

THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS VI

Spécialité :

PHYSIQUE THEORIQUE

présentée par

Stéphane FARTOUKH

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS VI
(arrêté du 30 Mars 1992)

Sujet de la thèse :

**METHODES D'ANALYSE D'UNE LIGNE
DE FOCALISATION FINALE DANS LE CADRE DU PROJET
DU COLLISIONNEUR LINEAIRE TESLA**

soutenue le 26 Novembre 1997

devant le jury composé de :

MM.	M. Baubillier	Président
	J. Buon	Rapporteur
	J. P. Koutchouk	Rapporteur
	J. P. Delahaye	
	O. Napoly	

A Véronique.

Remerciements

Je souhaiterais avant toute autre chose remercier chaleureusement tous les membres du Service d'Etudes des Accélérateurs de Saclay (SEA), en particulier M. Jablonka, A. Mosnier et O. Napoly, qui, par leur soutien et leur bonne humeur, m'ont aidé à réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma plus vive gratitude à B. Aune pour m'avoir accueilli au sein de son service et pour m'avoir donné les moyens de mener à bien mes recherches.

J'adresse toute ma reconnaissance à mon Directeur de Recherche, O. Napoly, qui, le premier, m'a initié à la Physique des Accélérateurs. Je reste sincèrement touché par la confiance qu'il a su m'accorder dès mon arrivée au SEA. Je tiens également à le saluer pour sa grande disponibilité et ses conseils extrêmement précieux s'appuyant sur une rigueur professionnelle remarquable et une connaissance pointue de son domaine. Pendant plus de trois ans, je me suis enrichi à son contact; grâce à lui, j'ai découvert puis appris à aimer ce métier.

M. le Professeur M. Baubillier, responsable du DEA de Physique des Grands Instruments de l'Université Paris VI, m'a fait l'honneur d'accepter immédiatement la présidence de la commission d'examen, je l'en remercie ainsi que tous les autres membres du Jury:

M. le Professeur J. Buon et M. J.P. Koutchouk du groupe SL/AP (CERN) pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse, pour les commentaires et corrections qu'ils m'ont suggérés lors de sa première lecture et surtout pour le travail qu'ils ont dû fournir en tant que rapporteurs auprès de l'Université.

M. J.P. Delahaye, responsable de l'étude CLIC, que j'ai eu la chance et le plaisir de rencontrer au CERN durant mes seize mois de service national et qui, malgré les nombreuses responsabilités qui lui incombent, a bien voulu se déplacer pour participer à ma soutenance.

A tous ceux là, cette thèse est dédiée...

Table des matières

Introduction	15
1 Magnétostatique et mécanique Hamiltonienne	23
1.1 Magnétostatique	23
1.1.1 Equations de la magnétostatique	23
1.1.2 Magnétostatique en coordonnées rectangulaires	28
1.1.3 Magnétostatique en coordonnées curvilignes	35
1.2 Hamiltonien d'une particule chargée soumise à un champ électromagnétique	43
1.2.1 Lagrangien et Hamiltonien en coordonnées curvilignes	43
1.2.2 Changement de variable indépendante	44
1.2.3 Choix des variables canoniques	46
1.3 Equations du mouvement. Ecriture formelle de la solution	49
1.3.1 Equations du mouvement	49
1.3.2 <i>Offset</i> δX , matrices R , T , U	50
1.3.3 Formules de concaténation	53
1.3.4 Symplecticité	55
2 Calcul de <i>mappings</i> et traitement des erreurs dans une ligne de focalisation finale: erreurs de champ, déplacements et rotations des aimants	61
2.1 Algorithme de calcul	62
2.1.1 Rappels et notations	62
2.1.2 Méthodes de calcul	63
2.1.3 Cas d'un Hamiltonien ne présentant aucun terme linéaire dans les variables canoniques	65
2.2 Les $2m$ -pôles parfaits droits	66
2.2.1 Classification des erreurs de champ dans les $2m$ -pôles	66
2.2.2 Le dipôle droit à entrée et sortie normales	69

2.2.3	Le quadrupôle droit	81
2.2.4	L'hexapôle droit	88
2.2.5	La section droite ou <i>drift</i>	92
2.3	Erreurs géométriques: déplacements et rotations des aimants	93
2.3.1	Introduction	93
2.3.2	Méthodes de calcul	95
2.3.3	Résultats analytiques	101
2.3.4	<i>Mapping</i> effectif total de l'aimant déplacé	106
2.4	Conclusion	107
3	Matrice faisceau et luminosité	109
3.1	Matrice faisceau	110
3.1.1	Définitions et généralités	110
3.1.2	Interprétation des erreurs dans la matrice R en terme de coefficients de couplage dans la matrice faisceau	112
3.1.3	Effets des aberrations	117
3.2	Luminosité	119
3.2.1	Préliminaires	119
3.2.2	La luminosité géométrique	122
3.2.3	Développement de Taylor de la luminosité à l'ordre 2 dans les coef- ficients de la matrice R et de l' <i>offset</i> δX	127
3.3	Les différents critères utilisés pour le calcul de tolérances	131
3.3.1	Cas d'un défaut isolé	132
3.3.2	Cas d'une distribution des erreurs sans corrélations et de moyenne nulle	132
4	Application à la ligne de focalisation finale (FFS) du collisionneur linéaire TESLA: calculs de tolérances	135
4.1	Les paramètres et le système de focalisation finale de TESLA	135
4.1.1	Introduction	135
4.1.2	Description détaillée de la BMS et de la FFS	138
4.1.3	Aberrations	143
4.2	Tolérances	145
4.2.1	Classification des erreurs par leurs effets sur l' <i>offset</i> δX et sur la matrice R	145
4.2.2	Exemples	156

4.2.3	Cas d'un défaut isolé	160
4.2.4	Cas d'une distribution statistique des défauts sans corrélations . . .	170
	Conclusion	173
	Bibliographie	175

Table des figures

1.1	Coordonnées rectangulaires	25
1.2	Coordonnées curvilignes	26
2.1	Le dipôle à entrée et sortie normales	69
2.2	Exemple simple de déplacement d'un aimant	94
2.3	Bases locales \mathcal{B}_{in} et \mathcal{B}_{out}	95
2.4	Définition des angles paramétrisant la rotation d'un aimant	97
3.1	Représentation schématique du point de collision	123
4.1	Evolution des fonctions β dans la BMS	139
4.2	Représentation schématique d'une cellule 180° de la CCSH	140
4.3	Evolution des fonctions β et de la dispersion horizontale dans la FFS	142
4.4	Evolution des fonctions μ_x et μ_y dans la FFS	142
4.5	Acceptance en énergie de la ligne (BMS–FFS)	144
4.6	Effets engendrés par les déplacements transverses des aimants de la ligne (BMS–FFS)	150
4.7	Effets engendrés par les rotations transverses des aimants de la ligne (BMS–FFS)	151
4.8	Effets engendrés par les déplacements longitudinaux des dipôles et quadrupôles de la ligne (BMS–FFS)	152
4.9	Effets engendrés par les rotations des dipôles et quadrupôles de la ligne (BMS–FFS) autour de l'axe longitudinal	153
4.10	Effets engendrés par les erreurs de champ dans les dipôles et quadrupôles de la ligne (BMS–FFS)	154
4.11	Effets engendrés par les erreurs de champ quadrupolaire dans les dipôles de la ligne (BMS–FFS)	155
4.12	Tolérances sur les déplacements horizontaux des aimants de la ligne (BMS–FFS)	162

4.13 Tolérances sur les déplacements verticaux des quadrapôles et hexapôles de la ligne (BMS–FFS)	163
4.14 Tolérances sur les déplacements longitudinaux des dipôles et quadrapôles de la ligne (BMS–FFS)	164
4.15 Tolérances sur l’angle azimutal Θ_{mag} des aimants de la ligne (BMS–FFS) .	165
4.16 Tolérances sur l’angle d’élévation Φ_{mag} des aimants de la ligne (BMS–FFS)	166
4.17 Tolérances sur l’angle de roulement Ψ_{BQ} des dipôles et quadrapôles de la ligne (BMS–FFS)	167
4.18 Tolérances sur les erreurs de champ des dipôles et quadrapôles de la ligne (BMS–FFS)	168
4.19 Tolérances sur les erreurs de champ quadrapolaire des dipôles de la ligne (BMS–FFS)	169

Liste des tableaux

1.1	Potentiel vecteur et champ magnétique du solénoïde et du $2(m + 1)$ -pôle en coordonnées cartésiennes	36
1.2	Potentiel vecteur longitudinal du $2(m + 1)$ -pôle parfait	42
4.1	Paramètres faisceau au point d'interaction	136
4.2	Longueur, fonctions β et avances de phases à l'entrée des différents modules constituant la BDS	137
4.3	Force et agencement des quadrupôles dans la BMS [23]	138
4.4	Force et agencement des aimants dans une cellule 180° des lignes CCSH et CCSV [23]	141
4.5	Force et agencement des quadrupôles dans le télescope final [23]	143

Introduction

Du fait du rayonnement synchrotronique, les collisionneurs circulaires $e^+ e^-$ de haute énergie sont actuellement limités dans la course aux énergies de plus de 100 GeV. Une particule chargée dont la course est infléchie par un champ magnétique émet en effet un rayonnement électromagnétique dont la puissance est proportionnelle à son énergie à la puissance quatre et inversement proportionnelle au carré du rayon de courbure de sa trajectoire. A l'heure actuelle, la plus grande de ces machines est le LEP opérant au CERN; d'une circonférence de 27 km, elle amène les deux faisceaux à une énergie proche de la centaine de GeV (85 GeV actuellement pour le LEP II, avec l'espoir d'atteindre les 100 GeV par faisceau).

L'un des buts des collisionneurs dans un futur proche est de porter les deux faisceaux à une énergie comprise entre 250 et 500 GeV afin de poursuivre l'idée du modèle Standard par une étude détaillée des propriétés physiques du quark Top (masse, processus de désintégration, etc.) et éventuellement par la découverte du boson de Higgs. L'existence du Top a été confirmée tout récemment par son observation directe faite au Tevatron (collisionneur $p\bar{p}$), sa masse étant estimée aux alentours de 175 GeV: $m_t = 174 \pm 6$ GeV [1]. Le principal mécanisme de production du quark Top dans une collision $e^+ e^-$ passe par le processus d'annihilation (canal s) [2]

$$e^+ e^- \xrightarrow{\gamma, Z} t\bar{t}.$$

Le seuil de production de paires $t\bar{t}$ se situe donc au-delà des 350 GeV et l'extrapolation du LEP à une telle énergie, en gardant la même puissance rayonnée, donnerait une machine dont la circonférence dépasserait 250 km. D'un point de vue économique, il est clair que cette voie est inacceptable.

Une alternative permettant d'atteindre les énergies désirées et utilisant des machines de taille relativement raisonnable se base alors sur le principe d'un collisionneur linéaire: à l'aide de deux accélérateurs linéaires se faisant face, les deux faisceaux sont amenés jusqu'à leur point de collision (IP) puis éliminés ou recyclés.

L'autre défi des collisionneurs $e^+ e^-$ de haute énergie est l'obtention d'une luminosité élevée

au point de collision de l'ordre de 10^{33} – 10^{34} $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ pour l'investigation d'événements très rares. Par définition, le nombre \dot{N} d'événements observés par unité de temps pour un processus donné est lié à la luminosité L par la relation

$$\dot{N} = \sigma L$$

où σ est la section efficace de collision du mécanisme considéré. Prenons alors pour exemple la production de paires $t\bar{t}$ par le processus cité précédemment pour lequel la section efficace atteint son maximum aux alentours de $\sqrt{s} \sim 380$ GeV (pour $m_t = 175$ GeV), $\sigma_{max} \sim 1 \text{ pb} = 10^{-36} \text{cm}^2$ [2], puis décroît typiquement en $1/s$ au-delà (comme c'est en général le cas pour tous les processus d'annihilation lepton–antilepton ou quark–antiquark). Pour une énergie de $E_{cm} = \sqrt{s} = 500$ GeV dans le référentiel du centre de masse des deux faisceaux $e^+ e^-$ et pour une luminosité de l'ordre de $10^{33} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ (soit entre un et deux ordres de grandeur au-dessus des valeurs de luminosité actuellement obtenues par LEP II), le nombre de paires $t\bar{t}$ produites par heure de fonctionnement de la machine serait donc

$$N \sim 10^{-36} \left(\frac{380}{500} \right)^2 \times 10^{33} \times 3600 \sim 2 \text{ paires } t\bar{t} \text{ par heure,}$$

ce qui est peu!

La luminosité est par conséquent le paramètre important permettant d'évaluer la performance d'un collisionneur. Cette dernière dépend principalement des trois quantités suivantes:

- la fréquence f_{rep} de répétition des collisions.
- le nombre de particules N_e interagissant par collision.
- la surface transverse des deux faisceaux $\sigma_x^* \sigma_y^*$ lors de leur collision.

Les deux premiers sont l'atout majeur des machines circulaires. En revanche, il n'est pas possible d'y focaliser trop fortement les deux faisceaux au point d'interaction en raison d'effets d'instabilité faisceau–faisceau qui peuvent conduire à leur perte. Le dernier de ces trois paramètres est quant à lui le point fort des accélérateurs linéaires: puisque les faisceaux sont éliminés après collision, il devient possible d'opérer dans un régime où leur taille respective est extrêmement petite (située dans l'échelle nanométrique).

Le projet TESLA est l'un des cinq projets¹ de collisionneurs linéaires étudiés actuellement dans le monde. L'option supraconductrice défendue dans TESLA et qui repose sur

1. avec les projets d'accélérateurs à cavités en cuivre de diverses longueurs d'onde: CLIC au CERN, JLC au Japon, NLC à SLAC et SBLIC en Allemagne

l'existence d'un gradient accélérateur de 25 MV/m dans les cavités apporte par rapport aux projets de collisionneurs en cuivre les atouts majeurs suivants:

- la plus grande longueur d'onde HF: $f_0 = 1.3$ GHz.
- le meilleur rendement puissance faisceau sur puissance électrique totale de l'ordre de 20%.
- le plus grand cycle utile égal à 0.5% (produit de la fréquence de répétition par la longueur de l'impulsion HF).

La grande longueur d'onde HF permet de réduire la dispersion en énergie du faisceau (due aux champs de sillage longitudinaux et à la variation de l'amplitude HF le long du paquet) ainsi que les champs de sillage transverses qui dégradent son émittance, tout en accélérant des paquets cinq à sept fois plus longs que dans les projets en cuivre. D'autre part, la combinaison des deux derniers avantages rend possible l'accélération d'une plus grande intensité de faisceau répartie sur un grand nombre de paquets largement séparés en temps; du coup, la luminosité requise au point de collision peut être obtenue avec des tailles de faisceau au moins dix fois plus grandes que celles envisagées dans les projets en cuivre. Les valeurs des émittances transverses et des tolérances d'alignement sont ainsi grandement relâchées.

L'objet de cette thèse a été l'analyse de la ligne de focalisation finale (FFS) permettant de transporter le faisceau TESLA de la sortie du linac d'accélération jusqu'à son point de collision avec les caractéristiques transverses qu'imposent les valeurs de luminosité désirées. Plus précisément, le but poursuivi durant toute cette étude a été le calcul des tolérances relatives aux défauts d'alignement et aux erreurs de champ des aimants de la FFS, calcul basé essentiellement sur le contrôle des fluctuations de luminosité au point de collision. Comme nous allons le voir, la spécification de ces tolérances devient cruciale lorsqu'il s'agit de définir les performances de la machine en terme de luminosité. En effet, prenons l'exemple simple du calcul de la tolérance dy sur l'alignement vertical du dernier doublet de la FFS. Ce dernier se comporte quasiment comme une lentille focalisante dans les deux plans transverses, donc en particulier comme un système optique *parallel-to-point* dont le point focal image est par construction le point d'interaction. Ainsi, lorsque les deux derniers quadrupôles sont déplacés en bloc d'une quantité dy , l'orbite verticale du faisceau au point de collision se retrouve décentrée de façon identique, $\delta y^* \sim dy$, et la perte relative en luminosité est approximativement égale à $\delta y^{*2} / (4\sigma_y^{*2})$ (pour de petits déplacements) où σ_y^* désigne la taille verticale du faisceau à l'IP (cf. chapitre 3). En imposant une limitation

de $n\%$ sur la diminution relative de luminosité, on dérive donc aisément la tolérance sur l'alignement transverse du dernier doublet. En fixant $n = 2$ comme c'est habituellement l'usage et dans le cas de TESLA où $\sigma_y^* = 19$ nm, il vient immédiatement $dy \sim 5$ nm. Du point de vue de la stabilité associée aux vibrations verticales du dernier doublet, le problème à résoudre apparaît d'ores et déjà extrêmement délicat et n'est évidemment pas spécifique au projet TESLA; le même calcul donnerait des tolérances comprises entre 1 et 20 nm pour les autres projets en cuivre. Une première étude s'impose néanmoins avant de s'attaquer à l'élaboration de schémas de correction adéquats permettant entre autres de contrôler la déviation d'orbite du faisceau au point d'interaction. Cette étude consiste d'une part en un inventaire systématique de tous les défauts pouvant affecter les aimants de la ligne considérée et dégradant le faisceau au point de collision en terme de perte en luminosité et, d'autre part, en la spécification des tolérances qui leur sont associées. C'est précisément dans ce cadre que se situe notre travail.

Intuitivement et au vu de l'exemple simple donné précédemment, on pourrait penser que, due à un défaut quelconque $\delta\epsilon$ dans la ligne, la fluctuation de luminosité δL est toujours négative c'est à dire, en d'autres termes, que toutes les dérivées premières de la luminosité par rapport aux erreurs de la ligne, $\partial L/\partial\epsilon_i$, sont nulles et que la matrice de ses dérivées secondes est définie négative. Ces deux dernières affirmations sont vraies lorsque l'on se restreint à des défauts engendrant une déviation de l'orbite du faisceau mais n'influant pas sur ses tailles transverses au point de collision (via des fluctuations dans la matrice de transfert de la ligne considérée). En revanche, celles-ci tombent en défaut dans le cas contraire. En effet, imaginons par exemple une certaine combinaison d'erreurs de champ dans les quatre quadrupôles du télescope final de la FFS dont le seul effet est d'augmenter (par chance!) la démagnification verticale de la ligne par un facteur $1 + \delta m_y/m_y$. La taille verticale du faisceau σ_y^* se retrouve réduite par ce même facteur au point d'interaction et la luminosité augmente car inversement proportionnelle à σ_y^* .

Les complications surgissent donc très rapidement lorsqu'il s'agit de généraliser à tous les aimants de la ligne le calcul simple de tolérance effectué précédemment et lorsque l'on envisage différents types d'erreurs pour chacun de ces aimants. Si l'on désigne ces défauts par ϵ_i et si l'on note $L(\epsilon_i)$ la fonction décrivant les fluctuations de la luminosité au point de collision, on se fixe ici pour but non pas le calcul analytique complet de cette dernière fonction (qui serait trop ambitieux compte tenu du nombre de paramètres de liberté) mais tout au plus le calcul de toutes ses dérivées premières et secondes, $(\partial L/\partial\epsilon_i)$ et $(\partial^2 L/\partial\epsilon_i\partial\epsilon_j)$. Deux étapes successives et quasi indépendantes seront nécessaires pour

atteindre cet objectif.

- Etape I: considérons un système de focalisation finale quelconque présentant certains défauts; notons δX la déviation d'orbite six-dimensionnelle du faisceau engendrée au point d'interaction (*offset*) et δR (matrice 6×6) la fluctuation de la matrice de transfert de la ligne considérée. La luminosité calculée dans l'approximation linéaire au point de collision (luminosité géométrique) est une certaine fonction de ces deux quantités qui sera dérivée complètement au chapitre 3. Comme annoncé précédemment, un développement de Taylor à l'ordre 2 de cette dernière fonction montre l'existence d'un terme linéaire non nul faisant intervenir les éléments de matrice $\delta R_{11} = \delta(1/m_x)$ et $\delta R_{33} = \delta(1/m_y)$ (liés respectivement aux dimensions horizontales et verticales x et y). La première étape sera alors le calcul des quantités suivantes: $(\partial L / \partial \delta R_{11,33})$, $(\partial^2 L / \partial \delta X_i \partial \delta X_j)$, $(\partial^2 L / \partial \delta R_{ij} \partial \delta R_{kl})$ et $(\partial^2 L / \partial \delta X_i \delta R_{kl})$.
- Etape II: la seconde étape par laquelle nous avons désiré commencer notre manuscrit est quant à elle beaucoup plus fastidieuse. Dans un premier temps, elle consiste à répertorier tous les défauts ϵ_i de la ligne susceptibles de contribuer aux fluctuations δX et δR . Dans un second temps, elle se fixe pour objectif le calcul de toutes les dérivées du type $(\partial \delta X / \partial \epsilon_i)$, $(\partial \delta R / \partial \epsilon_i)$ et $(\partial^2 \delta R_{11,33} / \partial \epsilon_i \partial \epsilon_j)$.

En résumé, si l'on veut estimer les fluctuations de luminosité à un ordre au moins égal à 2 dans les erreurs de la ligne, on est inévitablement amené à calculer non seulement la totalité des dérivées premières de l'*offset* δX et de la matrice R par rapport aux différents défauts envisagés mais aussi toutes les dérivées secondes des éléments de matrice R_{11} et R_{33} en fonction de ces mêmes défauts. Cette dernière tâche extrêmement délicate est précisément la raison profonde ayant inspiré l'ensemble des développements mathématiques présentés dans ce mémoire.

Ainsi, bien qu'initialement motivé par le projet TESLA, ce travail a d'abord été consacré à l'élaboration d'une méthode d'analyse complètement générale des lignes de transport de haute énergie puis à l'écriture d'un code de calcul pouvant s'intégrer non seulement aux autres projets de collisionneurs linéaires (pour ce qui est de l'estimation des tolérances de leur système de focalisation finale) mais aussi à l'étude des défauts d'une ligne de transfert quelconque. Ce mémoire s'organise en quatre chapitres.

Nous façonnerons dans le premier chapitre les outils mathématiques nécessaires aux objectifs que se fixe l'étape II. Nous commencerons dans un premier temps par rappeler quelques notions de base de magnétostatique (section 1) et de mécanique Hamiltonienne

(section 2) afin d'établir les formules relatives au potentiel vecteur du $2m$ -pôle et de dériver l'Hamiltonien d'une particule chargée traversant un champ magnétique quelconque. Nous introduirons ensuite la notion de *mapping* (section 3) (c'est à dire la loi de transformation associée au transport du faisceau le long d'une ligne optique donnée) et définirons les quantités mathématiques adéquates qui permettent son calcul à l'ordre 3 dans les non-linéarités de l'équation du mouvement: *offset* δX , matrice R , matrice T et matrice U qui sont une extension au troisième ordre du formalisme matriciel introduit par K. Brown à la fin des années soixante [3]. D'autres méthodes ont été proposées plus récemment pour un calcul à des ordres élevés des *mappings* régissant la dynamique d'un système donné. Ainsi, à la fin des années soixante-dix, Dragt amenait l'idée d'utiliser la théorie des transformations de Lie pour la physique des accélérateurs [4] et, dans les années quatre-vingts, Forest et Berz innovaient une théorie basée sur l'algèbre différentielle (DA) pour l'appliquer aux machines circulaires [5]. Cependant, après avoir opté dans un premier temps pour le formalisme des algèbres de Lie, je me suis rapidement heurté à des difficultés majeures. En effet, la théorie des algèbres de Lie est certes très efficace et surtout très élégante pour l'étude d'un système dynamique non linéaire régi par un Hamiltonien \mathcal{H} commençant de manière quadratique dans les variables canoniques utilisées. Le *mapping* associé à cette dynamique est alors simplement donné par la transformation de Lie $\mathcal{M} = \exp(t : \mathcal{H} :)$ [4] (dans le cas où l'Hamiltonien est indépendant du temps t). En revanche, lorsque l'Hamiltonien contient un terme linéaire (comme cela arrive par exemple lorsqu'il s'agit d'étudier la dynamique du faisceau dans un quadrupôle décentré ou le long d'un dipôle avec un défaut de champ), l'obtention des *mappings* n'est pas impossible mais devient extrêmement délicate [6]. Dans un même ordre d'idée, la concaténation (produit algébrique) de deux *mappings* associés à deux Hamiltoniens possédant chacun un terme linéaire dans les coordonnées canoniques est elle aussi fastidieuse [7]. Aussi suis-je revenu à un formalisme matriciel qui, de surcroît, permet un calcul bien plus direct de certaines quantités physiques relatives au faisceau lui-même: ces quantités seront typiquement soit les tailles transverses du faisceau, soit la luminosité au point de collision.

Ayant assimilé les développements mathématiques du premier chapitre et admettant au préalable les résultats concernant l'étape I et annoncés précédemment, nous poursuivrons au chapitre 2 les objectifs que se fixe l'étape II. Utilisant un système de coordonnées symplectiques, nous établirons une méthode de type perturbative (section 1) permettant de résoudre les équations du mouvement à un ordre de non-linéarité arbitrairement élevé et nous donnerons les formules analytiques ainsi obtenues et relatives à l'*offset* δX (ordre 0) et aux matrices R (ordre 1), T (ordre 2) et U (ordre 3) du dipôle, du quadrupôle et de

l'hexapôle qui sont les composants optiques classiquement utilisés dans les systèmes de focalisation finale. De plus, nous affinerons cette méthode afin de quantifier l'effet des erreurs de champ et d'alignement de l'élément considéré sur les trois premières des quatre quantités précédemment citées. Seules les sources d'erreurs pouvant affecter le *mapping* d'un aimant donné jusqu'à sa matrice T seront alors prises en compte, à savoir: les six erreurs (dites géométriques, section 3) paramétrisant ses défauts d'alignement par rapport à une position idéale (c.-à-d. trois paramètres décrivant la translation en bloc de l'élément et trois angles définissant son orientation dans l'espace Euclidien à trois dimensions) ainsi que les erreurs de champ droit et tourné jusqu'à l'harmonique hexapolaire dans les dipôles, quadrupôles et hexapôles de la ligne (section 2).

Au chapitre 3, nous établirons les formules analytiques décrivant les fluctuations de la matrice faisceau et de la luminosité géométrique au point de collision en fonction des quantités δX et δR (étape I). Nous justifierons alors complètement les choix de calculs envisagés jusqu'à présent (c'est à dire la troncature à l'ordre 3 de la série perturbative définissant le *mapping* d'un élément optique donné et la restriction que nous faisons sur le type d'erreurs à considérer).

Enfin, dans le dernier chapitre (chapitre 4), nous appliquerons les résultats précédemment obtenus au cas particulier de la ligne de focalisation finale de TESLA. Après une description détaillée de cette dernière, nous calculerons les tolérances associées aux défauts d'alignement et aux erreurs de champ de ses différents éléments, ceci en imposant à la luminosité ou aux tailles transverses du faisceau au point d'interaction des fluctuations relatives inférieures à 2%.

Chapitre 1

Magnétostatique et mécanique Hamiltonienne

1.1 Magnétostatique

1.1.1 Equations de la magnétostatique

Généralités

On considère un champ magnétique statique \vec{B} dans le vide. Il vérifie les équations de Maxwell suivantes:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0} . \quad (1.2)$$

L'équation 1.1 implique que \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} . \quad (1.3)$$

En choisissant la jauge de Coulomb $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ puis en utilisant le fait que $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$, on obtient les équations vérifiées par \vec{A} :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (1.4)$$

$$\Delta \vec{A} = \vec{0} . \quad (1.5)$$

\vec{A} est donc défini au gradient d'une fonction harmonique près: si \vec{A} est solution de 1.4 et 1.5 et si f est une fonction scalaire vérifiant $\Delta f = 0$ alors $\vec{A} + \operatorname{grad} f$ est aussi solution.

L'équation 1.2 implique que \vec{B} dérive d'un potentiel scalaire Φ :

$$\vec{B} = \operatorname{grad} \Phi . \quad (1.6)$$

En utilisant la relation 1.1, on obtient l'équation vérifiée par Φ (équation de Laplace):

$$\Delta\Phi = 0 . \tag{1.7}$$

On se propose dans la suite de cette section d'obtenir, à partir des équations 1.4 et 1.5, des expressions exactes ou "approchées" pour le potentiel vecteur \vec{A} . C'est au potentiel vecteur et non au champ magnétique que l'on s'intéresse car tous les calculs d'optique du chapitre 2 se baseront sur un formalisme Hamiltonien qui sera développé à la section 1.2. On distinguera deux cas:

- le cas "rectangulaire" où l'on recherche la forme du potentiel vecteur en coordonnées cylindriques. Après avoir décomposé le champ \vec{A} en modes multipolaires, nous dériverons finalement l'expression la plus générale que prend chacun de ces modes en coordonnées cartésiennes, laquelle sera représentée par une double série infinie dans les coordonnées transverses (x, y) (sous-section 1.1.2).
- le cas "curviligne" où l'on considère un système de coordonnées curvilignes (x, y, s) défini par une courbe de référence \mathcal{C} qui est plane et de courbure $h(s)$ non nulle (Fig. 1.2). Comme nous le verrons à la sous-section 1.1.3, ce cas n'est pas exactement soluble et l'on se contentera d'obtenir le développement limité du potentiel vecteur \vec{A} jusqu'à l'ordre 4 dans les coordonnées transverses (x, y) .

Ce dernier cas est digne d'intérêt dans la mesure où la majeure partie des lignes optiques qu'il s'agit d'étudier sont courbes et possèdent un plan de symétrie magnétique qui, par convention, sera désigné sous le nom de plan horizontal. Les systèmes de focalisation finale n'en sont qu'un exemple parmi d'autres, constitués d'éléments magnétiques rectilignes (quadrupôles, hexapôles, ...) mais aussi de dipôles qui sont des composants optiques de courbure dans le sens où ils infléchissent la trajectoire des particules chargées qui les traversent. Il est donc indispensable d'avoir une expression pour \vec{A} dans ce système de coordonnées curvilignes. Le cas "rectangulaire", quant à lui, apparaît donc purement académique puisqu'il peut aisément se déduire du cas "curviligne" en faisant $h(s) = 0$. Cependant, celui-ci n'est pas sans intérêt, d'une part parce qu'il est exactement soluble et d'autre part parce que la notion de $2m$ -pôle y apparaît de façon naturelle.

Description succincte de la méthode en coordonnées rectangulaires

La décomposition d'un champ magnétique \vec{B} en modes multipolaires \vec{B}_m est déjà largement répandue dans la littérature (se reporter par exemple à la référence [8, p. M1–M21]).

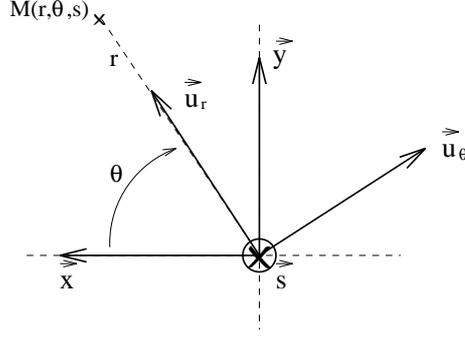


FIG. 1.1 – *Coordonnées rectangulaires*

L'expression \vec{A}_m des potentiels vecteurs associés l'est beaucoup moins à ma connaissance sauf bien sûr dans le cas des multipôles parfaits où le champ magnétique est invariant par translation selon l'axe \hat{s} (absence de champ de fuite) et pour lequel le champ \vec{A} devient purement longitudinal. Pour cette raison, nous exposerons ci-après la méthode de résolution des équations 1.4 et 1.5 vérifiées par le potentiel \vec{A} dans le cas général (avec ou sans champ de fuite), d'abord succinctement dans ce paragraphe puis complètement à la sous-section 1.1.2.

Pour des raisons de commodité de calcul, nous nous plaçons en coordonnées cylindriques (cf. Fig. 1.1) et nous posons

$$\vec{A}(r, \theta, s) = A_r(r, \theta, s)\vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, s)\vec{u}_\theta + A_s(r, \theta, s)\vec{s}.$$

La nullité de la divergence de \vec{A} , équation 1.4, s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\frac{A_r}{r} + \partial_r A_r + \frac{1}{r} \partial_\theta A_\theta + \partial_s A_s = 0. \quad (1.8)$$

La nullité du Laplacien vectoriel de \vec{A} , équation 1.5, donne en coordonnées cylindriques

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_\theta - \frac{A_r}{r^2} = \partial_r^2 A_r + \frac{1}{r} \partial_r A_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_r + \partial_s^2 A_r - \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_\theta - \frac{A_r}{r^2} = 0 \\ \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_r - \frac{A_\theta}{r^2} = \partial_r^2 A_\theta + \frac{1}{r} \partial_r A_\theta + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_\theta + \partial_s^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_r - \frac{A_\theta}{r^2} = 0 \\ \Delta A_s = \partial_r^2 A_s + \frac{1}{r} \partial_r A_s + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_s + \partial_s^2 A_s = 0. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Les équations différentielles aux dérivées partielles {1.8,1.9} étant linéaires, nous commencerons par effectuer un développement du champ \vec{A} en modes multipolaires puis nous considérerons la transformée de Fourier de chacun de ces modes par rapport à s :

$$\vec{A} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{A}_m(r, s) \exp(i m \theta) \text{ avec } \vec{A}_m(r, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \vec{A}_m(r, k) e^{-iks}.$$

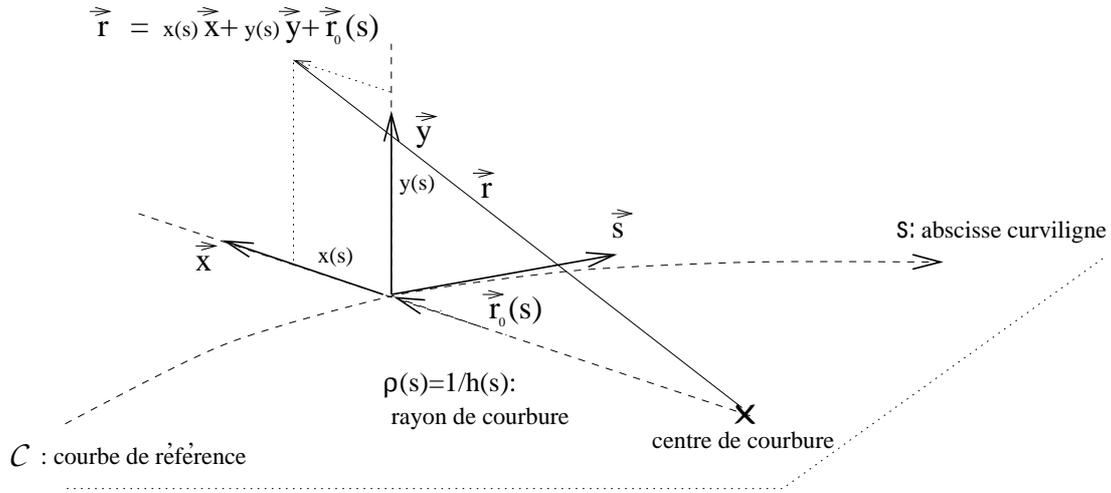


FIG. 1.2 – *Coordonnées curvilignes*

Utilisant les relations 1.8 et 1.9, nous tomberons alors facilement sur le système d'équations différentielles (par rapport à r) que vérifient les composantes de chacun des vecteurs $\vec{A}_m(r, k)$. Nous dériverons ainsi les expressions analytiques relatives à ces dernières quantités puis, après quelques manipulations algébriques, nous obtiendrons finalement la forme générale de chacune des composantes multipolaires $\vec{A}_m(r, s)$.

Ceci fera l'objet de la sous-section 1.1.2.

Description succincte de la méthode en coordonnées curvilignes

On considère une courbe plane $\vec{r}_0(s)$ d'abscisse curviligne s et de courbure $h(s)$. On note $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{s})$ le trièdre de Serret-Frenet à l'abscisse s (cf. Fig. 1.2). On a les relations cinématiques standards¹

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h(s) \\ 0 & 0 & 0 \\ -h(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{s} \end{pmatrix} .$$

Un vecteur quelconque \vec{r} de l'espace Euclidien est paramétrisé de la façon suivante:

$$\vec{r} = \vec{r}_0(s) + x(s)\vec{x} + y(s)\vec{y} \quad \text{avec} \quad \frac{d\vec{r}_0}{ds} = \vec{s} .$$

1. Par convention, on prend la courbure h positive (respectivement négative) lorsque la courbe \mathcal{C} s'incurve vers la droite (respectivement vers la gauche) dans le plan orienté par le vecteur fixe \vec{y} .

L'élément de longueur dans ce système de coordonnées est donc

$$\begin{aligned} \vec{dr} &= dx \vec{x} + dy \vec{y} + (1 + h(s)x) ds \vec{s} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} h_1 du_1 \vec{u}_1 + h_2 du_2 \vec{u}_2 + h_3 du_3 \vec{u}_3 . \end{aligned}$$

On considère maintenant un système quelconque de coordonnées curvilignes orthonormales (u_1, u_2, u_3) dans lequel l'élément de longueur s'écrit $\vec{dr} = h_1 du_1 \vec{u}_1 + h_2 du_2 \vec{u}_2 + h_3 du_3 \vec{u}_3$ où les h_i sont des fonctions des coordonnées. Si Φ est une fonction scalaire des coordonnées curvilignes (u_1, u_2, u_3) et si \vec{A} est un champ de vecteur dépendant de ces coordonnées, les expressions pour $\overrightarrow{\text{grad}}\Phi$, $\Delta\Phi$, $\text{div}\vec{A}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$ sont les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{grad}}\Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \vec{u}_i \\ \Delta\Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \right) \\ \text{div}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) \\ (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right] \end{array} \right.$$

où le signe \sum sans indice signifie sommation sur les permutations par cycle des suffixes $(1,2,3)$; par ces mêmes permutations on obtient $(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})_2$ et $(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})_3$.

On adaptera alors aisément ces dernières expressions au système de coordonnées considéré ici. Cependant, l'expression du Laplacien vectoriel (via " $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}} - \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}$ ") devenant compliquée, le calcul du potentiel vecteur \vec{A} ne se fera pas en résolvant directement les équations 1.4 et 1.5 comme dans le cas rectangulaire. On commencera par chercher le potentiel magnétique Φ sous la forme d'une série dans les coordonnées transverses (x, y) puis on dérivera les coefficients de cette série jusqu'au degré 4 en (x, y) . Pour ce faire, on utilisera l'équation de Laplace vérifiée par Φ qui, dans le système de coordonnées curvilignes considéré ici, s'écrit

$$\Delta\Phi = 0 = \frac{1}{1 + h(s)x} \partial_x \left[(1 + h(s)x) \partial_x \Phi \right] + \partial_y^2 \Phi + \frac{1}{1 + h(s)x} \partial_s \left[\frac{1}{1 + h(s)x} \partial_s \Phi \right] = 0 . \quad (1.10)$$

Dans un second temps, on calculera le champ magnétique \vec{B} à partir de l'équation 1.6:

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi = (\partial_x \Phi) \vec{x} + (\partial_y \Phi) \vec{y} + \frac{1}{1 + h(s)x} (\partial_s \Phi) \vec{s} . \quad (1.11)$$

Le calcul du potentiel Φ ayant été poussé jusqu'à l'ordre 4 dans les coordonnées transverses, le champ \vec{B} ne sera connu quant à lui qu'à l'ordre 3 en (x, y) . Finalement, à partir des

équations 1.4 et 1.5, on exhibera une solution pour le potentiel vecteur \vec{A} caractérisant son comportement jusqu'à l'ordre 4 dans les coordonnées transverses:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_y A_s - \frac{1}{1+hx} \partial_s A_y \\ \frac{1}{1+hx} \partial_s A_x - \frac{1}{1+hx} \partial_x [(1+hx) A_s] \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} \\ \text{div} \vec{A} = 0 = \frac{1}{1+hx} \partial_x [(1+hx) A_x] + \partial_y A_y + \frac{1}{1+hx} \partial_s A_s . \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Tout ceci fera l'objet de la sous-section 1.1.3. Enfin, insistons sur le fait que ce choix de troncature n'est pas arbitraire: il s'expliquera plus loin à la section 1.3.

1.1.2 Magnétostatique en coordonnées rectangulaires

Développement en modes multipolaires

Le potentiel vecteur \vec{A} se décompose de façon unique en deux champs de vecteurs:

- l'un symétrique par rapport au plan horizontal (xOs) (qui, par construction, correspond au plan de symétrie de l'accélérateur) et que l'on note \vec{A}^+ ; on parlera dans ce cas de composante droite.
- l'autre antisymétrique par rapport au plan horizontal et que l'on note \vec{A}^- ; on parlera dans ce cas de composante tournée.

On a $\vec{A} = \vec{A}^+ + \vec{A}^-$ et on décompose \vec{A}^+ et \vec{A}^- de la façon suivante:

$$\begin{aligned} A_r^+(r, \theta, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{r,m}^+ = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk a_{r,m}^+(r, k) e^{-iks} \right) \cos m\theta \\ A_r^-(r, \theta, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{r,m}^- = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk a_{r,m}^-(r, k) e^{-iks} \right) \sin m\theta \\ A_\theta^+(r, \theta, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{\theta,m}^+ = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk a_{\theta,m}^+(r, k) e^{-iks} \right) \sin m\theta \\ A_\theta^-(r, \theta, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{\theta,m}^- = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk a_{\theta,m}^-(r, k) e^{-iks} \right) \cos m\theta \\ A_s^+(r, \theta, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{s,m}^+ = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk a_{s,m}^+(r, k) e^{-iks} \right) \cos m\theta \end{aligned}$$

$$A_s^-(r, \theta, s) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{s,m}^- = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk a_{s,m}^-(r, k) e^{-iks} \right) \sin m\theta .$$

Pour un entier naturel $m \geq 1$, on parlera de composante $2m$ -polaire. Le cas $m = 0$, quant à lui, est quelque peu particulier dans le sens où seules les composantes $a_{r,0}^+$, $a_{s,0}^+$ et $a_{\theta,0}^-$ sont véritablement définies; il sera traité à la fin de cette sous-section.

L'équation 1.8 donne pour tout $m \geq 1$

$$\frac{a_{r,m}^{\pm}}{r} + \partial_r a_{r,m}^{\pm} \pm \frac{m}{r} a_{\theta,m}^{\pm} - i k a_{s,m}^{\pm} = 0 . \quad (1.13)$$

L'équation 1.9 donne pour tout $m \geq 1$

$$\begin{cases} \partial_r^2 a_{r,m}^{\pm} + \frac{1}{r} \partial_r a_{r,m}^{\pm} - \frac{m^2}{r^2} a_{r,m}^{\pm} - k^2 a_{r,m}^{\pm} \mp \frac{2m}{r^2} a_{\theta,m}^{\pm} - \frac{1}{r^2} a_{r,m}^{\pm} = 0 \\ \partial_r^2 a_{\theta,m}^{\pm} + \frac{1}{r} \partial_r a_{\theta,m}^{\pm} - \frac{m^2}{r^2} a_{\theta,m}^{\pm} - k^2 a_{\theta,m}^{\pm} \mp \frac{2m}{r^2} a_{r,m}^{\pm} - \frac{1}{r^2} a_{\theta,m}^{\pm} = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

pour ce qui est des composantes transverses du champ \vec{A} . Enfin, concernant sa composante longitudinale, on a pour tout $m \geq 1$

$$\partial_r^2 a_{s,m}^{\pm} + \frac{1}{r} \partial_r a_{s,m}^{\pm} - \frac{m^2}{r^2} a_{s,m}^{\pm} - k^2 a_{s,m}^{\pm} = 0 . \quad (1.15)$$

On pose alors

$$\begin{cases} s^{m\pm}(r, k) = (a_{r,m}^{\pm}(r, k) + a_{\theta,m}^{\pm}(r, k)) / 2 \\ \delta^{m\pm}(r, k) = (a_{r,m}^{\pm}(r, k) - a_{\theta,m}^{\pm}(r, k)) / 2 \end{cases} , m \geq 1 .$$

Le système d'équations 1.14 se découple par ce changement de fonctions et on obtient

$$\begin{cases} r^2 \partial_r^2 s^{m\pm} + r \partial_r s^{m\pm} - (k^2 r^2 + (m \pm 1)^2) s^{m\pm} = 0 \\ r^2 \partial_r^2 \delta^{m\pm} + r \partial_r \delta^{m\pm} - (k^2 r^2 + (m \mp 1)^2) \delta^{m\pm} = 0 \end{cases} , m \geq 1 .$$

On rappelle que l'équation différentielle $r^2 y'' + r y' - (r^2 + m^2) y = 0$ (où m est un nombre complexe quelconque) possède deux solutions linéairement indépendantes, I_m et K_m (voir par exemple [9, p. 374–378]), qui sont les deux fonctions de Bessel modifiées d'ordre m . Pour m entier naturel positif, seule la fonction I_m est régulière en 0. On a donc d'après ce qui précède

$$\begin{cases} s^{m\pm}(r, k) = s_m^{\pm}(k) I_{m\pm 1}(kr) \\ \delta^{m\pm}(r, k) = \delta_m^{\pm}(k) I_{m\mp 1}(kr) \end{cases} , \text{ soit} \\ \begin{cases} a_{r,m}^{\pm}(r, k) = s_m^{\pm}(k) I_{m\pm 1}(kr) + \delta_m^{\pm}(k) I_{m\mp 1}(kr) \\ a_{\theta,m}^{\pm}(r, k) = s_m^{\pm}(k) I_{m\pm 1}(kr) - \delta_m^{\pm}(k) I_{m\mp 1}(kr) \end{cases} , m \geq 1 . \quad (1.16)$$

Pour ce qui est de la composante longitudinale $a_{s,m}^\pm$, l'équation 1.15 donne directement

$$a_{s,m}^\pm(r, k) = a_m^\pm(k) I_m(kr) . \quad (1.17)$$

Enfin, en utilisant la nullité de la divergence de \vec{A} , on obtient une relation liant les trois fonctions $s_m^\pm(k)$, $\delta_m^\pm(k)$ et $a_m^\pm(k)$:

$$s_m^\pm(k) + \delta_m^\pm(k) = i a_m^\pm(k) \text{ pour tout } m \geq 1 \quad (1.18)$$

où, pour dériver cette égalité, on a utilisé l'indépendance linéaire des fonctions I_m , I_{m+1} et I_{m-1} , ainsi que la relation de récurrence [9, p. 376]

$$I'_{m\pm 1}(kr) = I_m(kr) \mp \frac{m \pm 1}{kr} I_{m\pm 1}(kr) . \quad (1.19)$$

En reprenant les expressions 1.16 et 1.17, en utilisant l'égalité 1.18 ainsi que la relation de récurrence évoquée ci-dessus, on obtient finalement

$$\begin{pmatrix} a_{r,m}^\pm(r, k) \\ a_{\theta,m}^\pm(r, k) \\ a_{s,m}^\pm(r, k) \end{pmatrix} = b_m^\pm(k) \begin{pmatrix} \pm I_{m+1}(kr) \\ I_{m+1}(kr) \\ \mp i I_m(kr) \end{pmatrix} + c_m^\pm(k) \begin{pmatrix} i k I'_m(kr) \\ \mp i m/r I_m(kr) \\ k I_m(kr) \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$\text{où } b_m^\pm(k) = s_m^\pm(k) - \delta_m^\pm(k) \text{ et } c_m^\pm(k) = -2i/k \begin{cases} \delta_m^+(k) \\ s_m^-(k) \end{cases}, m \geq 1 .$$

D'après l'équation précédente, chaque composante $2m$ -polaire droite ou tournée possède donc deux degrés de liberté représentés par les deux fonctions $b_m^\pm(k)$ et $c_m^\pm(k)$. Cependant, comme nous le verrons au paragraphe suivant, le potentiel vecteur correspondant au paramètre de liberté $c_m^\pm(k)$ est de rotationnel nul et ne possède donc aucun sens physique.

