(\pi\nu_s n)] \frac{\hat{\delta}}{\sigma_\delta} \cos(\pi\nu_s n + \hat{\Phi}) \\ &= \check{\alpha} \frac{\hat{\delta}}{\sigma_\delta} \cos(\pi\nu_s n + \hat{\Phi}) \quad \text{avec} \quad \check{\alpha} = [2\xi \nu_s^{-1} \sigma_\delta \sin(\pi\nu_s n)] \end{aligned}$$

Le nouveau mouvement bétatron horizontal de la particule d'amplitude initiale x_0 obéit à la loi :

$$x(n) = x_0 \cos(2\pi\nu_{0x} n + \varphi_x + \Delta\varphi_x(\hat{\delta}, \hat{\Phi}, n)) \quad (4.6)$$

Le mouvement du centroïde d'un paquet de particules distribuées en amplitude et phase selon une densité de probabilités $\hat{\rho}(\hat{\delta}, \hat{\Phi})$ s'exprime alors comme⁶ :

$$\langle x(n) \rangle = x_0 \iint \hat{\rho}(\hat{\delta}, \hat{\Phi}) \cos(2\pi\nu_{0x} n + \varphi_x + \Delta\varphi_x(\hat{\delta}, \hat{\Phi}, n)) d\hat{\delta} d\hat{\Phi} \quad (4.7)$$

4.3.1.2 Densité de probabilité longitudinale

Si les lois de distribution en amplitudes ρ_δ et en phases ρ_Φ des particules sont des gaussiennes de moyennes nulles et d'écart-types respectifs σ_δ et σ_Φ , alors la fonction de densité de probabilité conjointe est :

$$\begin{aligned} \rho(\delta, \Phi) &= \rho_\delta(\delta) \rho_\Phi(\Phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Phi} e^{-\frac{\Phi^2}{2\sigma_\Phi^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\delta\sigma_\Phi} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2} - \frac{\Phi^2}{2\sigma_\Phi^2}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

⁶Le résultat se transpose immédiatement pour le mouvement vertical $\langle y(n) \rangle$.

La fonction densité de probabilité $\hat{\rho}$ dans les nouvelles variables amplitude-phase $(\hat{\delta}, \hat{\Phi})$ se déduit immédiatement (Eq. 4.4 et 4.8) :

$$\hat{\rho}(\hat{\delta}, \hat{\Phi}) = \rho(\delta, \Phi)|J| = \frac{\hat{\delta}}{2\pi\sigma_{\hat{\delta}}^2} e^{-\frac{\hat{\delta}^2}{2\sigma_{\hat{\delta}}^2}} \quad (4.9)$$

où J est le jacobien de la transformation continue de coordonnées 4.4 : $(\delta, \Phi) \rightarrow (\hat{\delta}, \hat{\Phi})$.

4.3.1.3 Expression finale

Le mouvement du centroïde (Eq. 4.7) devient en utilisant l'équation 4.9 :

$$\begin{aligned} \langle x(n) \rangle = x_0 \iint \hat{\rho}(\hat{\delta}, \hat{\Phi}) \{ & \cos(2\pi\nu_x n + \varphi_x) \cos(\Delta\varphi_x(\hat{\delta}, \hat{\Phi}, n)) \\ & - \sin(2\pi\nu_x n + \varphi_x) \sin(\Delta\varphi_x(\hat{\delta}, \hat{\Phi}, n)) \} d\hat{\delta} d\hat{\Phi} \end{aligned} \quad (4.10)$$

la sommation sur les sinus s'annule, car la fonction intégrée est impaire, d'où :

$$\langle x(n) \rangle = x_0 \cos(2\pi\nu_x n + \varphi_x) \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma_{\hat{\delta}}} e^{-\frac{\hat{\delta}^2}{2\sigma_{\hat{\delta}}^2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\tilde{\alpha} \frac{\hat{\delta}}{\sigma_{\hat{\delta}}} \cos(\pi\nu_s n + \hat{\Phi})\right) d\hat{\Phi} \right\} d\hat{\delta} \quad (4.11)$$

en utilisant la fonction de Bessel J_0 (formule 9.1.18 in Abramowitz et Stegun, 1972) :

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos(\theta)) d\theta \quad (4.12)$$

$$\langle x(n) \rangle = x_0 \cos(2\pi\nu_x n + \varphi_x) \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\delta}}{\sigma_{\hat{\delta}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\delta}}{\sigma_{\hat{\delta}}}\right)^2} J_0\left(\tilde{\alpha} \frac{\hat{\delta}}{\sigma_{\hat{\delta}}}\right) d\left(\frac{\hat{\delta}}{\sigma_{\hat{\delta}}}\right) \quad (4.13)$$

et finalement avec la formule 11.4.29 (in Abramowitz et Stegun, 1972) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\mu^2 t^2} t^{\eta+1} J_{\eta}(\lambda t) dt = \frac{\lambda^{\eta}}{(2\mu^2)^{\eta+1}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\mu^2}} \quad (4.14)$$

$$\langle x(n) \rangle = x_0 e^{-\frac{\tilde{\alpha}^2}{2}} \cos(2\pi\nu_x n + \varphi_x) \quad \text{avec} \quad \tilde{\alpha} = 2\xi\nu_s^{-1}\sigma_{\hat{\delta}} \sin(\pi\nu_s n) \quad (4.15)$$

Le centroïde du faisceau effectue des oscillations bétatrons modulées par le facteur chromatique $F_{\hat{\delta}} = \exp\left(-2\xi^2\nu_s^{-2}\sigma_{\hat{\delta}}^2 \sin^2(\pi\nu_s n)\right)$. Ce dernier est une fonction $\frac{2\pi}{\nu_s}$ -périodique dont les extrema sont 1 et $\exp(-2\xi^2\nu_s^{-2}\sigma_{\hat{\delta}}^2)$. Au premier ordre, la fréquence d'oscillation du centroïde n'est pas modifiée, car la distribution des phases bétatrons est symétrique par rapport à la phase synchrone.

4.3.2 Décohérence 1D due à la dispersion des nombres d'ondes

Supposons que la fréquence transverse dépende quadratiquement de l'amplitude d'oscillation a_x , *i.e.* :

$$\nu_x = \nu_{0x} + k_{xx}a_x^2 \quad (4.16)$$

Alors le déphase au n -ième tour s'écrit :

$$\Delta\varphi(a_x, n) = 2\pi \int_0^n \Delta\nu(k) dk = 2\pi k_{xx}a_x^2 n \quad (4.17)$$

L'oscillation bêatron de la particule devient (cf. formule 1.60 p. 18 avec $a_x = \sqrt{\epsilon_x \beta_x}$) :

$$x(n) = a_x \cos(2\pi\nu_{0x}n + \varphi_x + \Delta\varphi(a_x, n)) \quad (4.18)$$

et celle du centroïde de particules distribuées statistiquement selon $\rho(a_x, \varphi_x)$:

$$\langle x(n) \rangle = \iint a_x \rho(a_x, \varphi_x) \cos(2\pi\nu_{0x}n + \varphi_x + \Delta\varphi(a_x, n)) d\varphi_x da_x \quad (4.19)$$

4.3.2.1 Densité de probabilité transverse

Si (x_0, x'_0) sont les variables de l'espace des phases transverse, alors on sait que l'invariant linéaire est l'intégrale d'action (cf. définition de l'émittance p. 18) :

$$J_{x0} = \frac{1}{2\beta_x} [x_0^2 + (\alpha_x x_0 + \beta_x x'_0)^2] \quad (4.20)$$

avec $\epsilon_x = 2J_{x0}$. En supposant des distributions gaussiennes, la fonction densité de probabilité avant l'impulsion est alors donnée par :

$$\rho_0(x_0, x'_0) = \frac{\beta_x}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{x_0^2 + (\alpha_x x_0 + \beta_x x'_0)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (4.21)$$

avec $\sigma_x = \sqrt{2\beta_x J_{x0}}$. La distribution dans les variables amplitude-phase (a_x, φ_x) est alors :

$$\rho_0(a_x, \varphi_x) = \rho_0(x_0, x'_0) |J| = \frac{a_x}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{a_x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (4.22)$$

avec $|J| = \frac{a_x}{\beta_x}$ et

$$\begin{cases} x_0(n) = a_x \cos(2\pi\nu_{0x}n + \varphi_x) \\ \alpha_x x_0(n) + \beta_x x'_0(n) = -a_x \sin(2\pi\nu_{0x}n + \varphi_x) \end{cases} \quad (4.23)$$

La distribution recherchée est celle obtenue immédiatement après que le faisceau a reçu une impulsion $\Delta x'$. On suppose ici que le faisceau est déplacé d'un bloc instantanément au temps $t = 0$. On déduit alors (cf. Eq. 4.22 et Fig. 4.3) :

$$\rho(a_x, \varphi_x) = \frac{a_x}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{a_x^2 + x_k^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{\alpha_x x_k}{\sigma_x^2} \sin \varphi_x} \quad (4.24)$$

avec l'amplitude de l'impulsion transverse $x_k = \beta_x \Delta x'$.

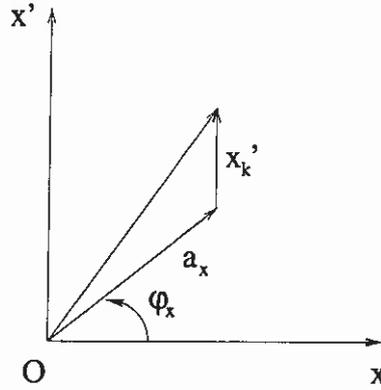


FIG. 4.3: Espace des phases (x, x') et schéma pour calculer la fonction de distribution des particules juste après une impulsion (x'_k) donnée par l'aimant rapide. A des fins de lisibilité, l'amplitude amortie a_x est exagérée.

4.3.2.2 Expression finale

Le mouvement du centroïde du paquet de particules se réécrit alors (Eq. 4.19 et 4.24) :

$$\begin{aligned} \langle x(n) \rangle = & \int \left\{ \sin(2\pi\nu_{0x}n + \Delta\varphi(a_x, n)) \frac{a_x^2}{\sigma_x^2} e^{-\frac{a_x^2 + x_k^2}{2\sigma_x^2}} \right. \\ & \left. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi_x) e^{-\frac{a_x x_k}{\sigma_x^2} \sin \varphi_x} d\varphi_x \right\} da_x \end{aligned} \quad (4.25)$$

l'intégrale sur les cosinus étant nulle,

$$\langle x(n) \rangle = \int \frac{a_x^2}{\sigma_x^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{a_x^2 + x_k^2}{\sigma_x^2}} I_1 \left(\frac{a_x x_k}{\sigma_x^2} \right) \sin(2\pi\nu_{0x}n + \Delta\varphi(a_x, n)) da_x \quad (4.26)$$

avec la fonction de Bessel modifiée $I_1(x)$:

$$I_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\theta) e^{ix \cos \theta} d\theta \quad (4.27)$$

$$\langle x(n) \rangle = -x_k F_x \sin \left(2\pi\nu_{0x}n + 2 \arctan \theta + \frac{x_k^2}{2\sigma_x^2} \frac{\theta}{1 + \theta^2} \right) \quad (4.28)$$

$$\text{avec } F_x = \frac{1}{1 + \theta^2} \exp \left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_x^2} \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} \right), \quad \theta = 4\pi k_{xx} \sigma_x^2 n$$

en utilisant la formule 4.12 et la propriété $I_1(x) = jJ_1(x)$.

La décohérence avec l'amplitude d'oscillation introduit le facteur de décohérence F_x qui est une gaussienne pour n petit et tend asymptotiquement vers une loi en puissance $F_x \rightsquigarrow \frac{1}{\theta^2}$. Le centroïde, $\langle x(n) \rangle$, de phase ψ_x (Eq. 4.28), oscille à la fréquence instantanée :

$$\nu_x = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \psi_x}{\partial n} \quad (4.29)$$

$$= \nu_{0x} + k_{xx} \left(4\sigma_x^2 + x_k^2 \frac{1 - \theta^2}{(1 + \theta^2)^2} \right) \quad (4.30)$$

Deux régimes peuvent être distingués. Le premier, pour $\theta \ll 1$: le faisceau oscille approximativement à la fréquence $\nu_x \approx \nu_0 + k_{xx}(4\sigma_x^2 + x_k^2)$. Le second pour $\theta \gg 1$, la fréquence devient $\nu_x = \nu_{0x}$, ce qui correspond au cas où le faisceau a entièrement « décohéré » (son amplitude d'oscillation moyenne est nulle).

4.3.3 Décohérence 2D due à la dispersion des nombres d'ondes

De manière similaire, on déduit la formule générale pour deux degrés de liberté. On suppose que le glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude est donné en première approximation par la loi : $\Delta\nu_x = k_{xx}a_x^2 + k_{xy}a_y^2$ et $\Delta\nu_y = k_{yy}a_y^2 + k_{yx}a_x^2$. On déduit alors les formules :

$$\langle x(n) \rangle = -x_k F_{xx} F_{xy} \sin \left(2\pi\nu_{0x}n + 2 \arctan \theta_{xx} + 2 \arctan \theta_{xy} + \frac{x_k^2}{2\sigma_x^2} \frac{\theta_{xx}}{1 + \theta_{xx}^2} + \frac{y_k^2}{2\sigma_y^2} \frac{\theta_{xy}}{1 + \theta_{xy}^2} \right) \quad (4.31)$$

$$\langle y(n) \rangle = -y_k F_{yy} F_{yx} \sin \left(2\pi\nu_{0y}n + 2 \arctan \theta_{yy} + 2 \arctan \theta_{yx} + \frac{y_k^2}{2\sigma_y^2} \frac{\theta_{yy}}{1 + \theta_{yy}^2} + \frac{x_k^2}{2\sigma_x^2} \frac{\theta_{yx}}{1 + \theta_{yx}^2} \right) \quad (4.32)$$

avec les impulsions transverses $x_k = \beta_x \Delta x'$, $y_k = \beta_y \Delta y'$ et

$$\begin{aligned} \theta_{xx} &= 4\pi k_{xx} \sigma_x^2 n, & \theta_{xy} &= 4\pi k_{xy} \sigma_y^2 n \\ \theta_{yy} &= 4\pi k_{yy} \sigma_y^2 n, & \theta_{yx} &= 4\pi k_{yx} \sigma_x^2 n \end{aligned}$$

et les facteurs de décohérence :

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \frac{1}{1 + \theta_{xx}^2} \exp \left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_x^2} \frac{\theta_{xx}^2}{1 + \theta_{xx}^2} \right), & F_{xy} &= \frac{1}{1 + \theta_{xy}^2} \exp \left(-\frac{y_k^2}{2\sigma_y^2} \frac{\theta_{xy}^2}{1 + \theta_{xy}^2} \right) \\ F_{yy} &= \frac{1}{1 + \theta_{yy}^2} \exp \left(-\frac{y_k^2}{2\sigma_y^2} \frac{\theta_{yy}^2}{1 + \theta_{yy}^2} \right), & F_{yx} &= \frac{1}{1 + \theta_{yx}^2} \exp \left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_x^2} \frac{\theta_{yx}^2}{1 + \theta_{yx}^2} \right) \end{aligned}$$

Les nombres d'ondes mesurés seront alors approximativement, pour $\theta_{uv} \ll 1$:

$$\begin{cases} \nu_x = \nu_{0x} + k_{xx}(4\sigma_x^2 + x_k^2) + k_{xy}(4\sigma_y^2 + y_k^2) \\ \nu_y = \nu_{0y} + k_{yy}(4\sigma_y^2 + y_k^2) + k_{yx}(4\sigma_x^2 + x_k^2) \end{cases} \quad (4.33)$$

4.3.4 Résumé

Le phénomène de décohérence complique la dynamique du centroïde observé dont le mouvement peut être décrit par une loi de la forme⁷ (Eq. 4.15 et 4.32) :

$$\langle x(n) \rangle = -x_k F_{\delta} F_{xx} F_{xy} \sin (2\pi\nu_{0x}n + \psi_x(n)) \quad (4.34)$$

avec $\psi_x(n) = 2 \arctan \theta_{xx} + 2 \arctan \theta_{xy} + \frac{x_k^2}{2\sigma_x^2} \frac{\theta_{xx}}{1 + \theta_{xx}^2} + \frac{y_k^2}{2\sigma_y^2} \frac{\theta_{xy}}{1 + \theta_{xy}^2}$.

⁷La formule est symétrique pour $\langle y(n) \rangle$.

La chromaticité ne modifie pas la fréquence d'oscillation mais introduit un facteur de modulation périodique de l'enveloppe du faisceau, le facteur chromatique F_f . Par contre, le glissement des nombres d'ondes introduit non seulement un facteur de décohérence non périodique par degré de liberté F_{xx} et F_{xy} , mais aussi un glissement des nombres d'ondes. Remarquons que dans le cas où ce dernier terme est important, le signal n'est plus quasi-périodique.

4.4 Prétraitement des données

Avant le début des mesures, l'orbite fermée (défauts dipolaires) a été corrigée avec le plus grand soin. Les données tour par tour sont ensuite collectées sur un BPM constitué de quatre électrodes numérotées de 1 à 4 (cf. schéma 4.4). Les signaux horizontal et vertical sont alors reconstruits connaissant les gains G_x et G_y du BPM :

$$x = G_x \frac{S_1 - S_2 + S_4 - S_3}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \quad \text{et} \quad y = G_y \frac{S_1 - S_4 + S_2 - S_3}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \quad (4.35)$$

avec S_k le signal collecté sur la k-ième électrode.

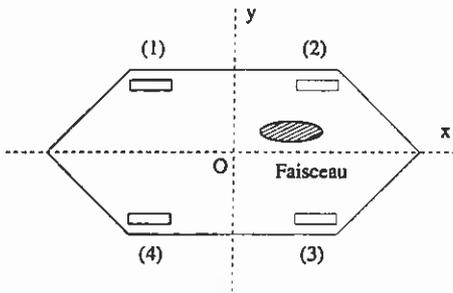


FIG. 4.4: Schéma d'un BPM à quatre électrodes de l'ALS.

$\beta_x = 11 \text{ m}$	$\beta_y = 4 \text{ m}$
$\epsilon_x = 4 \text{ nm.mrad}$	$\epsilon_y = 0.04 \text{ nm.mrad}$
$\sigma_x = \sqrt{\beta_x \epsilon_x}$	$\sigma_y = \sqrt{\beta_y \epsilon_y}$
$\sigma_E = 6.4 \cdot 10^{-4}$	$x_{of} = 100 \mu\text{m rms}$

TAB. 4.2: Paramètres expérimentaux de l'ALS

La décohérence est nettement observée (cf. Fig. 4.5) : aux faibles amplitudes, elle a lieu sur environ 600 tours, *i.e.* qu'au-delà le signal est noyé dans le bruit ; aux grandes, la décohérence est très rapide : 150 tours environ. Pratiquement, les implications sont les suivantes : le signal n'est pas quasi-périodique, il va être difficile d'extraire la fréquence avec une grande précision. Lorsque que le signal utile est contenu uniquement dans les 150 premières données, l'utilisation d'une FFT traditionnelle est presque illusoire et l'Analyse en Fréquence doit être utilisée avec grande précaution. La réduction des données peut alors se faire avec plus ou moins de succès de différentes manières :

- utiliser une transformée de Fourier Rapide traditionnelle (FFT) : la résolution est trop faible, les résonances ne sont pas bien mis en valeur (possibilité d'amélioration de la finesse d'échantillonnage dans le domaine spectral par utilisation d'une fenêtre de Hanning et par la technique de « bourrage de zéros » ou *zero padding*) ;
- ajuster les données avec notre modèle de décohérence, pour en déduire les nombres d'ondes. Le problème est que notre modèle est trop simple et ne s'applique pas au

4.5. PREMIÈRES CARTES EN FRÉQUENCE MESURÉES

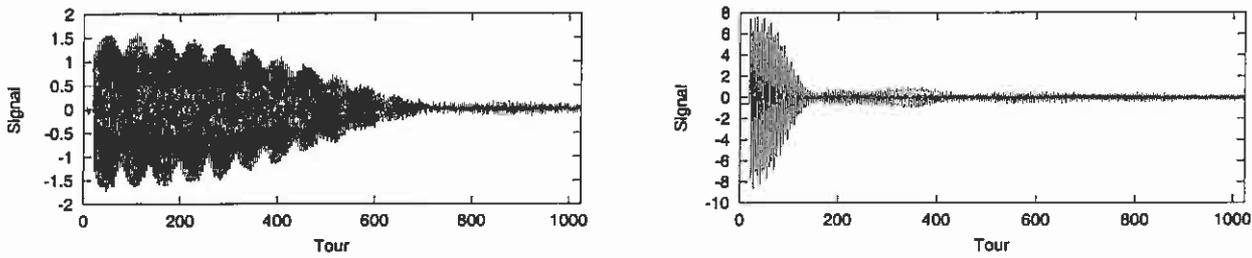


FIG. 4.5: Exemple de signal à faible amplitude (gauche) et grande amplitude (droite) à l'ALS : la décohérence est très rapide, de 600 tours à 1000 tours.

voisinage des résonances. Il « lisse » toutes les données, ce qui est sans intérêt pour la présente étude. En fait, au voisinage d'une résonance, la décohérence est beaucoup plus lente et peut même s'arrêter si les particules sont capturées par les îlots de résonance ;

- redresser le signal après ajustement, pour le rendre quasipériodique (peu commode en pratique, introduction de fréquences parasites) ;
- utiliser l'Analyse en Fréquence directement sur les données brutes avec différentes fenêtrages dépendant du nombre de données traitées tout en conservant la précision la plus élevée possible sur les fréquences. C'est cette dernière méthode qui a été finalement retenue.

Aux grandes amplitudes, on observe un début de saturation des BPM ainsi que l'apparition de comportements non linéaires du faisceau, ce qui va induire une diminution de la précision pour la détermination des fréquences qui était déjà compliquée par le faible nombre de données contenant du signal.

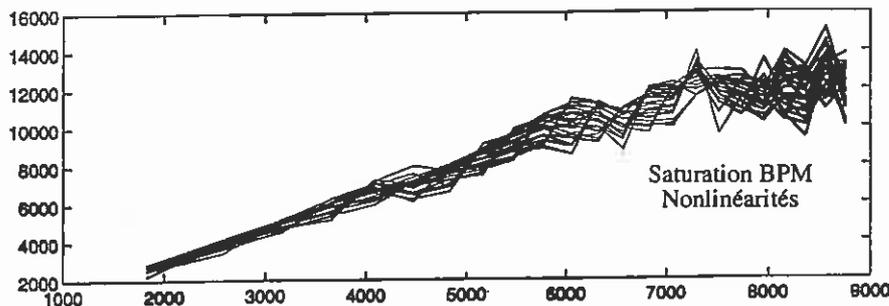


FIG. 4.6: Amplitude du signal (unité arbitraire) en fonction de la tension (kV) sur l'aimant rapide horizontal de l'ALS. Une saturation des BPM et des non linéarités apparaissent à partir de 6 000 kV.

4.5 Premières cartes en fréquence mesurées

4.5.1 Première expérience

L'Analyse en Fréquence a été réalisée pour 25×25 conditions initiales. A la lecture de la carte en fréquence obtenue (cf. Fig. 4.7-a), il est frappant de voir combien les structures réso-

nantes se lisent clairement. Deux résonances de couplage d'ordre 5 sont nettement observées : $4\nu_x + \nu_y - 65 = 0$ et $3\nu_x + 2\nu_y - 59 = 0$. Non seulement, leur coefficient d'excitation est élevé mais de plus, ces résonances sont normalement interdites par la 12-périodicité, et n'étaient donc pas vues aussi nettement sur la carte en fréquence théorique⁸. Elles sont excitées par les gradients résiduels et les erreurs de couplage qui détruisent la symétrie interne. Une troisième résonance d'ordre 5, $2\nu_x + 3\nu_y - 53 = 0$, est plus faiblement excitée. Ceci prouve que notre modélisation n'est pas encore parfaite en particulier en ce qui concerne les erreurs aléatoires.

Remarquons que l'espacement régulier des points dans l'espace des fréquences observés à faible amplitude horizontale peut être directement lié à la précision de nos mesures.

De manière à vérifier notre modèle de calibration, nous avons calculé une carte en fréquence en utilisant les défauts de gradients droits et tournés déduits de la matrice-réponse mesurée le même jour — le code DESPOT a été utilisé —. L'accord entre les deux cartes est excellent (cf. Fig. 4.7). Nous pouvons en conclure qu'un modèle utilisant uniquement les forces hexapolaires nominales, les erreurs de couplage et de gradient calibrés à partir de la matrice-réponse expérimentale permet de décrire la dynamique de l'ALS de manière remarquablement précise.

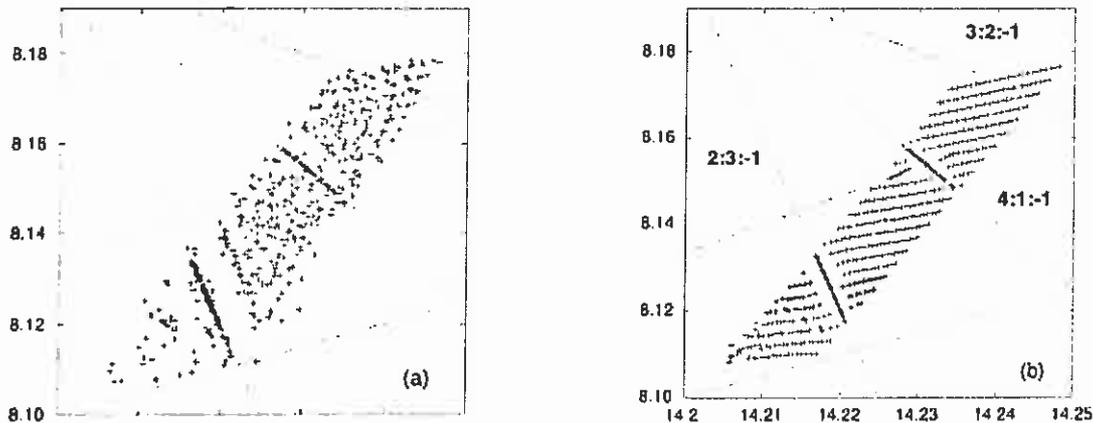


FIG. 4.7: Comparaison d'une carte en fréquence expérimentale (a) avec un modèle numérique de l'ALS incluant les défauts magnétiques mesurés (b) (Robin, Steier, Laskar et Nadolski, 2000).

Dans le futur, nous pourrions réduire le temps d'acquisition d'une carte en fréquence, et utiliser l'Analyse en Fréquence comme outil de diagnostic en ligne de la dynamique du faisceau.

4.5.2 Deuxième expérience

L'Analyse en Fréquence peut être utilisée pour tracer une carte en fréquence de manière indépendamment de tout modèle. Comme illustration directe, nous avons volontairement modifié le point de fonctionnement ($\nu_x = 14.275$, $\nu_y = 8.167$). Dans ce cas, la carte en fréquence expérimentale révèle des résonances très fortes, $4\nu_x - 57 = 0$, $3\nu_x + 3\nu_y - 67 = 0$, $3\nu_x + 2\nu_y - 59 = 0$ et $2\nu_x + 3\nu_y - 53 = 0$ (cf. Fig. 4.8, voir aussi la carte en couleur B.15). Au nœud de résonances, la diffusion des particules est très rapide, ce qui correspond expérimentalement à une réduction de l'efficacité d'injection et de la durée de vie.

⁸Elles y sont observées à travers la diffusion, mais apparaissent à des ordres beaucoup plus élevés.

En effet, durant les mesures nous avons enregistré des pertes significatives du faisceau à cette intersection ainsi qu'au-delà, car des particules ayant de plus grandes amplitudes vont traverser cette région à cause de l'amortissement du faisceau. Ce phénomène n'avait pas été observé lors de la première expérience, lorsque le faisceau a été déplacé aux mêmes amplitudes.

Il est clair que lorsque nous observons de tels comportements nous devons soit déterminer une méthode pour réduire l'amplitude des résonances afin d'améliorer la périodicité, soit changer de point de fonctionnement. Il est intéressant de noter que ce point de fonctionnement était le point de fonctionnement choisi à la construction de l'ALS; il a été utilisé pendant de nombreuses années. Pour ce réglage, l'efficacité d'injection était quelque peu irrégulière. A l'époque, les raisons n'avaient pas été clairement comprises. Le point de fonctionnement avait alors été changé à la valeur actuelle suite à l'application de l'Analyse en Fréquence (Laskar et Robin, 1996).

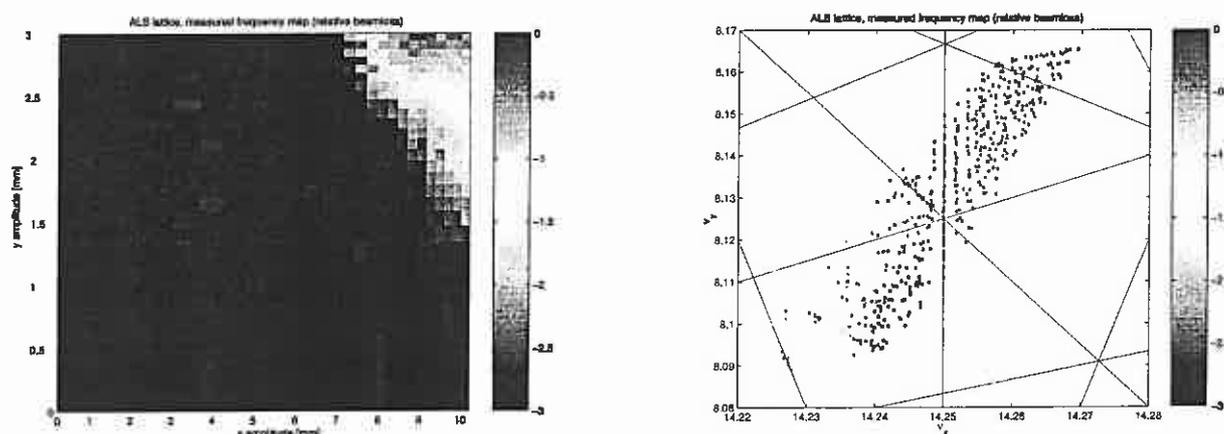


FIG. 4.8: Espace des configurations (à gauche) et carte en fréquence expérimentale (à droite) pour le point de fonctionnement d'origine de l'ALS avec mesure expérimentale de la diffusion des orbites (Steier, Robin, Laskar, Nadolski, 2000). Les nœuds de résonances sont nettement observés avec une diffusion rapide à grande amplitude.

4.5.3 Expériences avec Wigglers fermés

Plusieurs cartes en fréquences expérimentales ont été acquises afin de mieux évaluer les effets des wigglers sur la dynamique globale du faisceau. Les résultats n'ont pas encore été complètement exploités. De plus, il n'est pas aisé de modéliser les wigglers de l'ALS et leur influence est très importante sur la dynamique de l'anneau.

Par exemple lorsque le wiggler «W16» est fermée, il perturbe avant correction fortement l'optique : il induit un glissement du nombre d'ondes vertical ($\Delta\nu_y = 0.065$), un fort battement des fonctions bêtatrons ($\Delta\beta_y = 37\%$). La 12-périodicité de l'anneau est également altérée. Il s'ensuit une baisse drastique des performances de l'anneau (durée de vie, taille du faisceau, émittances). Il est impossible de corriger localement les effets de ce wiggler à l'ALS. Une correction globale — mais pas totale — est réalisée en utilisant 48 des quadripôles de la machine (Robin, Safranek, Decking, Nishimura, 1998).

Nous nous contentons ici de présenter une carte en fréquence expérimentale (Fig. 4.9-a) avec comme point de fonctionnement $(\nu_x, \nu_y) = (18.25, 8.18)$. L'accord avec les simulations numériques (Fig. 4.9-b) est moins probant que précédemment; notre modèle des wigglers

demande à être amélioré. Les cartes en fréquence (Fig. 4.10) sont tracées en balayant toute l'ouverture dynamique pour des points de fonctionnement voisins. Ces simulations prennent en compte le wiggler W16, les défauts quadripolaires droits et tournés déduits des matrices-réponse mesurées juste avant d'acquérir la carte en fréquence expérimentale précédente.

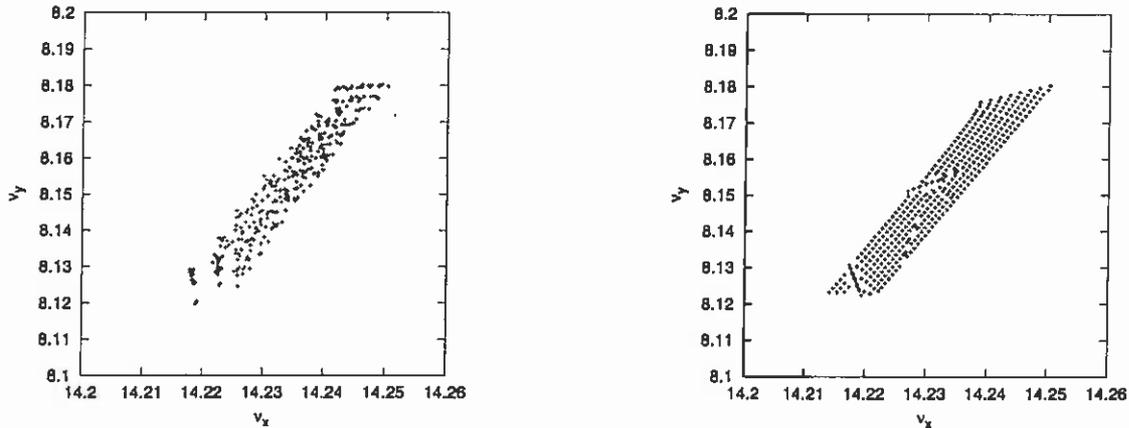


FIG. 4.9: Cartes en fréquence expérimentale (à droite) et simulée (à gauche) de l'ALS pour un point de fonctionnement avec le wiggler W16 fermé. Les défauts de quadripôles droits et tournés sont inclus dans le modèle.

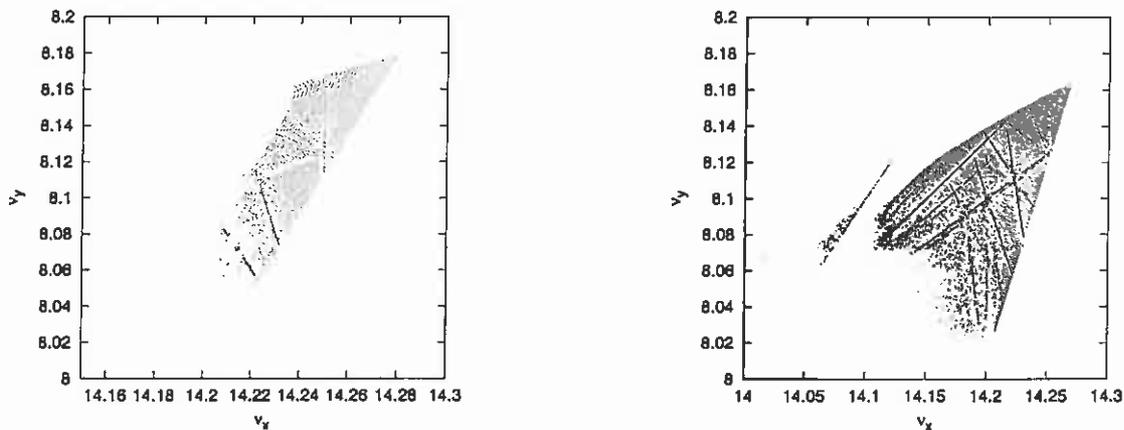


FIG. 4.10: Cartes en fréquence de l'ALS prenant en compte le wiggler W16, les défauts quadripolaires mesurés et un couplage effectif de 1%.

4.6 Conclusions

Même si certaines expériences sur d'autres accélérateurs ont déjà utilisé l'association aimants rapides et de BPM tour par tour pour étudier la dynamique nonlinéaire (Lee, 1992) et si des tentatives pour relier l'Analyse en Fréquence et les mesures de fréquences ont été entreprises (Terebilo *et al.*, 1998 — Bartolini *et al.*, 1999) ; à notre connaissance, les résultats présentés sont les premiers de ce genre.

La réalisation de cartes en fréquence expérimentales à l'ALS montre le réseau complet de résonances d'un système hamiltonien à trois degrés de liberté. La comparaison entre les cartes en fréquence théoriques et mesurées démontre qu'un modèle relativement simple peut être utilisé pour caractériser correctement la dynamique du faisceau, *i.e.* en prenant en compte les forces nominales des hexapôles et les erreurs de gradients droits et tournés. Cet accord impressionnant nous permet d'utiliser dès maintenant de manière fiable l'Analyse en Fréquence comme outil standard pour faire de la prédiction de l'impact sur dynamique d'une modification de la maille de l'ALS. L'Analyse en Fréquence peut être utilisée pour optimiser nos simulations et pour valider notre modèle de l'anneau. La capacité de pouvoir calculer des cartes en fréquence indépendamment de tout modèle a été démontrée et l'interprétation de la diffusion sur les cartes en fréquence a été validée par les mesures de perte de faisceau sur les structures résonantes.

Toutes les simulations réalisées jusqu'ici ont été faites dans l'hypothèse que la dynamique de l'anneau de stockage est gouvernée principalement par la dynamique transverse faiblement perturbée par la dynamique longitudinale — négligée dans nos simulations puisque que le couplage synchro-bétatron est quasi-nul —. C'est bien ce qui a été observé sur les cartes en fréquence expérimentales. Au sujet de la diffusion des orbites, le phénomène est plus complexe que nous l'avons laissé entendre. La dynamique totale de l'accélérateur peut être décrite par un Hamiltonien à trois degrés de liberté dépendant de la longitude s pris comme variable indépendante. L'espace des phases est de dimensions 6, l'application fréquence est alors une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} F^T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, l) &\mapsto (\nu_x, \nu_y, \nu_s) \end{aligned}$$

La condition générale de résonance devient :

$$p\nu_x + q\nu_y + r\nu_s + s = 0, \quad (p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4$$

Les cartes en fréquence que nous avons tracées dans tout ce manuscrit ne sont qu'une projection dans le plan (ν_x, ν_y) . Ce qui signifie en particulier, que même dans une zone parfaitement régulière d'une carte en fréquence, il peut y avoir une diffusion due au degré de liberté longitudinal. Cependant, elle reste généralement très faible vis-à-vis de celles induites par la dynamique transverse.

Au cours de l'été 2001, la maille de l'ALS va connaître sa plus importante modification : trois des trente-six dipôles de la machine vont être remplacés par des aimants supraconducteurs. La périodicité de la machine va diminuer pour passer de 12 à 3. Pour une énergie nominale de 1.9 GeV, les fluctuations quantiques des aimants supra-conducteurs augmentent l'émittance horizontale de 5.5 à 13 nm.rad. Cette dernière peut être réduite en introduisant de la dispersion dans les sections droites. Le couplage (ϵ_y/ϵ_x) est néanmoins inférieur à 1%, et le temps de vie du faisceau n'est que d'environ deux heures (pour un courant de 1.3 mA par paquet). Pour retrouver un temps de vie acceptable, l'émittance verticale devra être augmentée en introduisant une dizaine de nouvelles familles de quadripôles tournés (cf. simulations de Nishimura et Robin, 1999). Nous comptons utiliser pleinement l'Analyse en Fréquence pour finir de comprendre l'influence de ses modifications — le but idéal serait d'arriver à les compenser entièrement — et de continuer d'améliorer les performances de l'ALS.

Chapitre 5

Super-ACO

L'étude expérimentale de Super-ACO dans le cadre de ce travail était assez naturelle : après le gel du projet SOLEIL, l'équipe faisceau de l'Unité de Gestion SOLEIL composée de membres de l'IN2P3, du CEA et du CNRS a été dissoute. L'équipe de M.P. Level, et en particulier A. Nadji, m'a tout de suite proposé de poursuivre mon travail au LURE et m'a offert la possibilité de réaliser de fructueuses et enrichissantes expériences directement sur l'anneau de stockage. Bien que Super-ACO soit en fonctionnement depuis bientôt quinze ans, les performances atteintes sont encore mal comprises : durée de vie, efficacité d'injection, limitation de l'acceptance dynamique et en énergie, résonances.

Un travail important avait déjà été réalisé, mais de nombreuses contraintes extérieures et utilisateurs ne permettent pas aux physiciens des accélérateurs de caractériser exhaustivement leur machine comme ils le souhaiteraient.

Différentes études ont été menées durant la dernière année de ma thèse. Tout d'abord une caractérisation du point de fonctionnement actuel de Super-ACO à travers l'Analyse en Fréquence (ouverture dynamique, carte en fréquence et résonances cf. chap. 3, p. 75 sqq.). Puis, pour affiner notre connaissance de la dynamique linéaire, similairement au travail effectué à l'ALS, je désirais connaître précisément les principaux défauts magnétiques *mesurés* de l'anneau. Or, nous ne disposons que de mesures magnétiques réalisées sur banc d'essai à la fin des années 1980. Nous avons donc décidé d'appliquer la méthode développée par J. Safranek : le programme LOCO que je présenterai succinctement (section 5.1). Enfin, perplexe vis-à-vis des résultats obtenus sur Super-ACO, j'ai proposé plusieurs expériences visant aux premières mesures du glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude horizontale. Ces derniers résultats donneront un éclairage nouveau sur la dynamique globale de l'anneau (section 5.2 et section 5.3). Les résultats présentés sont extraits de rapports internes écrits pour le groupe accélérateur du LURE. Initialement, ces rapports ont été écrits de manière indépendante sous forme de notes d'expérience. J'espère que le lecteur me pardonnera quelques redites et un style moins soutenu. Pour faciliter la lecture, les parties techniques non fondamentales pour la compréhension des résultats sont écrites avec une police plus petite.

5.1 Acquisition des matrices-réponse

5.1.1 Description du programme LOCO

Dans un anneau de stockage, la périodicité interne permet d'améliorer la dynamique du faisceau en limitant le nombre de résonances pouvant être excitées; cependant la présence de défauts quadripolaires¹ est une des causes principales de brisure de cette symétrie et entraîne souvent une détérioration de la durée de vie et du taux d'injection *via* l'excitation de nonlinéarités. Donc, lorsque l'on désire optimiser une machine, une connaissance précise des défauts magnétiques est nécessaire pour établir un modèle aussi réaliste que possible; alors seulement, les calculs d'ouverture dynamique, de carte en fréquence prennent tout leur sens.

Le programme LOCO (*Linear Optics from Closed Orbits*) a été écrit par Safranek (1997) dans cette optique pour analyser la matrice-réponse du *National Synchrotron Light Source* de Brookhaven et en déduire les gradients des quadripôles, les défauts des éléments magnétiques (alignements, rotations des éléments). Tout le programme repose sur l'analyse de l'orbite fermée en approximation linéaire. Cette méthode² a déjà eu de nombreuses applications — voir par exemple pour l'*Advanced Light Source* (Robin *et al.*, 1996) et pour l'anneau VUV du *National Synchrotron Source* (Safranek et Kramer, 1997) —

Dans ce travail, on se propose d'appliquer LOCO à Super-ACO. Dans une première partie, la méthode de calcul de la matrice-réponse est rappelée. Puis l'utilisation du programme LOCO est présentée et testée sur un exemple simple. Enfin, l'expérience du 19 juin 2000 est dépouillée : trois matrices-réponse ont été acquises pour trois configurations distinctes : hexapôles éteints, hexapôles allumés, hexapôles allumés et onduleurs fermés.

Le principal objectif est d'établir le jeu de défauts des gradients pour chaque cas et de valider la méthode. En discussion, une application des résultats est proposée pour restaurer la symétrie de Super-ACO.

5.1.1.1 Perturbation de l'orbite fermée par un *kick* dipolaire

Soit un dipôle fin de longueur dl , situé en $s = s_0$, donnant un angle ou impulsion (*kick* en anglais) $\theta_0 = \frac{\Delta B dl}{(B\rho)}$ à une particule, avec $(B\rho) = \frac{pc}{e}$ la rigidité magnétique et $\Delta B dl$ le champ dipolaire intégré. Si juste avant l'impulsion, l'orbite fermée est $\begin{pmatrix} x_{of} \\ x'_{of} - \theta \end{pmatrix}$, alors juste après l'impulsion, elle devient $\begin{pmatrix} x_{of} \\ x'_{of} \end{pmatrix}$. Trouver l'expression de l'orbite fermée x_{of} en s_0 revient à résoudre la relation de fermeture :

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} x_{of} \\ x'_{of} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{of} \\ x'_{of} - \theta \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

où \mathcal{M} est la matrice de transfert de l'anneau sur un tour. La solution, exprimée en fonction des paramètres de Twiss (α, β) , du nombre d'ondes ν , est alors :

$$\begin{cases} x_{of}(s_0) = \frac{\beta_0 \theta_0}{2 \sin \pi \nu} \cos \pi \nu \\ x'_{of}(s_0) = \frac{\theta_0}{2 \sin \pi \nu} (\sin \pi \nu - \alpha_0 \cos \pi \nu) \end{cases}$$

¹Les défauts dipolaires sont supposés parfaitement corrigés.

²Un programme similaire, *1000-turns measurement system*, a été écrit au CERN (thèse de P. Castro, 1996).

Pour déduire l'expression de l'orbite fermée résultante en un endroit $s = s_i$ quelconque de l'anneau, il suffit de propager la solution trouvée en $s = s_0$ en utilisant la fonction de Green, $G(s_i, s_0)$, de l'équation de Hill :

$$\begin{aligned} x_{of}(s_i) &= G(s_i, s_0)\theta_0 \\ &= \frac{\sqrt{\beta(s_i)\beta(s_0)}}{2 \sin \pi\nu} \cos(\pi\nu - |\phi(s_i) - \phi(s_0)|) \theta_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.1.1.2 Matrice-réponse

Pour un jeu de défauts dipolaires ($\theta_j, j = 1..n$), en utilisant la linéarité de l'équation de Hill en la perturbation dipolaire, l'orbite fermée résultante est simplement la superposition des orbites fermées individuelles créées par une impulsion θ_j (cf. Eq. 5.2), soit :

$$\begin{aligned} x_{of}(s_i) &= \frac{\sqrt{\beta(s_i)}}{2 \sin \pi\nu} \sum_j \sqrt{\beta(s_j)} \cos(\pi\nu - |\phi(s_i) - \phi(s_j)|) \theta_j \\ &= \sum_j \mathcal{R}_{ij} \theta_j \end{aligned} \quad (5.3)$$

La matrice \mathcal{R} est appelée *matrice-réponse linéaire de l'orbite fermée*. Elle est constituée de $n \times p$ éléments pour une machine comportant n correcteurs dipolaires et p BPM (*Beam Position Monitors* : stations de mesure de position).

En expérience et en simulation avec le programme MAD³ [50], la matrice-réponse est construite en allumant l'un après l'autre les n correcteurs et en enregistrant dans chacun des p BPM l'orbite fermée générée.

Expérimentalement, deux matrices sont construites : une pour des *kicks* d'angle $+\frac{\theta}{2}$ et une autre pour des *kicks* d'angle $-\frac{\theta}{2}$. En effet, il subsiste une orbite fermée résiduelle créée par les nonlinéarités des champs magnétiques. En calculant la différence de ces deux matrices, on élimine ainsi l'orbite fermée résiduelle et l'on obtient une matrice-réponse équivalente à un *kick* d'angle $+\theta$.

Le choix de la valeur du *kick* dipolaire est guidé par les deux considérations suivantes : d'une part, une grande valeur de θ permet d'augmenter le rapport signal sur bruit de la mesure et donc de réduire la barre d'erreur sur les valeurs de gradients trouvées par rapport au bruit aléatoire des BPM ; d'autre part, une faible valeur de θ permet de s'affranchir des nonlinéarités mais aussi de rester dans une gamme de réponse linéaire de l'électronique. Une valeur intermédiaire doit donc être choisie : en pratique des *kicks* de valeur induisant une perturbation de l'orbite fermée de 1.1 mm rms (valeur optimale pour le NSLS X-Ray Ring à Brookhaven : 0.8 mm rms — Safranek, 1997 —).

Le programme LOCO utilise une méthode des moindres carrés pour minimiser le « χ^2 » entre la matrice-réponse modèle, \mathcal{R}^{mod} , et la matrice-réponse expérimentale, \mathcal{R}^{exp} , en ajustant les gradients quadripolaires :

³ Actuellement seule la version 8.15 fonctionne avec LOCO. Pour les versions ultérieures, il suffit de modifier légèrement le programme LOCO.

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(\mathcal{R}_{i,j}^{mod} - \mathcal{R}_{i,j}^{exp})^2}{\sigma_i^2} \quad (5.4)$$

où la sommation a lieu sur les BPM i et les correcteurs j , normalisée par le bruit des BPM σ_i et en utilisant une méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD [96]). Les autres paramètres pouvant être incorporés dans l'ajustement de la matrice-réponse non couplée sont les gains des correcteurs (ΔG_m^{Cor}), les gains des BPM (ΔG_m^{BPM}) et le glissement de l'énergie ($(\Delta E/E)_m$). Pour la matrice couplée, il faut ajouter la rotation des BPM et des correcteurs.

Minimiser le χ^2 revient à minimiser la norme du vecteur \mathbf{V} dont les composantes sont définies par :

$$V_{k(i,j)} = \mathcal{R}_{i,j}^{mod} - \mathcal{R}_{i,j}^{exp} \quad (5.5)$$

où l'indice k varie de 1 à $n \times p$. Alors en approximation linéaire, on obtient⁴ :

$$\begin{aligned} V_{k(i,j)} &= \frac{dV_k}{dK_m} \Delta K_m + \frac{dV_k}{dG_m^{Cor}} \Delta G_m^{Cor} + \frac{dV_k}{dG_m^{BPM}} \Delta G_m^{BPM} + \frac{dV_k}{d(\Delta E/E)_m} \Delta(\Delta E/E)_m \\ &= \frac{dV_k}{dK_m} \Delta K_m + \mathcal{R}_{i,j}^{mod} \Delta G_m^{Cor} - \mathcal{R}_{i,j}^{mod} \Delta G_m^{BPM} + \eta_x^j \Delta(\Delta E/E)_m \end{aligned} \quad (5.6)$$

La valeur escomptée du χ^2 est le nombre de degrés de liberté, soit $(n_d - n_p)$ avec un écart type $\sigma = \sqrt{2(n_d - n_p)}$ avec n_d le nombre de données (taille du vecteur \mathbf{V}) et n_p le nombre de paramètres ajustés (cf. *Modeling of Data*, chap. 15 in *Numerical Recipes*, 1992).

5.1.2 Application à Super-ACO

La machine Super-ACO dispose de 32 correcteurs, 16 verticaux (dans les quadripôles défocalisant, *i.e.* les familles Q1 et Q4) et 16 horizontaux (dans les quadripôles focalisant, *i.e.* les familles Q2 et Q3). De plus, il existe 8 autres correcteurs horizontaux, chacun situé dans un dipôle (non utilisés dans la présente étude⁵).

Les 16 BPM composés de quatre électrodes se trouvent dans chacun des doublets de quadripôles (cf. maille Fig. 5.1).

Je rappelle qu'une des spécificités de Super-ACO tient dans ses quadripôles combinés : dans chaque quadripôle (Q), il y a aussi un hexapôle (H) possédant un terme décapolaire important simulé par une lentille décapolaire (LD) et un correcteur dipolaire (cf. Fig. 5.2). Nous verrons plus tard (cf. section 5.1.6) que le fait d'avoir plusieurs composantes multipolaires et un correcteur dans un même élément physique peut compliquer la physique de l'anneau et l'interprétation des données.

⁴Le signe négatif devant le gain des BPM provient de la convention choisie dans LOCO : si un gain est plus grand que l'unité ($\Delta G_m^{BPM} > 0$), alors le BPM correspondant est moins sensible, donc la valeur mesurée sera plus petite qu'en réalité.

⁵Le programme MAD ne permet pas de découper simplement un aimant secteur ayant un champ de fuite.

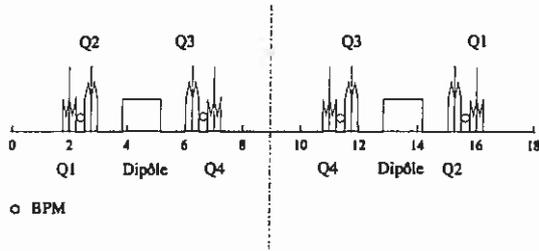


FIG. 5.1: Une des quatre mailles de Super-ACO. Les moniteurs de position (BPM) sont situés dans chaque doublet de quadripôles ($Q1-Q2$) et ($Q3-Q4$).

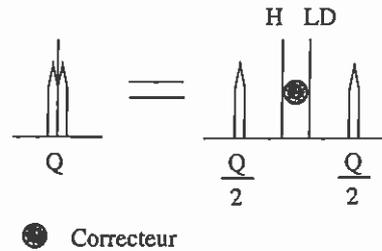


FIG. 5.2: Schéma équivalent d'un quadripôle combiné de Super-ACO. Un quadripôle (Q) contient, en plus du gradient quadripolaire, une lentille décapolaire (LD), un hexapôle (H) et une bobine dipolaire appelée *correcteur*.

5.1.2.1 Procédure adoptée

La version actuelle de LOCO ne peut pas être utilisée de manière automatique : les itérations sont faites manuellement jusqu'à ce que la convergence soit atteinte. Généralement, trois à quatre itérations suffisent. La procédure d'utilisation du programme LOCO résulte d'une discussion avec J. Safranek (SLAC), D. Robin (ALS) et C. Steier (ALS).

Hexapôles éteints

1. Ajuster les gains des correcteurs.
2. Ajouter les gradients quadripolaires.
3. Ajouter les gains des BPM.
4. Ajouter tout le reste.

Hexapôles allumés

1. Partir des gradients trouvés précédemment.
2. Ajuster les gains des correcteurs.
3. Ajouter les gradients de hexapôles.
4. Ajouter les gains des BPM.
5. Ajouter tout le reste.

5.1.3 Etude préliminaire

Pour le début de l'étude, on ne considère que les 32 correcteurs situés dans les quadripôles. Pour s'affranchir des nonlinéarités, les hexapôles et les lentilles décapolaires sont éteints. Dans un premier temps, on a voulu s'assurer que si l'on donne à LOCO comme matrice expérimentale la matrice théorique alors LOCO donne l'ajustement parfait.

5.1.3.1 Conditions du test

L'ajustement est réalisé uniquement sur les gradients des quatre familles de quadripôles $Q1, Q2, Q3, Q4$. La fonction dispersion est supposée nulle tout autour de la machine pour s'affranchir du facteur d'Amman (cf. *infra*).

5.1. ACQUISITION DES MATRICES-RÉPONSE

5.1.3.2 Résultats

Au bout de deux itérations, l'algorithme converge. Les petits écarts observés s'expliquent par le nombre de chiffres significatifs entrés dans la matrice-réponse expérimentale simulée en tant que modèle. A la lecture du tableau 5.1, les valeurs rms résiduelles sont négligeables compte tenu de la précision (arrondis à deux chiffres significatifs). \mathcal{R}_{xx}^{mod} et \mathcal{R}_{xx}^{exp} (resp. \mathcal{R}_{yy}^{mod} et \mathcal{R}_{yy}^{exp}) sont les valeurs rms en millimètres des matrices-réponse théorique et expérimentale horizontales (resp. verticales). $\Delta\mathcal{R}_{xx}$ et $\Delta\mathcal{R}_{yy}$ donnent l'écart rms entre ces matrices.

	Q1[K1]	Q2[K1]	Q3[K1]	Q4[K1]	ν_x	ν_y
Initiaux	-1.46335	2.60629	2.47828	-1.41897	4.72512	1.69845
Finaux	-1.46318	2.60580	2.47878	-1.41907	4.72550	1.69821
Ecart rel.	-1.1E-4	1.8E-4	-2.0E-4	-6.9E-5	8.0E-5	-1.4E-4
rms	\mathcal{R}_{xx}^{mod}	\mathcal{R}_{xx}^{exp}	$\Delta\mathcal{R}_{xx}$	\mathcal{R}_{yy}^{mod}	\mathcal{R}_{yy}^{exp}	$\Delta\mathcal{R}_{yy}$
Initiaux	2.1834	2.1847	0.54251E-2	1.4959	1.4950	0.54259E-2
Finaux	2.1846	2.1847	0.47406E-2	1.4953	1.4950	0.52990E-2

TAB. 5.1: Ajustement modèle sur modèle : variation des gradients quadripolaire K_1 de chacune des 4 familles quadripolaires Q_i de Super-ACO. Ces résultats ne donnent pas un accord parfait compte tenu de la basse « résolution » (2 chiffres significatifs). \mathcal{R}_{xx}^{mod} et \mathcal{R}_{xx}^{exp} (resp. \mathcal{R}_{yy}^{mod} et \mathcal{R}_{yy}^{exp}) sont les valeurs rms en millimètres des matrices-réponse théorique et expérimentale horizontales (resp. verticales). $\Delta\mathcal{R}_{xx}$ et $\Delta\mathcal{R}_{yy}$ donnent l'écart rms entre ces matrices.

En pratique, l'orbite fermée est mesurée sur Super-ACO avec seulement deux chiffres significatifs. Pour avoir une bonne convergence numérique, les données sont complétées par des zéros pour ces tests. En prenant huit chiffres significatifs, l'ajustement est parfait, i.e. avec erreur relative de l'ordre de la précision machine (cf. *infra*).

5.1.3.3 Test complet du modèle

Pour vérifier le bon fonctionnement du programme LOCO, on simule des défauts sur les gradients des quadripôles en conservant la symétrie quatre de l'anneau.

Pour commencer, on dérègle le gradient de Q1 de 0.7% : on observe un glissement des nombres d'ondes : $\Delta\nu_x = -0.02$ et $\Delta\nu_y = 0.03$.

Au bout de deux itérations, LOCO retrouve exactement les bonnes valeurs des gradients (comparer les valeurs attendues et finales du tableau 5.2. Les calculs sont faits en simple précision).

	Q1[K1]	Q2[K1]	Q3[K1]	Q4[K1]	ν_x	ν_y
Initiaux	-1.4772282	2.6204337	2.4783405	-1.4238337	4.738429	1.711246
Attendus	-1.4672282	2.6204337	2.4783405	-1.4238337	4.758429	1.708246
Finaux	-1.4672282	2.6204337	2.4783406	-1.4238338	4.758429	1.708246
Ecart rel.	-2E-8	1E-8	4E-8	-2E-8	3E-8	1E-8
rms	\mathcal{R}_{xx}^{mod}	\mathcal{R}_{xx}^{exp}	$\Delta\mathcal{R}_{xx}$	\mathcal{R}_{yy}^{mod}	\mathcal{R}_{yy}^{exp}	$\Delta\mathcal{R}_{yy}$
Initiaux	2.7376	2.8582	0.17748	1.9891	1.8530	0.24700
Finaux	2.8582	2.8582	0.63712E-05	1.8530	1.8530	0.66144E-06

TAB. 5.2: Ajustement du code LOCO après avoir dérèglé le gradient K_1 de la famille quadripolaire Q1 (en symétrie 4). Ecart relatifs et convergence en prenant 8 chiffres significatifs dans l'expression de la matrice-réponse. L'ajustement est « parfait ».

Puis, on dérègle de nouveau le gradient de la première famille Q1 de 3% mais uniquement sur le quadripôle Q11 on observe un glissement des nombres d'ondes $\Delta\nu_x = -0.012$ et $\Delta\nu_y = 0.009$. Encore une fois, le

programme LOCO converge en trois itérations vers les valeurs escomptées avec les bons nombres d'ondes (cf. tableau 5.3).

	Q11[K1]	Q12[K1]	Q13[K1]	Q14[K1]	Q15[K1]	Q16[K1]	Q17[K1]	Q18[K1]
$\frac{\Delta K}{K}$	-1.3E-7	-4.8E-7	-4.0E-7	-4.1E-7	-4.1E-7	-2.1E-7	-2.2E-7	-4.7E-7
	Q21[K1]	Q22[K1]	Q23[K1]	Q24[K1]	Q25[K1]	Q26[K1]	Q27[K1]	Q28[K1]
$\frac{\Delta K}{K}$	-5.5E-7	-3.8E-7	-4E-8	-3.4E-7	-6.3E-7	-2.5E-7	-2.6E-7	-4.1E-7
	Q31[K1]	Q32[K1]	Q33[K1]	Q34[K1]	Q35[K1]	Q36[K1]	Q37[K1]	Q38[K1]
$\frac{\Delta K}{K}$	-7.5E-7	-5.3E-7	-4.4E-7	-5E-8	-2.7E-7	-1.25E-7	-2.1E-7	-5.5E-7
	Q41[K1]	Q42[K1]	Q43[K1]	Q44[K1]	Q45[K1]	Q46[K1]	Q47[K1]	Q48[K1]
$\frac{\Delta K}{K}$	-5.5E-7	-3.5E-7	-1.3E-7	-4.1E-7	-5.5E-7	-3.3E-7	-2.2E-7	-4.8E-7
rms	\mathcal{R}_{xx}^{mod}	\mathcal{R}_{xx}^{exp}	$\Delta \mathcal{R}_{xx}$	\mathcal{R}_{yy}^{mod}	\mathcal{R}_{yy}^{exp}	$\Delta \mathcal{R}_{yy}$	ν_x	ν_y
Finaux	2.8582	2.8582	3.65E-05	1.8530	1.8530	1.39E-06	4.758925	1.706219

TAB. 5.3: Ajustement du code LOCO après avoir dérégulé le gradient K_1 du premier quadripôle Q11 de Super-ACO (la symétrie 4 est brisée). Les écarts relatifs finaux pour les gradients (K_1) de 32 quadripôles (Q_{ij}) correspondent à la précision machine (8 chiffres significatifs) : le code LOCO retrouve bien le bon modèle de l'anneau.

Objectifs

Le but de l'expérience du 19 juin 2000 était d'acquérir les matrices-réponse expérimentales de Super-ACO pour le point de fonctionnement nominal afin d'en déduire par ajustement les fonctions bêtatrons de la machine puis les distributions correspondantes de gradients. Trois matrices ont été acquises, une avec les hexapôles éteints et onduleurs ouverts (section 5.1.5), puis avec les hexapôles allumés (section 5.1.6) et enfin une dernière en fermant les onduleurs (section 5.1.7). Dans chacun des cas, le minimum de couplage a été fait mais la chromaticité n'a pas été mesurée. En utilisant le programme LOCO (Safranek, 1997), on a cherché à établir le modèle théorique le plus proche possible de la machine réelle *via* l'optique linéaire.

5.1.4 Etapes préliminaires à l'analyse des matrices-réponse

Pour utiliser le programme LOCO, il est nécessaire de faire deux mesures supplémentaires :

1. une mesure du bruit rms des 16 BPM.
2. une mesure de la fonction dispersion dans chaque BPM.

5.1.4.1 Bruit moyen des BPM

Deux jeux de données ont été mesurés :

- 1 000 orbites au début de l'expérience, avec les hexapôles éteints et les onduleurs ouverts.
- 100 orbites en fin d'expériences, hexapôles allumés et les onduleurs fermés.

Les figures 5.3 donnent les résultats moyennés pour chaque BPM i ainsi que les valeurs de bruit rms, σ_i , pour les deux cas considérés. De manière générale, les valeurs de bruits sont plus élevées en début qu'en fin d'expérience (Tab. 5.4). Le bruit des BPM a également été

5.1. ACQUISITION DES MATRICES-RÉPONSE

mesuré le mercredi 20 septembre et mercredi 4 novembre 2000 ; les valeurs rms de bruit dans les deux plans valent $0 \pm 5 \mu m^6$, ce qui correspond à la précision des BPM. Ces valeurs de bruit donnent la limite de convergence qu'on peut espérer atteindre avec l'algorithme LOCO.

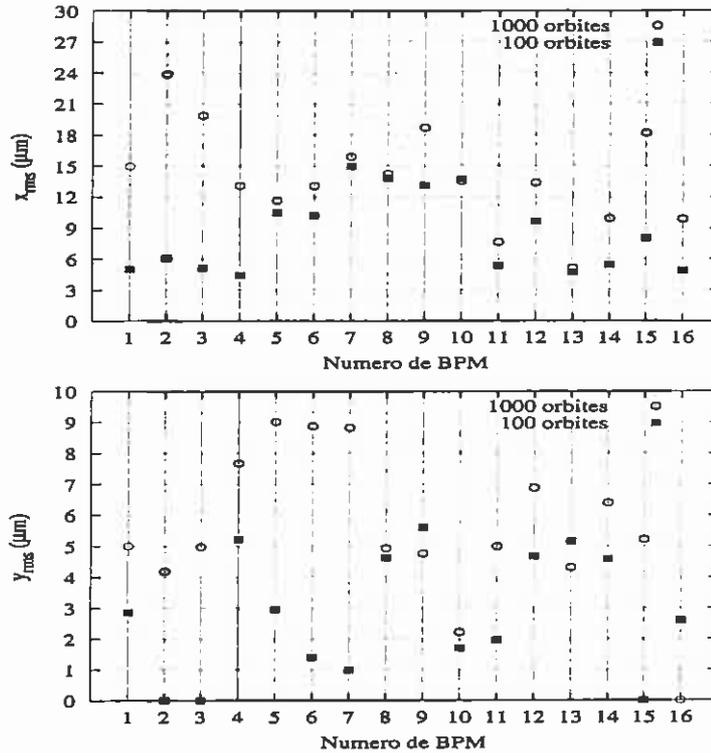


FIG. 5.3: Valeurs rms du bruit pour chacun des BPM i de Super-ACO dans les plans vertical et horizontal (précision : $5 \mu m$). Les écarts entre les bruit pour 1 000 et 100 orbites peuvent s'expliquer par le fait que dans un cas les onduleurs sont fermés et que le courant stocké est différent.

Valeur rms	1 000 orbites	100 orbites
$\sigma_x (\mu m)$	15	10
$\sigma_y (\mu m)$	6	4

TAB. 5.4: Valeur moyenne rms du bruit sur les BPM (résolution $\pm 5 \mu m$).

5.1.4.2 Mesure de la fonction dispersion dans les BPM

La fonction dispersion, η_x , dans les BPM est calculée avec la formule usuelle (Rice *in* Chao et Tigner, 1998) :

$$\eta_x = \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha \right) \frac{f_{RF}}{\Delta f_{RF}} \Delta x \approx -\alpha \frac{f_{RF}}{\Delta f_{RF}} \Delta x \quad (5.7)$$

⁶ Attention : les valeurs de bruit sont sous-estimées car, pour ces deux dernières mesures, le programme utilisé (routine automatique de Super-ACO) n'enregistre que les variations d'orbite fermée supérieures à $\pm 15 \mu m$.

avec α , le facteur d'allongement du premier ordre (*momentum compaction*) et f_{RF} , la fréquence RF de l'anneau. Pour cela, on réalise deux mesures d'orbite fermée (Δx), pour deux fréquences RF distinctes (Δf_{RF}) juste avant l'acquisition de chacune des matrices-réponse (cf. paramètres Tab. 5.5). L'erreur relative sur la valeur des dispersions est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\eta_x}{\eta_x} &= \frac{\delta\alpha}{\alpha} + \frac{\delta f_{RF}}{f_{RF}} + \frac{\delta\Delta f_{RF}}{\Delta f_{RF}} + \frac{\delta\Delta x}{\Delta x} \\ &\approx \frac{\delta\Delta f_{RF}}{\Delta f_{RF}} + \frac{\delta\Delta x}{\Delta x} \\ &\approx 2.7 \times 10^{-4} + \frac{1}{\Delta x[1/100mm]} \end{aligned} \quad (5.8)$$

soit en moyenne $\delta\eta_x = 5 \text{ mm}$.

Paramètre	Symbole	Valeur	Erreur
<i>Momentum compaction</i>	α	$1.48 \cdot 10^{-2}$	0
Fréquence RF (MHz)	f_{RF}	99.879200	0.000001
Variation RF (kHz)	Δf_{RF}	3.7	0.001
Circonférence (m)	L_0	72.04	0

TAB. 5.5: Paramètres expérimentaux de Super-ACO pour le calcul de la fonction dispersion mesurée.

5.1.5 Matrice-réponse hexapôles éteints et onduleurs ouverts

5.1.5.1 Introduction

On dispose de 16 BPM, 16 correcteurs horizontaux et 16 correcteurs verticaux, donc la matrice-réponse non couplée a $16 \times 16 + 16 \times 16 = 512$ éléments.

Pour générer les matrices-réponse, on allume successivement les correcteurs avec un courant de $\pm 1A$, soit approximativement $\frac{\theta}{2} = \pm 0.21 \text{ mrad}$ pour un correcteur horizontal et $\frac{\theta}{2} = \pm 0.24 \text{ mrad}$ pour un correcteur vertical⁷, et on mesure dans chaque BPM le déplacement de l'orbite fermée.

L'ajustement entre matrices expérimentale et modèle est réalisé en faisant varier les forces quadripolaires soit en familles (4), soit individuellement (32), les gains des correcteurs horizontaux (16) et verticaux (16), les gains des BPM horizontaux (16) et verticaux (16). Pour finir, dans les sections dispersives, le déplacement supplémentaire de l'orbite associé au glissement en énergie est pris en compte (parfois appelé *facteur d'Amman* [Amman, 1971]),

$$\frac{\Delta E}{E} = - \left(\frac{\theta_x}{2} \right) \frac{\eta_x}{\alpha L_0} \quad (5.9)$$

⁷L'étalonnage des correcteurs, relation entre champ intégré et courant, suit la loi : $\frac{\Delta \int B ds}{\Delta I} = 0.55 \times 10^{-3} \frac{T \cdot m}{A}$ (H) et $\frac{\Delta \int B ds}{\Delta I} = 0.65 \times 10^{-3} \frac{T \cdot m}{A}$ (V) (voir Barthès *et al.*, 1990, p. 16), avec pour rigidité magnétique ($B\rho$) = $\frac{8}{3} \approx 2.67 T \cdot m$.

avec α le facteur d'allongement du premier ordre et L_0 la circonférence de la machine.

En effet, la déviation $\frac{\theta_x}{2}$ produite par le correcteur dipolaire engendre — si la fonction dispersion η_x est non nulle — une modification de la longueur ΔL de l'orbite de la particule :

$$\Delta L = \frac{\theta_x}{2} \eta_x, \quad (5.10)$$

allongement équivalent à une modification de l'énergie de la particule :

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \frac{\Delta E}{E}, \quad (5.11)$$

ce qui ajoute 16 nouveaux paramètres⁸. Au total, l'ajustement est réalisé sur 84 (ou 112) paramètres.

Cependant, on ne peut pas faire varier de manière indépendante l'ensemble des gains des BPM et des correcteurs sous peine de dégénérescence. En effet, si tous les gains des BPM sont augmentés d'un même facteur alors que ceux des correcteurs sont diminués proportionnellement alors la matrice-réponse reste inchangée : la SVD donne deux valeurs propres nulles. Pour lever cette dégénérescence, il suffit de fixer par exemple le gain d'un correcteur horizontal et d'un correcteur vertical.

5.1.5.2 Conditions expérimentales

Pour l'optique de Super-ACO utilisée, le courant stocké était de $I = 4.5$ mA dans 24 paquets, en faisceau « plat » $(\sigma_x, \sigma_y) \approx (230, 110) \mu m$, ceci avec les quatre familles d'hexapôles éteintes. Cette possibilité d'éteindre les hexapôles avec un faisceau circulant dans l'anneau est un avantage qui permettra de déterminer les défauts de gradients indépendamment de ceux induits par les hexapôles lorsqu'il existe une orbite résiduelle x_0 en leur centre (cf. section 5.1.6).

Famille	\bar{I} (A)
Q1	222.84
Q2	402.50
Q3	379.78
Q4	216.24

TAB. 5.6: Courants mesurés dans les alimentations des quatre familles de quadripôles de Super-ACO — hexapôles éteints, onduleurs ouverts —

Le modèle utilisé est déduit des mesures de courant dans les quadripôles⁹ : c'est notre *modèle de référence* de Super-ACO (cf. Tab 5.6). Le point de fonctionnement théorique devient

⁸En toute rigueur, ces paramètres ne sont pas réellement de nouveaux paramètres pour l'ajustement. En effet, ils dépendent de la fonction dispersion (Eq. 5.9) qui est fixée par la donnée des gradients quadripolaires. Pour la présente étude, nous avons seulement utilisé le code LOCO « tel qu'il est » sans chercher à le modifier.

⁹Voir la note de Nghiêm (1989, page 6) pour passer du courant I au gradient K des quadripôles.

alors $(\nu_x, \nu_y) = (4.758, 1.708)$. Notons que par rapport au point de fonctionnement nominal, le courant dans $Q4$ ayant changé, les valeurs de la fonction dispersion théorique sont également légèrement modifiées. Les nombres d'ondes mesurés valent : $(\nu_x, \nu_y) = (4.740 \pm 0.003, 1.7095)$. L'incertitude sur ν_x provient de la faible valeur du courant I (à l'oscilloscope au lieu d'un pic unique, on en observe plusieurs).

5.1.5.3 Dispersion mesurée dans les BPM

Les résultats sont résumés par la figure 5.4 et le tableau 5.7.

Régions non dispersives valeur prédite : -38 mm ; l'écart modèle/expérience est grand, en moyenne de 130%.

Régions dispersives valeur prédite : $+1213$ mm ; l'écart modèle/expérience est en moyenne de 5%.

BPM1	-64	BPM09	-108
BPM2	1271	BPM10	1319
BPM3	1267	BPM11	1259
BPM4	-84	BPM12	-96
BPM5	-100	BPM13	-64
BPM6	1271	BPM14	1259
BPM7	1295	BPM15	1247
BPM8	-112	BPM16	-64

TAB. 5.7: Dispersion horizontale (mm) mesurée dans les BPM de Super-ACO (précision à ± 5 mm) — hexapôles éteints et onduleurs ouverts — Les écarts relatifs sont plus importants dans les régions non dispersives (BPM 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 et 16).

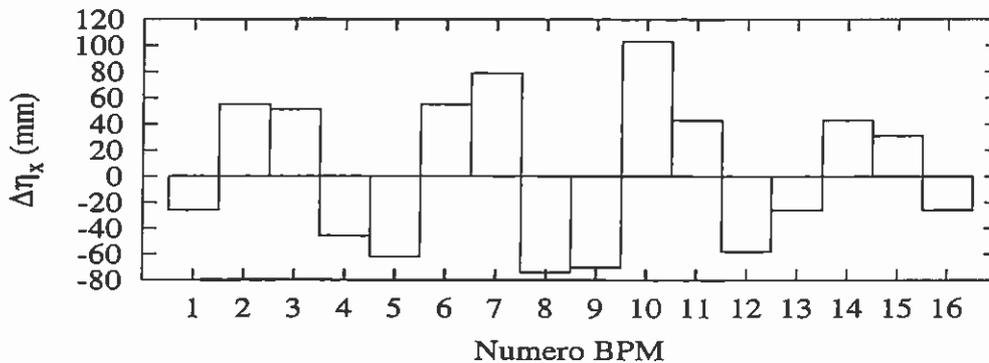


FIG. 5.4: Ecart absolu des dispersions horizontales théorique et mesurée dans les 16 BPM de Super-ACO — hexapôles éteints, onduleurs ouverts —.

La principale raison de ces écarts est la création d'orbite fermée par les défauts de champs quadripolaires $\Delta K/K$ (cf. sous-section 5.1.5.4) suivant la loi (Nadji, 1992).

$$\frac{(\Delta\eta_x)_{rms}}{(\Delta K/K)_{rms}} = \frac{\sqrt{\beta_{x_0}}}{2\sqrt{2}|\sin\pi\nu_x|} \left[\sum_i \beta_{x_i} ((Kl)_i \eta_{x_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

$$\approx 20.4$$

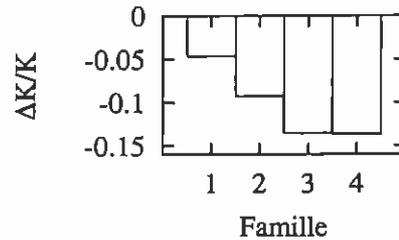
En utilisant les résultats de la section suivante, la formule 5.12 donne comme écart moyen sur la dispersion $\Delta\eta_x = 23$ mm rms alors que la valeur issue des mesures expérimentales est presque trois fois plus grande $\Delta\eta_x = 58$ mm rms.

5.1.5.4 Résultats obtenus avec LOCO

Ajustement sur quatre familles : Avant l'ajustement, le désaccord entre les orbites mesurées et théoriques est supérieur en valeurs rms à $170 \mu m$ horizontalement (H) et à $66 \mu m$ verticalement (V).

Après un ajustement sur les quatre familles de quadripôle l'accord est de $38 \mu m$ (réduction d'un facteur 5) et $20 \mu m$ (réduction d'un facteur 3) respectivement dans les plans horizontal et vertical avec un χ^2 de 2 080. En suivant les résultats énoncés précédemment, la valeur escomptée du χ^2 devrait être idéalement au mieux 400 ± 30 , sachant qu'il y a ($n_d = 512$) points de donnée et ($n_p = 82$) paramètres indépendants ajustés. Le point de fonctionnement devient alors $(\nu_x, \nu_y) = (4.741, 1.707)$ soit $(\Delta\nu_x, \Delta\nu_y) = (-0.018, -0.001)$, ce qui est en excellent accord avec la mesure expérimentale des nombres d'ondes. Les gradients des familles de quadripôles ont varié de moins de 0.15% (cf. Tab. 5.8, Fig. 5.5). Il faut remarquer que les écarts relatifs obtenus pour les gradients sont tous négatifs : ceci ne peut pas être dû à un phénomène aléatoire.

Famille	Avant	Après
Q1	-1.46723	-1.46655
Q2	2.62043	2.61800
Q3	2.47834	2.47498
Q4	-1.42383	-1.42188



TAB. 5.8: Valeurs des gradients quadripolaires (m^{-1}) en symétrie 4 avant et après l'ajustement de LOCO. Données utilisées pour ajuster le modèle linéaire de Super-ACO.

FIG. 5.5: Ecart relatif (en %) par rapport aux valeurs nominales des gradients pour chaque famille quadripolaire de Super-ACO : ces valeurs sont relativement faibles.

Les nouvelles fonctions β sont tracées sur la figure 5.6 ; le battement (Fig. 5.7) de la fonction β_x est de 0.5% autour de 1.7% (traduit le glissement $\Delta\nu_x = -0.018$) et celui de β_y est de 0.5% autour de 0 ($\Delta\nu_y = 0$).

Les bruits et gains des BPM ainsi que ceux des correcteurs sont donnés par la figure 5.8. Les valeurs sont raisonnables ; en moyenne, on retrouve la bonne valeur de *kick* dipolaire

vertical $2 \times \theta_y \approx 0.48$. Par contre dans le plan horizontal, la valeur attendue $2 \times \theta_x \approx 0.41$, n'est pas atteinte dans les régions dispersives. Cet écart est à corrélérer avec l'écart en dispersion donné par LOCO (cf. Fig. 5.4).

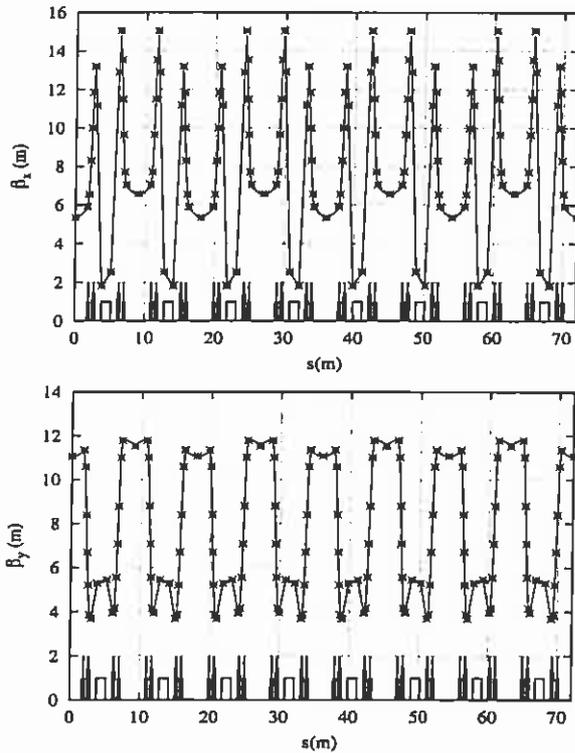


FIG. 5.6: Fonctions β avant (ligne) et après (étoile) l'ajustement en symétrie 4. L'expérience s'ajuste parfaitement sur la théorie, car les variations de gradients sont faibles, de l'ordre du pour mille.

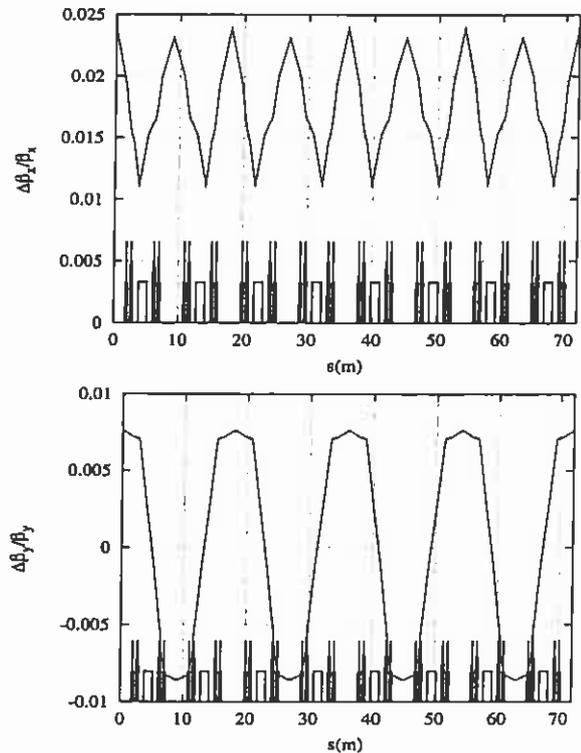


FIG. 5.7: Battement des fonctions β en conservant la symétrie 4 de Super-ACO.

Ajustement sur les quadripôles individuels : Lorsque l'ajustement est réalisé sur les 32 gradients des quadripôles, la symétrie 4 de l'anneau est brisée. La convergence semble meilleure : $14 \mu m$ et $11 \mu m$, horizontalement et verticalement avec comme nombres d'ondes $(\nu_x, \nu_y) = (4.739, 1.707)$ et un χ^2 de 460. Les gradients des quadripôles ont varié de façon plus significative jusqu'à $\pm 1.5\%$ (Fig. 5.9). Cependant, cette variation ne semble pas aléatoire comme l'on s'y attendrait ; bien au contraire, il semble que la variation sur un quadripôle est rattrapée immédiatement sur le quadripôle suivant. Néanmoins, les variations en moyenne pour chaque famille correspondent à celles trouvées en symétrie 4.

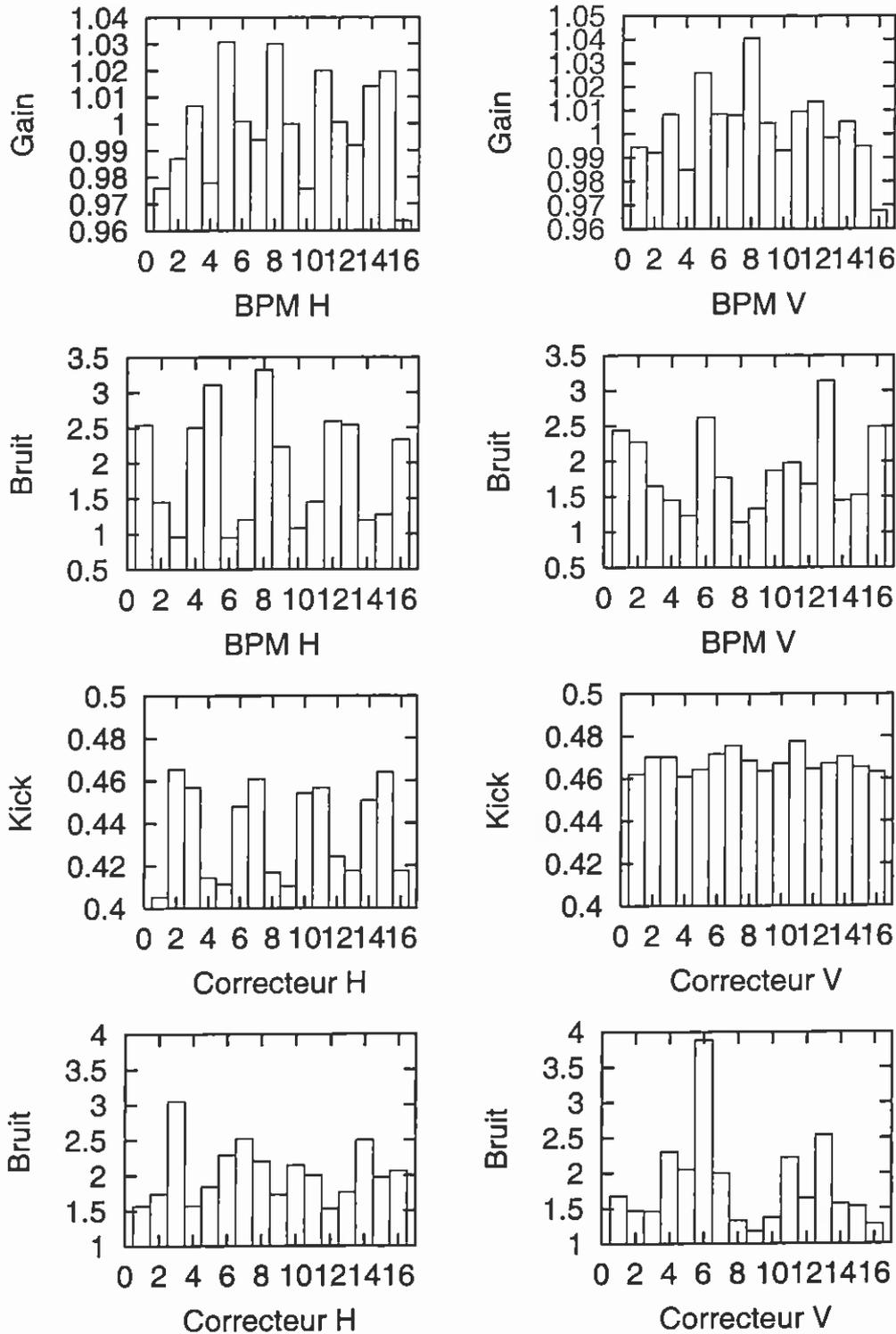


FIG. 5.8: Gains et bruits des BPM et correcteurs de Super-ACO en symétrie 4. Pour un ajustement parfait, les bruits des BPM et correcteurs devraient être voisins de l'unité.

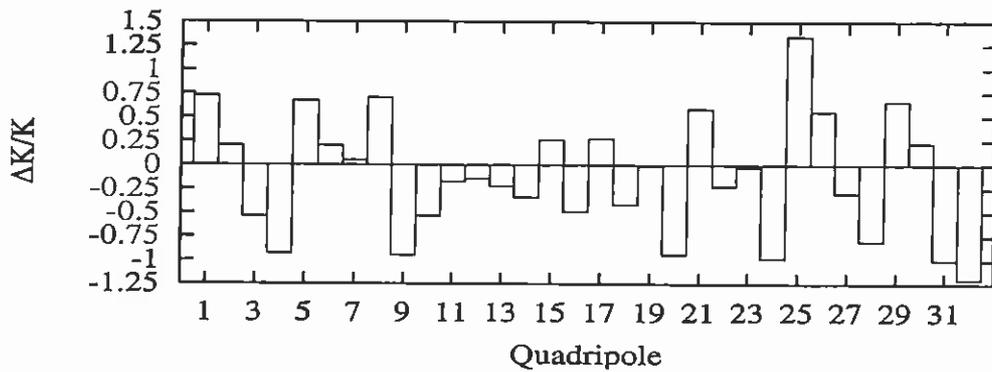


FIG. 5.9: Ecart relatif (en %) des gradients par rapport aux valeurs nominales pour chacun des 32 quadripôles de Super-ACO. Ces écarts ne sont pas aléatoires : une variation importante du gradient est immédiatement rattrapée sur le quadripôle suivant (e.g. les quadripôles 4 et 5, 8 et 9, 20 et 21, 24 et 25, 27 et 29, 31 et 1).

Ces résultats sont assez surprenants. En effet, briser la symétrie 4 de l'anneau devrait simplement se traduire par une distribution aléatoire des gradients quadripolaires autour des valeurs trouvées précédemment pour chaque famille. En aucun cas, la justification de variation de l'ordre du pourcentage ne semble plausible, ce qui est bien au-delà des valeurs provenant des mesures magnétiques (Barthès *et al.*, 1990, voir Fig. 3.22, p. 84). De plus, une aussi faible valeur du χ^2 suggère, ou bien que la machine est parfaitement connue, ou bien que le nombre de paramètres ajustés est trop important. La dernière hypothèse semble la plus raisonnable : nous essayons d'ajuster 32 valeurs de gradients en utilisant les mesures de 16 BPM à quatre électrodes. Les autres paramètres, les gains des correcteurs et des BPM et les facteurs d'Amman, peuvent être vus comme de poids secondaire dans l'ajustement. Le même type de problème est par exemple rencontré à l'ALS où il y a 104 gradients quadripolaires à ajuster sur 96 BPM (communication personnelle, C. Steier).

Nous voudrions connaître, parmi ces 104 paramètres, combien ont une influence réelle sur l'ajustement. La réponse à cette question est fournie par l'analyse du spectre des valeurs propres résultant de la décomposition en valeurs singulières. Sur la figure 5.10, les valeurs propres (λ_i) sont rangées par ordre décroissant de l'amplitude. On observe une décroissance rapide des amplitudes avec deux seuils : le premier en λ_{16} , le second en λ_{78} . Ces résultats

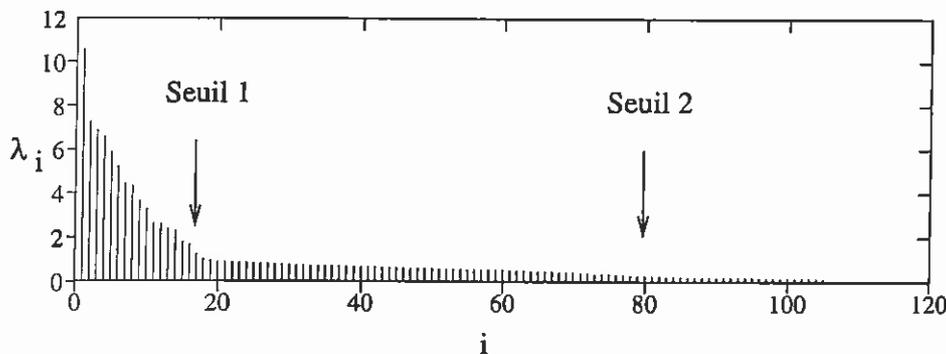


FIG. 5.10: Spectre des valeurs singulières obtenu par la méthode SVD. Un seuil apparaît nettement pour λ_{16} . Au-delà, les valeurs singulières sont petites, du même ordre de grandeur ; elles correspondent à des paramètres n'ayant pas un poids significatif dans l'ajustement de la matrice-réponse de Super-ACO.

5.1. ACQUISITION DES MATRICES-RÉPONSE

suggèrent de réaliser l'ajustement en rejetant tous les paramètres conduisant à des valeurs propres inférieures au seuil 1 ou 2. Il s'avère que ne rejeter que les valeurs propres plus petites que le seuil 2 n'améliore pas les résultats précédents. Comme attendu à la lecture du spectre, seul le seuil 1 est significatif¹⁰ : la convergence est maintenant de $29 \mu m$ (H) et $13 \mu m$ (V) avec comme nouveaux nombres d'ondes $(\nu_x, \nu_y) = (4.741, 1.707)$ et un χ^2 plus élevé de 1 050. La variation des gradients individuels est aléatoire et avec des amplitudes très voisines de celles obtenues pour les familles de quadripôles (Fig. 5.11). La convergence est acceptable si l'on

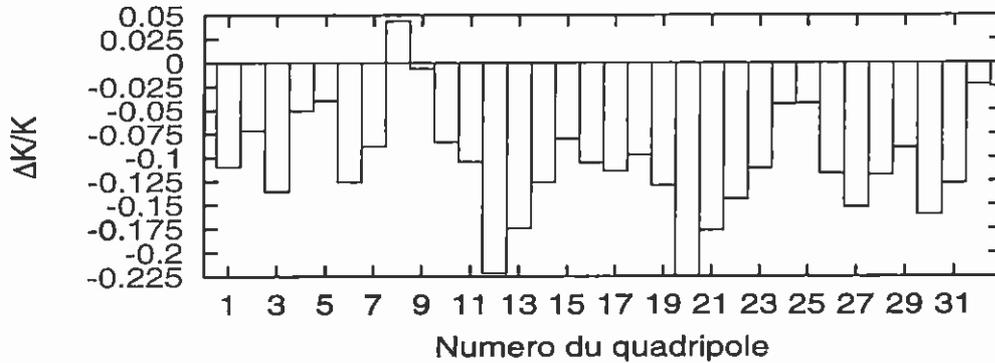


FIG. 5.11: Ecart relatif (en %) de chacun des gradients des 32 quadripôles de Super-ACO par rapport aux valeurs nominales. Les variations sont de l'ordre du pour mille.

considère la valeur moyenne du bruit des BPM, sachant que de toute manière les mesures ne sont faites avec seulement deux chiffres significatifs, *i.e.* une bien faible résolution inhérente à Super-ACO.

A titre indicatif, la figure 5.12 illustre les variations relatives des gradients par rapport aux valeurs déduites de l'ajustement en familles.

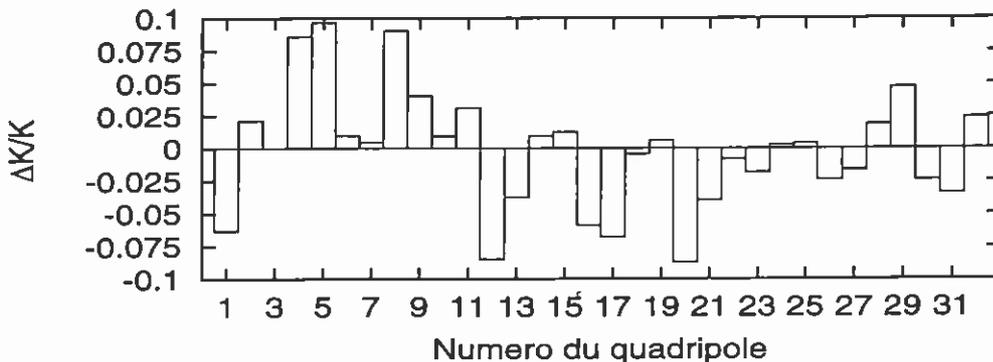


FIG. 5.12: Ecart relatif (en %) des gradients de chacun des 32 quadripôles de Super-ACO par rapport aux valeurs moyennes obtenues pour les familles. Les variations sont faibles et compatibles en amplitude avec les mesures magnétiques (Barthès *et al.*, 1990).