Champ magnétique et force multipolaire

On écrit un développement pour \vec{B} similaire à celui écrit pour \vec{A} . Puisque \vec{B} est un pseudo-vecteur, la composante symétrique \vec{B}^+ du champ magnétique dérivant du potentiel \vec{A}^+ est antisymétrique par rapport au plan horizontal et inversement pour \vec{B}^- :

$$B_r^+(r, \theta, s) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{r,m}^+ = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk b_{r,m}^+(r, k) e^{-iks} \right) \sin m\theta$$

$$B_r^-(r, \theta, s) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{r,m}^- = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk b_{r,m}^-(r, k) e^{-iks} \right) \cos m\theta$$

$$\begin{aligned}
B_{\theta}^{+}(r, \theta, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{\theta, m}^{+} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk b_{\theta, m}^{+}(r, k) e^{-iks} \right) \cos m\theta \\
B_{\theta}^{-}(r, \theta, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{\theta, m}^{-} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk b_{\theta, m}^{-}(r, k) e^{-iks} \right) \sin m\theta \\
B_s^{+}(r, \theta, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{s, m}^{+} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk b_{s, m}^{+}(r, k) e^{-iks} \right) \sin m\theta \\
B_s^{-}(r, \theta, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{s, m}^{-} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk b_{s, m}^{-}(r, k) e^{-iks} \right) \cos m\theta .
\end{aligned}$$

On utilise l'équation 1.3 que l'on écrit en coordonnées cylindriques:

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} 1/r \partial_{\theta} A_s & - \partial_s A_{\theta} \\ \partial_s A_r & - \partial_r A_s \\ 1/r \partial_r (r A_{\theta}) - 1/r \partial_{\theta} A_r \end{pmatrix} .$$

Il vient pour tout m et tout k

$$\begin{cases} b_{r, m}^{\pm} &= \mp \frac{m}{r} a_{s, m}^{\pm} + i k a_{\theta, m}^{\pm} \\ b_{\theta, m}^{\pm} &= -i k a_{r, m}^{\pm} - \partial_r a_{s, m}^{\pm} \\ b_{s, m}^{\pm} &= \frac{1}{r} a_{\theta, m}^{\pm} + \partial_r a_{\theta, m}^{\pm} \pm \frac{m}{r} a_{r, m}^{\pm} . \end{cases}$$

En utilisant les relations 1.20 ainsi que la formule de récurrence reliant les I_m (équation 1.19), on obtient finalement

$$\begin{pmatrix} b_{r, m}^{\pm}(r, k) \\ b_{\theta, m}^{\pm}(r, k) \\ b_{s, m}^{\pm}(r, k) \end{pmatrix} = (s_m^{\pm}(k) - \delta_m^{\pm}(k)) \begin{pmatrix} i k I_m'(kr) \\ \pm i m / r I_m(kr) \\ k I_m(kr) \end{pmatrix} . \quad (1.21)$$

On voit donc que le champ magnétique ne dépend plus des fonctions $c_m^{\pm}(k)$ introduites au paragraphe précédent. La raison en est simple: en effet, dans l'équation 1.20, la partie proportionnelle à la fonction $c_m^{\pm}(k)$ correspond à un champ de vecteur \vec{A}_m^{\pm} de rotationnel et de divergence nuls, donc à un champ de vecteur égal au gradient d'une fonction harmonique; ce degré de liberté supplémentaire témoigne ainsi de l'invariance de jauge évoquée au début de la sous-section 1.1.1. Dès lors, on posera donc $c_m^{\pm}(k) = 0$ et ceci sans ôter aucune généralité à la physique du problème.

On définit la force du $2m$ -pôle comme suit (cette définition peu classique sera justifiée un peu plus loin):

$$\mathcal{B}_{m-1}^{\pm}(s) = \frac{i}{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} dk b_m^{\pm}(k) k^m e^{-iks} , \quad m \geq 1. \quad (1.22)$$

En utilisant la définition 1.22, l'équation 1.21 ainsi que le développement en série des fonctions I_m ([9, p. 375]),

$$I_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^q}{q!(m+q)!} ,$$

on obtient les composantes $2m$ -polaires droites et tournées du champ magnétique ($m \geq 1$):

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{r,m}^{\pm}(r, \theta, s) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{m+2q}{4^q q!(m+q)!} r^{m+2q-1} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q)}(s) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{array} \right. \\ B_{\theta,m}^{\pm}(r, \theta, s) = \pm \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{m}{4^q q!(m+q)!} r^{m+2q-1} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q)}(s) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{array} \right. \\ B_{s,m}^{\pm}(r, \theta, s) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{1}{4^q q!(m+q)!} r^{m+2q} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q+1)}(s) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.23)$$

où $(\mathcal{B}_m^{\pm})^{(q)}$ désigne la dérivée $q^{\text{ième}}$ de la fonction \mathcal{B}_m^{\pm} . On voit donc que les fonctions $\mathcal{B}_m^{\pm}(s)$ ($m \geq 0$) définissent la solution la plus générale décrivant les composantes $(2m+1)$ -polaires droites et tournées d'un champ magnétique statique (leur valeur respective étant fixée par les conditions aux limites).

Enfin, pour plus de généralité dans l'exposé, on peut donner facilement les potentiels scalaires Φ_m^{\pm} dont dérivent les champs \vec{B}_m^{\pm} écrits ci-dessus; on a pour chaque composante $2m$ -polaire droite ou tournée

$$\Phi_m^{\pm}(r, \theta, s) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{r^{m+2q} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q)}(s)}{4^q q!(m+q)!} \left\{ \begin{array}{l} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{array} \right. , \quad m \geq 1 . \quad (1.24)$$

En effet, on vérifie aisément qu'en prenant le gradient de l'égalité 1.24 (écrit en coordonnées cylindriques) on retombe bien sur l'équation 1.23 (la nullité du Laplacien du potentiel scalaire Φ_m^{\pm} vient immédiatement de la nullité de la divergence du champ \vec{B}_m^{\pm}). En utilisant le fait que pour tout entier m on a

$$r^m \left\{ \begin{array}{l} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \Re(x + iy)^m \\ \Im(x + iy)^m \end{array} \right.$$

et en supposant que les fonctions \mathcal{B}_m^{\pm} ne dépendent pas de s (absence de champ de fuite), on retrouve les définitions usuelles relatives à la force et au potentiel magnétique scalaire d'un $2m$ -pôle droit ou tourné:

$$\Phi_m^{\pm}(x, y) = \frac{\mathcal{B}_{m-1}^{\pm}}{m!} \left\{ \begin{array}{l} \Im(x + iy)^m \\ \Re(x + iy)^m \end{array} \right. \quad \text{d'où la définition 1.22.}$$

Forme analytique finale pour le potentiel vecteur en coordonnées cylindriques ou cartésiennes

De la même façon que pour le champ \vec{B} , en utilisant l'équation 1.20, la définition 1.22 ainsi que la décomposition en série des fonctions I_m , on a pour tout $m \geq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{r,m}^{\pm}(r, \theta, s) = \pm 1/2 \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{r^{m+2q+1}}{4^q q! (m+1+q)!} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q+1)}(s) \\ A_{\theta,m}^{\pm}(r, \theta, s) = 1/2 \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{r^{m+2q-1}}{4^q q! (m+1+q)!} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q+1)}(s) \\ A_{s,m}^{\pm}(r, \theta, s) = \mp \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{r^{m+2q}}{4^q q! (m+q)!} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q)}(s) \end{array} \right\} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \\ \cos m\theta \\ \sin m\theta \\ \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (1.25)$$

et finalement, en écrivant

$$A_{x,m}^{\pm} = A_{r,m}^{\pm} \cos \theta - A_{\theta,m}^{\pm} \sin \theta \text{ et } A_{y,m}^{\pm} = A_{r,m}^{\pm} \sin \theta + A_{\theta,m}^{\pm} \cos \theta ,$$

on obtient l'expression des composantes $2m$ -polaires du champ \vec{A} en coordonnées cartésiennes:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{x,m}^{\pm}(x, y, s) = \pm \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{(x^2 + y^2)^q}{4^q q! (m+1+q)!} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q+1)}(s) \\ A_{y,m}^{\pm}(x, y, s) = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{(x^2 + y^2)^q}{4^q q! (m+1+q)!} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q+1)}(s) \\ A_{s,m}^{\pm}(x, y, s) = \mp \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{(x^2 + y^2)^q}{4^q q! (m+q)!} (\mathcal{B}_{m-1}^{\pm})^{(2q)}(s) \end{array} \right\} \begin{cases} \Re(x + iy)^{m+1} \\ \Im(x + iy)^{m+1} \\ \Im(x + iy)^{m+1} \\ \Re(x + iy)^{m+1} \\ \Re(x + iy)^m \\ \Im(x + iy)^m \end{cases} \quad (1.26)$$

En particulier, en l'absence de champ de fuite, on a $A_{x,m}^{\pm} = A_{y,m}^{\pm} = 0$; on retrouve ainsi la définition usuelle du potentiel vecteur d'un $2m$ -pôle droit ou tourné:

$$\vec{A}_m^{\pm}(x, y) = A_{s,m}^{\pm}(x, y) \vec{s} = \mp \frac{\mathcal{B}_{m-1}^{\pm}}{m!} \vec{s} \begin{cases} \Re(x + iy)^m \\ \Im(x + iy)^m \end{cases} .$$

Cas $m = 0$, le solénoïde

Dans le cas particulier $m = 0$, on rappelle que seules les composantes $(a_{r,0}^+, a_{s,0}^+)$ et $a_{\theta,0}^-$ du potentiel vecteur sont véritablement définies et associées respectivement aux composantes $b_{\theta,0}^+$ et $(b_{r,0}^-, b_{s,0}^-)$ du champ magnétique. En suivant exactement la même démarche que précédemment, on aboutit pour le mode monopolaire “+” et “-” à

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} a_{r,0}^+(r,k) = i a_0^+(k) I_1(kr) \\ a_{s,0}^+(r,k) = a_0^+(k) I_0(kr) \end{array} \right) \Rightarrow b_{\theta,0} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{(m=0)}^+ = \vec{0} \\ \\ a_{\theta,0}^-(r,k) = a_0^-(k) I_1(kr) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} b_{r,0}^-(r,k) = i k a_0^-(k) I_1(kr) \\ b_{s,0}^-(r,k) = k a_0^-(k) I_0(kr) \end{array} \right) . \end{array} \right.$$

La première de ces deux équations vient du fait qu'un champ de vecteur \vec{B} invariant par rotation autour d'un axe \hat{s} , azimutal et de rotationnel nul, est partout nul dans un espace "sans trou" (il suffit de calculer la circulation de \vec{B} le long d'un cercle d'axe \hat{s} et d'utiliser le théorème de Stokes).

Concernant la composante monopolaire tournée du potentiel vecteur, on introduit comme précédemment la fonction suivante:

$$\mathcal{B}_{-1}^-(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a_0^-(k) k e^{-iks} .$$

En utilisant la décomposition en série de la fonction I_1 ainsi que la définition du potentiel vecteur azimutal A_θ en fonction de la composante $a_{\theta,0}^-$, on obtient rapidement

$$A_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dk a_{\theta,0}^-(r,k) e^{-iks} = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q r^{2q+1}}{4^q q!(q+1)!} (\mathcal{B}_{-1}^-)^{(2q)}(s) ,$$

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} A_x = -y U(x, y, s) \\ A_y = x U(x, y, s) \\ A_s = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec } U(x, y, s) = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (x^2 + y^2)^q}{4^q q!(q+1)!} (\mathcal{B}_{-1}^-)^{(2q)}(s) .$$

Avant d'aller plus loin, on insistera en particulier sur le fait que la fonction $\mathcal{B}_{-1}^-(s)$ n'est ni plus ni moins que le champ magnétique longitudinal sur l'axe. En effet, on a

$$B_s = \partial_x A_y - \partial_y A_x = 2U + (x\partial_x + y\partial_y)U , \text{ soit } B_s(x=0, y=0, s) = 2U(0, 0, s) = \mathcal{B}_{-1}^-(s) .$$

Cette situation est bien représentée par le cas particulier du solénoïde. En effet, un solénoïde de longueur L et de rayon r_0 , contenant N spires parcourues par un courant d'intensité I , engendre dans la région $0 \leq r \leq r_0$ un potentiel vecteur azimutal A_θ défini par [8, p. S18]

$$A_\theta(r, s) = \frac{2\mu_0 N I r_0}{\pi L} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kL/2) K_1(kr_0)}{k} I_1(kr) \cos ks$$

où K_1 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1 irrégulière à l'origine. Ainsi, avec les notations précédentes, ceci correspond à

$$a_0^-(k) = \frac{\mu_0 N I r_0}{\pi L} \frac{\sin(kL/2) K_1(kr_0)}{k} .$$

La fonction $\mathcal{B}_{-1}^{-}(s)$ que l'on note désormais \mathcal{B}_{sol} est alors donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\text{sol}} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dk a_0^{-}(k) k e^{-iks} = \frac{\mu_0 N I r_0}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sin(kL/2) K_1(kr_0) e^{-iks} \\ &= \frac{\mu_0 N I r_0}{\pi L} \int_0^{\infty} dk [\sin(k(L/2 + s)) + \sin(k(L/2 - s))] K_1(kr_0) .\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration ([11, p. 731]), $\int_0^{\infty} dx K_1(ax) \sin(bx) = \frac{b\pi}{2a} (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$, on obtient finalement

$$\mathcal{B}_{\text{sol}}(s) = B_s(x = 0, y = 0, s) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \left[\frac{L/2 - s}{\sqrt{(L/2 - s)^2 + r_0^2}} + \frac{L/2 + s}{\sqrt{(L/2 + s)^2 + r_0^2}} \right]$$

et l'on retrouve ainsi l'expression analytique du champ magnétique longitudinal sur l'axe du solénoïde.

Pour finir, on remarque en particulier que, contrairement aux $(2m)$ -pôles, le potentiel vecteur reste purement transverse en l'absence de champ de fuite: $A_x = -B_0 y/2 \neq 0$ et $A_y = B_0 x/2 \neq 0$ où $B_0 = \mu_0 n I$ est le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long, parcouru par un courant d'intensité I et contenant n spires par unité de longueur.

Tableau récapitulatif: potentiel vecteur et champ magnétique du solénoïde et du $2(m + 1)$ -pôle ($0 \leq m \leq 3$)

On donne à la page suivante (Tab. 1.1) les formules analytiques relatives au potentiel vecteur et au champ magnétique du solénoïde et du $2(m + 1)$ -pôle ($0 \leq m \leq 3$). On a tronqué les séries qui définissent ces quantités à l'ordre 3 en (x, y) pour le champ \vec{B} et à l'ordre 4 pour le champ \vec{A} ; ce que l'on a écrit symboliquement “ $+o(4)$ ” pour \vec{B} et “ $+o(5)$ ” pour \vec{A} .

1.1.3 Magnétostatique en coordonnées curvilignes

Potentiel scalaire tronqué à l'ordre 4 dans les coordonnées transverses

On commence ici par calculer le potentiel scalaire magnétique Φ vérifiant l'équation de Laplace 1.7. Puisque Φ est un pseudo-scalaire, la composante symétrique Φ^+ du potentiel scalaire (associée à la composante symétrique \vec{B}^+ du champ magnétique) est antisymétrique par rapport au plan horizontal $y = 0$ et inversement pour Φ^- . On pose donc

solénoïde	$A_x = -\mathcal{B}_{\text{sol}}/2 y + \mathcal{B}_{\text{sol}}''/16 y(x^2 + y^2) + o(5)$ $A_y = \mathcal{B}_{\text{sol}}/2 x - \mathcal{B}_{\text{sol}}''/16 x(x^2 + y^2) + o(5)$ $A_s = 0$	$B_x = -\mathcal{B}_{\text{sol}}'/2 x + \mathcal{B}_{\text{sol}}'''/16 x(x^2 + y^2) + o(4)$ $B_y = -\mathcal{B}_{\text{sol}}'/2 y + \mathcal{B}_{\text{sol}}'''/16 y(x^2 + y^2) + o(4)$ $B_s = \mathcal{B}_{\text{sol}} - \mathcal{B}_{\text{sol}}''/4(x^2 + y^2) + o(4)$
$2(m+1)$ pôle	droit ou tourné	
$m=0$ dipôle droit	$A_x = \mathcal{B}_0^{+'}/4(x^2 - y^2) - \mathcal{B}_0^{+''}/48(x^4 - y^4) + o(5)$ $A_y = \mathcal{B}_0^{+'}/2 xy - \mathcal{B}_0^{+''}/24 xy(x^2 + y^2) + o(5)$ $A_s = -\mathcal{B}_0^{+'} x + \mathcal{B}_0^{+''}/8 x(x^2 + y^2) + o(5)$	$B_x = -\mathcal{B}_0^{+''}/4 xy + o(4)$ $B_y = \mathcal{B}_0^{+'} - \mathcal{B}_0^{+''}/8(x^2 + 3y^2) + o(4)$ $B_s = \mathcal{B}_0^{+'} y - \mathcal{B}_0^{+''}/8 y(x^2 + y^2) + o(4)$
$m=0$ dipôle tourné	$A_x = -\mathcal{B}_0^{-'}/2 xy + \mathcal{B}_0^{-''}/24 xy(x^2 + y^2) + o(5)$ $A_y = \mathcal{B}_0^{-'}/4(x^2 - y^2) - \mathcal{B}_0^{-''}/48(x^4 - y^4) + o(5)$ $A_s = \mathcal{B}_0^{-'} y - \mathcal{B}_0^{-''}/8 y(x^2 + y^2) + o(5)$	$B_x = \mathcal{B}_0^{-'}/4 xy + o(4)$ $B_y = \mathcal{B}_0^{-''} - \mathcal{B}_0^{-''}/8(3x^2 + y^2) + o(4)$ $B_s = \mathcal{B}_0^{-'} x - \mathcal{B}_0^{-''}/8 x(x^2 + y^2) + o(4)$
$m=1$ quadrupôle droit	$A_x = \mathcal{B}_1^{+'}/12(x^3 - 3xy^2) + o(5)$ $A_y = \mathcal{B}_1^{+'}/12(3x^2y - y^3) + o(5)$ $A_s = \mathcal{B}_1^{+'}/2(y^2 - x^2) + \mathcal{B}_1^{+''}/24(x^4 - y^4) + o(5)$	$B_x = \mathcal{B}_1^{+'} y - \mathcal{B}_1^{+''}/12(3x^2y + y^3) + o(4)$ $B_y = \mathcal{B}_1^{+'} x - \mathcal{B}_1^{+''}/12(x^3 + 3xy^2) + o(4)$ $B_s = \mathcal{B}_1^{+'} xy + o(4)$
$m=1$ quadrupôle tourné	$A_x = -\mathcal{B}_1^{-'}/12(3x^2y - y^3) + o(5)$ $A_y = \mathcal{B}_1^{-'}/12(x^3 - 3xy^2) + o(5)$ $A_s = \mathcal{B}_1^{-'} xy - \mathcal{B}_1^{-''}/12 xy(x^2 + y^2) + o(5)$	$B_x = \mathcal{B}_1^{-'}/6 x^3 + o(4)$ $B_y = -\mathcal{B}_1^{-''} y + \mathcal{B}_1^{-''}/6 y^3 + o(4)$ $B_s = \mathcal{B}_1^{-'}/2(x^2 - y^2) + o(4)$
$m=2$ hexapôle droit	$A_x = \mathcal{B}_2^{+'}/48(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + o(5)$ $A_y = \mathcal{B}_2^{+'}/12(x^3y - xy^3) + o(5)$ $A_s = -\mathcal{B}_2^{+'}/6(x^3 - 3xy^2) + o(5)$	$B_x = \mathcal{B}_2^{+'} xy + o(4)$ $B_y = \mathcal{B}_2^{+'}/2(x^2 - y^2) + o(4)$ $B_s = \mathcal{B}_2^{+'}/6(3x^2y - y^3) + o(4)$
$m=2$ hexapôle tourné	$A_x = -\mathcal{B}_2^{-'}/12(x^3y - xy^3) + o(5)$ $A_y = \mathcal{B}_2^{-'}/48(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + o(5)$ $A_s = \mathcal{B}_2^{-'}/6(3x^2y - y^3) + o(5)$	$B_x = \mathcal{B}_2^{-'}/2(x^2 - y^2) + o(4)$ $B_y = -\mathcal{B}_2^{-''} xy + o(4)$ $B_s = \mathcal{B}_2^{-'}/6(x^3 - 3xy^2) + o(4)$
$m=3$ octupôle droit	$A_x = o(5)$ $A_y = o(5)$ $A_s = -\mathcal{B}_3^{+'}/24(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + o(5)$	$B_x = \mathcal{B}_3^{+'}/6(3x^2y - y^3) + o(4)$ $B_y = \mathcal{B}_3^{+'}/6(x^3 - 3xy^2) + o(4)$ $B_s = o(4)$
$m=3$ octupôle tourné	$A_x = o(5)$ $A_y = o(5)$ $A_s = \mathcal{B}_3^{-'}/6(x^3y - xy^3) + o(5)$	$B_x = \mathcal{B}_3^{-'}/6(x^3 - 3xy^2) + o(4)$ $B_y = -\mathcal{B}_3^{-''}/6(3x^2y - y^3) + o(4)$ $B_s = o(4)$

TAB. 1.1 – *Potentiel vecteur et champ magnétique du solénoïde et du $2(m+1)$ -pôle en coordonnées cartésiennes*

$$\Phi = \Phi^+ + \Phi^- \text{ avec } \begin{cases} \Phi^+(x, y, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{2k+1}(x, s) y^{2k+1} / (2k+1)! \\ \Phi^-(x, y, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{2k}(x, s) y^{2k} / (2k)! . \end{cases} \quad (1.27)$$

L'équation de Laplace (écrite dans les coordonnées curvilignes considérées ici, équation 1.10) impose une relation de récurrence reliant les fonctions $\Phi_k(x, s)$. On a pour tout k entier

$$\Phi_{k+2}(x, s) = -\frac{1}{1+h(s)x} \left[\partial_x \left((1+h(s)x) \partial_x \right) + \partial_s \left(\frac{1}{1+h(s)x} \partial_s \right) \right] \Phi_k(x, s) . \quad (1.28)$$

Ainsi, toutes les fonctions Φ_{2k} ($k \geq 1$) et Φ_{2k+1} ($k \geq 1$) se déduisent respectivement de Φ_0 et de Φ_1 . On développe donc les deux fonctions $\Phi_0(x, s)$ et $\Phi_1(x, s)$ en série entière par rapport à x :

$$\begin{cases} \Phi_0(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_m^-(s) x^{m+1} / (m+1)! + \varphi_0(s) \\ \Phi_1(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_m^+(s) x^m / m! . \end{cases} \quad (1.29)$$

Avant d'aller plus loin, nous devons insister sur les deux points suivants.

- Comme dans le cas rectangulaire, on voit que le champ \vec{B} qui dérive directement du potentiel Φ peut être défini à partir de deux suites de fonctions qui sont ici les suites $(\mathcal{A}_m^+(s))_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\varphi_0, (\mathcal{A}_m^-(s))_{m \in \mathbb{N}})$. Ces dernières dépendent uniquement des caractéristiques du champ magnétique sur l'axe \hat{s} . On a en effet
 - $B_x = \partial_x \Phi \Rightarrow B_x(x, y=0, s) = \partial_x \Phi_0(x, s)$ et donc $\mathcal{A}_m^-(s) = (\partial_x^m B_x)_{(x=y=0, s)}$.
 - $B_y = \partial_y \Phi \Rightarrow B_y(x, y=0, s) = \Phi_1(x, s)$ et donc $\mathcal{A}_m^+(s) = (\partial_x^m B_y)_{(x=y=0, s)}$.
 - $B_s = \partial_s \Phi / (1+h(s)x) \Rightarrow B_s(x=y=0, s) = \varphi_0'(s)$.
- Le cas rectangulaire n'est que le cas particulier du cas curviligne où l'on a fixé $h(s)=0$. On doit donc pouvoir relier la suite $(\mathcal{B}_{\text{sol}}, (\mathcal{B}_m^\pm)_{m \in \mathbb{N}})$ définie à la sous-section 1.1.2 à la suite $(\varphi_0, (\mathcal{A}_m^\pm)_{m \in \mathbb{N}})$. En utilisant les trois égalités écrites ci-dessus ainsi que le tableau 1.1, on obtient aisément les relations recherchées:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi'_0 = \mathcal{B}_{\text{sol}} & \\ \mathcal{A}_0^+ = \mathcal{B}_0^+ & \mathcal{A}_0^- = \mathcal{B}_0^- \\ \mathcal{A}_1^+ = \mathcal{B}_1^+ & \mathcal{A}_1^- = \mathcal{B}_1^- - \mathcal{B}'_{\text{sol}}/2 \\ \mathcal{A}_2^+ = \mathcal{B}_2^+ - \mathcal{B}_0^{+''}/4 & \mathcal{A}_2^- = \mathcal{B}_2^- - 3/4 \mathcal{B}_0^{-''} \\ \mathcal{A}_3^+ = \mathcal{B}_3^+ - \mathcal{B}_1^{+''}/2 & \mathcal{A}_3^- = \mathcal{B}_3^- - \mathcal{B}_1^{-''} + 3/8 \mathcal{B}_{\text{sol}}''' \\ \vdots & \vdots \text{ et cetera.} \end{array} \right.$$

On voit donc que les fonctions de s , $(\mathcal{A}_m^\pm)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{B}_m^\pm)_{m \in \mathbb{N}}$, sont égales deux à deux si et seulement si elles sont indépendantes de s .

Cette dernière remarque étant faite et par comparaison avec le cas rectangulaire, nous continuerons cependant à parler ici de composante $2(m+1)$ -polaire droite (respectivement tournée) pour la partie du champ magnétique \vec{B}^+ (respectivement \vec{B}^-) engendrée par le coefficient \mathcal{A}_m^+ dans le développement de Φ_1 (respectivement \mathcal{A}_m^- dans Φ_0).

Le but de ce paragraphe est alors de calculer le potentiel Φ jusqu'à l'ordre 4 dans les coordonnées transverses (x, y) . En reprenant les équations 1.27 et 1.29, on voit qu'il nous suffit simplement de calculer Φ_2 , Φ_3 et Φ_4 respectivement aux ordres 2, 1 et 0 en (x, y) . En utilisant la relation de récurrence 1.28, on tombe facilement sur les développements recherchés:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_2 = (-\varphi_0'' - h \mathcal{A}_0^- - \mathcal{A}_1^-) + (h' \varphi_0' + 2h \varphi_0'' + h^2 \mathcal{A}_0^- - \mathcal{A}_0^{-''} - h \mathcal{A}_1^- - \mathcal{A}_2^-) x + \\ \quad (-3 h h' \varphi_0' - 3 h^2 \varphi_0'' - h^3 \mathcal{A}_0^- + h' \mathcal{A}_0^{-'} + 2h \mathcal{A}_0^{-''} + h^2 \mathcal{A}_1^- - 1/2 \mathcal{A}_1^{-''} - \\ \quad h/2 \mathcal{A}_2^- - 1/2 \mathcal{A}_3^-) x^2 + o(x^3) \\ \Phi_3 = (-\mathcal{A}_0^{+''} - h \mathcal{A}_1^+ - \mathcal{A}_2^+) + \\ \quad (h' \mathcal{A}_0^{+'} + 2h \mathcal{A}_0^{+''} + h^2 \mathcal{A}_1^+ - \mathcal{A}_1^{+''} - h \mathcal{A}_2^+ - \mathcal{A}_3^+) x + o(x^2) \\ \Phi_4 = (5 h h' \varphi_0' + 4 h^2 \varphi_0'' + \varphi_0^{''''} + h^3 \mathcal{A}_0^- - 2h \mathcal{A}_0^{-''} + h'' \mathcal{A}_0^- + 2 \mathcal{A}_1^{-''} - \\ \quad h^2 \mathcal{A}_1^- + 2h \mathcal{A}_2^- + \mathcal{A}_3^-) + o(x) . \end{array} \right.$$

Dérivation du champ magnétique

On calcule ici le champ magnétique \vec{B} à l'ordre 3 dans les coordonnées transverses (x, y) . On a

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = \partial_x \Phi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_x^+ = y \partial_x \Phi_1 + y^3/6 \partial_x \Phi_3 + o(4) \\ B_x^- = \partial_x \Phi_0 + y^2/2 \partial_x \Phi_2 + o(4) \end{array} \right. \\ \\ B_y = \partial_y \Phi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_y^+ = \Phi_1 + y^2/2 \Phi_3 + o(4) \\ B_y^- = y \Phi_2 + y^3/6 \Phi_4 + o(4) \end{array} \right. \\ \\ B_s = \partial_s \Phi / (1 + h x) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_s^+ = (1 - h x + h^2 x^2) \partial_s \Phi_1 + y^3/6 \partial_s \Phi_3 + o(4) \\ B_s^- = (1 - h x + h^2 x^2 - h^3 x^3) \partial_s \Phi_0 + \\ (1 - h x) y^2/2 \partial_s \Phi_2 + o(4) . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le champ \vec{B}^+ est alors donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^+ = [1/6 (h' \mathcal{A}_0^{+'} + 2h \mathcal{A}_0^{+''}) y^3] + [\mathcal{A}_1^+ y + (h^2 \mathcal{A}_1^+ - \mathcal{A}_1^{+'}) y^3/6] + \\ [\mathcal{A}_2^+ x y - h \mathcal{A}_2^+ y^3/6] + [\mathcal{A}_3^+/6 (3x^2 y - y^3)] + o(4) \\ \\ B_y^+ = [\mathcal{A}_0^+ - \mathcal{A}_0^{+'} y^2/2 + (h' \mathcal{A}_0^{+'} + 2h \mathcal{A}_0^{+''}) x y^2/2] + \\ [\mathcal{A}_1^+ x - h \mathcal{A}_1^+ y^2/2 + (h^2 \mathcal{A}_1^+ - \mathcal{A}_1^{+'}) x y^2/2] + \\ [\mathcal{A}_2^+ (x^2 - y^2)/2 - h \mathcal{A}_2^+ x y^2/2] + [\mathcal{A}_3^+/6 (x^3 - 3x y^2)] + o(4) \\ \\ B_s^+ = [\mathcal{A}_0^{+'} y - h \mathcal{A}_0^{+'} x y + h^2 \mathcal{A}_0^{+'} x^2 y - \mathcal{A}_0^{+'''} y^3/6] + \\ [\mathcal{A}_1^{+'} x y - h \mathcal{A}_1^{+'} x^2 y - (h' \mathcal{A}_1^+ + h \mathcal{A}_1^{+'}) y^3/6] + \\ [\mathcal{A}_2^{+'}/6 (3x^2 y - y^3)] + o(4) . \end{array} \right.$$

Pour ce qui est du champ magnétique \vec{B}^- , tous les termes engendrés par φ_0 et \mathcal{A}_0^- seront omis volontairement dans les résultats qui vont suivre. En effet, le coefficient \mathcal{A}_0^- (respectivement φ_0) engendre un champ magnétique porté par \vec{x} (respectivement par \vec{s}) en $x=y=0$ alors que ce dernier est purement vertical (c.-à-d. porté par \vec{y}) pour tous les éléments optiques classiquement utilisés dans les lignes de transport hormis le solénoïde (c.-à-d. le dipôle droit, le quadrupôle et l'hexapôle). Tous calculs faits, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^- = [\mathcal{A}_1^- x - h \mathcal{A}_1^- y^2/2 + (2h^2 \mathcal{A}_1^- - \mathcal{A}_1^{-''}) xy^2/2] + \\ \quad [\mathcal{A}_2^- (x^2 - y^2)/2 - h \mathcal{A}_2^- xy^2/2] + [\mathcal{A}_3^- /6 (x^3 - 3xy^2)] + o(4) \\ \\ B_y^- = [-\mathcal{A}_1^- y - h \mathcal{A}_1^- xy + (2h^2 \mathcal{A}_1^- - \mathcal{A}_1^{-''}) x^2 y/2 + (2 \mathcal{A}_1^{-''} - h^2 \mathcal{A}_1^-) y^3/6] + \\ \quad [-\mathcal{A}_2^- xy - h \mathcal{A}_2^- x^2 y/2 + h \mathcal{A}_2^- y^3/3] + [\mathcal{A}_3^- /6 (y^3 - 3x^2 y)] + o(4) \\ \\ B_s^- = [\mathcal{A}_1^{-'} (1 - hx)x^2/2 - \mathcal{A}_1^{-'} y^2/2 - h' \mathcal{A}_1^- xy^2/2] + \\ \quad [\mathcal{A}_2^{-'} /6 (x^3 - 3xy^2)] + o(4) . \end{array} \right.$$

Dérivation du potentiel vecteur

Nous avons obtenu au paragraphe précédent un développement jusqu'à l'ordre 3 en (x, y) pour les champs \vec{B}^+ et \vec{B}^- , tout en séparant soigneusement chaque composante $2m$ -polaire droite ou tournée engendrée par chacun des coefficients \mathcal{A}_0^+ , \mathcal{A}_1^\pm , \mathcal{A}_2^\pm et \mathcal{A}_3^\pm . Il reste donc à dériver les potentiels vecteurs \vec{A}_1^\pm , \vec{A}_2^\pm , \vec{A}_3^\pm et \vec{A}_4^\pm associés respectivement à ces quatre coefficients. Dans ce but, nous écrivons pour chacun d'eux un développement à l'ordre 4 en (x, y) le plus général possible et nous utilisons l'équation 1.12, sous-section 1.1.1, afin d'identifier les coefficients de ce développement :

$$\vec{A}^\pm = \vec{A}_1^\pm + \vec{A}_2^\pm + \vec{A}_3^\pm + \vec{A}_4^\pm + \dots \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_i^\pm = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \vec{\alpha}_{ijk} x^j y^k + o(5) \\ \vec{B}_i^\pm = \text{rot} \vec{A}_i^\pm \end{array} \right. , 1 \leq i \leq 4 .$$

Tous calculs faits, on obtient

– pour le dipôle droit (cas relatif au coefficient \mathcal{A}_0^+)

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{x,1}^+ = \mathcal{A}_0^{+'} (x^2 - y^2)/4 - \mathcal{A}_0^{+''''} (3x^4 + 6x^2 y^2 - 5y^4)/192 - \\ \quad (1/6 h' \mathcal{A}_0^+ + 7/12 h \mathcal{A}_0^{+'}) x^3 + h \mathcal{A}_0^{+'} xy^2/2 + \\ \quad (5/12 h h' \mathcal{A}_0^+ + 5/8 h^2 \mathcal{A}_0^{+'}) x^4 - 1/16 h^2 \mathcal{A}_0^{+'} y^4 + o(5) \\ \\ A_{y,1}^+ = \mathcal{A}_0^{+'} xy/2 - \mathcal{A}_0^{+''''} (x^3 y + 3xy^3)/48 - h \mathcal{A}_0^{+'} y^3/12 + \\ \quad h^2 \mathcal{A}_0^{+'} x^3 y/3 - h^2 \mathcal{A}_0^{+'} xy^3/4 + o(5) \\ \\ A_{s,1}^+ = -\mathcal{A}_0^+ (x - hx^2/2 (1 - hx + h^2 x^2)) + \mathcal{A}_0^{+''} (x^3/12 + xy^2/4) - \\ \quad (1/24 h'' \mathcal{A}_0^+ + 3/16 h' \mathcal{A}_0^{+'} + 11/48 h \mathcal{A}_0^{+'''}) x^4 - h \mathcal{A}_0^{+'''} x^2 y^2/4 + \\ \quad (1/48 h' \mathcal{A}_0^{+'} + 1/16 h \mathcal{A}_0^{+'''}) y^4 + o(5) . \end{array} \right.$$

– pour le quadrupôle droit (cas relatif au coefficient \mathcal{A}_1^+)

$$\begin{cases} A_{x,2}^+ = \mathcal{A}_1^{+'}(x^3 - 3xy^2)/12 - (5/48 h \mathcal{A}_1^{+'} + 1/24 h' \mathcal{A}_1^+)(x^4 - y^4) + o(5) \\ A_{y,2}^+ = \mathcal{A}_1^{+'}(3x^2y - y^3)/12 - h \mathcal{A}_1^{+'}(4x^3y - 3xy^3)/12 + o(5) \\ A_{s,2}^+ = \mathcal{A}_1^+(y^2 - x^2)/2 + h \mathcal{A}_1^+ x^3/6 - h^2 \mathcal{A}_1^+(4x^4 - y^4)/24 + \\ \quad \mathcal{A}_1^{''}(x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4)/48 + o(5) . \end{cases}$$

– pour le quadrupôle tourné (cas relatif au coefficient \mathcal{A}_1^-)

$$\begin{cases} A_{x,2}^- = -\mathcal{A}_1^{-'}(3x^2y - y^3)/12 + 5/12 h \mathcal{A}_1^{-'}x^3y + 1/6 h' \mathcal{A}_1^- xy^3 + o(5) \\ A_{y,2}^- = \mathcal{A}_1^{-'}(x^3 - 3xy^2)/12 - h \mathcal{A}_1^{-'}(x^4 - y^4)/48 + o(5) \\ A_{s,2}^- = \mathcal{A}_1^- xy - h \mathcal{A}_1^- y^3/6 + h^2 \mathcal{A}_1^- xy^3/3 + \\ \quad \mathcal{A}_1^{''}(x^3y - 3xy^3)/12 + o(5) . \end{cases}$$

– pour l'hexapôle droit (cas relatif au coefficient \mathcal{A}_2^+)

$$\begin{cases} A_{x,3}^+ = \mathcal{A}_2^{+'}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)/48 + o(5) \\ A_{y,3}^+ = \mathcal{A}_2^{+'}(x^3y - xy^3)/12 + o(5) \\ A_{s,3}^+ = -\mathcal{A}_2^+ \left((x^3 - 3xy^2)/6 - h(x^4 - y^4)/24 \right) + o(5) . \end{cases}$$

– pour l'hexapôle tourné (cas relatif au coefficient \mathcal{A}_2^-)

$$\begin{cases} A_{x,3}^- = \mathcal{A}_2^{-'}(xy^3 - x^3y)/12 + o(5) \\ A_{y,3}^- = \mathcal{A}_2^{-'}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)/48 + o(5) \\ A_{s,3}^- = \mathcal{A}_2^- \left((3x^2y - y^3)/6 - hxy^3/6 \right) + o(5) . \end{cases}$$

– pour l'octupôle droit (cas relatif au coefficient \mathcal{A}_3^+)

$$\begin{cases} A_{x,4}^+ = A_{y,4}^+ = o(5) \\ A_{s,4}^+ = -\mathcal{A}_3^+(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)/24 + o(5) . \end{cases}$$

– pour l'octupôle tourné (cas relatif au coefficient \mathcal{A}_3^-)

$$\begin{cases} A_{x,4}^- = A_{y,4}^- = o(5) \\ A_{s,4}^- = \mathcal{A}_3^-(x^3y - xy^3)/6 + o(5) . \end{cases}$$

$m = 0$ dipôle droit	$A_s = \mathcal{A}_0^+ [-x + h x^2/2 (1 - h x + h^2 x^2)] + o(5)$
$m = 1$ quadrupôle droit	$A_s = \mathcal{A}_1^+ [(y^2 - x^2)/2 + h x^3/6 - h^2(4x^4 - y^4)/24] + o(5)$
$m = 1$ quadrupôle tourné	$A_s = \mathcal{A}_1^- [xy - h y^3/6 + h^2 xy^3/3] + o(5)$
$m = 2$ hexapôle droit	$A_s = \mathcal{A}_2^+ [-(x^3 - 3xy^2)/6 + h(x^4 - y^4)/24] + o(5)$
$m = 2$ hexapôle tourné	$A_s = \mathcal{A}_2^- [(3x^2y - y^3)/6 - h xy^3/6] + o(5)$
$m = 3$ octupôle droit	$A_s = -\mathcal{A}_3^+ (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)/24 + o(5)$
$m = 3$ octupôle tourné	$A_s = \mathcal{A}_3^- (x^3y - xy^3)/6 + o(5)$

TAB. 1.2 – *Potentiel vecteur longitudinal du $2(m + 1)$ -pôle parfait*

Multipôles “parfaits”

Comme dans le cas rectangulaire, on voit que le potentiel vecteur devient purement longitudinal lorsque les fonctions \mathcal{A}_m^\pm ne dépendent pas de s (avec ici la condition supplémentaire que h ne dépend pas non plus de s): on parlera dans ce cas de multipôles parfaits. Le tableau 1.2 récapitule les résultats relatifs aux potentiels vecteurs longitudinaux ($A_{s,m+1}^+$, $0 \leq m \leq 3$) et ($A_{s,m+1}^-$, $1 \leq m \leq 3$) que l’on obtient dans cette situation²; on peut alors remarquer qu’en annulant h et en substituant les constantes \mathcal{B}_m^\pm aux constantes \mathcal{A}_m^\pm , on retombe comme prévu sur les résultats de la sous-section 1.1.2 (cf. Tab. 1.1).

2. L’expression des potentiels vecteurs droits $A_{s,m}^+$ en coordonnées curvilignes est déjà existante dans la littérature (voir par exemple Ref. [10]); à ma connaissance, celle des potentiels tournés $A_{s,m}^-$ ne l’est pas.

1.2 Hamiltonien d'une particule chargée soumise à un champ électromagnétique

1.2.1 Lagrangien et Hamiltonien en coordonnées curvilignes

Courbe de référence

On reprend la figure 1.2 de la section précédente; on considère donc une courbe géométrique de référence notée \mathcal{C} , paramétrisée par un vecteur $\vec{r}_0(s)$ où s désigne une abscisse curviligne. Pour plus de généralités dans l'exposé, on supposera pour l'instant que cette courbe n'est plus plane comme elle l'était à la section 1.1. Si $h(s)$ et $\tau(s)$ désignent respectivement la courbure et la torsion de la courbe \mathcal{C} à l'abscisse curviligne s et si l'on note $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{s})$ le trièdre de Serret–Frenet à l'abscisse s , on a³

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau(s) & h(s) \\ \tau(s) & 0 & 0 \\ -h(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{s} \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

On considère une particule chargée quelconque de masse m et de charge q . On paramétrise la position $\vec{r}(t)$ de cette particule par trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $s(t)$ comme suit:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(s(t)) + x(t)\vec{x}(s(t)) + y(t)\vec{y}(s(t)). \quad (1.31)$$

En dérivant la relation 1.31 par rapport à t et en utilisant l'équation 1.30, on obtient donc l'expression suivante pour la vitesse \vec{v} de la particule:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (1 + hx)\dot{s}\vec{s} + (\dot{x} + y\tau\dot{s})\vec{x} + (\dot{y} - x\tau\dot{s})\vec{y} \quad (1.32)$$

où $\dot{}$ signifie dérivée par rapport au temps t .

Lagrangien électromagnétique et Hamiltonien

On suppose que cette particule se déplace dans un champ (\vec{E}, \vec{B}) dérivant du potentiel électromagnétique (V, \vec{A}) avec

$$\begin{cases} \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} & \vec{A} = A_x(x, y, s, t)\vec{x} + A_y(x, y, s, t)\vec{y} + A_s(x, y, s, t)\vec{s} \\ \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} V & V = V(x, y, s, t). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \vec{s} = \frac{d}{ds} \vec{r}_0 & : \text{tangente à la trajectoire.} \\ \vec{x} = -\frac{d^2 \vec{r}_0}{ds^2} / \left\| \frac{d^2 \vec{r}_0}{ds^2} \right\| & : \text{normale à la trajectoire, } h = \left\| \frac{d^2 \vec{r}_0}{ds^2} \right\|. \\ \vec{y} = \vec{s} \wedge \vec{x} & : \text{binormale, } \tau = \det\left(\frac{d\vec{r}_0}{ds}, \frac{d^2 \vec{r}_0}{ds^2}, \frac{d^3 \vec{r}_0}{ds^3}\right) / h^2. \end{cases}$$

Le Lagrangien de cette particule est [12]

$$\mathcal{L}(x, y, s, \dot{x}, \dot{y}, \dot{s}; t) = -\frac{mc^2}{\gamma} + q(\vec{v} \cdot \vec{A} - V)$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$ et où \vec{v} est donnée par l'équation 1.32. On peut donc calculer par les méthodes usuelles les moments (P_x, P_y, P_s) associés aux coordonnées (x, y, s) . On a

$$\begin{cases} P_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = mc^2/\gamma^2 \partial\gamma/\partial\vec{v}^2 \partial\vec{v}^2/\partial\dot{x} + q \partial(\vec{v} \cdot \vec{A})/\partial\dot{x} \\ P_y = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{y} = mc^2/\gamma^2 \partial\gamma/\partial\vec{v}^2 \partial\vec{v}^2/\partial\dot{y} + q \partial(\vec{v} \cdot \vec{A})/\partial\dot{y} \\ P_s = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{s} = mc^2/\gamma^2 \partial\gamma/\partial\vec{v}^2 \partial\vec{v}^2/\partial\dot{s} + q \partial(\vec{v} \cdot \vec{A})/\partial\dot{s} \end{cases} \text{, soit}$$

$$\begin{cases} P_x = q A_x + m \gamma (\dot{x} + y \tau \dot{s}) \\ P_y = q A_y + m \gamma (\dot{y} - x \tau \dot{s}) \\ P_s = (1 + h x) (m \gamma (1 + h x) \dot{s} + q A_s) + y \tau P_x - x \tau P_y \end{cases} \quad (1.33)$$

L'Hamiltonien est alors défini par

$$\mathcal{H}(x, y, s, P_x, P_y, P_s; t) = P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_s \dot{s} - \mathcal{L} =$$

$$c \sqrt{m^2 c^2 + (P_x - q A_x)^2 + (P_y - q A_y)^2 + \left(\frac{P_s - y \tau P_x + x \tau P_y}{1 + h x} - q A_s \right)^2} + q V \quad (1.34)$$

et on note que la racine carrée dans cette dernière expression est, comme il se doit, l'énergie relativiste de la particule de masse m et d'impulsion $\vec{p} = m \gamma \vec{v}$: $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$.

1.2.2 Changement de variable indépendante

Préliminaires

Soit un système à n degrés de liberté (q_1, \dots, q_n) avec (P_1, \dots, P_n) pour moments conjugués; si t désigne la variable indépendante et $\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n; t)$ l'Hamiltonien régissant la dynamique de ce système, les équations d'Hamilton s'écrivent

$$\forall i, 1 \leq i \leq n \quad \begin{cases} dq_i/dt = \partial\mathcal{H}/\partial P_i \\ dP_i/dt = -\partial\mathcal{H}/\partial q_i \end{cases}$$

et $d\mathcal{H}/dt = \partial\mathcal{H}/\partial t$.