Les nouvelles fonctions β sont tracées sur la figure 5.13. et leurs battements sur la figure 5.14. Les battements, $\frac{\Delta\beta}{\beta}$, sont plus importants horizontalement ($\pm 2\%$ autour de 2%) que

¹⁰Les 16 valeurs singulières retenues correspondent physiquement au nombre de degrés de liberté du système étudié (il y a deux plages où l'avance de phase est pratiquement constante par super-période).

verticalement $\pm 1.5\%$. Ils s'expriment en première approximation suivant la formule classique (Rice et Cornell *in* Chao et Tigner, 1998) :

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)} = \frac{1}{2 \sin(2\pi\nu)} \sum_i (\Delta Kl)_i \beta(s_i) \cos(2\pi\nu - 2|\Phi(s) - \Phi(s_i)|) \quad (5.13)$$

où $(\Delta Kl)_i$ est le gradient intégré du i -ème quadripôle, $\Phi(s_i)$ son avance de phase. Soit avec une formule statistique (Nadji, 1992) :

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta\beta_x/\beta_x)_{rms}}{(\Delta K/K)_{rms}} &= \frac{1}{2\sqrt{2}|\sin \pi\nu_x|} \sqrt{\sum_i (\beta_{x_i} (Kl)_i)^2} \\ &\approx 10.3 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Soit en prenant les défauts de gradients donnés par LOCO : $\Delta\beta_x = 2.3\%$, ce qui est en accord avec la figure 5.14.

On remarque que le battement des fonctions d'ondes est maximum pour un déphasage $|\Phi(s) - \Phi(s_i)| = \pi\nu$ soit pour un défaut dans un quadripôle situé de manière diamétralement opposée à la position s du BPM où il est observé.

Enfin, LOCO réalisant un ajustement sur le glissement en énergie induit dans les régions dispersives, on peut en déduire les valeurs des dispersions dans les correcteurs, celles dans les BPM ont déjà été mesurées (cf. Eq. 5.9). L'ensemble des résultats en comparaison avec les dispersions déduites de l'ajustement est illustré par la figure 5.15 : l'accord est correct dans les BPM compte tenu des erreurs de mesure. Cependant, il faut noter des écarts dans les correcteurs entre la dispersion déduite du facteur d'Amman et celle donnée par le modèle ajusté. De plus, la dépendance en énergie de la matrice-réponse est traitée trop simplement dans le code LOCO (communication personnelle, H. Zyngier).

La figure 5.16 donne les nouveaux gains des BPM ainsi que le niveau de bruit de chaque BPM et correcteur et également la valeur ajustée du *kick*. On remarquera qu'à la convergence, le bruit rms du BPM i rapporté au bruit total rms de tous les BPM n'est pas voisin de l'unité comme il devrait l'être théoriquement pour une convergence atteignant le niveau de bruit des BPM.

En conclusion, l'algorithme LOCO ajuste correctement les fonctions β , les nombres d'ondes. Les défauts de gradients trouvés sont relativement faibles, ce qui suggère un assez bon accord entre la théorie et l'expérience.

5.1. ACQUISITION DES MATRICES-RÉPONSE

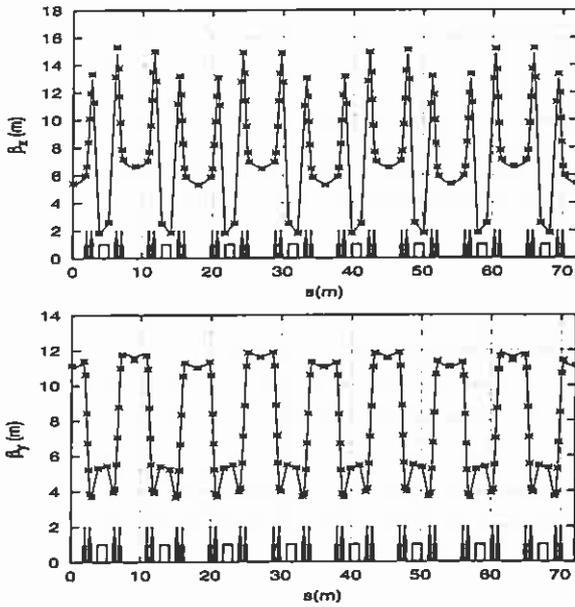


FIG. 5.13: Fonctions β de Super-ACO avant (ligne) et après (étoile) l'ajustement en brisant la symétrie 4. L'expérience s'ajuste parfaitement sur la théorie, car les variations de gradients sont faibles, de l'ordre du pour mille.

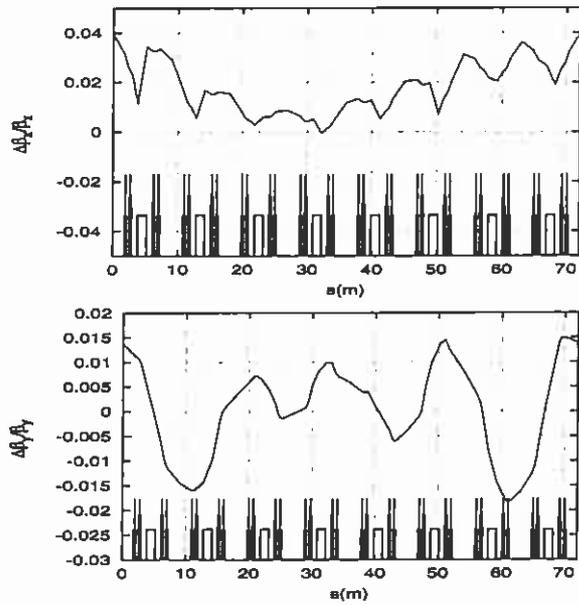


FIG. 5.14: Battement des fonctions β en brisant la symétrie 4 de Super-ACO. Ces variations sont faibles.

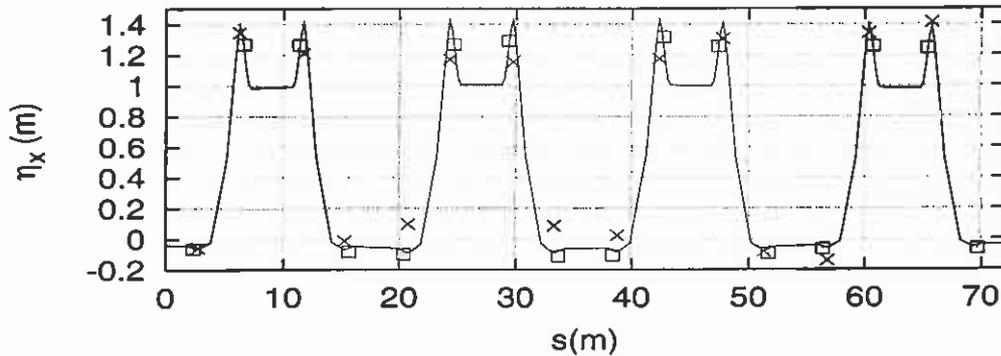


FIG. 5.15: Dispersion horizontale mesurée dans les BPM (carré), ajustée dans les correcteurs (croix) et prédite par LOCO (ligne). L'écart le plus significatif est dans les régions non dispersives de Super-ACO et peut être corrélé avec le facteur d'Amman.

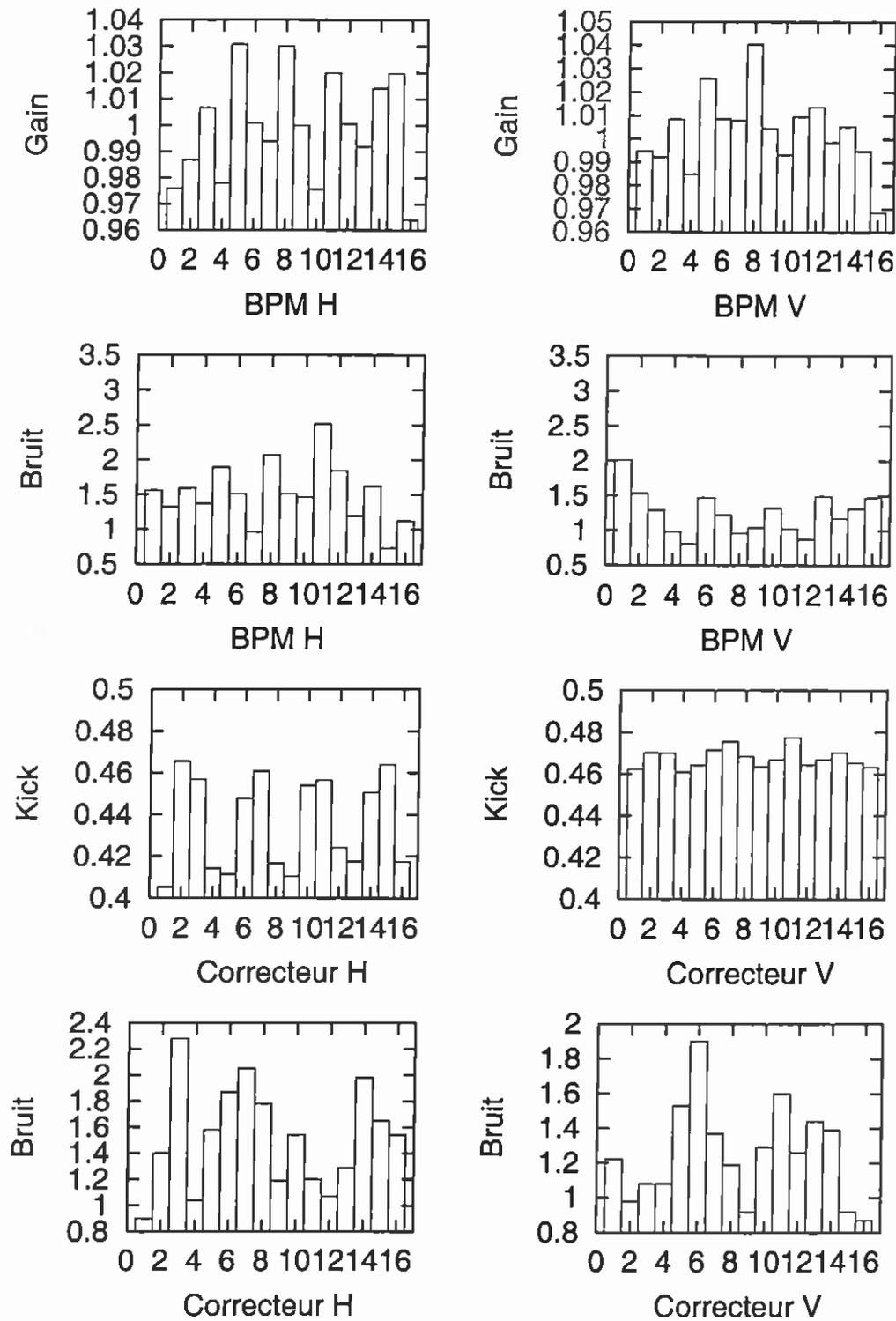


FIG. 5.16: Gains et bruits de BPM et correcteurs en brisant la symétrie 4 de Super-ACO — hexapôles éteints et onduleurs ouverts — Pour un ajustement parfait, les bruits des BPM et correcteurs devraient être voisins de l'unité.

5.1.6 Matrice-réponse hexapôles allumés et onduleurs ouverts

5.1.6.1 Influence des hexapôles

Dans cette partie de l'expérience, une matrice-réponse de Super-ACO a été acquise en allumant les hexapôles — les onduleurs sont toujours ouverts — Les hexapôles peuvent générer une composante quadripolaire s'il existe une orbite fermée non nulle comme nous allons le voir. Le potentiel vecteur d'un hexapôle droit a pour expression :

$$A_s = -\frac{S}{3}(x^3 - 3xy^2) \quad (5.15)$$

où S est la force intégrée de l'hexapôle.

Si l'orbite fermée n'est plus la trajectoire $x = y = 0$ dans l'hexapôle mais $x = x_0, y = y_0$, alors une composante quadripolaire (et dipolaire) apparaît dans l'expression générale du potentiel vecteur :

$$A_s = -\frac{S}{3} \left[(x^3 - 3xy^2) \boxed{-3x_0(x^2 - y^2)} - 3x_0^2x - x_0^3 \right. \\ \left. - 3y_0^2x \boxed{-6y_0xy} - 6y_0x_0y - 3y_0^2x_0 \right] \quad (5.16)$$

La composante quadripolaire induite est donc :

$$A_s^{quad} = \frac{K^{hex}}{2}(x^2 - y^2) + \frac{\tilde{K}^{hex}}{2}xy \quad (5.17)$$

où $K^{hex} = 2Sx_0$ est le champ intégré d'un quadripôle droit et $\tilde{K}^{hex} = 4Sy_0$ celui d'un quadripôle tourné (à prendre en compte si l'on considère le couplage).

En partant des valeurs des gradients trouvés précédemment, hexapôles éteints, on peut maintenant déduire des nouvelles valeurs de gradients, la valeur des champs quadripolaires induits par chaque hexapôle. De plus, connaissant S et K^{hex} , on peut également déterminer une mesure de l'orbite fermée, x_0 , dans les hexapôles.

5.1.6.2 Conditions expérimentales

Un courant $I = 4.4$ mA a été injecté dans 24 paquets avec un faisceau *plat* $(\sigma_x, \sigma_y) \approx (230, 110)$ μm . Comme les courants alimentant les quadripôles ont changé (cf. Tab. 5.9), il sera plus délicat d'isoler exactement la contribution quadripolaire induite par les hexapôles seuls et d'appliquer la procédure précédemment exposée; le point de fonctionnement déduit des nouvelles valeurs de courant dans les quadripôles est maintenant $(\nu_x, \nu_y) = (4.710, 1.767)$, ce qui est très loin du point de fonctionnement précédent¹¹. Les nombres d'ondes mesurés sont $(\nu_x, \nu_y) = (4.708, 1.761)$ ¹².

¹¹Les nombres d'ondes se sont croisés en allumant les hexapôles et n'ont pas été rattrapés.

¹²Mesure refaite le 30 octobre 2000, puisque les nombres d'ondes n'avaient pas été mesurés lors de la première acquisition de la matrice-réponse.

Famille	I(A)	Famille	I(A)
Q1	225.37	H1	54.35
Q2	401.80	H2	100.31
Q3	379.78	H3	198.58
Q4	216.24	H4	193.93

TAB. 5.9: Courants mesurés pour les quadripôles et hexapôles — onduleurs ouverts — Valeurs utilisées pour ajuster le modèle de Super-ACO à l'expérience.

A cela, il faut ajouter une question : pour les forces hexapolaires, doit-on prendre les valeurs déduites du courant les alimentant ou bien celles permettant d'obtenir les bonnes valeurs de chromaticités — non mesurées lors de l'expérience — ? En effet, rappelons que la chromaticité est créée :

1. naturellement par les quadripôles : $\xi = -\frac{1}{4\pi} \int K\beta ds$ (cf. chap. 1, p. 20).
2. par les coins des dipôles
Estimation de la chromaticité naturelle pour ces deux effets : $(\xi_x^{nat}, \xi_y^{nat}) = (-12.6, -5.9)$
3. par les hexapôles : $\Delta\xi = \pm \frac{1}{4\pi} \eta\beta \frac{B''i}{(B\rho)}$ (Edwards et Syphers *in* Tigner et Chao)
4. par les correcteurs dipolaires dans les sections dispersives, car ils possèdent une composante hexapolaire non négligeable. Il s'agit donc principalement des correcteurs de la famille CQ3. En partant d'une maille parfaite, on peut estimer cette contribution à la chromaticité : $(\Delta\xi_x, \Delta\xi_y) = (-0.84, +0.35)$

A titre de comparaison, les chromaticités non réduites produites sans prendre en compte les défauts ou les correcteurs sont $(\xi_x, \xi_y) \approx (1.7, 1.2)^{13}$ alors que si l'on ne considère que les courants expérimentaux elles valent $(\xi_x, \xi_y) \approx (2.68, -0.85)^{14}$. De nouvelles mesures de chromaticités ont été réalisées le 30 octobre 2000 pour les mêmes courants hexapolaires (mais un jeu de correcteurs différent) : hexapôles éteints, on a mesuré seulement $\xi_y = -4.43$, et avec les hexapôles $(\xi_x, \xi_y) = (0.54, 0.59)$. Ces valeurs sont très différentes de celles énoncées précédemment.

Ajoutons encore que la localisation des correcteurs dans les quadripôles implique un faible recouvrement des intégrales de champ ; donc théoriquement le champ magnétique du correcteur induit une modification de celui du quadripôle, de l'hexapôle. De plus, comme il y a une orbite fermée non nulle, la perturbation créée par le dipôle n'est pas parfaitement dipolaire. Toutes ces considérations n'ont pas été prises en compte dans notre simulation de la matrice-réponse et pourraient expliquer les difficultés rencontrées pour réduire les données lorsque les hexapôles sont allumés.

5.1.6.3 Dispersion mesurée dans les BPM

Les résultats sont résumés par la figure 5.17 et le tableau 5.10.

¹³Valeurs supposées en considérant que la machine est réglée comme lors de l'expérience du 22 mai où l'on avait les mêmes courants dans les hexapôles.

¹⁴Pour la conversion courant (I) - champ intégré (Hl), voir la note (Nghiem, 1989), p. 14 : $\frac{(Hl)[T.m^{-1}]}{(B\rho)} \approx \frac{I[A]}{216.8}$.

5.1. ACQUISITION DES MATRICES-RÉPONSE

Régions non dispersives valeur attendue : -44 mm, l'écart modèle/expérience est grand, en moyenne de 50%. Pour le BPM 9, la dispersion est pathologique, -99 mm, soit le double de celle des autres BPM¹⁵.

Régions dispersives valeur attendue : $+1\,218$ mm, l'écart modèle/expérience est inférieur à 5%.

BPM1	-48	BPM09	-99
BPM2	1266	BPM10	1286
BPM3	1246	BPM11	1239
BPM4	-64	BPM12	-64
BPM5	-59	BPM13	-60
BPM6	1239	BPM14	1259
BPM7	1259	BPM15	1243
BPM8	-68	BPM16	-52

TAB. 5.10: Dispersion horizontale mesurée (à ± 5 mm) — hexapôles allumés et onduleurs ouverts — Les écarts relatifs sont plus importants dans les régions non dispersives (BPM 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 et 16 de Super-ACO).

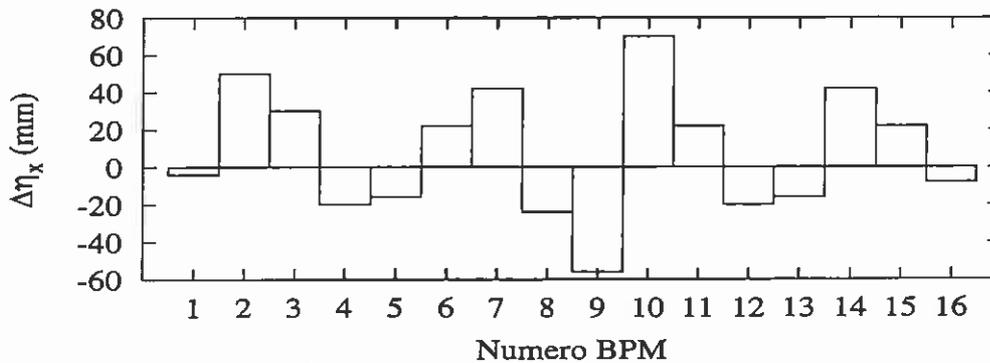


FIG. 5.17: Ecarts relatifs entre la fonction dispersion horizontale théorique et mesurée dans les 16 BPM de Super-ACO — hexapôles allumés —.

La dispersion peut être créée (Nadji, 1992) :

1. par des défauts d'orbite fermée (x_{of}) dans les quadripôles et les hexapôles :

$$\frac{(\Delta\eta_x)_{rms}}{(x_{of})_{rms}} = \frac{\sqrt{\beta_{x0}(s)}}{2\sqrt{2}|\sin \pi\nu_x|} \left[\sum_i \beta_{x_i} ((K_i l_i))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.18)$$

$$\approx 20.1$$

¹⁵Le BPM 9 est situé dans une zone de tassement de la dalle de Super-ACO qui s'enfonce progressivement cf. relevé d'altimétrie de l'année 2000.

2. par les défauts de gradients $(\Delta K/K)$ des quadripôles :

$$\frac{(\Delta\eta_x)_{rms}}{(\Delta K/K)_{rms}} = \frac{\sqrt{\beta_{x0}(s)}}{2\sqrt{2}|\sin \pi\nu_x|} \left[\sum_i \beta_{x_i} ((K_i l_i) \eta_{x_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

$$\approx 10.4$$

Il est également intéressant de comparer ces valeurs de dispersion avec celles trouvées hexapôles éteints (Fig. 5.18) : les dispersions ont changés de manière significative dans les régions à faible dispersion bien que les valeurs des courants des familles Q3 et Q4, qui règlent la valeur de la dispersion, n'aient pas changé entre les deux réglages optiques. Globalement les écarts relatifs sont plus importants dans les régions à faible dispersion.

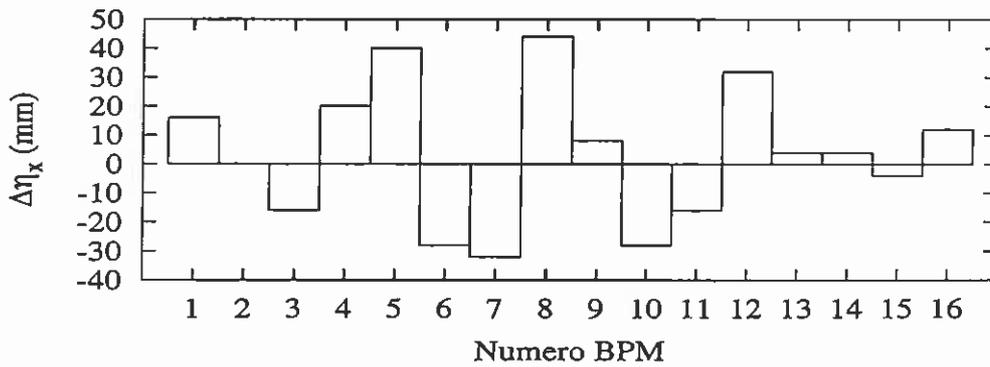


FIG. 5.18: Ecarts relatifs des dispersions lorsque les hexapôles sont allumés par rapport au cas où ils sont éteints. Ces écarts relatifs (non tracés) sont plus significatifs dans les régions à faible dispersion de Super-ACO.

5.1.6.4 Résultats obtenus avec LOCO

Ajustement sur quatre familles : En considérant les valeurs expérimentales hexapolaires déduites de courants mesurés, les écarts rms entre matrices modèle et expérimentale valent $160 \mu m$ (H) et $51 \mu m$ (V) avant l'ajustement¹⁶.

En symétrie 4, le résidu entre matrices modèle et expérimentale de Super-ACO est de $20 \mu m$ rms (H) et $18 \mu m$ rms (V) avec un χ^2 de 1 579. Le point de fonctionnement devient $(\nu_x, \nu_y) = (4.707, 1.761)$, ce qui est en accord avec les mesures expérimentales ; les gradients ont changé de manière plus significative que dans le cas précédent (Fig. 5.19). Cette fois, la variation sur les gradients est plus importante pour les familles Q1 et Q2 alors que dans le cas hexapôles éteints il s'agissait plutôt de ceux de Q3 et Q4. On peut maintenant déduire les gradients moyens induits par les hexapôles (Fig. 5.20) : les valeurs sont de l'ordre du pour mille, *i.e.* extrêmement faibles. Les battements des fonctions β sont donnés par la figure 5.21.

¹⁶Ces résultats proviennent de l'analyse de la matrice-réponse enregistrée le 30 octobre 2000.

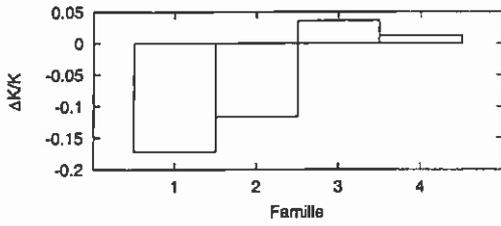


FIG. 5.19: Variation (en %) des gradients quadripolaires de Super-ACO en symétrie 4.

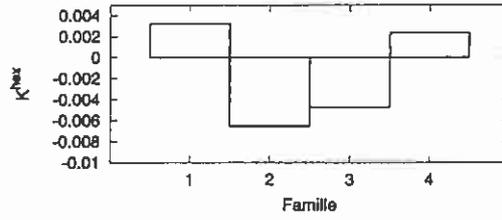


FIG. 5.20: Gradients quadripolaires créés par l'orbite fermée traversant les hexapôles de Super-ACO.

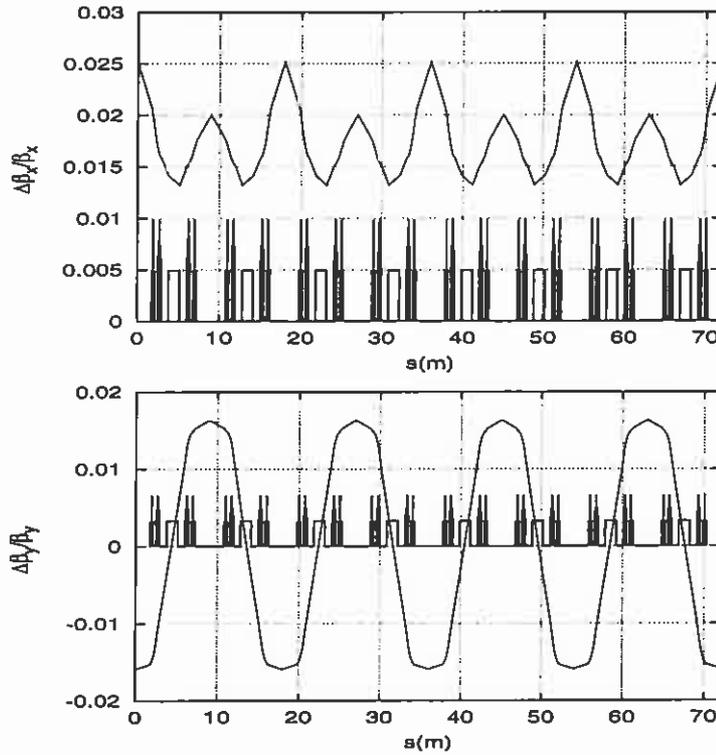


FIG. 5.21: Battement des fonctions β de Super-ACO en symétrie 4 avec hexapôles expérimentaux.

Ajustement sur les quadripôles individuels : En faisant varier individuellement les gradients, les résidus deviennent : $21 \mu m$ (H) et $16 \mu m$ (V) dans chacun des plans avec un χ^2 de 926. Les nombres d'ondes finaux valent : $(\nu_x, \nu_y) = (4.707, 1.761)$.

Les défauts gradients mesurés sont donnés par la figure 5.22, les variations relatives vont jusqu'à 0.25%. Ces variations sont similaires en termes d'amplitudes à celles trouvées hexapôles éteints. Les battements des fonctions β induits sont donnés à titre indicatif par la figure 5.25. En utilisant la relation 5.17, il est possible d'extraire des défauts quadripolaires la contribution hexapolaire (cf. Fig. 5.23) ainsi que le défaut d'orbite fermée dans les hexapôles (cf. Fig. 5.24). Ces défauts sont relativement faibles. On remarque cependant que la distribution des défauts d'orbite fermée horizontale n'est pas aléatoire : elle suit la

4-périodicité de l'anneau et est corrélée aux mesures de la fonction dispersion dans les BPM et aux fonctions β (cf. Fig. 5.25).

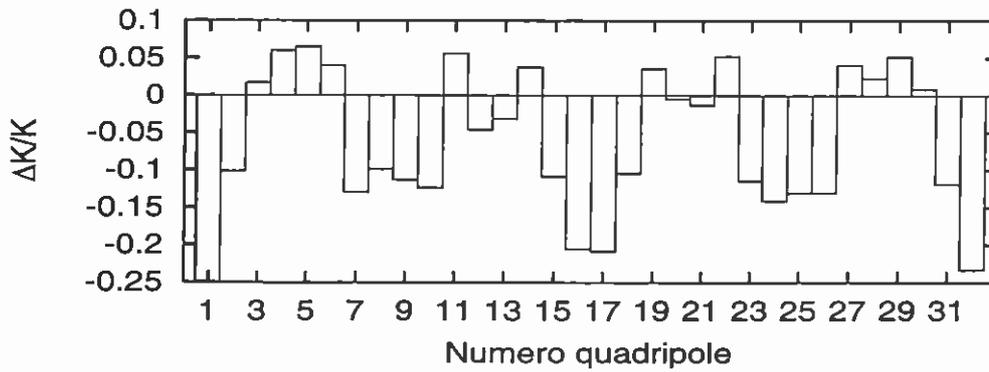


FIG. 5.22: Ecarts relatifs (en %) des gradients de Super-ACO — hexapôles allumés — Une structure 4-périodique semble exister : les variations de gradients sont plus significatives dans les régions dispersives.

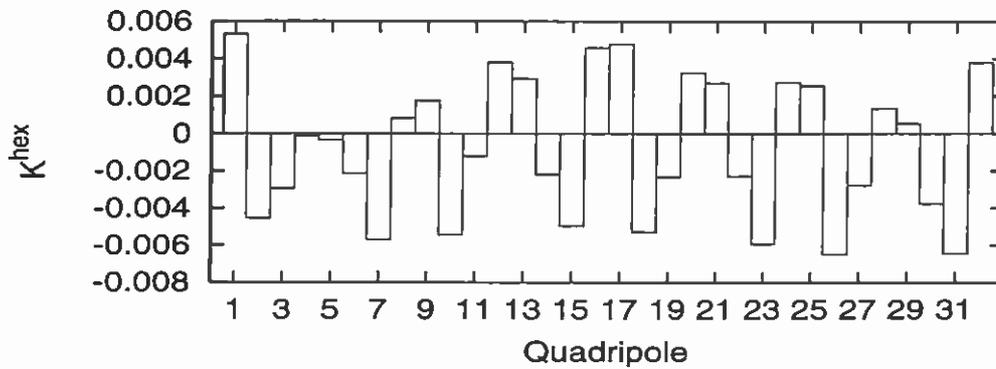


FIG. 5.23: Gradients induits par les hexapôles lorsqu'ils ont traversés par une orbite fermée non nulle.

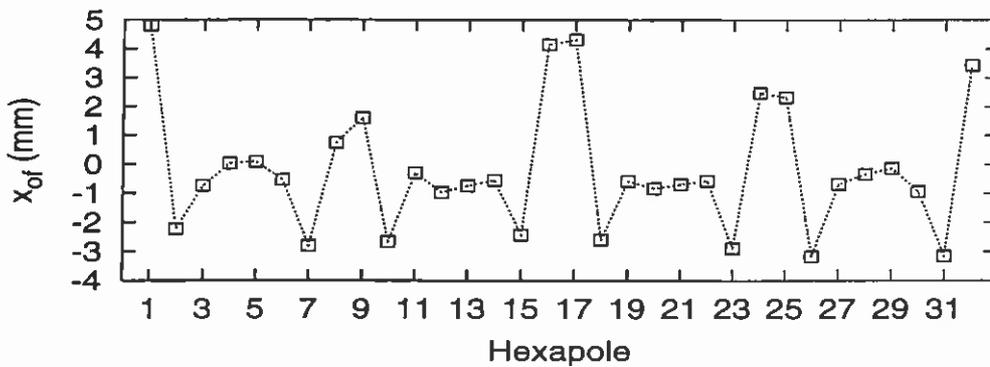


FIG. 5.24: Orbite fermée (of) horizontale dans les hexapôles déduites des gradients induits par les hexapôles. Les valeurs ne sont pas aléatoires mais reflètent la symétrie 4 de Super-ACO (cf. fonctions β Fig. 5.25). Il y a aussi une corrélation avec la fonction dispersion mesurée dans les correcteurs.

5.1. ACQUISITION DES MATRICES-RÉPONSE

On peut encore remarquer que les valeurs de dispersions déduites de l'ajustement sont en accord avec celles mesurés dans les BPM (Fig. 5.26). L'accord est meilleur lorsque l'on compare les dispersions dans les correcteurs déduites de l'ajustement de $\frac{\Delta E}{E}$ grâce à la formule 5.9, et celles du modèle ajusté. Une des causes du désaccord moyen de 10% peut être l'influence des erreurs dipolaires non modélisées (orbite fermée non nulle dans les quadripôles).

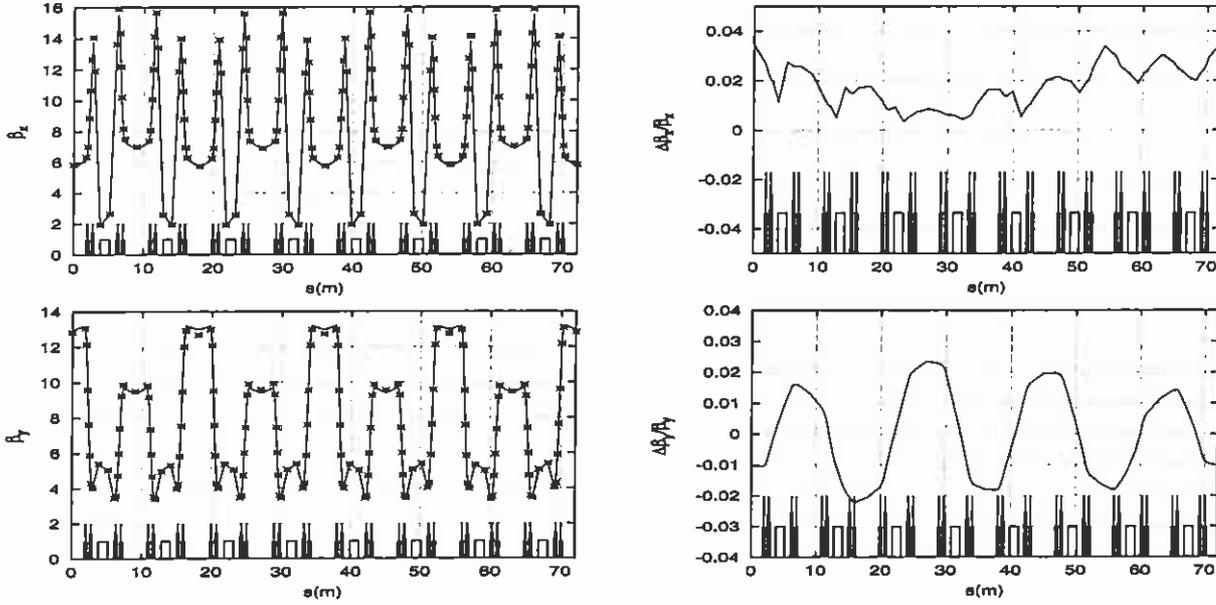


FIG. 5.25: Fonctions β (à gauche) et leurs battements (à droite) en brisant la symétrie 4 de Super-ACO. L'optique est globalement peu perturbée.

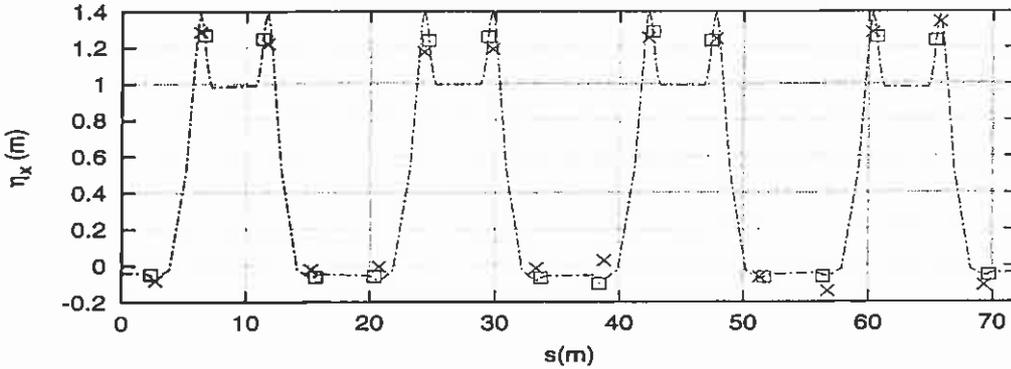


FIG. 5.26: Dispersion horizontale mesurée dans les BPM (croix) et ajustée dans les correcteurs (carrés) et prédite par LOCO. L'accord est bon compte tenu des erreurs dipolaires avec une erreur moyenne de 10%.

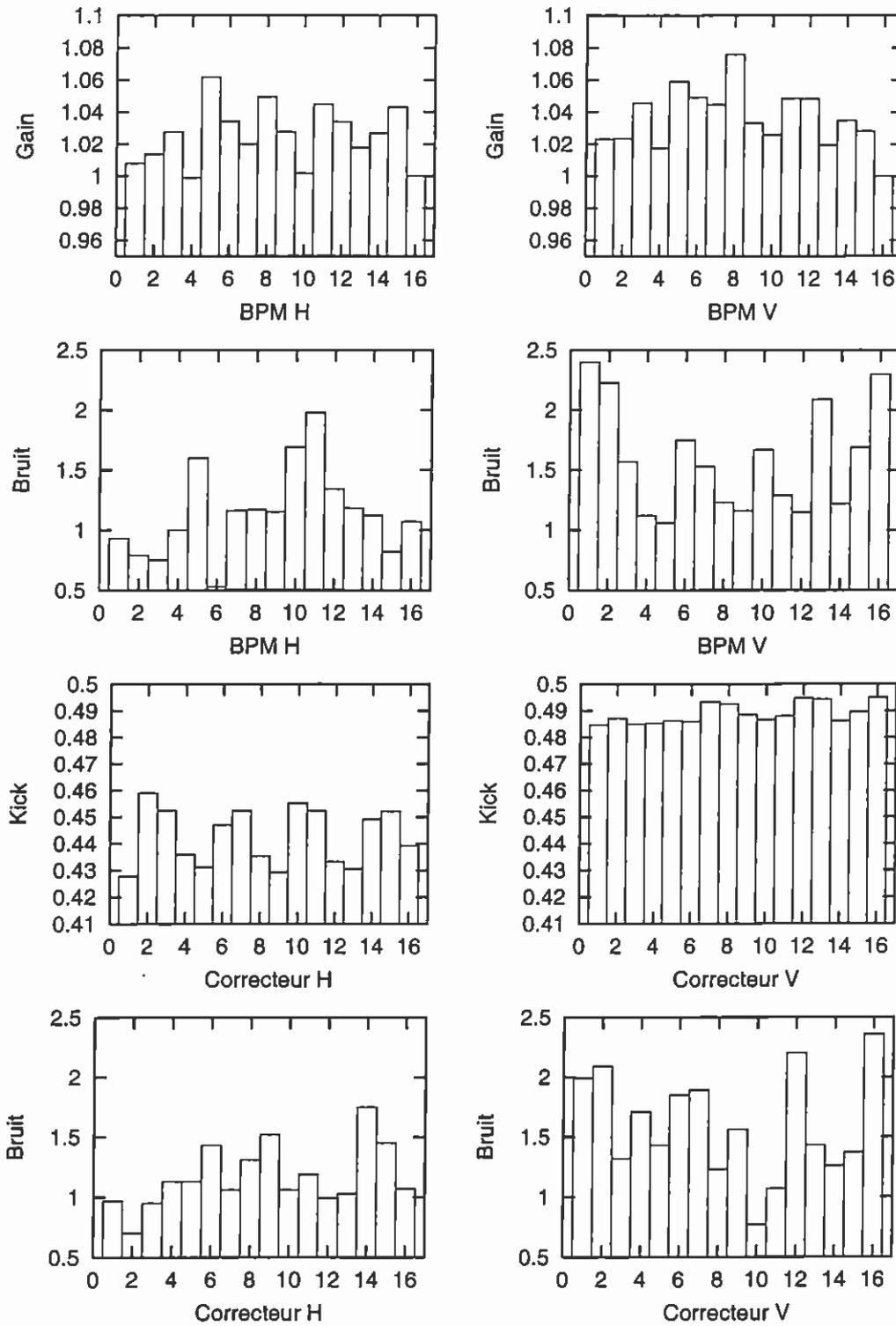


FIG. 5.27: Gains et bruits de BPM et correcteurs de Super-ACO — hexapôles allumés, onduleurs ouverts — Pour un ajustement parfait, les bruits des BPM et correcteurs devraient être voisins de l'unité.

5.1.7 Matrice-réponse hexapôles allumés et onduleurs fermés

5.1.7.1 Conditions expérimentales

La matrice-réponse avec les onduleurs fermés a été acquise pour un courant $I = 26$ mA dans 24 paquets — dimensions faisceau $(\sigma_x, \sigma_y) = (226, 130) \mu m$ —. Les courants quadripolaires et hexapolaires mesurés sont donnés par le tableau 5.11 ; les gradients des familles Q3 et Q4 ont été modifiés pour compenser globalement la focalisation induite par les insertions.

Famille	I(A)	Famille	I(A)
Q1	218.50	H1	54.35
Q2	399.31	H2	100.31
Q3	377.88	H3	198.58
Q4	212.16	H4	193.93

TAB. 5.11: Courants mesurés dans les familles de quadripôles — hexapôles et onduleurs fermés — Les courant des familles Q1 et Q2 ont changé de manière significative. Valeurs utilisées pour calibrer le modèle de Super-ACO.

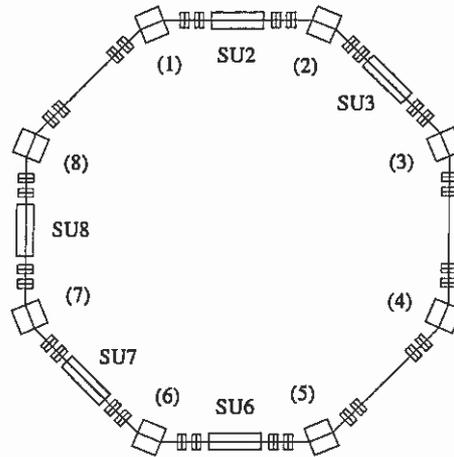


FIG. 5.28: Synoptique de Super-ACO avec les onduleurs SU2, SU3, SU6, SU7 et SU8.

Dans la version 8.15 de MAD, les onduleurs ne sont pas modélisables. L'ensemble des résultats obtenus avec LOCO ne sera à prendre en compte que de *manière qualitative*. Cependant l'ajustement ayant lieu principalement sur les fonctions optiques, les nombres d'ondes trouvés seront très proches des valeurs expérimentales. Par contre, les variations sur les gradients n'ont pas de signification physique, car ils ne tiennent pas compte de la focalisation des onduleurs.

Si l'on considère une maille de Super-ACO avec les gradients quadripolaires et champs hexapolaires mesurés *via* les courants mais sans onduleur, le point de fonctionnement vaut $(\nu_x, \nu_y) = (4.754, 1.575)$, qu'il faut ensuite modifier pour ajouter l'influence de la focalisation des onduleurs.

Les glissements des nombres d'ondes induits par l'ensemble des onduleurs (cf. Fig. 5.28) SU2, SU3, SU6, SU7 et SU8 sont $(\Delta\nu_x, \Delta\nu_y) = (-0.0026, +0.1542)$. Ces valeurs calculées en utilisant les valeurs expérimentales de courant (cf. Tab. 5.11) sont très proches des mesures réalisées au début des années 1990 — Brunelle, 1992 — (cf. Tab. 5.12), le point de fonctionnement devient après l'ajustement $(\nu_x, \nu_y) = (4.751, 1.729)$ auquel il faudrait encore ajouter l'influence de l'orbite fermée non nulle dans les hexapôles.

Dans le code BETA [93], les onduleurs sont modélisés idéalement¹⁷, *i.e.* sans focalisation horizontale ($k_x = 0$ et $\int B_z ds = 0$). Le point de fonctionnement déduit des valeurs expérimentales de courant est alors $(\nu_x, \nu_y) = (4.754, 1.744)$.

¹⁷Pour comprendre quantitativement l'influence des onduleurs sur l'optique, il faudrait par exemple interfacer le code BETA avec LOCO.

	SU2	SU3	SU6	SU7	SU8
$\Delta\nu_x$	0.0053	-0.007	0.0007	0.00	-0.0016
$\Delta\nu_y$	0.0477	0.046	0.0030	0.03	0.0275

TAB. 5.12: Glissement des nombres d'ondes expérimentaux induit par chacun des onduleurs. Les onduleurs SU2, SU3, SU7 et SU8 vont le plus perturber l'optique de Super-ACO.

5.1.7.2 Dispersion mesurée dans les BPM

Les dispersions mesurées dans les BPM sont exprimées dans le tableau 5.13. Ne disposant pas de modèle satisfaisant de l'anneau avec les onduleurs, on ne donnera pas de comparaison avec un hypothétique modèle mais avec les valeurs mesurées de la fonction dispersion dans les deux cas précédents (Fig. 5.29 et Fig. 5.30). La comparaison n'est donnée qu'à titre qualitatif puisque les familles Q3 et Q4, réglant les dispersions, sont différentes. La grande différence concerne la dispersion est maintenant positive dans les régions à faible dispersion (BPM 1, 4, 16) : en moyenne, les écarts relatifs sont de près de 150 % pour ces trois BPM. Par contre dans les régions dispersives, les écarts relatifs restent faibles : inférieurs à 5% en moyenne.

BPM1	52	BPM09	-92
BPM2	1199	BPM10	1331
BPM3	1215	BPM11	1279
BPM4	24	BPM12	-76
BPM5	-44	BPM13	-12
BPM6	1235	BPM14	1235
BPM7	1287	BPM15	1179
BPM8	-72	BPM16	20

TAB. 5.13: Dispersion horizontale mesurée (à ± 5 mm) dans les BPM de Super-ACO — hexapôles allumés, onduleurs fermés — La fonction dispersion dans les régions non dispersives a beaucoup changé. Dans les BPM 1, 4 et 16, la fonction dispersion est maintenant positive.

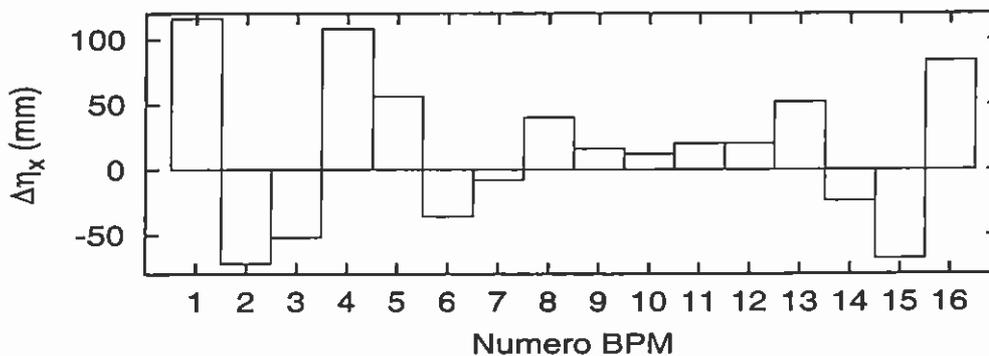


FIG. 5.29: Ecart entre les dispersions horizontales mesurées dans les BPM de Super-ACO, hexapôles éteints et onduleurs ouverts par rapport au cas hexapôles allumés et onduleurs fermés.

Régions non dispersives l'écart modèle-mesure est en moyenne de 45%.

Régions dispersives l'écart modèle-mesure est en moyenne de 5%.

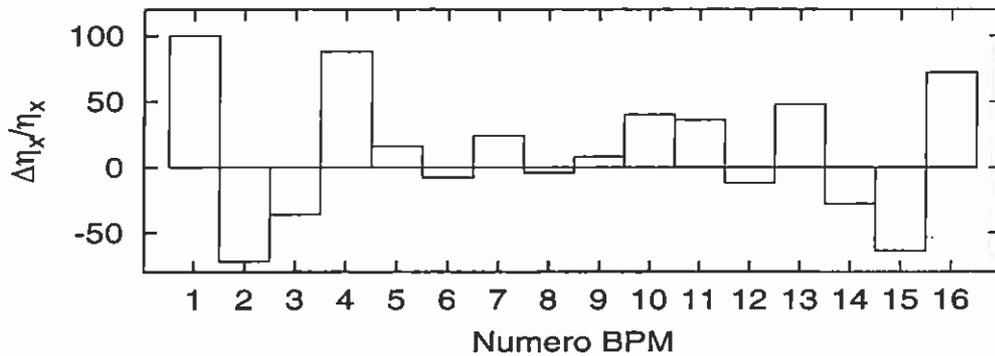


FIG. 5.30: Ecart entre les dispersions horizontales mesurées dans les BPM de Super-ACO, hexapôles allumés et onduleurs ouverts par rapport au cas hexapôles allumés et onduleurs fermés.

5.1.7.3 Résultats obtenus avec LOCO

Tous les résultats suivants doivent être considérés *qualitativement*. L'algorithme LOCO converge bien dans les deux plans avec des écarts $22 \mu m$ (H) et $16 \mu m$ (V) et un point de fonctionnement de $(\nu_x, \nu_y) = (4.727, 1.707)$. L'allure des fonctions β (Fig. 5.32) est déformée en particulier au voisinage des onduleurs. Qualitativement, elle est en accord avec celle prédite par le code BETA. Retenons simplement, que LOCO donne une bonne estimation de l'allure des fonctions optiques et des nombres d'ondes. La perturbation de l'optique linéaire par les onduleurs SU2, SU3, SU7 et SU8 est nettement observée.

A titre indicatif, les variations sur les gradients sont données par la figure 5.31 : les écarts sont de plusieurs pour cent. Comme les onduleurs ne sont pas inclus dans la description de la maille utilisée par le code LOCO, ces valeurs ne doivent pas être considérées comme réalistes. Par contre, il est intéressant de comprendre comment le programme LOCO a ajusté l'optique linéaire de l'anneau de stockage.

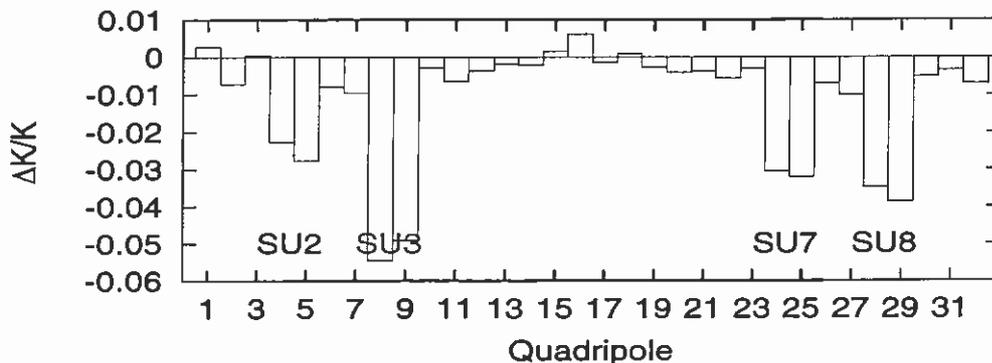


FIG. 5.31: Valeurs des gradients pour chaque quadrupôle, hexapôles allumés et onduleurs fermés. Ces valeurs sont élevées jusqu'à 6% mais on remarque que le code LOCO a compensé localement les glissements des nombres d'ondes induits par les onduleurs.

Nous avons vu que les onduleurs induisent des glissements importants des nombres d'ondes en particulier dans le plan vertical (cf. Tab. 5.12); les onduleurs SU2, SU3, SU7 et SU8 perturbent fortement l'optique de Super-ACO. Le code LOCO compense localement la perturbation de chaque onduleur en modifiant les gradients des quadripôles adjacents dont la focalisation est verticale. C'est pourquoi, des variations relatives de plusieurs pour cent sont observées. En pratique, l'influence des onduleurs est compensée globalement sauf pour SU8 (Brunelle *et al.*, 1999).

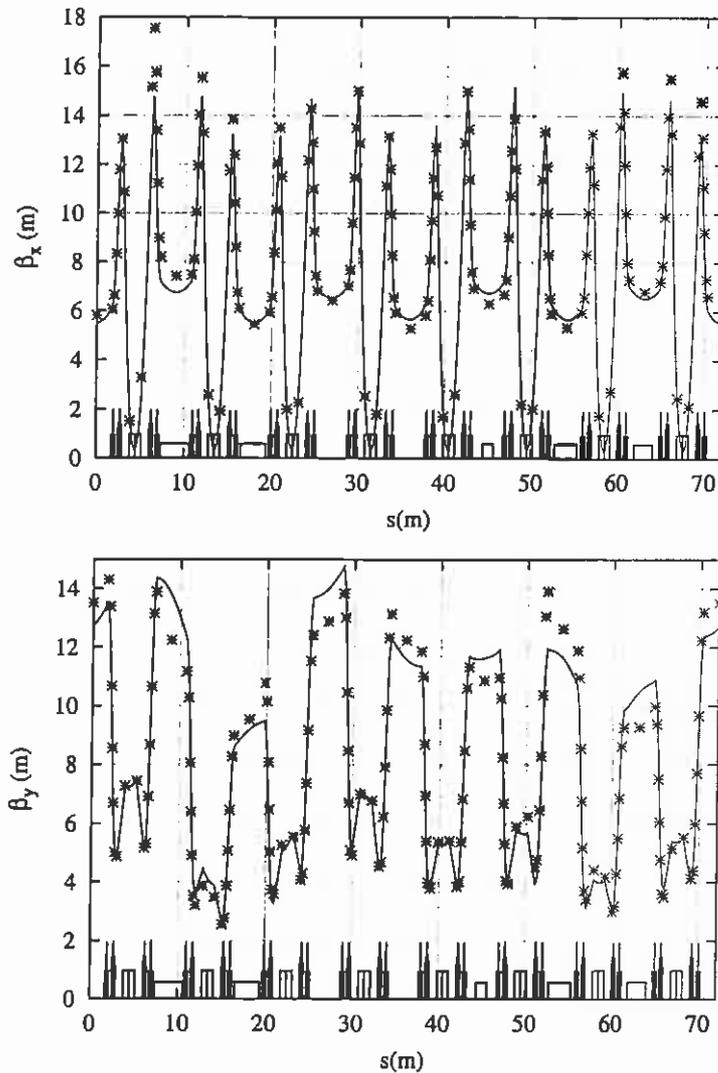


FIG. 5.32: Fonctions β calculées pour une machine théorique avec le logiciel BETA (ligne) et déduites l'ajustement avec les hexapôles et les onduleurs fermés (étoile). On observe un bon accord qualitatif avec le modèle (cf. Brunelle, 1992).

Conclusion

Ce travail a permis d'obtenir une estimation des erreurs quadripolaires mesurées pour deux configurations machine à savoir hexapôles éteints et allumés. Deux approches ont été tentées.

1. La première, la plus naturelle, consistait à réaliser l'ajustement des matrices-réponse sur les quatre familles quadripolaires puisque tous les quadripôles d'une même famille sont branchés sur une même alimentation. Dans ce cas, la convergence du programme LOCO est excellente.
 - Hexapôles éteints, les défauts de gradients, $\frac{\Delta K}{K}$, sont faibles : -5×10^{-4} (Q1), -9×10^{-4} (Q2) et -1.4×10^{-3} (Q3 et Q4). L'origine principale proviendrait des courants des alimentations.
 - Hexapôles allumés, la répartition globale des défauts de gradient a changé : -1.7×10^{-3} (Q1), -1.1×10^{-3} (Q2), 4×10^{-4} (Q3) et 1×10^{-4} (Q4). Ces variations s'expliquent par le terme quadripolaire engendré dans les hexapôles lorsque l'orbite fermée est non nulle.
 - Ces résultats peuvent être utilisés pour tenter d'améliorer la symétrie de l'anneau de stockage. Il suffit d'alimenter chaque famille de quadripôle avec un courant corrigé des écarts sur les gradients déduits du code LOCO (voir par exemple, Robin, Safranek et Decking, 1999).

Les légers désaccords de la fonction dispersion dans les correcteurs proviennent en majeure partie des défauts dipolaires qui n'ont pas été pris en compte dans cette étude.

2. Dans la seconde approche, on recherchait la distribution des gradients individuels pour estimer quel est l'impact de la destruction de la symétrie 4 de l'anneau sur la dynamique globale du faisceau.

Il s'est avéré que la convergence de l'algorithme est correcte seulement si l'on ne conserve que les 16 valeurs singulières principales. Il semble exister une faible corrélation entre les 32 quadripôles individuels rendant leurs variations non indépendantes. De plus, pour Super-ACO, les 32 gradients sont ajustés en utilisant 32 correcteurs et 32 lectures BPM. Pour une machine comme l'Advanced Light Source, l'ajustement est typiquement fait sur 49 gradients et utilisant 96 BPM et 164 correcteurs. Le nombre de stations de mesures de Super-ACO est trop faible pour espérer obtenir une détermination des gradients individuels. A cela, il faut ajouter la faible résolution des BPM.

Les déviations trouvées pour les gradients sont faibles, de l'ordre du pour mille. Ce résultat est en accord avec les mesures magnétiques. Ce qui suggère que l'optique linéaire de Super-ACO est bien modélisée. La compensation individuelle des défauts quadripolaires n'a pas pu être vérifiée expérimentalement, car les quadripôles sont alimentés par famille.

Pour ce qui est de l'influence des erreurs sur ces résultats énoncés, il convient de distinguer les erreurs aléatoires des erreurs systématiques :

- Les erreurs aléatoires ne peuvent être estimées qu'en enregistrant régulièrement les matrices-réponse pour une même configuration machine. De plus, la résolution des

BPM peut être améliorée si pour chaque mesure de la matrice-réponse, les données sont moyennées sur plusieurs tours. Cette méthode a été utilisée avec succès à l'ALS : après moyennisation, la résolution des BPM est descendue de $10 \mu\text{m}$ à environ $0.5 \mu\text{m}$ (communication personnelle, C. Steier).

- Les erreurs systématiques sont en pratique minimisées par le choix de la force des correcteurs. L'influence des nonlinéarités n'est cependant pas complètement supprimée. On peut également s'interroger sur l'influence des quadripôles combinés de Super-ACO.

Nous pouvons également noter que nous avons obtenu les premières mesures expérimentales qualitatives des fonctions optiques lorsque les onduleurs sont fermés. Pour prendre réellement en compte l'effet des insertions, un travail possible consisterait à interfacer le code LOCO avec le code BETA utilisé à Super-ACO.

Enfin, remarquons que le programme LOCO permet également de déduire le couplage de la machine en analysant les matrices-réponse couplées. Cependant des perturbations dipolaires de $\pm 1 \text{ A}$, utilisées ici pour enregistrer les matrices-réponse, sont trop faibles pour observer des termes croisés de la matrice-réponse non nuls compte tenu de la faible résolution des BPM.

L'impact de ces résultats sur la compréhension de la dynamique de Super-ACO est faible. Les défauts quadripolaires déduits sont de l'ordre de grandeur de ceux déduits des mesures magnétiques. Or, nous avons vu que l'influence de ces derniers est très faible sur la dynamique du faisceau (cf. chap. 3, section 3.2). Nous avons donc orienté notre recherche dans une autre direction : la mesure expérimentale des glissements des nombres d'ondes avec l'amplitude horizontale en utilisant des mesures tour par tour. Il est important de noter que l'anneau Super-ACO ne dispose pas de BPM tour par tour ; il est équipé uniquement d'un perturbateur horizontal.

5.2 Glissements expérimentaux des nombres d'ondes

Résumé

Le but de cette expérience est de mesurer le glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude horizontale afin de caractériser les nonlinéarités de la machine réelle. Une électrode située dans la première section droite de l'anneau est utilisée pour réaliser des mesures tour par tour. Dans un premier temps, on effectue un étalonnage de l'électrode au moyen de déplacements horizontaux (*bumps* statiques). Puis avec l'aide d'un perturbateur (P4 ou P6), on déplace le faisceau sur un tour et on le laisse osciller bêta-troniquement. Le signal collecté sur l'électrode est ensuite analysé en utilisant l'algorithme d'Analyse en Fréquence (Laskar, 1990) dont la convergence rapide permet la détermination de fréquences sur quelques centaines de tours. Ces mesures sont faites pour la machine nominale, onduleurs ouverts, ainsi que pour une optique fortement détériorée (les familles hexapolaires H1 et H2 éteintes) où le phénomène de décohérence est dominant. Les premières courbes expérimentales de la variation des nombres d'ondes avec l'amplitude sont présentées. Le principal résultat est la mise en évidence d'une composante non modélisée de type octupolaire.

5.2.1 Etalonnage de l'électrode à 45 degrés

- L'étalonnage de l'électrode dite « à 45 degrés », est réalisé au moyen d'un *bump* statique¹⁸ horizontal dans la première section droite de l'anneau, appelée SD1 (cf. Fig. 5.33), dont l'amplitude varie entre $x = -11$ mm et $x = 11$ mm par pas de 1 mm environ.

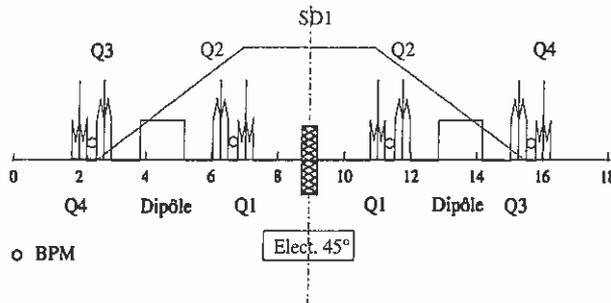


FIG. 5.33: *Bump* statique dans la section droite SD1 de Super-ACO. Les BPM sont situés dans chaque quadripôle.

Mode	monopaquet
ν_{x0}	4.7222
ν_{y0}	1.6980
τ (h)	4.8
I (mA)	18.0 – 13.4

TAB. 5.14: Conditions expérimentales pour l'étalonnage avec des *bumps* statiques de l'électrode à 45 degrés de Super-ACO.

- Les nombres d'ondes sont rattrapés si nécessaire.
- Les onduleurs sont ouverts.
- Le couplage est augmenté à 100 % — en se mettant sur la résonance de couplage — pour allonger la durée de vie de 0.75 h à 4.8 h (cf. paramètres Tab. 5.14).
- Le signal lu sur l'électrode est moyenné et normalisé par le courant.
- L'amplitude du signal est plus grande pour un *bump* positif que négatif car l'électrode est localisée du côté extérieur de l'anneau.

¹⁸Déplacement d'orbite fermée au moyen de correcteurs dipolaires.

- À courant nul, le signal sur l'électrode vaut en moyenne 26 (en unités arbitraires), quantité retranchée par la suite à toutes les mesures.

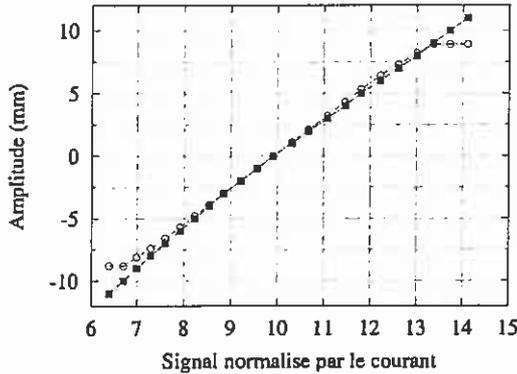


FIG. 5.34: Calibration de l'électrode à 45 degrés en utilisant un *bump* statique horizontal. L'amplitude effective (carrés) est l'amplitude réellement donnée au faisceau alors que la deuxième courbe (cercles) correspond au signal lu sur les BPM en salle de contrôle de Super-ACO.

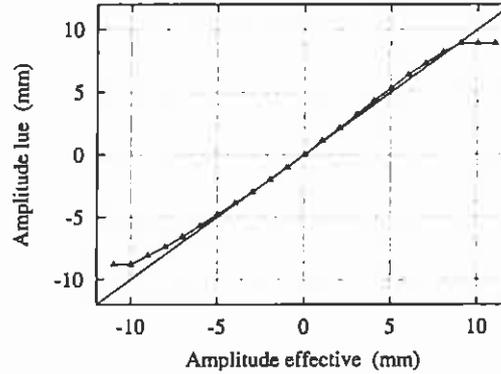


FIG. 5.35: Ecart entre l'amplitude effective et celle lue sur les BPM en salle de contrôle de Super-ACO ; aux grandes amplitudes, les BPM saturent.

- La figure 5.34 donne une correspondance entre le signal normalisé par le courant lu sur l'électrode et l'amplitude du *bump*, alors que la figure 5.35 illustre l'écart entre l'amplitude du *bump* lue en salle de contrôle et l'amplitude effective du *bump* statique :
 - Entre -4 et 2 mm, les valeurs du *bump* lues sur la console et sur l'électrode correspondent parfaitement.
 - Au-delà de 2 mm, on observe des différences jusqu'à 0.5 mm et une saturation à partir de 8.9 mm.
 - Pour des *bumps* négatifs, les écarts sont plus importants puisque pour un *bump* de -8 mm, on lit un déplacement d'orbite fermée de -7 mm, soit un écart de 1 mm ; la saturation est atteinte pour -8.84 mm.
 - A grande amplitude, l'électronique n'est pas symétrique pour des *bumps* positifs et négatifs.
- La relation entre l'amplitude (x) et le signal normalisé (S) de l'électrode à 45 degrés suit une loi quasi-linéaire entre -7 et +6 mm :

$$x[\text{mm}] = 2.8 \times S[\text{mA}^{-1}] - 27.95 \quad (5.20)$$

5.2.2 Utilisation de l'électrode à 45 degrés : point de fonctionnement nominal

Pour chaque *kick* du perturbateur (aimant dipolaire rapide), on maintient la phase constante par rapport à la synchronisation de référence à des fins de reproductibilité. Les signaux de l'électrode et du perturbateur sont enregistrés tour par tour.

5.2.2.1 Kick avec le perturbateur P4

- Les *kicks* du perturbateur P4 ont des amplitudes réparties entre 4.48 kV (butée basse en tension du perturbateur) et 13.02 kV (début perte du faisceau) avec un pas d'environ 0.5 kV.
- Le courant stocké dans le paquet est de 9.3 mA tout au long de l'expérience.
- Le minimum de couplage n'a pas été réalisé (cf. conditions expérimentales Tab. 5.15).

Mode	Monopaquet	H1 (A)	54.35
ν_x	4.7274	H2 (A)	100.31
ν_y	1.7005	H3 (A)	198.58
ξ_x	1.2	H4 (A)	216.24
ξ_y	1.4	Q1 (A)	221.50
QT4 (A)	-0.11	Q2 (A)	400.08
$\Delta\nu$ (kHz)	20	Q3 (A)	379.78
Phase	951	Q4 (A)	216.24

TAB. 5.15: Conditions expérimentales : point de fonctionnement nominal avec le perturbateur P4. Les valeurs de courant des quatre familles de quadripôles (Q_i) et d'hexapôles (H_i) sont utilisées pour ajuster l'optique de Super-ACO.

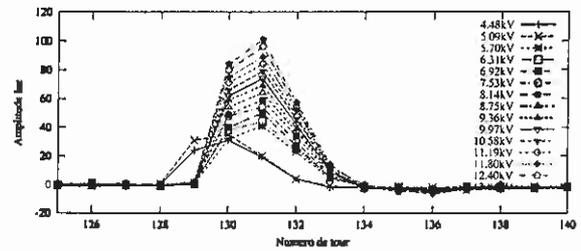


FIG. 5.36: Signal sur le perturbateur P4 entre les tours 125 et 140 pour plusieurs tensions. L'échantillonneur s'est déclenché un tour plus tôt pour les deux premières amplitudes. Un *kick* a en réalité lieu sur 4 tours de la machine Super-ACO.

Signal du perturbateur P4

- L'échantillonneur s'est déclenché un tour plus tôt (130-ème) pour les deux plus faibles amplitudes (cf. Fig. 5.36).
- Le *kick* n'est pas sur un seul tour mais sur quatre (lié au principe d'injection à Super-ACO).
- On observe un espacement régulier des amplitudes sur le perturbateur P4 : linéarité tension-amplitude.

Signal sur l'électrode

- Les 131 premiers tours n'ont pas de signal de part de la réponse de l'électronique ; on a donc au plus 900 données consécutives exploitables.
- Deux exemples typiques de signal collecté sur l'électrode à 45 degrés sont illustrés par les figures 5.37 et 5.38 : on notera que le signal est quasi-périodique avec une décohérence du faisceau presque inexistante (la variation des nombres d'ondes avec l'amplitude est faible cf. *infra* Fig. 5.39). Son amplitude est exprimée dans une unité arbitraire (u.a.).

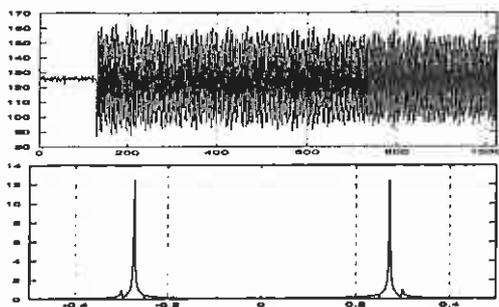


FIG. 5.37: Signal (u.a.) en fonction du nombre de tours pour un *kick* à $x=4.48$ mm (faible amplitude) et son spectre de Fourier. La décohérence est faible et le signal peu bruité.

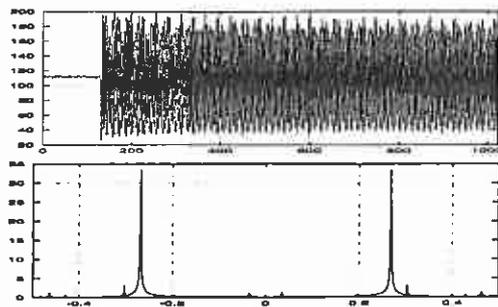


FIG. 5.38: Signal (u.a.) en fonction du nombre de tours pour un *kick* à $x = 13.02$ kV (grande amplitude) et son spectre de Fourier. La décohérence est faible et le signal peu bruité.

- Idéalement, en utilisant l'étalonnage réalisé avec des *bumps* statiques, on devrait pouvoir obtenir une correspondance entre la tension du perturbateur et le déplacement négatif de l'orbite fermée. En utilisant les données du tableau 5.16 et en extrapolant la formule empirique (Eq. 5.20), une amplitude de 69 sur l'électrode équivaldrait à un déplacement de l'orbite fermée de -25 mm pour une tension de 12.40 kV sur le perturbateur P4. Cette valeur est aberrante sachant que le septum qui constitue un obstacle physique pour le faisceau est situé à -19 mm.

Perturber le faisceau au moyen d'un *bump* statique ou avec un *kick* dipolaire correspondent donc à deux réponses très différentes de l'électrode.

		<i>Bump</i> statique	<i>Kick</i> avec P4
Pour	0 mm	144	100
Pour	-11 mm	85	-
Pour	4.48 kV	-	69
Pour	12.40 kV	-	9

TAB. 5.16: Comparaisons des amplitudes du signal collecté sur l'électrode à 45 degrés pour un *bump* statique (mm) ou un *kick* (kV) avec le perturbateur P4.

- Observations générales :
 - Le signal est peu bruité (cf. spectre Fig. 5.37).
 - La décohérence est presque nulle même pour un *kick* de $x = 13.2$ kV (cf. Fig. 5.38).
 - Les deux nombres d'ondes sont parfaitement identifiables (cf. couplage).
- La variation des nombres d'ondes avec l'amplitude horizontale est calculée en utilisant l'Analyse en Fréquence (Laskar, 1990) d'abord directement en analysant le signal de l'électrode à 45 degrés (Fig. 5.39), puis théoriquement à partir d'une maille de Super-ACO (Fig. 5.40). Seule la partie fractionnaire des fréquences est déterminée avec une précision ($\Delta\nu = (\frac{1}{N})^k$) où N est le nombre de tours contenant du signal. Pour une transformée de Fourier rapide (FFT) traditionnelle k vaut 1 alors que pour l'Analyse en Fréquence k vaut 4.

- En faisant l'hypothèse que le point de fonctionnement de départ est celui mesuré à l'oscilloscope (en salle de contrôle) : $(\nu_x = 4.7274, \nu_y = 1.7005)$, la variation théorique des nombres d'ondes est calculée en utilisant le code de calcul MAD version 8 [56].

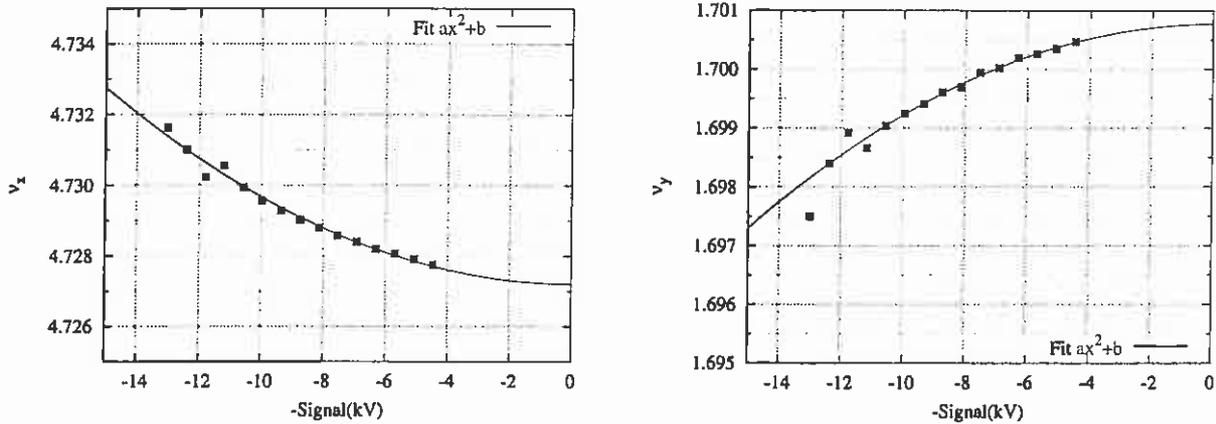


FIG. 5.39: Variation expérimentale (carrés) des nombres d'ondes ν_x (à gauche) et ν_y (à droite) avec l'amplitude horizontale. Dans chacun des cas, la variation du nombre d'ondes est quadratique avec l'amplitude.

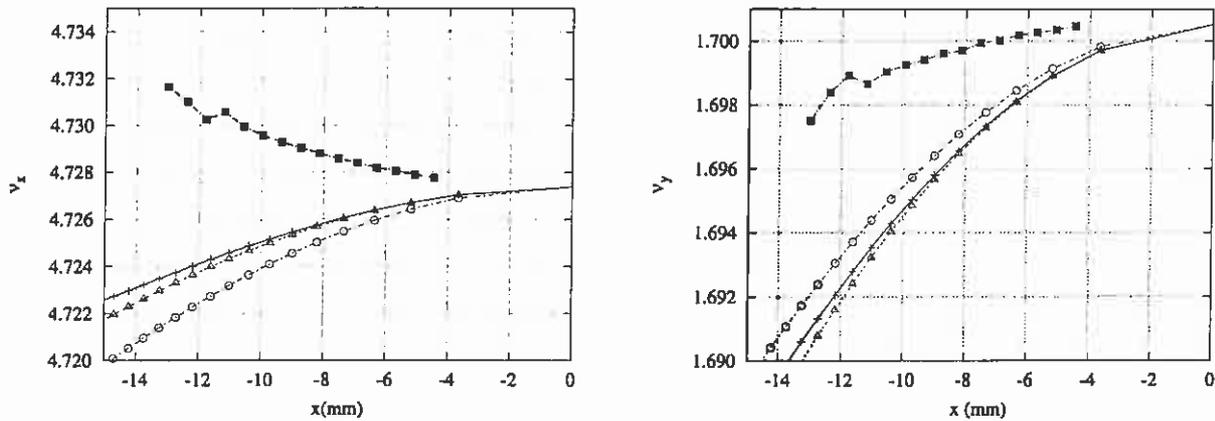


FIG. 5.40: Variation théorique des nombres d'ondes ν_x (à gauche) et ν_y (à droite) avec l'amplitude horizontale pour différents modèles de Super-ACO et comparaison à l'expérience (carrés) : modèle avec les chromaticités expérimentales (triangles), influence des décapôles (croix), modèle avec les courants mesurés des hexapôles (cercles). Quelque soit le modèle utilisé, le sens de variation de ν_x est opposée à celui mesuré.

- Les différents modèles étudiés sont :

- une maille ajustée sur les chromaticités et nombres d'ondes expérimentaux. La relation liant la force des hexapôles (H) à celle des décapôles (LD) est¹⁹ :

$$LD = -27 \times H$$

¹⁹En prenant comme relation de proportionnalité $LD = -72 \times H$, les résultats sont presque identiques car l'influence des lentilles décapolaires est faible aux petites amplitudes.

- une maille avec les valeurs expérimentales de courants des hexapôles : les nouvelles chromaticités, ($\xi_x = 2.45$, $\xi_y = -0.45$), sont très différentes des chromaticités mesurées en particulier dans le plan horizontal (défaut de chromaticité naturelle non modélisé).
- une maille nominale sans lentille décapolaire.
- une maille avec les valeurs de courant mesuré dans les quadripôles : dans ce cas le point de fonctionnement devient ($\nu_x = 4.7208$, $\nu_y = 1.6998$). L'écart peut paraître faible par rapport au cas précédent, cependant les 4 chiffres significatifs ont toute leur importance du fait de la précision des mesures en salle de contrôle avec l'oscilloscope et de la précision de l'Analyse en Fréquence.
- Plusieurs points doivent être observés :
 - On peut ajuster les courbes en fréquences à l'aide d'une fonction quadratique, $\nu = \nu_0 + Ax^2$: c'est la première contribution au glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude (cf. Fig. 5.39)

$$\begin{cases} \nu_x = (-2.46 \pm 0.09) 10^{-5} x^2 + 4.7274 \pm 0.00009 \\ \nu_y = (-1.54 \pm 0.03) 10^{-5} x^2 + 1.7007 \pm 0.00002 \end{cases} \quad (5.21)$$

Ces résultats permettent de proposer pour la calibration du perturbateur P4, la relation entre sa tension et l'amplitude imprimée au faisceau :

$$\boxed{1 \text{ kV} \longleftrightarrow 1 \text{ mm}} \quad (5.22)$$

- Sur la courbe expérimentale de ν_x , il semble y avoir vers $x = 11$ mm une perturbation de la dynamique du faisceau — ce n'est pas une erreur sur l'amplitude du *kick* cf. Fig. 5.36, ni *a posteriori* une résonance car cette irrégularité de la courbe en fréquence n'est pas observée avec le perturbateur P6 (cf. Fig. 5.45) —
- La durée de vie commence à chuter pour une tension de 13.02 kV : le bord de l'ouverture dynamique est atteint.
- Dans tous les cas, la variation de ν_x est opposée entre la théorie et l'expérience (cf. Fig. 5.40). Celle de ν_y est décroissante avec l'amplitude mais avec une pente beaucoup plus importante dans le modèle de Super-ACO.
- Les variations des nombres d'ondes sont faibles (cf. échelle verticale) pour l'ensemble des courbes présentées.
- La différence des glissements des nombres d'ondes entre le modèle et la mesure (Fig. 5.41) suit une loi quadratique de l'amplitude horizontale (ou encore linéaire en l'action). Nous avons essayé d'introduire dans le modèle de Super-ACO de nouveaux multipôles caractérisant les défauts des différents aimants (voir les mesures magnétiques *in* Barthès *et al.*, 1990). Après de nombreux essais, il s'avère qu'une composante de **type octupolaire**²⁰ permet de retrouver la loi de variation du nombre d'ondes horizontal ν_x .

²⁰L'introduction d'un terme hexapolaire est impossible sans diminution drastique de l'ouverture dynamique. Les multipôles d'ordre supérieur à quatre ont été écartés, car leur influence est trop faible aux amplitudes considérées.

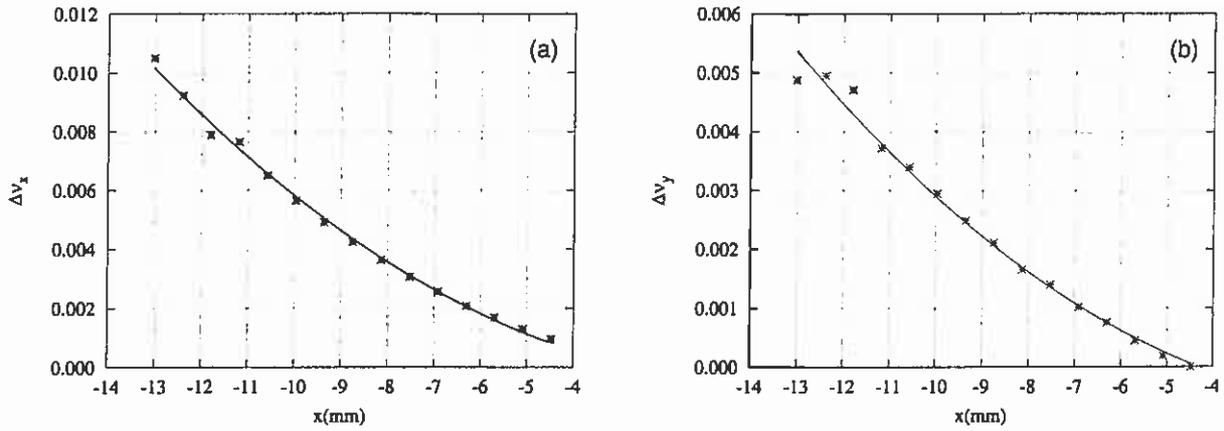


FIG. 5.41: Différence (étoiles) des nombres d'ondes ν_x (a) et ν_y (b) mesurés et prédits par le modèle de Super-ACO. La loi ajustement (ligne) est dans les deux cas quadratique avec l'amplitude horizontale.

- Une modification du modèle de Super-ACO est proposée : l'introduction des défauts octupolaires créés par les familles de quadripôles.
 - La contribution octupolaire est aléatoire et faible (Barthès *et al.*, 1990). P. Brunelle avait néanmoins proposé en 1999 comme relation entre les gradients (K) des quadripôles et leur octupôle (LO) lors d'une étude expérimentale de la variation du nombre d'ondes avec l'énergie de la machine :

$$LO = 0.26 \times K \quad (5.23)$$

- Différents modèles correspondant à différents jeux d'octupôles ont été testés (cf. Fig. 5.42).
- L'ajustement à l'expérience suggère une contribution octupolaire environ deux fois plus grande :

$$LO = 0.55 \times K \quad (5.24)$$

- La correction n'a pratiquement pas d'effet sur la variation du nombre d'ondes vertical avec l'amplitude horizontale. En effet, le Hamiltonien d'un octupôle droit de force LO peut s'écrire :

$$H^{octu} = \frac{LO}{4}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \quad (5.25)$$

Il apparaît immédiatement que pour y petit, l'effet est négligeable sur ν_y .

- La différence encore existante entre la théorie et la mesure pour le nombre d'ondes vertical ν_y pourrait provenir d'un terme hexapolaire (cf. Fig. 5.41) non modélisé. Cependant l'introduction d'hexapôles tournés ne permet pas d'expliquer cette différence.

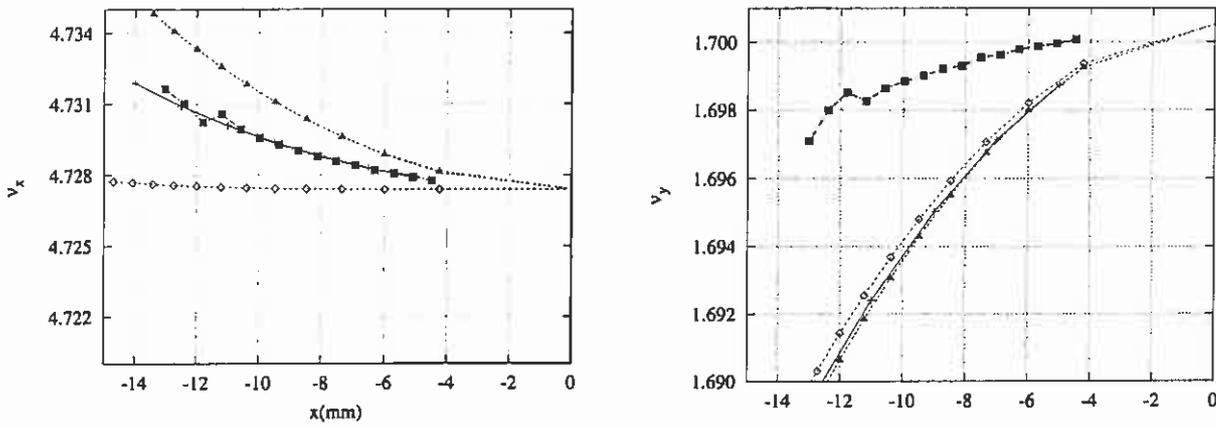


FIG. 5.42: Variation des nombres d'ondes ν_x (à gauche) et ν_y (à droite) avec l'amplitude x pour différents modèles de Super-ACO incluant une composante octupolaire. La force des octupôles est proportionnelle à celle des quadripôles : les facteurs de proportionnalité sont 0.26 (losanges), 0.55 (croix) et 0.8 (triangles). Si l'octupôle permet de retrouver le bon comportement pour ν_x , le désaccord reste grand pour ν_y avec la mesure (carrés).

- Notons qu'il est assez arbitraire de supposer que toute la composante octupolaire provient uniquement des quadripôles. En effet, on peut affirmer que :
 - il est impossible avec les expériences réalisées, de pouvoir localiser les éléments magnétiques de l'anneau qui ont une composante octupolaire, mais,
 - une contribution importante est créée par les quadripôles, car elle est corrélée au gradient des quadripôles et n'est presque pas modifiée lorsque les hexapôles sont éteints (cf. *infra*);
 - les champs de fuite des quadripôles créent une composante pseudo-octupolaire non modélisée (cf. section 5.2.3.2).

5.2.2.2 Kick avec le perturbateur P6

- L'expérience précédente est refaite en utilisant le perturbateur P6 et en faisant le minimum de couplage (cf. paramètres Tab. 5.17).

ν_x	4.7274	H1 (A)	54.35
ν_y	1.7000	H2 (A)	100.31
ξ_x	1.2	H3 (A)	198.58
ξ_y	1.4	H4 (A)	216.24
QT4 (A)	-0.54	QT6 (A)	-0.37
$\Delta\nu$ (kHz)	2	Phase	800

TAB. 5.17: Conditions expérimentales pour le modèle de Super-ACO. Valeurs des courants mesurés dans les alimentations des quadripôles et hexapôles pour calibrer le modèle de Super-ACO.

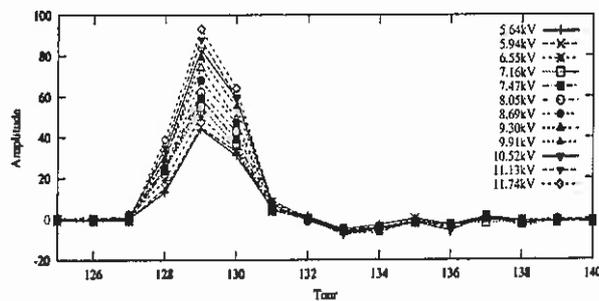


FIG. 5.43: Signal (u.a.) sur le perturbateur P6 de Super-ACO entre les tours 125 et 140. Le *kick* a lieu sur 3 tours consécutifs.

- Les amplitudes des *kicks* vont de 5.64 kV (butée basse) à 11.74 kV (début perte du faisceau) par pas de 0.5 kV environ.
- Le courant varie de 8.3 mA à 7.3 mA au cours des mesures.

Signal sur perturbateur P6

- Les deux premiers *kicks* ont presque la même amplitude (Fig. 5.43).
- L'échantillonneur se déclenche au 129-ème tour à chaque fois.
- On observe un espacement régulier des amplitudes sur P6 : linéarité tension-amplitude.
- En théorie, les perturbateurs P4 et P6 sont identiques cependant :
 - pour une même tension, le perturbateur P6 donne une amplitude plus grande au faisceau (cf. Fig. 5.44). La loi de conversion entre la tension de P4 et P6, à amplitude constante, est :

$$V_{P6} \approx V_{P4} + 0.65 \text{ [kV]} \quad (5.26)$$

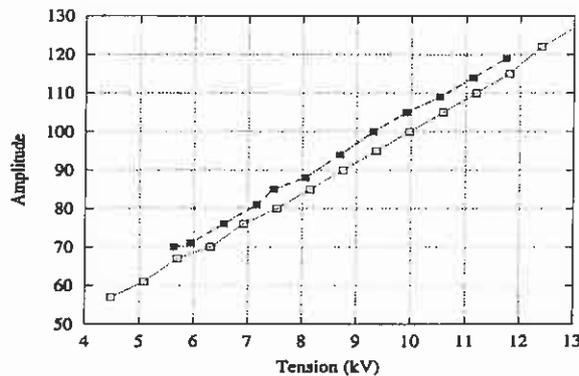


FIG. 5.44: Comparaison des amplitudes (u.a.) des signaux lus sur les perturbateurs P4 (cercles) et P6 (carrés) en fonction de la tension appliquée. La réponse est dans les deux cas linéaire. Pour que les deux courbes se superposent, il est nécessaire d'introduire un décalage de 0.65 kV (lié à l'étalonnage de la réponse des perturbateur de Super-ACO).

- la limite de l'ouverture dynamique est atteinte avec une amplitude plus faible (11.74 kV) pour le perturbateur P6 que pour le perturbateur P4 (13.02 kV). Cet écart ne peut pas s'expliquer uniquement par le point précédent, il est également nécessaire que les paramètres de Twiss soient distincts dans les sections droites SD4 et SD6.

Signal sur l'électrode

- Le nombre d'ondes vertical n'est plus observé, car le minimum de couplage est réalisé.
- En comparant les deux courbes en fréquence ν_x obtenues après perturbation du faisceau avec P4 et P6 et après correction des tensions, on observe que les courbes ne se superposent pas (Fig. 5.45).

5.2. GLISSEMENTS EXPÉRIMENTAUX DES NOMBRES D'ONDES

- Le nombre d'ondes horizontal doit suivre la même loi de variation qu'avec le perturbateur P4, car les expériences réalisées avec les deux perturbateurs sont identiques ; les deux courbes en fréquence sont superposables (Fig. 5.46) si l'on admet une nouvelle correction de la loi de conversion (Eq. 5.26) :

$$V_{P6} \approx V_{P4} + 0.65 + 0.95 [kV] \quad (5.27)$$

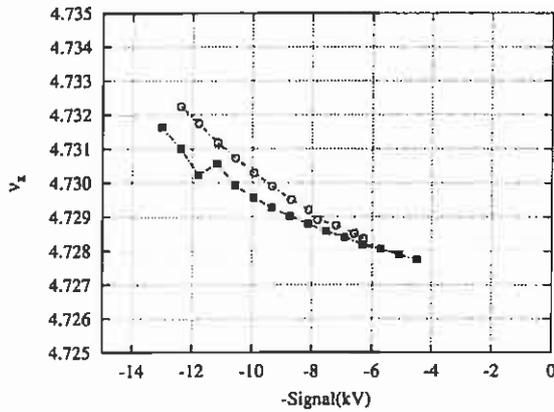


FIG. 5.45: Comparaison de la variation du nombre d'ondes horizontal expérimental en fonction de l'amplitude : perturbateurs P6 (carrés) et P4 (cercles) de Super-ACO.

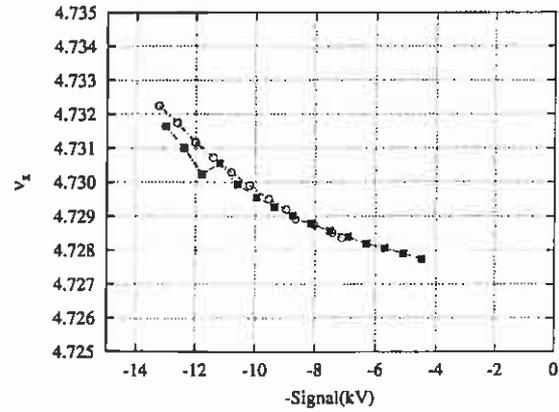


FIG. 5.46: Comparaison de la variation du nombre d'ondes horizontal expérimental en fonction de l'amplitude : perturbateurs P4 (cercles) et P6 (carrés) de Super-ACO avec nouvelle correction.

5.2.2.3 Utilisation de l'électrode à 45 degrés : familles H1 et H2 éteintes

- On a éteint les familles d'hexapôles H1 et H2 afin d'augmenter la variation des nombres d'ondes avec l'amplitude : l'ouverture dynamique est ainsi réduite et la décohérence du faisceau plus rapide.

ν_x	4.7280
ν_y	1.6996
ξ_x	1.8
ξ_y	1.3
QT4 (A)	0.24
QT6 (A)	-0.06
Phase	950

TAB. 5.18: Conditions expérimentales utilisées pour ajuster le modèle de Super-ACO. Valeurs des courants des quadripôles tournés pour obtenir le minimum de couplage. Les chromaticités sont élevées dans les deux plans.

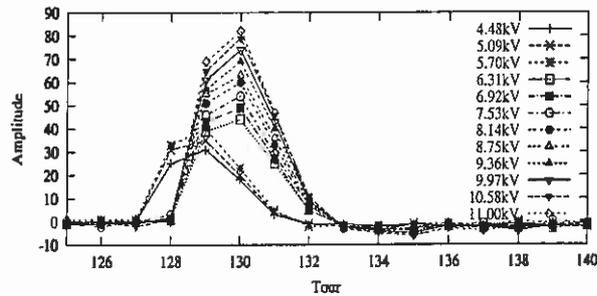


FIG. 5.47: Signal (u.a.) sur le perturbateur P4 de Super-ACO entre les tours 125 et 140. L'échantillonneur se déclenche un tour plus tôt pour les trois premières amplitudes. La réponse du perturbateur est une fonction linéaire de la tension appliquée à ses bornes.

- Le minimum de couplage est réalisé (cf. paramètres Tab. 5.18).
- On observe une fluctuation inexplicée de l'orbite contrairement au cas précédent avec les hexapôles allumés.

Signal sur perturbateur P4

- L'échantillonneur se déclenche au 129-ème tour pour les 3 premiers *kicks* et au 130-ème pour les suivants.
- On observe un espacement régulier des amplitudes sur P4 : linéarité tension-amplitude.
- Le fait de prendre une même phase de 950, permet d'obtenir une parfaite reproductibilité des *kicks* générés par le perturbateur P4 (comparer les figures 5.36 et 5.47).