On suppose que la dérivée partielle de \mathcal{H} par rapport à l'un des P_i est non nulle pour un certain domaine de l'espace des phases et pour un certain intervalle de temps T ; pour fixer les idées, on suppose par exemple

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_1} = \dot{q}_1 \neq 0 \quad .$$

$t \longrightarrow q_1(t)$ est donc une bijection de l'intervalle T dans $q_1(T)$ et il vient

$$\begin{cases} dq_i/dq_1 = (dq_i/dt) (dt/dq_1) = (\partial\mathcal{H}/\partial P_i) (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1} \\ dP_i/dq_1 = (dP_i/dt) (dt/dq_1) = -(\partial\mathcal{H}/\partial q_i) (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1} \end{cases}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

On rajoute à cela le doublet (t, P_t) où $P_t \stackrel{\text{def}}{=} -\mathcal{H}$ et on a

$$\begin{cases} dt/dq_1 = (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1} \\ dP_t/dq_1 = -(d\mathcal{H}/dt) (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1} = -(\partial\mathcal{H}/\partial t) (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1}. \end{cases}$$

On a $P_t = -\mathcal{H}(q, P; t)$ avec $\partial\mathcal{H}/\partial P_1 \neq 0$; donc, en invoquant le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction \mathcal{K} définie sur un certain domaine des coordonnées $(t, q_2, \dots, q_n, P_t, P_2, \dots, P_n; q_1)$ telle que

$$P_1 = -\mathcal{K}(t, q_2, \dots, q_n, P_t, P_2, \dots, P_n; q_1).$$

On montre alors que \mathcal{K} est le nouvel Hamiltonien du système; plus précisément, il s'agit de démontrer que ce dernier conjugue t et P_t , $(q_i, 2 \leq i \leq n)$ et $(P_i, 2 \leq i \leq n)$ avec q_1 pour nouvelle variable indépendante. On a en effet

$$P_t = -\mathcal{H}(q, P; t) \Rightarrow dP_t = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_1} dq_1 - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_1} dP_1 - \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_i} dP_i \right) - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} dt,$$

soit

$$\begin{aligned} -dP_1 \stackrel{\text{def}}{=} d\mathcal{K} &= \sum_{i=2}^n \left[\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_1} \right)^{-1} dq_i + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_i} \right) \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_1} \right)^{-1} dP_i \right] + \\ &\quad \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_1} \right)^{-1} dt + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_1} \right)^{-1} dP_t. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\forall i, 2 \leq i \leq n \quad \begin{cases} (\partial\mathcal{K}/\partial P_i) = (\partial\mathcal{H}/\partial P_i) (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1} = dq_i/dq_1 \\ (\partial\mathcal{K}/\partial q_i) = (\partial\mathcal{H}/\partial q_i) (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1} = -dP_i/dq_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\partial\mathcal{K}/\partial P_t) = (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1} = dt/dq_1 \\ (\partial\mathcal{K}/\partial t) = (\partial\mathcal{H}/\partial t) (\partial\mathcal{H}/\partial P_1)^{-1} = -dP_t/dq_1. \end{cases}$$

Par conséquent, via le changement de variable indépendante $t \longrightarrow q_1$, le nouvel Hamiltonien du système devient $-P_1$ et t se transforme en une variable canonique avec $P_t = -\mathcal{H}$ pour moment conjugué.

Hamiltonien électromagnétique avec s pour variable indépendante

On suppose dans le cas qui nous préoccupe que $\partial\mathcal{H}/\partial P_s \neq 0$. D'après ce qui précède et l'égalité 1.34, on en déduit donc le nouvel Hamiltonien \mathcal{K} qui, avec s pour variable indépendante, conjugue x et P_x , y et P_y , t et $P_t = -\mathcal{H}$:

$$\mathcal{K}(x, y, t, P_x, P_y, P_t; s) = -P_s = -y\tau P_x + x\tau P_y - (1 + \text{hx}) \left[\sqrt{\left(\frac{P_t + qV}{c}\right)^2 - m^2 c^2 - (P_x - qA_x)^2 - (P_y - qA_y)^2} + qA_s \right] \quad (1.35)$$

$$\text{et on a } \begin{cases} \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial P_x} = \dot{x} & \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial P_y} = \dot{y} & \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial P_t} = \dot{t} \\ \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x} = -\dot{P}_x & \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial y} = -\dot{P}_y & \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial t} = -\dot{P}_t \end{cases}$$

où maintenant $\dot{}$ signifie $\frac{d}{ds}$.

1.2.3 Choix des variables canoniques

Hypothèses de travail et notations

Nous faisons désormais les deux hypothèses suivantes:

– la courbe de référence est plane comme à la sous section 1.1.1, ce qui signifie que $\tau(s) = 0$; on supposera pour fixer les idées que l'axe \hat{x} est horizontal et que l'axe \hat{y} est vertical (indépendant de s).

– le champ e.m. est un champ purement magnétique et statique dérivant d'un potentiel vecteur \vec{A} : $V = 0$ et $\vec{A} = \vec{A}(x, y, s)$. Avec ces hypothèses et en reprenant les relations 1.33 et 1.35, on a

$$\begin{cases} P_x = qA_x + p_x \\ P_y = qA_y + p_y \\ \mathcal{K} = -(1 + \text{hx}) \left[\sqrt{P_t^2/c^2 - m^2 c^2 - (P_x - qA_x)^2 - (P_y - qA_y)^2} + qA_s \right] \end{cases} \quad (1.36)$$

où l'on rappelle que p_x et p_y désignent respectivement l'impulsion horizontale et verticale de la particule.

Enfin, on considère une particule test fictive de masse m notée P0. On note p_0 son impulsion qui correspond à une énergie $E_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2} \equiv \gamma_0 m c^2$ et à une vitesse $v_0 = p_0 / (m \gamma_0) \equiv \beta_0 c$. Comme nous le montrerons plus loin (sous-section 1.3.1), la courbe de référence \mathcal{C} est effectivement suivie par P0 si une certaine condition est vérifiée et moyennant l'hypothèse

que le champ magnétique \vec{B} soit vertical (c.-à-d. porté par \vec{y}) le long de \mathcal{C} : $\vec{B}(0,0,s) = B_0(s)\vec{y}$. Cette condition bien connue s'écrit $h(s) = B_0(s)/(\frac{2\omega}{q})$. Si tel est le cas, le temps de passage en s de la particule P0 est alors donné par $t_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} (s - s_0)/v_0$ en supposant que cette dernière se situait à l'abscisse s_0 à l'instant $t = 0$.

Quoiqu'il en soit, prenons pour l'instant ces dernières notations (p_0, E_0, v_0 et $t_0(s)$) comme de simples définitions permettant de donner un sens physique au changement de variables canoniques qui va suivre.

Choix des variables canoniques; expression finale pour l'Hamiltonien

Les variables utilisées pour décrire l'évolution d'une particule quelconque P1 seront celles que MAD [13] utilise: x et y restent inchangés et on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{P}_x = \frac{P_x}{p_0} \\ \widehat{P}_y = \frac{P_y}{p_0} \\ \delta = \frac{-P_t - E_0}{p_0 c} = \frac{E - E_0}{p_0 c} \\ l = -c(t - t_0(s)) \stackrel{\text{def}}{=} -c\left(t - \frac{s - s_0}{v_0}\right). \end{array} \right.$$

δ désigne donc la différence entre l'énergie de P1 et celle de P0 normalisée par l'énergie qu'aurait P0 si elle était ultra-relativiste. $t_0(s)$ étant le temps de passage en s de P0 (en supposant que sa trajectoire coïncide avec \mathcal{C}), $-l$ désigne donc le retard de P0 par rapport à P1 (si $l \geq 0$ P1 est en avance sur P0). On montre directement que cette transformation est canonique en exhibant un Hamiltonien g qui conjugue (x, \widehat{P}_x) , (y, \widehat{P}_y) et (l, δ) . En effet, si l'on définit

$$g(x, y, l, \widehat{P}_x, \widehat{P}_y, \delta) = \frac{\mathcal{K}}{p_0} + \frac{\delta}{\beta_0} + 1, \quad (1.37)$$

la constante 1 étant rajoutée afin d'avoir $g(0) = 0$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial \widehat{P}_x} = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_x} \right) \left(\frac{d P_x}{d \widehat{P}_x} \right) = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_x} = \dot{x} \quad \text{de même} \quad \frac{\partial g}{\partial \widehat{P}_y} = \dot{y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right) = -\frac{\dot{P}_x}{p_0} = -\dot{\widehat{P}}_x \quad \text{de même} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\dot{\widehat{P}}_y \\ \frac{\partial g}{\partial \delta} = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_t} \right) \left(\frac{d P_t}{d \delta} \right) + \frac{c}{v_0} = -c\left(t - \frac{1}{v_0}\right) = \dot{l} \\ \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} \right) \left(\frac{d t}{d l} \right) = \frac{\dot{P}_t}{p_0 c} = -\dot{\delta}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l|l}
x_1^M = x_1^T & x_1^T = x_1^M \\
x_2^M = \frac{(1 + x_6^T)x_2^T}{\sqrt{1 + x_2^{T2} + x_4^{T2}}} & x_2^T = \frac{x_2^M}{\sqrt{(1/\beta_0 + x_6^M)^2 - 1/(\gamma_0^2\beta_0^2) - x_2^{M2} - x_4^{M2}}} \\
x_3^M = x_3^T & x_3^T = x_3^M \\
x_4^M = \frac{(1 + x_6^T)x_4^T}{\sqrt{1 + x_2^{T2} + x_4^{T2}}} & x_4^T = \frac{x_4^M}{\sqrt{(1/\beta_0 + x_6^M)^2 - 1/(\gamma_0^2\beta_0^2) - x_2^{M2} - x_4^{M2}}} \\
x_5^M = x_5^T & x_5^T = x_5^M \\
x_6^M = \sqrt{(1 + x_6^T)^2 + 1/(\gamma_0^2\beta_0^2) - 1/\beta_0} & x_6^T = \sqrt{(1/\beta_0 + x_6^M)^2 - 1/(\gamma_0^2\beta_0^2) - 1}
\end{array}$$

On voit donc que ces deux transformations inverses l'une de l'autre sont, à l'ordre 1, égales à l'identité (c.-à-d. pour tout $i, 1 \leq i \leq 6, x_i^T = x_i^M + o((x^M)^2)$); on voit de plus que dans le cas ultra-relativiste ($\beta_0 = 1, \gamma_0 = +\infty$) on a $x_6^M = x_6^T = (p - p_0)/p_0 = (E - E_0)/E_0$. Mis à part cela, la chose importante à remarquer est qu'il n'existe aucun Hamiltonien qui conjugue les variables de TRANSPORT (même dans le cas des multipôles parfaits). Voilà une des raisons pour lesquelles nous avons choisi de travailler avec les variables de MAD plutôt qu'avec celles de TRANSPORT, le formalisme Hamiltonien étant plus adéquat pour tous les calculs effectués au chapitre 2.

1.3 Equations du mouvement. Ecriture formelle de la solution

1.3.1 Equations du mouvement

On note X le vecteur 6-dimensionnel $(x, \widehat{P}_x, y, \widehat{P}_y, l, \delta)$ défini à la section précédente. Les équations d'Hamilton s'écrivent sous forme vectorielle de la façon suivante:

$$\frac{dX}{ds} = J \overrightarrow{\nabla} g \quad (1.39)$$

$$\text{où } J \text{ est la matrice antisymétrique } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et où g est l'Hamiltonien défini par l'équation 1.38 à la section précédente avec

$$\vec{\nabla} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial \widehat{P}_x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial \widehat{P}_y}, \frac{\partial g}{\partial l}, \frac{\partial g}{\partial \delta} \right).$$

En regardant l'équation 1.39 puis en remarquant que l'Hamiltonien g ne dépend pas de la variable canonique l , on tombe directement sur la conservation de la variable δ , ce qui est un fait bien connu pour le cas d'une particule chargée se déplaçant dans un champ purement magnétique (en négligeant évidemment tous processus non-Hamiltoniens comme le rayonnement synchrotronique, les interactions faisceau-faisceau, le refroidissement stochastique, etc.).

Dans tout ce qui va suivre, on écrira l'équation 1.39 sous la forme

$$\frac{dX}{ds} = F(X; s; \lambda) \quad (1.40)$$

où F est la fonction vectorielle $J\vec{\nabla}g$ et où λ est un jeu de paramètres qui désignent formellement les fonctions $\mathcal{A}_m^\pm(s)$ définies à la sous-section 1.1.3. Avant d'aller plus loin, il faut insister sur le fait suivant: si $P0$ désigne la particule fictive de référence introduite précédemment (de masse m , de charge q et d'impulsion p_0), alors $P0$ suit effectivement la courbe de référence \mathcal{C} si et seulement si le vecteur $X = 0$ est solution de l'équation différentielle 1.40, donc si et seulement si $F(0; s; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} J\vec{\nabla}g = 0$, soit $\vec{\nabla}g = 0$ puisque J est inversible. En d'autres termes, le développement limité de g autour de zéro dans les variables canoniques ne doit contenir aucun terme linéaire. En reprenant l'expression de l'Hamiltonien g (équation 1.38) ainsi que celle des potentiels vecteurs en coordonnées curvilignes donnée à la sous-section 1.1.3, on aboutit après calcul à la condition recherchée⁶:

$$F(0; s; \lambda) = 0 \Leftrightarrow h(s) = \mathcal{A}_0^+(s)/(p_0/q) = B_y(x = y = 0, s)/(p_0/q). \quad (1.41)$$

1.3.2 Offset δX , matrices R , T , U

On considère alors deux environnements magnétiques différents dans lesquels évoluent les particules chargées: l'un dit de *design* dans lequel le champ magnétique est caractérisé par un jeu de paramètres λ_0 qui vérifient la condition 1.41 et l'autre étant défini par le jeu de paramètres $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$. Dans toute la suite, on emploiera le terme générique "erreur" pour faire référence à la fluctuation $\delta\lambda$ qui fait que l'optique réelle diffère quelque peu de

6. Comme dans la sous-section 1.1.3, on garde l'hypothèse $\mathcal{A}_0^- = \varphi_0 = 0$ et il en résulte au vu du second paragraphe de 1.1.3, "Dérivation du champ magnétique", que le champ \vec{B} est dans ce cas purement vertical sur la courbe \mathcal{C} et de force égale à $\mathcal{A}_0^+(s)$.

l'optique idéale de *design*. Néanmoins, on supposera que la magnitude des erreurs de la ligne est relativement faible de sorte que la particule test P0 ainsi que tout autre particule P1 ayant pour condition initiale un vecteur X_0 assez petit aient une trajectoire proche de la courbe \mathcal{C} . La déviation de ces différentes trajectoires par rapport à \mathcal{C} pouvant être représentée par une série perturbative en X_0 et $\delta\lambda$, l'ultime but que l'on se fixe dès à présent et qui ne sera atteint qu'à la fin du chapitre 2 sera alors d'estimer certains des premiers coefficients de ce développement.

Pour ce faire, nous devons commencer par quelques définitions. Pour tout vecteur X_0 établissant les conditions initiales d'une particule quelconque P1 à l'abscisse curviligne $s=0$, on note $\mathcal{M}(X_0; s; \lambda) = X(s)$ la position de P1 à l'abscisse s dans l'espace des phases à 6 dimensions; la fonction vectorielle $\mathcal{M}(X_0; s; \lambda)$ sera désignée sous le nom de *mapping* (on se souviendra dans toute la suite que λ représente symboliquement les fonctions $\mathcal{A}_m^\pm(s)$ à partir desquelles le champ magnétique est défini de façon univoque). On introduit ensuite les quatre objets suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'offset } \delta X, \text{ vecteur à 6 dimensions, donné par } \delta X_i(s; \lambda) = \mathcal{M}_i(0; s; \lambda) \\ \text{la matrice } R, \text{ matrice } 6 \times 6, \text{ donnée par } R_{i,j}(s; \lambda) = \left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial X_{0j}} \right)_{(X_0=0)} \\ \text{la matrice } T, \text{ tenseur } 6 \times 6 \times 6, \text{ donnée par } T_{i,j,k}(s; \lambda) = 1/2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{M}_i}{\partial X_{0j} \partial X_{0k}} \right)_{(X_0=0)} \\ \text{la matrice } U, \text{ tenseur } 6 \times 6 \times 6 \times 6, \text{ donnée par } U_{i,j,k,l}(s; \lambda) = 1/6 \left(\frac{\partial^3 \mathcal{M}_i}{\partial X_{0j} \partial X_{0k} \partial X_{0l}} \right)_{(X_0=0)} \end{array} \right. .$$

Au vu de ces définitions, il est clair que le tenseur T est symétrique par rapport à ses deux derniers indices, de même pour le tenseur U par rapport à ses trois derniers indices (d'autres relations, dites relations de symplecticité, reliant les éléments de matrice des tenseurs R , T et U seront établies à la sous-section 1.3.4). Cette remarque étant faite, on voit que la solution de l'équation 1.40, avec X_0 pour condition initiale, s'écrit avec des notations évidentes⁷

$$\begin{aligned} X(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(s; X_0; \lambda) = & \delta X(s; \lambda) + R(s; \lambda)X_0 + T(s; \lambda)(X_0, X_0) \\ & + U(s; \lambda)(X_0, X_0, X_0) + o(X_0^4) . \end{aligned} \quad (1.42)$$

7. $RX_0)_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^6 R_{i,j}X_{0j}$, $T(X_0, X_0)_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 T_{i,j,k}X_{0j}X_{0k}$ et $U(X_0, X_0, X_0)_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 U_{i,j,k,l}X_{0j}X_{0k}X_{0l}$.

En se restreignant aux particules dont les conditions initiales sont proches de zéro, on peut donc supposer que la relation 1.42 est une bonne approximation pour le calcul du *mapping* \mathcal{M} ⁸. L'objectif devient donc l'obtention des quantités δX , R , T et U . Comme nous le verrons au chapitre 2, cela nécessite la connaissance de la fonction F à l'ordre 3 dans les variables canoniques X_i , $1 \leq i \leq 6$, donc celle de l'Hamiltonien g à l'ordre 4. En regardant l'équation 1.38 qui définit g , on voit que pour ce fait il est impératif de posséder le potentiel vecteur \vec{A} à l'ordre 4 en (x, y) et c'est exactement ce qui a fait l'objet de la sous-section 1.1.3. Ceci étant, outre la précision supplémentaire qu'apporte le calcul de la matrice U , la raison principale qui nous pousse à tronquer la série 1.42 à l'ordre 3 et non à un ordre inférieur (ce qui nous aurait ôté bien des tracas) n'apparaîtra clairement que bien plus tard au chapitre 3.

Nous finirons cette sous-section en rappelant que l'Hamiltonien g ainsi donc que la fonction F sont indépendants de la variable l . Cette dernière remarque impose alors certaines conditions sur les quantités $(\delta X, R, T, U)$:

- d'une part, d'après l'équation 1.39, on a $d\delta/ds = \partial g/\partial l = 0$ et il vient $\delta X_6 = T_{6,m,n} = U_{6,m,n,r} = 0$ pour tous les entiers (m, n, r) compris entre 1 et 6 ainsi que $R_{6,j} = \delta_{6j}$, $1 \leq j \leq 6$, où $\delta_{6j} = 1$ si $j = 6$ et $\delta_{6j} = 0$ si $j \neq 6$.
- d'autre part, du fait du découplage de la variable l , on a aussi $T_{i,5,m} = T_{i,m,5} = U_{i,5,m,n} = U_{i,m,5,n} = U_{i,m,n,5} = 0$ pour tous les entiers (i, m, n) compris entre 1 et 6 ainsi que $R_{i,5} = \delta_{i5}$, $1 \leq i \leq 6$.

On se souviendra surtout de la forme particulière de la matrice R qui, d'après ce qui précède, s'écrit

$$R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & R_{1,4} & 0 & R_{1,6} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & R_{2,4} & 0 & R_{2,6} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & R_{3,4} & 0 & R_{3,6} \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} & 0 & R_{4,6} \\ R_{5,1} & R_{5,2} & R_{5,3} & R_{5,4} & 1 & R_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

8. Signalons tout de même que ce développement perturbatif n'est en général pas suffisant pour un anneau de stockage dans lequel les particules font un nombre élevé de tours (s devient très grand contrairement aux lignes de transport où s est borné). C'est la raison principale pour laquelle le calcul de l'ouverture dynamique d'un anneau (c'est à dire le domaine \mathcal{D}_0 maximal de l'espace des phases dont l'image par la transformation $\mathcal{M}(s)$ reste bornée quand s tend vers l'infini) est souvent délicat.

1.3.3 Formules de concaténation

Comme on peut facilement l'imaginer, le calcul des quantités δX , R , T et U se fera pas à pas (c'est à dire élément par élément) le long de la ligne optique considérée. Désormais, nous devons donc nous interroger sur la concaténation de *mappings*. Plus précisément, si l'on connaît le *mapping* \mathcal{M}_1 pour une section $[s_0, s_1]$ de la courbe \mathcal{C} ainsi que le *mapping* \mathcal{M}_2 pour une section $[s_1, s_2]$ adjacente à la précédente, on se donne pour objectif le calcul du *mapping* $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2 \circ \mathcal{M}_1$ relatif à la section totale $[s_0, s_2]$. En résumé, il s'agit de dériver les relations algébriques reliant les quantités $(\delta X, R, T, U)$ (relatives à \mathcal{M}) aux quantités $(\delta X_{1,2}, R_{1,2}, T_{1,2}, U_{1,2})$ (relatives à $\mathcal{M}_{1,2}$). En utilisant l'équation 1.42 pour la section $[s_0, s_1]$ puis en la réitérant pour la section $[s_1, s_2]$, on obtient assez rapidement une expression de $X(s_2)$ en fonction de $X(s_0)$ et des quantités $(\delta X_{1,2}, R_{1,2}, T_{1,2}, U_{1,2})$; enfin, en regroupant dans cette dernière expression les termes de même homogénéité en $X(s_0)$, on tombe sur les relations recherchées. Tous calculs faits, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta X = \delta X_2 + R_2 \delta X_1 + T_2 (\delta X_1, \delta X_1) + o(\delta X_1^3) \\ R = R_2 R_1 + 2 T_2 (\delta X_1, R_1) + 3 U_2 (\delta X_1, \delta X_1, R_1) + o(\delta X_1^3) \\ T = R_2 T_1 + T_2 (R_1, R_1) + 2 T_2 (\delta X_1, T_1) + 3 U_2 (\delta X_1, R_1, R_1) + o(\delta X_1^2) \\ U = R_2 U_1 + 2 (T_2 (R_1, T_1))_{\text{Sym}} + U_2 (R_1, R_1, R_1) + o(\delta X_1) \end{array} \right. \quad (1.44)$$

où les notations utilisées sont expliquées ci-après.

- Si A est un tenseur d'ordre $n + 1$ et (B_1, \dots, B_n) n tenseurs d'ordre respectif (m_1, \dots, m_n) , alors $C = A(B_1, \dots, B_n)$ est le tenseur d'ordre $N = \sum_{k=1}^n m_k - (n - 1)$ dont l'élément de matrice C_{i_1, \dots, i_N} est donné par

$$C_{i_1, \dots, i_N} = \sum_{j_1, \dots, j_n} A_{i_1, j_1, \dots, j_n} (B_1)_{j_1, i_2, \dots, i_{m_1}} \cdots (B_n)_{j_n, i_{(N-m_n+2)}, \dots, i_N} .$$

Par exemple, pour le cas $R_2 T_1$, on a $n = 1$, $m_1 = 3$, soit $N = 3$ et donc

$$(R_2 T_1)_{i,j,k} = \sum_{m=1}^6 (R_2)_{i,m} (T_1)_{m,j,k} .$$

Pour le cas plus compliqué $T_2 (R_1, T_1)$, on a $n = 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, soit $N = 4$ et par suite

$$(T_2 (R_1, T_1))_{i,j,k,l} = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 (T_2)_{i,m,n} (R_1)_{m,j} (T_1)_{n,k,l} .$$

- Si A est un tenseur d'ordre $n + 1$, alors A_{Sym} est le tenseur d'ordre $n + 1$ symétrique par rapport à ses n derniers indices et défini par

$$(A_{Sym})_{i_0, i_1, \dots, i_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A_{i_0, \sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)}$$

où S_n désigne le groupe des permutations d'ordre n .

Au vu des formules de concaténation 1.44, le calcul exact des quatre objets $(\delta X, R, T, U)$ apparaît alors impossible puisque ces derniers s'expriment sous la forme d'une série infinie dans l'*offset* δX_1 . Afin de garder une cohérence dans la mathématique qui sera développée au chapitre 2, on a dès lors recours à l'idée suivante. Considérons un développement perturbatif pour ces quatre quantités en fonction des erreurs de la ligne $\delta\lambda$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta X_1(\lambda) = \delta X_1(\lambda_0) + \partial_\lambda \delta X_1|_{\lambda_0} \delta\lambda + 1/2 \partial_\lambda^2 \delta X_1|_{\lambda_0} \delta\lambda^2 + \dots \\ \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_1^{(0)} + \delta X_1^{(1)} + \delta X_1^{(2)} + \dots \\ \vdots \quad \text{et cetera.} \end{array} \right.$$

On définit ainsi neuf nouveaux objets $(\delta X_1^{(0)}, \delta X_1^{(1)}, \delta X_1^{(2)}, R_1^{(0)}, R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, T_1^{(0)}, T_1^{(1)}, U_1^{(0)})$ relatifs à \mathcal{M}_1 et de la même façon on introduit ces mêmes neuf quantités pour les *mappings* \mathcal{M}_2 et \mathcal{M} . Comme l'optique de *design* est telle que la condition 1.41 est vérifiée, on a déjà

$$\delta X_1^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_1(\lambda_0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_1(X_0=0; \lambda_0) = 0 = \delta X_2^{(0)} = \delta X^{(0)} .$$

Au vu de cette remarque, on peut reformuler les équations 1.44 en faisant intervenir les quantités ci-dessus définies; on obtient ainsi de nouvelles relations qui, cette fois, peuvent être écrites de façon exacte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta X^{(1)} = \delta X_2^{(1)} + R_2^{(0)} \delta X_1^{(1)} \\ \delta X^{(2)} = \delta X_2^{(2)} + R_2^{(0)} \delta X_1^{(2)} + R_2^{(1)} \delta X_1^{(1)} + T_2^{(0)} (\delta X_1^{(1)}, \delta X_1^{(1)}) \\ R^{(0)} = R_2^{(0)} R_1^{(0)} \\ R^{(1)} = R_2^{(1)} R_1^{(0)} + R_2^{(0)} R_1^{(1)} + 2 T_2^{(0)} (\delta X_1^{(1)}, R_1^{(0)}) \\ R^{(2)} = R_2^{(2)} R_1^{(0)} + R_2^{(1)} R_1^{(1)} + R_2^{(0)} R_1^{(2)} + 2 \left(T_2^{(0)} (\delta X_1^{(2)}, R_1^{(0)}) + \right. \\ \quad \left. T_2^{(0)} (\delta X_1^{(1)}, R_1^{(1)}) + T_2^{(1)} (\delta X_1^{(1)}, R_1^{(0)}) \right) + 3 U_2^{(0)} (\delta X_1^{(1)}, \delta X_1^{(1)}, R_1^{(0)}) \\ T^{(0)} = R_2^{(0)} T_1^{(0)} + T_2^{(0)} (R_1^{(0)}, R_1^{(0)}) \\ T^{(1)} = R_2^{(1)} T_1^{(0)} + R_2^{(0)} T_1^{(1)} + 2 \left(\left(T_2^{(0)} (R_1^{(0)}, R_1^{(1)}) \right)_{Sym} + T_2^{(0)} (\delta X_1^{(1)}, T_1^{(0)}) \right) + \\ \quad T_2^{(1)} (R_1^{(0)}, R_1^{(0)}) + 3 U_2^{(0)} (\delta X_1^{(1)}, R_1^{(0)}, R_1^{(0)}) \\ U^{(0)} = R_2^{(0)} U_1^{(0)} + 2 \left(T_2^{(0)} (R_1^{(0)}, T_1^{(0)}) \right)_{Sym} + U_2^{(0)} (R_1^{(0)}, R_1^{(0)}, R_1^{(0)}) . \end{array} \right. \quad (1.45)$$

Supposons donc que, pour une ligne de focalisation contenant N aimants, on possède pour chaque aimant numéro i les huit quantités $(\delta X_i^{(1)}, \delta X_i^{(2)}, R_i^{(0)}, R_i^{(1)}, R_i^{(2)}, T_i^{(0)}, T_i^{(1)}, U_i^{(0)})$; en utilisant les relations 1.45 et par concaténation successive, on peut alors obtenir les quantités $(\delta X^{(1)}, \delta X^{(2)}, R^{(0)}, R^{(1)}, R^{(2)}, T^{(0)}, T^{(1)}, U^{(0)})$ relatives au *mapping* total de la ligne. Plus précisément, considérons par exemple une erreur ϵ_i dans l'aimant numéro i ainsi qu'une erreur ϵ_j dans l'aimant numéro j ; supposons que l'on connaisse pour l'aimant numéro i les huit quantités $(R_i^{(0)}, T_i^{(0)}, U_i^{(0)}, \partial_{\epsilon_i} \delta X_i, \partial_{\epsilon_i}^2 \delta X_i, \partial_{\epsilon_i} R_i, \partial_{\epsilon_i}^2 R_i, \partial_{\epsilon_i} T_i)$ et de même pour l'aimant numéro j . Les formules 1.45 donnent alors en bout de ligne les matrices (R, T, U) idéales, les dérivées premières et secondes de l'*offset* δX et de la matrice R ainsi que les dérivées premières de la matrice T en fonction des erreurs ϵ_i et ϵ_j .

Pour cette raison, nous disons que le choix de calcul des huit quantités $(\delta X_i^{(1)}, \delta X_i^{(2)}, R_i^{(0)}, R_i^{(1)}, R_i^{(2)}, T_i^{(0)}, T_i^{(1)}, U_i^{(0)})$ pour chaque type d'aimant (dipôle, quadrupôle, hexapôle, ..., en considérant pour chacun de ces types d'aimants un certain nombre d'erreurs, cf. chapitre 2) est un choix "auto-consistant". Cependant, toujours en regardant les formules de concaténation 1.45, on s'aperçoit que le choix bien plus simple du calcul des quatre quantités $(\delta X_i^{(1)}, R_i^{(0)}, R_i^{(1)}, T_i^{(0)})$ est lui aussi "auto-consistant". En revanche, ce dernier est alors incapable de donner en bout de ligne, entre autres, la quantité $R^{(2)}$ qu'il nous faudra impérativement connaître au chapitre 3.

1.3.4 Symplecticité

Groupe symplectique

On donne ici quelques notions de symplecticité en se limitant au cas réel; pour un exposé plus détaillé sur ce sujet on pourra, par exemple, se référer à [4]. Soit donc n un entier non nul; on note \mathcal{M}_{2n} l'anneau des matrices $2n \times 2n$ à coefficients réels et Sp_{2n} le sous-ensemble des matrices de \mathcal{M}_{2n} défini par

$$\text{Sp}_{2n} = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2n} / \widetilde{M} J M = J \right\}^9$$

où J est la matrice antisymétrique $2n \times 2n$ suivante:

$$J = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_2 \end{pmatrix} \text{ avec } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

9. \widetilde{M} désigne la transposée de M .

On prouve alors facilement que Sp_{2n} est un sous-groupe multiplicatif du groupe des matrices inversibles de \mathcal{M}_{2n} appelé groupe symplectique à $2n$ dimensions; on a de plus les trois propriétés suivantes:

$$\forall M \in \text{Sp}_{2n} \quad \widetilde{M} \in \text{Sp}_{2n}, \det(M) = 1 \text{ et } M^{-1} = -J \widetilde{M} J .$$

Enfin, on prouve aisément que J vérifie $J^2 = -\mathbf{1} = -\widetilde{J}J$.

On s'interroge désormais sur les générateurs de Sp_{2n} . Soit $M = \exp(\epsilon \Theta) = \mathbf{1} + \epsilon \Theta + \dots$ un élément de Sp_{2n} proche de l'identité; en écrivant¹⁰ $\Theta = JS$ et en utilisant la définition de Sp_{2n} , il vient

$$\widetilde{\Theta} J + J \Theta = 0 = \widetilde{S} \widetilde{J} J + J^2 S = \widetilde{S} - S .$$

La matrice S est donc symétrique. En vérifiant réciproquement que toute matrice de la forme $\exp(JS)$, avec S symétrique, est dans Sp_{2n} , on a donc l'assertion suivante:

Sp_{2n} possède $\frac{n(n+1)}{2}$ générateurs qui sont de la forme JS où S est symétrique.

Pour ce qui nous concerne, nous appliquons ce dernier résultat au groupe Sp_6 ; en fait, nous ne nous intéressons qu'au sous-groupe G des matrices de Sp_6 ayant la forme donnée par l'équation 1.43¹¹. En cherchant les générateurs Θ du groupe G sous la forme $\Theta = JS$ où S est une matrice symétrique 6×6 , puis en ajoutant à cela la condition supplémentaire imposée par la forme particulière des matrices de G , on peut prouver sans difficulté que le groupe G possède exactement 15 générateurs (alors que Sp_6 possède $6 \times 7 / 2 = 21$ générateurs). Plus précisément, on a le résultat suivant: si R est un élément de G voisin de l'identité, alors il existe une matrice Θ unique telle que

$$R = \exp(\Theta) \quad \text{avec} \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_7 & \theta_8 & 0 & \theta_{11} \\ \theta_3 & -\theta_1 & \theta_9 & \theta_{10} & 0 & \theta_{12} \\ -\theta_{10} & \theta_8 & \theta_4 & \theta_5 & 0 & \theta_{13} \\ \theta_9 & -\theta_7 & \theta_6 & -\theta_4 & 0 & \theta_{14} \\ -\theta_{12} & \theta_{11} & -\theta_{14} & \theta_{13} & 0 & \theta_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.46)$$

10. Ceci est toujours possible car J est inversible et d'inverse $J^{-1} = -J$.

11. On vérifie facilement que le sous-ensemble de Sp_6 constitué des matrices R de la forme

$$\begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & R_{1,4} & 0 & R_{1,6} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & R_{2,4} & 0 & R_{2,6} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & R_{3,4} & 0 & R_{3,6} \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} & 0 & R_{4,6} \\ R_{5,1} & R_{5,2} & R_{5,3} & R_{5,4} & 1 & R_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est un sous-groupe multiplicatif de } \text{Sp}_6 .$$

Symplecticité du *mapping* définissant l'évolution d'un système Hamiltonien

Soit un système dynamique à n degrés de liberté q_1, \dots, q_n . On note z le vecteur $2n$ -dimensionnel $(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)$ où les p_i sont comme à l'accoutumée les moments canoniquement conjugués aux coordonnées q_i ; t désigne la variable indépendante et $\mathcal{H}(z; t)$ l'Hamiltonien du système. On note \mathcal{M} le *mapping* défini par \mathcal{H} ; de façon plus précise, $\mathcal{M}(z_0; t)$ est la fonction vectorielle qui, à l'instant t , donne la position du système dans l'espace des phases si celui-ci avait à l'instant initial la position z_0 . Enfin, on appelle $M(z_0, t)$ la matrice Jacobienne de \mathcal{M} en z_0 et à l'instant t :

$$M_{i,j}(z_0, t) = \left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial z_{0j}} \right)_{(z_0; t)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Pour toute condition initiale z_0 et tout instant t , on démontre alors que la matrice $M(z_0, t)$ est symplectique (théorème de Liouville); on dira aussi, de façon plus simple, que le *mapping* \mathcal{M} est symplectique (tout en restant bien conscient que la symplecticité n'est pas une propriété du groupe engendré par les transformations associées à l'Hamiltonien \mathcal{H} mais se réfère au groupe engendré par les matrices Jacobiennes de ces transformations). Pour ce faire, nous considérons la fonction matricielle f suivante:

$$t \longrightarrow f(t) = \widetilde{M}(z_0; t) J M(z_0; t) \text{ où } z_0 \text{ est fixé.}$$

On a $\forall z_0 \mathcal{M}(z_0; t=0) = z_0$, soit $M(z_0; 0) = \mathbf{1}$, soit $f(0) = J$. Afin de démontrer le résultat énoncé, il suffit donc de prouver la nullité de la dérivée de la fonction f par rapport au paramètre t . Soit (a, b) deux entiers dans $\{1, \dots, 2n\}$, on a

$$f'_{a,b}(t) = \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{M}_c}{\partial z_{0a}} J_{c,d} \frac{\partial \mathcal{M}_d}{\partial z_{0b}} \right)^{12}.$$

En écrivant les équations du mouvement sous la forme matricielle

$$\partial_t \mathcal{M}(z_0; t) = J \vec{\nabla} \mathcal{H} \text{ où } \vec{\nabla} \mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\partial_{z_1} \mathcal{H}, \dots, \partial_{z_{2n}} \mathcal{H} \right)_{(z=\mathcal{M}(z_0; t); t)},$$

il vient

$$f'_{a,b}(t) = J_{c,i} J_{c,d} \frac{\partial \mathcal{M}_d}{\partial z_{0b}} \frac{\partial}{\partial z_{0a}} \left(\partial_{z_i} \mathcal{H}(\mathcal{M}(z_0; t); t) \right) + J_{c,d} J_{d,i} \frac{\partial \mathcal{M}_c}{\partial z_{0a}} \frac{\partial}{\partial z_{0b}} \left(\partial_{z_i} \mathcal{H}(\mathcal{M}(z_0; t); t) \right),$$

soit

$$f'_{a,b}(t) = J_{c,i} J_{c,d} \frac{\partial \mathcal{M}_d}{\partial z_{0b}} \frac{\partial \mathcal{M}_j}{\partial z_{0a}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z_i \partial z_j} + J_{c,d} J_{d,i} \frac{\partial \mathcal{M}_c}{\partial z_{0a}} \frac{\partial \mathcal{M}_j}{\partial z_{0b}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z_i \partial z_j}.$$

12. Lorsque dans cette expression et dans toutes celles qui vont suivre, un indice muet est répété deux fois, ceci signifie que l'on doit sommer sur ce même indice.

On note $S(z; t)$ la matrice Hessienne de \mathcal{H} (matrice des dérivées secondes de \mathcal{H} par rapport à z_0). D'après ce qui précède, il vient

$$f'_{a,b}(t) = \left(\widetilde{M}(z_0; t) S(\mathcal{M}(z_0; t); t) \widetilde{J} J M(z_0; t) + \widetilde{M}(z_0; t) J^2 S(\mathcal{M}(z_0; t); t) M(z_0; t) \right)_{a,b} .$$

Mais $J^2 = -\mathbf{1}$, $\widetilde{J} J = -J^2 = \mathbf{1}$, soit $f' = 0$.

Relations de symplecticité

Dans ce dernier paragraphe, on se propose d'exhiber les différentes contraintes qu'impose la symplecticité du *mapping* \mathcal{M} sur les six quantités $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $T^{(0)}$, $T^{(1)}$ et $U^{(0)}$ introduites à la sous-section 1.3.3.

On considère de nouveau la fonction vectorielle $\mathcal{M}(X_0; s; \lambda)$ ainsi que les quatre quantités $(\delta X, R, T, U)$ définies à la sous-section 1.3.2. Comme au paragraphe précédent, on note $M(X_0; s; \lambda)$ la matrice Jacobienne de \mathcal{M} . Pour toute abscisse s , tout vecteur X_0 et tout paramètre λ , on a donc par symplecticité du *mapping* \mathcal{M}

$$\widetilde{M}(X_0; s; \lambda) J M(X_0; s; \lambda) = J . \quad (1.47)$$

Si maintenant k, l sont deux entiers dans $\{1, \dots, 6\}$, on définit les matrices $T_k(s; \lambda)$ et $U_{k,l}(s; \lambda)$ de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_k(s; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial X_{0_k}} \right)_{(X_0=0)} = \left(T_{i,j,k}(s; \lambda) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 6 \\ 1 \leq j \leq 6}} \\ U_{k,l}(s; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial X_{0_k} \partial X_{0_l}} \right)_{(X_0=0)} = \left(U_{i,j,k,l}(s; \lambda) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 6 \\ 1 \leq j \leq 6}} \end{array} \right. .$$

Les secondes égalités dans ces deux dernières équations viennent de la définition de la matrice M en fonction de \mathcal{M} ainsi que de celles des tenseurs T et U (sous-section 1.3.2); on remarquera enfin que $R(s; \lambda) = M(X_0=0; s; \lambda)$. Ceci étant dit, en écrivant l'égalité 1.47 en $X_0=0$, en la dérivant une première puis une seconde fois par rapport à X_0 , on obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{R} J R = J \\ \widetilde{T}_k J R + \widetilde{R} J T_k = 0 , 1 \leq k \leq 6 \\ \widetilde{U}_{k,l} J R + \widetilde{R} J U_{k,l} + 2/3 (\widetilde{T}_k J T_l + \widetilde{T}_l J T_k) = 0 , 1 \leq k \leq 6 , 1 \leq l \leq 6 . \end{array} \right. \quad (1.48)$$

Ces dernières égalités étant valables pour un jeu quelconque de paramètres λ , on obtient finalement, par différenciation par rapport à λ , les relations dites de symplecticité liant les

six quantités $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $T^{(0)}$, $T^{(1)}$ et $U^{(0)}$. On a pour toute abscisse s et toute “optique de design λ_0 ”

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{R}^{(0)}(s; \lambda_0) J R^{(0)}(s; \lambda_0) = J \\ \widetilde{R}^{(1)}(s; \lambda_0) J R^{(0)}(s; \lambda_0) + \widetilde{R}^{(0)}(s; \lambda_0) J R^{(1)}(s; \lambda_0) = 0 \\ \widetilde{R}^{(2)}(s; \lambda_0) J R^{(0)}(s; \lambda_0) + \widetilde{R}^{(0)}(s; \lambda_0) J R^{(2)}(s; \lambda_0) + \widetilde{R}^{(1)}(s; \lambda_0) J R^{(1)}(s; \lambda_0) = 0 \\ \widetilde{T}_k^{(0)}(s; \lambda_0) J R^{(0)}(s; \lambda_0) + \widetilde{R}^{(0)}(s; \lambda_0) J T_k^{(0)}(s; \lambda_0) = 0 \\ \widetilde{T}_k^{(1)}(s; \lambda_0) J R^{(0)}(s; \lambda_0) + \widetilde{R}^{(0)}(s; \lambda_0) J T_k^{(1)}(s; \lambda_0) + \\ \widetilde{T}_k^{(0)}(s; \lambda_0) J R^{(1)}(s; \lambda_0) + \widetilde{R}^{(1)}(s; \lambda_0) J T_k^{(0)}(s; \lambda_0) = 0 \\ \widetilde{U}_{k,l}^{(0)}(s; \lambda_0) J R^{(0)}(s; \lambda_0) + \widetilde{R}^{(0)}(s; \lambda_0) J U_{k,l}^{(0)}(s; \lambda_0) + \\ 2/3 \left(\widetilde{T}_k^{(0)}(s; \lambda_0) J T_l^{(0)}(s; \lambda_0) + \widetilde{T}_l^{(0)}(s; \lambda_0) J T_k^{(0)}(s; \lambda_0) \right) = 0 . \end{array} \right. \quad (1.49)$$

On ne donnera pas les relations explicites (c.-à-d. élément de matrice par élément de matrice) qu’impliquent ces dernières équations car la liste en est longue et sans grand intérêt pour ce qui nous concernera par la suite. On insistera juste sur le point suivant: si l’on note Q la matrice $R^{(1)} (R^{(0)})^{-1}$, alors la seconde égalité dans l’équation 1.49 implique la relation

$$\widetilde{Q} J + J Q = 0 .$$

D’après le paragraphe “Groupe symplectique” de cette même sous-section, on en déduit donc que Q a la même forme que la matrice Θ de l’équation 1.46.

Chapitre 2

Calcul de *mappings* et traitement des erreurs dans une ligne de focalisation finale: erreurs de champ, déplacements et rotations des aimants

Ce chapitre correspond au passage de l'étape II dont les principaux objectifs ont été évoqués dans l'introduction de ce manuscrit, à savoir: le calcul en bout de ligne de toutes les dérivées premières de l'*offset* δX et de la matrice R par rapport aux erreurs ainsi que celui des dérivées secondes des éléments de matrice R_{11} et R_{33} . Comme nous l'avons vu à la sous-section 1.3.3, l'évaluation des quantités ($\delta X^{(1)}$, $\delta X^{(2)}$, $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $T^{(0)}$, $T^{(1)}$, $U^{(0)}$) pour chacun des aimants de la ligne considérée permet, par concaténation successive, d'aboutir à nos fins. Les différentes erreurs susceptibles d'affecter un aimant donné seront alors séparées en deux catégories bien distinctes puis traitées de deux manières complètement différentes.

Nous nous intéresserons dans un premier temps aux erreurs de champ des différents éléments magnétiques de la ligne et nous nous restreindrons à celles ayant un effet non nul sur les huit quantités précédemment citées. La méthode utilisée sera de type différentielle, se basant sur un développement perturbatif de l'équation du mouvement. Cette méthode sera décrite en détail dans la première section puis appliquée à l'étude des $2m$ -pôles droits avec erreurs de champ (section 2.2).

Dans un second temps (section 2.3), nous nous attacherons à l'étude des défauts d'ali-

gnement (erreurs dites géométriques) de ces aimants. Six paramètres indépendants seront alors nécessaires pour l'analyse complète de ces défauts, à savoir: trois paramètres décrivant la translation en bloc de l'élément considéré et trois angles définissant son orientation dans l'espace Euclidien à trois dimensions. La méthode utilisée sera de type purement géométrique.

2.1 Algorithme de calcul

L'objet de cette section est de fournir un algorithme de calcul pour les différentes quantités $(\delta X^{(1)}, \delta X^{(2)}, R^{(0)}, R^{(1)}, R^{(2)}, T^{(0)}, T^{(1)}, U^{(0)})$ introduites au chapitre précédent.

2.1.1 Rappels et notations

On reprend les notations de la section 1.3. L'équation du mouvement s'écrit (cf. 1.40)

$$\frac{dX}{ds} = F(X; s; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} F_0(s; \lambda) + F_1(s; \lambda)(X) + F_2(s; \lambda)(X, X) + F_3(s; \lambda)(X, X, X) + \dots \quad (2.1)$$

où les quatre quantités F_0, F_1, F_2 et F_3 (qui sont respectivement un vecteur 6-dimensionnel, une matrice 6×6 , un tenseur $6 \times 6 \times 6$ symétrique par rapport à ses deux derniers indices et un tenseur $6 \times 6 \times 6 \times 6$ symétrique par rapport à ses trois derniers indices) sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(s; \lambda)_i = F_i(X=0; s; \lambda) = J_{im} \left(\frac{\partial g}{\partial X_m} \right)_{(X=0; s; \lambda)} \\ F_1(s; \lambda)_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X=0; s; \lambda) = J_{im} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_j \partial X_m} \right)_{(X=0; s; \lambda)} \\ F_2(s; \lambda)_{i,j,k} = \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial X_j \partial X_k}(X=0; s; \lambda) = \frac{J_{im}}{2} \left(\frac{\partial^3 g}{\partial X_j \partial X_k \partial X_m} \right)_{(X=0; s; \lambda)} \\ F_3(s; \lambda)_{i,j,k,l} = \frac{1}{6} \frac{\partial F_i}{\partial X_j \partial X_k \partial X_l}(X=0; s; \lambda) = \frac{J_{im}}{6} \left(\frac{\partial^4 g}{\partial X_j \partial X_k \partial X_l \partial X_m} \right)_{(X=0; s; \lambda)} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Tout comme dans la section 1.3, on considère un développement des quantités F_0, F_1, F_2 et F_3 autour d'une optique de *design* caractérisée par un jeu de paramètres λ_0 qui vérifient la condition 1.41:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(s; \lambda) = F_0^{(0)}(s) + F_0^{(1)}(s) + F_0^{(2)}(s) + \dots \\ F_1(s; \lambda) = F_1^{(0)}(s) + F_1^{(1)}(s) + F_1^{(2)}(s) + \dots \\ F_2(s; \lambda) = F_2^{(0)}(s) + F_2^{(1)}(s) + \dots \\ F_3(s; \lambda) = F_3^{(0)}(s) + \dots \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où, pour tout i et tout j , $F_i^{(j)} = \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \lambda} \right)_{\lambda_0} \delta \lambda^j$.

En particulier, on a donc $F_0^{(0)}(s) \stackrel{2.3}{=} F_0(s; \lambda_0) \stackrel{2.2}{=} F(X=0; s; \lambda_0) \stackrel{1.41}{=} 0$.