Signal sur l'électrode

- Les forces des familles d'hexapôles H1 et H2 sont en pratique ajustées afin de réduire l'influence des résonances d'ordre 3 alors que les familles H3 et H4 servent à ajuster les chromaticités horizontale et verticale.
- La décohérence :
 - lorsque le faisceau est déplacé transversalement d'un angle $\Delta x'$, un phénomène de décohérence intervient du fait du léger déphasage existant entre chaque particule d'un paquet. Ce déphasage provient de la dispersion des nombres d'ondes avec l'amplitude, chaque particule ayant une énergie et une amplitude légèrement différentes des particules voisines ; si au premier ordre, on écrit :

$$\nu_x = \nu_{x_0} - \mu(q^2 + p^2) + \xi \frac{\Delta E}{E} \quad (5.28)$$

avec $q = \frac{x}{\sigma_x}$ et $p = \frac{(\alpha_x x + \beta_x x')}{\sigma_x}$ où β_x et α_x sont les paramètres de Twiss. Si l'on considère une distribution gaussienne d'écart type σ_x des amplitudes (x, x') et si l'on néglige le couplage (x-y), l'amortissement, l'excitation quantique et les interactions entre particules, alors l'évolution du centroïde du faisceau suit la loi²¹ :

$$\langle q \rangle + j \langle p \rangle = \frac{jZF(N)}{(1 - j\theta)^2} \exp \left(j \left(2\pi\nu_0 N + \frac{Z^2}{2} \frac{j\theta}{1 - j\theta} \right) \right) \quad (5.29)$$

où N est le numéro du tour après le *kick* d'amplitude $Z = \beta_x \frac{\Delta x'}{\sigma_x}$, $\theta = 4\pi\mu N$ et $F(N)$ le facteur chromatique défini par :

$$F(N) = \exp \left(-2 \left(\frac{\xi\sigma_E}{\nu_s} \right)^2 \sin(\pi N\nu_s)^2 \right) \quad (5.30)$$

avec ν_s la fréquence synchrotron et σ_E la dispersion en énergie.

- Plusieurs exemples de signal avec une décohérence du faisceau sont présentés sur la figure 5.48. A faible amplitude, la décohérence a lieu sur 500 tours, à grande amplitude sur 100 tours (observation de $\nu_s = 0.0034$, le facteur chromatique $F(N)$ est $(\frac{1}{\nu_s} = 380)$ -tours périodique).

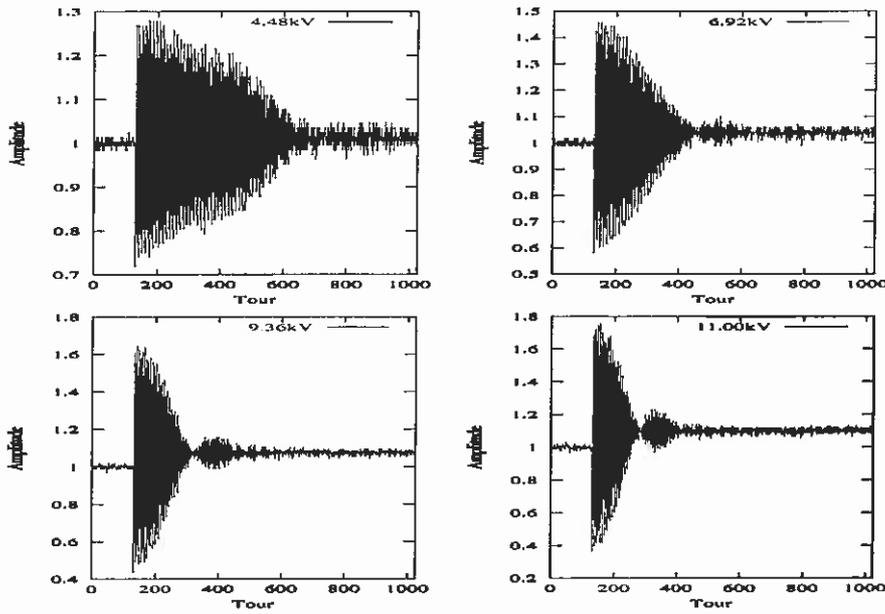


FIG. 5.48: Décohérence du faisceau de Super-ACO en fonction du nombre de tours pour différentes valeurs de *kick* du perturbateur P4. Le signal (u.a.) présente une décohérence rapide : 500 tours à faible amplitude (4.48 kV) et 100 tours à grande amplitude (11 kV). Au-delà, le signal est noyé dans le bruit.

- On commence à perdre fortement le faisceau dès 10.58 kV, ce qui traduit une ouverture dynamique plus petite que précédemment en accord avec la théorie : l'ouverture dynamique théorique a été calculée en comparaison avec le cas nominal (Fig. 5.49). Les calculs d'ouverture dynamique ont été effectués avec le code de calcul BETA en intégrant les trajectoires sur 1 000 tours consécutifs²².

Plusieurs constatations sont à faire :

- l'ouverture dynamique est réduite à $[-27, 25] \times [-19, 19]$ mm pour la machine nominale (*i.e.* avec toutes les hexapôles allumés). Cette faible valeur s'explique principalement par les valeurs de chromaticités expérimentales non nulles et ici élevées dans les deux plans (cf. Tab. 5.18). L'introduction de multipôles (décapôles, dodécapôles, correcteurs) n'a que peu d'influence sur les dimensions.
- l'ouverture dynamique est encore réduite si les familles hexapolaires H1 et H2 sont éteintes : $[-11, 11] \times [-15, 15]$ mm, soit une réduction d'un facteur deux horizontalement, ce qui est très proche de l'expérience.
- Comme dans la première partie, la variation de ν_x avec l'amplitude horizontale est calculée pour différents modèles de Super-ACO et comparée avec l'expérience (cf. Fig. 5.50).
 - On constate tout d'abord que la variation du nombre d'ondes ν_x avec l'amplitude x est **inversée** lorsque les familles hexapolaires H1 et H2 sont éteintes.
 - Seule l'introduction d'une composante de type octupolaire forte permet d'une part retrouver la bonne loi de variation quadratique de ν_x (comparer les courbes avec

²¹Une description complète de la décohérence a été donnée au chapitre 4.

²²A faible amplitude $|x| \leq 20$ mm, les codes de calculs BETA et MAD sont compatibles pour une machine à faible rayon de courbure comme Super-ACO.

et sans octupôles Fig. 5.39 et 5.50) et d'autre part d'expliquer l'inversion du sens de variation de la courbe en fréquence $\nu_x(x)$.

- Il est remarquable que la même composante octupolaire ($LO = 0.55 \times K$) suffisent pour retrouver la bonne loi de variation : les hexapôles contribuent donc peu ou prou à la composante octupolaire.
- La variation des nombres d'ondes $\Delta\nu_x$ en fonction de l'amplitude (x) est très forte : $\Delta\nu_x = 1.38 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$ contre $\Delta\nu_x = 5.8 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$ (réglage nominal).

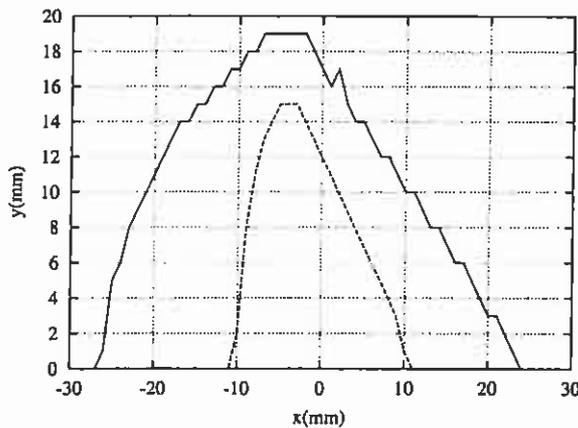


FIG. 5.49: Influence des familles d'hexapôles H1 et H2 sur les dimensions de l'ouverture dynamique de Super-ACO — hexapôles allumés : trait continu, éteints : trait pointillé —. Les dimensions réduites d'un facteur deux sont proches de celles mesurées en expérience dans le plan horizontal.

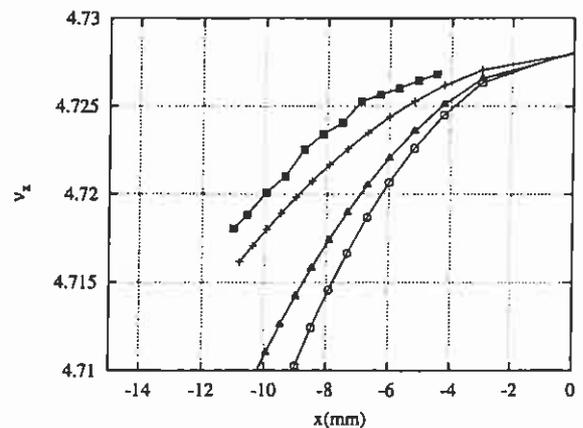


FIG. 5.50: Variation du nombre d'ondes horizontal ν_x avec l'amplitude horizontale. Modèles de Super-ACO avec les chromaticités expérimentales (triangles), les courants hexapolaires mesurés (cercles). Seule l'introduction de composante octupolaire précédemment proposée (croix) permet de retrouver la bonne loi de variation (carrés).

5.2.3 Vers un nouveau modèle de Super-ACO

5.2.3.1 Observations

Ces résultats constituent pour Super-ACO les premières mesures tour par tour ainsi que les premières mesures de la variation des nombres d'ondes avec l'amplitude horizontale.

La modélisation actuelle de Super-ACO ne permet pas d'expliquer :

- le sens de variation de ν_x en fonction de x sans l'introduction d'une composante forte de type octupolaire. Dans la présente étude, seuls les octupôles des quadripôles ont été introduits. Cependant d'autres éléments magnétiques de l'anneau peuvent créer un octupôle :
 - les coins des dipôles créent un pseudo-octupôle mais il est pratiquement impossible de déduire sa contribution expérimentale.
 - les hexapôles mais leurs contributions doivent être plus faibles que celles provenant des quadripôles. En effet la force de ces octupôles doit être proportionnelle à celle

des hexapôles. Or lorsque les familles H1 et H2, les deux familles hexapolaires les plus fortes, sont éteintes la contribution générale octupolaire n'a pas besoin d'être modifiée pour ajuster le modèle sur l'expérience.

- les champs de fuite des quadripôles (cf. *infra*).
- la pente du nombre d'ondes vertical, ν_y , fonction de l'amplitude horizontale. Une tentative d'introduction d'un hexapôle tourné dans les quadripôles ne permet pas de résoudre ce problème.
- les chromaticités mesurées ne sont pas en accord avec celles calculées en utilisant le logiciel BETA. Cette différence doit certainement être expliquée en partie par l'algorithme de calcul de la chromaticité qui est écrit pour les machines à grand rayon de courbure : ce n'est pas le cas pour Super-ACO. Ce problème est connu dans la littérature.
- le début de perte du faisceau vers $x \approx -13$ mm.

5.2.3.2 Champs de fuite des quadripôles

Le problème majeur que nous souhaitons résoudre est de comprendre quelle est l'origine de la composante octupolaire observée. La valeur proposée est trop importante pour pouvoir être expliquée par la composante aléatoire des octupôles de défauts des hexapôles. Nous allons montrer que les champs de fuite des quadripôles permettent d'expliquer les observations expérimentales.

Théorie des perturbations et glissements des nombres d'ondes : L'expression des champs de fuite a déjà été étudiée par de nombreux auteurs. Sa formulation générale peut être déduite de l'expression générale du champ magnétique en partant des équations de Maxwell — voir par exemple, l'article complet de Papaphilippou, Wei et Talman (2001) —.

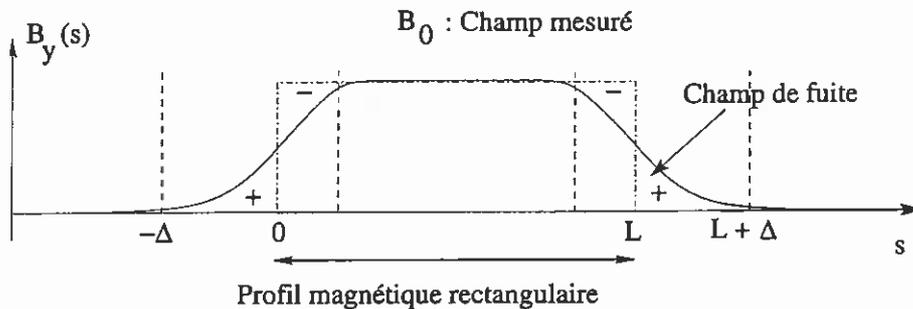


FIG. 5.51: Schéma du profil magnétique longitudinal d'un aimant de longueur L . En approximation *hard-edge*, le champ magnétique est constant dans l'élément et nul à l'extérieur. En réalité, le champ magnétique décroît jusqu'à une valeur nulle de part et d'autre sur une longueur Δ : on parle de *champ de fuite*.

Pour calculer le glissement des nombres d'ondes induits par les champs de fuite du quadripôles, nous utilisons une théorie de perturbation. Nous admettons la forme de la perturbation \tilde{H} qui a été établie rigoureusement par Zimmermann²³ (2000) pour un quadripôle dont les

²³Parallèlement, Papaphilippou et Abell ont établi l'expression des champs de fuite pour la Source de Neutrons de Spallation (SNS) du *Brookhaven National Laboratory* (2000)

champs de fuite s'étendent de part et d'autre de l'aimant sur une longueur Δ :

$$\tilde{H} = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 \quad (5.31)$$

avec en coordonnées rectangulaires, en ne gardant que les termes significatifs :

$$\begin{cases} \tilde{H}_1 & \approx \frac{1}{12}(K_Q l_Q) K_Q [x^4 + 6x^2 y^2 + y^4] \\ \tilde{H}_2 & \approx \frac{5}{12} \Delta^2 K_Q^2 (K_Q l_Q) [x^4 - y^4] \end{cases} \quad (5.32)$$

où K_Q est le gradient du quadripôle et l_Q sa longueur effective.

En utilisant les variables angles-actions, $x = \sqrt{2I_x \beta_x} \cos \phi_x$ et $y = \sqrt{2I_y \beta_y} \cos \phi_y$, le Hamiltonien moyenné devient en sommant sur tous les quadripôles de la machine (Zimmermann, 2000) :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_1 \rangle & \approx \frac{1}{8} \sum_Q (K_Q l_Q) K_Q [\beta_{x,Q}^2 I_x^2 + 4\beta_{x,Q} \beta_{y,Q} I_x I_y + \beta_{y,Q}^2 I_y^2] \\ & + \frac{5}{8} \sum_Q \Delta^2 K_Q^2 (K_Q l_Q) [\beta_{x,Q}^2 I_x^2 - \beta_{y,Q}^2 I_y^2] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Les glissements nombres d'ondes s'obtiennent par définition en dérivant $\langle \tilde{H}_1 \rangle$ par rapport aux actions I_x et I_y :

$$\Delta \nu_u = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \langle \tilde{H}_1 \rangle}{\partial I_u}, \quad u = x, y \quad (5.34)$$

soit :

$$\Delta \nu_x \approx \frac{1}{8\pi} \sum_Q (K_Q l_Q) K_Q [\beta_{x,Q}^2 I_x + 2\beta_{x,Q} \beta_{y,Q} I_y] + \frac{5}{8\pi} \sum_Q \Delta^2 K_Q^2 (K_Q l_Q) \beta_{x,Q}^2 I_x \quad (5.35)$$

et :

$$\Delta \nu_y \approx \frac{1}{8\pi} \sum_Q (K_Q l_Q) K_Q [\beta_{y,Q}^2 I_y + 2\beta_{x,Q} \beta_{y,Q} I_x] - \frac{5}{8\pi} \sum_Q \Delta^2 K_Q^2 (K_Q l_Q) \beta_{y,Q}^2 I_y \quad (5.36)$$

Application à Super-ACO : Pour Super-ACO, en prenant pour les applications numériques $\Delta = 0.25$ m, $l_Q = 0.4532$ m et les valeurs expérimentales des gradients des quadripôles (cf. Tab. 5.42), les glissements des nombres d'ondes sont :

$$\Delta \nu_x = 322 \frac{x^2}{\beta_{elect.}} \quad \text{et} \quad \Delta \nu_y = 152 \frac{y^2}{\beta_{elect.}} \quad (5.37)$$

où $\beta_{elect.}$ est l'expression de la fonction β_x au niveau de l'électrode à 45 degrés.

La contribution des pseudo-octupôles des champs de fuite des quadripôles est tracée sur la figure 5.52. La théorie et l'expérience sont en accord : les glissements des nombres d'ondes

sont pratiquement ceux mesurés. Il est également possible d'ajuster la composante pseudo-octupolaire pour obtenir un accord parfait avec les mesures (cf. Fig. 5.52) :

$$\Delta\nu_x^{ajus} = 311 \frac{x^2}{\beta_{elect.}} \quad \text{et} \quad \Delta\nu_y^{ajus} = 180 \frac{x^2}{\beta_{elect.}} \quad (5.38)$$

Les écarts entre les valeurs de ces glissements de nombres d'ondes théoriques et mesurés sont de 3.5% pour ν_x et 18% pour ν_y . Ces résultats sont compatibles avec l'incertitude sur les valeurs expérimentales des fonctions β (perturbation de l'optique linéaire et couplage non modélisés).

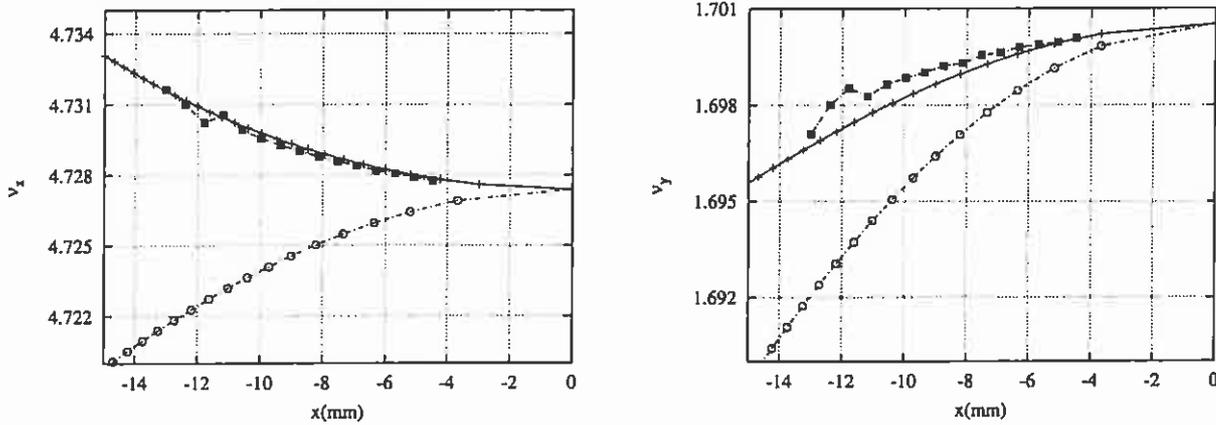


FIG. 5.52: Variation des nombres d'ondes $\nu_x(x)$ et $\nu_y(x)$ en fonction de l'amplitude horizontale x . Sans pseudo-octupôle, le désaccord (cercles) avec la mesure (carrés) est important (sens de variation opposé pour ν_x). L'introduction du pseudo-octupôle (croix) induit par les champs de fuite des quadripôles de Super-ACO permet de trouver des glissements des nombres très proches de la mesure dans les deux plans. Glissements des nombres d'ondes induits : ($\Delta\nu_x = 322 \frac{x^2}{\beta_{elect.}}$ et $\Delta\nu_y = 152 \frac{x^2}{\beta_{elect.}}$).

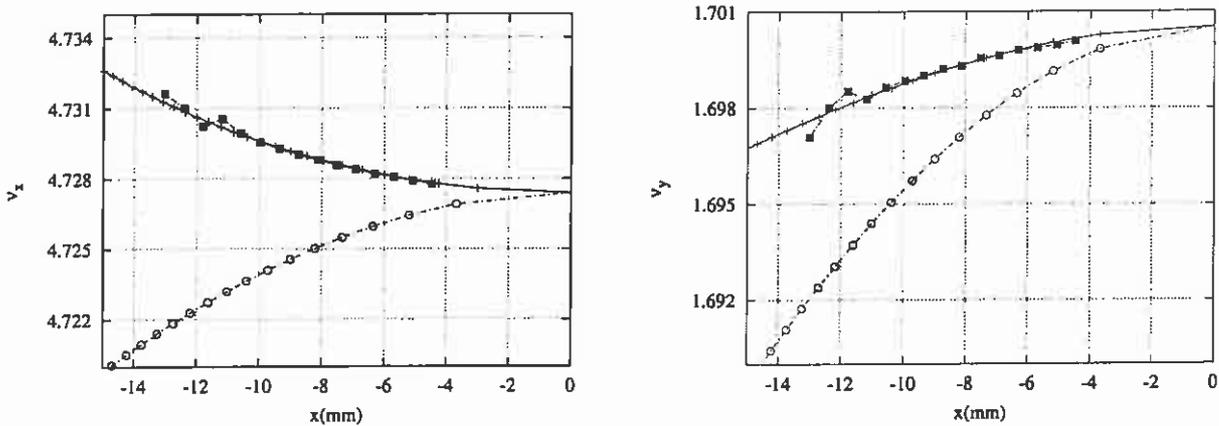


FIG. 5.53: Comparaison de la variation des nombres d'ondes $\nu_x(x)$ et $\nu_y(x)$ en fonction de l'amplitude horizontale. Après ajustement des pseudo-octupôles de Super-ACO (croix) sur la mesure (carrés), les accords sont excellents contrairement au modèle sans pseudo-octupôle (cercles). Glissements des nombres d'ondes induits : ($\Delta\nu_x^{ajus} = 311 \frac{x^2}{\beta_{elect.}}$ et $\Delta\nu_y^{ajus} = 180 \frac{x^2}{\beta_{elect.}}$).

Modélisation en algèbre de Lie : Il est possible de modéliser ces champs de fuite en utilisant l'algèbre de Lie. En 1998, Forest et Milutinović ont établi l'expression de l'application de transfert \mathcal{F} du champ de fuite, pour un quadripôle de gradient b_2 (voir aussi Forest, 1998) :

$$\mathbf{x}^f = \mathcal{F}\mathbf{x}^i = \exp(sL_{f_{\pm}})\mathbf{x}^i \quad (5.39)$$

avec $f_{\pm} = \pm \frac{b_2}{12(1+\delta)}(y^3 p_y - x^3 p_x + 3x^2 y p_y - 3y^2 x p_x)$.

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x^f &= x^i \pm \frac{sb_2}{12(1+\delta)}((x^i)^3 + 3(y^i)^2 x^i) \\ y^f &= y^i \mp \frac{sb_2}{12(1+\delta)}((y^i)^3 + 3(x^i)^2 y^i) \\ \delta^f &= \delta \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f &= p_x^i \pm \frac{sb_2}{4(1+\delta)}(2x^i y^i p_y^i - (x^i)^2 p_x^i - (y^i)^2 p_x^i) \\ p_y^f &= p_y^i \mp \frac{sb_2}{4(1+\delta)}(2x^i y^i p_x^i - (y^i)^2 p_y^i - (x^i)^2 p_y^i) \\ l^f &= l^i - \frac{sf_{\pm}}{1+\delta} \end{cases} \quad (5.40)$$

avec (x, p_x) , (y, p_y) et (l, δ) les couples de variables canoniques.

5.2.3.3 Conséquences sur la dynamique globale

Pour illustrer l'influence de la contribution des pseudo-octupôles²⁴ sur la dynamique globale de Super-ACO, différentes cartes en fréquences de l'anneau ont été calculées, accompagnées de la demi-ouverture dynamique correspondante.

1. Machine sans octupôle : Fig. 5.54 et Fig. B.6

Le point de fonctionnement ($\nu_x = 4.7274$, $\nu_y = 1.7005$) est le coin supérieur droit de la carte. Le bord extérieur supérieur (resp. inférieur) correspond à la variation du nombre d'ondes vertical avec y (resp. nombre d'ondes horizontal avec x). La carte en fréquence est repliée sur elle-même. L'ouverture dynamique est réduite car les chromaticités sont élevées dans les deux plans. La résonance $3\nu_y = 5$ est traversée à grande amplitude, $x \approx -24$ mm.

2. Machine avec octupôles : Fig. 5.55 et Fig. B.7

La carte en fréquence est complètement différente lorsqu'une composante octupolaire $LO = 0.55 \times K$ est introduite dans le modèle. Le sens de variation de ν_x est inversé, d'autres résonances apparaissent mais globalement leur coefficient d'excitation est assez faible. Les dimensions de l'ouverture dynamique sont comparables au cas sans octupôle.

²⁴Pour cette étude, en toute rigueur, la composante octupolaire a été modélisée par des lentilles octupolaires minces et non par le champ de fuite que nous venons de présenter. Les cartes en fréquence seront faiblement modifiées.

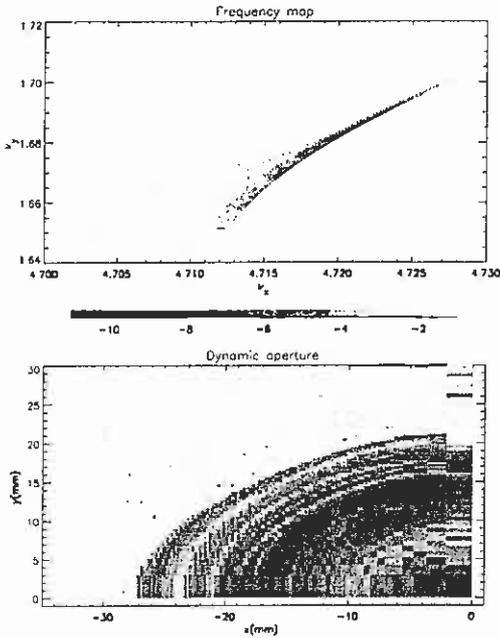


FIG. 5.54: Sans composante octupolaire, la carte en fréquence (haut) du point de fonctionnement nominal de Super-ACO est repliée sur elle-même. La demi-ouverture dynamique (bas) associée est importante. La dynamique globale est peu marquée par les résonances, la diffusion est faible.

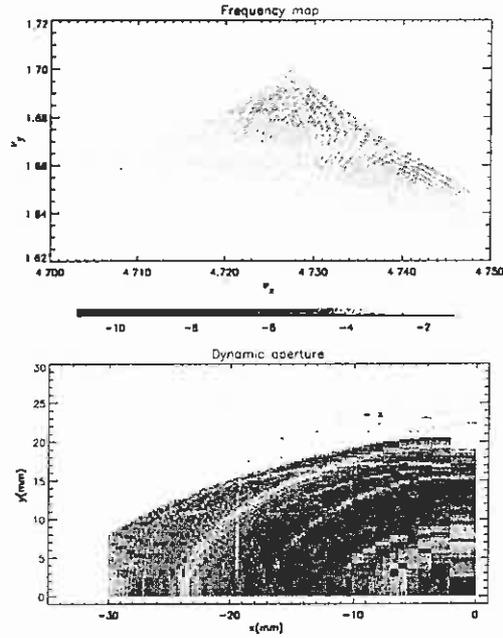


FIG. 5.55: Lorsque la composante octupolaire de Super-ACO est modélisée, la dynamique est complètement modifiée : la carte en fréquence (haut) a une grande extension spatiale et présente une diffusion faible. La résonance $3\nu_y = 5$, qui expérimentale détériore la dynamique du faisceau n'est pas excitée. L'ouverture dynamique (bas) associée reste grande.

3. Machine avec octupôle, hexapôles H1 et H2 éteints : Fig. 5.56 et Fig. B.8

En éteignant les deux familles hexapolaires H1 et H2, le glissement des nombres d'ondes est important avec l'amplitude, ce qui traduit une ouverture dynamique diminuée dans les deux plans (réduction d'un facteur deux dans le plan horizontal). Les résonances sont plus fortement excitées et la stabilité globale du faisceau est détériorée.

4. Machine détériorée : Fig. 5.57 et Fig. B.9

Pour ce dernier cas, Super-ACO a été modélisé, toujours pour le point de fonctionnement de routine, mais en augmentant la contribution octupolaire : $LO = 0.8 \times K$. Dans ce cas, la dynamique est très fortement détériorée par l'excitation des différentes résonances.

En particulier la résonance hexapolaire $3\nu_y = 5$ limite l'ouverture dynamique verticale alors que la résonance $4\nu_x = 19$ réduit son extension horizontale (voir aussi la figure 5.58).

La carte en fréquence ainsi obtenue pourrait fortement refléter la dynamique réelle du faisceau (en incluant par exemple les défauts de champs magnétiques). De plus, si la résonance couplée $\nu_x - 4\nu_y = 2$ limitait expérimentalement la dynamique du faisceau,

alors l'ouverture dynamique serait réduite à -14 mm horizontalement et 18 mm verticalement.

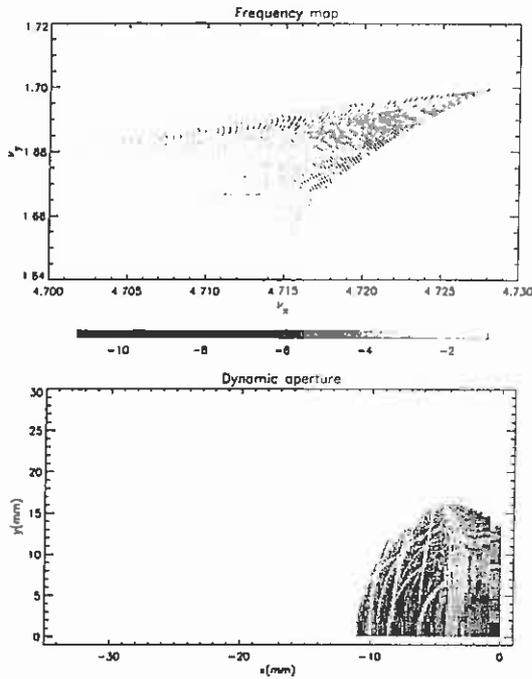


FIG. 5.56: Lorsque les familles hexapolaires H1 et H2 sont éteintes, la dynamique de Super-ACO modélisé avec la composante octupolaire est altérée : la carte en fréquence modifiée (haut), de nombreuses résonance sont excitées en particulier la résonance $3\nu_y = 5$, l'ouverture dynamique verticale (bas) est réduite de près d'un facteur deux (influence de $3\nu_y = 5$). L'ouverture dynamique horizontale est trois fois plus petite. Sur les deux figures, la diffusion est plus importante au voisinage des résonances.

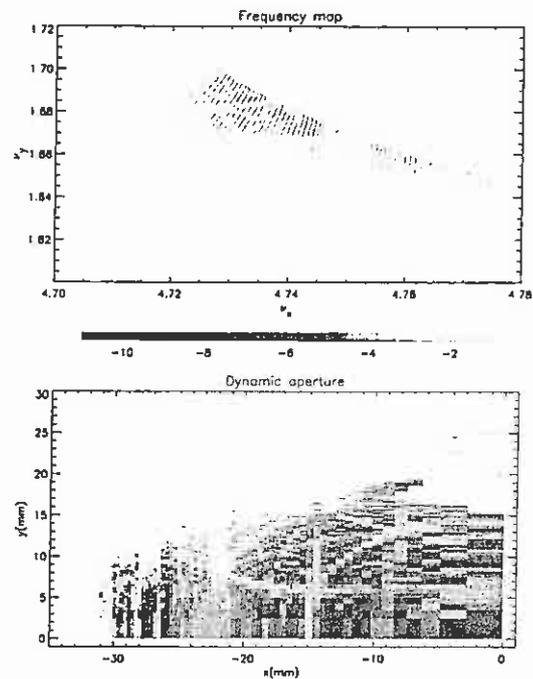


FIG. 5.57: Pour simuler quelle pourrait être la dynamique réelle de la Super-ACO, la composante octupolaire a été volontairement augmentée pour le point de fonctionnement nominal. Il est frappant de voir combien la dynamique est altérée : carte en fréquence réduite (haut) avec une grande diffusion. L'ouverture dynamique (bas) est constellée de résonance. Une analyse plus détaillée suggère comme nouvelles dimensions : $[-15, 0] \times [0, 6]$ mm, ce qui serait proche de l'expérience.

Rappelons enfin que tous ces résultats ont été obtenus en utilisant pour la première fois une électrode à 45 degrés : de nombreux phénomènes parasites (bruit, méconnaissance de l'étalonnage, réponse de l'électronique) sont venus perturber les mesures. Dans la section suivante (5.3), nous présentons une confirmation de ces résultats : dans ce cas les mesures sont effectués en utilisant une électrode d'un des BPM de l'anneau. Il sera extrêmement intéressant de pouvoir refaire des expériences similaires dès que nous disposerons des deux premiers BPM tour par tour qui devraient être installés début 2001 dans l'anneau Super-ACO.

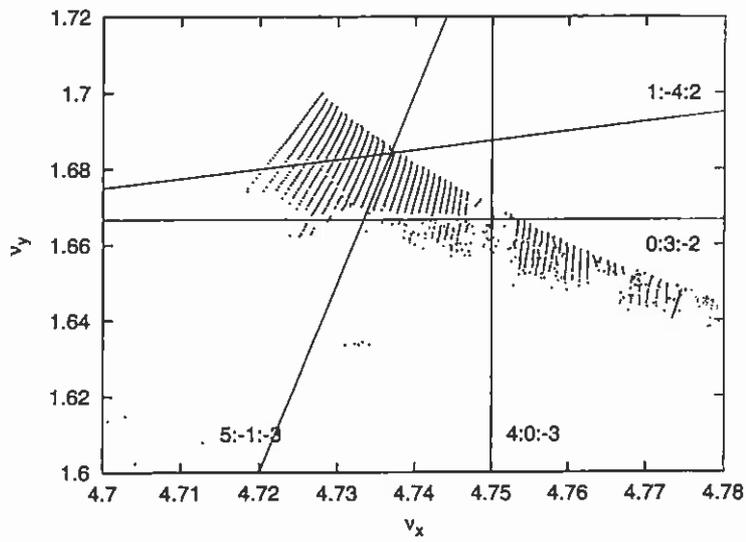


FIG. 5.58: Identification des principales résonances de la carte en fréquence 5.57 de Super-ACO. La résonance hexapolaire $3\nu_y = 5$ limite la dynamique dans le plan vertical alors que la résonance $4\nu_x = 19$ réduit son extension horizontale.

5.3 Espace des Phases et glissement des nombres d'ondes

Résumé

Lors de cette expérience, des données tour par tour ont été acquises pour déduire la variation des nombres d'ondes ν_x et ν_y avec l'amplitude horizontale en utilisant l'Analyse en Fréquence (Laskar, 1990). D'autre part, deux moniteurs de position sont utilisés pour réaliser les premières mesures d'espaces des phases pour différentes configurations machine : point de fonctionnement de routine avec et sans minimum de couplage, point de fonctionnement en éteignant les deux familles d'hexapôles H1 et H2. Les résultats de l'expérience du 22 mai 2000 se trouvent confirmés, à savoir l'existence d'une forte composante pseudo-octupolaire associée aux champs de fuite quadripolaires non négligeables pour l'optique de Super-ACO.

5.3.1 Etalonnage des BPM

5.3.1.1 Conditions expérimentales

- On travaille onduleurs ouverts, avec un courant $I = 72$ mA dans un paquet. A la suite d'un test avec le perturbateur P4 pour une tension de 7 kV, une grande partie du faisceau a été perdue pour une raison inexplicée. Pour cette expérience, il était techniquement impossible d'injecter à nouveau du courant, on a donc continué de travailler avec le courant $I = 29$ mA.
- Les oscillations bétatrons sont collectées sur le bouton HE (Haut Extérieur [de l'anneau], cf. Fig. 5.59) des BPM 12 et 4. Ce choix nous permet de conserver deux électrodes pour la correction dipolaire verticale.

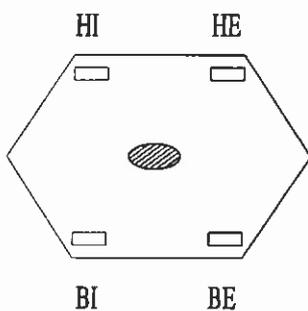


FIG. 5.59: Schéma succinct d'un BPM à quatre boutons. Le bouton Haut Extérieur (HE) est utilisé pour réaliser des mesures tour par tour.

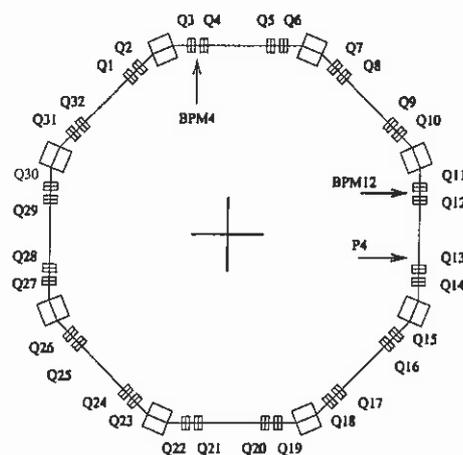


FIG. 5.60: Synoptique de Super-ACO : position des BPM 4 et 12 ainsi que du perturbateur P4.

- Les deux BPM sont séparés par une avance de phase voisine non pas de $\frac{\pi}{2}$ comme initialement désirée mais de 65 degrés (voir également le synoptique de l'anneau Fig. 5.60).

On pourra néanmoins obtenir une mesure approximative²⁵ de l'espace des phases car si l'on appelle $M(s_2|s_1)$ la matrice de transfert entre les deux BPM, on peut alors écrire (Courant et Snyder, 1958) :

$$M(s_2|s_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_2} & 0 \\ -\frac{\alpha_2}{\sqrt{\beta_2}} & \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} & 0 \\ \frac{\alpha_1}{\sqrt{\beta_1}} & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

avec ψ , la différence de phase entre les deux BPM et (α_i, β_i) , les paramètres de Twiss en $s = s_i$. On en déduit immédiatement la relation :

$$x'_1 = \frac{x_2}{\sin(\psi)\sqrt{\beta_1\beta_2}} - \frac{\alpha_1 + \cot(\psi)}{\beta_1}x_1 \quad (5.42)$$

Pour un mouvement linéaire, les trajectoires sont des ellipses d'aire $\mathcal{A} = 2\pi\sqrt{\beta_1\beta_2}J_1$ où J_1 est l'action définie par $2\beta_1J_1 = x_1^2 + (\beta_1x'_1 + \alpha_1x_1)^2$.

- Le point de fonctionnement est celui de routine avec des chromaticités légèrement plus élevées (cf. paramètres expérimentaux Tab. 5.19).

Nombres d'ondes	ν_x, ν_y	4.7284, 1.7004
Chromaticités	ξ_x, ξ_y	1.9, 1.9
Tailles (μm)	σ_x, σ_y	218, 124

TAB. 5.19: Caractéristiques machine lors de l'étalonnage des BPM 4 et 12 de Super-ACO. Les tailles du faisceau sont mesurées sur une sortie de lumière d'un dipôle.

- De manière générale, le signal est assez bruité. Cette perturbation est liée au fonctionnement de l'accélérateur linéaire qui injectait un faisceau dans le second accélérateur : DCI (Dispositif de Collisions dans l'Igloo).

5.3.1.2 Notes sur le BPM4

- L'étalonnage est réalisé au moyen de *bumps* statiques entre -10 mm (baisse de la durée de vie inexpliquée) et $+12$ mm (pas de baisse de la durée de vie) : l'ouverture dynamique semble très dissymétrique.
- Sans courant stocké, le signal résiduel moyen est de 31.75 (u.a.), quantité à retrancher des mesures ultérieures dont l'amplitude est voisine est environ de 150 en unités arbitraires.
- Pour les *bumps* négatifs, les nombres d'ondes sont rattrapés.

²⁵Le bouton HE ne permet pas de distinguer le mouvement vertical du mouvement horizontal.

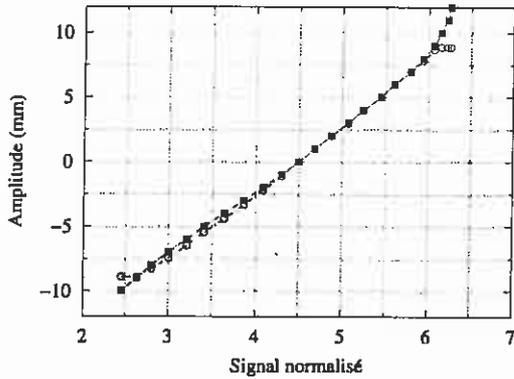


FIG. 5.61: Calibration de l'électrode HE du BPM4 de Super-ACO : amplitude du *bump* statique en fonction du signal normalisé par le courant stocké. Amplitude effective (carrés) et amplitude lues sur les BPM (il y a saturation aux grands amplitude).

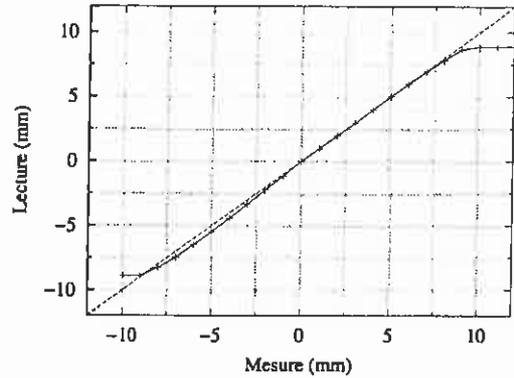


FIG. 5.62: Comparaison entre les valeurs lues en salle de contrôle et celles mesurées pour l'électrode HE du BPM4 de Super-ACO. On observe une caractérisation linéaire, mais aux grandes amplitudes les BPM saturent.

- A 0 mm, les nouvelles dimensions du faisceau valent : $(\sigma_x = 139, \sigma_y = 108) \mu m$.

- La courbe (Fig. 5.61) de calibration exprime l'amplitude (A) en mm du *bump* statique en fonction du signal (S) normalisé par le courant du faisceau sur l'électrode HE est presque linéaire pour la plage $|x| \leq 9$ mm :

$$A[mm] = 5.224 \times S[mA^{-1}] - 23.5 \quad (5.43)$$

- Les signaux lus en salle de contrôle et mesurés sur l'électrode sont en excellent accord entre -2 mm et 9 mm. Cependant, pour des *bumps* négatifs, l'écart est de 0.5 mm en moyenne (cf. Fig. 5.62). Pour $|x| \geq 9$ mm, il y a saturation.

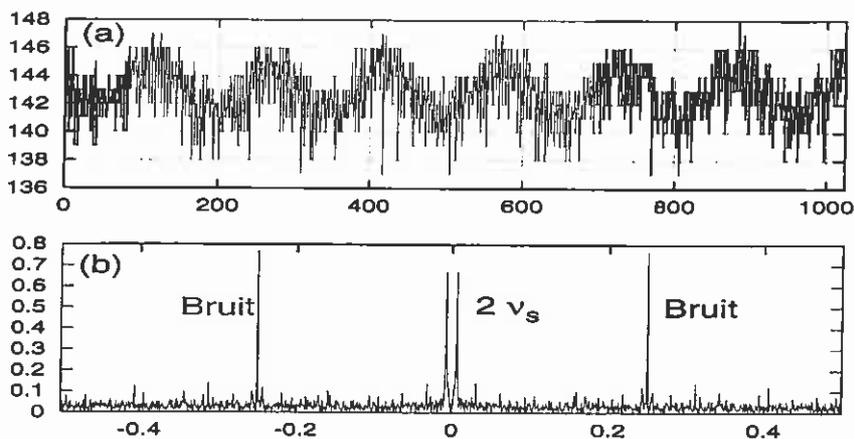


FIG. 5.63: Exemple de signal (u.a.) en fonction du nombre de tours (a) avec son spectre de Fourier (b) : *bump* statique de 1 mm. Le niveau de bruit est élevé (pic à 0.25). La fréquence $2 \times \nu_s$ est observée.

- Quelques remarques sur le signal enregistré lors d'un *bump* statique :
 - le signal est très bruité (cf. niveau de bruit sur le spectre de Fourier Fig. 5.63)
 - Les fréquences principales sont :
 - $\nu = 0.25$: ce ne peut pas être une résonance, car cette fréquence ne varie pas avec l'amplitude du *bump* (donc du bruit de l'électronique, des BPM, ...).
 - $\nu = 0.0065$: deux fois la fréquence synchrotron ($\nu_s = 0.0034$).

5.3.1.3 Notes sur le BPM12

- Pour le BPM 12, l'étalonnage est effectué pour des *bumps* statiques d'amplitude variant entre -12 mm et +12 mm sans aucune incidence sur la durée de vie du faisceau (cf. *infra* pour l'explication de la différence de comportement avec le BPM 4).
- Le signal résiduel moyen sans courant stocké est de 35.68 (u.a), quantité à retrancher aux mesures ultérieures.
- La courbe de calibration du BPM12 est linéaire à la fois pour les valeurs mesurées directement sur le bouton HE et lues en salle de contrôle, cependant les coefficients de proportionnalité ne sont pas identiques (cf. Fig. 5.64).
- Les résultats sont vite en très grand désaccord : plus de 2 mm à grande amplitude (cf. Fig. 5.65).
- Les BPM 4 et 12 sont identiques en théorie, cependant leurs réponses diffèrent grandement.

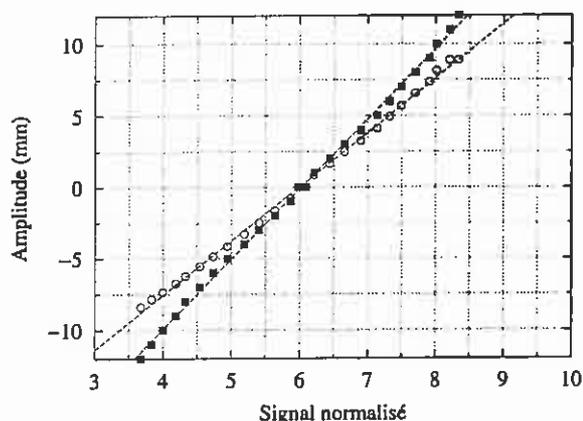


FIG. 5.64: Calibration de l'électrode HE du BPM12 de Super-ACO : amplitude du *bump* statique en fonction du signal normalisé par le courant.

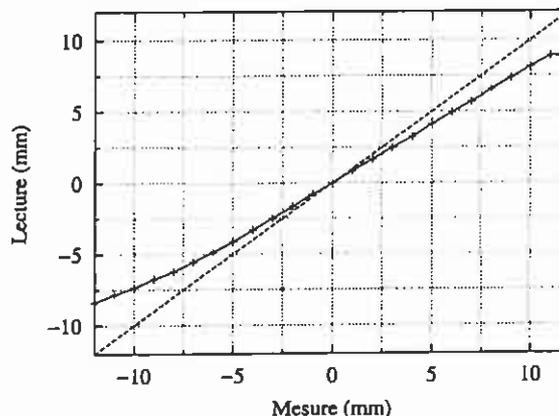


FIG. 5.65: Comparaison entre les valeurs lues en salle de contrôle et mesurées sur l'électrode HE du BPM12 de Super-ACO.

5.3.2 Point de routine avec minimum de couplage

5.3.2.1 Conditions expérimentales

- On travaille avec le point de routine (cf. paramètres expérimentaux Tab. 5.20) en faisant le minimum de couplage (réglage : $\Delta\nu < 1kHz$).
- Un total de 13 mesures a été réalisé à la fois pour le BPM4 et pour le BPM12.
- La tension du perturbateur P4 varie entre 4.77 kV et 12.10 kV, le courant de 18.4 mA à 16.7 mA.

- La décohérence est faible : plusieurs milliers de tours (cf. Fig. 5.66).

ν_x	4.7296	H1 (A)	54.34
ν_y	1.7000	H2 (A)	100.30
ξ_x	1.9	H3 (A)	201.42
ξ_y	1.9	H4 (A)	204.68
QT4 (A)	0.56	QT6 (A)	-0.54

TAB. 5.20: Caractéristiques machine : point de fonctionnement de routine avec minimum de couplage. Valeurs utilisées pour ajuster le modèle de Super-ACO.

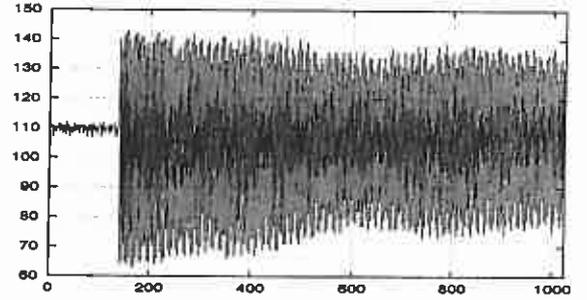


FIG. 5.66: Signal collecté (u.a.) sur le bouton HE en fonction du nombre de tours pour un kick de 10.87 kV : la décohérence est faible.

5.3.2.2 Espace des phases

- De manière similaire aux expériences du 22 mai 2000, l'étalonnage des BPM avec des *bumps* statiques ne peut pas être utilisé pour déduire une calibration entre la tension du perturbateur P4 et l'amplitude donnée au faisceau. En effet, en utilisant cette calibration, on déduirait la correspondance :

$$\begin{aligned}
 4.77 \text{ kV} &\longleftrightarrow 5.8 \text{ mm} \\
 5.38 \text{ kV} &\longleftrightarrow 6.0 \text{ mm} \\
 \vdots &\longleftrightarrow \vdots \\
 12.10 \text{ kV} &\longleftrightarrow 7.0 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

- Pour cette étude, l'étalonnage doit être fait en fonction du signal sur le perturbateur et non de celui lu sur le bouton HE. L'explication peut provenir du fait que n'utilisant qu'une seule électrode, le signal collecté est un mélange entre les coordonnées transverses (x-y).
- Par comparaison des courbes des variations théoriques des nombres d'ondes avec l'amplitude (cf. *infra*), on utilisera la calibration :

$$\boxed{1 \text{ kV} \longleftrightarrow 1 \text{ mm}} \tag{5.45}$$

- Pour les différentes tensions du perturbateur, on peut tracer le signal lu sur le premier BPM (x_1) en fonction de celui lu sur le deuxième (x_2). Un exemple de pseudo-ellipse est représenté sur la figure 5.67. L'épaississement est une conséquence directe de la décohérence du faisceau qui, dans ce cas, est lente (plusieurs milliers de tours).
- Une tentative de reconstruction du vrai espace des phases avec $\beta_1 = 10 \text{ m}, \beta_2 = 10 \text{ m}, \alpha_1 = 6.5$ (cf. Eq. 5.42) est illustrée par la figure 5.68.
- En utilisation les coordonnées de Courant-Snyder (\hat{x}, \hat{x}'), l'ellipse d'émittance se transforme en cercle :

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{x}{\sqrt{\beta}} \\ \hat{x}' = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} x + \sqrt{\beta} x' \end{cases} \tag{5.46}$$

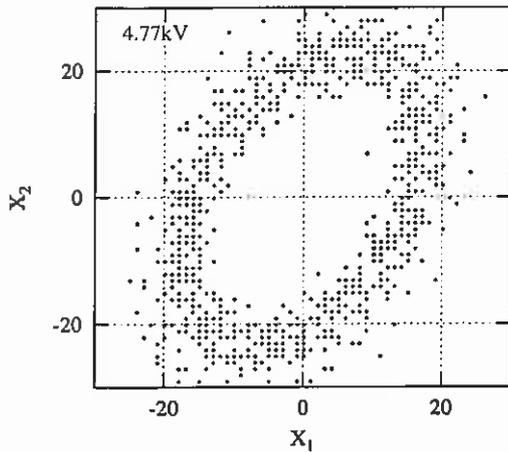


FIG. 5.67: Trajectoire dans le pseudo-espace des phases (x_1, x_2) . L'épaississement de l'ellipse est une conséquence de la faible décohérence du faisceau (sur 1 000 tours, cf. Fig. 5.66).

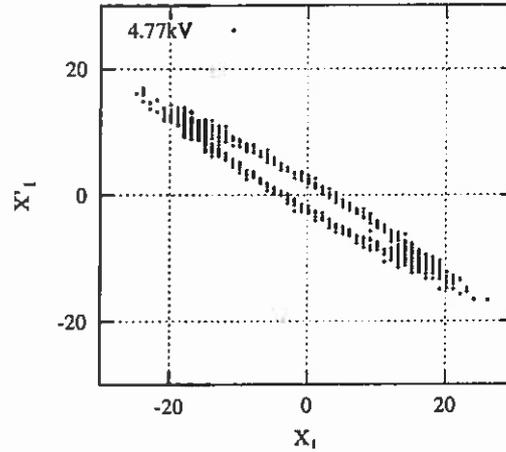


FIG. 5.68: Trajectoire dans l'espace des phases (x_1, x_1') : la pente de l'ellipse est directement reliée au fonctions de Twiss par le facteur $-\frac{\alpha_1}{\beta_1}$. L'amplitude est donnée dans le coin supérieur gauche des figures.

En utilisant ces coordonnées normalisées, l'espace des phases pour les différents *kicks* est tracé (cf. Fig. 5.69 et Fig. 5.70).

- On remarque que la courbe épaissie obtenue n'est pas parfaitement un cercle. Les raisons sont d'une part que les fonctions de Twiss sont théoriques et non mesurées et d'autre part que le signal analysé est un mélange des deux coordonnées transverses.
- On note que l'espace (x_1, x_2) est très déformé pour $V_{P4} = 7.21$ kV et surtout pour $V_{P4} = 7.82$ kV. Aucun phénomène particulier (résonance, perturbations externes) n'a pu être mis explicitement en évidence.
- Aux grandes amplitudes les ellipses épaissies se déforment, caractérisant la présence de nonlinéarités.

5.3.2.3 Courbe en fréquence

- En utilisant l'algorithme d'Analyse en Fréquence, l'extraction des nombres d'ondes avec une grande précision est possible.
- Seul le nombre d'ondes ν_x peut être extrait du signal puisque le minimum de couplage est réalisé.
- Le nombre d'ondes mesuré suit une loi quadratique croissante de l'amplitude contrairement à un modèle²⁶ sans composante de type octupolaire forte (cf. Fig. 5.71).
- La bonne loi de comportement est retrouvée en introduisant les pseudo-octupôles induits par les champs de fuite des quadripôles. En utilisant les données du tableau 5.20 et la

²⁶Les calculs théoriques ont été réalisés avec le logiciel MAD version 8.

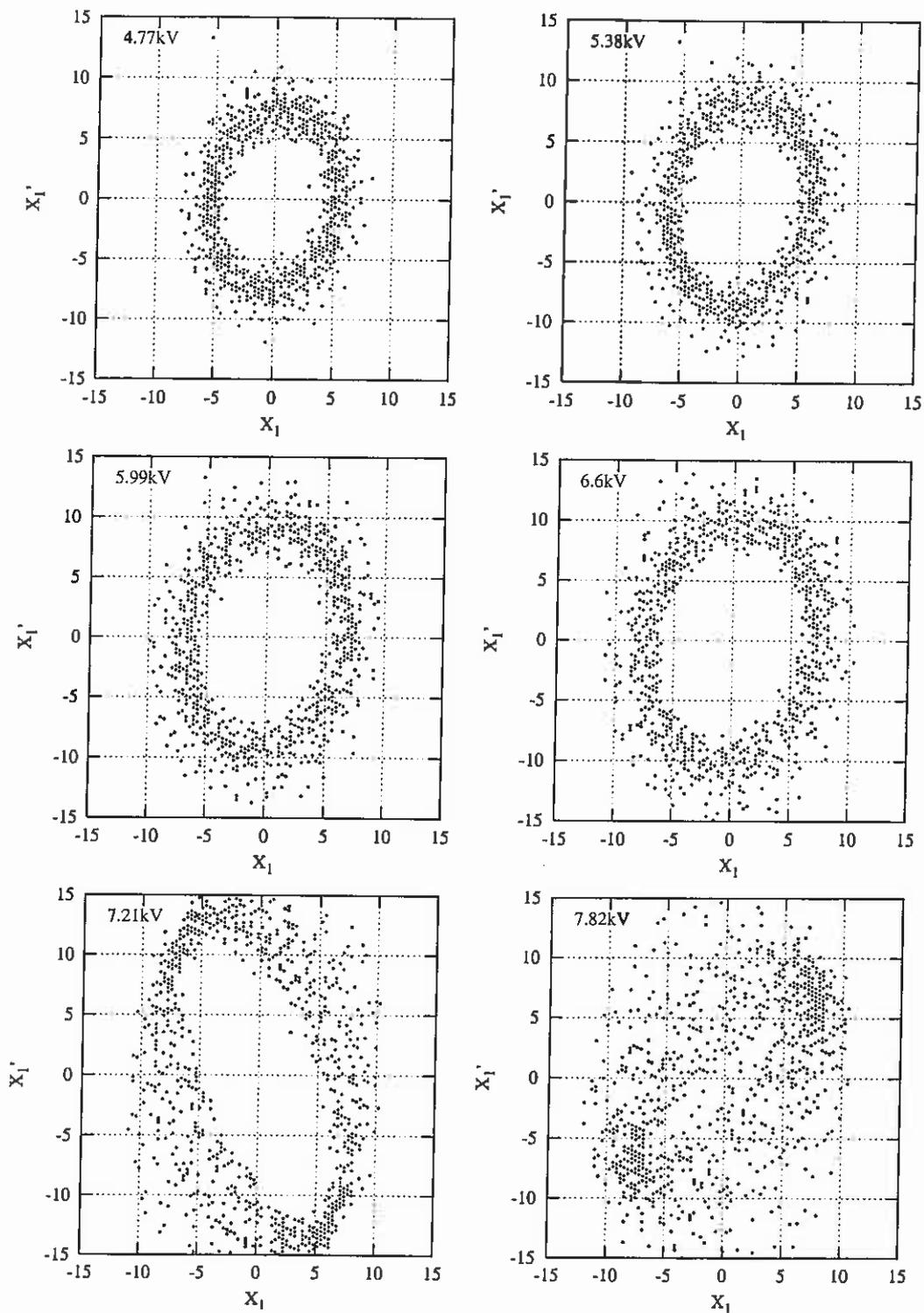


FIG. 5.69: Espace des phases normalisé pour de faibles amplitudes de *kicks* : l'épaississement des ellipses provient de la décohérence du faisceau. L'amplitude est donnée dans le coin supérieur gauche des figures.

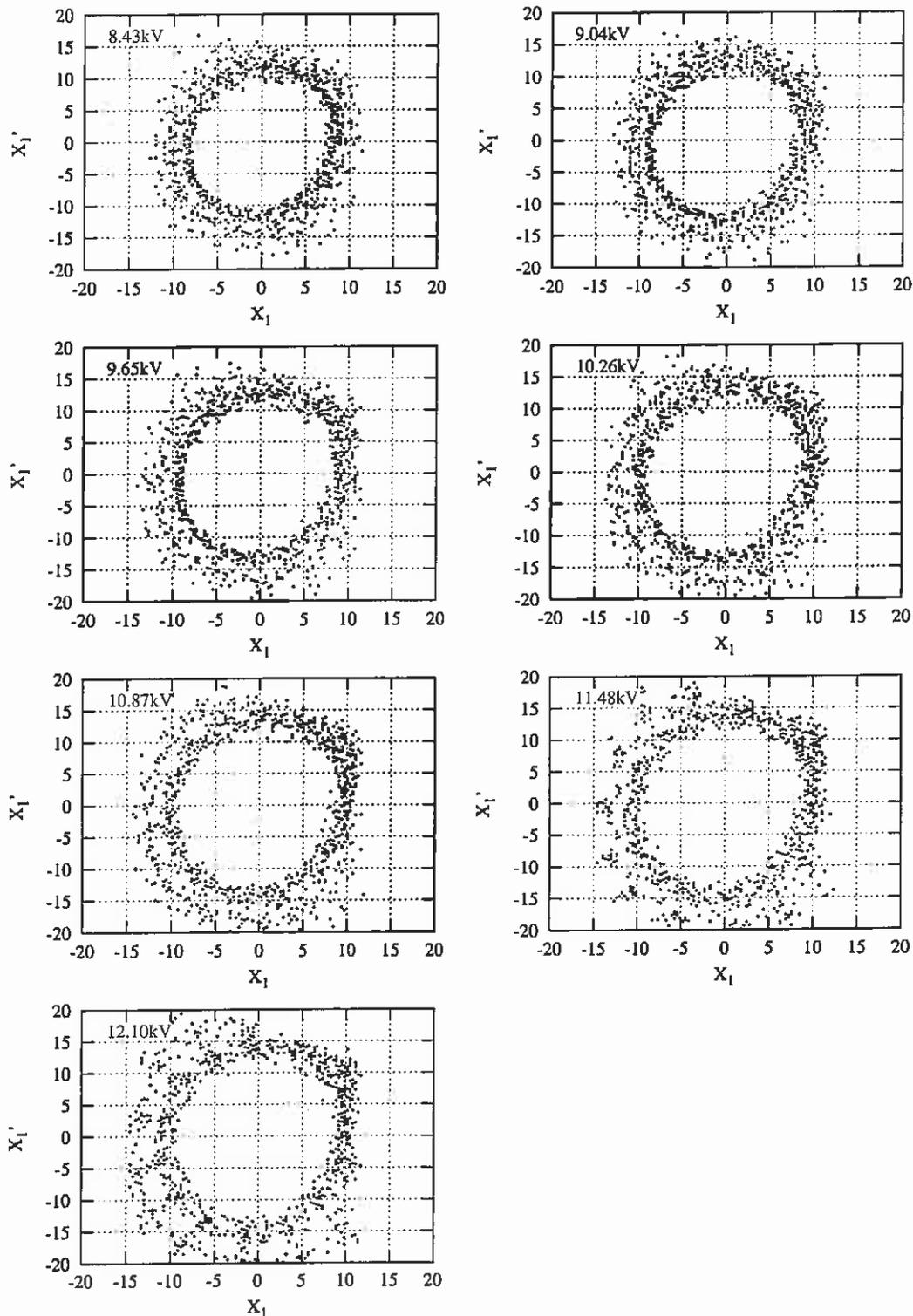


FIG. 5.70: Espace des phases normalisé (x_1, x_1') pour de grandes amplitudes : les ellipses sont déformées par les nonlinéarités. L'amplitude est donnée dans le coin supérieur gauche des figures.

formule de glissement du nombre d'ondes ν_x (Eq. 5.35), la contribution des pseudo-octupôles au nombre d'ondes horizontal s'écrit :

$$\Delta\nu_x = 323 \frac{x^2}{\beta_{bpm}} \quad (5.47)$$

avec β_{bpm} , la fonction β_x au niveau du moniteur de position.

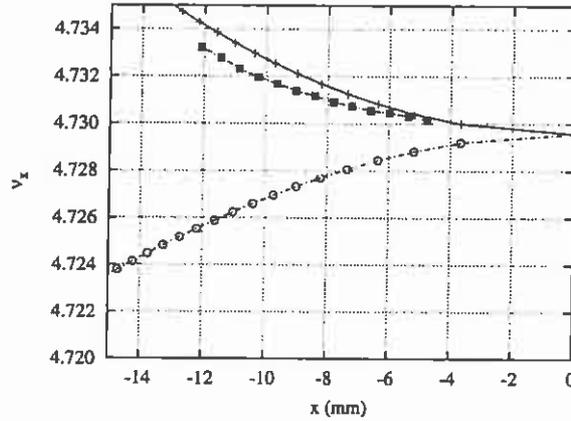


FIG. 5.71: Courbe en fréquence ν_x en fonction de l'amplitude horizontale. Comparaison entre la mesure (carrés) et différentes modélisations de Super-ACO : sans composante octupolaire (cercles) et avec pseudo-octupôles (croix). L'écart subsistant peut être expliqué par l'incertitude sur les fonctions β .

5.3.3 Point de routine avec couplage fort

5.3.3.1 Conditions expérimentales

- Pour ces mesures, le couplage est augmenté avec le quadripôle tourné QT4 ; l'ensemble des paramètres expérimentaux est donné par le tableau 5.21.

ν_x	4.7270	ν_y	1.6994
ξ_x	1.9	ξ_y	1.9
σ_x (μm)	200	σ_y (μm)	253
H1 (A)	54.34	H2 (A)	100.30
H3 (A)	201.42	H4 (A)	204.68
QT4 (A)	3.5	$\Delta\nu$ (kHz)	85
Phase	945		

TAB. 5.21: Caractéristiques machine : point de fonctionnement de routine sans minimum de couplage. Ces valeurs expérimentales de courant sont utilisées pour ajuster le modèle de Super-ACO.

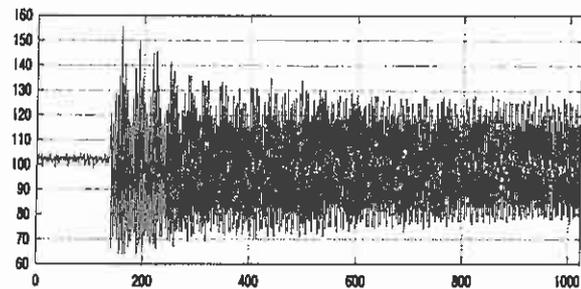


FIG. 5.72: Signal (u.a.) collecté en fonction du nombre de tours pour un *kick* de 9.04 kV : la décohérence est un peu plus importante que pour le minimum de couplage.

5.3. ESPACE DES PHASES ET GLISSEMENT DES NOMBRES D'ONDES

- La tension du perturbateur P4 varie entre 4.77 kV (durée de vie : $\tau \approx 38$ h) et 9.65 kV (début de perte du faisceau, $\tau \approx 4.1$ h), soit un total de 9 points de mesure pour les deux BPM.
- Un exemple de signal collecté sur le BPM4 est illustré par la figure 5.72.

5.3.3.2 Espace des phases

- Comme précédemment, l'espace des phases est reconstruit en utilisant les coordonnées de Courant-Snyder (cf. Fig. 5.73).
- La décohérence avec l'amplitude est plus importante, car le couplage est plus important ; l'ouverture dynamique est réduite par rapport au précédent cas étudié (les nonlinéarités sont plus importantes). En effet, on a vu que l'on commençait à perdre le faisceau dès 9.45 kV (contre 11.5 kV).
- Aux grandes amplitudes, les trajectoires sont fortement déformées : en calculant une décomposition quasi-périodique pour cette orbite avec l'Analyse en Fréquence, la présence de la résonance $3\nu_y - 5 = 0$ est mise en évidence.

5.3.3.3 Courbes en fréquence

- Le couplage est suffisant pour pouvoir extraire les deux nombres d'ondes transverses.

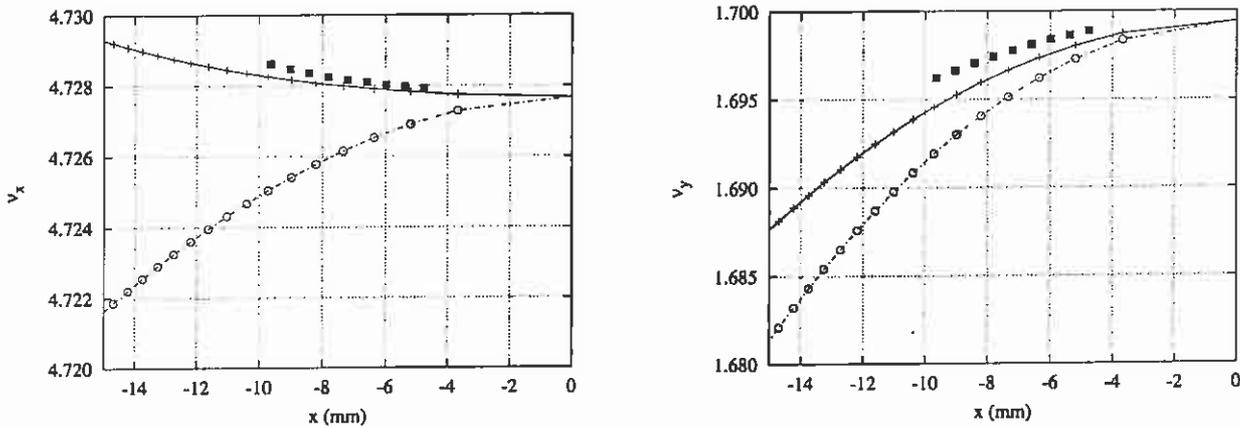


FIG. 5.74: Courbes en fréquence ν_x (à gauche) et ν_y (à droite) en fonction de l'amplitude horizontale. Comparaison entre la mesure (carrés) et différents modèles de Super-ACO : sans composante octupolaire (cercles) et avec pseudo-octupôles (croix). Le modèle avec les pseudo-octupôles donne un bon accord avec la mesure.

- En utilisant les données du tableau 5.21 et les formules de glissement des nombres d'ondes (Eq. 5.35 et Eq 5.36), la contribution des pseudo-octupôles au nombre d'ondes horizontal s'écrit :

$$\Delta\nu_x = 350 \frac{x^2}{\beta_{bpm}} \quad \text{et} \quad \Delta\nu_y = 154 \frac{x^2}{\beta_{bpm}} \quad (5.48)$$

avec β_{bpm} , la fonction β_x au niveau du moniteur de position. Il est remarquable de trouver un excellent accord entre la mesure et notre modèle de Super-ACO (cf. Fig. 5.74). Le léger écart pour ν_y semble provenir d'un terme de couplage non modélisé.

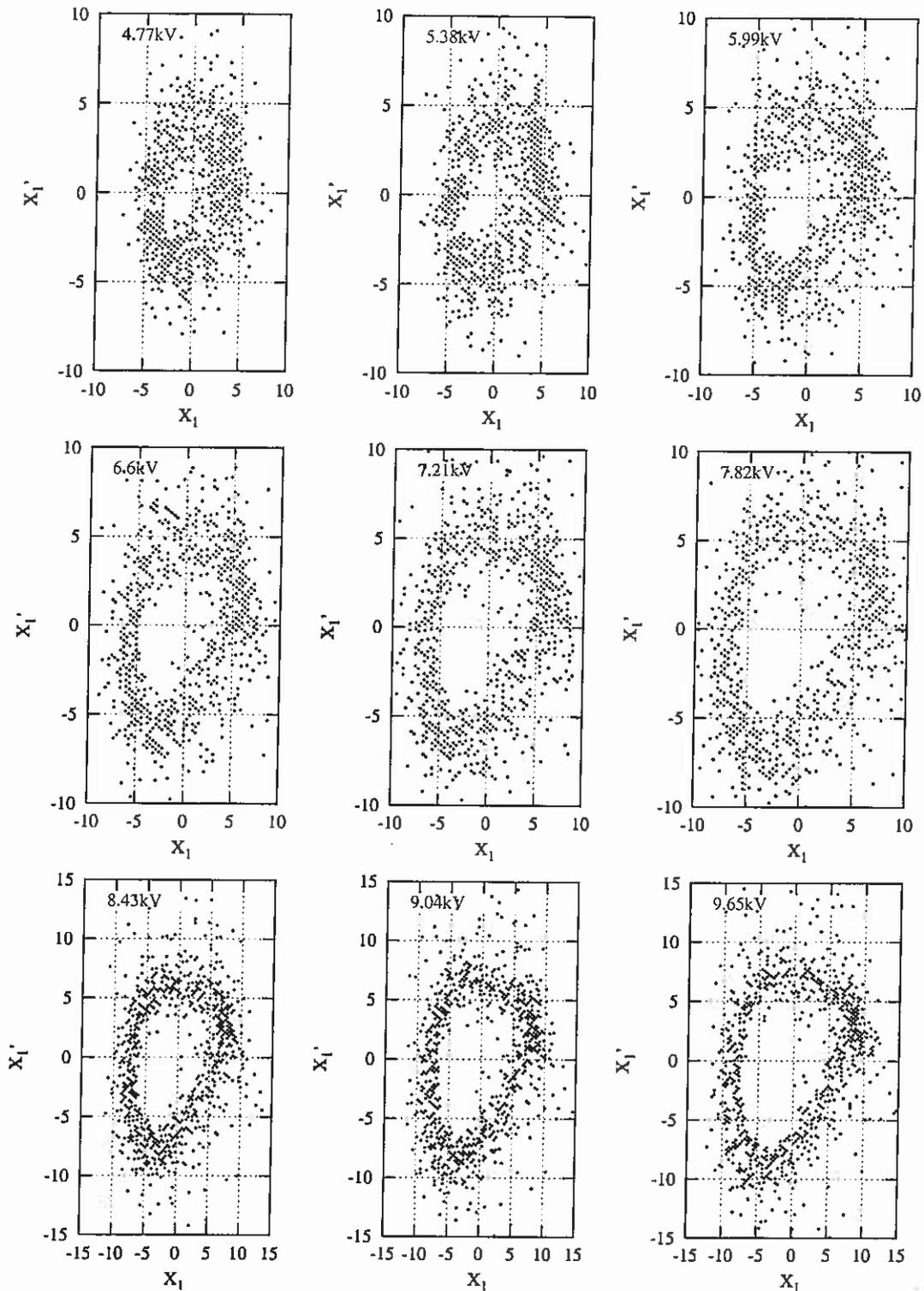


FIG. 5.73: Espace des phases normalisé (x_1, x_1') de Super-ACO pour le point de routine : aux grandes amplitudes les trajectoires sont fortement déformées par les nonlinéarités. Les ellipses de phases sont moins nettes que précédemment : c'est la conséquence de l'augmentation de la décoherence. L'amplitude est donnée dans le coin supérieur gauche de chaque figure.

5.3.4 Familles H1 et H2 éteintes avec minimum de couplage

5.3.4.1 Conditions expérimentales

- Pour ces 9 mesures, le courant est environ de $I = 12.9$ A (durée de vie : $\tau \approx 3.3$ h), le minimum de couplage est réalisé (QT4 fort), les chromaticités sont élevées dans les deux plans (cf. Tab. 5.22).
- La tension sur P4 varie de 4.70 kV à 9.58 kV (début perte du faisceau).
- La décohérence est importante, car d'une part, l'ouverture dynamique est plus petite (le glissement des nombres d'ondes est plus importante) et d'autre part, la chromaticité est importante dans les deux plans : le faisceau « décohère » complètement au bout de 600 tours à faible amplitude et de 150 tours à grande amplitude (cf. Fig. 5.75).

En pratique, seules les données avec un bon rapport signal-sur-bruit sont analysées. Il s'ensuit une détérioration de la détermination des fréquences à grande amplitude. Cependant, la convergence rapide de l'Analyse en Fréquence permet d'obtenir amplement une précision du pour mille pour les nombres d'ondes.

ν_x	4.7298	ν_y	1.6986
ξ_x	2.4	ξ_y	2.0
H1 (A)	0	H2 (A)	0
QT4 (A)	0.42	QT6 (A)	-0.33
Phase	945		

TAB. 5.22: Caractéristiques machine : point de fonctionnement de routine avec minimum de couplage, hexapôles H1 et H2 éteints. Valeurs utilisées pour ajuster le modèle de Super-ACO.

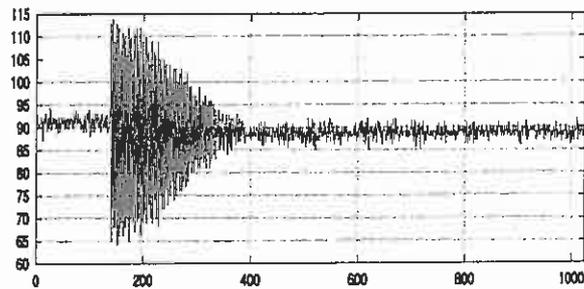


FIG. 5.75: Signal (u.a.) collecté en fonction du nombre de tours pour un *kick* de 6.53 kV : la décohérence a lieu sur 150 tours. Au-delà, le signal est noyé dans le bruit.

5.3.4.2 Espace des phases

- L'espace des phases normalisé est reconstruit pour les différentes amplitudes de *kicks* (cf. Fig. 5.76).
- La lisibilité des figures est rendue difficile par la décohérence rapide du faisceau. De plus, comme le signal est collecté sur une unique électrode, les composantes verticale et horizontale peuvent être mélangées.
- Les branches observées, par exemple pour $V_{P4} = 5.92$ kV, ne correspondent pas à des résonances « dangereuses » mais traduisent simplement la rationalité du nombre d'ondes ($\nu = \frac{p}{q}$).

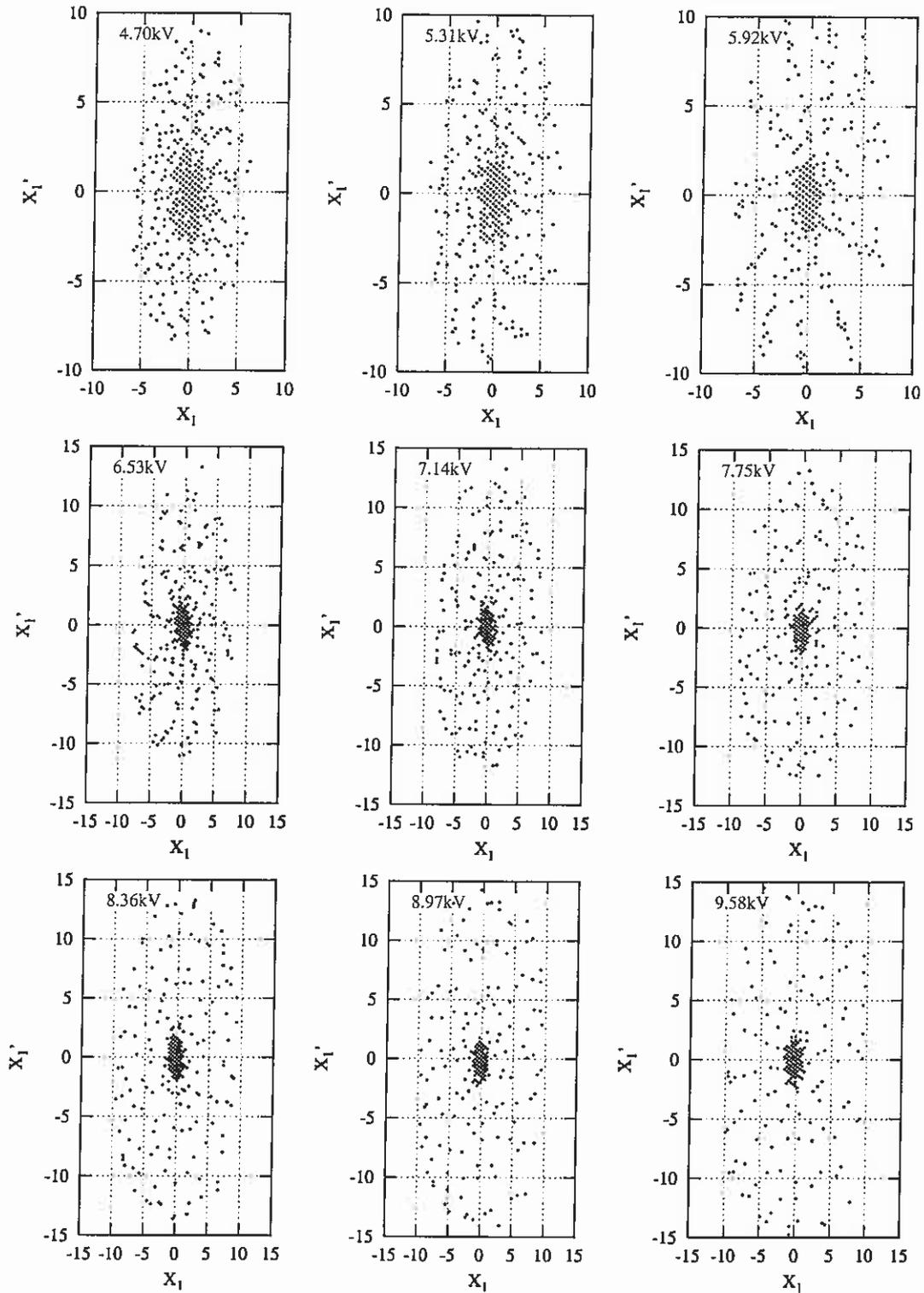


FIG. 5.76: Espace des phases normalisé (x_1, x_1') de Super-ACO lorsque les familles hexapolaires H1 et H2 sont éteintes en réalisant le minimum de couplage : la décoherence est d'autant plus rapide que la tension du perturbateur est élevée (trajectoires de plus en plus spiralées dans l'espace des phases). L'amplitude initiale du signal est donné dans le coin supérieur gauche de chaque figure.

5.3.4.3 Courbe en fréquence

- Seul le nombre d'ondes horizontal est extrait du signal (cf. minimum de couplage).
- En utilisant les données du tableau 5.22 et la formule de glissement du nombre d'ondes ν_x (Eq. 5.35), la contribution des pseudo-octupôles au nombre d'ondes horizontal s'écrit :

$$\Delta\nu_x = 350 \frac{x^2}{\beta_{bpm}} \quad (5.49)$$

avec β_{bpm} , la fonction β_x au niveau du moniteur de position. L'accord avec la mesure est remarquable lorsque les pseudo-octupôles sont pris en compte dans le modèle de Super-ACO.

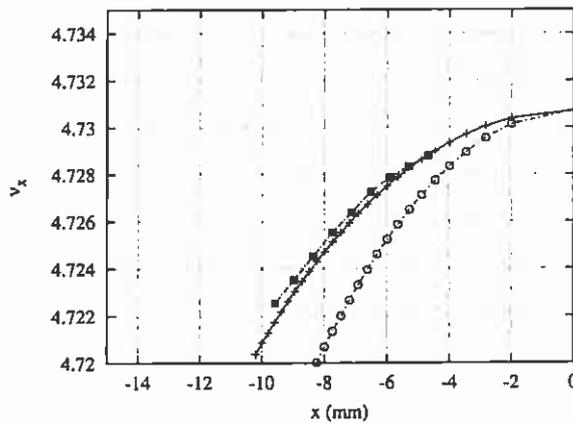


FIG. 5.77: Courbe en fréquence ν_x en fonction de l'amplitude horizontale : familles hexapolaires H1 et H2 éteintes avec minimum de couplage. Comparaison entre la mesure (carrés) et différentes modélisations de Super-ACO : sans composante octupolaire (cercles) et avec pseudo-octupôles (croix). Le modèle avec les pseudo-octupôles donne un accord remarquable avec la mesure.

5.3.5 Familles H1 et H2 éteintes sans minimum de couplage

5.3.5.1 Conditions expérimentales

- Seulement 6 mesures à un courant $I = 14.9$ mA (durée de vie : $\tau \approx 70$ h) ont été enregistrées, car l'ouverture dynamique est plus petite lorsque le minimum de couplage n'est pas réalisé (cf. conditions expérimentales Tab. 5.23).
- La tension du perturbateur P4 varie de 4.77 kV à 7.82 kV (début de perte, $\tau \approx 3.3$ h).
- La décohérence est rapide : sur environ 500 tours à faible amplitude et 150 tours à grande amplitude (cf. Fig. 5.78).

ν_x	4.7284	ν_y	1.6982
σ_x (μm)	184	σ_y (μm)	252
H1 (A)	0	H2 (A)	0
QT4 (A)	3.50	Phase	945

TAB. 5.23: Caractéristiques machine : point de fonctionnement de routine, hexapôles H1 et H2 éteints. Valeurs utilisées pour ajuster le modèle de Super-ACO.

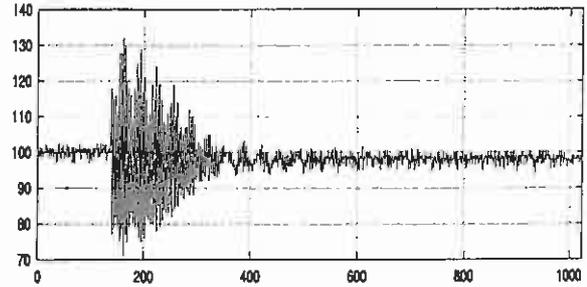


FIG. 5.78: Signal collecté pour un *kick* de 5.92 kV : la décohérence est très rapide (200 tours).

5.3.5.2 Espace des phases

- L'espace des phases normalisé est reconstruit comme précédemment en utilisant les coordonnées de Courant-Snyder (cf. Fig. 5.79).
- On n'observe plus de branche sur les figures ; la décohérence du faisceau est plus rapide que pour l'expérience précédente, car le couplage est plus important.

5.3.5.3 Courbes en fréquence

- Les deux nombres d'ondes sont extraits avec une précision plus faible puisque la décohérence a lieu sur quelques centaines de tours.

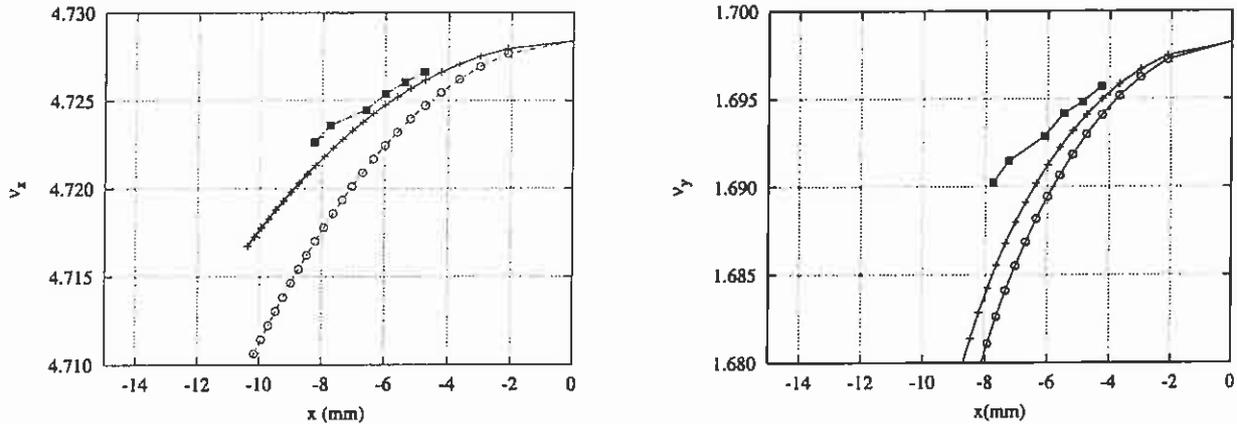


FIG. 5.80: Courbes en fréquence ν_x (à gauche) et ν_y (à droite) en fonction de l'amplitude horizontale : familles hexapolaires H1 et H2 éteintes sans minimum de couplage. Comparaison entre la mesure (carrés) et différentes modélisations de Super-ACO : sans composante octupolaire (cercles) et avec pseudo-octupôles (croix). Le modèle avec les pseudo-octupôles donne un bon accord avec le nombre d'ondes horizontal.

- En utilisant les données du tableau 5.23 et les formules de glissement des nombres d'ondes (Eq. 5.35 et Eq. 5.36), la contribution des pseudo-octupôles au nombre d'ondes

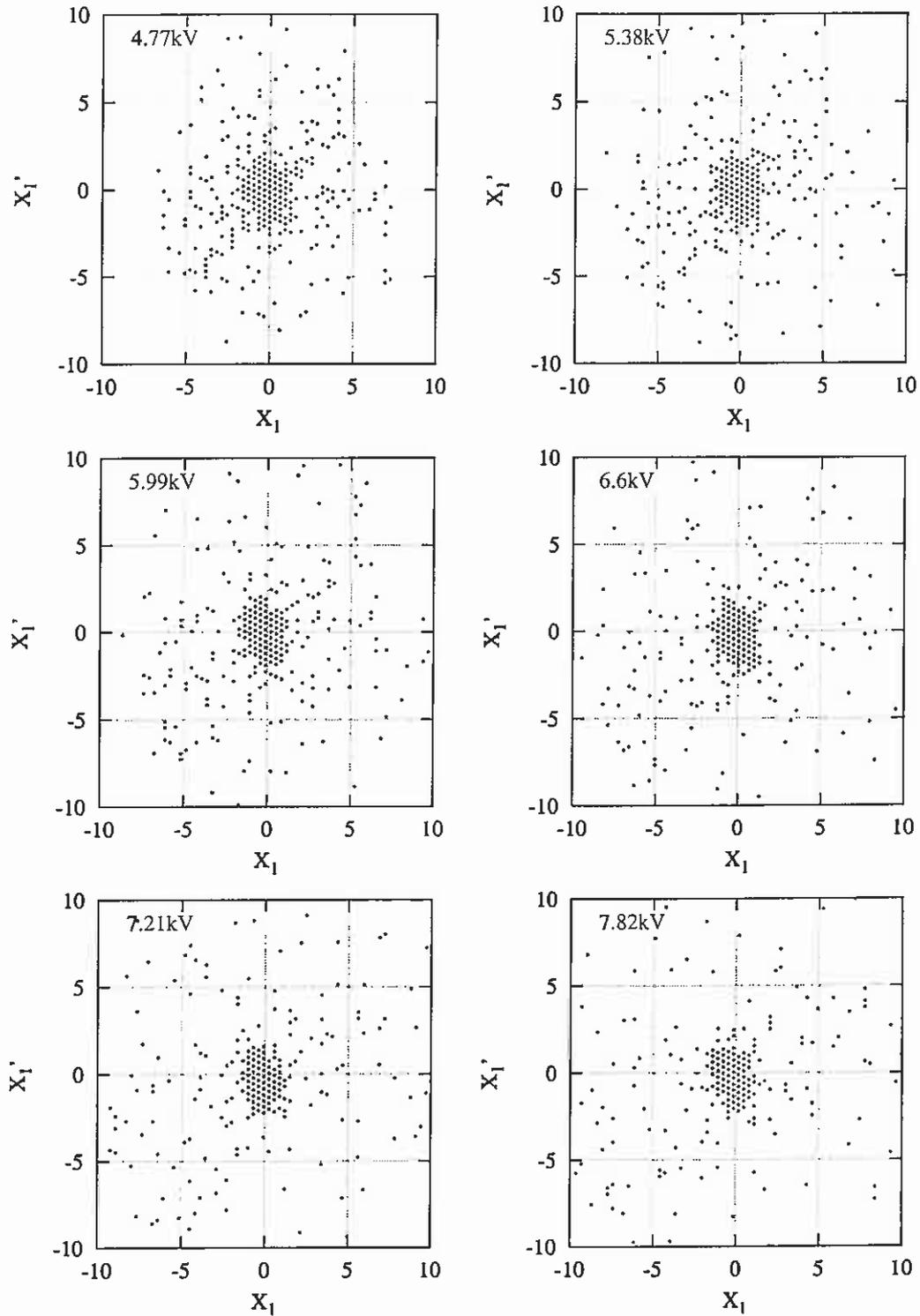


FIG. 5.79: Espace des phases normalisé (x_1, x_1') de Super-ACO lorsque les familles H1 et H2 sont éteintes. La présence de couplage diminue les dimensions de l'ouverture dynamique et accélère le phénomène de décohérence. L'amplitude initiale du signal est donnée dans le coin supérieur gauche de chaque figure.

horizontal s'écrit :

$$\Delta\nu_x = 350 \frac{x^2}{\beta_{bpm}} \quad \text{et} \quad \Delta\nu_y = 154 \frac{x^2}{\beta_{bpm}} \quad (5.50)$$

avec β_{bpm} , la fonction β_x au niveau du moniteur de position.

Dans le plan horizontal l'accord semble excellent et moindre pour le nombre d'ondes vertical (cf. Fig.5.80).

- Notons qu'il est difficile d'ajuster de courbes avec seulement six points expérimentaux correspondant à un faible variation du nombre d'ondes avec l'amplitude.
- Cependant, si expérimentalement le faisceau commence à être perdu pour une amplitude d'environ 8 mm, le modèle avec un pseudo-octupôle prédit une ouverture dynamique horizontal très proche à -10 mm.

5.3.6 Brève conclusion

Cette expérience a permis de mesurer pour la première fois, à Super-ACO, des espaces des phases. Les données tour par tour ont été collectées sur une électrode de deux moniteurs de positions de l'anneau. L'étalonnage et la comparaison des réponses des BPM 4 et 12 a montré qu'ils n'étaient pas équivalents avec des écarts jusqu'à 2 mm à grande amplitude.

Le second volet de cette expérience a été l'analyse des données tour par tour pour déterminer les glissements expérimentaux des nombres d'ondes transverses avec l'amplitude horizontale. Les résultats confirment ceux obtenus lors de la première expérience de ce type (22 mai 2000) : les champs de fuite des quadripôles produisent un terme pseudo-octupolaire fort qui perturbe fortement la dynamique de l'anneau. En moyenne, les glissements des nombres d'ondes induits sont :

$$\boxed{\Delta\nu_x = 350 \frac{x^2}{\beta_{bpm}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\nu_y = 150 \frac{x^2}{\beta_{bpm}}}$$

Il faut noter que compte tenu des conditions expérimentales, des défauts non modélisés dans nos simulations (erreurs dipolaires, défauts quadripolaires, couplage), ces résultats doivent être accompagnés d'une barre d'erreur de l'ordre de dix pour cent.

5.4 Bilan et conclusion sur l'optique de Super-ACO

Les résultats expérimentaux présentés au cours de chapitre apportent un éclairage nouveau sur la modélisation de Super-ACO. Pour améliorer la compréhension des performances actuelles de l'anneau, nous souhaitons initier les premières mesures tour par tour des glissements des nombres d'ondes avec l'amplitude sur l'anneau d'Orsay. Si à l'ALS il a été possible d'obtenir la première carte en fréquence expérimentale d'un accélérateur, nous savions que la tâche serait plus ardue à Super-ACO : l'anneau de stockage n'était pas équipé de BPM tour par tour et le faisceau ne pouvait être déplacé que selon la direction horizontale. A la place des BPM tour par tour, nous ne disposons que d'une électrode utilisée initialement pour le diagnostic et mélangeant les signaux transverses. Cependant, ces expériences, innovantes à

Orsay, ont suscité un grand intérêt de la part de l'ensemble du groupe faisceau (conducteurs de faisceau, électroniciens, ingénieurs, physiciens et techniciens). Une fois leur faisabilité technique attestée, ces expériences ont presque toutes donné des résultats exploitables (à la grande surprise de l'auteur). Utilisant l'Analyse en Fréquence, le principal résultat est la mise en évidence expérimentale de l'influence des pseudo-octupôles des champs de fuite des quadripôles de Super-ACO. Jusqu'à présent non pris en compte dans la modélisation de l'anneau, nous avons vu qu'ils ont un impact considérable sur la dynamique transverse du faisceau.

Ces résultats ont été confirmés depuis (printemps 2001). Deux « vrais » moniteurs tour par tour ont été installés dans l'anneau de stockage pour refaire le même type d'expériences. Ce travail a été réalisé en particulier par Mahdia Belgroune sous la direction du groupe faisceau : bénéficiant d'une électronique plus rapide, d'un meilleur rapport signal-sur-bruit, d'une meilleure résolution, les pseudo-octupôles permettent d'expliquer des glissements des nombres d'ondes horizontal et vertical mesurés pour différents choix d'optiques.

L'optique de Super-ACO peut désormais être modélisée par les éléments magnétiques suivants :

- les dipôles avec les angles mesurés des coins et leurs champs de fuite de type hexapolaire (Level et Nghiem, 1986) ;
- les quadripôles « combinés » :
 - les quadripôles proprement dit, les erreurs de gradients ont peut d'impact sur la dynamique (cf. matrices-réponse déduites avec le programme LOCO) ;
 - les pseudo-octupôles associés aux champs de fuite des quadripôles (cf. mesures tour par tour associées à l'Analyse en Fréquence). Pour le point de fonctionnement nominal, les glissements des nombres d'ondes associés sont approximativement :

$$\boxed{\Delta\nu_x = 350 \frac{x^2}{\beta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\nu_y = 150 \frac{x^2}{\beta}}$$

où β est la fonction optique au point d'observation.