Ceci étant dit, on rappelle que l'on écrit la solution de 2.1 sous la forme suivante:

$$X(s) = \delta X(s; \lambda) + R(s; \lambda)(X_0) + T(s; \lambda)(X_0, X_0) + U(s; \lambda)(X_0, X_0, X_0) + \dots$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \delta X(s; \lambda) = \delta X^{(1)}(s) + \delta X^{(2)}(s) + \dots \\ R(s; \lambda) = R^{(0)}(s) + R^{(1)}(s) + R^{(2)}(s) + \dots \\ T(s; \lambda) = T^{(0)}(s) + T^{(1)}(s) + \dots \\ U(s; \lambda) = U^{(0)}(s) + \dots \end{cases} \quad (2.4)$$

Enfin, puisque $X(0) = X_0$, les conditions initiales de ces différentes quantités sont les suivantes:

$$\begin{cases} \delta X(0; \lambda) = 0 \quad \text{soit} \quad \delta X^{(1)}(0) = \delta X^{(2)}(0) = 0 \\ R(0; \lambda) = \mathbf{1} \quad \text{soit} \quad R^{(0)}(0) = \mathbf{1} \quad \text{et} \quad R^{(1)}(0) = R^{(2)}(0) = 0 \\ T(0; \lambda) = 0 \quad \text{soit} \quad T^{(0)}(0) = T^{(1)}(0) = 0 \\ U(0; \lambda) = 0 \quad \text{soit} \quad U^{(0)}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

2.1.2 Méthodes de calcul

A l'aide des définitions de la sous-section précédente, nous pouvons alors exhiber les huit équations différentielles vérifiées par les huit objets $(\delta X^{(1)}(s), \delta X^{(2)}(s), R^{(0)}(s), R^{(1)}(s), R^{(2)}(s), T^{(0)}(s), T^{(1)}(s), U^{(0)}(s))$. En effet, remplaçons dans l'équation différentielle 2.1 les quantités F_0, F_1, F_2 et F_3 par leur développement en fonction de l'erreur $\delta \lambda$ (équation 2.3) et faisons de même pour le vecteur X (développement 2.4 en fonction de X_0 et $\delta \lambda$). Alors, si de part et d'autre de l'égalité 1.40 on identifie les termes de même homogénéité en $(X_0, \delta \lambda)$, on aboutit aux équations recherchées, les conditions initiales étant données quant à elles par les relations 2.5¹:

$$\begin{cases} \delta X^{(1)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d \delta X^{(1)}}{ds} = F_1^{(0)} \delta X^{(1)} + F_0^{(1)} \\ \delta X^{(2)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d \delta X^{(2)}}{ds} = F_1^{(0)} \delta X^{(2)} + F_0^{(2)} + F_1^{(1)} \delta X^{(1)} + F_2^{(0)}(\delta X^{(1)}, \delta X^{(1)}) \end{cases}$$

1. Les notations tensorielles utilisées sont celles de la sous-section 1.3.3.

$$\left\{ \begin{array}{l}
R^{(0)}(0) = \mathbf{1} \text{ et } \frac{dR^{(0)}}{ds} = F_1^{(0)}R^{(0)} \\
R^{(1)}(0) = 0 \text{ et } \frac{dR^{(1)}}{ds} = F_1^{(0)}R^{(1)} + F_1^{(1)}R^{(0)} + 2 F_2^{(0)}(R^{(0)}, \delta X^{(1)}) \\
R^{(2)}(0) = 0 \text{ et } \frac{dR^{(2)}}{ds} = F_1^{(0)}R^{(2)} + F_1^{(1)}R^{(1)} + F_1^{(2)}R^{(0)} + \\
\qquad\qquad\qquad 2 \left(F_2^{(0)}(R^{(1)}, \delta X^{(1)}) + F_2^{(0)}(R^{(0)}, \delta X^{(2)}) + \right. \\
\qquad\qquad\qquad \left. F_2^{(1)}(R^{(0)}, \delta X^{(1)}) \right) + 3 F_3^{(0)}(R^{(0)}, \delta X^{(1)}, \delta X^{(1)}) \\
\\
\left\{ \begin{array}{l}
T^{(0)}(0)=0 \text{ et } \frac{dT^{(0)}}{ds} = F_1^{(0)}T^{(0)} + F_2^{(0)}(R^{(0)}, R^{(0)}) \\
T^{(1)}(0)=0 \text{ et } \frac{dT^{(1)}}{ds} = F_1^{(0)}T^{(1)} + F_1^{(1)}T^{(0)} + 2 \left(\left(F_2^{(0)}(R^{(1)}, R^{(0)}) \right)_{Sym} + \right. \\
\qquad\qquad\qquad \left. F_2^{(0)}(T^{(0)}, \delta X^{(1)}) \right) + F_2^{(1)}(R^{(0)}, R^{(0)}) + \\
\qquad\qquad\qquad 3 F_3^{(0)}(R^{(0)}, R^{(0)}, \delta X^{(1)}) \\
\\
U^{(0)}(0) = 0 \text{ et } \frac{dU^{(0)}}{ds} = F_1^{(0)}U^{(0)} + 2 \left(F_2^{(0)}(R^{(0)}, T^{(0)}) \right)_{Sym} + \\
\qquad\qquad\qquad F_3^{(0)}(R^{(0)}, R^{(0)}, R^{(0)}) .
\end{array} \right. \tag{2.6}
\end{array} \right.$$

On note $(Q_i, 1 \leq i \leq 7)$ les sept quantités $(\delta X^{(1)}, \delta X^{(2)}, R^{(1)}, R^{(2)}, T^{(0)}, T^{(1)}, U^{(0)})$; d'après les équations précédentes, on voit alors aisément que chaque Q_i vérifie une équation différentielle linéaire inhomogène du premier ordre de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l}
Q_i(0) = 0 \\
\frac{dQ_i}{ds} = F_1^{(0)}Q_i + G_i
\end{array} \right. \tag{2.7}$$

où G_i est un objet du même type que Q_i (vecteur, matrice ou tenseur à 3 ou 4 indices) qui dépend des quantités $F_k^{(l)}$ et $(Q_j, \mathbf{j} < \mathbf{i})$. Maintenant, si l'on se souvient que la matrice $R^{(0)}$ vérifie l'équation $(dR^{(0)}/ds) = F_1^{(0)}R^{(0)}$ avec $R^{(0)}(0) = \mathbf{1}$, on montre alors facilement que la solution de l'équation différentielle 2.7 s'écrit ²

$$Q_i(s) = R^{(0)}(s) \int_0^s ds' \left(R^{(0)}(s') \right)^{-1} G_i(s') . \tag{2.8}$$

2. La matrice $R^{(0)}(s)$ est symplectique pour tout s , donc inversible et d'inverse (cf. sous-section 1.3.4)

$$\left(R^{(0)}(s) \right)^{-1} = -J \widetilde{R^{(0)}(s)} J .$$

En supposant que l'on connaisse la matrice $R^{(0)}(s)$ pour tout s , on est donc capable, d'après 2.8, de résoudre les sept équations différentielles vérifiées par les sept quantités $(\delta X^{(1)}, \delta X^{(2)}, R^{(1)}, R^{(2)}, T^{(0)}, T^{(1)}, U^{(0)})$ à condition de procéder dans l'ordre prédéfini par la succession des relations 2.6.

2.1.3 Cas d'un Hamiltonien ne présentant aucun terme linéaire dans les variables canoniques

Plaçons nous ici dans le cas particulier où l'Hamiltonien g commence de façon directement quadratique dans les variables canoniques; la fonction vectorielle F_0 définie par $F_0(s; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} F(X = 0; s; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (J\vec{\nabla}g)_{X=0}$ (équation 2.2) est alors partout nulle. En reprenant l'équation du mouvement 2.1 avec $F_0 = 0$,

$$dX/ds = F_1(s; \lambda)(X) + F_2(s; \lambda)(X, X) + F_3(s; \lambda)(X, X, X) + \dots ,$$

puis en se rappelant de l'écriture formelle de sa solution sous la forme d'un développement dans les conditions initiales X_0 (équation 1.42),

$$X(s) = \delta X(s; \lambda) + R(s; \lambda)(X_0) + T(s; \lambda)(X_0, X_0) + U(s; \lambda)(X_0, X_0, X_0) + \dots ,$$

on obtient aisément les quatre équations différentielles que vérifient les quatre quantités δX , R , T , et U , et sans faire appel au développement perturbatif en $\delta\lambda$ invoqué précédemment. On a d'une part

$$d\delta X/ds = F_1 \delta X \text{ avec } \delta X(0; \lambda) = 0 , \text{ soit } \delta X(s; \lambda) = 0 . \quad (2.9)$$

Lorsque l'Hamiltonien ne contient aucun terme linéaire, l'*offset* associé à cette dynamique est donc le vecteur nul et nous pouvons prouver aisément que la réciproque est vraie. Munis de cette nouvelle information, nous obtenons finalement les équations que vérifient les matrices R , T , U et qui sont formellement identiques à celles relatives aux trois quantités $R^{(0)}$, $T^{(0)}$ et $U^{(0)}$ précédemment définies:

$$\left\{ \begin{array}{ll} dR/ds = F_1 R & \text{avec } R(0; \lambda) = \mathbf{1} \\ dT/ds = F_1 T + F_2(R, R) & \text{avec } T(0; \lambda) = 0 \\ dU/ds = F_1 U + 2 \left(F_2(R, T) \right)_{Sym} + F_3(R, R, R) & \text{avec } U(0; \lambda) = 0 . \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Il faut donc insister sur le fait important suivant: la méthode perturbative développée à la sous-section précédente ne trouve aucune utilité lorsque l'Hamiltonien ne contient aucun terme linéaire dans les variables canoniques ou, ce qui est équivalent, lorsque l'*offset* δX

est partout nul. Cette dernière remarque était en fait sous-jacente dès l'écriture des premières formules de concaténation du chapitre 1 (équation 1.44) qui montraient la difficulté d'effectuer le produit algébrique de deux *mappings* lorsque l'*offset* δX_1 associé au premier d'entre eux était non nul.

2.2 Les $2m$ -pôles parfaits droits

2.2.1 Classification des erreurs de champ dans les $2m$ -pôles

Dans cette section, on désire appliquer les résultats précédents aux $2m$ -pôles parfaits droits ($1 \leq m \leq 3$) avec erreur de champ $2m$ -polaire droit et erreurs de champ $2n$ -polaire droit et tourné ($n > m$). Pratiquement, on est amené à faire les deux hypothèses suivantes:

- la courbure $h(s)$ de la courbe de référence \mathcal{C} est constante par morceau, donc \mathcal{C} est une suite de segments droits et d'arcs de cercle; plus précisément, $h=0$ pour les éléments optiques droits (*drift*, quadrupôle, hexapôle, ...) et $h \neq 0$ pour les éléments optiques de courbure, c'est à dire les dipôles.
- lorsque l'on considère un $2(m+1)$ -pôle droit et parfait, le jeu de paramètres λ_0 caractérisant l'optique de *design* se limite à la constante $K_m^+ = \mathcal{A}_m^+ / (p_0/q)$ (les constantes \mathcal{A}_m^+ sont celles qui définissent les potentiels vecteurs longitudinaux du tableau 1.2); de plus, dans le cas du dipôle droit, on impose $K_0^+ = h$ (cf. condition 1.41). Enfin, le jeu de paramètres $\delta\lambda$ définissant les fluctuations de l'optique réelle par rapport à l'optique de *design* sera le jeu de constantes $(\delta K_m^+; \delta K_n^\pm, m < n)$.

Nous ne considérerons donc pas ici de $2(m+1)$ -pôles droits possédant une légère composante $2(m+1)$ -polaire tournée δK_m^- ou certaines composantes $2(n+1)$ -polaires ($\delta K_n^\pm, n < m$) droites ou tournées. En effet, ce type d'erreur peut être aussi interprété comme un défaut d'alignement de l'élément considéré et rentre donc dans la catégorie des erreurs dites géométriques traitées à la section 2.3.

- Un $2(m+1)$ -pôles droits possédant une petite composante $2(m+1)$ -polaire tournée δK_m^- peut être aussi traité comme un pur $2(m+1)$ -pôles de même force K_m^+ mais ayant subi une légère rotation autour de son axe propre par un angle $\delta\psi \sim -1/m \delta K_m^- / K_m^+$.
- Un quadrupôle possédant une composante dipolaire droite ou tournée δK_0^\pm peut être aussi considéré comme un pur quadrupôle de même force mais décentré horizontalement ou verticalement par une quantité $\delta x = -\delta K_0^+ / \delta K_1^+$ ou $\delta y = -\delta K_0^- / \delta K_1^-$ (ces équivalences étant obtenues à partir d'un calcul simple fait sur les potentiels vecteurs longitudinaux donnés

dans le tableau 1.1).

– En revanche, le raisonnement précédent se complique quelque peu dans le cas d'un hexapôle dont le champ magnétique possède de petites composantes dipolaires et quadrupolaires $\delta K_{0,1}^{\pm}$. En effet, si un pur hexapôle est déplacé transversalement d'une quantité δx , le champ magnétique près de l'axe possède, outre sa composante hexapolaire d'origine, et une composante quadrupolaire (de force proportionnelle à δx), et une composante dipolaire ($\propto \delta x^2$) qui est nécessairement reliée à la précédente. Afin de parvenir aux équivalences souhaitées, nous faisons appel à deux autres paramètres indépendants rentrant dans la catégorie des erreurs géométriques: l'angle azimutal θ et l'angle d'élévation ϕ qui décrivent les rotations de l'aimant considéré respectivement autour de l'axe vertical et autour de l'axe horizontal, le point d'entrée de l'élément restant invariant. Si donc on considère un pur hexapôle droit de force $K_2^+ = \mathcal{B}_2^+/(p_0/q)$ et possédant les défauts d'alignement (dx, θ, dy, ϕ) , le potentiel vecteur longitudinal s'écrit de la façon suivante dans les coordonnées spatiales d'origine (cf. Tab. 1.1):

$$A_s = -\mathcal{B}_2^+/6 \left((x - \delta x - \theta s)^3 - 3(x - \delta x - \theta s)(y - \delta y - \phi s)^2 \right).$$

En intégrant cette relation le long de l'hexapôle de longueur L puis en se référant au tableau 1.1, on prouve aisément que le potentiel vecteur considéré ici n'est ni plus ni moins que celui créé par un hexapôle droit de force K_2^+ , centré mais possédant des composantes dipolaires et quadrupolaires droites et tournées $\delta K_{0,1}^{\pm}$ dont les forces moyennées sont respectivement

$$\begin{aligned} \delta K_0^+ &= K_2^+/2 \left(((\delta x + \theta L/2)^2 + \theta^2 L^2/12) - ((\delta y + \phi L/2)^2 + \phi^2 L^2/12) \right) \\ \delta K_0^- &= K_2^+ \left((\delta x + \theta L/2)(\delta y + \phi L/2) + \theta \phi L^2/12 \right) \\ \delta K_1^+ &= -K_2^+ (\delta x + \theta L/2) \\ \delta K_1^- &= -K_2^+ (\delta y + \phi L/2). \end{aligned}$$

– Ce même type d'argument tombe en défaut dans le cas de l'octupôle ou, d'une manière générale, dans le cas des $2m$ -pôles, $m \geq 4$, possédant de petites composantes $2n$ -polaires droites et tournées, $n < m$. Néanmoins, ces types d'aimants n'étant à l'heure actuelle jamais utilisés dans les systèmes de focalisation finale, leur étude sera délibérément laissée de côté dans ce manuscrit.

Revenons maintenant à la suite de notre exposé. Comme nous le remarquons à la sous-section 1.1.3, le potentiel vecteur du $2(m+1)$ -pôle parfait défini ci-dessus (droit et avec erreurs de champ $\delta K = (\delta K_m^+; \delta K_n^{\pm}, m < n)$) est indépendant de l'abscisse s et devient donc purement longitudinal, soit $K_{x,y} = 0$ dans l'équation 1.38 qui décrit l'Hamiltonien électromagnétique g . Par conséquent, au sein de l'élément optique considéré, g est indépendant

de l'abscisse s et varie linéairement avec les défauts de champ δK de l'aimant considéré:

$$g(X; K_m^+, \delta K) \stackrel{1.38}{=} -(1+\text{h}x) \left[\sqrt{\left(\frac{1}{\beta_0} + \delta\right)^2 - \frac{1}{\beta_0^2 \gamma_0^2} - \widehat{P}_x^2 - \widehat{P}_y^2} + K_s(x, y; K_m^+, \delta K) \right] + \frac{\delta}{\beta_0} + 1$$

où la force $K_s \stackrel{\text{def}}{=} A_s/(p_0/q)$ est indépendante de l'abscisse s et varie linéairement avec les erreurs de champ δK . En ce qui concerne les quantités $F_i^{(j)}$ introduites à la section précédente,

$$F_i^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta K^j}{j!} \left(\frac{\partial^j F_i}{\partial \delta K^j} \right)_{\delta K=0} \text{ avec } (F_i)_{k_1, \dots, k_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial^i F}{\partial X_{k_1} \dots \partial X_{k_i}} \right)_{X=0} \text{ et } F(X; K_m^+, \delta K) \stackrel{\text{def}}{=} J \vec{\nabla} g,$$

on obtient donc les deux conditions suivantes:

$$\partial_s F_i^{(j)} = 0, i \geq 0, j \geq 0 \text{ et } F_i^{(j)} = 0, i \geq 0, j > 1.$$

La première de ces conditions rend alors possible un calcul analytique de la matrice $R^{(0)}$ (résolution d'une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants). La solution pour $R^{(0)}$ est en effet $R^{(0)}(s) = \exp(F_1^{(0)} s)$ et tout se résume donc à un calcul d'exponentiel de matrice; de plus, par le résultat d'un tel calcul, les éléments de matrice de $R^{(0)}$ sont de simples combinaisons polynômiales de fonctions trigonométriques et hyperboliques et on a donc accès, via l'équation 2.8, à des expressions analytiques pour les sept quantités $(\delta X^{(1)}, \delta X^{(2)}, R^{(1)}, R^{(2)}, T^{(0)}, T^{(1)}, U^{(0)})^3$.

C'est ainsi que nous procéderons dans toute la suite de cette section; vu la grosseur des calculs analytiques mis en jeu, nous avons utilisé le logiciel de mathématiques formelles MAPLE [15] et pour des raisons évidentes nous ne donnerons ici que les résultats obtenus sans jamais détailler les calculs.

Enfin, comme nous l'avons déjà annoncé à la sous-section 1.3.2, remarquons que l'algorithme de calcul présenté précédemment nécessite uniquement la connaissance des quatre objets F_0, F_1, F_2 et F_3 : ce sont là des quantités que nous possédons puisque, par la table 1.2, nous avons le potentiel vecteur longitudinal à l'ordre 4 en (x, y) et donc l'Hamiltonien g à l'ordre 4 en X via l'équation 1.38. Plus précisément, seules les quantités $(F_0^{(1)}, F_1^{(0)}, F_1^{(1)}, F_2^{(0)}, F_2^{(1)}, F_3^{(0)})^4$ donnent une contribution non nulle dans le calcul des sept objets $(\delta X^{(1)}, \delta X^{(2)}, R^{(1)}, R^{(2)}, T^{(0)}, T^{(1)}, U^{(0)})$. En outre, au vu du tableau 1.2, nous savons que les erreurs de champ $2(n+1)$ -polaire du type $(\delta K_n^\pm, \mathbf{n} \geq \mathbf{3})$ donnent au potentiel vecteur longitudinal A_s et donc à l'Hamiltonien g des contributions supplémentaires du

3. Tout ce qui précède s'applique évidemment aux $2m$ -pôles tournés parfaits avec erreurs de champ.

4. Comme nous le remarquons plus haut, on a $F_0^{(2)} = F_1^{(2)} = 0$ pour les $2m$ -pôles parfaits.

type $\delta K_n^\pm x^k y^l$ avec $k + l \geq n + 1 \geq 4$. De tels défauts n'influent donc nullement sur les quantités $(F_0^{(1)}, F_1^{(0)}, F_1^{(1)}, F_2^{(0)}, F_2^{(1)}, F_3^{(0)})$. Par conséquent, nous pouvons énumérer dès à présent le nombre et le type d'erreurs de champ à prendre en compte pour l'étude du dipôle droit, du quadrupôle droit et de l'hexapôle droit:

- le dipôle droit: erreur de champ dipolaire droit δK_0^+ , erreurs de champ quadrupolaire droit et tourné δK_1^\pm , erreurs de champ hexapolaire droit et tourné δK_2^\pm , soit cinq erreurs de champ au total.
- le quadrupôle droit: erreur de champ quadrupolaire droit δK_1^+ , erreurs de champ hexapolaire droit et tourné δK_2^\pm , soit trois erreurs de champ au total.
- l'hexapôle droit: erreur de champ hexapolaire droit δK_2^+ , soit une seule erreur de champ.

2.2.2 Le dipôle droit à entrée et sortie normales

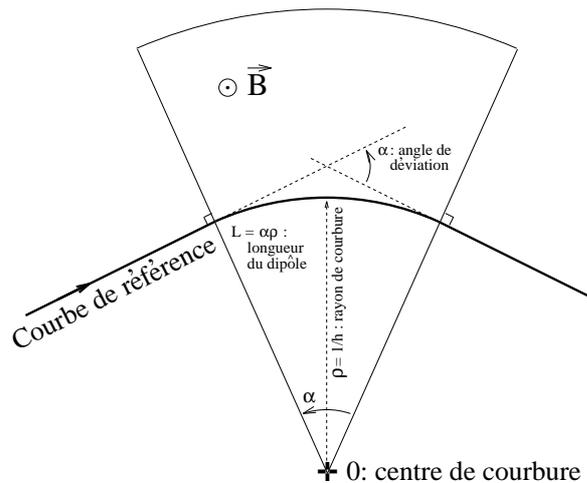


FIG. 2.1 – Le dipôle à entrée et sortie normales

Hamiltonien

Nous considérons ici un dipôle parfait droit, à entrée et sortie normales, encore appelé *S-bend* (cf. Fig. 2.1). On note $h=1/\rho$ la courbure de \mathcal{C} pour la section de longueur L comprise entre l'entrée et la sortie du dipôle; $\alpha = hL$ représente donc l'angle de déviation de la courbe référence entre l'entrée et la sortie du *S-bend*. Enfin, $K_0^+ = h$, δK_0^+ , δK_1^\pm et δK_2^\pm désignent respectivement la force du dipôle, l'erreur de champ dipolaire droit, les erreurs de champ

quadrupolaire droit et tourné et les erreurs de champ hexapolaire droit et tourné. Avec ces notations, l'Hamiltonien du dipôle s'écrit (cf. équation 1.38 et Tab. 1.2)

$$g(X; K_0^+, \delta K) = -(1 + h x) \left[\sqrt{\left(\frac{1}{\beta_0} + \delta \right)^2 - \frac{1}{\beta_0^2 \gamma_0^2} - \widehat{P}_x^2 - \widehat{P}_y^2} + K_s(x, y; K_0^+, \delta K) \right] + \frac{\delta}{\beta_0} + 1 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{où } K_s(x, y; K_0^+, \delta K) = & -(h + \delta K_0^+) x + \frac{1}{2} \frac{h(h + \delta K_0^+) x^2}{1 + h x} + \frac{1}{2} \delta K_1^+ (y^2 - x^2) + \\ & \frac{1}{6} h \delta K_1^+ x^3 - \frac{1}{24} h^2 \delta K_1^+ (4x^4 - y^4) + \delta K_1^- x y - \\ & \frac{1}{6} h \delta K_1^- y^3 + \frac{1}{3} h^2 \delta K_1^- x y^3 - \frac{1}{6} \delta K_2^+ (x^3 - 3x y^2) + \\ & \frac{1}{24} h \delta K_2^+ (x^4 - y^4) + \frac{1}{6} \delta K_2^- (3x^2 y - y^3) - \frac{1}{6} h \delta K_2^- x y^3 + o(5) . \end{aligned} \quad (2.12)$$

On définit enfin les quatre constantes suivantes:

$$c_x = \cos(h L), \quad s_x = \frac{\sin(h L)}{h}, \quad d_x = \frac{1 - c_x}{h^2} \quad \text{et} \quad J_1 = \frac{L - s_x}{h^2} .$$

Offsets

Les seules dérivées premières et secondes non nulles de l'offset δX par rapport aux erreurs de champ sont les suivantes:

- la dérivée première par rapport à δK_0^+

$$\frac{\partial \delta X}{\partial \delta K_0^+} = \left(-d_x, -s_x, 0, 0, \frac{h J_1}{\beta_0}, 0 \right) .$$

- la dérivée seconde par rapport à δK_0^+

$$\frac{\partial^2 \delta X}{\partial^2 \delta K_0^+} = \left(h d_x^2, 0, 0, 0, -2 \frac{J_1}{\beta_0}, 0 \right) .$$

- la dérivée seconde par rapport à δK_0^+ et δK_1^+

$$\frac{\partial^2 \delta X}{\partial \delta K_0^+ \partial \delta K_1^+} = \left(\frac{d_x - 1/2 L s_x}{h^2}, \frac{s_x - L c_x}{2 h^2}, 0, 0, \frac{3/2 s_x - 3/2 L c_x - L h^2 d_x}{h^3 \beta_0}, 0 \right) .$$

- la dérivée seconde par rapport à δK_0^+ et δK_1^-

$$\frac{\partial^2 \delta X}{\partial \delta K_0^+ \partial \delta K_1^-} = \left(0, 0, \frac{d_x - 1/2 L^2}{h^2}, -J_1, 0, 0 \right) .$$

Matrices R

La matrice $R^{(0)}$ du dipôle parfait sans erreurs de champ est donnée par

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} c_x & s_x & 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar d_x}{\beta_0} \\ -\hbar^2 s_x & c_x & 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar s_x}{\beta_0} \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\hbar s_x}{\beta_0} & -\frac{\hbar d_x}{\beta_0} & 0 & 0 & 1 & -\frac{\hbar^2 J_1}{\beta_0^2} + \frac{L}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les seules dérivées premières et secondes non nulles de la matrice R par rapport aux erreurs de champ sont les suivantes:

– la dérivée première par rapport à δK_0^+

$$\frac{\partial R}{\partial \delta K_0^+} = \begin{pmatrix} -\hbar s_x^2 & -\hbar s_x d_x & 0 & 0 & 0 & \frac{c_x d_x}{\beta_0} \\ -\hbar s_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hbar J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_x}{\beta_0} & 0 & 0 & 0 & \hbar J_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée première par rapport à δK_1^+

$$\frac{\partial R}{\partial \delta K_1^+} = \begin{pmatrix} -1/2 L s_x & \frac{L c_x - s_x}{2 \hbar^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_x - 1/2 L s_x}{\beta_0 \hbar} \\ -\frac{s_x + L c_x}{2} & -\frac{1}{2} L s_x & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_x - L c_x}{2 \hbar \beta_0} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} L^2 & \frac{1}{6} L^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & \frac{1}{2} L^2 & 0 & 0 \\ \frac{s_x - L c_x}{2 \hbar \beta_0} & \frac{d_x - 1/2 L s_x}{\beta_0 \hbar} & 0 & 0 & 0 & \frac{3 J_1 - L d_x}{2 \beta_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée première par rapport à δK_1^-

$$\frac{\partial R}{\partial \delta K_1^-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_x & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_x & d_x & 0 & 0 \\ d_x & J_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_x - 1/2 L^2}{\beta_0 h} \\ s_x & d_x & 0 & 0 & 0 & \frac{h J_1}{\beta_0} \\ 0 & 0 & -\frac{h J_1}{\beta_0} & \frac{d_x - 1/2 L^2}{\beta_0 h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée seconde par rapport à δK_0^+

$$\frac{\partial^2 R}{\partial^2 \delta K_0^+} = \begin{pmatrix} 0 & 2 s_x d_x & 0 & 0 & 0 & \frac{h d_x^2}{\beta_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h s_x^3}{\beta_0} & \frac{c_x s_x^2 - 2 d_x}{h \beta_0} & 0 & 0 & 0 & \frac{s_x^3}{\beta_0^2} - 2 J_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée seconde par rapport à δK_0^+ et δK_1^+

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \delta K_0^+ \partial \delta K_1^+} = \begin{pmatrix} \frac{s_x^2 + d_x(-2 + 3h^2 L s_x)}{3h} & \frac{d_x(5s_x/6 + L/2 - Lc_x) - J_1}{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_x(10 - 4c_x) + 3Ls_x(c_x - 2)}{3h^2 \beta_0} \\ \frac{8h^2 d_x s_x / 3 - s_x + Lc_x}{2h} & \frac{h^2 s_x J_1 + 2d_x/3 - s_x^2/3}{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{s_x d_x - 9c_x J_1}{6\beta_0} \\ 0 & 0 & -hJ_1 L & \frac{J_1(3 - h^2 L^2) - Ld_x}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -hJ_1 & -hJ_1 L & 0 & 0 \\ \frac{-d_x(6L + s_x) + 9J_1}{6\beta_0} & \frac{9Ls_x + d_x(c_x - 19)}{6h^2 \beta_0} & 0 & 0 & 0 & \frac{Ld_x(10 + 3\beta_0^2) - J_1(9\beta_0^2 + 31 - c_x)}{6h\beta_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée seconde par rapport à δK_0^+ et δK_1^-

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \delta K_0^+ \partial \delta K_1^-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d_x(c_x - 2) + Ls_x/2}{h} & \frac{J_1(4c_x - 13) + Ld_x + L^2s_x}{4h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{s_x - Lc_x}{2h} & \frac{3Ls_x + L^2c_x - 8d_x}{4h} & 0 & 0 \\ \frac{d_x(7c_x - 1) + L(L - 4s_x)}{4h} & \frac{d_x(21s_x - 12L) - 27J_1}{12h} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_x(9 - 7c_x) - 8h^2LJ_1 - L^2}{4h^2\beta_0} \\ \frac{h}{2}(J_1 - 3s_xd_x) & 3\frac{s_x^2/2 - d_x}{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{3s_xd_x - 7J_1}{2\beta_0} \\ 0 & 0 & \frac{7J_1 - Ld_x}{2\beta_0} & \frac{L^2(c_x + 8) - 8d_x - 5Ls_x}{4h^2\beta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée seconde par rapport à δK_0^+ et δK_2^+

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \delta K_0^+ \partial \delta K_2^+} = \begin{pmatrix} \frac{Ls_x/2 - d_x(2 + c_x)/3}{h^2} & \frac{Ld_x - J_1(1 + 2c_x)}{6h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_x(5 + c_x) - 3Ls_x}{3h^3\beta_0} \\ \frac{4h^2d_x s_x/3 - s_x + Lc_x}{2h^2} & \frac{d_x/3 + h^2s_x J_1/2 - s_x^2/6}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{s_xd_x - 3c_x J_1}{3h\beta_0} \\ 0 & 0 & \frac{d_x - L^2/2}{h^2} & \frac{6Ld_x - 12J_1 - L^3}{6h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_1 & \frac{Ls_x - d_x - L^2/2}{h^2} & 0 & 0 \\ \frac{J_1 + d_x(s_x - 3L)/6}{h\beta_0} & \frac{3Ls_x - d_x(c_x + 5)}{6h^3\beta_0} & 0 & 0 & 0 & \frac{5Ld_x - J_1(c_x + 14)}{6\beta_0^2h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée seconde par rapport à δK_0^+ et δK_2^-

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \delta K_0^+ \partial \delta K_2^-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{Ls_x/2 - d_x}{h^2} & \frac{L^2s_x - Ld_x - 3J_1}{4h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Lc_x - s_x}{2h^2} & \frac{Ls_x + L^2c_x - 4d_x}{4h^2} & 0 & 0 \\ \frac{d_x(c_x - 3) + L^2}{4h^2} & \frac{s_xd_x - 3J_1}{4h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_x(7 - c_x) - 3L^2}{4h^3\beta_0} \\ \frac{J_1 - s_xd_x}{2} & -\frac{1}{2}d_x^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_xd_x - 3J_1}{2h\beta_0} \\ 0 & 0 & \frac{3J_1 - Ld_x}{2h\beta_0} & \frac{L(3J_1 - Ld_x)}{4h\beta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée seconde par rapport à δK_1^+

$$\frac{\partial^2 R}{\partial^2 \delta K_1^+} = \begin{pmatrix} \frac{L(s_x - Lc_x)}{4h^2} & \frac{3s_x - 3Lc_x - h^2 L^2 s_x}{4h^4} & 0 & 0 & 0 & \frac{2d_x + L^2 c_x/4 - 5Ls_x/4}{h^3 \beta_0} \\ \frac{s_x - Lc_x + h^2 L^2 s_x}{4h^2} & \frac{L(s_x - Lc_x)}{4h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3s_x - 3Lc_x - h^2 L^2 s_x}{4h^3 \beta_0} \\ 0 & 0 & \frac{L^4}{12} & \frac{L^5}{60} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^3}{3} & \frac{L^4}{12} & 0 & 0 \\ \frac{3Lc_x + h^2 L^2 s_x - 3s_x}{4h^3 \beta_0} & \frac{5Ls_x/4 - 2d_x - L^2 c_x/4}{h^3 \beta_0} & 0 & 0 & 0 & \frac{7Ld_x - 15J_1 - L^2 s_x}{4h^2 \beta_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée seconde par rapport à δK_1^+ et δK_1^-

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \delta K_1^+ \partial \delta K_1^-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{L^2 + Ls_x - 4d_x}{2h^2} & \frac{L^3 + 3Ld_x - 15J_1}{6h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2Lh^2 d_x - 3s_x + 3Lc_x}{2h^2} & \frac{L^2 + Ls_x - 4d_x}{2h^2} & 0 & 0 \\ \frac{L^2 + Ls_x - 4d_x}{2h^2} & \frac{L^3 + 3Ld_x - 15J_1}{6h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{72d_x + h^2 L^4 - 24L^2 - 12Ls_x}{24h^3 \beta_0} \\ \frac{2Lh^2 d_x - 3s_x + 3Lc_x}{2h^2} & \frac{L^2 + Ls_x - 4d_x}{2h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^3 + 3Ld_x - 15J_1}{6h\beta_0} \\ 0 & 0 & \frac{15J_1 - L^3 - 3Ld_x}{6h\beta_0} & \frac{24L^2 + 12Ls_x - 72d_x - h^2 L^4}{24h^3 \beta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– la dérivée seconde par rapport à δK_1^-

$$\frac{\partial^2 R}{\partial^2 \delta K_1^-} = \begin{pmatrix} \frac{2d_x - Ls_x}{h^2} & \frac{3J_1 - Ld_x}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2 + Ls_x - 4d_x}{h^3 \beta_0} \\ \frac{s_x - Lc_x}{h^2} & \frac{2d_x - Ls_x}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3J_1 - Ld_x}{h\beta_0} \\ 0 & 0 & \frac{L^2 - 2d_x}{h^2} & \frac{L^3 - 6J_1}{3h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2J_1 & \frac{L^2 - 2d_x}{h^2} & 0 & 0 \\ \frac{Ld_x - 3J_1}{h\beta_0} & \frac{4d_x - L^2 - Ls_x}{h^3 \beta_0} & 0 & 0 & 0 & \frac{5J_1 - Ld_x - L^3/3}{h^2 \beta_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrices T

On note $T^{(0)}$ la matrice T du dipôle parfait sans erreurs de champ; on désigne par $T1$, $T2$, $T3$, $T4$ et $T5$ les dérivées respectives de T par rapport à δK_0^+ , δK_1^+ , δK_1^- , δK_2^+ et δK_2^- . On rappelle que les matrices $T^{(0)}$, $T1$, $T2$, $T3$, $T4$ et $T5$ sont des tenseurs à trois

indices symétriques par rapport à leurs deux derniers indices; leurs éléments de matrice $(i, j, k; j \leq k)$ non nuls sont listés ci-après.

– Matrice $T^{(0)}$:

$$T_{1,1,1}^{(0)} = -\frac{1}{2} h^3 s_x^2$$

$$T_{1,1,2}^{(0)} = \frac{1}{2} h s_x c_x$$

$$T_{1,1,6}^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{h^2 s_x^2}{\beta_0}$$

$$T_{1,2,2}^{(0)} = \frac{1}{2} h c_x d_x$$

$$T_{1,2,6}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{s_x c_x}{\beta_0}$$

$$T_{1,4,4}^{(0)} = -\frac{1}{2} h d_x$$

$$T_{1,6,6}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{h (s_x^2 + d_x/\gamma_0^2)}{\beta_0^2}$$

$$T_{2,2,2}^{(0)} = -\frac{1}{2} h s_x$$

$$T_{2,4,4}^{(0)} = -\frac{1}{2} h s_x$$

$$T_{2,6,6}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{h s_x}{\beta_0^2 \gamma_0^2}$$

$$T_{3,1,4}^{(0)} = \frac{1}{2} h s_x$$

$$T_{3,2,4}^{(0)} = \frac{1}{2} h d_x$$

$$T_{3,4,6}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{s_x}{\beta_0}$$

$$T_{5,1,6}^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{h s_x}{\beta_0^2 \gamma_0^2}$$

$$T_{5,2,2}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{s_x}{\beta_0}$$

$$T_{5,2,6}^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{h d_x}{\beta_0^2 \gamma_0^2}$$

$$T_{5,4,4}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{s_x}{\beta_0}$$

$$T_{5,6,6}^{(0)} = -\frac{3}{2} \frac{s_x}{\beta_0^3 \gamma_0^2}.$$

– Matrice $T1$:

$$T1_{1,1,1} = -\frac{1}{2} h^2 s_x^2$$

$$T1_{1,1,6} = \frac{1}{2} \frac{h s_x^2}{\beta_0}$$

$$T1_{1,2,2} = \frac{1}{2} d_x - s_x^2$$

$$T1_{1,4,4} = -\frac{1}{2} c_x d_x$$

$$T1_{1,6,6} = -\frac{1}{2} \frac{d_x (1 + c_x (2 - \beta_0^2))}{\beta_0^2}$$

$$T1_{3,2,4} = -\frac{1}{2} d_x$$

$$T1_{5,1,1} = -\frac{1}{2} \frac{h^3 s_x^3}{\beta_0}$$

$$T1_{5,1,2} = \frac{1}{2} \frac{h s_x^2 c_x}{\beta_0}$$

$$T1_{5,1,6} = \frac{1}{2} \frac{h^2 s_x^3}{\beta_0^2}$$

$$T1_{5,2,2} = \frac{1}{2} \frac{h s_x^3}{\beta_0}$$

$$T1_{5,2,6} = -\frac{1}{2} \frac{d_x/\gamma_0^2 + c_x s_x^2}{\beta_0^2}$$

$$T1_{5,6,6} = -\frac{1}{2} \frac{h s_x^3}{\beta_0^3}.$$

– Matrice $T2$:

$$T2_{1,1,1} = -\frac{h}{6}(2s_x^2 + 2d_x + 3s_x Lc_x)$$

$$T2_{1,1,2} = \frac{h}{12}(3J_1 - 6Ls_x^2 - s_x d_x)$$

$$T2_{1,1,6} = \frac{2d_x^2 h^2 + 3s_x L(2c_x - 1)}{12\beta_0}$$

$$T2_{1,2,2} = \frac{3Ls_x(2c_x - 1) - 2d_x(2 + c_x)}{12h}$$

$$T2_{1,2,6} = \frac{6Ls_x^2 - d_x(5s_x + 3L)}{12\beta_0}$$

$$T2_{1,3,3} = \frac{1}{2} h d_x$$

$$T2_{1,4,4} = \frac{2d_x - Ls_x}{4h}$$

$$T2_{1,6,6} = \frac{d_x(10c_x - 6\beta_0^2) + s_x(3L(1 + \beta_0^2 - 2c_x) - 2s_x)}{12h\beta_0^2}$$

$$T2_{2,1,1} = -\frac{1}{3} h s_x(1 + 2c_x)$$

$$T2_{2,1,2} = -\frac{1}{3} h d_x(1 + 2c_x)$$

$$T2_{2,1,6} = -\frac{h^2(5s_x d_x + 3c_x J_1)}{12\beta_0}$$

$$T2_{2,2,2} = -\frac{h}{12}(5s_x d_x + 3c_x J_1)$$

$$T2_{2,2,6} = \frac{s_x(8s_x - 3L) - 4d_x}{12\beta_0}$$

$$T2_{2,3,3} = \frac{1}{2} h s_x$$

$$T2_{2,4,4} = \frac{s_x - Lc_x}{4h}$$

$$T2_{2,6,6} = \frac{s_x(5 - 3\beta_0^2) + 3Lc_x(1 + \beta_0^2) - 8s_x c_x}{12h\beta_0^2}$$

$$T2_{3,1,3} = \frac{1}{2} h L s_x$$

$$T2_{3,1,4} = \frac{s_x(h^2 L^2 - 1) + Lc_x}{4h}$$

$$T2_{3,2,3} = \frac{1}{2} h L d_x$$

$$T2_{3,2,4} = \frac{d_x(h^2 L^2 - 2) + Ls_x}{4h}$$

$$T2_{3,3,6} = \frac{L(L - 2s_x)}{4\beta_0}$$

$$T2_{3,4,6} = \frac{3Ld_x - 9J_1 + L^3 - 3L^2 s_x}{12\beta_0}$$

$$T2_{4,1,3} = \frac{1}{2} h s_x$$

$$T2_{4,1,4} = \frac{1}{2} h L s_x$$

$$T2_{4,2,3} = \frac{1}{2} h d_x$$

$$T2_{4,2,4} = \frac{1}{2} h L d_x$$

$$T2_{4,3,6} = \frac{h^2 J_1}{2\beta_0}$$

$$T2_{4,4,6} = \frac{L(L - 2s_x)}{4\beta_0}$$

$$T2_{5,1,1} = \frac{h^2(3J_1 - s_x d_x)}{12\beta_0}$$

$$T2_{5,1,2} = \frac{d_x(5 + c_x)}{12\beta_0}$$

$$T2_{5,1,6} = \frac{h(d_x(s_x + 3L\beta_0^2) - 3J_1(1 + \beta_0^2))}{12\beta_0^2}$$

$$T2_{5,2,2} = \frac{d_x(3L + s_x)}{12\beta_0}$$

$$T2_{5,2,6} = \frac{d_x(6\beta_0^2 + h^2 d_x) - 3\beta_0^2 L s_x}{12\beta_0^2 h}$$

$$T2_{5,3,3} = -\frac{h^2 J_1}{2\beta_0}$$

$$T2_{5,3,4} = -\frac{L^2}{4\beta_0}$$

$$T2_{5,4,4} = \frac{3Ld_x - 2L^3 - 9J_1}{12\beta_0}$$

$$T2_{5,6,6} = \frac{J_1(27\beta_0^2 - 5 - c_x) + d_x L(2 - 9\beta_0^2)}{12\beta_0^3}$$

– Matrice $T3$:

$$T3_{1,1,3} = \frac{hs_x}{4} (L + 2s_x)$$

$$T3_{1,1,4} = \frac{h}{8} (3c_x J_1 + s_x (d_x + L^2))$$

$$T3_{1,2,3} = \frac{h}{4} (3s_x d_x - c_x J_1)$$

$$T3_{1,2,4} = \frac{3Ls_x - 4c_x d_x - L^2 c_x}{8h}$$

$$T3_{1,3,6} = \frac{4d_x - s_x (L + 2s_x)}{4\beta_0}$$

$$T3_{1,4,6} = \frac{d_x (3L - 4s_x) + J_1 - L^2 s_x}{8\beta_0}$$

$$T3_{2,1,3} = \frac{h}{4} (3s_x + Lc_x)$$

$$T3_{2,1,4} = \frac{hL}{8} (3s_x + Lc_x)$$

$$T3_{2,2,3} = \frac{1}{4} hLs_x$$

$$T3_{2,2,4} = \frac{3s_x - 3Lc_x + h^2 L^2 s_x}{8h}$$

$$T3_{2,3,6} = \frac{s_x - Lc_x}{4\beta_0}$$

$$T3_{2,4,6} = \frac{4d_x - L^2 c_x - 3Ls_x}{8\beta_0}$$

$$T3_{3,1,1} = \frac{h}{8} (7s_x^2 + L^2)$$

$$T3_{3,1,2} = \frac{h}{8} (3J_1 + 7s_x d_x)$$

$$T3_{3,1,6} = \frac{4Ls_x - d_x (7c_x + 3) - L^2}{8\beta_0}$$

$$T3_{3,2,2} = \frac{d_x (5 - 7c_x) + L^2}{8h}$$

$$T3_{3,2,6} = \frac{J_1 (5 - 4c_x) - 3s_x d_x}{8\beta_0}$$

$$T3_{3,3,3} = -\frac{1}{4} hL^2$$

$$T3_{3,3,4} = \frac{h}{12} (6J_1 - L^3)$$

$$T3_{3,4,4} = \frac{L^2 (6 - h^2 L^2 - 12d_x)}{24h}$$

$$T3_{3,6,6} = \frac{d_x (3 + 7c_x - 4\beta_0^2) + L^2 (3 + 2\beta_0^2) - 8Ls_x}{8h\beta_0^2}$$

$$T3_{4,1,1} = \frac{h}{4} (3s_x c_x + L)$$

$$T3_{4,1,2} = \frac{3}{4} h s_x^2$$

$$T3_{4,1,6} = \frac{h^2 (3s_x d_x - J_1)}{4\beta_0}$$

$$T3_{4,2,2} = \frac{h}{4} (J_1 + 3s_x d_x)$$

$$T3_{4,2,6} = \frac{d_x (1 - 3c_x)}{4\beta_0}$$

$$T3_{4,3,3} = -\frac{1}{2} hL$$

$$T3_{4,3,4} = -\frac{1}{4} hL^2$$

$$T3_{4,4,4} = -\frac{h}{6} (L^3 + 3J_1)$$

$$T3_{4,6,6} = \frac{h (J_1 (3 + 2\beta_0^2) - 3s_x d_x)}{4\beta_0^2}$$

$$T3_{5,1,3} = \frac{Lc_x - s_x}{4\beta_0}$$

$$T3_{5,1,4} = \frac{4d_x - 5Ls_x + L^2 c_x}{8\beta_0}$$

$$T3_{5,2,3} = \frac{Ls_x - 4d_x}{4\beta_0}$$

$$T3_{5,2,4} = \frac{J_1 + L^2 s_x - 5Ld_x}{8\beta_0}$$

$$T3_{5,3,6} = \frac{h (Ld_x - J_1 (3 + 2\beta_0^2))}{4\beta_0^2}$$

$$T3_{5,4,6} = \frac{5Ls_x - 4d_x/\gamma_0^2 - 2L^2 (1 + \beta_0^2 + c_x/2)}{8\beta_0^2 h}$$