- leur composante dodécapolaire est négligeable pour des amplitudes inférieures à 20 mm. Leur force LDD est liée à celle des quadripôles K (Barthès *et al.*, 1990) :

$$LDD = 35 \times K$$

- les hexapôles (correction de la chromaticité et réduction des nonlinéarités).
- leur principal défaut multipolaire est une composante décapolaire dont la force LD est proportionnelle à la force hexapolaire H (Brunelle, 1999) :

$$\boxed{LD = -27 \times H}$$

- leur composante octupolaire aléatoire peut être négligée (Barthès *et al.*, 1990)
- les correcteurs (bobines dipolaires) peuvent être modélisé avec une composante hexapolaire dans les sections dispersives. Ils contribuent à la chromaticité :

$$\Delta\xi_x = -0.1073 \quad \text{et} \quad \Delta\xi_y = 0.4124$$

Ces valeurs ne sont pas figées, car la correction d'orbite fermée varie chaque jour ; seul l'ordre de grandeur est à considérer.

- l'introduction d'autres multipôles (lentilles décapolaires des dipôles) a peut d'influence sur la dynamique restreintes aux dimensions de l'ouverture physique.
- les quadripôles tournés, utilisés pour modifier le couplage, induisent un glissement du point de fonctionnement. Typiquement pour l'optique nominale :

$$\Delta\nu_x = 5 \times 10^{-4} \quad \text{et} \quad \Delta\nu_y = -5 \times 10^{-4}$$

- les onduleurs n'ont pas été pris en compte dans la présente modélisation.

Le dernier point de désaccord observé concerne la mesure de la chromaticité naturelle. La raison pourrait être simplement le logiciel BETA a été écrit pour des accélérateurs à grand rayon de courbure. Un terme non négligeable pour le calcul de la chromaticité d'une machine telle Super-ACO doit être bientôt introduit dans le code de calcul. De plus, les champs de fuite des dipôles (non modélisés) sont de type hexapolaire et induisent une chromaticité verticale non négligeable.

Enfin, l'intégrateur présenté dans la première partie de ce mémoire va prochainement être utilisé pour d'une part vérifier l'assertion précédente au sujet de la chromaticité, et d'autre part prendre en compte réellement les champs de fuite des quadripôles et, plus tard, les éléments d'insertion.

Conclusions et perspectives

Au cours de ce travail, nous avons étudié une grande diversité de machines de rayonnement synchrotron : Super-ACO avec ses 72 mètres de circonférence, l'ALS (196 mètres), SOLEIL (337 mètres) et l'ESRF (844 mètres). Suivant la taille de l'anneau, les approximations réalisées pour la modélisation varient (termes des petites machines, coins des aimants, champs de fuite des éléments magnétiques).

En utilisant le formalisme Hamiltonien, nous avons écrit un intégrateur des équations du mouvement d'une particule relativiste. Chacun des principaux éléments magnétiques a été modélisé par un Hamiltonien local à trois degrés de liberté. L'intégrateur utilise les méthodes d'algèbre de Lie qui devraient connaître en Europe un développement comparable à celui des Etats-Unis depuis leur introduction par A. Dragt. L'intégrateur proposé est un intégrateur symplectique d'ordre quatre à pas tous positifs dont la précision est supérieure d'un ordre de grandeur à l'intégrateur de Forest et Ruth.

L'Analyse en Fréquence a été notre principal outil d'investigation de la dynamique transverse des accélérateurs. En calculant une carte en fréquence pour une optique donnée, nous obtenons une vision globale de la dynamique du faisceau. L'allure des cartes en fréquence varie profondément d'une machine à l'autre ; elle est très sensible aux réglages hexapolaires. De nombreuses résonances d'ordre aussi bien faible qu'élevé détériorent la dynamique et induisent des mouvements chaotiques. La convergence rapide, la précision de la méthode, l'utilisation de la diffusion des orbites permettent également d'en faire un outil fiable pour prédire l'effet de l'introduction des défauts magnétiques dans le modèle, du déplacement du point de fonctionnement.

Nous avons vu qu'une fois connus, les défauts expérimentaux des gradients des quadripôles droits et tournés d'un anneau (déduits des matrices-réponse), une carte en fréquence décrit une dynamique très voisine de la dynamique réelle de l'accélérateur (taille de l'ouverture dynamique, efficacité d'injection).

Une étape supplémentaire a été franchie en obtenant les premières cartes en fréquence expérimentales d'un accélérateur. Les comparaisons avec le modèle théorique (de l'ALS) se sont avérées remarquables en termes de glissements des nombres d'ondes avec l'amplitude, de largeurs de résonance, de la diffusion des orbites au voisinage des nœuds entre les résonances.

Les deux outils nécessaires pour réaliser de telles expériences sont un jeu de BPM tour par tour et deux aimants rapides permettant de déplacer sur un seul tour le faisceau dans les plans horizontal et vertical.

L'Analyse en Fréquence peut ainsi être directement intégrée comme un des outils de diagnostic du faisceau dans la salle de contrôle d'un accélérateur. C'est déjà une réalité à l'*Advanced Light Source* où une carte en fréquence peut être tracée de manière quasi-automatique. Pour rendre l'utilisation de la méthode encore plus pratique, le système de mesure de l'ALS va être prochainement modifié pour permettre l'acquisition d'une carte en fréquence en une vingtaine de minutes.

A Super-ACO, même s'il était techniquement impossible d'obtenir une carte en fréquence, les mesures tour par tour du glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude ont permis de

mettre en évidence le fort effet des champs de fuites des quadripôles (non modélisé jusqu'à présent). Leur inclusion dans le modèle de l'anneau révèle une dynamique entièrement différente et permet de mieux comprendre les performances actuelles de la machine (ouverture dynamique, résonances, réglages des hexapôles).

Les perspectives à la suite de ce travail sont nombreuses avec pour un des thèmes principaux, l'association de l'Analyse en Fréquence et des mesures tour par tour dans un accélérateur.

Ma courte expérience dans le monde des accélérateurs m'a convaincu du point essentiel suivant. Les écarts sur les performances des sources de lumière entre les prédictions et les mesures expérimentales sont très souvent proche d'un facteur deux. La raison principale est qu'il est impossible d'obtenir une description absolue des champs magnétiques, des positionnements des éléments dans l'anneau de stockage, de paramètres moins prévisibles (vibrations, marées solides, variations de la température).

Ne pouvant tout prévoir, il est par contre primordiale de prévoir, dès la construction d'un accélérateur (l'auteur pense en particulier au futur anneau de stockage SOLEIL), un grand nombre d'outils de diagnostic, outils qui constituent littéralement les « yeux » et les « oreilles » du physicien des accélérateurs. Ce sont en particulier des moniteurs de position tour par tour, des aimants rapides pour déplacer le faisceau sur un tour.

Nous avons vu que les mesures expérimentales sont souvent compliquées par le phénomène de la décohérence. Par exemple, le faisceau de l'ESRF « décohère » en une centaine de tours pour déjà de très faibles déplacements horizontaux du faisceau. Pour un anneau de la taille de l'ESRF, il doit être possible d'obtenir des données exploitables en modifiant la philosophie des mesures : au lieu d'enregistrer le signal sur un BPM particulier de l'anneau tous les tours, l'utilisation conjointe de l'ensemble des BPM doit permettre d'augmenter de manière significative l'échantillonnage des données.

A l'ALS, l'Analyse en Fréquence est et sera pleinement utilisée pour caractériser l'impact des trois aimants supraconducteurs qui vont être installés en août 2001 dans l'anneau et réduire sa périodicité de douze à trois. Des résultats récents (Steier, Robin, Wu, Decking, Laskar et Nadolski, 2001) reposent sur l'utilisation de cet outil pour caractériser et comprendre les causes de limitations de la dynamique *off momentum* de l'ALS.

Dans ce travail, l'Analyse en Fréquence a principalement été utilisée à travers les cartes en fréquence, *i.e.* en ne conservant que le premier terme de la décomposition quasi-périodique obtenue en analysant les trajectoires de phase. Une autre approche consiste à utiliser la décomposition complète donnée par l'Analyse en Fréquence. L'amplitude de chaque terme correspond à l'amplitude d'une résonance donnée. Il est ainsi possible d'extraire de nombreuses autres informations sur la dynamique et d'obtenir une nouvelle méthode d'optimisation d'un accélérateur.

Ces nouveaux développements devront être considérés pour permettre non seulement d'améliorer les accélérateurs actuels mais aussi de concevoir les prochaines générations de machines tels les sources de lumière de quatrième génération, les « usines à muon » et les collisionneurs.

Bibliographie

- [1] Abell, D. : 1995, *Analytic Properties and Cremona Approximation of Transfer Maps for Hamiltonian Systems*, thèse, Université de Maryland
- [2] Abramowitz, M., Stegun, I.A. : 1972, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York
- [3] Site internet de l'Advanced Light Source : <http://www-als.lbl.gov/als/>
- [4] *Advanced Light Source 1-2 GeV Synchrotron Radiation Source : Conceptual Design Report*, LBNL publication PUB-5172, Berkeley, 1986
- [5] Amman, F. : 1971, *Longitudinal instability due to Beam-Beam Interaction in Electron Storage Rings*, Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN, Rapport LNF-71/82
- [6] Arnold, V.I., Avez, A. : 1968, *Ergodic problems of classical mechanics*, Benjamin, New York
- [7] Audy, P. : 1989, *Le mouvement transverse dans un accélérateur circulaire affecté de non-linéarités hexapolaires : application au problème de l'ouverture dynamique*, thèse, Université de Paris XI, Orsay
- [8] Barthès, M., Corlier, V., Daël, A., Evesque, C., Level, M.P., Nghiem, P. : 1990, *Mesures Magnétiques sur les Quadrupôles de Super-ACO*, Rapport RT/90-07, LURE, Orsay
- [9] Bartolini, R., Leunissen, L.H.A., Papaphilippou, Y., Schmidt, F., Verdier, A. : 1999, *Measurement of resonance driving terms from turn-by-turn data*, in Proceedings of the PAC99 Conference, New York, pp. 1457-1559
- [10] Bazzani, A., Todesco, E., Turchetti, G., Servizi, G. : 1994, *A normal Form Approach to the Theory of Nonlinear Betatronic Motion*, Rapport CERN 94-02
- [11] Bengtsson, J., Forest, E., Nishimura, H., *Tracy User's Manual*, note interne ALS, Berkeley
- [12] Bengtsson, J. : 1988, *Non-Linear Transverse Dynamics for Storage Rings with Applications to the Low-Energy Antiproton Ring at CERN*, Rapport CERN 88-05
- [13] Berz, M. : 1989, *Differential Algebraic Description of Beam Dynamics to very high Orders*, Particule Accelerators, vol. 24, pp. 109-124
- [14] Berz, M. : 1999, *Modern Map Methods in Particle Beam Physics*, in Advances in Imaging and Electron Physics, vol. 108, Academic Press
- [15] Besnier, G., Laclare, J.L., Limborg, C. : 1996, *Difficulty in obtaining short intense electron bunches in conventional storage rings*, in Proceedings of the 10th ICFA Beam Dynamics Workshop, Grenoble

- [16] Brown, K.L. : 1982, *A First- and Second-Order Matrix Theory for the Design Of Beam Transport Systems and Charged Particle Spectrometers*, Rapport SLAC-75, Université de Standford
- [17] Bruck, H. : 1966, *Accélérateurs circulaires de particules*, Presses Universitaires de France
- [18] Brunelle, P. : 1992, *Beam Dynamics with Four Undulators on Super-ACO : Experimental and Theoretical Results*, Particle Accelerators, vol. 39, pp. 89–106
- [19] Brunelle, P., Besson, J.-C., Cassinari, L., Cousin, J.-M., Darpentigny, J., Flynn, G, Girault, F., Lamarre, J.-f., Nadji, A., Rieul, B., Sommer, M. : 1999, *News on beam dynamics at Super-ACO*, in Proceedings of the PAC99 Conference, New York, pp. 1569–1571
- [20] Brunelle, P. : 1999, *Effet des composantes multipolaires sur la variation des nombres d'ondes avec l'énergie. Comparaison avec les résultats expérimentaux pour Super-ACO*, Rapport interne Super-ACO/99-13
- [21] Carletti, T., Laskar, J. : 2000, *Scaling law in the standard map critical function. Interpolating Hamiltonian and frequency map analysis*, Nonlinearity, vol. 13, pp. 2033–2061
- [22] Castro-Garcia : 1996, *Luminosity and beta function measurement at the electron-positron collider ring LEP*, thèse, CERN SL/96-70, Genève
- [23] Channel, P.J., Scovel, J.C. : 1990, *Symplectic integration of Hamiltonian systems*, Nonlinearity, vol. 3, pp. 231–259
- [24] Chao, A.W., Tigner, M. : 1998, *Handbook of Accelerator Physics and Engineering*, World Scientific
- [25] Chirokov, B.V. : 1979, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Physics reports, vol. 52, N° 5, pp. 263–379
- [26] Courant, E.D., Snyder, H.S. : 1958, *Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron*, Ann. Phys. 3, pp. 1–48
- [27] Decking W., Robin D. : 1998, *Momentum Aperture of the Advanced Light Source*, in Proceedings of the 16th Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop on Nonlinear and Collective Phenomena in Beam Dynamics, Arcidosso, Italie pp. 1265–1267
- [28] Dragt, A.J., Finn, J.M. : 1976, *Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps*, Journal of Mathematical Physics, vol. 17, N° 12, pp. 2215–2227
- [29] Dragt, A.J, Douglas, D.R., Neri, F., Mottershead, C.T., Forest, E., Healy, L.M., Ryne, R.D., Schutt, P., van Zeijts, J. : *MARYLIE 3.0 User's Manual*, Université de Maryland. Le code peut être obtenu à partir du site internet de l'université de Maryland, <http://www.physics.umd.edu/dsat/index.html>
- [30] Dragt, A.J. : 1981, *Lectures on nonlinear orbit dynamics*, Fermilab Summer School on high energy Particle, in AIP Conference Proceedings, vol. 8 (1982)
- [31] Dragt, A.J. : 1982, *Exact Numerical Calculation of Chromaticity in Small Rings*, Particle Accelerators, vol. 12, pp. 205–218
- [32] Dragt, A.J., Forest, E. : 1986, *Lie Algebraic Theory of Charged-Particule Optics and Electron Microscopes*, in Advanced in Electronics and Electron Physics, vol. 67, pp. 67–120

- [33] Dragt, A.J., Douglas, D.R., Healy, L.M., Ryne, R.D. : 1988, *Lie algebraic Treatment of linear and nonlinear Beam Dynamics*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., vol. 48, pp. 455–496
- [34] Dragt, A.J. : 1996, *Maps Past, Present, and Future*, Part. Accel., vol. 54
- [35] Dragt, A.J., Abell, D.T. : 1996, *Symplectic Maps and Computation of Orbits in Particle Accelerators*, in *Integration Algorithms and Classical Mechanics*, Eds. Marsden, J.E., Patrick, G.W., Shadwick, W.F., Fields Institute Communications, vol. 10, American Mathematical Society (Providence, RI, 1996).
- [36] Dumas, H.S., Laskar, J. : 1993, *Global Dynamics and Long-Time Stability in Hamiltonian systems via Numerical Frequency Analysis*, Phys. Rev. Lett., vol. 70, pp. 2975–2979
- [37] *The ESRF Red Book*, Grenoble, Feb. 1987
- [38] Site internet de l'ESRF : <http://www.esrf.fr/>
- [39] Fartoukh, S. : 1997, *Méthodes d'analyse d'une ligne de focalisation finale dans le cadre du projet du collisionneur linéaire TESLA*, DAPNIA/SEA-97-02T, thèse CEA
- [40] Forest, E., Milutinović, J. : 1988, *Leading order hard edge fringed fields effect in $(\delta+1)$ and consistent with Maxwell's equations for rectilinear Magnets*, Nucl. Inst. Meth., vol. A269, pp. 474–482
- [41] Forest, E., Ruth, R.D. : 1990, *Fourth-order symplectic integration*, Physica D, vol. 43(1), pp. 105–117
- [42] Forest, E., Bengtsson, J., Reusch, M. : 1991, non publié
- [43] Forest, E., Hirata, K. : 1992, *A Contemporary Guide to Beam Dynamics*, Rapport KEK 92-12
- [44] Forest, E., Ohmi, K. : 1992, *Symplectic Integration for Complex Wigglers*, Rapport KEK 92-14
- [45] Forest, E., Reusch, M.F., Bruhwiler, D.L., Amiry, A. : 1994, *The Correct Local Description for Tracking in Rings*, Particle Accelerators, vol. 45, pp. 65–94
- [46] Forest, E. : 1998, *Beam Dynamics : a new Attitude and Framework*, Harwood Academic Publisher
- [47] Les routines de *The Full Polymorphic Package (FPP)* écrites en FORTRAN90 par Forest peuvent être obtenues à l'adresse internet : http://bc1.lbl.gov/CBP_pages/educational/TPSA_DA/Introduction.html. Un travail similaire a été fait par Michelotti en langage C++.
- [48] Ge, Z., Marsden, J.E. : 1988, *Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators*, Phys. Lett. A, vol. 133, pp. 134–139
- [49] Goldstein, H. : 1980, *Classical Mechanics*, 2nd Ed., Addison Wesley, Reading, MA
- [50] Grote, H., Iselin, F.C. : 1991, *the MAD Program, Version 8.1, User's Reference Manual*, CERN/SL/90-13
- [51] Guignard, G. : 1978, *A General Treatment of Resonances in Accelerators*, Rapport CERN 78-11
- [52] Hagedorn, R. : 1957, *Stability and amplitude ranges of two dimensional non-linear oscillations with periodical Hamiltonian*, Rapport CERN 57-1, Genève

- [53] Hénon, M., Heiles, C. : 1964, *The Applicability of the Third Integral of Motion : Some Numerical Experiments*, Astron. J., vol. 69, pp. 73–79
- [54] Hénon, M. : 1969, *Numerical Study of Quadratic Area-Preserving Mapping*, Quarterly of Applied Mathematics, vol. XXVII, N° 3, pp. 291–312
- [55] Ian C. HSU, 1990, *The Decoherence and Recoherence of The Betatron Oscillation Signal and an Application*, Particle Accelerators, vol. 34, pp. 43–52
- [56] Iselin, F.C. : 1985a, *The MAD program (Methodical Accelerator Design) : reference manual*, Rapport CERN-LEP-TH/85
- [57] Iselin, F.C. : 1985b, *Lie Transformations and Transport Equations for Combined Function Dipoles*, Particle Accelerators, vol. 17, pp. 143–155
- [58] Iselin, F.C. : 1994, *The Mad Program : Physical Methods Manual*, Version 8.13, CERN
- [59] Landau, L., Lifchitz, E. : 1982, *Mécanique*, Ed. Mir Moscou, quatrième édition
- [60] Landau, L., Lifchitz, E. : 1984, *Théorie des champs*, Ed. Mir Moscou, quatrième édition
- [61] Laskar, J. : 1988, *Secular evolution of the solar system over 10 million years*, Astronomy & Astrophysics, vol. 198, pp. 341–362
- [62] Laskar, J. : 1990, *The chaotic motion of the solar system. A numerical estimate of the size of the chaotic zones*, Icarus, vol. 88, pp. 266–291
- [63] Laskar, J., Froeschlé, C., Celletti, A. : 1992, *The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping*, Physica D, vol. 56, pp. 253–269
- [64] Laskar, J. : 1993, *Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion*, Physica D, vol. 67, pp. 257–281
- [65] Laskar, J., Robutel, P. : 1993a, *The chaotic obliquity of the planets*, Nature, vol. 361, pp. 608–612
- [66] Laskar, J., Robutel, P. : 1993b, *Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon*, Nature, vol. 361, pp. 615–617
- [67] Laskar, J. : 1994, *Frequency Map Analysis of an Hamiltonian System*, Workshop on Non-linear dynamics in particle accelerators, in AIP Conference Proceedings 344, Arcidosso, Italie, pp. 130–159
- [68] Laskar, J., Robin, D. : 1996, *Application of Frequency Map Analysis to the ALS*, Particle Accelerators, vol. 54, pp. 183–192
- [69] Laskar, J. : 1999, *Introduction to Frequency Map Analysis*, in Proceedings of 3DHAM95 NATO Advanced Institute, S'Agaro, June 1995, C. Simó Ed., pp. 134–150
- [70] Laskar, J., Robutel, P. : 2000, *High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems*, Celestial Mechanics, à paraître
- [71] Le Duff, J. : 1993, *Single and multiple Touschek Effects*, in Proceedings of the fifth Advanced Accelerator Physics Course, Rapport CERN 95-06, pp. 573–586
- [72] Lee, S.Y. : 1992, *Review of Nonlinear Beam Dynamics Experiments*, in Proceedings of Nonlinear Problems in Accelerator Physics Workshop, Institute of Physics Series Number 131, Berlin, pp. 249–265

- [73] Lee, S.Y. : 1998, *Accelerator Physics*, World Scientific
- [74] Level, M.P., Nghiem, P. : 1986, *Analyse des résultats des mesures magnétiques sur les dipôles de Super-ACO*, Rapport interne Super-ACO/86-24
- [75] Site internet de LURE : <http://www.lure.u-psud.fr/>
- [76] Meller, R.E., Chao, A.W., Peterson, J.M., Peggs, S.G., Furman, M. : 1987, *Decoherence of Kicked Beams*, Rapport SSC-N-360
- [77] Morbidelli, A., Giorgilli, A. : 1995, *Superexponential Stability of KAM Tori*, J. Stat. Phys., vol. 78, pp. 1607–1617
- [78] Nadji, A. : 1992, *Sensibilité de la Maille de SOLEIL aux Défauts aléatoires*, Note SOLEIL/A/92-18, Orsay
- [79] Nadji, A., Flynn, G., Laclare, J.L., Level, M.P., Nghiem, P., Payet, J. : 1997, *Energy Acceptance and Touschek Lifetime Calculations for the SOLEIL Project*, in Proceedings of the PAC97 Conference, Vancouver, Canada
- [80] Nadolski, L. : 1998, *Préétude de la dynamique des faisceaux de l'anneau de stockage SOLEIL avec l'Analyse en Fréquence*, CNRS/CEA, Rapport SOLEIL CRStage/ProgrammeSources/77.98/LN
- [81] Neri, F. : 1987, *Lie algebras and canonical integration*, Dept. of Phys., Université de Maryland
- [82] Nghiem, P. : 1989, *Vers un affinement du modèle de Super-ACO*, Super-ACO/89-15, LURE
- [83] Nghiem, P., Brunelle, P., Laclare, J.L., Level, M.P., Nadji, A., Payet, J., Sommer, M., Tkatchenko, A. : 1997, *Optics for SOLEIL at 2.5 GeV*, PAC97, Vancouver, Canada
- [84] Nishimura, H., Robin, D. : 1999, *Impact of Superbends at the ALS*, in Proceedings of the PAC99 Conference, New York, pp. 203–205
- [85] Oide, K. ; le code de tracking SAD est développé au KEK. A ma connaissance, les seules et rares informations existantes sont accessibles en anglais et principalement en japonais sur le site internet de SAD : <http://acc-physics.kek.jp/SAD/sad.html>
- [86] Papaphilippou, Y., Laskar, J. : 1996, *Frequency map analysis and global dynamics in a galactic potential with two degrees of freedom*, Astronomy & Astrophysics, vol. 307, pp. 427–449
- [87] Papaphilippou, Y., Laskar, J. : 1998, *Global dynamics of triaxial galactic models through frequency map analysis*, Astronomy & Astrophysics, vol. 329, pp. 451–481
- [88] Papaphilippou, Y., Schmidt, F. : 1998, *Normal Form Approaches and Resonance Analysis of LHC Models*, in Proceedings of the 16th ICFA Beam Dynamics Workshop on Nonlinear and Collective Phenomena Conference, Arcidosso, Italie
- [89] Papaphilippou, Y. : 1999, *Frequency maps of LHC models*, in Proceedings of the PAC99 Conference, New York, pp. 1554–1556
- [90] Papaphilippou, Y. : 2000, *Correction schemes for the normal octupole and decapole errors in the LHC dipoles*, in Proceedings of the EPAC2000 Conference, Vienne, Autriche, pp. 1063–1065

- [91] Papaphilippou, Y., Abell, D.T. : 2000, *Beam Dynamics Analysis and Correction of Magnet Field Imperfections in the SNS Accumulator Ring*, in Proceedings of the EPAC2000 Conference, Vienne, Autriche, pp. 1453–1456
- [92] Papaphilippou, Y., Wei, J., Talman, R. : 2001, *Deflections in magnet fringe fields*, soumis à Phys. Rev. E
- [93] Payet, J., Loulergue, A. : 1999, *BETA-LNS V5.0 User's Guide*, CEA–Saclay
- [94] Peggs, S.G., Talman, R.M. : 1987, *Nonlinear Problems in Accelerator Physics*, Rapport SSC-61
- [95] Pöschel, J. : 1982, *Integrability of Hamiltonian System on Cantor Sets*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXXV, pp. 653–695
- [96] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. : 1992, *Numerical Recipes — The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press
- [97] Robin, D., Portmann, G., Nishimura, H., Safranek, J. : 1996, *Model Calibration and Symmetry Restoration of the Advanced Light Source*, in Proceedings of the EPAC96 Conference, Sitges
- [98] Robin, D., Safranek J., Decking, W., Nishimura, H. : 1998, *Global Beta-Beating Compensation of the ALS W16 Wiggler*, in Proceedings of the PAC97 Conference, Vancouver, Canada, pp. 799–801
- [99] Robin, D., Safranek J., Decking, W. : 1999, *Realizing the benefits of restored periodicity in the Advanced Light Source*, Phys. Rev. ST Accel. Beams 2, 044001
- [100] Robin, D., Steier, C., Laskar, J., Nadolski, L. : 2000, *Global Dynamics of the Advanced Light Source Revealed through Experimental Frequency Map Analysis*, Phys. Rev. Let., vol. 85, Issue 3, pp. 558-561
- [101] Ruth, R. : 1983, *A canonical Integration Technique*, IEEE Trans. Nucl. Sci., Ns-30, pp. 2669–2671
- [102] Ruth, R. : 1985, *Single Particle Dynamics and Nonlinear Resonances in Circular Accelerators*, in Proceedings of the US/CERN Accelerator School, Rapport 1985 :0037, pp. 37–63
- [103] Safranek, J. : 1997, *Experimental Determination of Storage Ring Optics Using Orbit Response Measurements*, Nucl. Intr. and Meth., vol. A388, pp. 27–36
- [104] Safranek, J., Kramer, S.L. : 1997, *Experimental Calibration of VUV Ring Optics*, in Proceedings of the PAC97 Conference, Vancouver, Canada, pp. 448–450
- [105] Sands, M. : 1970, *The Physics of Electron Storage Rings. An Introduction*, Rapport SLAC-121
- [106] Sanz-Serna, J., M. : 1988, *Runge-Kutta schemes for Hamiltonian systems*, BIT, vol. 28, pp. 877-883
- [107] Schachinger, L., Talman, R. : 1987, *TEAPOT : A Thin-Element Accelerator Program for Optics and Tracking*, Part. Accel., vol. 22, pp. 35–56
- [108] Schoch, A. : 1958, *Theory of linear and non-linear perturbations of betatron oscillations in alternating gradient synchrotrons*, Rapport CERN 57-21, Genève

- [109] Shi J., Ohnuma, S. : 1993, *Decoherence and Recoherence of Beam in Phase Space*, Proceeding de PAC93, pp. 3603–3605
- [110] SOLEIL : *Rapport d'Avant Projet Détaillé*, CEA-CNRS, 1999. Rapport accessible sur le site internet de SOLEIL : <http://www.soleil.u-psud.fr/>
- [111] Sommer, E.M., Brunelle, P., Level, M.P., Marin, P.C., Nadji, A., Zyngier, H : 1992, *Operation of Super-ACO with Multiple Insertions*, in Proceedings of the 2nd International Conference on Synchrotron Radiation Sources, Indore, Inde
- [112] Steffen, K. : 1985, *Basic course on accelerator optics*, in Rapport CERN 85-19, p. 25 sqq.
- [113] Steier, C. : 2000, *Fully coupled analysis of orbit response matrices at the ALS*, in Proceedings of the EPAC2000 Conference, Vienne, Autriche, pp. 1080–1082
- [114] Steier, C., Robin, D., Laskar, J., Nadolski, L. : 2000, *Lattice Model Calibration and Frequency Map Measurements at the ALS*, in Proceedings of the EPAC2000 Conference, Vienne, Autriche, pp. 1077–1079
- [115] Steier, C., Robin, D., Wu, Y., Decking, W., Laskar, J., Nadolski, L. : 2001, *Understanding the Dynamic Momentum aperture of the Advanced Light Source*, preprint in Proceedings of the PAC2001 Conference, Chicago
- [116] Suzuki, M. : 1991, *General theory of fractal path integrals with applications to many-body theories and statistical physics*, J. Math. Phys., vol. 32, N° 2, pp. 400–407
- [117] Tabor, M. : 1988, *Chaos and Integrability in nonlinear Dynamics : an Introduction*, Wiley-Interscience
- [118] Terebilo, A., Pellegrini, C., Cornacchia, M., Corbett, J., Martin, D. : 1998, *Experimental Non Linear Beam Dynamics Studies at SPEAR*, in Proceedings of the PAC97 Conference, Vancouver, Canada, pp. 1457–1459
- [119] Todesco, E., Gemmi, M., Giovannozzi, M. : 1997 *NERO : a code for the Nonlinear Evaluation of Resonances in One-turn Mappings*, Comp. Phys. Commun., vol. 106, pp. 169–180
- [120] Todesco, E. : 1999, *Overview of single-particle nonlinear dynamics*, in Proceedings of Nonlinear and Collective Phenomena in Beam Physics — 1998 Workshop, Eds. Chattopadhyay, S., Cornacchia, M., Pellegrini, C., pp. 157–172
- [121] Yoshida, H. : 1990a, *Conserved Quantities of Symplectic Integrators for Hamiltonian Systems*, Preprint
- [122] Yoshida, H. : 1990b, *Construction of high order symplectic integrators*, Phys. Let. A, vol. 150, N° 5-7, pp. 262-268
- [123] Yoshida, H. : 1993, *Recent progress in the theory and application of symplectic integrators*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, vol. 56, pp. 27–43
- [124] Wiedemann, H. : 1993 et 1995, *Particle Accelerator Physics I and II*, Springer-Verlag
- [125] Zimmermann, F. : 2000, *Tune Shift with Amplitude induced by Quadrupole Fringe Fields*, CERN-SL-2000-009 AP, Neutrino factory, Note 18

Annexe A

Compléments sur les intégrateurs

Introduction

Dans cette annexe, nous présentons des calculs et résultats complémentaires au chapitre 2 sur les intégrateurs symplectiques. Les applications de transfert des éléments principaux d'un accélérateur sont présentées pour d'autres approximations. Les équations du mouvement de la section droite sont nonlinéaires du fait du caractère relativiste des particules ; elles peuvent être intégrées sans aucune approximation en coordonnées rectangulaires (section A.1) ou curvilignes (section A.3). Les équations du mouvement pour un élément dipolaire sont intégrées en conservant la racine carrée du terme cinématique en coordonnées curvilignes (section A.2.1) ou rectangulaires (section A.2.2), l'expression de l'application de transfert des coins dipolaires en est ensuite déduite (section A.2.3). L'application de transfert du dipôle est présentée (section A.2.4), celle du dipôle simple avec le terme *des petites machines* (section A.2.6). Enfin, nous présentons la modélisation symplectique du déplacement ou de la rotation d'un élément magnétique (section A.3). Ces résultats sont pour la plupart issus des travaux de A.J. Dragt et E. Forest.

A.1 Intégration exacte d'une section droite

La section droite de longueur L peut être intégrée sans aucune approximation en coordonnées rectangulaires ou curvilignes. Ces résultats permettront de pouvoir de vérifier la validité des approximations réalisées, *i.e.* le développement Taylor usuel de la racine carrée.

Hamiltonien : Son expression est rappelée en coordonnées rectangulaires (cf. Eq. 1.35 p. 13 avec $\hat{A}_s = 0$ et $h = 0$) :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = -\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} \quad (\text{A.1})$$

avec pour équations du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}}, & \frac{dp_x}{ds} = 0 \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}}, & \frac{dp_y}{ds} = 0 \\ \frac{dl}{ds} = -\frac{1+\delta}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}}, & \frac{d\delta}{ds} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Intégration des équations : Les variables (x, y, l) sont encore cycliques, et l'on obtient :

$$\begin{cases} x^f = x^i + \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} s, & p_x^f = p_x^i \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} s, & p_y^f = p_y^i \\ l^f = l^i - \frac{1+\delta}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} s, & \delta^f = \delta \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

avec $s = L$ la longueur de la section droite.

A.2 Intégration d'un dipôle

A.2.1 Aimant secteur exact

J'ai annoncé page 41, que le dipôle est complètement intégrable. Le but de section est de le montrer. Les équations sont toujours exprimées en fonctions des variables canoniques $(x, p_x, y, p_y, \delta, l)$.

Description et Hamiltonien : Pour la présente annexe, le dipôle est décrit en introduisant le coefficient b_1 qui dans la majorité des cas est égal à la courbure h (Forest *et al.*, 1994). Cette expression est néanmoins utile pour déduire l'expression d'une rotation en géométrie curviligne (cf. *infra*). Le Hamiltonien retenu est celui établi page 13 avec le potentiel vecteur donné par la formule 1.51 :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = -(1 + hx) \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} + b_1 x + b_1 h \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.4})$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{dx}{ds} = p_x \frac{1 + hx}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} \quad (\text{A.5a})$$

$$\frac{dy}{ds} = p_y \frac{1 + hx}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} \quad (\text{A.5b})$$

$$\frac{dl}{ds} = -(1 + \delta) \frac{1 + hx}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} \quad (\text{A.5c})$$

$$\frac{dp_x}{ds} = h\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} - b_1(1 + hx) \quad (\text{A.5d})$$

$$\frac{dp_y}{ds} = 0 \quad (\text{A.5e})$$

$$\frac{d\delta}{ds} = 0 \quad (\text{A.5f})$$

Hypothèse de calcul : La seule hypothèse est l'approximation *hard-edge*. Le Hamiltonien A.4 est complètement intégrable.

Intégration exacte : Les variables y et l sont cycliques, donc leurs moments conjugués respectifs sont constants :

$$\boxed{p_y^f = p_y^i} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta^f = \delta^i = \delta} \quad (\text{A.6})$$

L'intégration des autres variables se fait par étapes successives. On commence par l'équation différentielle de $y(s)$ en utilisant les expressions (Eq. A.5d) puis (Eq. A.5b) :

$$\begin{aligned} dp_x &= h\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2} ds - b_1(1 + hx) ds \\ &= \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2} \left(hds - \frac{b_1}{p_y^i} dy \right) \\ y^f &= y^i + \frac{p_y^i}{b_1} \int \frac{dp_x}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2}} + \frac{p_y^i}{b_1} \int hds \\ &= y^i + \frac{p_y^i}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] + \frac{p_y^i h}{b_1} s \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

en utilisant la primitive usuelle :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \arcsin \frac{t}{|a|} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

On déduit alors la solution pour $l(s)$ en comparant les équations A.5b et A.5c :

$$l^f = l^i + \frac{(1 + \delta)}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] + \frac{(1 + \delta)h}{b_1} s \quad (\text{A.8})$$

L'équation différentielle A.5d pour $p_x(s)$ s'intègre en se servant des expressions A.5a et A.5c :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_x}{ds^2} &= -h p_x \frac{dp_x}{ds} \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2}} - b_1 h \frac{dx}{ds} \\ &= -h \frac{p_x}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2}} \left[h \sqrt{(1 + \delta)^2 + p_x^2 - (p_y^i)^2} - b_1(1 + hx) \right] \\ &\quad + b_1 h p_x \frac{1 + hx}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2}} \end{aligned}$$

soit après simplification :

$$\frac{d^2 p_x}{ds^2} = -h^2 p_x^2 \Rightarrow p_x = a \cos(hs) + b \sin(hs)$$

où les constantes a et b sont déterminées en fonction des conditions initiales, soit :

$$p_x^f = p_x^i \cos(hs) + \left(\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x^i)^2 - (p_y^i)^2} - b_1(h^{-1} + x^i) \right) \sin(hs) \quad (\text{A.9})$$

L'intégration de la dernière équation ($x(s)$) est alors immédiate :

$$\begin{aligned} \frac{dp_x^f}{ds} &= h \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2} - b_1(h^{-1} + x^f) \\ x^f &= \frac{1}{hb_1} \left(h \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2} - \frac{dp_x^f}{ds} - b_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.2.2 Aimant dipolaire en coordonnées rectangulaires

Hamiltonien et description : Il est également possible d'exprimer l'application de transfert en géométrie cartésienne. Le Hamiltonien est alors le même que celui en géométrie curviligne (cf. Eq. A.4) avec $h \rightarrow 0$:

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = -\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} + b_1 x \quad (\text{A.11})$$

Hypothèse de calcul : La seule hypothèse est l'approximation *hard-edge*. Le Hamiltonien A.11 est complètement intégrable.

Intégration des équations : L'expression des solutions s'obtient à partir des celles de l'aimant secteur (Eq. A.6 à A.10) en prenant la limite $h \rightarrow 0$ (Forest, 1994) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^f = x^i + \frac{1}{b_1} \left(\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2} - \sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^i)^2 - (p_y^i)^2} \right) \\ p_x^f = p_x^i - b_1 s \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] \\ p_y^f = p_y^i \\ l^f = l^i + \frac{(1+\delta)}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] \\ \delta^f = \delta \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

avec $s = L$ et généralement $b_1 = h$.

A.2.3 Coin dipolaire

Description : Les applications de transfert du dipôle exprimées en géométrie curviligne, notée \mathcal{D}_{curv} et en géométrie cartésienne, notée \mathcal{D}_{cart} , sont reliées entre elles par l'ajout de l'application de chaque coin du dipôle notée $\mathcal{C} \left(\frac{\theta}{2} \right)$ (cf. Fig. 2.2 p. 43) :

$$\mathcal{D}_{curv} = \mathcal{C} \left(\frac{\theta}{2} \right) \mathcal{D}_{cart} \mathcal{C} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.13})$$

Application de transfert : En fait, l'application de transfert d'un coin dipolaire est juste le cas limite de celle d'un dipôle secteur en géométrie curviligne (Forest, 1998, p. 368) : $h \rightarrow +\infty$, $s \rightarrow 0$ et $sh = \theta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^f = x^i \cos \theta + \frac{1}{b_1} \left(\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2} + p_x^i \sin \theta - \sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^i)^2 - (p_y^i)^2} \cos \theta \right) \\ p_x^f = p_x^i \cos \theta + \left(\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^i)^2 - (p_y^i)^2} - b_1 x^i \right) \sin \theta \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] + \frac{p_y^i}{b_1} \theta \\ p_y^f = p_y^i \\ l^f = l^i + \frac{(1+\delta)}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] + \frac{(1+\delta)}{b_1} \theta \\ \delta^f = \delta \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

A.2.4 Dipôle combiné sans terme petite machine

Description et Hamiltonien : Dans cette partie, nous considérons un dipôle combiné de gradient quadripolaire b_2 , de courbure h et de longueur L . Son Hamiltonien développé à

l'ordre deux en les impulsions est (cf. Eq. 2.41) :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - h\delta x + (b_2 + h^2)\frac{x^2}{2} - b_2 y^2 \quad (\text{A.15})$$

Les équations du mouvement (l est cyclique) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{1+\delta}, & \frac{dp_x}{ds} = h\delta - (b_2 + h^2)x \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{1+\delta}, & \frac{dp_y}{ds} = b_2 y \\ \frac{dl}{ds} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)^2} + hx, & \frac{d\delta}{ds} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Hypothèses de calcul : Les approximations (a) des grandes machines, (b) des petits angles et (c) *hard-edge* ont été faites pour établir l'expression A.15 qui est complètement intégrable.

Application de transfert : Si l'on ne considère que les équations horizontales, on obtient une équation différentielle du second ordre de type oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{1 + \delta} \frac{dp_x}{ds} = \frac{\delta h}{1 + \delta} - \frac{b_2 + h^2}{1 + \delta} x$$

alors :

$$x^f = \begin{cases} \cos(\omega_x^+ s) \left(x^i - \frac{\delta h}{b_2 + h^2}\right) + (\omega_x^+)^{-1} y^i \sin(\omega_x^+ s) \frac{p_x^i}{1 + \delta} + \frac{\delta h}{b_2 + h^2} & \text{si } (b_2 + h^2) \geq 0 \\ \cosh(\omega_x^- s) \left(x^i - \frac{\delta h}{b_2 + h^2}\right) + (\omega_x^-)^{-1} y^i \sinh(\omega_x^- s) \frac{p_x^i}{1 + \delta} + \frac{\delta h}{b_2 + h^2} & \text{si } (b_2 + h^2) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{avec } \omega_x^+ = \sqrt{\frac{b_2 + h^2}{1 + \delta}} \text{ et } \omega_x^- = \sqrt{-\frac{b_2 + h^2}{1 + \delta}}$$

$$p_x^f = \begin{cases} -(1 + \delta) \omega_x^+ \sin(\omega_x^+ s) \left(x^i - \frac{\delta h}{b_2 + h^2}\right) + \cos(\omega_x^+ s) p_x^i & \text{si } (b_2 + h^2) \geq 0 \\ (1 + \delta) \omega_x^- \sinh(\omega_x^- s) \left(x^i - \frac{\delta h}{b_2 + h^2}\right) + \cosh(\omega_x^- s) p_x^i & \text{si } (b_2 + h^2) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Les équations verticales donne l'équation différentielle d'un oscillateur :

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{1 + \delta} \frac{dp_y}{ds} = \frac{b_2}{1 + \delta} y$$

alors :

$$y^f = \begin{cases} \cos(\omega_y^+ s) y^i + (\omega_y^+)^{-1} \sin(\omega_y^+ s) \frac{p_y^i}{1 + \delta} & \text{avec } \omega_y^+ = \sqrt{\frac{-b_2}{1 + \delta}} \text{ si } b_2 < 0 \\ \cosh(\omega_y^- s) y^i + (\omega_y^-)^{-1} \sinh(\omega_y^- s) \frac{p_y^i}{1 + \delta} & \text{avec } \omega_y^- = \sqrt{\frac{b_2}{1 + \delta}} \text{ si } b_2 > 0 \\ y^i + \frac{p_y^i}{1 + \delta} s & \text{si } b_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

et :

$$p_y^f = \begin{cases} -(1 + \delta) \omega_y \sin(\omega_y s) y^i + \cos(\omega_y s) p_y^i & \text{si } b_2 < 0 \\ (1 + \delta) \omega_y \sinh(\omega_y s) y^i + \cosh(\omega_y s) p_y^i & \text{si } b_2 > 0 \\ p_y^i & \text{si } b_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

J'attire l'attention du lecteur sur le fait que ces équations nécessitent une programmation plus complexe que pour l'utilisation d'un schéma symplectique. Le temps de calcul est pénalisé par les branchements correspondant aux différents cas.

A.2.5 Dipôle droit en coordonnées rectangulaires

Hamiltonien : son expression est obtenue en posant $h = 0$ dans le Hamiltonien 1.36 :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + b_1 x - hx(1 + \delta) \quad (\text{A.21})$$

avec b_1 la force dipolaire.

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{1+\delta} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{1+\delta} \\ \frac{dl}{ds} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)^2} + hx \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{ds} = -(b_1 - h(1 + \delta)) \\ \frac{dp_y}{ds} = 0 \\ \frac{d\delta}{ds} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Hypothèses de calcul : Les approximations (a) des grandes machines, (b) des petits angles et (c) *hard-edge* ont été faites pour établir l'expression A.22 qui est complètement intégrable.

Application de transfert : L'intégration des équations du mouvement est immédiate :

$$\begin{cases} x^f = x^i + \frac{p_x^i}{1+\delta} s - \frac{1}{2} \left(\frac{b_1}{1+\delta} - h \right) s^2 \\ p_x^f = p_x^i - (b_1 - h(1 + \delta))s \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{1+\delta} s \\ p_y^f = p_y^i \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

A.2.6 Dipôle avec terme petite machine

Description et Hamiltonien : Pour les machines à faible rayon de courbure comme Super-ACO, le terme hexapolaire $hx \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)}$ dit *des petites machines* ne peut plus être négligé. En particulier, il doit être pris en compte pour les calculs de chromaticité. Le Hamiltonien d'un dipôle simple est obtenu à partir des équations 1.36 et 1.51 :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \underbrace{(1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)}}_{A(x, p_x, p_y, \delta)} - \underbrace{h\delta x + h^2 \frac{x^2}{2}}_{B(x)}$$

Je vais maintenant présenter un schéma d'intégration symplectique avec correcteur.

Hypothèses de calcul : (a) l'approximation des petits angles et (b) *hard-edge* sont réalisées pour établir cet Hamiltonien.

A.2.6.1 Intégration de A

Les équations du mouvement se réduisent à (y et δ sont cycliques) :

$$\frac{dx}{ds} = (1 + hx) \frac{p_x}{1 + \delta} \qquad \frac{dp_x}{ds} = -h \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + h\delta \qquad (\text{A.24a})$$

$$\frac{dy}{ds} = (1 + hx) \frac{p_y}{1 + \delta} \qquad \frac{dp_y}{ds} = 0 \qquad (\text{A.24b})$$

$$\frac{dl}{ds} = -(1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)^2} - hx \qquad \frac{d\delta}{ds} = 0 \qquad (\text{A.24c})$$

On a immédiatement $p_y^f = p_y^i$, puis pour p_x (Eq. A.24a) :

$$\frac{dp_x}{ds} = -h \frac{p_x^2 + a^2}{2(1 + \delta)} \quad \text{avec} \quad a^2 = (p_y^i)^2 - 2(1 + \delta)\delta > 0$$

$$\int \frac{dp_x}{p_x^2 + a^2} = \int -\frac{h}{2(1 + \delta)} ds$$

en utilisant la primitive usuelle :

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

on a alors :

$$\arctan \frac{p_x^f}{a} = \arctan \frac{p_x^i}{a} - \frac{ah}{2(1 + \delta)} s$$

en utilisant :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

on obtient :

$$\boxed{p_x^f = a \left[\frac{p_x^i - a \tan \theta}{a + p_x^i \tan \theta} \right]} \qquad (\text{A.25})$$

avec $\theta = \frac{ah}{2(1 + \delta)} s$ et $a^2 = (p_y^i)^2 - 2(1 + \delta)\delta > 0$.