– Matrice $T4$:

$$\begin{aligned}
T4_{1,1,1} &= -\frac{1}{6}d_x - \frac{1}{6}s_x^2 \\
T4_{1,1,2} &= -\frac{1}{6}s_x d_x \\
T4_{1,1,6} &= -\frac{1}{12} \frac{h(-d_x^2 + 3s_x J_1)}{\beta_0} \\
T4_{1,2,2} &= -\frac{1}{6}d_x^2 \\
T4_{1,2,6} &= \frac{1}{12} \frac{3Lc_x - 2s_x c_x - s_x}{h^3 \beta_0} \\
T4_{1,3,3} &= \frac{1}{2}d_x \\
T4_{1,3,4} &= \frac{1}{2}J_1 \\
T4_{1,4,4} &= \frac{1}{2} \frac{L^2 - 2d_x}{h^2} \\
T4_{1,6,6} &= \frac{1}{6} \frac{-4d_x + s_x(3L - s_x)}{h^2 \beta_0^2} \\
T4_{2,1,1} &= -\frac{1}{6}s_x(1 + 2c_x) \\
T4_{2,1,2} &= -\frac{1}{6}d_x(1 + 2c_x) \\
T4_{2,1,6} &= -\frac{1}{12} \frac{h(s_x d_x + 3c_x J_1)}{\beta_0} \\
T4_{2,2,2} &= -\frac{1}{3}s_x d_x \\
T4_{2,2,6} &= -\frac{1}{12} \frac{2d_x + s_x(3L - 4s_x)}{h \beta_0} \\
T4_{2,3,3} &= \frac{1}{2}s_x \\
T4_{2,3,4} &= \frac{1}{2}d_x \\
T4_{2,4,4} &= J_1 \\
T4_{2,6,6} &= \frac{1}{6} \frac{-s_x d_x + 3c_x J_1}{\beta_0^2} \\
T4_{3,1,3} &= \frac{1}{2}d_x \\
T4_{3,1,4} &= \frac{1}{2}Ld_x - J_1 \\
T4_{3,2,3} &= \frac{1}{2}J_1 \\
T4_{3,2,4} &= \frac{1}{2} \frac{2d_x - Ls_x}{h^2} \\
T4_{3,3,6} &= \frac{1}{4} \frac{L^2 - 2d_x}{h \beta_0} \\
T4_{3,4,6} &= \frac{1}{12} \frac{-6Ld_x + 12J_1 + L^3}{h \beta_0} \\
T4_{4,1,3} &= \frac{1}{2}s_x \\
T4_{4,1,4} &= \frac{1}{2}Ls_x - \frac{1}{2}d_x \\
T4_{4,2,3} &= \frac{1}{2}d_x \\
T4_{4,2,4} &= \frac{1}{2} \frac{s_x - Lc_x}{h^2} \\
T4_{4,3,6} &= \frac{1}{2} \frac{hJ_1}{\beta_0} \\
T4_{4,4,6} &= \frac{1}{4} \frac{2d_x + L^2 - 2Ls_x}{h \beta_0} \\
T4_{5,1,1} &= \frac{1}{12} \frac{h(3J_1 + s_x d_x)}{\beta_0} \\
T4_{5,1,2} &= \frac{1}{12} \frac{h d_x^2}{\beta_0} \\
T4_{5,1,6} &= -\frac{1}{12} \frac{J_1(5 + c_x) - 2Ld_x}{\beta_0^2} \\
T4_{5,2,2} &= \frac{1}{12} \frac{3J_1 - s_x d_x}{h \beta_0} \\
T4_{5,2,6} &= \frac{1}{12} \frac{d_x(5 + c_x) - 3Ls_x}{\beta_0^2 h^2} \\
T4_{5,3,3} &= -\frac{1}{2} \frac{hJ_1}{\beta_0} \\
T4_{5,3,4} &= \frac{1}{4} \frac{2d_x - L^2}{\beta_0 h} \\
T4_{5,4,4} &= \frac{1}{6} \frac{6J_1 - L^3}{\beta_0 h} \\
T4_{5,6,6} &= \frac{1}{12} \frac{J_1(c_x + 14) - 5Ld_x}{\beta_0^3 h}
\end{aligned}$$

– Matrice $T5$:

$$\begin{aligned}
T5_{1,1,3} &= \frac{1}{4} L s_x \\
T5_{1,1,4} &= \frac{1}{8} \frac{L c_x - s_x + h^2 L^2 s_x}{h^2} \\
T5_{1,2,3} &= \frac{1}{4} \frac{s_x - L c_x}{h^2} \\
T5_{1,2,4} &= \frac{1}{8} \frac{L (s_x - L c_x)}{h^2} \\
T5_{1,3,6} &= \frac{1}{4} \frac{2 d_x - L s_x}{h \beta_0} \\
T5_{1,4,6} &= \frac{1}{8} \frac{L d_x + 3 J_1 - L^2 s_x}{\beta_0 h} \\
T5_{2,1,3} &= \frac{1}{4} s_x + \frac{1}{4} L c_x \\
T5_{2,1,4} &= \frac{1}{8} L (s_x + L c_x) \\
T5_{2,2,3} &= \frac{1}{4} L s_x \\
T5_{2,2,4} &= \frac{1}{8} \frac{s_x - L c_x + h^2 L^2 s_x}{h^2} \\
T5_{2,3,6} &= \frac{1}{4} \frac{s_x - L c_x}{h \beta_0} \\
T5_{2,4,6} &= -\frac{1}{8} \frac{L s_x + L^2 c_x - 4 d_x}{\beta_0 h} \\
T5_{3,1,1} &= \frac{1}{8} s_x^2 + \frac{1}{8} L^2 \\
T5_{3,1,2} &= \frac{1}{8} \frac{L - s_x c_x}{h^2} \\
T5_{3,1,6} &= -\frac{1}{8} \frac{d_x (-3 + c_x) + L^2}{\beta_0 h} \\
T5_{3,2,2} &= \frac{1}{8} \frac{-s_x^2 + L^2}{h^2} \\
T5_{3,2,6} &= \frac{1}{8} \frac{3 J_1 - s_x d_x}{h \beta_0} \\
T5_{3,3,3} &= -\frac{1}{4} L^2 \\
T5_{3,3,4} &= -\frac{1}{12} L^3 \\
T5_{3,4,4} &= -\frac{1}{24} L^4 \\
T5_{3,6,6} &= \frac{1}{8} \frac{d_x (c_x - 7) + 3 L^2}{h^2 \beta_0^2} \\
T5_{4,1,1} &= \frac{1}{4} s_x c_x + \frac{1}{4} L \\
T5_{4,1,2} &= \frac{1}{4} s_x^2 \\
T5_{4,1,6} &= -\frac{1}{4} \frac{h (J_1 - s_x d_x)}{\beta_0} \\
T5_{4,2,2} &= \frac{1}{4} \frac{L - s_x c_x}{h^2} \\
T5_{4,2,6} &= \frac{1}{4} \frac{h d_x^2}{\beta_0} \\
T5_{4,3,3} &= -\frac{1}{2} L \\
T5_{4,3,4} &= -\frac{1}{4} L^2 \\
T5_{4,4,4} &= -\frac{1}{6} L^3 \\
T5_{4,6,6} &= \frac{1}{4} \frac{3 J_1 - s_x d_x}{\beta_0^2} \\
T5_{5,1,3} &= \frac{1}{4} \frac{L c_x - s_x}{\beta_0 h} \\
T5_{5,1,4} &= \frac{1}{8} \frac{4 d_x - 3 L s_x + L^2 c_x}{\beta_0 h} \\
T5_{5,2,3} &= \frac{1}{4} \frac{L s_x - 2 d_x}{\beta_0 h} \\
T5_{5,2,4} &= \frac{1}{8} \frac{-3 L d_x + 3 J_1 + L^2 s_x}{\beta_0 h} \\
T5_{5,3,6} &= \frac{1}{4} \frac{-3 J_1 + L d_x}{\beta_0^2} \\
T5_{5,4,6} &= \frac{1}{8} \frac{L (-3 J_1 + L d_x)}{\beta_0^2} .
\end{aligned}$$

Matrice U

On note $U^{(0)}$ la matrice U du dipôle parfait sans erreurs de champ. On rappelle que $U^{(0)}$ est un tenseur à quatre indices symétrique par rapport à ses trois derniers indices; on dresse ci-dessous la liste des coefficients $U_{i,j,k,l}^{(0)}$ qui sont non nuls et tels que $i \leq j \leq k$.

$$\begin{aligned}
 U_{1,1,1,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{h^3 s_x^2}{\beta_0} \\
 U_{1,1,2,2}^{(0)} &= -\frac{1}{6} h^2 s_x^2 \\
 U_{1,1,2,6}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h c_x s_x}{\beta_0} \\
 U_{1,1,4,4}^{(0)} &= -\frac{1}{6} h^2 s_x^2 \\
 U_{1,1,6,6}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h^2 s_x^2 (3 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} \\
 U_{1,2,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{2} s_x c_x \\
 U_{1,2,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{h d_x}{\beta_0} \\
 U_{1,2,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{6} s_x c_x \\
 U_{1,2,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{s_x c_x (3 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} \\
 U_{1,4,4,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{h (d_x + s_x^2)}{\beta_0} \\
 U_{1,6,6,6}^{(0)} &= -\frac{1}{2} \frac{c_x (c_x + 1) - 2}{\beta_0^3 h \gamma_0^2} + \frac{1}{2} \frac{h s_x^2}{\beta_0^3} \\
 U_{2,2,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{h s_x}{\beta_0} \\
 U_{2,4,4,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{h s_x}{\beta_0} \\
 U_{2,6,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{2} \frac{h s_x}{\beta_0^3 \gamma_0^2} \\
 U_{3,1,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h s_x}{\beta_0} \\
 U_{3,2,2,4}^{(0)} &= \frac{1}{6} s_x \\
 U_{3,2,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h d_x}{\beta_0} \\
 U_{3,4,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{2} s_x \\
 U_{3,4,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{s_x (3 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} \\
 U_{5,1,1,1}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h^5 s_x^3}{\beta_0} \\
 U_{5,1,1,2}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{h^3 c_x s_x^2}{\beta_0} \\
 U_{5,1,1,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{h^4 s_x^3}{\beta_0^2} \\
 U_{5,1,2,2}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h s_x c_x^2}{\beta_0} \\
 U_{5,1,2,6}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h^2 c_x s_x^2}{\beta_0^2} \\
 U_{5,1,4,4}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h s_x}{\beta_0} \\
 U_{5,1,6,6}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h s_x (h^2 s_x^2 + 3/\gamma_0^2)}{\beta_0^3} \\
 U_{5,2,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{c_x^3 - 1}{h \beta_0} \\
 U_{5,2,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{s_x (3 - \beta_0^2 - h^2 s_x^2)}{\beta_0^2} \\
 U_{5,2,4,4}^{(0)} &= -\frac{1}{6} \frac{h d_x}{\beta_0} \\
 U_{5,2,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{h (-3 d_x/\gamma_0^2 + c_x s_x^2)}{\beta_0^3} \\
 U_{5,4,4,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{s_x (3 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} \\
 U_{5,6,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{2} \frac{s_x (5 - \beta_0^2)}{\beta_0^4 \gamma_0^2} + \frac{1}{6} \frac{h^2 s_x^3}{\beta_0^4} .
 \end{aligned}$$

2.2.3 Le quadrupôle droit

Hamiltonien

Nous considérons un quadrupôle parfait droit de longueur L et de force K_1^+ ; δK_1^+ et δK_2^\pm désignent respectivement l'erreur de champ quadrupolaire droit et les erreurs de champ hexapolaire droit et tourné. Avec ces notations, l'Hamiltonien du quadrupôle s'écrit (cf. équation 1.38 et Tab. 1.1)

$$g(X; K_1^+, \delta K) = - \left[\sqrt{\left(\frac{1}{\beta_0} + \delta\right)^2 - \frac{1}{\beta_0^2 \gamma_0^2} - \widehat{P}_x^2 - \widehat{P}_y^2 + K_s(x, y; K_1^+, \delta K)} \right] + \frac{\delta}{\beta_0} + 1 \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \text{où } K_s(x, y; K_1^+, \delta K) &= \frac{1}{2} (K_1^+ + \delta K_1^+) (y^2 - x^2) - \frac{1}{6} \delta K_2^+ (x^3 - 3xy^2) + \\ &\quad \frac{1}{6} \delta K_2^- (3x^2y - y^3). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Au vu des deux équations précédentes, on prouve aisément que l'Hamiltonien du quadrupôle commence de façon directement quadratique dans la variable X . En se souvenant des résultats énoncés à la sous-section 2.1.3 et qui concernent ce cas particulier, ou en remarquant simplement que le champ magnétique est nul sur l'axe du quadrupôle (une particule sur cet axe n'est pas déviée), on prouve ainsi la nullité de l'*offset* δX .

On définit enfin les douze constantes suivantes:

$$\begin{aligned} c_x &= \begin{cases} \cos(\sqrt{K_1^+}L) & \text{si } K_1^+ \geq 0 \\ \cosh(\sqrt{-K_1^+}L) & \text{si } K_1^+ \leq 0 \end{cases} & c_y &= \begin{cases} \cosh(\sqrt{K_1^+}L) & \text{si } K_1^+ \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-K_1^+}L) & \text{si } K_1^+ \leq 0 \end{cases} \\ s_x &= \begin{cases} \sin(\sqrt{K_1^+}L) / \sqrt{K_1^+} & \text{si } K_1^+ \geq 0 \\ \sinh(\sqrt{-K_1^+}L) / \sqrt{-K_1^+} & \text{si } K_1^+ \leq 0 \end{cases} & s_y &= \begin{cases} \sinh(\sqrt{K_1^+}L) / \sqrt{K_1^+} & \text{si } K_1^+ \geq 0 \\ \sin(\sqrt{-K_1^+}L) / \sqrt{-K_1^+} & \text{si } K_1^+ \leq 0 \end{cases} \\ d_x &= \frac{1 - c_x}{K_1^+} & d_y &= \frac{c_y - 1}{K_1^+} \\ I_{1x} &= \frac{1}{10} \frac{c_y^2 - 3 + 2c_x}{K_1^{+2}} & I_{1y} &= \frac{1}{10} \frac{c_x^2 - 3 + 2c_y}{K_1^{+2}} \\ I_{2x} &= \frac{1}{5} \frac{c_y s_y - s_x}{K_1^+} & I_{2y} &= -\frac{1}{5} \frac{c_x s_x - s_y}{K_1^+} \\ I_{3x} &= \frac{1}{5} \frac{2c_y^2 - c_x - 1}{K_1^+} & I_{3y} &= -\frac{1}{5} \frac{2c_x^2 - c_y - 1}{K_1^+}. \end{aligned}$$

Matrices R

La matrice $R^{(0)}$ du quadrupôle parfait sans erreurs de champ est donnée par

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} c_x & s_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1^+ s_x & c_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_y & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1^+ s_y & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seules les dérivées premières et secondes de R par rapport à δK_1^+ sont non nulles et on a

$$\frac{\partial R}{\partial \delta K_1^+} = \frac{\partial R^{(0)}}{\partial K_1^+} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} L s_x & \frac{L c_x - s_x}{2 K_1^+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{s_x + L c_x}{2} & -\frac{1}{2} L s_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} L s_y & \frac{L c_y - s_y}{2 K_1^+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_y + L c_y}{2} & \frac{1}{2} L s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial^2 \delta K_1^+} = \frac{\partial^2 R^{(0)}}{\partial^2 K_1^+} = \begin{pmatrix} -\frac{L(L c_x - s_x)}{4 K_1^+} & -\frac{L^2 s_x}{4 K_1^+} - \frac{3}{4} \frac{L c_x - s_x}{K_1^{+2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L c_x - s_x}{4 K_1^+} + \frac{L^2 s_x}{4} & -\frac{L(L c_x - s_x)}{4 K_1^+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L(L c_y - s_y)}{4 K_1^+} & \frac{L^2 s_y}{4 K_1^+} - \frac{3}{4} \frac{L c_y - s_y}{K_1^{+2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L c_y - s_y}{4 K_1^+} + \frac{L^2 s_y}{4} & \frac{L(L c_y - s_y)}{4 K_1^+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrices T

On note $T^{(0)}$ la matrice T du quadrupôle parfait sans erreurs de champ. Les coefficients ($T_{i,j,k}^{(0)}$; $j \leq k$) non nuls sont listés ci-après.

$$\begin{array}{l}
 T_{1,1,6}^{(0)} = \frac{1}{4} \frac{K_1^+ L s_x}{\beta_0} \\
 T_{1,2,6}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{s_x + L c_x}{\beta_0} \\
 T_{2,1,6}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{K_1^+ (s_x - L c_x)}{\beta_0} \\
 T_{2,2,6}^{(0)} = \frac{1}{4} \frac{K_1^+ L s_x}{\beta_0} \\
 T_{3,3,6}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{K_1^+ L s_y}{\beta_0} \\
 T_{3,4,6}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{s_y + L c_y}{\beta_0} \\
 T_{4,3,6}^{(0)} = \frac{1}{4} \frac{K_1^+ (s_y - L c_y)}{\beta_0} \\
 T_{4,4,6}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{K_1^+ L s_y}{\beta_0} \\
 T_{5,1,1}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{K_1^+ (L - c_x s_x)}{\beta_0} \\
 T_{5,1,2}^{(0)} = \frac{1}{4} \frac{K_1^+ s_x^2}{\beta_0} \\
 T_{5,2,2}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{L + c_x s_x}{\beta_0} \\
 T_{5,3,3}^{(0)} = \frac{1}{4} \frac{K_1^+ (L - c_y s_y)}{\beta_0} \\
 T_{5,3,4}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{K_1^+ s_y^2}{\beta_0} \\
 T_{5,4,4}^{(0)} = -\frac{1}{4} \frac{L + c_y s_y}{\beta_0} \\
 T_{5,6,6}^{(0)} = -\frac{3}{2} \frac{L}{\beta_0^3 \gamma_0^2} .
 \end{array}$$

On note $T1$, $T2$ et $T3$ les dérivées respectives de la matrice T par rapport aux erreurs de champ δK_1^+ , δK_2^+ et δK_2^- .

– Matrice $T1$ (on a aussi $T1 = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial K_1^+}$):

$$\begin{array}{l}
 T1_{1,1,6} = \frac{1}{8} \frac{L (s_x + L c_x)}{\beta_0} \\
 T1_{1,2,6} = \frac{1}{8} \frac{s_x (1 + K_1^+ L^2) - L c_x}{K_1^+ \beta_0} \\
 T1_{2,1,6} = -\frac{1}{8} \frac{s_x (1 + K_1^+ L^2) - L c_x}{\beta_0} \\
 T1_{2,2,6} = \frac{1}{8} \frac{L (s_x + L c_x)}{\beta_0} \\
 T1_{3,3,6} = -\frac{1}{8} \frac{L (s_y + L c_y)}{\beta_0} \\
 T1_{3,4,6} = \frac{1}{8} \frac{s_y (1 - K_1^+ L^2) - L c_y}{K_1^+ \beta_0} \\
 T1_{4,3,6} = \frac{1}{8} \frac{s_y (1 - K_1^+ L^2) - L c_y}{\beta_0} \\
 T1_{4,4,6} = -\frac{1}{8} \frac{L (s_y + L c_y)}{\beta_0} \\
 T1_{5,1,1} = \frac{1}{8} \frac{c_x s_x - 3L + 2L c_x^2}{\beta_0} \\
 T1_{5,1,2} = \frac{1}{4} \frac{L s_x c_x}{\beta_0} \\
 T1_{5,2,2} = \frac{1}{8} \frac{c_x s_x + L - 2L c_x^2}{K_1^+ \beta_0} \\
 T1_{5,3,3} = -\frac{1}{8} \frac{c_y s_y - 3L + 2L c_y^2}{\beta_0} \\
 T1_{5,3,4} = -\frac{1}{4} \frac{L s_y c_y}{\beta_0} \\
 T1_{5,4,4} = \frac{1}{8} \frac{c_y s_y + L - 2L c_y^2}{K_1^+ \beta_0} .
 \end{array}$$

– Matrice $T2$:

$$T2_{1,1,1} = -\frac{1}{6} s_x^2 - \frac{1}{6} d_x$$

$$T2_{1,1,2} = -\frac{1}{6} s_x d_x$$

$$T2_{1,2,2} = -\frac{1}{6} d_x^2$$

$$T2_{1,3,3} = K_1^+ I_{1x} + \frac{1}{2} d_x$$

$$T2_{1,3,4} = \frac{1}{2} I_{2x}$$

$$T2_{1,4,4} = I_{1x}$$

$$T2_{2,1,1} = -\frac{1}{6} s_x (1 + 2 c_x)$$

$$T2_{2,1,2} = -\frac{1}{6} d_x (1 + 2 c_x)$$

$$T2_{2,2,2} = -\frac{1}{3} s_x d_x$$

$$T2_{2,3,3} = K_1^+ I_{2x} + \frac{1}{2} s_x$$

$$T2_{2,3,4} = \frac{1}{2} I_{3x}$$

$$T2_{2,4,4} = I_{2x}$$

$$T2_{3,1,3} = \frac{1}{2} c_y I_{3x} - K_1^+ s_y I_{2x}$$

$$T2_{3,1,4} = \frac{1}{2} s_y I_{3x} - c_y I_{2x}$$

$$T2_{3,2,3} = \frac{1}{2} c_y I_{2x} - K_1^+ s_y I_{1x}$$

$$T2_{3,2,4} = \frac{1}{2} s_y I_{2x} - c_y I_{1x}$$

$$T2_{4,1,3} = \frac{1}{2} K_1^+ (2 c_y I_{2x} - s_y I_{3x}) + \frac{1}{2} s_x c_y$$

$$T2_{4,1,4} = K_1^+ s_y I_{2x} - \frac{1}{2} c_y I_{3x} + \frac{1}{2} s_x s_y$$

$$T2_{4,2,3} = \frac{1}{2} K_1^+ (2 c_y I_{1x} - s_y I_{2x}) + \frac{1}{2} d_x c_y$$

$$T2_{4,2,4} = K_1^+ s_y I_{1x} - \frac{1}{2} c_y I_{2x} + \frac{1}{2} d_x s_y .$$

– Matrice $T3$:

$$T3_{1,1,3} = \frac{1}{2} c_x I_{3y} + K_1^+ s_x I_{2y}$$

$$T3_{1,1,4} = \frac{1}{2} c_x I_{2y} + K_1^+ s_x I_{1y}$$

$$T3_{1,2,3} = \frac{1}{2} s_x I_{3y} - c_x I_{2y}$$

$$T3_{1,2,4} = \frac{1}{2} s_x I_{2y} - c_x I_{1y}$$

$$T3_{2,1,3} = -\frac{1}{2} K_1^+ (2 c_x I_{2y} - s_x I_{3y}) + \frac{1}{2} s_y c_x$$

$$T3_{2,1,4} = -\frac{1}{2} K_1^+ (2 c_x I_{1y} - s_x I_{2y}) + \frac{1}{2} d_y c_x$$

$$T3_{2,2,3} = -\frac{1}{2} c_x I_{3y} - K_1^+ s_x I_{2y} + \frac{1}{2} s_x s_y$$

$$T3_{2,2,4} = -\frac{1}{2} c_x I_{2y} - K_1^+ s_x I_{1y} + \frac{1}{2} d_y s_x$$

$$T3_{3,1,1} = -K_1^+ I_{1y} + \frac{1}{2} d_y$$

$$T3_{3,1,2} = \frac{1}{2} I_{2y}$$

$$T3_{3,2,2} = I_{1y}$$

$$T3_{3,3,3} = -\frac{1}{6} s_y^2 - \frac{1}{6} d_y$$

$$T3_{3,3,4} = -\frac{1}{6} s_y d_y$$

$$T3_{3,4,4} = -\frac{1}{6} d_y^2$$

$$T3_{4,1,1} = -K_1^+ I_{2y} + \frac{1}{2} s_y$$

$$T3_{4,1,2} = \frac{1}{2} I_{3y}$$

$$T3_{4,2,2} = I_{2y}$$

$$T3_{4,3,3} = -\frac{1}{6} s_y (1 + 2 c_y)$$

$$T3_{4,3,4} = -\frac{1}{6} d_y (1 + 2 c_y)$$

$$T3_{4,4,4} = -\frac{1}{3} s_y d_y .$$

Matrice U

$U^{(0)}$ désigne la matrice U du quadrupôle parfait sans erreurs de champ. Les coefficients $(U_{i,j,k,l}^{(0)}; j \leq k \leq l)$ non nuls sont listés ci-après.

$$\begin{aligned}
U_{1,1,1,1}^{(0)} &= -\frac{3}{16} K_1^{+2} s_x (L - c_x s_x) \\
U_{1,1,1,2}^{(0)} &= \frac{1}{8} K_1^{+2} s_x^3 + \frac{1}{16} K_1^+ c_x (L - c_x s_x) \\
U_{1,1,2,2}^{(0)} &= -\frac{1}{16} K_1^+ s_x (L + 3 c_x s_x) \\
U_{1,1,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^{+2} (c_x s_y^2 - 3 c_y s_y s_x + 2 L s_x) \\
U_{1,1,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^+ (2 s_x - 3 s_x c_y^2 + c_x s_y c_y) \\
U_{1,1,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^+ (c_x s_y^2 - 3 c_y s_y s_x - 2 L s_x) \\
U_{1,1,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{24} \frac{L K_1^+ (s_x (2 \beta_0^2 - 5) - L c_x)}{\beta_0^2} \\
U_{1,2,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{8} s_x + \frac{3}{16} c_x (L + c_x s_x) \\
U_{1,2,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^+ (3 c_x s_y c_y + s_x c_y^2 - 2 L c_x - 2 s_x) \\
U_{1,2,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^+ s_y (s_x c_y + 3 c_x s_y) \\
U_{1,2,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} s_x c_y^2 + \frac{1}{16} c_x s_y c_y + \frac{1}{24} L c_x + \frac{1}{24} s_x \\
U_{1,2,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{12} \frac{L c_x + s_x}{\beta_0^2 \gamma_0^2} + \frac{1}{24} \frac{5 L c_x + s_x (3 - L^2 K_1^+)}{\beta_0^2} \\
U_{2,1,1,1}^{(0)} &= -\frac{1}{16} K_1^{+3} s_x^3 + \frac{3}{16} K_1^{+2} (s_x - L c_x) \\
U_{2,1,1,2}^{(0)} &= -\frac{1}{16} K_1^{+2} s_x (L - c_x s_x) \\
U_{2,1,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{8} K_1^+ s_x - \frac{1}{16} K_1^+ c_x (L + c_x s_x) \\
U_{2,1,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^{+2} (s_x c_y^2 - c_x s_y c_y - 2 s_x + 2 L c_x) \\
U_{2,1,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^{+2} s_y (s_x c_y - c_x s_y) \\
U_{2,1,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^+ (s_x c_y^2 - c_x s_y c_y + 2 s_x - 2 L c_x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{2,1,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{24} \frac{K_1^+ \left((s_x - L c_x) (3 - 2 \beta_0^2) + K_1^+ L^2 s_x \right)}{\beta_0^2} \\
U_{2,2,2,2}^{(0)} &= -\frac{1}{16} K_1^+ s_x (3 L + c_x s_x) \\
U_{2,2,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^{+2} (2 L s_x - c_y s_y s_x - c_x s_y^2) \\
U_{2,2,3,4}^{(0)} &= -\frac{1}{48} K_1^+ (c_x s_y c_y + s_x c_y^2 - 2 s_x) \\
U_{2,2,4,4}^{(0)} &= -\frac{1}{48} K_1^+ (c_y s_y s_x + c_x s_y^2 + 2 L s_x) \\
U_{2,2,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{24} \frac{L K_1^+ \left(s_x (2 \beta_0^2 - 5) - L c_x \right)}{\beta_0^2} \\
U_{3,1,1,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^{+2} (c_y s_x^2 - 3 c_x s_x s_y + 2 L s_y) \\
U_{3,1,1,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^+ (-3 c_x c_y s_x - c_x^2 s_y + 2 L c_y + 2 s_y) \\
U_{3,1,2,3}^{(0)} &= -\frac{1}{48} K_1^+ (2 s_y - 3 c_x^2 s_y + c_x c_y s_x) \\
U_{3,1,2,4}^{(0)} &= -\frac{1}{48} K_1^+ s_x (c_x s_y + 3 s_x c_y) \\
U_{3,2,2,3}^{(0)} &= -\frac{1}{48} K_1^+ (c_y s_x^2 - 3 c_x s_x s_y - 2 L s_y) \\
U_{3,2,2,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} c_x^2 s_y + \frac{1}{16} c_x c_y s_x + \frac{1}{24} L c_y + \frac{1}{24} s_y \\
U_{3,3,3,3}^{(0)} &= -\frac{3}{16} K_1^{+2} s_y (L - c_y s_y) \\
U_{3,3,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{8} K_1^{+2} s_y^3 - \frac{1}{16} K_1^+ c_y (L - c_y s_y) \\
U_{3,3,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{16} K_1^+ s_y (L + 3 c_y s_y) \\
U_{3,3,6,6}^{(0)} &= -\frac{1}{24} \frac{L K_1^+ \left(s_y (2 \beta_0^2 - 5) - L c_y \right)}{\beta_0^2} \\
U_{3,4,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{8} s_y + \frac{3}{16} c_y (L + c_y s_y) \\
U_{3,4,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{12} \frac{L c_y + s_y}{\beta_0^2 \gamma_0^2} + \frac{1}{24} \frac{5 L c_y + s_y (3 + L^2 K_1^+)}{\beta_0^2} \\
U_{4,1,1,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^{+2} (c_x^2 s_y - c_x c_y s_x - 2 s_y + 2 L c_y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{4,1,1,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^{+2} (2 L s_y - c_x s_x s_y - c_y s_x^2) \\
U_{4,1,2,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^{+2} s_x (c_x s_y - s_x c_y) \\
U_{4,1,2,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^+ (c_x c_y s_x + c_x^2 s_y - 2 s_y) \\
U_{4,2,2,3}^{(0)} &= -\frac{1}{48} K_1^+ (c_x^2 s_y - c_x c_y s_x + 2 s_y - 2 L c_y) \\
U_{4,2,2,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} K_1^+ (c_x s_x s_y + c_y s_x^2 + 2 L s_y) \\
U_{4,3,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{16} K_1^{+3} s_y^3 + \frac{3}{16} K_1^{+2} (s_y - L c_y) \\
U_{4,3,3,4}^{(0)} &= -\frac{1}{16} K_1^{+2} s_y (L - c_y s_y) \\
U_{4,3,4,4}^{(0)} &= -\frac{1}{8} K_1^+ s_y + \frac{1}{16} K_1^+ c_y (L + c_y s_y) \\
U_{4,3,6,6}^{(0)} &= -\frac{1}{24} \frac{K_1^+ ((s_y - L c_y) (3 - 2 \beta_0^2) - K_1^+ L^2 s_y)}{\beta_0^2} \\
U_{4,4,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{16} K_1^+ s_y (3 L + c_y s_y) \\
U_{4,4,6,6}^{(0)} &= -\frac{1}{24} \frac{L K_1^+ (s_y (2 \beta_0^2 - 5) - L c_y)}{\beta_0^2} \\
U_{5,1,1,6}^{(0)} &= \frac{1}{24} \frac{K_1^+ (c_x s_x (2 \beta_0^2 - 3) + L (5 - 2 \beta_0^2 - 2 c_x^2))}{\beta_0^2} \\
U_{5,1,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{12} \frac{K_1^+ (s_x^2 (\beta_0^2 - 2) - L s_x c_x)}{\beta_0^2} \\
U_{5,2,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{24} \frac{c_x s_x (-2 \beta_0^2 + 5) + L (5 - 2 \beta_0^2 + 2 c_x^2)}{\beta_0^2} \\
U_{5,3,3,6}^{(0)} &= -\frac{1}{24} \frac{K_1^+ (c_y s_y (2 \beta_0^2 - 3) + L (5 - 2 \beta_0^2 - 2 c_y^2))}{\beta_0^2} \\
U_{5,3,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{12} \frac{K_1^+ (s_y^2 (\beta_0^2 - 2) - L s_y c_y)}{\beta_0^2} \\
U_{5,4,4,6}^{(0)} &= \frac{1}{24} \frac{c_y s_y (-2 \beta_0^2 + 5) + L (5 - 2 \beta_0^2 + 2 c_y^2)}{\beta_0^2} \\
U_{5,6,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{2} \frac{L (5 - \beta_0^2)}{\beta_0^4 \gamma_0^2}.
\end{aligned}$$

2.2.4 L'hexapôle droit

Hamiltonien

Nous considérons un hexapôle parfait droit de longueur L et de force K_2^+ ; δK_2^+ désigne l'erreur de champ hexapolaire droit. Avec ces notations, l'Hamiltonien de l'hexapôle s'écrit (cf. équation 1.38 et Tab. 1.1)

$$g(X; K_2^+, \delta K_2^+) = - \left[\sqrt{\left(\frac{1}{\beta_0} + \delta\right)^2 - \frac{1}{\beta_0^2 \gamma_0^2} - \widehat{P}_x^2 - \widehat{P}_y^2} + K_s(x, y; K_2^+, \delta K_2^+) \right] + \frac{\delta}{\beta_0} + 1 \quad (2.15)$$

$$\text{où } K_s(x, y; K_2^+, \delta K_2^+) = -\frac{1}{6} (K_2^+ + \delta K_2^+) (x^3 - 3xy^2). \quad (2.16)$$

Comme pour le quadrupôle, l'*offset* relatif au *mapping* de l'hexapôle est toujours nul. De plus, on peut remarquer que les quantités K_2^+ et δK_2^+ n'apparaissent que dans les dérivées troisièmes de g par rapport à (x, y) ; de ce fait, la fonction matricielle $F_1(K_2^+, \delta K_2^+)$ définie précédemment (produit de J par la matrice des dérivées secondes de g en $X = 0$) est indépendante des paramètres K_2^+ et δK_2^+ . Enfin, puisque l'on est ici dans la situation de la sous-section 2.1.3 ($\delta X = 0$), la matrice R de l'hexapôle (avec erreur de champ) vérifie l'équation différentielle $dR/ds = F_1 R$ (équation 2.10); par conséquent, cette dernière est une fonction indépendante du champ et de l'erreur de champ (en fait, la matrice R de l'hexapôle est identique à celle d'une section vide de champ (*drift*) de même longueur, cf. sous-section suivante).

Matrice R

La matrice $R^{(0)}$ de l'hexapôle est donnée par

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices T

On note $T^{(0)}$ la matrice T de l'hexapôle parfait. Les coefficients $(T_{i,j,k}^{(0)}; j \leq k)$ non nuls sont listés ci-après.

$T_{1,1,1}^{(0)} = -\frac{1}{4} L^2 K_2^+$	$T_{3,1,3}^{(0)} = \frac{1}{4} L^2 K_2^+$
$T_{1,1,2}^{(0)} = -\frac{1}{12} L^3 K_2^+$	$T_{3,1,4}^{(0)} = \frac{1}{12} L^3 K_2^+$
$T_{1,2,2}^{(0)} = -\frac{1}{24} L^4 K_2^+$	$T_{3,2,3}^{(0)} = \frac{1}{12} L^3 K_2^+$
$T_{1,2,6}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{L}{\beta_0}$	$T_{3,2,4}^{(0)} = \frac{1}{24} L^4 K_2^+$
$T_{1,3,3}^{(0)} = \frac{1}{4} L^2 K_2^+$	$T_{3,4,6}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{L}{\beta_0}$
$T_{1,3,4}^{(0)} = \frac{1}{12} L^3 K_2^+$	$T_{4,1,3}^{(0)} = \frac{1}{2} L K_2^+$
$T_{1,4,4}^{(0)} = \frac{1}{24} L^4 K_2^+$	$T_{4,1,4}^{(0)} = \frac{1}{4} L^2 K_2^+$
$T_{2,1,1}^{(0)} = -\frac{1}{2} L K_2^+$	$T_{4,2,3}^{(0)} = \frac{1}{4} L^2 K_2^+$
$T_{2,1,2}^{(0)} = -\frac{1}{4} L^2 K_2^+$	$T_{4,2,4}^{(0)} = \frac{1}{6} L^3 K_2^+$
$T_{2,2,2}^{(0)} = -\frac{1}{6} L^3 K_2^+$	$T_{5,2,2}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{L}{\beta_0}$
$T_{2,3,3}^{(0)} = \frac{1}{2} L K_2^+$	$T_{5,4,4}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{L}{\beta_0}$
$T_{2,3,4}^{(0)} = \frac{1}{4} L^2 K_2^+$	$T_{5,6,6}^{(0)} = -\frac{3}{2} \frac{L}{\beta_0^3 \gamma_0^2}$
$T_{2,4,4}^{(0)} = \frac{1}{6} L^3 K_2^+$	

On a enfin $T1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \delta K_2^+} = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial K_2^+}$. On ne donnera pas ici les coefficients de $T1$, l'opération de dérivation étant simple puisque $T^{(0)}$ dépend linéairement de K_2^+ .

Matrice U

$U^{(0)}$ désigne la matrice U de l'hexapôle parfait. Les coefficients $(U_{i,j,k,l}^{(0)}; j \leq k \leq l)$ non nuls sont listés ci-après.

$$\begin{aligned}
U_{1,1,1,1}^{(0)} &= \frac{1}{48} L^4 K_2^{+2} \\
U_{1,1,1,2}^{(0)} &= \frac{1}{144} L^5 K_2^{+2} \\
U_{1,1,1,6}^{(0)} &= \frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{1,1,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{432} L^6 K_2^{+2} \\
U_{1,1,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{18} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{1,1,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{144} L^4 K_2^{+2} \\
U_{1,1,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{240} L^5 K_2^{+2} \\
U_{1,1,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{720} L^6 K_2^{+2} \\
U_{1,2,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{2} L + \frac{1}{1008} L^7 K_2^{+2} \\
U_{1,2,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{24} \frac{L^4 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{1,2,3,3}^{(0)} &= -\frac{1}{720} L^5 K_2^{+2} \\
U_{1,2,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{2160} L^6 K_2^{+2} \\
U_{1,2,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{6} L + \frac{1}{3024} L^7 K_2^{+2} \\
U_{1,2,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{L (3 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} \\
U_{1,3,3,6}^{(0)} &= -\frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{1,3,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{18} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{1,4,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{24} \frac{L^4 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{2,1,1,1}^{(0)} &= \frac{1}{12} L^3 K_2^{+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{2,1,1,2}^{(0)} &= \frac{5}{144} L^4 K_2^{+2} \\
U_{2,1,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{72} L^5 K_2^{+2} \\
U_{2,1,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{2,1,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{36} L^3 K_2^{+2} \\
U_{2,1,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{48} L^4 K_2^{+2} \\
U_{2,1,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{120} L^5 K_2^{+2} \\
U_{2,2,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{144} L^6 K_2^{+2} \\
U_{2,2,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{9} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{2,2,3,3}^{(0)} &= -\frac{1}{144} L^4 K_2^{+2} \\
U_{2,2,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{360} L^5 K_2^{+2} \\
U_{2,2,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{432} L^6 K_2^{+2} \\
U_{2,3,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{2,4,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{9} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{3,1,1,3}^{(0)} &= \frac{1}{144} L^4 K_2^{+2} \\
U_{3,1,1,4}^{(0)} &= -\frac{1}{720} L^5 K_2^{+2} \\
U_{3,1,2,3}^{(0)} &= \frac{1}{240} L^5 K_2^{+2} \\
U_{3,1,2,4}^{(0)} &= \frac{1}{2160} L^6 K_2^{+2} \\
U_{3,1,3,6}^{(0)} &= -\frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{3,1,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{18} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{3,2,2,3}^{(0)} &= \frac{1}{720} L^6 K_2^{+2} \\
U_{3,2,2,4}^{(0)} &= \frac{1}{6} L + \frac{1}{3024} L^7 K_2^{+2} \\
U_{3,2,3,6}^{(0)} &= -\frac{1}{18} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{3,2,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{24} \frac{L^4 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{3,3,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} L^4 K_2^{+2} \\
U_{3,3,3,4}^{(0)} &= \frac{1}{144} L^5 K_2^{+2} \\
U_{3,3,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{432} L^6 K_2^{+2} \\
U_{3,4,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{2} L + \frac{1}{1008} L^7 K_2^{+2} \\
U_{3,4,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{L (3 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} \\
U_{4,1,1,3}^{(0)} &= \frac{1}{36} L^3 K_2^{+2} \\
U_{4,1,1,4}^{(0)} &= -\frac{1}{144} L^4 K_2^{+2} \\
U_{4,1,2,3}^{(0)} &= \frac{1}{48} L^4 K_2^{+2} \\
U_{4,1,2,4}^{(0)} &= \frac{1}{360} L^5 K_2^{+2} \\
U_{4,1,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{4,2,2,3}^{(0)} &= \frac{1}{120} L^5 K_2^{+2} \\
U_{4,2,2,4}^{(0)} &= \frac{1}{432} L^6 K_2^{+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{4,2,3,6}^{(0)} &= -\frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{4,2,4,6}^{(0)} &= -\frac{1}{9} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{4,3,3,3}^{(0)} &= \frac{1}{12} L^3 K_2^{+2} \\
U_{4,3,3,4}^{(0)} &= \frac{5}{144} L^4 K_2^{+2} \\
U_{4,3,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{72} L^5 K_2^{+2} \\
U_{4,4,4,4}^{(0)} &= \frac{1}{144} L^6 K_2^{+2} \\
U_{5,1,1,2}^{(0)} &= \frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{5,1,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{18} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{5,1,3,4}^{(0)} &= -\frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{5,1,4,4}^{(0)} &= -\frac{1}{18} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{5,2,2,2}^{(0)} &= \frac{1}{24} \frac{L^4 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{5,2,2,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{L (3 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} \\
U_{5,2,3,3}^{(0)} &= -\frac{1}{12} \frac{L^2 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{5,2,3,4}^{(0)} &= -\frac{1}{18} \frac{L^3 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{5,2,4,4}^{(0)} &= -\frac{1}{24} \frac{L^4 K_2^+}{\beta_0} \\
U_{5,4,4,6}^{(0)} &= \frac{1}{6} \frac{L (3 - \beta_0^2)}{\beta_0^2} \\
U_{5,6,6,6}^{(0)} &= \frac{1}{2} \frac{L (5 - \beta_0^2)}{\beta_0^4 \gamma_0^2} .
\end{aligned}$$

2.2.5 La section droite ou *drift*

On considère une section vide de champ ou *drift* de longueur L . L'Hamiltonien dans cette section se déduit aisément des Hamiltoniens 2.11, 2.13 ou 2.15 en faisant $K_s = 0$. On obtient de la même façon les matrices R , T et U du *drift*⁵:

- la matrice R du *drift* est la même que celle d'un hexapôle de même longueur.
- les coefficients ($T_{i,j,k}$; $j \leq k$) non nuls sont

$$T_{1,2,6} = T_{3,4,6} = T_{5,2,2} = T_{5,4,4} = -\frac{L}{2\beta_0} \text{ et } T_{5,6,6} = -\frac{3L}{2\beta_0^3\gamma_0^2}.$$

- les coefficients ($U_{i,j,k,l}$; $j \leq k \leq l$) non nuls sont

$$\begin{aligned} U_{1,2,2,2} &= U_{3,4,4,4} = \frac{L}{6} \text{ et } U_{1,2,4,4} = U_{3,2,2,4} = \frac{L}{6} \\ U_{1,2,6,6} &= U_{3,4,6,6} = U_{5,2,2,6} = U_{5,4,4,6} = \frac{L}{6\beta_0^2} (3 - \beta_0^2) \\ U_{5,6,6,6} &= \frac{L}{2\beta_0^4\gamma_0^2} (5 - \beta_0^2). \end{aligned}$$

Evidemment, on peut aussi calculer de manière exacte le *mapping* d'un *drift* de longueur L quelconque (dans un *drift*, la particule suit un mouvement rectiligne uniforme). Avec les définitions des variables canoniques (X_i) données à la sous-section 1.2.3, on a

$$\mathcal{M}_{drift}(X_0; L) = \begin{cases} x(L) &= x_0 + \widehat{P}_{x0} L / \left(\frac{p_s}{p_0}\right) \\ \widehat{P}_x(L) &= \widehat{P}_{x0} \\ y(L) &= y_0 + \widehat{P}_{y0} L / \left(\frac{p_s}{p_0}\right) \\ \widehat{P}_y(L) &= \widehat{P}_{y0} \\ \delta(L) &= \delta \\ l(L) &= l_0 + \frac{L}{\beta_0} \left(1 - (1 + \beta_0 \delta) / \left(\frac{p_s}{p_0}\right)\right) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\text{avec } \frac{p_s}{p_0} = \sqrt{\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 - \widehat{P}_{x0}^2 - \widehat{P}_{y0}^2} = \sqrt{1 + \frac{2\delta}{\beta_0} + \delta^2 - \widehat{P}_{x0}^2 - \widehat{P}_{y0}^2}. \quad (2.18)$$

Remarque: en utilisant l'équation 2.17 puis en se rappelant des définitions des matrices R , T et U à partir de \mathcal{M} (sous-section 1.3.2), on peut retomber facilement sur les résultats du début (c.-à-d. les matrices R , T , U d'un *drift* de longueur L).

5. On peut, par exemple, reprendre les expressions des matrices $R^{(0)}$, $T^{(0)}$, $U^{(0)}$ relatives à l'hexapôle (sous-section précédente) et annuler le paramètre K_2^+ dans ces mêmes expressions.

6. $p_s = m\gamma \frac{ds}{dt}$ désigne l'impulsion longitudinale de la particule et p son impulsion totale.

2.3 Erreurs géométriques: déplacements et rotations des aimants

2.3.1 Introduction

On considère une section $[s_0; s_1 = s_0 + L]$ de la courbe de référence \mathcal{C} . Entre les abscisses s_0 et s_1 se trouve un élément optique rigide que l'on notera E ; on impose de plus, en amont et en aval de E , deux espaces vides de champ de longueurs respectives L_0 et L_1 autorisant de petits déplacements de l'aimant E . On désigne par \mathcal{M} le *mapping* associé au transport du faisceau à travers l'élément optique E lorsque celui-ci est dans sa position idéale; \mathcal{M} est supposé connu. Le *mapping* \mathcal{M}_{tot} pour la section totale $[s_0 - L_0; s_1 + L_1]$ s'écrit donc

$$\mathcal{M}_{\text{tot}} = \mathcal{M}_{\text{drift}}(L_1) \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{M}_{\text{drift}}(L_0) .$$

Dès lors, on suppose que l'aimant E a subi de petits déplacements par rapport à sa position d'origine. Le *mapping* \mathcal{M}' relatif au transport du faisceau le long de la section $[s_0; s_1]$ est alors un objet dont l'interprétation devient délicate. En effet, considérons par exemple une légère rotation de l'aimant E dans le plan horizontal par un angle θ positif autour du point milieu de sa face d'entrée (point I_{in} sur la figure 2.2). A l'abscisse s_0 , toutes les particules de coordonnées horizontales $x \geq 0$ sont déjà dans l'aimant alors que celles situées dans le demi-espace $x < 0$ ne l'ont pas encore atteint. De ce point de vue, comment définir \mathcal{M}' ? Afin d'éviter ce type de difficulté, nous nous intéressons plutôt au *mapping* $\mathcal{M}'_{\text{tot}}$ associé à la section $[s_0 - L_0; s_1 + L_1]$ dans laquelle l'aimant E a été déplacé (et qui est mieux défini pourvu que les longueurs L_0 et L_1 soient assez grandes). Pour ce faire, nous nous basons sur l'égalité précédente en écrivant $\mathcal{M}'_{\text{tot}}$ sous la forme suivante:

$$\mathcal{M}'_{\text{tot}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{\text{drift}}(L_1) \circ \mathcal{M}_{\text{eff}} \circ \mathcal{M}_{\text{drift}}(L_0) . \quad (2.19)$$

Nous introduisons donc de façon naturelle le *mapping* effectif \mathcal{M}_{eff} correspondant à un transport **fictif** du faisceau le long de la section $[s_0; s_1]$. Ce dernier ne doit évidemment pas dépendre des deux longueurs arbitraires L_0 et L_1 mais uniquement du *mapping* \mathcal{M} ainsi que des défauts d'alignement ϵ de l'élément considéré. L'idée est alors de rechercher \mathcal{M}_{eff} sous la forme $\mathcal{M}_{\text{eff}} = \mathcal{M}_{\text{out}} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{M}_{\text{in}}$ où \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} sont deux transformations des variables canoniques (aux abscisses respectives s_0 et s_1) qui ne dépendent plus des caractéristiques magnétiques de l'aimant considéré mais uniquement de sa géométrie intrinsèque (longueur L et rayon de courbure ρ) et bien sûr de l'erreur ϵ envisagée. En reprenant l'équation 2.19, on obtient donc la décomposition suivante:

$$\mathcal{M}'_{\text{tot}} = \mathcal{M}_{\text{drift}}(L_1) \circ \mathcal{M}_{\text{out}} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{M}_{\text{in}} \circ \mathcal{M}_{\text{drift}}(L_0) .$$

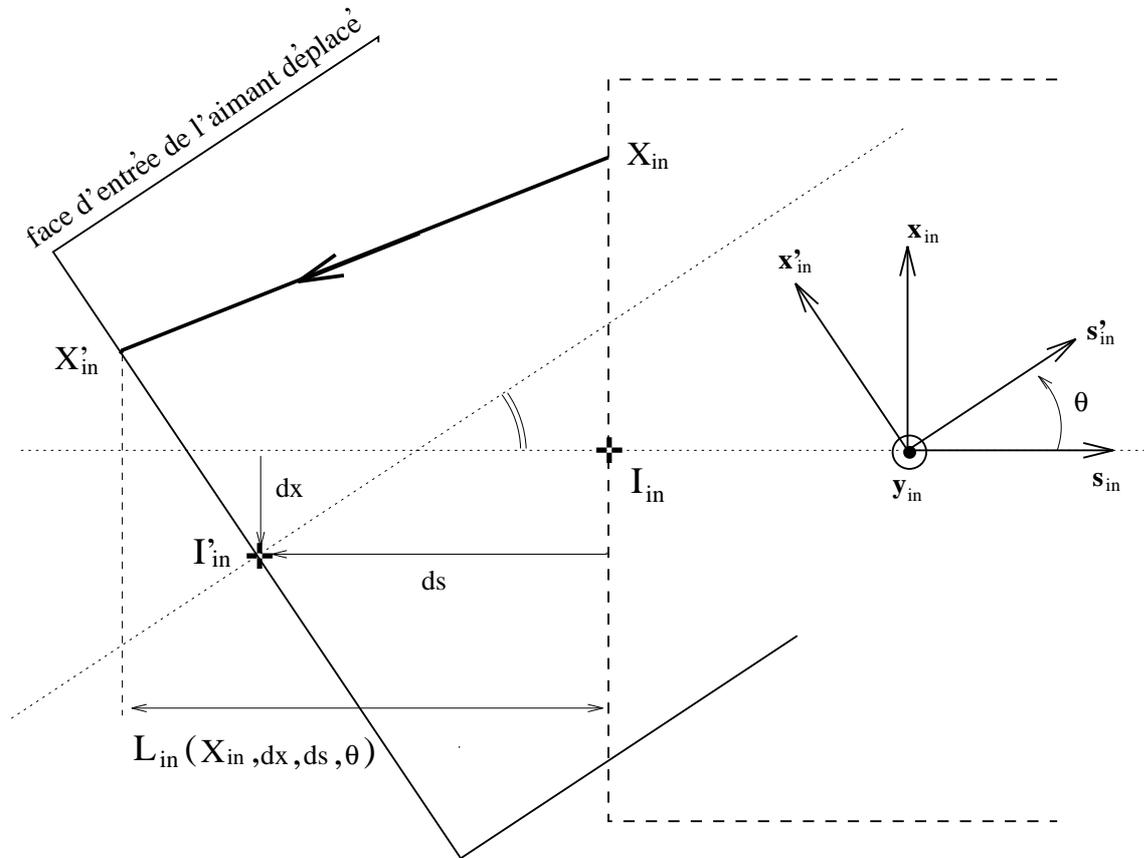


FIG. 2.2 – Exemple simple de déplacement d'un aimant

En analysant pas à pas cette dernière relation, l'interprétation des *mappings* effectifs d'entrée et de sortie, \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} , devient alors évidente.

- En partant de l'abscisse $s_0 - L_0$ et via un *drift* de longueur L_0 , on se ramène à la face d'entrée de l'aimant E dans sa position d'origine (abscisse s_0).
- Dès lors, il s'agit d'une part de revenir à la face d'entrée de l'élément déplacé (via un petit *drift* de longueur L_{in} , cf. Fig. 2.2) puis, d'autre part, d'effectuer une transformation des variables canoniques afin de les adapter au nouveau repère d'entrée de l'aimant E. \mathcal{M}_{in} sera le produit de ces deux transformations.
- Via le *mapping* \mathcal{M} supposé connu, on se ramène aisément à la face de sortie de l'aimant déplacé.
- La définition de la transformation \mathcal{M}_{out} est alors similaire à celle de \mathcal{M}_{in} : d'abord le changement de variables canoniques de sortie, puis le *drift* nous ramenant à l'abscisse s_1 (face de sortie de l'élément dans sa position d'origine).

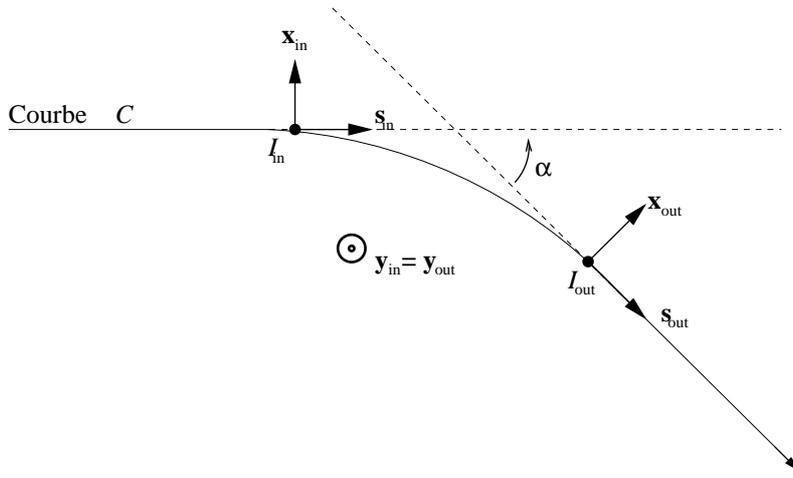


FIG. 2.3 – Bases locales \mathcal{B}_{in} et \mathcal{B}_{out}

– Par le *mapping* $\mathcal{M}_{\text{drift}}(L_1)$, nous aboutissons finalement à l’abscisse $s_1 + L_1$. L’étude se résume donc simplement au calcul des transformations \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} et nécessitera trois étapes successives exposées en détail à la sous-section suivante. Dans un premier temps, nous paramétriserons un déplacement quelconque de l’aimant E à l’aide de six quantités indépendantes (trois translations et trois rotations)⁷ puis nous dériverons les formules de changements de repères associées à ce déplacement. Dans un second temps, nous nous attacherons aux transformations canoniques relatives à ces changements de coordonnées spatiales en entrée et en sortie de l’aimant E. Finalement, nous obtiendrons formellement puis analytiquement (sous-section 2.3.3) les *mappings* \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} tels qu’ils ont été définis ci-dessus.

2.3.2 Méthodes de calcul

Changements de coordonnées spatiales en entrée et sortie de l’aimant déplacé

On suppose dans un premier temps que l’aimant E est dans sa position idéale d’origine. On note $\mathcal{B}_{\text{in}} = (\vec{x}_{\text{in}}, \vec{y}_{\text{in}}, \vec{s}_{\text{in}})$, respectivement $\mathcal{B}_{\text{out}} = (\vec{x}_{\text{out}}, \vec{y}_{\text{out}}, \vec{s}_{\text{out}})$, la base locale de \mathcal{C} à l’abscisse s_0 , respectivement à l’abscisse s_1 (cf. Fig. 2.3). On désigne par I_{in} et I_{out} les points

7. L’aimant E étant supposé rigide, on ne traitera pas ici des défauts intervenant dans la définition de sa géométrie intrinsèque comme par exemple une fluctuation $dy(s)$ de la position verticale de son axe magnétique qui dépend de l’abscisse longitudinale s . On ne s’attachera pas non plus à des erreurs δL dans la longueur L des aimants considérés, ces dernières s’interprétant plus volontiers comme un défaut dans la force intégrée de l’aimant qui correspond grossièrement à une erreur de champ $\delta K/K = \delta L/L$.

de la courbe \mathcal{C} aux abscisses respectives s_0 et s_1 et on appelle α l'angle orienté $(\vec{s}_{\text{out}}, \vec{s}_{\text{in}})$ ($\alpha \geq 0$ lorsque la courbe \mathcal{C} s'incurve sur sa droite). $\mathcal{R}_{\text{in}} = (I_{\text{in}}; \mathcal{B}_{\text{in}})$ et $\mathcal{R}_{\text{out}} = (I_{\text{out}}; \mathcal{B}_{\text{out}})$ sont donc les deux repères attachés respectivement à la face d'entrée et à la face de sortie de l'aimant E.

Dans toute la suite, si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases quelconques de l'espace Euclidien à trois dimensions et si \vec{x} désigne un vecteur quelconque de ce même espace, alors $\text{Mat}(\mathcal{B}'/\mathcal{B})$ représentera la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ sera le triplet donnant les coordonnées du vecteur \vec{x} dans la base \mathcal{B} . Avec ces notations et au vu de la figure 2.3, la matrice de changement de base $\mathcal{B}_{\text{in}} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{out}}$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{I_{\text{in}}I_{\text{out}}}$ dans la base \mathcal{B}_{in} sont respectivement

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{out}}/\mathcal{B}_{\text{in}}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$\text{et } \mathbf{d} \stackrel{\text{def}}{=} (\overrightarrow{I_{\text{in}}I_{\text{out}}})_{\mathcal{B}_{\text{in}}} = \begin{pmatrix} \frac{L}{\alpha}(\cos \alpha - 1) \\ 0 \\ \frac{L}{\alpha} \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

En particulier, lorsque E est un élément optique rectiligne, on a $\alpha = 0$, soit $A = \mathbf{1}$ et $\mathbf{d} = (0, 0, L)$.

On suppose maintenant que l'élément optique E est déplacé "en bloc" par rapport à sa position d'origine; avec des notations identiques à celles qui précèdent, on désigne respectivement par \mathcal{R}'_{in} et $\mathcal{R}'_{\text{out}}$ les repères $(I'_{\text{in}}; \mathcal{B}'_{\text{in}})$ et $(I'_{\text{out}}; \mathcal{B}'_{\text{out}})$ attachés à l'élément déplacé⁸ et, puisque l'aimant E est supposé rigide, on a

$$\text{Mat}(\mathcal{B}'_{\text{out}}/\mathcal{B}'_{\text{in}}) = \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{out}}/\mathcal{B}_{\text{in}}) = A \text{ et } (\overrightarrow{I'_{\text{in}}I'_{\text{out}}})_{\mathcal{B}'_{\text{in}}} = (\overrightarrow{I_{\text{in}}I_{\text{out}}})_{\mathcal{B}_{\text{in}}} = \mathbf{d}. \quad (2.22)$$

On paramétrise le déplacement de E par quatre transformations successives:

- une translation de vecteur $dx \vec{x}_{\text{in}} + dy \vec{y}_{\text{in}} + ds \vec{s}_{\text{in}}$. Sous cette transformation, le repère \mathcal{R}_{in} , respectivement \mathcal{R}_{out} , donne le repère $\mathcal{R}^1_{\text{in}} = (I^1_{\text{in}}; \mathcal{B}^1_{\text{in}} = \mathcal{B}_{\text{in}})$, respectivement $\mathcal{R}^1_{\text{out}} = (I^1_{\text{out}}; \mathcal{B}^1_{\text{out}} = \mathcal{B}_{\text{out}})$ avec $\overrightarrow{I_{\text{in}}I^1_{\text{in}}} = \overrightarrow{I_{\text{out}}I^1_{\text{out}}} = dx \vec{x}_{\text{in}} + dy \vec{y}_{\text{in}} + ds \vec{s}_{\text{in}}$, d'où

$$\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} (\overrightarrow{I_{\text{in}}I^1_{\text{in}}})_{\mathcal{B}_{\text{in}}} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ ds \end{pmatrix} \text{ et } (\overrightarrow{I_{\text{out}}I^1_{\text{out}}})_{\mathcal{B}_{\text{out}}} = A^{-1}(\overrightarrow{I_{\text{out}}I^1_{\text{out}}})_{\mathcal{B}_{\text{in}}} = A^{-1}\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos \alpha dx + \sin \alpha ds \\ dy \\ -\sin \alpha dx + \cos \alpha ds \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

8. $\mathcal{B}'_{\text{in}} = (\vec{x}'_{\text{in}}, \vec{y}'_{\text{in}}, \vec{s}'_{\text{in}})$ et $\mathcal{B}'_{\text{out}} = (\vec{x}'_{\text{out}}, \vec{y}'_{\text{out}}, \vec{s}'_{\text{out}})$.

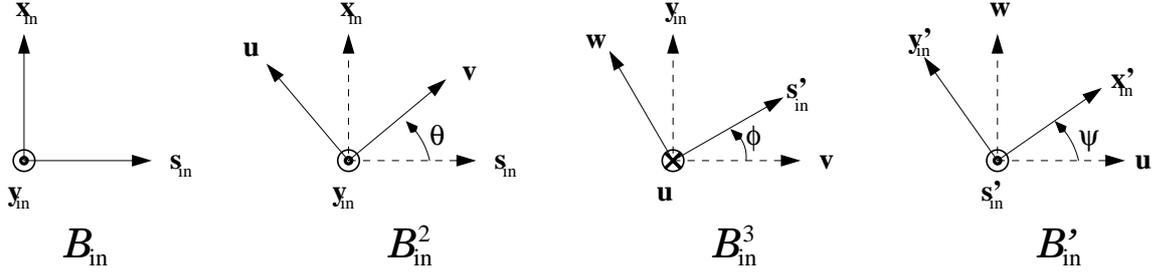


FIG. 2.4 – Définition des angles paramétrisant la rotation d'un aimant

Maintenant, si Z_{in} (respectivement Z_{in}^1 , Z_{out} et Z_{out}^1) désigne les coordonnées spatiales d'un point M quelconque dans le repère \mathcal{R}_{in} (respectivement $\mathcal{R}_{\text{in}}^1$, \mathcal{R}_{out} et $\mathcal{R}_{\text{out}}^1$), les changements de coordonnées s'écrivent simplement

$$\begin{cases} Z_{\text{in}} \longrightarrow Z_{\text{in}}^1 = Z_{\text{in}} - \overrightarrow{(I_{\text{in}} I_{\text{in}}^1)}_{\mathcal{B}_{\text{in}}} \stackrel{2,23}{=} Z_{\text{in}} - \mathbf{t} \\ Z_{\text{out}} \longrightarrow Z_{\text{out}}^1 = Z_{\text{out}} - \overrightarrow{(I_{\text{out}} I_{\text{out}}^1)}_{\mathcal{B}_{\text{out}}} \stackrel{2,23}{=} Z_{\text{out}} - A^{-1}\mathbf{t} . \end{cases} \quad (2.24)$$

De plus, puisque l'aimant est translaté en bloc, on a aussi

$$\overrightarrow{(I_{\text{in}}^1 I_{\text{out}}^1)}_{\mathcal{B}_{\text{in}}} = \mathbf{d} . \quad (2.25)$$

• trois rotations successives (qui ne sont pas les rotations d'Euler, cf. Fig. 2.4) laissant le point I_{in}^1 invariant de sorte que ce dernier peut être directement remplacé par le point I'_{in} dans toutes les relations qui précèdent:

- une rotation d'angle θ (angle azimutal) autour de l'axe orienté $(I'_{\text{in}}; \vec{y}_{\text{in}})$. Sous cette rotation, le repère $\mathcal{R}_{\text{in}}^1$ donne le repère $\mathcal{R}_{\text{in}}^2 = (I'_{\text{in}}; \mathcal{B}_{\text{in}}^2)$ avec $\mathcal{B}_{\text{in}}^2 = (\vec{u}, \vec{y}_{\text{in}}, \vec{v})$ et on a

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{in}}^2 / \mathcal{B}_{\text{in}}^1) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

- une rotation d'angle ϕ (angle d'élévation) autour de l'axe orienté $(I'_{\text{in}}; -\vec{u})$ ($\phi \geq 0$ correspond à une élévation de la tête de l'aimant). Sous cette seconde rotation, le repère $\mathcal{R}_{\text{in}}^2$ donne le repère $\mathcal{R}_{\text{in}}^3 = (I'_{\text{in}}; \mathcal{B}_{\text{in}}^3)$ avec $\mathcal{B}_{\text{in}}^3 = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{s}'_{\text{in}})$ et on a

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{in}}^3 / \mathcal{B}_{\text{in}}^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} .$$

- une rotation d'angle ψ (angle de roulement) autour de l'axe orienté $(I'_{\text{in}}; \vec{s}'_{\text{in}})$ (si $\theta = \phi = 0$, cette rotation correspond simplement à une rotation autour de l'axe longitudinal initial $(I'_{\text{in}}; \vec{s}_{\text{in}})$). Sous cette dernière rotation, le repère $\mathcal{R}_{\text{in}}^3$ donne enfin le repère \mathcal{R}'_{in} et on a

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mat}(\mathcal{B}'_{\text{in}}/\mathcal{B}_{\text{in}}^3) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Avec ces notations, il vient

$$\begin{aligned} \text{Mat}(\mathcal{B}'_{\text{in}}/\mathcal{B}_{\text{in}}) &= \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{in}}^2/\mathcal{B}_{\text{in}}) \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{in}}^3/\mathcal{B}_{\text{in}}^2) \text{Mat}(\mathcal{B}'_{\text{in}}/\mathcal{B}_{\text{in}}^3) \\ &= \Theta \Phi \Psi \\ \text{Mat}(\mathcal{B}'_{\text{out}}/\mathcal{B}_{\text{out}}) &= \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{in}}/\mathcal{B}_{\text{out}}) \text{Mat}(\mathcal{B}'_{\text{in}}/\mathcal{B}_{\text{in}}) \text{Mat}(\mathcal{B}'_{\text{out}}/\mathcal{B}'_{\text{in}}) \\ &\stackrel{2.22}{=} A^{-1} \Theta \Phi \Psi A . \end{aligned} \tag{2.26}$$

On a enfin

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(I'_{\text{out}} I'_{\text{out}})}_{\mathcal{B}_{\text{out}}} &\stackrel{2.25}{=} A^{-1} \overrightarrow{(I'_{\text{out}} I'_{\text{out}})}_{\mathcal{B}_{\text{in}}} = A^{-1} \left[\overrightarrow{(I'_{\text{out}} I'_{\text{in}})}_{\mathcal{B}_{\text{in}}} + \overrightarrow{(I'_{\text{in}} I'_{\text{out}})}_{\mathcal{B}_{\text{in}}} \right] \\ &\stackrel{2.22, 2.26}{=} A^{-1} \left[-\mathbf{d} + \text{Mat}(\mathcal{B}'_{\text{in}}/\mathcal{B}_{\text{in}}) \overrightarrow{(I'_{\text{in}} I'_{\text{out}})}_{\mathcal{B}'_{\text{in}}} \right] \\ &\stackrel{2.22, 2.26}{=} A^{-1} (-\mathbf{d} + \Theta \Phi \Psi \mathbf{d}) . \end{aligned} \tag{2.27}$$

Maintenant, si Z'_{in} (respectivement Z'_{out}) désigne les coordonnées d'un point M quelconque dans le repère \mathcal{R}'_{in} (respectivement $\mathcal{R}'_{\text{out}}$), les changements de coordonnées s'écrivent simplement

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{\text{in}}^1 \longrightarrow Z'_{\text{in}} = \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{in}}/\mathcal{B}'_{\text{in}}) Z_{\text{in}}^1 \\ \qquad \qquad \qquad \stackrel{2.26}{=} \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Theta^{-1} Z_{\text{in}}^1 \\ Z_{\text{out}}^1 \longrightarrow Z'_{\text{out}} = \text{Mat}(\mathcal{B}_{\text{out}}/\mathcal{B}'_{\text{out}}) \left[Z_{\text{out}}^1 - \overrightarrow{(I'_{\text{out}} I'_{\text{out}})}_{\mathcal{B}_{\text{out}}} \right] \\ \qquad \qquad \qquad \stackrel{2.26, 2.27}{=} A^{-1} \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Theta^{-1} A Z_{\text{out}}^1 + \\ \qquad \qquad \qquad (A^{-1} \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Theta^{-1} \mathbf{d} - A^{-1} \mathbf{d}) . \end{array} \right. \tag{2.28}$$

Ainsi, en combinant les relations 2.24 et 2.28, on obtient finalement les formules de changements de coordonnées relatives aux changements de repère $\mathcal{R}_{\text{in}} \rightarrow \mathcal{R}'_{\text{in}}$ et $\mathcal{R}'_{\text{out}} \rightarrow \mathcal{R}_{\text{out}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z'_{\text{in}} = \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Theta^{-1} (Z_{\text{in}} - \mathbf{t}) \\ Z_{\text{out}} = A^{-1} \Theta \Phi \Psi A Z'_{\text{out}} + A^{-1} (\Theta \Phi \Psi \mathbf{d} - \mathbf{d} + \mathbf{t}) . \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Dans toute la suite, on désignera par ϵ l'ensemble des six quantités $(dx, dy, ds, \theta, \phi, \psi)$ qui paramétrisent un déplacement quelconque de l'élément optique E.

Transformation des variables canoniques à l'entrée et à la sortie de l'aimant déplacé

On réécrit les relations 2.29 sous la forme simplifiée suivante:

$$\begin{cases} Z'_{\text{in}} &= C_{\text{in}} Z_{\text{in}} + D_{\text{in}} \\ Z_{\text{out}} &= C_{\text{out}} Z'_{\text{out}} + D_{\text{out}} \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\text{où } \begin{cases} C_{\text{in}} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Theta^{-1} = C_{\text{in}}(\epsilon) & \text{et } D_{\text{in}} \stackrel{\text{def}}{=} -\Psi^{-1} \Phi^{-1} \Theta^{-1} \mathbf{t} = D_{\text{in}}(\epsilon) \\ C_{\text{out}} \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1} \Theta \Phi \Psi A = C_{\text{out}}(\epsilon, L, \alpha) & \text{et } D_{\text{out}} \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1} (\Theta \Phi \Psi \mathbf{d} - \mathbf{d} + \mathbf{t}) = D_{\text{out}}(\epsilon, L, \alpha) . \end{cases}$$

On désigne par $X_{\text{in}} = (x_{\text{in}}, \widehat{P}_{x_{\text{in}}}, y_{\text{in}}, \widehat{P}_{y_{\text{in}}}, l_{\text{in}}, \delta_{\text{in}})$ le vecteur caractérisant l'état physique d'une particule quelconque à l'abscisse s_{in} en prenant \mathcal{R}_{in} pour repère de coordonnées spatiales. Par le changement de repère $\mathcal{R}_{\text{in}} \rightarrow \mathcal{R}'_{\text{in}}$, on a avec les notations précédentes

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\text{in}} \rightarrow x'_{\text{in}} = C_{\text{in}1,1} x_{\text{in}} + C_{\text{in}1,2} y_{\text{in}} + C_{\text{in}1,3} s_{\text{in}} + D_{\text{in}1} \\ \widehat{P}_{x_{\text{in}}} \rightarrow \widehat{P}'_{x_{\text{in}}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m\gamma}{p_0} \frac{dx'_{\text{in}}}{dt} = C_{\text{in}1,1} \widehat{P}_{x_{\text{in}}} + C_{\text{in}1,2} \widehat{P}_{y_{\text{in}}} + C_{\text{in}1,3} \frac{p_{s_{\text{in}}}}{p_0} \\ y_{\text{in}} \rightarrow y'_{\text{in}} = C_{\text{in}2,1} x_{\text{in}} + C_{\text{in}2,2} y_{\text{in}} + C_{\text{in}2,3} s_{\text{in}} + D_{\text{in}2} \\ \widehat{P}_{y_{\text{in}}} \rightarrow \widehat{P}'_{y_{\text{in}}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m\gamma}{p_0} \frac{dy'_{\text{in}}}{dt} = C_{\text{in}2,1} \widehat{P}_{x_{\text{in}}} + C_{\text{in}2,2} \widehat{P}_{y_{\text{in}}} + C_{\text{in}2,3} \frac{p_{s_{\text{in}}}}{p_0} \\ l_{\text{in}} \rightarrow l'_{\text{in}} \stackrel{\text{def}}{=} -c \left(t - \frac{s'_{\text{in}}}{v_0} \right) = l_{\text{in}} + \frac{1}{\beta_0} (s'_{\text{in}} - s_{\text{in}}) \\ \hspace{10em} = l_{\text{in}} + \frac{1}{\beta_0} (C_{\text{in}3,1} x_{\text{in}} + C_{\text{in}3,2} y_{\text{in}} + C_{\text{in}3,3} s_{\text{in}} - s_{\text{in}} + D_{\text{in}3}) \\ \delta_{\text{in}} \rightarrow \delta'_{\text{in}} = \delta_{\text{in}} \end{array} \right.$$

$$\text{où (cf. 2.18) } \frac{p_{s_{\text{in}}}}{p_0} = \sqrt{1 + \frac{2\delta_{\text{in}}}{\beta_0} + \delta_{\text{in}}^2 - \widehat{P}_{x_{\text{in}}}^2 - \widehat{P}_{y_{\text{in}}}^2} .$$

On note alors X'_{in} ce nouveau vecteur et \mathcal{M}'_{in} cette transformation, soit

$$X'_{\text{in}} = \mathcal{M}'_{\text{in}}(X_{\text{in}}; s_{\text{in}}; \epsilon) . \quad (2.31)$$

De la même façon, on définit la transformation $\mathcal{M}'_{\text{out}}$ relative au changement de repère $\mathcal{R}'_{\text{out}} \rightarrow \mathcal{R}_{\text{out}}$, ce que l'on écrit avec des notations évidentes⁹

$$X_{\text{out}} = \mathcal{M}'_{\text{out}}(X'_{\text{out}}; s'_{\text{out}}; \epsilon, L, \alpha) . \quad (2.32)$$

Mappings effectifs d'entrée et de sortie \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out}

Considérons maintenant une particule quelconque située à la face d'entrée de l'aimant non déplacé et caractérisée par le vecteur 6-dimensionnel X_{in} ; faisons-la évoluer le long d'un *drift* de longueur L_{in} de sorte qu'elle rejoigne la face d'entrée de l'élément déplacé. A l'issue de ce *drift*, les coordonnées spatiales de la particule dans le repère \mathcal{R}_{in} sont définies par

$$Z_{\text{in}} = \begin{pmatrix} x_{\text{in}} \\ y_{\text{in}} \\ s_{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{M}_{\text{drift}})_1(X_{\text{in}}; L_{\text{in}}) \\ (\mathcal{M}_{\text{drift}})_3(X_{\text{in}}; L_{\text{in}}) \\ L_{\text{in}} \end{pmatrix}$$

où $(\mathcal{M}_{\text{drift}})_i(X_{\text{in}}; L_{\text{in}})$ désigne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur 6-dimensionnel $\mathcal{M}_{\text{drift}}(X_{\text{in}}; L_{\text{in}})$ donné par l'équation 2.17. La longueur L_{in} est donc telle que

$$s'_{\text{in}} = (Z'_{\text{in}})_3 = C_{\text{in}3,1} (\mathcal{M}_{\text{drift}})_1(X_{\text{in}}; L_{\text{in}}) + C_{\text{in}3,2} (\mathcal{M}_{\text{drift}})_3(X_{\text{in}}; L_{\text{in}}) + C_{\text{in}3,3} L_{\text{in}} + D_{\text{in}3} = 0 .$$

En reprenant l'expression 2.17 du *mapping* d'un *drift* de longueur quelconque, on voit que l'égalité précédente est une équation linéaire en la variable L_{in} dont les coefficients dépendent de X_{in} et du défaut ϵ . On trouve ainsi une expression exacte pour la longueur recherchée, du type $L_{\text{in}} = L_{\text{in}}(X_{\text{in}}; \epsilon)$. Ceci étant dit, on définit comme suit le *mapping* effectif d'entrée de l'aimant tourné:

$$\mathcal{M}_{\text{in}}(X_{\text{in}}; \epsilon) = \mathcal{M}'_{\text{in}}\left(\mathcal{M}_{\text{drift}}(X_{\text{in}}; L_{\text{in}}(X_{\text{in}}; \epsilon)); s_{\text{in}} = L_{\text{in}}(X_{\text{in}}; \epsilon); \epsilon\right) . \quad (2.33)$$

Considérons enfin une particule quelconque située à la face de sortie de l'aimant déplacé et caractérisée par le vecteur 6-dimensionnel X'_{out} ; dans le repère $\mathcal{R}'_{\text{out}}$, la particule a pour coordonnées $Z'_{\text{out}} = ((X'_{\text{out}})_1, (X'_{\text{out}})_3, s'_{\text{out}} = 0)$, ce qui, dans le repère \mathcal{R}_{out} , correspond à une abscisse longitudinale s_{out} qui vaut

$$s_{\text{out}} = (Z_{\text{out}})_3 = C_{\text{out}3,1} (X'_{\text{out}})_1 + C_{\text{out}3,2} (X'_{\text{out}})_3 + D_{\text{out}3} \stackrel{\text{def}}{=} -L_{\text{out}}(X'_{\text{out}}; \epsilon, L, \alpha)$$

9. $\mathcal{M}'_{\text{out}}$ dépend des quantités L et α car la matrice C_{out} et le vecteur D_{out} de l'équation 2.30 en dépendent.

où L_{out} s'interprète comme la longueur du *drift* ramenant la particule sur la face de sortie de l'aimant non déplacé. On définit alors le *mapping* effectif de sortie de l'aimant tourné par

$$\mathcal{M}_{\text{out}}\left(X'_{\text{out}}; \epsilon, L, \alpha\right) = \mathcal{M}_{\text{drift}}\left(\mathcal{M}'_{\text{out}}\left(X'_{\text{out}}; s'_{\text{out}}=0; \epsilon, L, \alpha\right); L_{\text{out}}\left(X'_{\text{out}}; \epsilon, L, \alpha\right)\right). \quad (2.34)$$

Typiquement, il faut comprendre les équations 2.33 et 2.34 de la façon suivante:

- à l'entrée (cf. Fig. 2.2 qui illustre le cas simple $dy = \phi = \psi = 0$):
En partant d'un point de la face d'entrée de l'aimant non déplacé, on se ramène, via la *drift* de longueur L_{in} , à la face d'entrée de l'aimant déplacé puis, par la transformation \mathcal{M}'_{in} (changement des variables canoniques d'entrée), on tombe sur les variables canoniques “adaptées” au repère d'entrée de l'aimant déplacé. \mathcal{M}_{in} est alors la combinaison de ces deux transformations.
- à la sortie:
En partant d'un point de la face de sortie de l'aimant déplacé, on effectue d'abord la transformation $\mathcal{M}'_{\text{out}}$ (changement des variables canoniques de sortie) qui redonne les variables canoniques “adaptées” au repère de sortie de l'aimant non déplacé puis, par le *drift* de longueur L_{out} , on se ramène finalement à la face de sortie de l'aimant non déplacé. \mathcal{M}_{out} est alors la combinaison de ces deux transformations.

Vu de cette manière et comme annoncé dans l'introduction 2.3.1, il est clair que la transformation $\mathcal{M}_{\text{drift}}(L_1) \circ \mathcal{M}_{\text{out}} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{M}_{\text{in}} \circ \mathcal{M}_{\text{drift}}(L_0)$ correspond exactement au *mapping* $\mathcal{M}'_{\text{tot}}$ de la section $[s_0 - L_0; s_1 + L_1]$ dans laquelle l'aimant E a été déplacé. Tout revient donc à remplacer le *mapping* \mathcal{M} de la section $[s_0; s_1]$ (sans erreurs géométriques) par le *mapping* effectif \mathcal{M}_{eff} défini par

$$\mathcal{M}_{\text{eff}} = \mathcal{M}_{\text{out}} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{M}_{\text{in}}. \quad (2.35)$$

2.3.3 Résultats analytiques

Comme nous l'avons vu à la sous-section précédente, les *mappings* \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} peuvent être calculés de manière exacte mais on tombe alors sur des expressions trop lourdes pour être retranscrites ici. De plus, pour ce qui nous concerne, nous n'avons besoin que des seize quantités $(\delta X_{\text{in}}^{(1)}, \delta X_{\text{in}}^{(2)}, R_{\text{in}}^{(0)}, R_{\text{in}}^{(1)}, R_{\text{in}}^{(2)}, T_{\text{in}}^{(0)}, T_{\text{in}}^{(1)}, U_{\text{in}}^{(0)})$ et $(\delta X_{\text{out}}^{(1)}, \delta X_{\text{out}}^{(2)}, R_{\text{out}}^{(0)}, R_{\text{out}}^{(1)}, R_{\text{out}}^{(2)}, T_{\text{out}}^{(0)}, T_{\text{out}}^{(1)}, U_{\text{out}}^{(0)})$ associées respectivement à \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} (cf. sous-sections 1.3.2 et 1.3.3). Encore une fois, tous les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel MAPLE [15] et nous

ne fournirons que les résultats ainsi obtenus.

Avant d'aller plus loin, en remarquant que $\mathcal{M}_{\text{in}}(\epsilon=0) = \mathcal{M}_{\text{out}}(\epsilon=0, L, \alpha) = \mathbf{1}$, on a déjà

$$\begin{cases} R_{\text{in}}^{(0)} = R_{\text{out}}^{(0)} = \mathbf{1} \\ T_{\text{in}}^{(0)} = T_{\text{out}}^{(0)} = 0 \\ U_{\text{in}}^{(0)} = U_{\text{out}}^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

On définit alors les quatre constantes suivantes:

$$c_\alpha = \cos \alpha, \quad s_\alpha = \sin \alpha, \quad L' = \frac{L}{\alpha} s_\alpha \text{ et } L_\alpha = \frac{L}{\alpha} (1 - c_\alpha).$$

En particulier, quand $\alpha = 0$ (cas du *drift*, du quadrupôle et de l'hexapôle), on a $L' = L$ et $L_\alpha = 0$.

Ceci étant dit, nous énumérons ci-dessous les résultats obtenus.

– *offset* $\delta X_{\text{in}}^{(1)}$:

$$\delta X_{\text{in}}^{(1)} = \left(-dx, -\theta, -dy, -\phi, -\frac{ds}{\beta_0}, 0 \right).$$

– *offset* $\delta X_{\text{out}}^{(1)}$:

$$\delta X_{\text{out}}^{(1)} = \left(c_\alpha dx + s_\alpha ds + L'\theta, \theta, -L_\alpha \psi + dy + L'\phi, c_\alpha \phi - s_\alpha \psi, \frac{c_\alpha ds}{\beta_0} - \frac{L_\alpha \theta}{\beta_0} - \frac{s_\alpha dx}{\beta_0}, 0 \right).$$

– *offset* $\delta X_{\text{in}}^{(2)}$:

$$\delta X_{\text{in}}^{(2)} = \left(-dy \psi, -\phi \psi, dx \psi, \theta \psi, -\frac{dx \theta}{\beta_0} - \frac{dy \phi}{\beta_0}, 0 \right).$$

– *offset* $\delta X_{\text{out}}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \delta X_{\text{out}}^{(2)} = & \left(s_\alpha dx \theta - c_\alpha ds \theta + s_\alpha L_\alpha \phi \psi + \frac{1}{2} L_\alpha c_\alpha \psi^2 + \frac{1}{2} L_\alpha \theta^2 - \frac{1}{2} s_\alpha L' \phi^2, \right. \\ & s_\alpha^2 \phi \psi + \frac{1}{2} s_\alpha c_\alpha \psi^2 - \frac{1}{2} s_\alpha c_\alpha \phi^2, \\ & s_\alpha c_\alpha ds \psi - c_\alpha^2 ds \phi - s_\alpha^2 dx \psi + L_\alpha c_\alpha \theta \phi - s_\alpha L_\alpha \theta \psi + s_\alpha c_\alpha dx \phi, \\ & \left. 0, -\frac{1}{2} \frac{s_\alpha L_\alpha \psi^2}{\beta_0} + \frac{L_\alpha c_\alpha \phi \psi}{\beta_0} - \frac{1}{2} \frac{L' \theta^2}{\beta_0} - \frac{1}{2} \frac{c_\alpha L' \phi^2}{\beta_0}, 0 \right). \end{aligned}$$

– matrice $R_{\text{in}}^{(1)}$:

$$R_{\text{in}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & ds & \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & -\frac{\theta}{\beta_0} \\ -\psi & 0 & 0 & ds & 0 & 0 \\ 0 & -\psi & 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi}{\beta_0} \\ \frac{\theta}{\beta_0} & 0 & \frac{\phi}{\beta_0} & 0 & 0 & \frac{ds}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– matrice $R_{\text{out}}^{(1)}$:

$$R_{\text{out}}^{(1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & s_\alpha dx - c_\alpha ds + L_\alpha \theta & -s_\alpha \phi - c_\alpha \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_\alpha \phi - c_\alpha \psi & 0 & \frac{\theta}{\beta_0} \\ s_\alpha \phi + c_\alpha \psi & 0 & 0 & s_\alpha dx - c_\alpha ds + L_\alpha \theta & 0 & 0 \\ 0 & s_\alpha \phi + c_\alpha \psi & 0 & 0 & 0 & \frac{c_\alpha \phi - s_\alpha \psi}{\beta_0} \\ -\frac{\theta}{\beta_0} & 0 & \frac{s_\alpha \psi - c_\alpha \phi}{\beta_0} & 0 & 0 & \frac{s_\alpha dx - c_\alpha ds + L_\alpha \theta}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– matrice $R_{\text{in}}^{(2)}$:

$$R_{\text{in}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\theta^2 - \psi^2}{2} & dx \theta + dy \phi & \theta \phi & ds \psi & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta^2 + \psi^2}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\phi \psi}{\beta_0} \\ 0 & -ds \psi & \frac{\phi^2 - \psi^2}{2} & dx \theta + dy \phi & 0 & 0 \\ 0 & -\theta \phi & 0 & -\frac{\phi^2 + \psi^2}{2} & 0 & \frac{\theta \psi}{\beta_0} \\ 0 & \frac{ds \theta}{\beta_0} & 0 & \frac{ds \phi}{\beta_0} & 0 & \frac{dy \phi + dx \theta}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– matrice $R_{\text{out}}^{(2)}$:

$$R_{\text{out}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 \theta^2 - 1/2 s_\alpha^2 \phi^2 & 1/2 L' \theta^2 + 1/2 c_\alpha L' \phi^2 + & 0 & -s_\alpha^2 dx \phi - s_\alpha c_\alpha dx \psi & 0 & 0 \\ -1/2 c_\alpha^2 \psi^2 - s_\alpha c_\alpha \phi \psi & +1/2 s_\alpha L_\alpha \psi^2 - L_\alpha c_\alpha \phi \psi & & +s_\alpha c_\alpha ds \phi + c_\alpha^2 ds \psi & & \\ & & & -s_\alpha L_\alpha \theta \phi - L_\alpha c_\alpha \theta \psi & & \\ 0 & -1/2 \theta^2 - 1/2 s_\alpha^2 \phi^2 & 0 & -c_\alpha \theta \phi + s_\alpha \theta \psi & 0 & -\frac{s_\alpha c_\alpha \phi^2}{2\beta_0} + \frac{s_\alpha c_\alpha \psi^2}{2\beta_0} \\ & -1/2 c_\alpha^2 \psi^2 - s_\alpha c_\alpha \phi \psi & & & & +\frac{s_\alpha^2 \phi \psi}{\beta_0} \\ c_\alpha \theta \phi - s_\alpha \theta \psi & s_\alpha^2 dx \phi + s_\alpha c_\alpha dx \psi & (1/2 c_\alpha^2 - 1/2 s_\alpha^2) \phi^2 & 1/2 L' \theta^2 + 1/2 c_\alpha L' \phi^2 & 0 & 0 \\ & -s_\alpha c_\alpha ds \phi - c_\alpha^2 ds \psi & +(-1/2 c_\alpha^2 + 1/2 s_\alpha^2) \psi^2 & +1/2 s_\alpha L_\alpha \psi^2 - L_\alpha c_\alpha \phi \psi & & \\ +s_\alpha L_\alpha \theta \phi + L_\alpha c_\alpha \theta \psi & & -2 s_\alpha c_\alpha \phi \psi & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \phi^2 - 1/2 \psi^2 & 0 & 0 \\ -\frac{s_\alpha c_\alpha \phi^2}{2\beta_0} + \frac{s_\alpha c_\alpha \psi^2}{2\beta_0} & -\frac{L_\alpha \theta^2}{\beta_0} - \frac{s_\alpha dx \theta}{\beta_0} & \frac{s_\alpha \theta \phi}{\beta_0} + \frac{c_\alpha \theta \psi}{\beta_0} & -\frac{s_\alpha c_\alpha dx \phi}{\beta_0} + \frac{s_\alpha^2 dx \psi}{\beta_0} & 0 & 1/2 \frac{L' \theta^2}{\beta_0^2 \gamma_0^2} + 1/2 \frac{c_\alpha L' \phi^2}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \\ & +\frac{c_\alpha ds \theta}{\beta_0} & & +\frac{c_\alpha^2 ds \phi}{\beta_0} - \frac{s_\alpha c_\alpha ds \psi}{\beta_0} & & +1/2 \frac{s_\alpha L_\alpha \psi^2}{\beta_0^2 \gamma_0^2} - \frac{c_\alpha L_\alpha \phi \psi}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \\ & & & -\frac{L_\alpha c_\alpha \theta \phi}{\beta_0} + \frac{s_\alpha L_\alpha \theta \psi}{\beta_0} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– matrice $T_{\text{in}}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
T_{\text{in } 1,1,2}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\theta \\
T_{\text{in } 1,2,3}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\phi \\
T_{\text{in } 1,2,6}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\frac{ds}{\beta_0} \\
T_{\text{in } 2,2,2}^{(1)} &= \frac{1}{2}\theta \\
T_{\text{in } 2,4,4}^{(1)} &= \frac{1}{2}\theta \\
T_{\text{in } 2,6,6}^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\theta}{\beta_0^2\gamma_0^2} \\
T_{\text{in } 3,1,4}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\theta \\
T_{\text{in } 3,3,4}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\phi \\
T_{\text{in } 3,4,6}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\frac{ds}{\beta_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\text{in } 4,2,2}^{(1)} &= \frac{1}{2}\phi \\
T_{\text{in } 4,4,4}^{(1)} &= \frac{1}{2}\phi \\
T_{\text{in } 4,6,6}^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\phi}{\beta_0^2\gamma_0^2} \\
T_{\text{in } 5,1,6}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\frac{\theta}{\beta_0^2\gamma_0^2} \\
T_{\text{in } 5,2,2}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\frac{ds}{\beta_0} \\
T_{\text{in } 5,3,6}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\frac{\phi}{\beta_0^2\gamma_0^2} \\
T_{\text{in } 5,4,4}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\frac{ds}{\beta_0} \\
T_{\text{in } 5,6,6}^{(1)} &= -\frac{3}{2}\frac{ds}{\beta_0^3\gamma_0^2}.
\end{aligned}$$

– matrice $T_{\text{out}}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
T_{\text{out } 1,1,2}^{(1)} &= \frac{1}{2}\theta \\
T_{\text{out } 1,2,3}^{(1)} &= \frac{1}{2}c_\alpha\phi - \frac{1}{2}s_\alpha\psi \\
T_{\text{out } 1,2,6}^{(1)} &= \frac{c_\alpha ds - s_\alpha dx - L_\alpha\theta}{2\beta_0} \\
T_{\text{out } 2,2,2}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\theta \\
T_{\text{out } 2,4,4}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\theta \\
T_{\text{out } 2,6,6}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\frac{\theta}{\beta_0^2\gamma_0^2} \\
T_{\text{out } 3,1,4}^{(1)} &= \frac{1}{2}\theta \\
T_{\text{out } 3,3,4}^{(1)} &= \frac{1}{2}c_\alpha\phi - \frac{1}{2}s_\alpha\psi \\
T_{\text{out } 3,4,6}^{(1)} &= \frac{c_\alpha ds - s_\alpha dx - L_\alpha\theta}{2\beta_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\text{out } 4,2,2}^{(1)} &= -\frac{1}{2}c_\alpha\phi + \frac{1}{2}s_\alpha\psi \\
T_{\text{out } 4,4,4}^{(1)} &= -\frac{1}{2}c_\alpha\phi + \frac{1}{2}s_\alpha\psi \\
T_{\text{out } 4,6,6}^{(1)} &= \frac{s_\alpha\psi - c_\alpha\phi}{2\beta_0^2\gamma_0^2} \\
T_{\text{out } 5,1,6}^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\theta}{\beta_0^2\gamma_0^2} \\
T_{\text{out } 5,2,2}^{(1)} &= \frac{c_\alpha ds - s_\alpha dx - L_\alpha\theta}{2\beta_0} \\
T_{\text{out } 5,3,6}^{(1)} &= \frac{c_\alpha\phi - s_\alpha\psi}{2\beta_0^2\gamma_0^2} \\
T_{\text{out } 5,4,4}^{(1)} &= \frac{c_\alpha ds - s_\alpha dx - L_\alpha\theta}{2\beta_0} \\
T_{\text{out } 5,6,6}^{(1)} &= 3\frac{c_\alpha ds - s_\alpha dx - L_\alpha\theta}{2\beta_0^3\gamma_0^2}.
\end{aligned}$$

Pour terminer cette sous-section, insistons sur le point suivant: le *mapping* effectif $\mathcal{M}_{\text{eff}} = \mathcal{M}_{\text{out}} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{M}_{\text{in}}$ (cf. équation 2.35) doit être symplectique, ce qui n'impose aucunement

que \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} le soient aussi. En fait, via MAPLE, on peut vérifier la symplecticité de chacune des deux transformations \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} ¹⁰ et ceci pour une raison que j'ignore. N'ayant pas ici les expressions exactes de \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} , nous pourrions tout de même tenter de montrer que les relations 1.49 sont bien vérifiées (ces relations ne sont qu'une conséquence de la symplecticité). Ceci est fastidieux et sans grand intérêt; nous remarquerons simplement que les matrices $R_{\text{in}}^{(1)}$ et $R_{\text{out}}^{(1)}$ ont la forme requise qu'impose la symplecticité respective des *mappings* \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} (cf. matrice Θ dans l'équation 1.46).

2.3.4 Mapping effectif total de l'aimant déplacé

Nous reprenons l'équation 2.35 puis nous appliquons les formules de concaténation 1.45 (sous-section 1.3.3) une première fois pour le produit $\mathcal{M} \circ \mathcal{M}_{\text{in}}$ puis une seconde fois pour le produit total $\mathcal{M}_{\text{out}} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{M}_{\text{in}}$. Sans oublier les relations 2.36, on obtient en utilisant les notations usuelles¹¹

– pour l'ordre 0

$$\begin{cases} R_{\text{eff}}^{(0)} = R^{(0)} \\ T_{\text{eff}}^{(0)} = T^{(0)} \\ U_{\text{eff}}^{(0)} = U^{(0)}. \end{cases} \quad (2.37)$$

– pour l'ordre 1

$$\begin{cases} \delta X_{\text{eff}}^{(1)} = \delta X^{(1)} + \delta X_{\text{out}}^{(1)} + R^{(0)} \delta X_{\text{in}}^{(1)} \\ R_{\text{eff}}^{(1)} = R^{(1)} + R_{\text{out}}^{(1)} R^{(0)} + R^{(0)} R_{\text{in}}^{(1)} + 2 T^{(0)} \otimes \delta X_{\text{in}}^{(1)} \\ T_{\text{eff}}^{(1)} = T^{(1)} + 3 U^{(0)} \otimes \delta X_{\text{in}}^{(1)} + 2 \left(T^{(0)} \otimes R_{\text{in}}^{(1)} \right)_{\text{Sym}} + R^{(0)} T_{\text{in}}^{(1)} + \\ R_{\text{out}}^{(1)} T^{(0)} + T_{\text{out}}^{(1)} (R^{(0)}, R^{(0)}). \end{cases} \quad (2.38)$$

10. Cette propriété est plus forte que la seule symplecticité du *mapping* \mathcal{M}_{eff} .

11. Si A est un tenseur à $n + 1$ indices et (B_1, \dots, B_p) p tenseurs ($p \leq n$), alors

$$A \otimes B_1 \otimes \dots \otimes B_p \stackrel{\text{def}}{=} A \left(B_1, \dots, B_p, \overbrace{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}}^{n-p \text{ fois}} \right).$$

– pour l'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta X_{\text{eff}}^{(2)} = \delta X^{(2)} + \delta X_{\text{out}}^{(2)} + R^{(0)} \delta X_{\text{in}}^{(2)} + R_{\text{out}}^{(1)} R^{(0)} \delta X_{\text{in}}^{(1)} + \\ \quad T^{(0)} (\delta X_{\text{in}}^{(1)}, \delta X_{\text{in}}^{(1)}) + R_{\text{out}}^{(1)} \delta X^{(1)} + R^{(1)} \delta X_{\text{in}}^{(1)} \\ R_{\text{eff}}^{(2)} = R^{(2)} + R_{\text{out}}^{(2)} R^{(0)} + R_{\text{out}}^{(1)} R^{(0)} R_{\text{in}}^{(1)} + R^{(0)} R_{\text{in}}^{(2)} + \\ \quad 2T^{(0)} \otimes \delta X_{\text{in}}^{(2)} + 2T^{(0)} (\delta X_{\text{in}}^{(1)}, R_{\text{in}}^{(1)}) + 3U^{(0)} \otimes \delta X_{\text{in}}^{(1)} \otimes \delta X_{\text{in}}^{(1)} + \\ \quad 2R_{\text{out}}^{(1)} (T^{(0)} \otimes \delta X_{\text{in}}^{(1)}) + 2T_{\text{out}}^{(1)} (R^{(0)} \delta X_{\text{in}}^{(1)}, R^{(0)}) + R^{(1)} R_{\text{in}}^{(1)} + \\ \quad R_{\text{out}}^{(1)} R^{(1)} + 2T^{(1)} \otimes \delta X_{\text{in}}^{(1)} + 2T_{\text{out}}^{(1)} (\delta X^{(1)}, R^{(0)}) . \end{array} \right. \quad (2.39)$$

2.4 Conclusion

En conclusion, si l'on considère une ligne quelconque constituée de *drifts* et de $2m$ -pôles ($1 \leq m \leq 3$) que l'on suppose droits et parfaits (on ignore l'effet des champs de fuite), on est alors capable, d'après tout ce qui précède (section 2.2 et sous-section 2.3.3 donnant les formules analytiques relatives au dipôle, au quadrupôle, à l'hexapôle, à \mathcal{M}_{in} et \mathcal{M}_{out} , formules 1.45 décrivant les règles de concaténation de deux *mappings* et relations 2.37, 2.38 et 2.39), d'obtenir l'ensemble des quantités suivantes:

- toutes les dérivées de l'*offset* en bout de ligne du type $\frac{\partial \delta X_{\text{tot}}}{\partial \delta \lambda_i}$ et $\frac{\partial^2 \delta X_{\text{tot}}}{\partial \delta \lambda_i \partial \delta \lambda_j}$ où $\delta \lambda_i$ est une erreur quelconque (erreur de champ ou erreur géométrique) affectant l'aimant numéro i ¹².
- la matrice $R_{\text{tot}}^{(0)}$ (matrice R de la ligne idéale, c.-à-d. sans erreurs) ainsi que toutes les dérivées premières et secondes de la matrice R_{tot} en fonction de l'ensemble des erreurs $\delta \lambda_i$.
- la matrice $T_{\text{tot}}^{(0)}$ (matrice T de la ligne idéale) ainsi que toutes les dérivées premières de T_{tot} en fonction des erreurs $\delta \lambda_i$.
- la matrice $U_{\text{tot}}^{(0)}$ (matrice U de la ligne idéale).