L'équation A.24a pour x peut être maintenant intégrée :

$$\int \frac{dx}{1 + hx} = \int \frac{p_x}{1 + \delta} ds$$

$$\frac{1}{h} \ln |1 + hx| = \frac{a}{A + \delta} \int \tan(C - \theta) ds \quad \text{avec} \quad \tan C = \frac{p_x^i}{a}$$

$$\ln |1 + hx| = 2 \ln |\cos(C - \theta)| + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

Après passage à l'exponentielle, en développant le cosinus et en utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$(1 + hx^f) = (1 + hx^i) \left(\cos \theta + \frac{p_x^i}{a} \sin \theta \right)^2 \quad (\text{A.26})$$

La dernière équation s'intègre alors immédiatement :

$$y^f = y^i + \left(1 + \left(\frac{p_x^i}{a} \right)^2 \right) (h^{-1} + x^i) \left[\theta - \sin \theta \cos \left(\theta - 2 \arctan \frac{p_x^i}{a} \right) \right] \quad (\text{A.27})$$

Dans le cas $a^2 < 0$, les équations A.25 à A.27 deviennent :

$$|1 + hx^f| = \begin{cases} |1 + hx^i| \frac{C^+}{(1+C^+)^2} \frac{(u^++1)^2}{u^+} & \text{si } p_x \in] -|a|, |a|[\\ |1 + hx^i| \frac{C^-}{(1-C^-)^2} \frac{(u^- - 1)^2}{u^-} & \text{si } p_x \notin] -|a|, |a|[\end{cases} \quad (\text{A.28})$$

$$p_x^f = \begin{cases} a \frac{u^+ - 1}{1 + u^+} & \text{si } p_x \in] -|a|, |a|[\\ a \frac{1 + u^-}{u^- - 1} & \text{si } p_x \notin] -|a|, |a|[\end{cases} \quad (\text{A.29})$$

$$y^f = \begin{cases} y^i + \frac{p_x^i}{ah} |1 + hx^i| \frac{C^+}{(1+C^+)^2} \left[u^+ - C^+ - \frac{1}{u^+} + \frac{1}{C^+} + 2 \ln \left| \frac{u^+}{C^+} \right| \right] & \text{si } p_x \in] -|a|, |a|[\\ y^i + \frac{p_x^i}{ah} |1 + hx^i| \frac{C^-}{(1-C^-)^2} \left[u^- - C^- - \frac{1}{u^-} + \frac{1}{C^-} - 2 \ln \left| \frac{u^-}{C^-} \right| \right] & \text{si } p_x \notin] -|a|, |a|[\end{cases} \quad (\text{A.30})$$

avec $C^\pm = \pm \frac{p_x^i + a}{a - p_x^i}$, $a^2 = -((p_y^i)^2 - 2(1 + \delta)\delta)$, $\theta = \frac{ah}{2(1+\delta)}s$ et $u^\pm = C^\pm e^{2\theta s}$.

A.2.6.2 Intégration de B

Il n'y a qu'une seule équation à intégrer, car toutes les autres variables canoniques sont des constantes du mouvement :

$$\frac{dp_x}{ds} = -b_1 x^2 \quad \Rightarrow \quad p_x^f = p_x^i - hx^2 s \quad (\text{A.31})$$

A.2.6.3 Calcul du correcteur

Le calcul du correcteur est relativement aisé, il s'exprime par :

$$\{ \{A, B\}, B \} = h^4 \frac{1 + hx}{1 + \delta} x^2 \quad (\text{A.32})$$

On obtient alors l'application recherchée :

$$e^{sL_{\{ \{A, B\}, B \}}} : \begin{cases} x^f & = x^i \\ y^f & = y^i \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f & = p_x^i - h^4 \frac{2+3hx^i}{1+\delta} x^i s \\ p_y^f & = p_y^i \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

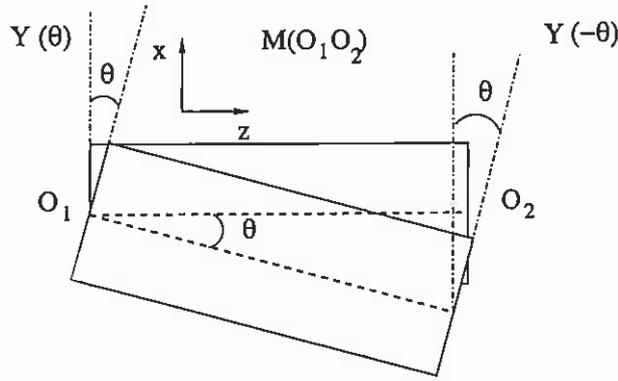


FIG. A.1: Schéma illustrant la rotation d'un angle θ d'un élément rectiligne — inspiré de Forest, 1998 —

A.3 Déplacements et rotations d'un élément

Un élément magnétique peut dévier de son emplacement théorique en position $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ et en moments $(\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_s)$. En suivant l'approche développée par Forest et Hirata (1992), ces défauts peuvent se modéliser de manière extrêmement simple.

Par exemple, le schéma A.1 illustre la rotation d'un angle θ d'un élément dans le plan x-z. L'application de transfert de l'élément tourné, notée \mathcal{M}_{R_y} , est obtenue comme la composition de trois applications de base¹ (Forest, 1998, chapitre 10) :

$$\mathcal{M}_{R_y} = \mathcal{Y}(\theta)\mathcal{M}\mathcal{Y}(-\theta) \quad (\text{A.34})$$

où \mathcal{M} est l'application de transfert de l'élément et $\mathcal{Y}(\theta)$ l'application décrivant une rotation d'axe y et d'angle θ .

L'application $\mathcal{Y}(\theta)$ peut être considérée comme une rotation de générateur xp_z , soit (*op. cit.*) :

$$\mathcal{Y}(\theta) = \exp(\theta L_{xp_z}) \quad (\text{A.35})$$

avec $p_z = \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}$ et L la dérivée de Lie.

L'évaluation de l'opérateur A.35 est obtenue en posant $b_1 = 0$ dans le cas du dipôle exact en géométrie curviligne (Eq. A.6 à A.10), dit différemment elle correspond à l'application de transfert d'une section droite exprimée en géométrie curviligne. Cette application a été introduite la première fois par Dragt (1982) :

$$\begin{cases} x^f = \frac{x^i}{\cos \theta \left(1 - \frac{p_x^i \tan \theta}{p_z}\right)}, & p_x^f = p_x^i \cos \theta + p_z \sin \theta \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i x^i \tan \theta}{p_z \left(1 - \frac{p_x^i \tan \theta}{p_z}\right)}, & p_y^f = p_y^i \\ l^f = l^i + \frac{(1 + \delta)x^i \tan \theta}{p_z \left(1 - \frac{p_x^i \tan \theta}{p_z}\right)}, & \delta^f = \delta \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

¹Mathématiquement, on fait un changement de bases.

avec $p_z = \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2}$. On remarquera que les applications A.36 et A.14 sont identiques.

Une rotation d'axe x serait modélisée par l'opérateur $\mathcal{X}(\theta) = \exp(\theta L_{yp_z})$. L'application résultante est la même que celle obtenue pour $\mathcal{Y}(\theta)$ en inversant les rôles de x et y , et de p_x et p_y dans les formules A.36. Enfin, une rotation d'axe z a pour générateur $xp_y - yp_x$, donc $\mathcal{Z}(\theta) = \exp(\theta L_{xp_y - yp_x})$.

De manière similaire pour un défaut d'alignement horizontal d , l'application de transfert \mathcal{M}_{T_y} d'un élément sera modélisée par la composition de trois applications comme (Forest, 1998, chapitre 10) :

$$\mathcal{M}_{T_y} = \mathcal{T}_x(d) \mathcal{M} \mathcal{T}_x(-d) \quad (\text{A.37})$$

avec $\mathcal{T}_x(d_x)$ l'opérateur de translation dont le générateur est p_x :

$$\mathcal{T}_x(d) = \exp(dL_{p_x}), \quad (\text{A.38})$$

et \mathcal{M} est l'application de transfert de l'élément parfait.

Les translations verticale et longitudinale ont pour générateurs respectivement p_y et p_z , soit :

$$\mathcal{T}_y(d) = \exp(dL_{p_y}), \quad (\text{A.39})$$

$$\mathcal{T}_z(d) = \exp(dL_{p_z}), \quad (\text{A.40})$$

Annexe B

Figures en couleur

Introduction

Dans cette annexe, nous présentons les cartes en fréquence et ouvertures dynamiques des quatre machines étudiées : SOLEIL (section B.1), Super-ACO (section B.2), l'ESRF (section B.3) et l'ALS (section B.4). Ce sont les mêmes figures que celles en noir et blanc déjà présentées dans le corps de ce mémoire. La diffusion est ici codée suivant une échelle logarithmique de couleur allant du bleu pour une diffusion quasi nulle au rouge pour une diffusion élevée.

Nous rappelons l'expression de l'indice de diffusion utilisé, noté D :

$$D = \log_{10} \left(\sqrt{(\nu_x^{(2)} - \nu_x^{(1)})^2 + (\nu_y^{(2)} - \nu_y^{(1)})^2} \right)$$

où $\nu_x^{(1)}$ et $\nu_y^{(1)}$ sont les nombres d'ondes calculés sur les N premiers tours de machine et $\nu_x^{(2)}$ et $\nu_y^{(2)}$ ceux calculés pour les N tours suivants.

- Pour une orbite régulière, la diffusion sera quasi-nulle (couleur bleu);
- Au voisinage d'une résonance, la diffusion est plus élevée. La particule a tendance à osciller transversalement (couleur jaune-orange);
- Pour une orbite nonlinéaire voire chaotique, la diffusion est élevée (couleur rouge). Si l'intégration était plus longue, la particule serait perdue rapidement.

Le codage de la diffusion en couleur va faciliter la localisation des résonances dans l'ouverture dynamique : en particulier les régions hyperboliques où la diffusion est élevée vont être mises en exergue.

B.1 Le projet SOLEIL

Nous présentons les cartes en fréquence et ouvertures dynamiques pour l'optique faible émittance numéro 1 (Fig. B.1) et l'optique faible émittance numéro 1 modifiée (Fig. B.2). Le point de fonctionnement est $(\nu_x, \nu_y) = (18.28, 8.38)$, les chromaticités naturelles sont parfaitement compensées.

Pour le premier cas, la dynamique est marquée par la résonance d'ordre 7, $5\nu_x + 2\nu_y - 4 \times 27 = 0$, qui est atteinte pour $x = 24$ mm (cf. Fig. B.1). A faible amplitude, la diffusion est faible (vert), le mouvement est quasipériodique et régulier. A grande amplitude, la dynamique est perturbée par le nœud avec la résonance $9\nu_x - 4 \times 41 = 0$: les largeurs de résonances se superposent, le mouvement est chaotique avec une diffusion élevée (orange-rouge).

Le second cas a été optimisé de manière à éviter les résonances précédentes. A ces fins, les forces des hexapôles ont été modifiées : l'objectif est atteint (cf. Fig. B.2). La carte en fréquence est en contrepartie repliée sur elle-même, les dimensions de l'ouverture dynamique sont similaires au réglage précédent avec une diffusion plus faible.

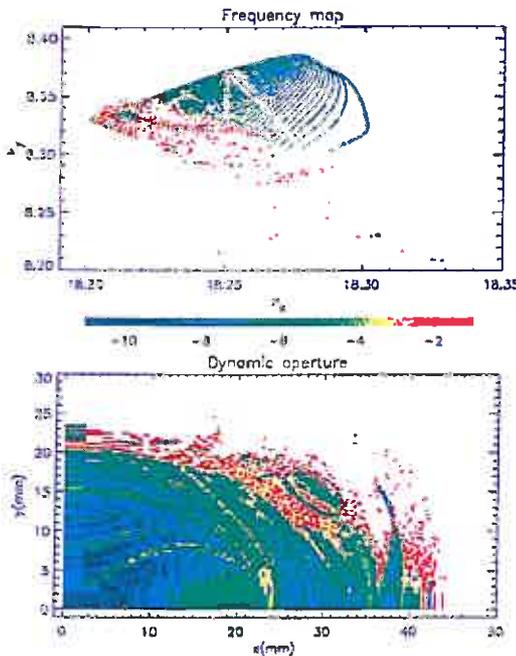


FIG. B.1: Carte en fréquence (haut) et ouverture dynamique (bas) de l'optique faible émittance numéro 1 de SOLEIL ($\beta_x = 10$ m et $\beta_y = 8$ m). L'ouverture dynamique est grande. Elle est marquée par les résonances; en particulier, la protubérance observée vers $x = 38$ mm correspond à la résonance d'ordre 9. La diffusion est faible au voisinage du point de fonctionnement (vert), plus importante au voisinage des résonances et élevée sur le bord de l'ouverture dynamique (rouge).

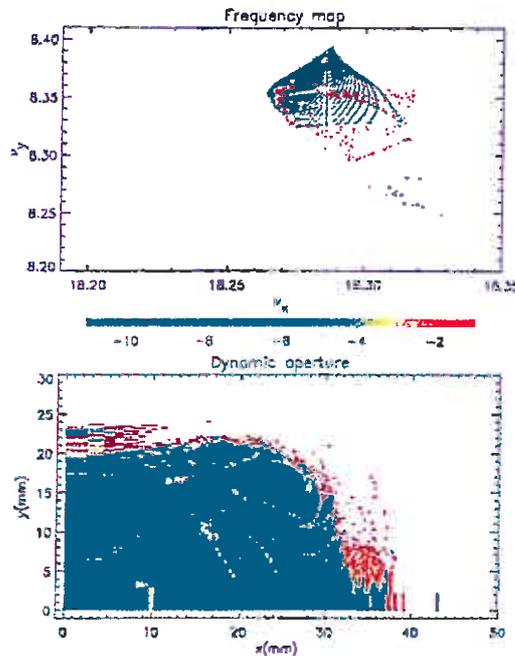


FIG. B.2: Carte en fréquence et ouverture dynamique pour une surface de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 10$ m et $\beta_y = 8$ m) pour l'optique 1 modifiée de SOLEIL. L'ouverture dynamique est presque aussi grande que pour la première optique; la carte en fréquence est repliée sur elle-même : sa lecture en est rendue plus difficile. Son extension spatiale est réduite, moins de résonances sont rencontrées. La diffusion des orbites est globalement plus faible.

B.2 Super-ACO

B.2.1 Simulations : différents modèles de Super-ACO.

La carte en fréquence de Super-ACO modélisée comme machine idéale est donnée par la figure B.3. Toute la partie pour $\nu_y < 1.60$ n'est pas représentée : elle correspond aux particules qui ont des nombres d'ondes au-delà de la résonance principale $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$ et aux amplitudes $y > 20$ mm dans l'ouverture dynamique. Suivant que l'on trace la carte en fréquence pour le premier ($x > 0, y > 0$) et second ($x < 0, y > 0$) quadrant, la résonance principale est traversée soit selon une région hyperbolique (peu de points en son voisinage cf. Fig. B.3 de gauche), soit selon une région elliptique (cf. Fig. B.3 de droite). Dans ce cas, comme la résonance a une grande largeur, un grand nombre de particules est capturé dans les îles de résonance : sur la carte en fréquence, on observe nettement la droite de résonance ; l'ouverture dynamique est « gonflée » (cf. région $20 < y < 40$ mm et $x > 0$ de l'ouverture dynamique).

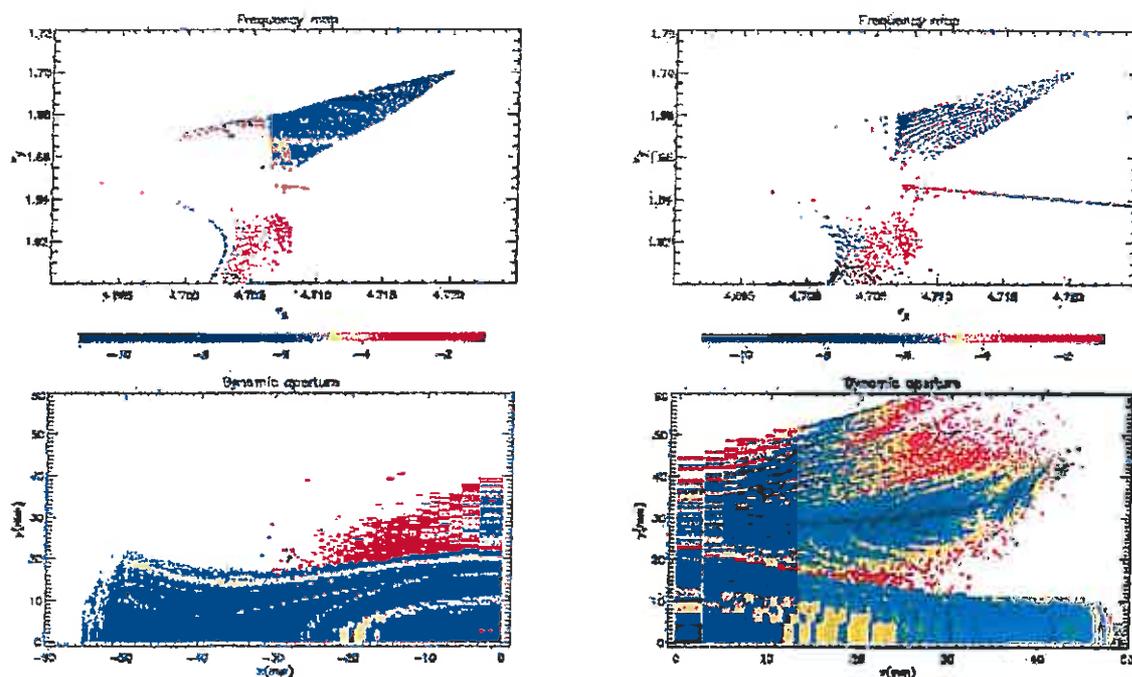


FIG. B.3: Haut : Carte en fréquence tracée pour le premier ($x > 0, y > 0$) et second ($x < 0, y > 0$) quadrant de l'ouverture dynamique. Super-ACO est modélisé comme machine idéale. Bas : Ouverture dynamique associée ($\beta_x = 5.6$ m et $\beta_y = 10.8$ m). Le point de fonctionnement est le coin supérieur droit de la carte (origine de l'ouverture dynamique). La dynamique est principalement dominée par la résonance d'ordre 3 ($\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$) qui donne la limite verticale de l'ouverture dynamique ($y = 20$ mm). Toute la partie $y > 20$ mm sur l'ouverture dynamique correspond à l'île de cette résonance : au centre la diffusion est faible (vert), car les particules sont capturées par la résonance et y restent ; sur les bords (régions hyperboliques) la diffusion est élevée (orange-rouge).

B.2. SUPER-ACO

En incluant dans la modélisation de Super-ACO, les défauts de gradients quadripolaires issus des mesures magnétiques, la dynamique de l'anneau est peu modifiée (cf. Fig. B.4). Globalement, la diffusion est plus élevée, de nouvelles résonances sont excitées; la symétrie 4 de l'anneau est brisée mais les défauts sont faibles : de l'ordre du pour mille (comparer avec la carte Fig. B.3 de gauche).

Pour le point de fonctionnement nominal, le point de fonctionnement est déplacé de $(\nu_x, \nu_y) = (4.7214, 1.6962)$ à $(\nu_x, \nu_y) = (4.7201, 1.7005)$ et surtout les chromaticités ne sont plus nulles mais surcompensées aux valeurs $\xi_x^{red} = 0.275$ et $\xi_y^{red} = 0.766$. Les forces des quatre familles hexapolaires sont donc complètement modifiées, si bien que la dynamique est complètement différente (cf. Fig. B.5). Le glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude est faible : la carte en fréquence est très « compacte » dans l'espace des fréquences, l'ouverture dynamique est réduite de près d'un facteur deux dans le plan horizontal; elle est limitée par la résonance d'ordre 3, $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$. Expérimentalement, cette résonance est observée mais à plus basse amplitude.

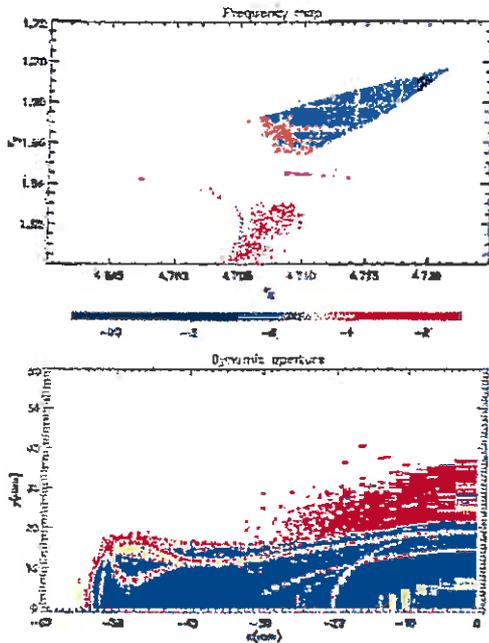


FIG. B.4: Carte en fréquence (haut) et ouverture dynamique (bas) calculées en incluant dans le modèle de Super-ACO les mesures magnétiques des quadripôles droits ($\beta_x = 5.6$ m et $\beta_y = 10.8$ m). La diffusion est globalement plus élevée, les largeurs de résonances plus grandes. L'influence des défauts magnétiques reste faible (mêmes dimensions de l'ouverture dynamique).

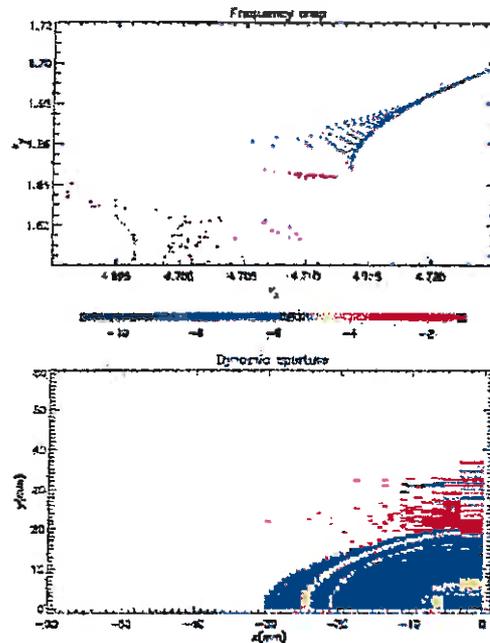


FIG. B.5: Super-ACO deuxième quadrant ($x < 0, y > 0$) : carte en fréquence et ouverture dynamique pour le point de fonctionnement nominal ($\beta_x = 5.5$ m et $\beta_y = 11.5$ m). La carte en fréquence est très compacte : peu de résonances sont rencontrées. Il est difficile de comprendre avec cette modélisation les observations expérimentales.

B.2.2 Expérience : prise en compte des champs de fuite quadripolaires.

Les mesures expérimentales du glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude ont permis de mettre en évidence l'influence des champs de fuites des quadripôles de Super-ACO. Cet effet peut être modélisé par un pseudo-octupôle : pour la présente étude, nous avons modifié le modèle de Super-ACO en incluant un octupôle équivalent au milieu de chacun des quadripôles de l'anneau. La dynamique du faisceau est complètement modifiée (comparer les figures B.6 et B.7) : le sens de variation de ν_x avec l'amplitude est inversé, la carte en fréquence ne présente plus de repliement et a avec une grande extension spatiale. Le nombre de résonances est plus élevé mais les largeurs des résonances restent faibles si bien que l'ouverture dynamique est plus grande que sans composante octupolaire.

Lors des mesures expérimentales, il a été possible d'éteindre les familles hexapolaires H1 et H2 tout en conservant le faisceau dans l'anneau. La figure B.8 présente la dynamique associée qui est fortement altérée : la carte en fréquence est modifiée, en particulier le sens de variation de $\nu_x(x)$ (cf. bord droit de la carte B.8 et Fig. B.7) ; de nombreuses résonances sont excitées et principalement la résonance $3\nu_y = 5$; l'ouverture dynamique verticale est réduite de près d'un facteur deux (influence de $3\nu_y = 5$). L'ouverture dynamique horizontale est trois fois plus petite.

Enfin pour simuler la dynamique réelle de l'anneau, nous avons volontairement surestimé l'effet des champs de fuite. Les largeurs de résonances sont alors plus importantes et peuvent se recouvrir surtout à grande amplitude conduisant à des mouvements chaotiques (comparer les figures B.9 et B.7). La diffusion est élevée ; l'ouverture dynamique est constellée de résonances. Une analyse plus détaillée suggère comme nouvelles dimensions : $[-15, 0] \times [0, 6]$ mm, en prenant en compte les résonances. Ces dimensions seraient alors proches de l'expérience.

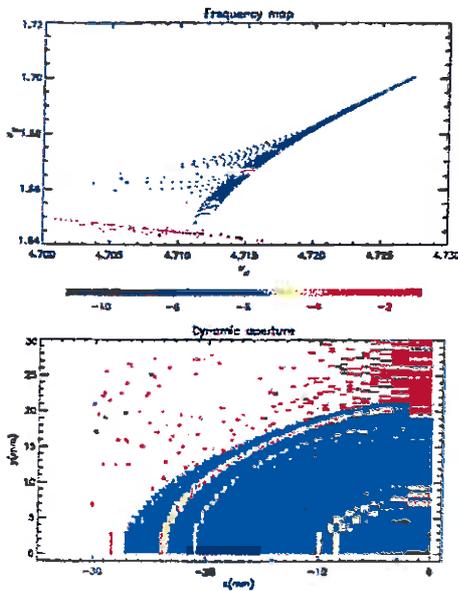


FIG. B.6: Sans composante octupolaire, la carte en fréquence de Super-ACO (haut) est repliée sur elle-même. L'ouverture dynamique (bas) est grande, la dynamique est peu marquée par les résonances.

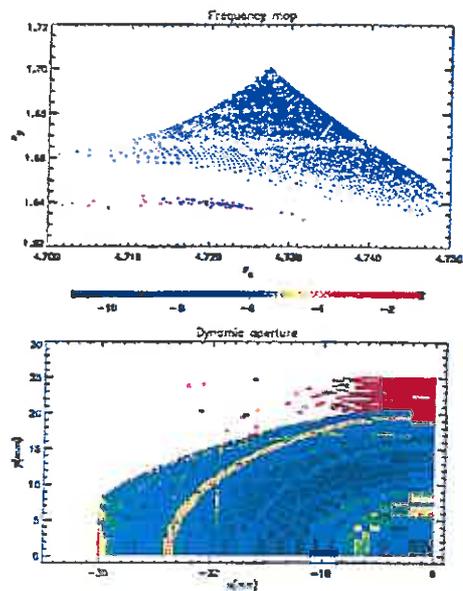


FIG. B.7: Avec composante octupolaire, la dynamique de Super-ACO est complètement modifiée : grande extension spatiale de la carte en fréquence (haut) mais ouverture dynamique (bas) plus grande.

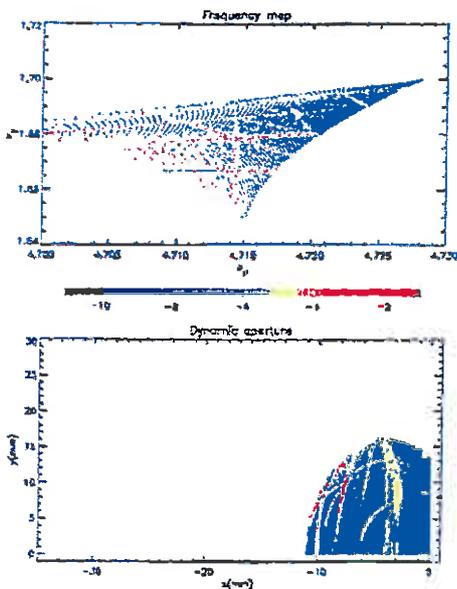


FIG. B.8: Avec composante octupolaire, familles hexapolaires H1 et H2 éteintes : la dynamique de Super-ACO est altérée : carte en fréquence modifiée (haut), ouverture dynamique verticale (bas) réduite de près d'un facteur deux (cf. Fig. B.7).

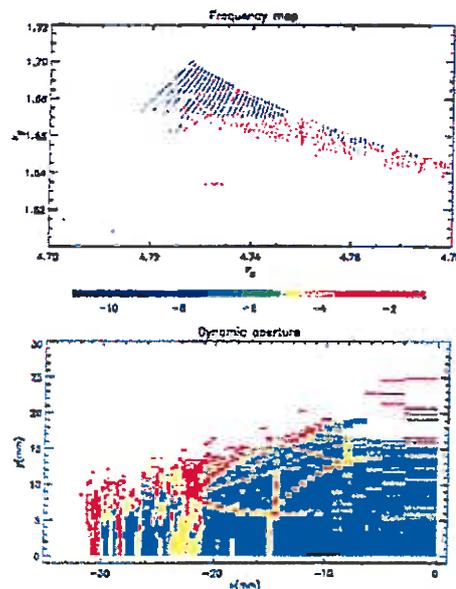


FIG. B.9: Composante octupolaire surestimée : la dynamique de Super-ACO est fortement altérée, carte en fréquence tronquée (haut) avec une grande diffusion et l'ouverture dynamique (bas) réduite dans les deux plans (cf. Fig. B.7).

B.3 L'ESRF : point de fonctionnement nominal

Les deux réglages magnétiques nominaux de l'ESRF ont été étudiés. L'anneau est supposé idéale avec sa 16-périodicité. Le point de fonctionnement est dans les deux cas le même : $(\nu_x, \nu_y) = (36.44, 14.39)$ avec des chromaticités légèrement surcompensées : $\xi_x^{red} = 0.1$ et $\xi_y^{red} = 0.4$. Les deux réglages diffèrent uniquement par la pente à l'origine de la courbe en fréquence $\nu_x(x)$ qui est modifiée en ajustement les forces des hexapôles. Expérimentalement le second réglage semble meilleur à fort courant par paquet en termes de durée de vie (communication personnelle, A. Ropert).

Pour le premier réglage hexapolaire (cf. Fig. B.10), les ouvertures dynamiques et cartes en fréquence ont été tracées pour les deux quadrants ($x < 0, y > 0$) et ($x > 0, y > 0$). L'ouverture dynamique est très grande si l'on ne prend pas en compte les résonances dans l'estimation de ses dimensions.

La dynamique est dominée à faible amplitude par la résonance d'ordre 5, $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ atteinte pour $x = 17$ mm dans l'espace des configurations (et $x = -20$ mm). Elle est traversée suivant une région elliptique pour ($x < 0, y > 0$) : dans l'espace des fréquences, on la voit nettement ; les particules sont capturées dans les îlots de résonance ; sa largeur est grande (cf. désertion de points de chaque côté de la résonance sur la carte en fréquence Fig. B.10 de gauche). Sur l'ouverture dynamique, on observe nettement les régions hyperboliques (jaune-orange) entourant la région elliptique (vert) pour $x = -20$ mm. Dans le quadrant ($x > 0, y > 0$), cette résonance est traversée suivant la région hyperbolique pour $x \approx 16$ mm, la diffusion est plus élevée (cf. Fig. B.11).

A plus grande amplitude, la dynamique est dominée par la résonance entière $\nu_x = 36$. Sa largeur est grande : toutes les particules peuplant l'ouverture dynamique pour $-40 < y < -28$ mm sont capturées par la résonance. Bien que la majorité de ces conditions initiales correspondent au régime elliptique (vert sur l'ouverture dynamique), la résonance entière apparaît avec une grande diffusion sur la carte en fréquence (orange). Cet *artefact* provient simplement de la manière dont la carte en fréquence est tracée : les faibles amplitudes puis les grandes amplitudes (orange).

Pour la machine réelle, cette résonance ne pourra pas être traversée sans réduction importante des performances : en pratique toutes les particules pour $x < -40$ mm (Fig. B.10) et $x > 30$ mm (Fig. B.11), *i.e.* à gauche de la résonance entière seront instables. Une estimation raisonnable des dimensions de l'ouverture dynamique serait : $[-27, 21]_{y=0} \times [-7, 7]_{x=0}$ mm et même : $[-20, 16]_{y=0} \times [-7, 7]_{x=0}$ mm si la résonance d'ordre 5 n'était pas traversée.

Pour le second jeu hexapolaire, l'allure de carte en fréquence est complètement modifiée (cf. Fig. B.10). La diffusion globale est plus faible puisque la résonance entière n'est plus atteinte. La carte en fréquence a une petite extension dans l'espace des fréquences, peu de résonances sont rencontrées. La principale résonance $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ atteinte à grande amplitude : $-60 < x < -40$ mm (région elliptique sur Fig. B.11 de gauche) et $x \approx 30$ mm (région hyperbolique sur Fig. B.11 de droite).

B.3. L'ESRF : POINT DE FONCTIONNEMENT NOMINAL

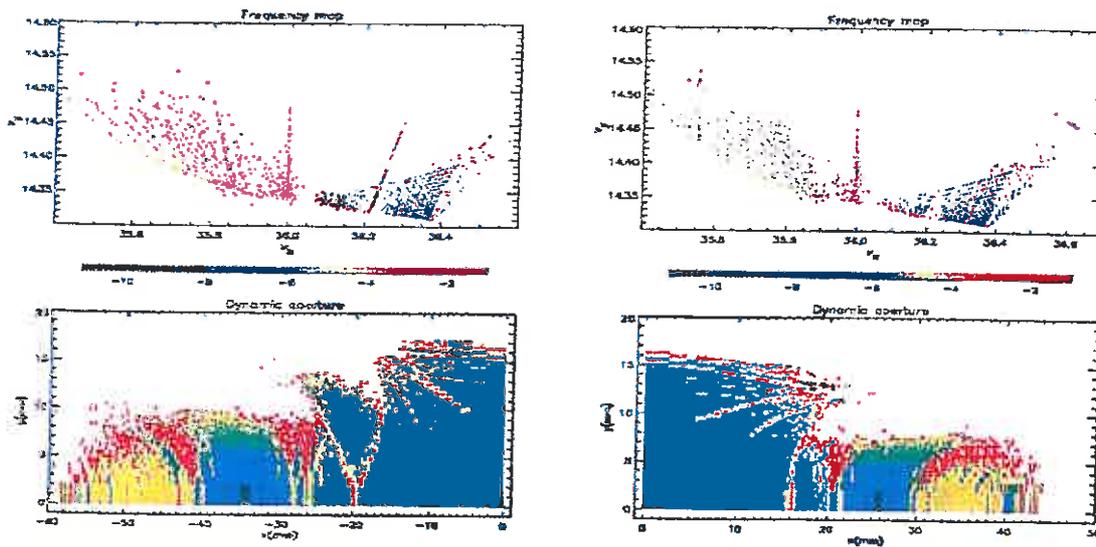


FIG. B.10: Carte en fréquence (haut) et ouverture dynamique (bas) : premier jeu hexapolaire de l'ESRF pour une surface de section en $s = 0$ ($\beta_x = 35.6 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). La dynamique est dominée par la résonance de couplage 3 : -2 : 0 et la résonance entière $\nu_x = 36$. Les zones elliptiques et hyperboliques associées sont nettement identifiables sur l'ouverture dynamique.

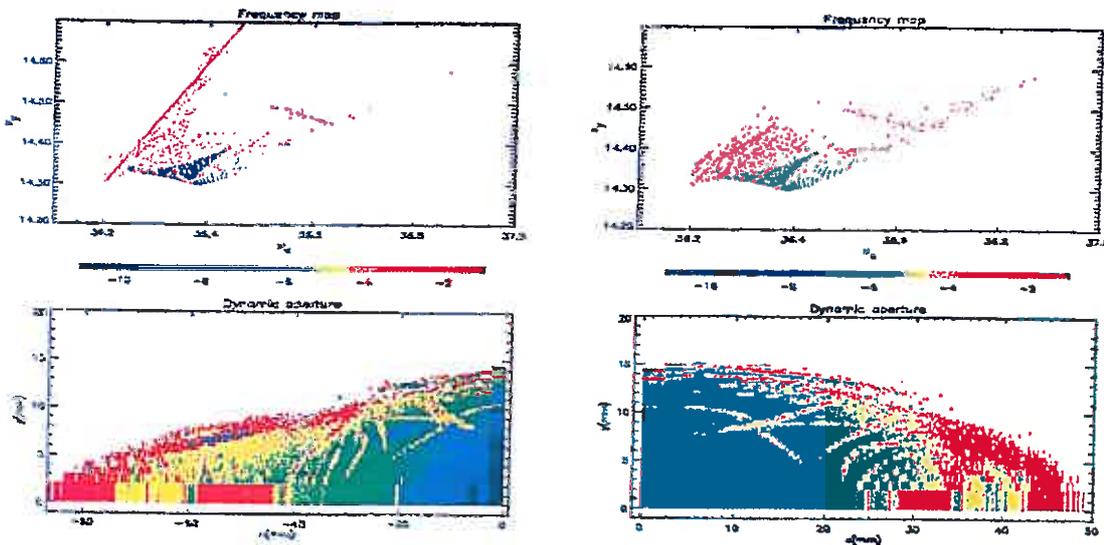


FIG. B.11: Carte en fréquence et ouverture dynamique pour le second réglage de l'ESRF hexapolaire calculée pour une surface de section à $s = 0$ ($\beta_x = 36 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). La dynamique est dominée par la résonance $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ atteinte à grande amplitude.

B.4 L'ALS

L'Advanced Light Source a été étudiée comme machine parfaite avec sa 12-périodicité. Dans ce cas, l'ouverture dynamique est très grande $[0, 22] \times [0, 10]$ mm (cf. Fig. B.12). De nombreuses résonances sont excitées dont l'identification est facilitée en utilisant la diffusion des orbites (jaune-orange). A grandes amplitudes, les largeurs de résonance se recouvrent conduisant à un mouvement non linéaire voire chaotique avec une diffusion élevée (rouge). La dynamique est dominée à grande amplitude par la résonance de couplage $\nu_x - \nu_y - 6 = 0$.

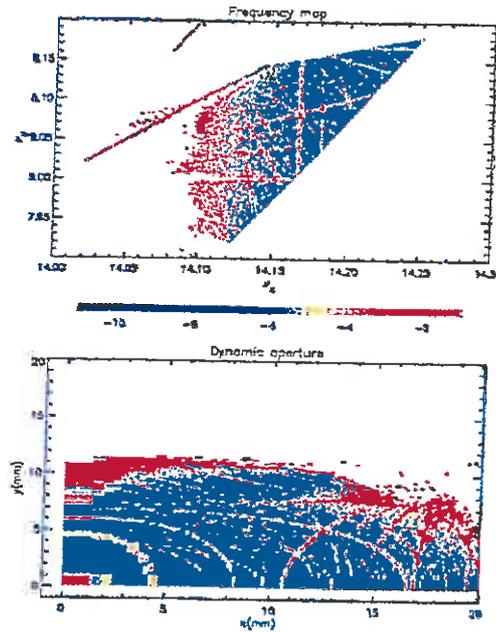


FIG. B.12: Carte en fréquence (haut) et ouverture dynamique (bas) calculées pour une maille parfaite de l'ALS pour une surface de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 11.3$ m et $\beta_y = 4.0$ m). La diffusion permet de nettement distinguer le réseau de résonance sur les deux figures.

Pour obtenir un modèle de l'ALS plus proche des observations expérimentales, nous avons introduit les défauts des quadripôles droits déduits des matrices réponses expérimentales (cf. Fig. B.13), puis ceux des quadripôles tournés pour obtenir un couplage effectif de 1% (cf. Fig. B.14). La 12-périodicité de l'anneau est alors brisée, les largeurs de résonances sont plus grandes. L'ouverture dynamique horizontale (12 mm cf. Fig. B.14) est très proche de celle mesurée en expérience.

Enfin, nous avons obtenu la première carte en fréquence expérimentale d'un accélérateur (cf. Fig. B.15). Elle correspondrait au voisinage du point de fonctionnement de la carte B.14 où la diffusion est faible (vert). Pour cette expérience, le point de fonctionnement a volontairement été déplacé à $(\nu_x = 14.275, \nu_y = 8.167)$. La carte en fréquence expérimentale révèle un réseau de résonances d'ordre 5, $4\nu_x - 57 = 0$, $3\nu_x + 3\nu_y - 67 = 0$, $3\nu_x + 2\nu_y - 59 = 0$ et $2\nu_x + 3\nu_y - 53 = 0$. Au nœud de résonances, la diffusion des particules est élevée (la durée de vie et l'efficacité d'injection sont fortement réduites). L'accord entre l'expérience et la modélisation de l'ALS est remarquable.

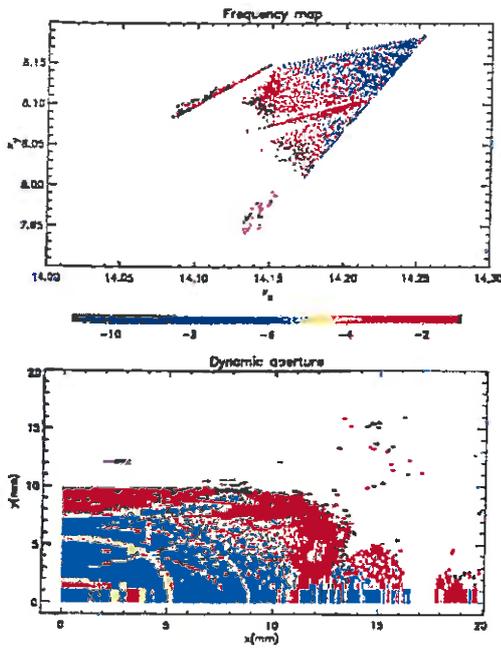


FIG. B.13: Carte en fréquence et ouverture dynamique : maille avec défauts quadripolaires mesurés pour un surface de section en $s = 0$ ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$). La 12-périodicité de l'ALS est brisée, l'extension spatiale de la carte en fréquence est réduite d'un facteur 2 dans le plan vertical.

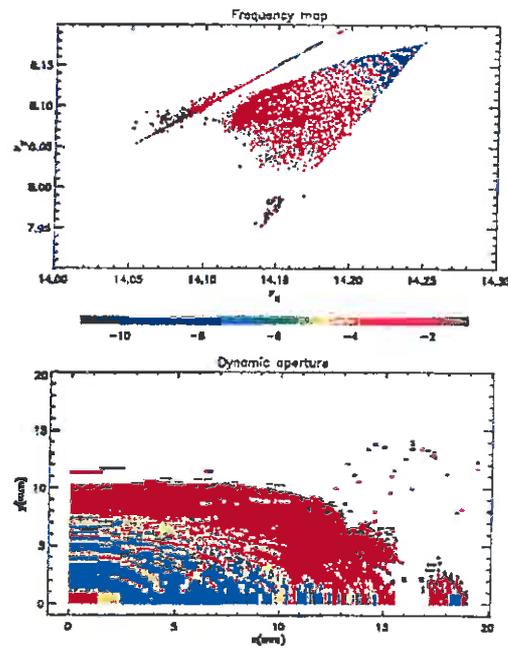


FIG. B.14: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) de l'ALS ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$) : influence du couplage de 1% ajusté à partir d'une distribution de quadripôles tournés. La diffusion est globalement plus élevée. Seule la région voisine du point de fonctionnement reste régulière.

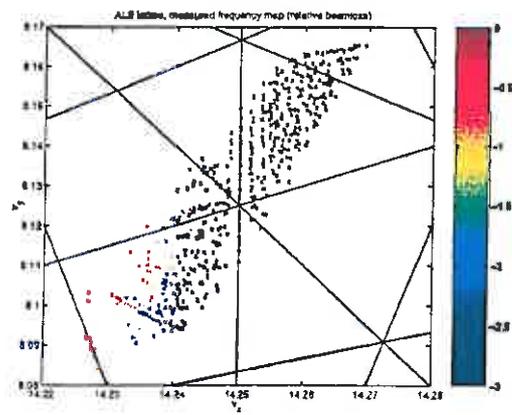
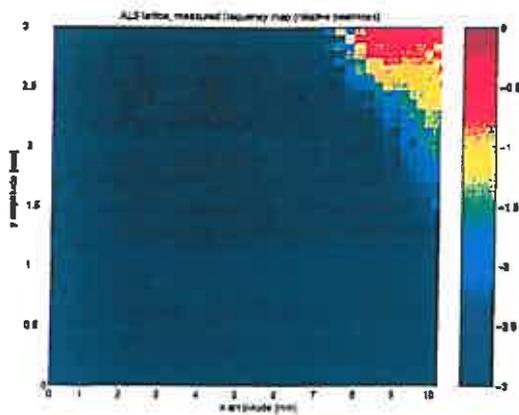


FIG. B.15: Espace des configurations et carte en fréquence expérimentale pour un point de fonctionnement antérieur avec mesure expérimentale de la diffusion des orbites (Steier, Robin, Laskar, Nadolski, 2000).

Application de l'Analyse en Fréquence à l'Etude de la Dynamique des Sources de Lumière

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la dynamique du faisceau dans les anneaux de stockage : seule la dynamique transverse des particules individuelles est abordée. Dans une première partie, nous présentons des outils permettant l'étude et la caractérisation de la dynamique (Hamiltonien, intégrateur, Analyse en Fréquence) ainsi que des simulations numériques réalisées sur quatre machines de rayonnement synchrotron : l'ALS, l'ESRF, SOLEIL et Super-ACO. Un code d'intégration des équations du mouvement a été écrit utilisant une nouvelle classe d'intégrateurs symplectiques à pas tous positifs (Laskar et Robutel, 2000). L'intégrateur, plus précis d'un ordre de grandeur que le traditionnel schéma de Forest et Ruth, est comparé avec les codes BETA, DESPOT et MAD. L'Analyse en Fréquence (Laskar, 1990), méthode numérique d'analyse de systèmes dynamiques fondée sur une technique de Fourier raffinée, est notre principal outil d'analyse ; il permet de calculer des cartes en fréquence, véritables empreintes de la dynamique d'un accélérateur. La grande sensibilité de la dynamique aux défauts magnétiques et aux réglages hexapolaires est mise en évidence.

La seconde partie est dédiée à l'analyse d'expériences réalisées sur deux sources de lumière. Avec l'équipe de l'ALS (Berkeley), nous avons obtenu la première carte en fréquence expérimentale d'un accélérateur. L'accord entre l'expérience et la modélisation est remarquable. A Super-ACO (Orsay), l'étude des glissements des nombres d'ondes avec l'amplitude a permis de mettre en évidence un fort pseudo-octupôle issu des champs de fuite des quadripôles. Les implications sont importantes et permettent de mieux comprendre les performances actuelles de l'anneau. Ces résultats reposent sur l'analyse de données tour par tour. De nombreux phénomènes connexes tels l'analyse des matrices-réponse et la décohérence sont également abordés.

Mots clefs : Analyse en Fréquence, dynamique transverse, nonlinéarités, décohérence, intégrateur symplectique, Hamiltonien, source de lumière, mesures tour par tour

Application of the Frequency Map Analysis to the Study of the Beam Dynamics of Light Sources

Abstract

The topic of this thesis is the study of beam dynamics in storage rings with a restriction to single particle transverse dynamics. In a first part, tools (Frequency Map Analysis, Hamiltonian, Integrator) are presented for studying and exploring the dynamics. Numerical simulations of four synchrotron radiation sources (the ALS, the ESRF, SOLEIL and Super-ACO) are performed. We construct a tracking code based on a new class of symplectic integrators (Laskar and Robutel, 2000). These integrators with only positive steps are more precise by an order of magnitude than the standard Forest and Ruth's scheme. Comparisons with the BETA, DESPOT and MAD codes are carried out. Frequency Map Analysis (Laskar, 1990) is our main analysis tool. This is a numerical method for analysing a conservative dynamical system. Based on a refined Fourier technique, it enables us to compute frequency maps which are real footprints of the beam dynamics of an accelerator. We stress the high sensitivity of the dynamics to magnetic errors and sextupolar strengths.

The second part of this work is dedicated to the analysis of experimental results from two light sources. Together with the ALS accelerator team (Berkeley), we succeeded in obtaining the first experimental frequency map of an accelerator. The agreement with the machine model is very impressive. At the Super-ACO ring, the study of the tune shift with amplitude enabled us to highlight a strong octupolar-like component related to the quadrupole fringe field. The aftermaths for the beam dynamics are important and give us a better understanding the measured ring performance. All these results are based on turn by turn measurements. Many closely related phenomena are treated such as response matrix analysis or beam decoherence.

Key words : Frequency Map Analysis, beam dynamics, nonlinearities, beam decoherence, symplectic integrator, Hamiltonian, light source, turn by turn measurements