12. On a répertorié onze erreurs dans le dipôle (six erreurs géométriques et cinq erreurs de champ), neuf erreurs dans le quadrupôle (six erreurs géométriques et trois erreurs de champ) et enfin sept erreurs dans l'hexapôle (six erreurs géométriques et une erreur de champ).

Cet objectif a été atteint par l'écriture d'un programme FORTRAN qui calcule, entre autres, toutes les quantités citées précédemment et ceci pour une ligne de transport tout à fait quelconque. Cependant, la sensibilité d'une ligne optique (par rapport aux défauts de ses aimants) dépend évidemment des caractéristiques du faisceau qui la traverse. Les quantités physiques qu'il est intéressant de calculer ne sont donc pas exactement celles qui ont été décrites auparavant mais ces dernières restent bien sûr indispensables pour quantifier des effets du type grossissement de taille faisceau ou perte en luminosité. Tout ceci fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Matrice faisceau et luminosité

Ce chapitre répond aux objectifs que se fixe l'étape I. Plus précisément, le but est ici de calculer la luminosité au point d'interaction comme une fonction des objets $\delta X_{1,2}$ et $R_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} R_{1,2}^{(0)} + \delta R_{1,2}$ associés aux *mappings* $\mathcal{M}_{1,2}$ qui décrivent le transport du faisceau le long des lignes optiques 1 et 2 se faisant face:

$$\bar{\mathbf{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{L}}_0 \left(1 + \frac{\delta \bar{\mathbf{L}}(\delta X_{1,2}, \delta R_{1,2})}{\bar{\mathbf{L}}_0} \right) \quad (3.1)$$

où $\bar{\mathbf{L}}_0$ désigne la luminosité obtenue au point de collision lorsque les deux lignes faisceau ne présentent aucun défaut (luminosité nominale). Dans le cas idéal où les deux paquets de particules sont identiques, infiniment courts ($\sigma_z = 0$) et de distribution Gaussienne, la luminosité intégrée sur toute la durée de la collision (supposée frontale) possède une expression déjà bien connue:

$$\bar{\mathbf{L}}_0(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z = 0) = \frac{N^2}{4\pi\sigma_x^*\sigma_y^*}$$

où N est le nombre de particules dans chacun des deux paquets et où σ_x^* et σ_y^* désignent respectivement leur taille horizontale et verticale. Il s'agit ici de généraliser cette dernière relation au cas de deux faisceaux d'extension temporelle non nulle et de distribution six-dimensionnelle complètement quelconque au point d'interaction¹.

Nous commencerons donc par nous intéresser à une première quantité qui est la matrice faisceau (matrice de covariance associée à la distribution du faisceau à une abscisse s donnée) et, moyennant certaines hypothèses, nous étudierons ses fluctuations en fonction des erreurs δR qui apparaissent dans la matrice de transfert de la ligne considérée lorsque

1. Nous garderons néanmoins l'hypothèse que la distribution des deux faisceaux reste Gaussienne au point de collision.

celle-ci présente des défauts (section 3.1). Cette étude préliminaire mettra en évidence les associations directes existant entre les éléments de matrice δR_{ij} et les couplages r_{ij} (éléments non diagonaux de la matrice faisceau) générés au point de collision; elle permettra également d'établir et d'interpréter les relations liant les coefficients δR_{ij} et les fluctuations de tailles faisceau transverses $\delta\sigma_{x,y}^*$ au point d'interaction.

Utilisant les notions et les résultats exposés dans la première section et après quelques préliminaires, nous dériverons ensuite l'expression de la fonction $\delta\bar{\mathbf{L}}(\delta X_{1,2}, \delta R_{1,2})$ introduite dans l'équation 3.1 et fournirons les coefficients relatifs à son développement de Taylor à l'ordre 2 dans les variables $\delta X_{1,2}$ et $\delta R_{1,2}$ (section 3.2).

Finalement, nous rappellerons en section 3.3 quels sont les différents critères couramment utilisés pour le calcul des tolérances d'une ligne optique donnée; puis, en se basant sur deux exemples simples décrivant la distribution statistique des défauts dans la ligne, nous montrerons que l'estimation de ces tolérances devient possible par la concaténation des étapes I et II et peut être rendue systématique indépendamment du type des erreurs considérées.

3.1 Matrice faisceau

3.1.1 Définitions et généralités

On considère une ligne optique quelconque définie par une succession d'éléments magnétiques droits (dipôles, quadrupôles et hexapôles) qui s'organisent autour d'une courbe de référence plane que l'on note \mathcal{C} . Comme à la sous-section 1.2.3, \mathcal{C} est supposée être constituée d'une suite d'arcs de cercle (au niveau des dipôles) et de segments droits (au niveau des *drifts*, quadrupôles et hexapôles). On paramétrise la courbe \mathcal{C} par une abscisse curviligne s , de sorte que $s = 0$ en début de ligne et $s = s^*$ en bout de ligne, c.-à-d. au point d'interaction (IP).

Distribution de particules

La ligne est parcourue par un faisceau de particules chargées, de distribution initiale

$$\rho_0(X) = \rho(X; s = 0)$$

où le vecteur 6-dimensionnel X est défini au début de la sous-section 1.3.1. On considère maintenant une abscisse s_1 quelconque le long de la ligne ainsi que deux domaines infinitésimaux de l'espace des phases, \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 , de point moyen et de volume élémentaire

respectifs (X_0, dX_0) et (X_1, dX_1) . On suppose que le domaine \mathcal{D}_1 est l'image de \mathcal{D}_0 par le *mapping* $\mathcal{M}(0 \rightarrow s_1)$. Par conservation du nombre de particules, on a avec des notations évidentes

$$dN_0(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_0(X_0) dX_0 = dN_1(X_1) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(X_1; s_1) dX_1 . \quad (3.2)$$

Mais le coefficient de dilatation $\left(\frac{dX_1}{dX_0}\right)$ n'est rien d'autre que la valeur absolue du Jacobien de la transformation $X \rightarrow \mathcal{M}(X; 0 \rightarrow s_1)$ au point X_0 . En négligeant une fois de plus tous les processus non-Hamiltoniens, ce coefficient est donc égal à l'unité par symplecticité (cf. sous-section 1.3.4) et finalement, en utilisant l'équation précédente, on obtient

$$\rho(X; s) = \rho_0(\mathcal{M}^{-1}(X; s)) \quad (3.3)$$

quelque soit l'abscisse s le long de la courbe \mathcal{C} et la position X dans l'espace des phases 6-dimensionnel.

Offset et matrice faisceau

Dans toute la suite, si \mathcal{Q} désigne une quantité quelconque relative au faisceau, on notera $\langle \mathcal{Q} \rangle(s)$ sa valeur moyenne sur la distribution de particules à l'abscisse s , soit

$$\langle \mathcal{Q} \rangle(s) = \frac{1}{N_e} \int \mathcal{Q}(X) \rho(X; s) dX$$

où N_e est le nombre total de particules dans la distribution ρ_0 . Aussi, en utilisant l'équation 3.3 ainsi que la symplecticité des *mappings* considérés, on obtient

$$\langle \mathcal{Q} \rangle(s) = \langle \mathcal{Q} \circ \mathcal{M}(s) \rangle(0) \quad (3.4)$$

où, par abus de langage, $\mathcal{M}(s)$ désigne la transformation $X \rightarrow \mathcal{M}(X; 0 \rightarrow s)$.

A n'importe quelle abscisse s le long de la ligne, on définit alors la matrice faisceau $\Sigma(s)$ comme étant la matrice de covariance du vecteur X sur la distribution $\rho(X; s)$ (se reporter par exemple à la référence [14]), soit

$$\Sigma(s) = \langle X \widetilde{X} \rangle(s) - \langle X \rangle(s) \langle \widetilde{X} \rangle(s) = \left(\langle X_i X_j \rangle(s) - \langle X_i \rangle(s) \langle X_j \rangle(s) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 6 \\ 1 \leq j \leq 6}} \quad (3.5)$$

où \widetilde{X} représente le vecteur ligne, transposée du vecteur colonne X .

Enfin, le vecteur $\langle X \rangle(s)$ est souvent retenu comme étant l'*offset* du faisceau à l'abscisse s , à ne pas confondre avec la quantité $\delta X(s)$ portant la même appellation (pour une raison que nous verrons ultérieurement) mais désignant l'image du point $X=0$ par la transformation $\mathcal{M}(s)$.

Cas d'un transport linéaire

On s'intéresse ici au cas particulier où le transport du faisceau est linéaire. Plus précisément, ceci signifie que l'on suppose que le *mapping* $\mathcal{M}(s)$ s'écrit

$$\mathcal{M}(s)(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(s; X) = \delta X(s) + R(s) X . \quad (3.6)$$

En comparant avec l'équation 1.42, cela revient à omettre les termes $T(X, X)$ et $U(X, X, X)$ ainsi que tous ceux d'ordre supérieur. Cependant, nous devons rester bien conscients du fait qu'une telle approximation n'est valable que dans le cas où la distribution initiale, $\rho_0(X)$, reste très piquée autour de zéro. On se référera alors à la sous-section 3.1.3 pour la quantification de ces effets dits d'aberrations et que l'on néglige ici (aberrations chromatiques créées pour la plupart par les termes T_{ij6} non nuls de la matrice T , et aberrations géométriques).

Ceci étant dit, en utilisant la relation précédente ainsi que les équations 3.4 et 3.5, on obtient dans ce cas bien précis

$$\begin{cases} \langle X \rangle(s) = \delta X(s) + R(s) \langle X \rangle(0) \\ \Sigma(s) = R(s) \Sigma(0) \tilde{R}(s) . \end{cases} \quad (3.7)$$

D'après la première de ces deux relations, les vecteurs $\langle X \rangle(s)$ et $\delta X(s)$ sont donc égaux lorsque le faisceau est centré sur l'axe en début de ligne (c.-à-d. $\langle X \rangle(0) = 0$), d'où la même appellation souvent utilisée pour ces deux quantités.

3.1.2 Interprétation des erreurs dans la matrice R en terme de coefficients de couplage dans la matrice faisceau

Hypothèses de travail et notations

On désigne par R_0 la matrice $R^{(0)}(s^*)$ relative à la ligne idéale et par Σ_0 la matrice faisceau à l'entrée de la ligne. Dans toute la suite de cette section, on supposera que la matrice $\Sigma_0^* \stackrel{\text{def}}{=} R_0 \Sigma_0 \tilde{R}_0$ est une matrice diagonale (qui n'est ni plus ni moins que la matrice faisceau au point de collision calculée dans le cadre de l'approximation linéaire):

$$\Sigma_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag} \left(\sigma_{x_0}^{*2} ; \sigma_{x'_0}^{*2} ; \sigma_{y_0}^{*2} ; \sigma_{y'_0}^{*2} ; \sigma_{z_0}^{*2} ; \sigma_{\delta_0}^{*2} \right) \quad (3.8)$$

où $\sigma_{x_0}^*$, $\sigma_{y_0}^*$, $\sigma_{x'_0}^*$, $\sigma_{y'_0}^*$, $\sigma_{z_0}^*$ $\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_z$ et $\sigma_{\delta_0}^*$ $\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_\delta$ représentent respectivement la taille faisceau horizontale et verticale, la divergence faisceau horizontale et verticale, la longueur du faisceau et sa dispersion en énergie au point d'interaction (valeurs *RMS*) et dans le cas de la ligne idéale. On définit également les cinq quantités suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le rapport d'aspect à l'IP} \\ \text{les fonctions } \beta \text{ horiz. et vert. à l'IP:} \\ \text{les rapports longueur du paquet} \\ \text{sur fonctions } \beta \text{ à l'IP} \end{array} \right. : \begin{array}{l} R_{asp} = \frac{\sigma_{x_0}^*}{\sigma_{y_0}^*} \\ \beta_x^* = \frac{\sigma_{x_0}^*}{\sigma_{x'_0}^*} \quad \beta_y^* = \frac{\sigma_{y_0}^*}{\sigma_{y'_0}^*} \\ A_x = \frac{\sigma_z \sigma_{x'_0}^*}{\sigma_{x_0}^*} = \frac{\sigma_z}{\beta_x^*} \quad A_y = \frac{\sigma_z \sigma_{y'_0}^*}{\sigma_{y_0}^*} = \frac{\sigma_z}{\beta_y^*} \end{array} . \quad (3.9)$$

On note enfin $R \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{1} + \delta Q) R_0$ la matrice de transfert de la ligne réelle (c.-à-d. avec erreurs). Comme R et R_0 appartiennent toutes deux au sous-groupe G de Sp_6 défini à la sous-section 1.3.4, il en est donc de même pour la matrice $\mathbf{1} + \delta Q = R R_0^{-1}$. Par conséquent, si l'on reprend la relation 1.46, on obtient

$$\delta Q = \exp(\Theta) - \mathbf{1} = \Theta + \frac{\Theta^2}{2} + \dots \quad \text{avec} \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_7 & \theta_8 & 0 & \theta_{11} \\ \theta_3 & -\theta_1 & \theta_9 & \theta_{10} & 0 & \theta_{12} \\ -\theta_{10} & \theta_8 & \theta_4 & \theta_5 & 0 & \theta_{13} \\ \theta_9 & -\theta_7 & \theta_6 & -\theta_4 & 0 & \theta_{14} \\ -\theta_{12} & \theta_{11} & -\theta_{14} & \theta_{13} & 0 & \theta_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q_{11} = \theta_1 + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2 \theta_3 - \theta_7 \theta_{10} + \theta_8 \theta_9) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{33} = \theta_4 + \frac{1}{2} (\theta_4^2 + \theta_5 \theta_6 - \theta_7 \theta_{10} + \theta_8 \theta_9) + \circ(\theta^3) \\ \delta Q_{22} = -\theta_1 + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2 \theta_3 - \theta_7 \theta_{10} + \theta_8 \theta_9) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{44} = -\theta_4 + \frac{1}{2} (\theta_4^2 + \theta_5 \theta_6 - \theta_7 \theta_{10} + \theta_8 \theta_9) + \circ(\theta^3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q_{12} = \theta_2 + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{34} = \theta_5 + \circ(\theta^3) \\ \delta Q_{21} = \theta_3 + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{43} = \theta_6 + \circ(\theta^3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q_{13} = \theta_7 + \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_7 + \theta_2 \theta_9 + \theta_4 \theta_7 + \theta_6 \theta_8) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{42} = -\theta_7 + \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_7 + \theta_2 \theta_9 + \theta_4 \theta_7 + \theta_6 \theta_8) + \circ(\theta^3) \\ \delta Q_{14} = \theta_8 + \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_8 + \theta_2 \theta_{10} - \theta_4 \theta_8 + \theta_5 \theta_7) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{32} = \theta_8 - \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_8 + \theta_2 \theta_{10} - \theta_4 \theta_8 + \theta_5 \theta_7) + \circ(\theta^3) \\ \delta Q_{23} = \theta_9 - \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_9 - \theta_3 \theta_7 - \theta_4 \theta_9 - \theta_6 \theta_{10}) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{41} = \theta_9 + \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_9 - \theta_3 \theta_7 - \theta_4 \theta_9 - \theta_6 \theta_{10}) + \circ(\theta^3) \\ \delta Q_{24} = \theta_{10} - \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_{10} - \theta_3 \theta_8 + \theta_4 \theta_{10} - \theta_5 \theta_9) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{31} = -\theta_{10} - \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_{10} - \theta_3 \theta_8 + \theta_4 \theta_{10} - \theta_5 \theta_9) + \circ(\theta^3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q_{16} = \theta_{11} + \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_{11} + \theta_2 \theta_{12} + \theta_7 \theta_{13} + \theta_8 \theta_{14}) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{52} = \theta_{11} - \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_{11} + \theta_2 \theta_{12} + \theta_7 \theta_{13} + \theta_8 \theta_{14}) + \circ(\theta^3) \\ \delta Q_{26} = \theta_{12} - \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_{12} - \theta_3 \theta_{11} - \theta_9 \theta_{13} - \theta_{10} \theta_{14}) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{51} = -\theta_{12} - \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_{12} - \theta_3 \theta_{11} - \theta_9 \theta_{13} - \theta_{10} \theta_{14}) + \circ(\theta^3) \\ \delta Q_{36} = \theta_{13} + \frac{1}{2} (\theta_4 \theta_{13} + \theta_5 \theta_{14} + \theta_8 \theta_{12} - \theta_{10} \theta_{11}) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{54} = \theta_{13} - \frac{1}{2} (\theta_4 \theta_{13} + \theta_5 \theta_{14} + \theta_8 \theta_{12} - \theta_{10} \theta_{11}) + \circ(\theta^3) \\ \delta Q_{46} = \theta_{14} - \frac{1}{2} (\theta_4 \theta_{14} - \theta_6 \theta_{13} + \theta_7 \theta_{12} - \theta_9 \theta_{11}) + \circ(\theta^3) \quad \delta Q_{53} = -\theta_{14} - \frac{1}{2} (\theta_4 \theta_{14} - \theta_6 \theta_{13} + \theta_7 \theta_{12} - \theta_9 \theta_{11}) + \circ(\theta^3) \end{array} \right.$$

$$\delta Q_{56} = \theta_{15} + \circ(\theta^3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q_{15} = \delta Q_{25} = \delta Q_{35} = \delta Q_{45} = \delta Q_{55} = \delta Q_{65} = 0 \\ \delta Q_{61} = \delta Q_{62} = \delta Q_{63} = \delta Q_{64} = \delta Q_{65} = \delta Q_{66} = 0. \end{array} \right.$$

(3.10)

Coefficients de couplage et grossissements des tailles faisceau au point de collision

Le chapitre 2 a été consacré à l'étude d'une ligne optique quelconque présentant certains défauts pour ce qui est de la position et du champ magnétique des différents aimants qui la constituent. L'effet de ces défauts a alors été analysé en terme de fluctuations de certaines quantités relatives au *mapping* \mathcal{M} qui définit le transport d'un faisceau quelconque le long de la ligne considérée, à savoir l'*offset* δX ainsi que les matrices R , T et U . En particulier, selon le type d'erreur envisagée, certains coefficients de la matrice $\delta Q \stackrel{\text{def}}{=} RR_0^{-1} - \mathbf{1}$ prennent des valeurs non nulles dont l'effet sur le faisceau au point d'interaction dépend évidemment des caractéristiques qu'il avait à l'entrée de la ligne (matrice faisceau initiale Σ_0) ainsi que des spécifications de la ligne idéale (matrice R_0).

Afin d'analyser quantitativement ces effets, nous nous plaçons sous l'hypothèse faite au paragraphe précédent (matrice $\Sigma_0^* \stackrel{\text{def}}{=} R_0 \Sigma_0 \tilde{R}_0$ diagonale) puis nous considérons une ligne optique non idéale pour laquelle la matrice δQ est donnée et dont les coefficients vérifient les relations 3.10. Nous définissons alors la matrice suivante:

$$\Sigma^* = R \Sigma_0 \tilde{R} = R R_0^{-1} \Sigma_0^* \tilde{R}_0^{-1} \tilde{R} = (\mathbf{1} + \delta Q) \Sigma_0^* (\mathbf{1} + \widetilde{\delta Q}) . \quad (3.11)$$

Dans le cas d'un transport linéaire, Σ_0^* (resp. Σ^*) représente donc la matrice faisceau au point d'interaction après transport le long de la ligne idéale (resp. le long de la ligne avec erreurs géométriques et erreurs de champ). Cependant, on admet que la disposition des différents éléments optiques le long de la ligne est telle que l'effet des aberrations sur la distribution du faisceau au point d'interaction a pu être minimisé (se référer au chapitre 4 pour le cas de la ligne de focalisation finale de TESLA). En d'autres termes, ceci signifie que le faisceau se transporte globalement de façon linéaire de l'entrée de la ligne jusqu'au point d'interaction de sorte que les matrices Σ_0^* ou Σ^* définissent effectivement les matrices faisceau au point de collision pour les cas de la ligne idéale ou de la ligne avec défauts.

Ceci étant dit, on obtient donc

$$\Sigma^* = \Sigma_0^* + \delta \Sigma^* \quad \text{avec} \quad \delta \Sigma^* = \delta Q \Sigma_0^* + \Sigma_0^* \widetilde{\delta Q} + \delta Q \Sigma_0^* \widetilde{\delta Q} . \quad (3.12)$$

En utilisant l'équation précédente, les définitions 3.8 et 3.9 ainsi que les relations 3.10, on est donc capable d'évaluer les fluctuations de la matrice faisceau au point d'interaction à l'ordre 1 en δQ ou en Θ .

- Fluctuations des tailles transverses et de la divergence angulaire du faisceau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta\sigma_x^*}{\sigma_{x_0}^*} = \sqrt{1 + \delta\Sigma_{11}^*/\sigma_{x_0}^{*2}} - 1 = \delta Q_{11} + \circ(2) = \theta_1 + \circ(2) \quad \frac{\delta\sigma_{x'}^*}{\sigma_{x'_0}^*} = \sqrt{1 + \delta\Sigma_{22}^*/\sigma_{x'_0}^{*2}} - 1 = -\delta Q_{11} + \circ(2) = -\theta_1 + \circ(2) \\ \frac{\delta\sigma_y^*}{\sigma_{y_0}^*} = \sqrt{1 + \delta\Sigma_{33}^*/\sigma_{y_0}^{*2}} - 1 = \delta Q_{33} + \circ(2) = \theta_4 + \circ(2) \quad \frac{\delta\sigma_{y'}^*}{\sigma_{y'_0}^*} = \sqrt{1 + \delta\Sigma_{44}^*/\sigma_{y'_0}^{*2}} - 1 = -\delta Q_{33} + \circ(2) = -\theta_4 + \circ(2) . \end{array} \right.$$

- Couplages $(x-x')$ et $(y-y')$:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{xp_x}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{12}^*}{\sqrt{\Sigma_{11}^*}\sqrt{\Sigma_{22}^*}} = \frac{\delta\Sigma_{12}^*}{(\sigma_{x_0}^* + \delta\sigma_x^*)(\sigma_{x'_0}^* + \delta\sigma_{x'}^*)} = \frac{\delta Q_{12}}{\beta_x^*} + \beta_x^* \delta Q_{21} + \circ(2) = \frac{\theta_2}{\beta_x^*} + \beta_x^* \theta_3 + \circ(2) \\ r_{yp_y}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{34}^*}{\sqrt{\Sigma_{33}^*}\sqrt{\Sigma_{44}^*}} = \frac{\delta\Sigma_{34}^*}{(\sigma_{y_0}^* + \delta\sigma_y^*)(\sigma_{y'_0}^* + \delta\sigma_{y'}^*)} = \frac{\delta Q_{34}}{\beta_y^*} + \beta_y^* \delta Q_{43} + \circ(2) = \frac{\theta_5}{\beta_y^*} + \beta_y^* \theta_6 + \circ(2) . \end{array} \right.$$

Ces deux coefficients de couplage s'interprètent en terme de dérive du nœud de la fonction β au point d'interaction, ou *waist-shift* (se reporter par exemple à la référence [16] pour ce qui est de la théorie des fonctions β). En effet, dans le *design* de la ligne idéale, le point de collision correspond à un minimum des fonctions β_x et β_y (afin d'obtenir des tailles transverses de faisceau aussi petites que possible), soit $\beta_{x,y}^* = \beta_{x,y}^{\min}$ et $\{\alpha_x^* \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{12}^* = 0, \alpha_y^* \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{34}^* = 0\}$. Dès lors, lorsque les paramètres de Twiss α_x^* et α_y^* prennent des valeurs non nulles, les minima des fonctions β_x et β_y se retrouvent décalés par rapport au point d'interaction. Attachons-nous par exemple au *waist-shift* horizontal noté δz_x^* . Pour ce faire, on désigne par D_x la matrice R du *drift* de longueur δz_x^* et par Σ_x^* la sous-matrice 2×2 de Σ^* :

$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & \delta z_x^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma_x^* = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^* & \Sigma_{12}^* \\ \Sigma_{21}^* & \Sigma_{22}^* \end{pmatrix} .$$

La fonction β_x présente donc un nœud à l'abscisse $s^* + \delta z_x^*$ si et seulement si la matrice $D_x \Sigma_x^* \overline{D_x}$ est diagonale, soit $\delta z_x^* = -\Sigma_{12}^*/\Sigma_{22}^* = -\sqrt{\Sigma_{11}^*/\Sigma_{22}^*} r_{xp_x}^* \approx -\beta_x^* r_{xp_x}^*$, d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta z_x^*}{\beta_x^*} = -r_{xp_x}^* + \circ(2) = -\frac{\delta Q_{12}}{\beta_x^*} - \beta_x^* \delta Q_{21} + \circ(2) = -\frac{\theta_2}{\beta_x^*} - \beta_x^* \theta_3 + \circ(2) \\ \frac{\delta z_y^*}{\beta_y^*} = -r_{yp_y}^* + \circ(2) = -\frac{\delta Q_{34}}{\beta_y^*} - \beta_y^* \delta Q_{43} + \circ(2) = -\frac{\theta_5}{\beta_y^*} - \beta_y^* \theta_6 + \circ(2) . \end{array} \right.$$

- Couplages $(x-y)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{xy}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{13}^*}{\sqrt{\Sigma_{11}^*}\sqrt{\Sigma_{33}^*}} = \frac{\delta Q_{13}}{R_{asp}} + R_{asp} \delta Q_{31} + \circ(2) = \frac{\theta_7}{R_{asp}} - R_{asp} \theta_{10} + \circ(2) \\ r_{p_x p_y}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{24}^*}{\sqrt{\Sigma_{22}^*}\sqrt{\Sigma_{44}^*}} = \frac{\beta_y^*}{\beta_x^*} R_{asp} \delta Q_{42} + \frac{\beta_x^*}{\beta_y^*} \frac{\delta Q_{24}}{R_{asp}} + \circ(2) = -\frac{\beta_y^*}{\beta_x^*} R_{asp} \theta_7 + \frac{\beta_x^*}{\beta_y^*} \frac{\theta_{10}}{R_{asp}} + \circ(2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{xpy}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{14}^*}{\sqrt{\Sigma_{11}^*} \sqrt{\Sigma_{44}^*}} = \frac{\delta Q_{14}}{R_{asp} \beta_y^*} + R_{asp} \beta_y^* \delta Q_{41} + \circ(2) = \frac{\theta_8}{R_{asp} \beta_y^*} + R_{asp} \beta_y^* \theta_9 + \circ(2) \\ r_{ypx}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{23}^*}{\sqrt{\Sigma_{22}^*} \sqrt{\Sigma_{33}^*}} = \frac{R_{asp}}{\beta_x^*} \delta Q_{32} + \frac{\beta_x^*}{R_{asp}} \delta Q_{23} + \circ(2) = \frac{R_{asp}}{\beta_x^*} \theta_8 + \frac{\beta_x^*}{R_{asp}} \theta_9 + \circ(2) . \end{array} \right.$$

- Couplages des plans $(x-x')$ et $(y-y')$ avec le plan $(z-\delta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{x\delta}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{16}^*}{\sqrt{\Sigma_{11}^*} \sqrt{\Sigma_{66}^*}} = \frac{\sigma_\delta}{\sigma_{x_0}^*} \delta Q_{16} + \circ(2) = \frac{\sigma_\delta}{\sigma_{x_0}^*} \theta_{11} + \circ(2) \quad r_{y\delta}^* = \frac{\sigma_\delta}{\sigma_{y_0}^*} \delta Q_{36} + \circ(2) = \frac{\sigma_\delta}{\sigma_{y_0}^*} \theta_{13} + \circ(2) \\ r_{px\delta}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{26}^*}{\sqrt{\Sigma_{22}^*} \sqrt{\Sigma_{66}^*}} = \frac{\sigma_\delta \beta_x^*}{\sigma_{x_0}^*} \delta Q_{26} + \circ(2) = \frac{\sigma_\delta \beta_x^*}{\sigma_{x_0}^*} \theta_{12} + \circ(2) \quad r_{py\delta}^* = \frac{\sigma_\delta \beta_y^*}{\sigma_{y_0}^*} \delta Q_{46} + \circ(2) = \frac{\sigma_\delta \beta_y^*}{\sigma_{y_0}^*} \theta_{14} + \circ(2) \\ r_{xDt}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{15}^*}{\sqrt{\Sigma_{11}^*} \sqrt{\Sigma_{55}^*}} = \frac{\sigma_{x_0}^*}{\sigma_z} \delta Q_{15} + \circ(2) = -\frac{\sigma_{x_0}^*}{\sigma_z} \theta_{12} + \circ(2) \quad r_{yDt}^* = \frac{\sigma_{y_0}^*}{\sigma_z} \delta Q_{35} + \circ(2) = -\frac{\sigma_{y_0}^*}{\sigma_z} \theta_{14} + \circ(2) \\ r_{p_xDt}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{25}^*}{\sqrt{\Sigma_{22}^*} \sqrt{\Sigma_{55}^*}} = \frac{\sigma_{x_0}^*}{\beta_x^* \sigma_z} \delta Q_{25} + \circ(2) = \frac{\sigma_{x_0}^*}{\beta_x^* \sigma_z} \theta_{11} + \circ(2) \quad r_{p_yDt}^* = \frac{\sigma_{y_0}^*}{\beta_y^* \sigma_z} \delta Q_{45} + \circ(2) = \frac{\sigma_{y_0}^*}{\beta_y^* \sigma_z} \theta_{13} + \circ(2) . \end{array} \right.$$

Les éléments de matrice δQ_{16} , δQ_{26} , δQ_{36} , δQ_{46} sont communément appelés dispersion horizontale, dispersion angulaire horizontale, dispersion verticale et dispersion angulaire verticale; ils sont notés respectivement D_x^* , $D_{p_x}^*$, D_y^* et $D_{p_y}^*$.

- Couplage $(z-\delta)$:

$$r_{Dt\delta}^* = \frac{\sigma_\delta}{\sigma_z} \delta Q_{56} + \circ(2) = \frac{\sigma_\delta}{\sigma_z} \theta_{15} + \circ(2) .$$

En conclusion, les couples (θ_2, θ_3) et (θ_5, θ_6) engendrent respectivement un *waist-shift* horizontal et un *waist-shift* vertical, les couples (θ_7, θ_{10}) et (θ_8, θ_9) sont à l'origine des couplages respectifs $[(x-y), (p_x-p_y)]$ et $[(x-p_y), (y-p_x)]$; enfin, les coefficients de couplage $(r_{x\delta}, r_{p_xDt})$, $(r_{px\delta}, r_{xDt})$, $(r_{y\delta}, r_{p_yDt})$, $(r_{py\delta}, r_{yDt})$ et $r_{Dt\delta}$ sont engendrés respectivement par les termes dispersifs θ_{11} , θ_{12} , θ_{13} , θ_{14} et θ_{15} . Les angles θ_1 et θ_4 , quant à eux, sont responsables des fluctuations à l'ordre 1 des tailles transverses du faisceau au point d'interaction et c'est précisément ces deux quantités qu'il faut à tout prix contrôler. Par exemple, pour ce qui concerne les fluctuations de la taille faisceau horizontale, on a en reprenant les calculs précédents

$$\frac{\delta \sigma_x^*}{\sigma_{x_0}^*} = \theta_1 + \circ(2) = \sum_i \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \epsilon_i} \right)_{\epsilon_i=0} \delta \epsilon_i + \circ(2)$$

où ϵ_i est un nom générique choisi pour désigner les défauts de la ligne. En conséquence, si l'on suppose que ces défauts possèdent une moyenne statistique nulle sur l'ensemble des configurations possibles de la ligne, on a avec des notations évidentes

$$\left\langle \frac{\delta \sigma_x^*}{\sigma_{x_0}^*} \right\rangle_{\text{configurations de la ligne}} = \circ(2)$$

et on est donc dans l'incapacité de dériver quelque tolérance que ce soit sur la magnitude des erreurs de la ligne. Par conséquent, le calcul des quantités $\delta\sigma_x^*/\sigma_{x_0}^*$ et $\delta\sigma_y^*/\sigma_{y_0}^*$ doit être poussé au moins jusqu'à l'ordre 2 en fonction des coefficients de la matrice δQ (ou de la matrice Θ). Ainsi, en utilisant complètement la relation 3.12, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta\sigma_x^*}{\sigma_{x_0}^*} = \sqrt{1 + \delta\Sigma_{11}^*/\sigma_{x_0}^{*2}} - 1 = \delta Q_{11} + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\delta Q_{12}^2}{\beta_x^{*2}}}_{\text{effets du waist-shift}} + \underbrace{\frac{\delta Q_{13}^2}{R_{asp}^2}}_{\text{effets du couplage (x-y)}} + \underbrace{\frac{\delta Q_{14}^2}{R_{asp}^2 \beta_y^{*2}}}_{\text{effets des couplages (x-px) ou (y-px)}} + \underbrace{\frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_{x_0}^{*2}} \delta Q_{16}^2}_{\text{effets dispersifs}} \right) + \circ(\delta Q^3) \\ \frac{\delta\sigma_y^*}{\sigma_{y_0}^*} = \sqrt{1 + \delta\Sigma_{33}^*/\sigma_{y_0}^{*2}} - 1 = \delta Q_{33} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta Q_{34}^2}{\beta_y^{*2}} + R_{asp}^2 \delta Q_{31}^2 + \frac{R_{asp}^2}{\beta_x^{*2}} \delta Q_{32}^2 + \frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_{y_0}^{*2}} \delta Q_{36}^2 \right) + \circ(\delta Q^3) . \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Un calcul à l'ordre 2 des tailles faisceau transverses au point d'interaction nécessite donc impérativement la connaissance des termes δQ_{11} et δQ_{33} à ce même ordre dans les erreurs de la ligne. Les développements effectués au chapitre précédent, en particulier le calcul de la matrice R à l'ordre 2 dans les défauts de la ligne, se justifient donc complètement. Ainsi, comme annoncé à la sous-section 1.3.3, un calcul à l'ordre 1 aurait été bien plus simple mais insuffisant pour l'objectif que l'on se fixe ici, c'est à dire pour l'obtention d'un développement des quantités $\delta\sigma_x^*/\sigma_{x_0}^*$ et $\delta\sigma_y^*/\sigma_{y_0}^*$ à l'ordre 2 dans les erreurs de la ligne.

3.1.3 Effets des aberrations

Pour finir, on s'intéresse ici à l'effet des aberrations sur les moments d'ordre 1 et 2 de la distribution du faisceau au point d'interaction, moments contenus dans les quantités $\langle X \rangle^* \stackrel{\text{def}}{=} \langle X \rangle(s^*)$ et $\Sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \langle X \widetilde{X} \rangle(s^*) - \langle X \rangle^* \langle \widetilde{X} \rangle^*$. Par souci de simplification, on suppose dans un premier temps que la distribution initiale ρ_0 est symétrique par rapport au point $X = 0$ de sorte que le faisceau est centré à l'entrée de la ligne ($\langle X \rangle(0) = 0$) et que les moments d'ordre impair sur la distribution ρ_0 sont tous nuls. En utilisant l'équation 3.4 ainsi que les notations du chapitre 1 définissant les quantités δX^* , R^* , T^* et U^* à partir du *mapping* $\mathcal{M}(s^*)$ (équation 1.42, sous-section 1.3.2), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle X_i \rangle^* = \langle \mathcal{M}_i(X; s^*) \rangle(0) \\ = \delta X_i^* + T_{ikl}^* \langle X_k X_l \rangle(0) + \circ(4) \\ \Sigma_{ij}^* = \langle \mathcal{M}_i(X; s^*) \mathcal{M}_j(X; s^*) \rangle(0) - \langle X_i \rangle^* \langle X_j \rangle^* \\ = R_{ik}^* R_{jl}^* \langle X_k X_l \rangle(0) + T_{ikl}^* T_{jmn}^* \left(\langle X_k X_l X_m X_n \rangle(0) - \langle X_k X_l \rangle(0) \langle X_m X_n \rangle(0) \right) + \\ \left(R_{ik}^* U_{jlmn}^* + R_{jk}^* U_{ilmn}^* \right) \langle X_k X_l X_m X_n \rangle(0) + \circ(6) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

où l'on somme sur les indices muets répétés deux fois. Les moments d'ordre 2 apparaissant dans cette expression sont alors simplement donnés par les éléments de matrice de Σ_0 ,

$$\langle X_k X_l \rangle(0) = \Sigma_{0_{kl}} ,$$

puisque le faisceau est supposé centré sur l'axe à l'entrée de la ligne. Dans le but d'évaluer les moments d'ordre 4, nous faisons l'hypothèse supplémentaire que la distribution ρ_0 est Gaussienne de sorte que

$$\langle X_k X_l X_m X_n \rangle(0) = \Sigma_{0_{kl}} \Sigma_{0_{mn}} + \Sigma_{0_{km}} \Sigma_{0_{ln}} + \Sigma_{0_{kn}} \Sigma_{0_{lm}} .$$

Ainsi, en utilisant également la symétrie des matrices T et U , respectivement par rapport à leurs deux et trois derniers indices, on obtient finalement

$$\begin{cases} \langle X_i \rangle^* &= \delta X_i^* + T_{ikl}^* \Sigma_{0_{kl}} + \circ(\Sigma_0^2) \\ \Sigma_{ij}^* &= R_{ik}^* R_{jl}^* \Sigma_{0_{kl}} + \left(2 T_{ikm}^* T_{jln}^* + 3 \left(R_{ik}^* U_{jlmn}^* + R_{jk}^* U_{ilmn}^* \right) \right) \Sigma_{0_{kl}} \Sigma_{0_{mn}} + \circ(\Sigma_0^3) . \end{cases} \quad (3.15)$$

Comme attendu, on note au passage que le terme $R_{ik}^* R_{jl}^* \Sigma_{0_{kl}}$ dans la seconde relation n'est ni plus ni moins que le coefficient (i, j) de la matrice $R^* \Sigma_0 \tilde{R}^*$, c.-à-d. de la matrice faisceau au point d'interaction calculée en négligeant l'effet des aberrations (équation 3.11). Enfin, pour ce qui est de la ligne idéale, les deux relations précédentes se simplifient ($\delta X^* = 0$) et on a

$$\begin{cases} (\Delta X)_i^{aber} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle X_i \rangle^*}{\sqrt{\Sigma_{0_{ii}}^*}} = \frac{T_{0_{ikl}} \Sigma_{0_{kl}}}{\sqrt{R_{0_{im}} R_{0_{in}} \Sigma_{0_{mn}}}} + \circ(\Sigma_0^{3/2}) \\ (\Delta \Sigma)_{ij}^{aber} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma_{ij}^* - \Sigma_{0_{ij}}^*}{\sqrt{\Sigma_{0_{ii}}^*} \sqrt{\Sigma_{0_{jj}}^*}} \\ = \frac{2 T_{0_{ikm}} T_{0_{jln}} + 3 \left(R_{0_{ik}} U_{0_{jlmn}} + R_{0_{jk}} U_{0_{ilmn}} \right)}{\sqrt{R_{0_{ip}} R_{0_{iq}} R_{0_{jr}} R_{0_{js}} \Sigma_{0_{pq}} \Sigma_{0_{rs}}}} \Sigma_{0_{kl}} \Sigma_{0_{mn}} + \circ(\Sigma_0^2) \end{cases} \quad (3.16)$$

où $T_0 \stackrel{\text{def}}{=} T^{(0)}(s^*)$ et $U_0 \stackrel{\text{def}}{=} U^{(0)}(s^*)$.

Le problème qui se pose désormais est de comparer ces effets à ceux qui sont engendrés par les défauts de la ligne. La comparaison dépend évidemment des caractéristiques de la ligne idéale et de celle du faisceau (plus la distribution 6-dimensionnelle du faisceau est piquée autour de zéro, plus l'effet des aberrations devient petit pour une ligne optique donnée ou, plus précisément, l'effet des aberrations est nul à émittance nulle). Le traitement du cas général est donc ardu et nous nous restreignons ici à la situation relative aux paramètres faisceau de TESLA et à sa ligne de focalisation finale (chapitre 4). Pour ce faire, nous

tenons le raisonnement exposé ci-après. L'estimation des tolérances sur les différents types d'erreurs de la ligne sera faite en imposant à certaines quantités relatives au faisceau de fluctuer en deçà de 2% (voir section 3.3). Ces quantités seront typiquement soit les tailles faisceau transverses au point d'interaction calculées à partir de l'hypothèse d'un transport linéaire (cf. équation 3.13), soit la luminosité géométrique (cf. sous-section 3.2.2). Maintenant, si l'évaluation numérique des quantités $(\Delta X)_i^{aber}$ et $(\Delta \Sigma)_{ij}^{aber}$ (relations 3.16) donne des valeurs en deçà du pour-cent, on pourra affirmer à posteriori que les aberrations ont une influence quasi nulle sur un calcul de tolérances effectué dans l'hypothèse d'un transport linéaire. Ceci sera parfaitement vérifié au prochain chapitre: l'ordre de grandeur de l'effet des aberrations sera estimé à "quelques 10^{-4} " pour ce qui concerne la ligne de focalisation finale de TESLA, ligne dans laquelle les aberrations chromatiques ont été annulées à l'ordre 2 à l'aide d'hexapôles (annulation des coefficients $T_{0_{126}}$ et $T_{0_{346}}$ qui sont en général les plus dangereux) et où les aberrations géométriques sont également nulles au second ordre (les paires d'hexapôles étant séparées les unes des autres par des avances de phases exactement égales à π [16]).

3.2 Luminosité

A la section précédente, nous avons tenté d'analyser les erreurs de la ligne par leurs influences sur deux quantités concernant le faisceau au point d'interaction, à savoir sa position moyenne $\langle X \rangle^*$ et la matrice faisceau Σ^* . Dans cette nouvelle section, nous nous intéresserons à une troisième quantité: la luminosité au point de collision.

3.2.1 Préliminaires

Le problème qui se pose ici est de définir la luminosité lors de la collision de deux faisceaux possédant une distribution quelconque au point d'interaction. Dans un référentiel donné, le taux d'interaction entre deux paquets monocinétiques de particules, de vecteur vitesse respectif \vec{v}_1 et \vec{v}_2 et de distribution $\rho_1(\vec{x}, t)$ et $\rho_2(\vec{x}, t)$, est déjà bien connu [17] et donné par

$$\frac{d^2 N}{dV dt} = \sigma \rho_1(\vec{x}, t) \rho_2(\vec{x}, t) \left[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \frac{d\mathbf{L}}{dV} \quad (3.17)$$

où σ est la section efficace de collision (invariante de Lorentz [17]), où dV représente l'élément de volume où l'interaction a lieu et où \mathbf{L} désigne la luminosité. La luminosité, $\overline{\mathbf{L}}$,

intégrée sur tout le volume et toute la durée de l'interaction est alors définie par

$$\bar{\mathbf{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{\sigma} = \frac{1}{c} \int d\mathbf{x} \rho_1(\mathbf{x}) \rho_2(\mathbf{x}) \left[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (ct, \vec{x}) . \quad (3.18)$$

On se propose ici, d'une part de redériver l'équation 3.17, d'autre part de généraliser la relation 3.18 au cas de deux paquets non monocinétiques au point d'interaction.

On considère donc deux paquets de particules de densité de charge $\rho_{1,2}(\mathbf{x})$ et de densité de courant $\vec{j}_{1,2}(\mathbf{x})$ données par

$$\rho_{1,2}(\mathbf{x}) = \sum_{i_{1,2}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{i_{1,2}}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_{1,2}} \rho_{i_{1,2}}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \vec{j}_{1,2}(\mathbf{x}) = \sum_{i_{1,2}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{i_{1,2}}(t)) \vec{v}_{i_{1,2}}(t)$$

où $\vec{x}_{i_{1,2}}(t)$ et $\vec{v}_{i_{1,2}}(t)$ sont respectivement les trajectoires et les vitesses des particules i_1 et i_2 des faisceaux 1 et 2 dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire (référentiel du centre de masse des deux faisceaux). Nous supposons en outre que le domaine d'interaction est situé dans une région où les vitesses des particules ne fluctuent pas en fonction du temps (*drift*) et nous définissons comme suit les distributions généralisées vitesse–position des faisceaux 1 et 2:

$$\tilde{\rho}_{1,2}(\vec{x}, \vec{v}; t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_{1,2}} \rho_{i_{1,2}}(\mathbf{x}) \delta(\vec{v} - \vec{v}_{i_{1,2}}) = \sum_{i_{1,2}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{i_{1,2}}(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}_{i_{1,2}}) . \quad (3.19)$$

Enfin, on note $\mathbf{J}_{1,2}$ les deux quadrvecteurs de Lorentz associés aux distributions $\rho_{1,2}$ et donnés par

$$\mathbf{J}_{1,2}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} [\rho_{1,2}(\mathbf{x}) c, \vec{j}_{1,2}(\mathbf{x})] = \sum_{i_{1,2}} \mathbf{J}_{i_{1,2}} \quad \text{où } \mathbf{J}_{i_{1,2}} \stackrel{\text{def}}{=} [\rho_{i_{1,2}} c, \rho_{i_{1,2}} \vec{v}_{i_{1,2}}] .$$

Les quantités $(\mathbf{J}_{i_1} \cdot \mathbf{J}_{i_2})^2 - \mathbf{J}_{i_1}^2 \mathbf{J}_{i_2}^2$ sont donc des scalaires de Lorentz qui, évalués dans le référentiel \mathcal{R} , donnent

$$(\mathbf{J}_{i_1} \cdot \mathbf{J}_{i_2})^2 - \mathbf{J}_{i_1}^2 \mathbf{J}_{i_2}^2 = \rho_{i_1}^2 \rho_{i_2}^2 c^2 \left[(\vec{v}_{i_1} - \vec{v}_{i_2})^2 - \frac{(\vec{v}_{i_1} \wedge \vec{v}_{i_2})^2}{c^2} \right] . \quad (3.20)$$

Au point $\mathbf{x} = (ct, \vec{x})$ dans le référentiel \mathcal{R} , on note $d^4\mathcal{P}_{i_1 i_2}(\mathbf{x})$ la probabilité que les particules i_1 et i_2 , de vitesse respective \vec{v}_{i_1} et \vec{v}_{i_2} , interagissent dans le volume $d\mathbf{x} = c dt d^3\vec{x}$. On se place dans le référentiel \mathcal{R}' où la particule i_2 est au repos. On désigne par \vec{v}'_{i_1} le vecteur vitesse de la particule i_1 dans \mathcal{R}' . Dans ce référentiel, on obtient avec un raisonnement usuel

$$d^4\mathcal{P}_{i_1 i_2}(\mathbf{x}) = d^4\mathcal{P}'_{i_1 i_2}(\mathbf{x}') = \sigma(\vec{p}_{i_1}, \vec{p}_{i_2}) \rho'_{i_1}(\mathbf{x}') \rho'_{i_2}(\mathbf{x}') \|\vec{v}'_{i_1}\| d^3\vec{x}' dt'$$

où $\mathbf{x}' = (ct', \vec{x}')$ est le point transformé de \mathbf{x} dans le changement de repère $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$, où $\rho'_{i_{1,2}}(\mathbf{x}')c$ désigne la première coordonnée du quadrivecteur $\mathbf{J}'_{i_{1,2}}(\mathbf{x}')$, transformée de Lorentz de $\mathbf{J}_{i_{1,2}}(\mathbf{x})$ dans ce changement de repère, et où $\sigma(\vec{p}_{i_1}, \vec{p}_{i_2})$ représente la section efficace de collision de deux particules de type 1 et 2, avec pour conditions initiales les impulsions respectives \vec{p}_{i_1} et \vec{p}_{i_2} dans le référentiel du laboratoire (on rappelle que σ est invariante de Lorentz). Mais,

$$\left\{ \begin{array}{l} d^3 \vec{x}' dt' = d^3 \vec{x} dt \\ \rho'_{i_1}(\mathbf{x}') \rho'_{i_2}(\mathbf{x}') \|\vec{v}'_{i_1}\| = \frac{1}{c} \left[(\mathbf{J}'_{i_1} \cdot \mathbf{J}'_{i_2})^2 - \mathbf{J}'_{i_1} \mathbf{J}'_{i_2} \right]^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}') = \frac{1}{c} \left[(\mathbf{J}_{i_1} \cdot \mathbf{J}_{i_2})^2 - \mathbf{J}_{i_1}^2 \mathbf{J}_{i_2}^2 \right]^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) \\ = \rho_{i_1} \rho_{i_2} \left[(\vec{v}_{i_1} - \vec{v}_{i_2})^2 - \frac{(\vec{v}_{i_1} \wedge \vec{v}_{i_2})^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

d'où l'équation 3.17.

On fait dès lors les deux hypothèses suivantes.

- $\sigma(\vec{p}_{i_1}, \vec{p}_{i_2}) = \sigma = \mathbf{Cst}$: la section efficace de collision reste constante sur la plage de variation des conditions initiales d'impulsion des particules de type 1 et 2. Ceci est évidemment faux dans le cas général; une telle affirmation suppose donc que les distributions généralisées $\tilde{\rho}_{1,2}$ soient très piquées autour de leur valeur moyenne lors de la collision. Ceci est bien vérifié du point de vue de la physique des machines puisque l'un de ses objectifs premiers est de minimiser la dispersion en énergie du faisceau tout au long du linac ($\sim 10^{-3}$ pour TESLA avant la collision) ainsi que sa divergence angulaire au point d'interaction ($\sim 30\mu\text{rad}$ pour TESLA). Toutefois, la dispersion en énergie créée par *beamstrahlung* (c.-à-d. par le rayonnement synchrotron dû à l'interaction avec le champ électromagnétique cohérent du faisceau opposé au cours de la collision) est de l'ordre de 1 – 1.5 % (valeur *RMS*) pour les collisionneurs en dessous de 500 GeV. Cet effet limite donc de façon conséquente la définition précise des paramètres des faisceaux au point de collision et pose un problème délicat pour la mesure des largeurs en énergie des résonances attendues, en particulier pour l'étude de la physique du Top au seuil de production $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ (montée de la section efficace et estimation de sa masse à 100 MeV près [22]).
- Les probabilités $d^4\mathcal{P}_{i_1 i_2}(\mathbf{x})$ sont indépendantes, ce qui signifie en d'autres termes que le nombre total d'interactions entre les paquets 1 et 2 est égal à

$$N = \sum_{i_1 i_2} \int d^4\mathcal{P}_{i_1 i_2}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_1 i_2} \mathcal{P}_{i_1 i_2} . \quad (3.21)$$

Cependant, il est clair que lorsqu'une particule i_1 du faisceau 1 interagit successivement avec plusieurs particules du faisceau 2, disons deux particules i_2 et i_3 , les quantités $d^4\mathcal{P}_{i_1 i_2}$

et $d^4\mathcal{P}_{i_1i_3}$ ne peuvent plus s'additionner pour donner la probabilité totale d'interaction de i_1 avec le paquet 2. Quoiqu'il en soit, les probabilités relatives à ce type d'événement restent négligeables par rapport aux quantités $\mathcal{P}_{i_1i_2}$ (équation 3.21), en tout cas pour ce qui est des processus "intéressants" au point de collision, les sections efficaces rencontrées étant très faibles.

En reprenant les deux hypothèses précédentes ainsi que la définition 3.19 des distributions généralisées vitesse–position, on obtient donc, pour un processus donné, le nombre total d'interactions entre les faisceaux 1 et 2:

$$\begin{aligned} N &= \sigma \sum_{i_1i_2} \int d^4\mathcal{P}_{i_1i_2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int d\mathbf{x} \left(\sum_{i_1i_2} \rho_{i_1}(\mathbf{x}) \rho_{i_2}(\mathbf{x}) \left[(\vec{v}_{i_1} - \vec{v}_{i_2})^2 - \frac{(\vec{v}_{i_1} \wedge \vec{v}_{i_2})^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \sigma \int dt d^3\vec{x} d^3\vec{v}_1 d^3\vec{v}_2 \left\{ \tilde{\rho}_1(\vec{x}, \vec{v}_1; t) \tilde{\rho}_2(\vec{x}, \vec{v}_2; t) \left[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{\mathbf{L}} = \frac{N}{\sigma} = \int dt d^3\vec{x} d^3\vec{v}_1 d^3\vec{v}_2 \left\{ \tilde{\rho}_1(\vec{x}, \vec{v}_1; t) \tilde{\rho}_2(\vec{x}, \vec{v}_2; t) \left[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.22)$$

qui est une extension de la formule 3.18 au cas d'une collision de deux paquets de particules non monocinétiques.

3.2.2 La luminosité géométrique

Cette sous-section a pour but d'introduire ce qu'il est communément appelé la luminosité géométrique, c'est à dire la quantité $\bar{\mathbf{L}}$ définie précédemment mais calculée en ignorant l'effet dit de disruption des deux faisceaux au point de collision (*pinch effect*). Après avoir émis un certain nombre d'hypothèses (faisceaux Gaussiens ultra-relativistes, collision frontale, transport linéaire), nous dériverons une expression analytique pour la luminosité géométrique et, pour ce faire, nous nous inspirerons grandement du contenu de la référence [18].

Hypothèses de travail

Nous commençons ici par émettre un certain nombre d'hypothèses concernant les faisceaux 1 et 2 ainsi que leur transport le long des lignes optiques considérées.

- On suppose dans un premier temps que les deux faisceaux sont ultra-relativistes, soit

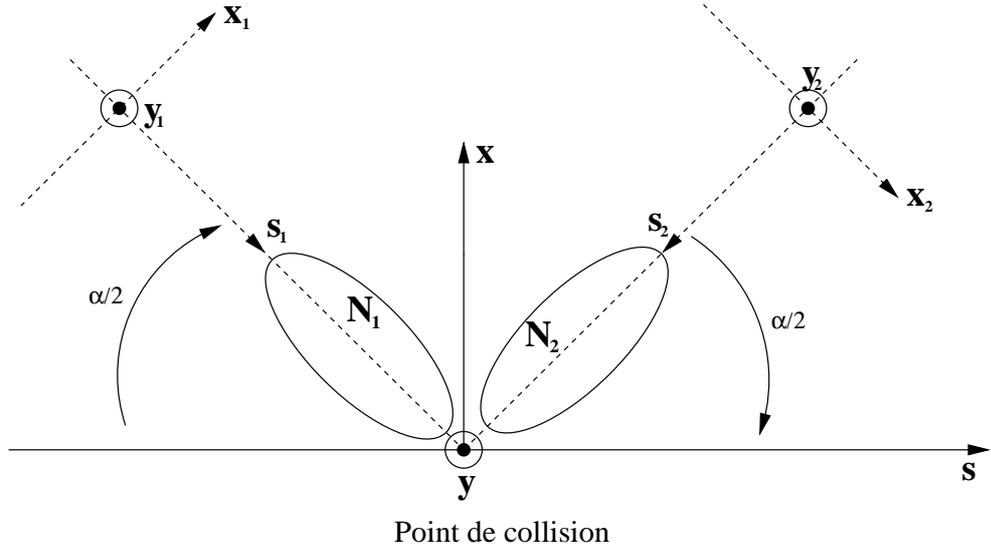


FIG. 3.1 – Représentation schématique du point de collision

$$\begin{aligned}
(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)^2}{c^2} &= v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha_{12} - \frac{1}{c^2} v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha_{12} \\
&= \frac{1}{c^2} \left[(c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - (c^2 - v_1^2)(c^2 - v_2^2) \right] = \frac{1}{c^2} (c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - \frac{c^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \\
&\approx \frac{1}{c^2} (c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

où α_{12} définit l'angle orienté entre les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 et où les quantités γ_1 et γ_2 représentent les facteurs relativistes associés respectivement aux particules 1 et 2. En désignant par X_1 et X_2 les vecteurs 6-dimensionnels paramétrisant les positions respectives des particules de type 1 et 2 dans l'espace des phases et en s'appuyant sur la figure 3.1, on a avec des notations évidentes

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} v_{x_1} \cos \alpha/2 - v_{s_1} \sin \alpha/2 \\ v_{y_1} \\ v_{x_1} \sin \alpha/2 + v_{s_1} \cos \alpha/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_{x_2} \cos \alpha/2 - v_{s_2} \sin \alpha/2 \\ v_{y_2} \\ v_{x_2} \sin \alpha/2 - v_{s_2} \cos \alpha/2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{p_0^2}{m^2 \gamma_1 \gamma_2} \begin{pmatrix} (X_1)_2 \cos \alpha/2 - \frac{p_{s_1}}{p_0} \sin \alpha/2 \\ (X_1)_4 \\ (X_1)_2 \sin \alpha/2 + \frac{p_{s_1}}{p_0} \cos \alpha/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(X_2)_2 \cos \alpha/2 - \frac{p_{s_2}}{p_0} \sin \alpha/2 \\ (X_2)_4 \\ (X_2)_2 \sin \alpha/2 - \frac{p_{s_2}}{p_0} \cos \alpha/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où $p_{s_{1,2}}/p_0 \stackrel{2.18}{=} \sqrt{1 + 2(X_{1,2})_6/\beta_0 + (X_{1,2})_6^2 - (X_{1,2})_2^2 - (X_{1,2})_4^2}$ et $p_0/(m\gamma_{1,2}) = p_0 c^2/E = \frac{1}{\beta_0 + (X_{1,2})_6}$. Pour des particules ultra-relativistes ($\beta_0 = 1$), en négligeant la dispersion en énergie du faisceau au point d'interaction ($(X_{1,2})_6 \approx 0$) et en se plaçant dans l'hypothèse

paraxiale ($(X_{1,2})_2 \approx 0$ et $(X_{1,2})_4 \approx 0$), on obtient ainsi

$$1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} = 1 + \cos \alpha . \quad (3.24)$$

• On suppose ensuite que la collision est frontale comme c'est le cas pour TESLA ($\alpha = 0$). En utilisant les équations 3.23 et 3.24, l'expression de la luminosité (équation 3.22) se simplifie et on a

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}} &= 2 \int c dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{v}_1 d^3 \vec{v}_2 \tilde{\rho}_1(\vec{x}, \vec{v}_1; t) \tilde{\rho}_2(\vec{x}, \vec{v}_2; t) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^4} \int d^3 \vec{\lambda} d\omega I_1(\omega, \vec{\lambda}) I_2^*(\omega, \vec{\lambda}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{où } I_n(\omega, \vec{\lambda}) = \int c dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{v} \tilde{\rho}_n(\vec{x}, \vec{v}; t) e^{-i\omega ct} e^{i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}} = \int c dt d^3 \vec{x} \rho_n(\vec{x}; t) e^{-i\omega ct} e^{i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}}, \quad n=1, 2, \quad (3.26)$$

sont les fonctions génératrices des distributions $\rho_{1,2}$ (c.-à-d. leur transformée de Fourier). Il s'agit dès lors de repasser à la paramétrisation canonique utilisée jusqu'à présent (c.-à-d. de passer des variables $(\vec{x}, \vec{v}; t)$ aux variables $(X; s)$ et des distributions $\tilde{\rho}_{1,2}$ aux distributions $\rho_{0,1,2}(X_{1,2})$ définies au début de ce chapitre). Pour ce faire, on écrit simplement

$$- \quad c dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{v} \tilde{\rho}_1(\vec{x}, \vec{v}; t) = ds_1 d^6 X_1 \rho_1(X_1; s_1) \stackrel{3.3}{=} ds_1 d^6 X_1 \rho_{01}(\mathcal{M}_1^{-1}(X_1; s_1)). \text{ On a } X_{1_5} = Dt_1 \stackrel{\text{def}}{=} s_1 - ct \text{ et } s = s_1 - s^*, \text{ soit } e^{-i\omega ct} e^{i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}} = e^{-i\omega s^*} e^{i(\lambda_3 - \omega)(s_1 - s^*)} e^{i\tilde{\Lambda} X_1}, \text{ où } \tilde{\Lambda} \text{ est le vecteur ligne 6-dimensionnel } (\lambda_1, 0, \lambda_2, 0, \omega, 0).$$

$$- \quad c dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{v} \tilde{\rho}_2(\vec{x}, \vec{v}; t) = ds_2 d^6 X_2 \rho_2(X_2; s_2) \stackrel{3.3}{=} ds_2 d^6 X_2 \rho_{02}(\mathcal{M}_2^{-1}(X_2; s_2)). \text{ On a } X_{2_5} = Dt_2 \stackrel{\text{def}}{=} s_2 - ct \text{ et, d'après la figure 3.1, } s = s^* - s_2 \text{ et } x_2 = -x, \text{ soit } e^{-i\omega ct} e^{i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}} = e^{-i\omega s^*} e^{i(\lambda_3 + \omega)(s^* - s_2)} e^{i\tilde{\Lambda} \mathbf{P}_x X_2}, \text{ où } \mathbf{P}_x \text{ est l'opérateur de parité } x \leftrightarrow -x$$

$$\text{dont la matrice est donnée par } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{cases} I_1 &= e^{-i\omega s^*} \int ds_1 d^6 X_1 \left[e^{i(\lambda_3 - \omega)(s_1 - s^*)} e^{i\tilde{\Lambda} X_1} \rho_{01}(\mathcal{M}_1^{-1}(X_1; s_1)) \right] \\ I_2 &= e^{-i\omega s^*} \int ds_2 d^6 X_2 \left[e^{i(\lambda_3 + \omega)(s^* - s_2)} e^{i\tilde{\Lambda} \mathbf{P}_x X_2} \rho_{02}(\mathcal{M}_2^{-1}(X_2; s_2)) \right] . \end{cases} \quad (3.27)$$

• Enfin, on fait l'hypothèse que les distributions initiales $\rho_{0,1,2}$ sont Gaussiennes, soit

$$\rho_{0n}(X_n) = \frac{N_n}{(2\pi)^3 \det^{\frac{1}{2}} \Sigma_{0n}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\tilde{X}_n - \tilde{X}_{0n}) \Sigma_{0n}^{-1} (X_n - X_{0n})\right), \quad n = 1, 2, \quad (3.28)$$

et l'on se place une fois de plus dans le cadre de l'approximation linéaire pour les *mappings* $\mathcal{M}_{1,2}$, soit

$$\mathcal{M}_{1,2}(X_{1,2}; s_{1,2}) \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_{1,2}(s_{1,2}) + R_{1,2}(s_{1,2}) X_{1,2} .$$

En conséquence, si l'on suppose que la région d'interaction est située dans un espace vide de champ (*drift*), on a

$$\mathcal{M}_n(X_n; s_n) = \mathcal{M}_{\text{drift}}(s^* \rightarrow s_n) \circ \mathcal{M}_n^*(X_n) = D_{z_n} (R_n X_n + \delta X_n), \quad n = 1, 2 \quad (3.29)$$

où $\delta X_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_{1,2}(s^*)$, $R_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} R_{1,2}(s^*)$ et où $D_{z_{1,2}}$ désigne la matrice R du *drift* de longueur $z_{1,2} = s_{1,2} - s^*$ (cf. sous-section 2.2.5):

$$D_z = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (3.30)$$

Formule analytique exacte pour la “luminosité géométrique”

L'équation précédente 3.29 a supposé implicitement l'absence d'interaction lors de la collision des deux faisceaux, ce qui est loin d'être le cas dans la réalité (se reporter par exemple à la référence [19] pour une présentation détaillée des problèmes d'interaction faisceau–faisceau). Cependant, à partir de cette hypothèse purement académique, nous définissons ce qu'il est communément appelé la luminosité géométrique.

Nous commençons par calculer la quantité I_1 donnée par l'équation 3.27. En effectuant les changements de variables $z_1 = s_1 - s^*$ et $X_1 \rightarrow \mathcal{M}_1(X_1; s_1) \stackrel{3.29}{=} D_{z_1} (R_1 X_1 + \delta X_1)$, il vient déjà

$$I_1 = e^{-i\omega s^*} \int dz_1 d^6 X_1 \left[e^{i(\lambda_3 - \omega)z_1} \exp \left(i\tilde{\Lambda} \left(D_{z_1} (R_1 X_1 + \delta X_1) \right) \right) \rho_{0_1}(X_1) \right] .$$

On utilise ensuite la formule classique d'intégration suivante: si $\rho_G(X)$ est une mesure Gaussienne n -dimensionnelle de moyenne X_0 et de matrice de covariance Σ_0 et si Y est un vecteur n -dimensionnel quelconque, on a

$$\int d^n X \exp \left(i\tilde{Y} X \right) \rho_G(X) = \exp \left(i\tilde{Y} X_0 \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{Y} \Sigma_0 Y \right) . \quad (3.31)$$

Par conséquent, on obtient finalement

$$I_1 = N_1 e^{-i\omega s^*} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \left[e^{i(\lambda_3 - \omega)z_1} \exp \left(i\tilde{\Lambda} D_{z_1} \delta X_1^* \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{\Lambda} D_{z_1} \Sigma_1^* \tilde{D}_{z_1} \Lambda \right) \right]$$

où les quantités $\delta X_1^* \stackrel{\text{def}}{=} R_1 X_{0_1} + \delta X_1$ et $\Sigma_1^* \stackrel{\text{def}}{=} R_1 \Sigma_{0_1} \widetilde{R}_1$ représentent respectivement la position moyenne du faisceau et la matrice faisceau au point d'interaction calculées dans l'hypothèse d'un transport linéaire. Par une démarche rigoureusement identique, on dérive une expression similaire pour I_2 :

$$I_2 = N_2 e^{-i\omega s^*} \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \left[e^{-i(\lambda_3 + \omega)z_2} \exp(i\widetilde{\Lambda} D_{z_2} \delta X_2^*) \exp\left(-\frac{1}{2} \widetilde{\Lambda} D_{z_2} \Sigma_2^* \widetilde{D}_{z_2} \Lambda\right) \right]$$

où $\delta X_2^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_x (R_2 X_{0_2} + \delta X_2)$ et $\Sigma_2^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_x R_2 \Sigma_{0_2} \widetilde{R}_2 \mathbf{P}_x$. Par convention, on redéfinit les quantités X_{0_2} , Σ_{0_2} , δX_2 et R_2 par rapport au repère spatial (IP, \hat{x} , \hat{y} , \hat{s}) (cf. Fig. 3.1), soit $X_{0_2} \rightarrow \mathbf{P}_x X_{0_2}$, $\Sigma_{0_2} \rightarrow \mathbf{P}_x \Sigma_{0_2} \mathbf{P}_x$, $\delta X_2 \rightarrow \mathbf{P}_x \delta X_2$ et $R_2 \rightarrow \mathbf{P}_x R_2 \mathbf{P}_x$. En utilisant le fait que $\mathbf{P}_x^2 = \mathbf{1}$ et $\mathbf{P}_x = \widetilde{\mathbf{P}}_x$, on obtient donc, comme pour le faisceau 1, $\delta X_2^* = R_2 X_{0_2} + \delta X_2$ et $\Sigma_2^* = R_2 \Sigma_{0_2} \widetilde{R}_2$.

Ceci étant dit, on désigne par \mathbf{P} l'opérateur de projection sur le plan $(x, y, Dt)^2$ et par $\vec{\mu}$ le vecteur tri-dimensionnel $\widetilde{\Lambda} \vec{\mathbf{P}} = (\lambda_1, \lambda_2, \omega)$. A l'aide de ces nouvelles notations, on vérifie aisément que les intégrales I_1 et I_2 se réécrivent de la façon suivantes:

$$I_{1,2} = N_{1,2} e^{-i\omega s^*} \int_{-\infty}^{\infty} dz_{1,2} \left\{ e^{(\pm i\lambda_3 - i\omega)z_{1,2}} \exp(i\vec{\mu} \cdot [\mathbf{P} D_{z_{1,2}} \delta X_{1,2}^*]) \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\mu} \cdot [\mathbf{P} D_{z_{1,2}} \Sigma_{1,2}^* \widetilde{D}_{z_{1,2}} \vec{\mathbf{P}}] \cdot \vec{\mu}\right) \right\}.$$

En reprenant la relation 3.25 exprimant la luminosité $\overline{\mathbf{L}}$ à partir de ces deux quantités, l'intégration sur la variable λ_3 donne immédiatement le facteur $2\pi \delta(z_1 + z_2)$, d'où

$$\overline{\mathbf{L}} = \frac{N_1 N_2}{4\pi^3} \int dz d^3 \vec{\mu} \exp(i\vec{\mu} \cdot \vec{A}_z) \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\mu} \cdot \Sigma_z \cdot \vec{\mu}\right)$$

où \vec{A}_z est le vecteur $\mathbf{P} (D_z \delta X_1^* - D_{-z} \delta X_2^*) - 2z\hat{z}$ (avec $\hat{z} \stackrel{\text{def}}{=} [0, 0, 1]$) et où Σ_z désigne la matrice 3×3 symétrique positive $\mathbf{P} [D_z \Sigma_1^* \widetilde{D}_z + D_{-z} \Sigma_2^* \widetilde{D}_{-z}] \vec{\mathbf{P}}$. Finalement, l'intégration sur $\vec{\mu}$ se fait analytiquement à partir de la formule d'intégration 3.31 et on obtient la formule suivante pour la luminosité géométrique:

$$\overline{\mathbf{L}} = \frac{2 N_1 N_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \vec{A}_z \cdot \Sigma_z^{-1} \cdot \vec{A}_z\right)}{\det^{\frac{1}{2}} \Sigma_z} dz \quad (3.32)$$

$$\text{avec} \begin{cases} \vec{A}_z &= \mathbf{P} (D_z \delta X_1^* - D_{-z} \delta X_2^*) - 2z\hat{z} \\ \delta X_n^* &= R_n X_{0_n} + \delta X_n, \quad n = 1, 2 \\ \Sigma_z &= \mathbf{P} [D_z \Sigma_1^* \widetilde{D}_z + D_{-z} \Sigma_2^* \widetilde{D}_{-z}] \vec{\mathbf{P}} \\ \Sigma_n^* &= R_n \Sigma_{0_n} \widetilde{R}_n, \quad n = 1, 2. \end{cases} \quad (3.33)$$

$$2. \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Développement de Taylor de la luminosité à l'ordre 2 dans les coefficients de la matrice R et de l'offset δX

Cadre de travail et notations

Outre les hypothèses faites au début de la sous-section précédente qui ont permis de définir la luminosité géométrique et de dériver son expression finale 3.33, nous ajoutons les quelques contraintes suivantes:

- les deux faisceaux sont centrés sur l'axe à l'entrée de leur ligne respective, $X_{0_1} = X_{0_2} = 0$ dans l'équation 3.28, soit $\delta X_n^* = \delta X_n$, $n = 1, 2$, où l'on rappelle que les quantités δX_n^* et δX_n désignent respectivement la position moyenne du faisceau n au point d'interaction et l'image du point $X = 0$ par le *mapping* $\mathcal{M}_n(0 \rightarrow s^*)$.
- les matrices faisceau Σ_{0_1} et Σ_{0_2} à l'entrée de la ligne sont identiques, toutes deux égales à la même matrice faisceau Σ_0 .
- les matrices R relatives au transport le long des lignes idéales 1 et 2 sont toutes deux égales à la matrice R_0 . Si, comme précédemment, on écrit $R_n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{1} + \delta Q_n) R_0 \stackrel{\text{def}}{=} \exp \Theta_n R_0$, $n = 1, 2$, on obtient en reprenant l'équation 3.33

$$\Sigma_z = \mathbf{P} \left[D_z \exp(\Theta_1) \Sigma_0^* \exp(\tilde{\Theta}_1) \tilde{D}_z + D_{-z} \exp(\Theta_2) \Sigma_0^* \exp(\tilde{\Theta}_2) \tilde{D}_{-z} \right] \tilde{\mathbf{P}} \quad (3.34)$$

où Σ_0^* est la matrice faisceau idéale au point d'interaction donnée par l'égalité 3.8.

En résumé, on considère donc la luminosité géométrique comme une certaine fonction des variables $\delta X_{1,2}$ et $\Theta_{1,2}$.

Luminosité relative à la ligne idéale

En reprenant les équations 3.33 et 3.34, on a pour le cas de la ligne idéale

$$\vec{A}_z = -2z\hat{z} \quad \text{et} \quad \Sigma_z = 2 \begin{pmatrix} \sigma_{x_0}^{*2} + z^2 \sigma_{x'_0}^{*2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0}^{*2} + z^2 \sigma_{y'_0}^{*2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$$

d'où l'on obtient, après quelques manipulations sur l'équation 3.32,

$$\bar{\mathbf{L}}(0) = H_A(A_x, A_y) \mathcal{L}_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_A(A_x, A_y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{(1 + A_x^2 u^2)(1 + A_y^2 u^2)}} \\ \mathcal{L}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N_1 N_2}{4\pi \sigma_{x_0}^* \sigma_{y_0}^*} \end{cases} \quad (3.35)$$

où les coefficients $A_{x,y}$ sont définis dans les relations 3.9. La luminosité géométrique idéale $\bar{\mathbf{L}}(0)$ est donc le produit de la quantité bien connue \mathcal{L}_0 par le facteur de réduction H_A (*hour-glass effect*).

Dérivées premières et secondes de la luminosité géométrique en fonction des coefficients de la matrice R et de l'offset δX

On désire dans ce dernier paragraphe étudier les fluctuations de la fonction $\bar{\mathbf{L}}(\delta X_{1,2}, \Theta_{1,2})$ autour de sa valeur nominale $\bar{\mathbf{L}}(0)$. Ainsi, en comparaison avec ce qui a été fait à la section précédente concernant les tailles faisceau transverses au point d'interaction, on développera cette fonction jusqu'à l'ordre 2 dans les quantités $\delta X_{1,2}$ et $\Theta_{1,2}$. Une fois de plus, les calculs rencontrés sont fastidieux et on a fait appel au logiciel de calculs formels MAPLE [15]. Les résultats obtenus sont résumés ci-après.

Nous commençons d'abord par quelques notations et définitions.

- Pour un triplet quelconque d'entiers (i, j, k) , on note $f_{ijk}(A_x, A_y)$ le coefficient

$$f_{ijk}(A_x, A_y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2} u^{2k} du}{(1 + A_x^2 u^2)^{\frac{i}{2}} (1 + A_y^2 u^2)^{\frac{j}{2}}}.$$

En particulier, on a $f_{ijk}(A_x, A_y) \leq f_{ijk}(0, 0) = \frac{(2k)!}{2^{2k+2} k!}$ (soit $f_{ij0}(0, 0) = 1/4$, $f_{ij1}(0, 0) = 1/8$, $f_{ij2}(0, 0) = 3/16$, ...).

- On note $\begin{cases} \delta x \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_{1_1} - \delta X_{2_1} = \delta x_1 - \delta x_2 & \delta y \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_{1_3} - \delta X_{2_3} = \delta y_1 - \delta y_2 \\ \delta p_x \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_{1_2} + \delta X_{2_2} = \delta \hat{P}_{x_1} + \delta \hat{P}_{x_2} & \delta p_y \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_{1_4} + \delta X_{2_4} = \delta \hat{P}_{y_1} + \delta \hat{P}_{y_2} \\ \delta Dt \stackrel{\text{def}}{=} \delta X_{1_5} - \delta X_{2_5} = \delta Dt_1 - \delta Dt_2 \end{cases}$

de sorte que le vecteur \vec{A}_z de l'équation 3.33 est donné par $\vec{A}_z = \begin{pmatrix} \delta x + z\delta p_x \\ \delta y + z\delta p_y \\ \delta Dt - 2z \end{pmatrix}$.

- On pose $\theta_i^\pm = \theta_{1_i} \pm \theta_{2_i}$ pour tous les entiers i compris entre 1 et 15.
- Enfin on définit les quantités suivantes:

$$\begin{aligned} X_1^\pm &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_1^\pm \\ \theta_4^\pm \end{pmatrix} \\ X_2^\pm &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_7^\pm \\ \theta_{10}^\pm \end{pmatrix} \quad (\text{couplages } (x-y) \text{ et } (p_x - p_y)) \\ X_3^\pm &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_8^\pm \\ \theta_9^\pm \end{pmatrix} \quad (\text{couplages } (x-p_y) \text{ et } (y-p_x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_4^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_2^+ \\ \theta_3^+ \\ \theta_5^+ \\ \theta_6^+ \end{pmatrix}, \quad X_4^- \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_2^- \\ \theta_3^- \\ \theta_5^- \\ \theta_6^- \\ \delta Dt \end{pmatrix} && (\text{waist-shifts et différence de longueur de chemin}) \\
X_5^- &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_{11}^- \\ \delta x \end{pmatrix}, \quad X_6^- \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_{13}^- \\ \delta y \end{pmatrix}, \quad X_7^+ \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_{11}^+ \\ \theta_{13}^+ \\ \theta_{15}^+ \end{pmatrix} && (\text{offsets, dispersions et couplage } (Dt-\delta)) \\
X_5^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_{12}^+ \\ \delta p_x \end{pmatrix}, \quad X_6^+ \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_{14}^+ \\ \delta p_y \end{pmatrix}, \quad X_7^- \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_{12}^- \\ \theta_{14}^- \\ \theta_{15}^- \end{pmatrix} && (\text{offsets et dispersions angulaires, couplage } (Dt-\delta)).
\end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient pour le développement à l'ordre 2 de la fonction $\overline{\mathbf{L}}(\delta X_{1,2}, \Theta_{1,2})$

$$\frac{\delta \overline{\mathbf{L}}}{\overline{\mathbf{L}}(0)} = \frac{1}{H_A} \left(L \cdot X_1^+ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 [\widetilde{X}_i^+ A_i^+ X_i^+ + \widetilde{X}_i^- A_i^- X_i^-] \right) + o(3) \quad (3.36)$$

où L est le vecteur ligne $-2(f_{310} - A_x^2 f_{311}, f_{130} - A_y^2 f_{131})$ et où les quantités $(A_i^\pm, i = 1 \dots 7)$ sont les matrices symétriques définies ci-après³:

$$A_1^+ = \begin{pmatrix} f_{110} - 12 A_x^2 f_{511} & f_{330} - (A_x^2 + A_y^2) f_{331} + A_x^2 A_y^2 f_{332} \\ f_{330} - (A_x^2 + A_y^2) f_{331} + A_x^2 A_y^2 f_{332} & f_{110} - 12 A_y^2 f_{151} \end{pmatrix}$$

$$A_1^- = -2 \begin{pmatrix} f_{110} & 0 \\ 0 & f_{110} \end{pmatrix}$$

$$A_2^+ = -f_{331} \begin{pmatrix} A_x^2 (2 + R^2) + A_y^2/R^2 & - (A_x^2 (1 + R^2) + A_y^2 (1 + 1/R^2)) \\ - (A_x^2 (1 + R^2) + A_y^2 (1 + 1/R^2)) & A_x^2 R^2 + A_y^2 (2 + 1/R^2) \end{pmatrix}$$

$$A_2^- = - \begin{pmatrix} A_x^2 R^2 f_{131} + f_{310}/R^2 & -f_{110} \\ -f_{110} & R^2 f_{130} + A_y^2/R^2 f_{311} \end{pmatrix}$$

$$A_3^+ = - \begin{pmatrix} 1/\sigma_z^2 (A_x^2 R^2 f_{130} + A_y^2/R^2 f_{310}) & f_{110} \\ f_{110} & \sigma_z^2 (R^2 f_{131} + f_{311}/R^2) \end{pmatrix}$$

3. Afin de simplifier les notations, on a posé ici $\sigma_x \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{x_0}^*$ et $\sigma_y \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{y_0}^*$.

$$A_3^- = - \begin{pmatrix} 1/\sigma_z^2 ((A_x^2 R^2 + A_y^2/R^2) f_{330} - 2A_x^2 A_y^2 f_{331}) & f_{330} - (A_x^2 R^2 + A_y^2/R^2) f_{331} + A_x^2 A_y^2 f_{332} \\ f_{330} - (A_x^2 R^2 + A_y^2/R^2) f_{331} + A_x^2 A_y^2 f_{332} & \sigma_z^2 ((A_x^2 R^2 + A_y^2/R^2) f_{332} - 2f_{331}) \end{pmatrix}$$

$$A_4^+ = - \begin{pmatrix} (A_x/\sigma_z)^2 f_{310} & f_{110}/2 & 0 & 0 \\ f_{110}/2 & \sigma_z^2 f_{311} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (A_y/\sigma_z)^2 f_{130} & f_{110}/2 \\ 0 & 0 & f_{110}/2 & \sigma_z^2 f_{131} \end{pmatrix}$$

$$A_4^- = \begin{pmatrix} (A_x/\sigma_z)^2 (3A_x^2 f_{511} - f_{310}) & 3A_x^2 f_{511} - f_{110}/2 & (A_x A_y/\sigma_z)^2 f_{331} & A_x^2 f_{331} & -2(A_x/\sigma_z)^2 f_{311} \\ 3A_x^2 f_{511} - f_{110}/2 & \sigma_z^2 (3f_{511} - f_{311}) & A_y^2 f_{331} & \sigma_z^2 f_{331} & -2f_{311} \\ (A_x A_y/\sigma_z)^2 f_{331} & A_y^2 f_{331} & (A_y/\sigma_z)^2 (3A_y^2 f_{151} - f_{130}) & 3A_y^2 f_{151} - f_{110}/2 & -2(A_y/\sigma_z)^2 f_{131} \\ A_x^2 f_{331} & \sigma_z^2 f_{331} & 3A_y^2 f_{151} - f_{110}/2 & \sigma_z^2 (3f_{151} - f_{131}) & -2f_{131} \\ -2(A_x/\sigma_z)^2 f_{311} & -2f_{311} & -2(A_y/\sigma_z)^2 f_{131} & -2f_{131} & 2/\sigma_z^2 (2f_{111} - f_{110}) \end{pmatrix}$$

$$A_5^+ = - \begin{pmatrix} (\sigma_\delta \sigma_z / \sigma_x)^2 f_{311} + (\sigma_x A_x / \sigma_z)^2 (f_{311} - 2f_{312}) & -2f_{311} \\ -2f_{311} & 2(\sigma_z / \sigma_x)^2 f_{311} \end{pmatrix}$$

$$A_5^- = - \begin{pmatrix} (\sigma_\delta / \sigma_x)^2 f_{310} + (\sigma_x A_x / \sigma_z^2)^2 (f_{310} - 2f_{311}) & 2(A_x / \sigma_z)^2 f_{311} \\ 2(A_x / \sigma_z)^2 f_{311} & 2f_{310} / \sigma_x^2 \end{pmatrix}$$

$$A_6^+ = - \begin{pmatrix} (\sigma_\delta \sigma_z / \sigma_y)^2 f_{131} + (\sigma_y A_y / \sigma_z)^2 (f_{131} - 2f_{132}) & -2f_{131} \\ -2f_{131} & 2(\sigma_z / \sigma_y)^2 f_{131} \end{pmatrix}$$

$$A_6^- = - \begin{pmatrix} (\sigma_\delta / \sigma_y)^2 f_{130} + (\sigma_y A_y / \sigma_z^2)^2 (f_{130} - 2f_{131}) & 2(A_y / \sigma_z)^2 f_{131} \\ 2(A_y / \sigma_z)^2 f_{131} & 2f_{130} / \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

$$A_7^+ = - \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma_\delta / \sigma_x)^2 f_{310} + \\ (\sigma_x A_x / \sigma_z^2)^2 (f_{110} - 2f_{111}) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} (\sigma_\delta / \sigma_y)^2 f_{130} + \\ (\sigma_y A_y / \sigma_z^2)^2 (f_{110} - 2f_{111}) \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_\delta / \sigma_z)^2 (f_{110} - 2f_{111}) \end{pmatrix}$$

$$A_7^- = - \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} (\sigma_\delta \sigma_z / \sigma_x)^2 f_{311+} \\ (\sigma_x / \sigma_z)^2 (f_{110} - 2f_{111}) \end{array} \right] & 0 & 0 \\ 0 & \left[\begin{array}{c} (\sigma_\delta \sigma_z / \sigma_y)^2 f_{131+} \\ (\sigma_y / \sigma_z)^2 (f_{110} - 2f_{111}) \end{array} \right] & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_\delta / \sigma_z)^2 (f_{110} - 2f_{111}) \end{pmatrix}.$$

Pour finir, nous remarquons dans l'équation 3.36 l'existence du terme linéaire $L.X_1^+ = L_1\theta_1^+ + L_2\theta_4^+$. Un calcul des *mappings* à l'ordre 2 dans les erreurs de la ligne (chapitre 2) se justifie donc à nouveau ici et pour la même raison que celle qui avait été invoquée à la section précédente concernant les tailles faisceau transverses au point d'interaction.

3.3 Les différents critères utilisés pour le calcul de tolérances

En notant δQ l'une des trois quantités $\delta\sigma_x^*/\sigma_{x_0}^*$, $\delta\sigma_y^*/\sigma_{y_0}^*$ ou $\delta L/L(0)$, nous pouvons résumer les différents résultats obtenus dans ce chapitre de la façon suivante.

- Par les relations 3.13 ou 3.36, δQ possède un développement connu à l'ordre 2 dans les coefficients des vecteurs $\delta X_{1,2}$ et des matrices $\delta Q_{1,2}$ (reliées aux matrices $\Theta_{1,2}$ par les relations 3.10).
- En utilisant le chapitre précédent (cf. conclusion 2.4), on est capable de calculer au point d'interaction les dérivées premières et secondes de ces coefficients par rapport aux différents types d'erreurs envisagées dans les aimants de la ligne, lesquelles seront notées ϵ_{ij} où les suffixes i et j désigneront respectivement le numéro de l'aimant considéré et le type de défaut qui lui est associé ($j = 1 \cdots 11$ pour les dipôles, $j = 1 \cdots 9$ pour les quadrupôles et $j = 1 \cdots 7$ pour les hexapôles, cf. sous-section 2.2.1).

Par conséquent, en combinant les deux assertions précédentes, on possède pour la quantité δQ un développement jusqu'à l'ordre 2 dans les erreurs de la ligne que l'on écrit formellement de la manière suivante:

$$\delta Q = \sum_{i_j} a_{i_j}^{(1)} \delta \epsilon_{i_j} + \frac{1}{2} \sum_{i_{1j}, i_{2j}} a_{i_{1j}i_{2j}}^{(2)} \delta \epsilon_{i_{1j}} \delta \epsilon_{i_{2j}} + o(\delta \epsilon^3) \quad (3.37)$$

et nous pouvons dès lors calculer les tolérances de la ligne relatives aux défauts d'alignement de ses composantes et aux erreurs de champ dans ses aimants. Avant cela, cependant, il s'agit de spécifier un modèle statistique capable de décrire ces erreurs par leurs corrélations spatiales et, si besoin est, par leurs corrélations temporelles. Dans ce rapport, nous ne considérerons que les deux situations simples exposées ci-après.

3.3.1 Cas d'un défaut isolé

Premièrement, nous étudions ici la situation où la ligne ne possède qu'un seul défaut, $\delta\epsilon_{ij}$, relatif à l'aimant numéro i et au type d'erreur numéro j (ce cas d'école permettant en effet une quantification immédiate de la sensibilité des aimants par rapport aux différents types d'erreurs envisagées). La tolérance sur l'erreur considérée est alors donnée en imposant à la quantité δQ de fluctuer en deçà de 2%, soit, en utilisant la relation formelle 3.37,

$$\left| a_{ij}^{(1)}\delta\epsilon_{ij} + \frac{1}{2} a_{ij}^{(2)}\delta\epsilon_{ij}^2 \right| \leq 2\% . \quad (3.38)$$

En résolvant numériquement ce type d'équation au prochain chapitre, il apparaîtra que le coefficient $a_{ij}^{(1)}$ (venant de la partie linéaire des expressions 3.13 ou 3.36) n'aura en général aucune influence sur les tolérances associées aux éléments les plus sensibles de la ligne TESLA (comme par exemple les quadrupôles des deux derniers doublets). Ainsi, la solution de 3.38 sera en général donnée par

$$\delta\epsilon_{ij}^{\max} = 0.2 / \sqrt{|a_{ij}^{(2)}|} = 0.2 \left| \frac{\partial^2 \delta Q}{\partial \epsilon_{ij}^2} \right|^{-1/2} .$$

3.3.2 Cas d'une distribution des erreurs sans corrélations et de moyenne nulle

La seconde situation considérée ici sera celle d'une distribution statistique des défauts centrée autour de zéro et dont la matrice de covariance est purement diagonale (absence de corrélations). En outre, on supposera que pour n'importe quel aimant i de la ligne, dipôle (*bend*), quadrupôle ou hexapôle (*sextupole*) et pour n'importe quelle erreur de type j , $\sigma_{\epsilon_{ij}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_j^{(B,Q,S)}$. En utilisant la relation 3.37, on a donc

$$\begin{aligned} \langle \delta Q \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\sum_{j=1}^{11} \left[\sum_{iB_j} a_{iB_j}^{(2)2} \right] \sigma_j^{(B)2}}_{\text{contribution des dipôles}} + \underbrace{\sum_{j=1}^9 \left[\sum_{iQ_j} a_{iQ_j}^{(2)2} \right] \sigma_j^{(Q)2}}_{\text{contribution des quadrupôles}} + \underbrace{\sum_{j=1}^7 \left[\sum_{iS_j} a_{iS_j}^{(2)2} \right] \sigma_j^{(S)2}}_{\text{contribution des hexapôles}} \right\} \\ &\stackrel{\text{def}^4}{=} \pm 2\% \left\{ \sum_{j=1}^{11} \left(\frac{\sigma_j^{(B)}}{\delta\epsilon_{B_j}^{\max}} \right)^2 + \sum_{j=1}^9 \left(\frac{\sigma_j^{(Q)}}{\delta\epsilon_{Q_j}^{\max}} \right)^2 + \sum_{j=1}^7 \left(\frac{\sigma_j^{(S)}}{\delta\epsilon_{S_j}^{\max}} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

4. Le signe + (resp. -) se rapporte au cas où la quantité δQ désigne le grossissement des tailles faisceau transverses (resp. la perte en luminosité) au point d'interaction.

où les quantités $\delta\epsilon_{B_j}^{\max}$, $\delta\epsilon_{Q_j}^{\max}$ et $\delta\epsilon_{S_j}^{\max}$ quantifieront les tolérances sur les défauts de type j associés respectivement aux dipôles, quadrupôles et hexapôles.

Ceci étant dit, si l'on considère un modèle statistique quelconque décrivant la distribution des erreurs de la ligne (plus précisément, si l'on se donne les premiers et seconds moments de cette distribution, $\langle\delta\epsilon_{i_j}\rangle$ et $\langle\delta\epsilon_{i_{1j_1}}\delta\epsilon_{i_{2j_2}}\rangle$), il est clair, au vu de l'équation 3.37, que le formalisme développé jusqu'à présent reste complètement adapté. Aussi a-t-il été utilisé récemment pour étudier l'effet des corrélations "longue-distance" (*ground motion*) dans le système de focalisation finale de TESLA [20].

Enfin, avant de clore ce chapitre, il nous faut tout de même faire la remarque suivante. Comme nous l'avions précisé précédemment, $\delta\mathcal{Q}$ se réfère aux fluctuations relatives des tailles faisceau transverses ou à celles de la luminosité géométrique au point d'interaction, c'est à dire à des quantités calculées dans le cadre de l'approximation linéaire. L'argument pour cela a été l'influence négligeable des aberrations (dans le cas de TESLA) sur les tailles et *offsets* du faisceau au point de collision après un transport le long de la ligne sans défauts. Maintenant, si l'on suppose que l'un des hexapôles de la ligne est sujet à une erreur de champ δK_2^\pm , l'effet est nul sur l'*offset* du faisceau en bout de ligne et sur la matrice $R^{(0)}$ de la ligne idéale mais ne l'est pas sur la matrice T . En particulier, on a $T_{126} = T_{126}^{(0)} + (\partial T/\partial K_2^\pm)\delta K_2^\pm = (\partial T/\partial K_2^\pm)\delta K_2^\pm \neq 0$ et de même $T_{346} \neq 0$. Dans ce cas bien précis, les aberrations chromatiques peuvent donc reprendre une influence non négligeable sur le comportement transverse du faisceau au point d'interaction. Bien que la méthode développée ici permette le calcul des dérivées premières de la matrice T par rapport aux erreurs de la ligne, il est clair, au vu de l'équation 3.14, que ceci reste insuffisant: afin d'obtenir de façon rigoureuse les dérivées secondes des tailles faisceau au point d'interaction, par exemple par rapport aux erreurs de champ hexapolaire δK_2^\pm , il nous faut connaître les objets du type $\partial^2 U/\partial^2 K_2^\pm$, ce qui est faisable en théorie mais nous pousserait très loin dans le calcul des non-linéarités de la ligne. En résumé, le formalisme actuel ne permet en aucun cas d'estimer les tolérances relatives aux harmoniques $2m$ -polaires ($m \geq 3$) des composantes de la ligne et, selon mon opinion, seule une méthode classique de *tracking* reste capable de résoudre proprement et simplement ce problème.

En conclusion, nous n'envisagerons dans le prochain chapitre que neuf défauts possibles dans les dipôles (six erreurs géométriques et trois erreurs de champ δK_0^+ et δK_1^\pm), sept défauts dans les quadrupôles (six erreurs géométriques et une erreur de champ δK_1^+) et six défauts dans les hexapôles (erreurs géométriques).

Chapitre 4

Application à la ligne de focalisation finale (FFS) du collisionneur linéaire TESLA: calculs de tolérances

Un programme FORTRAN interfacé avec le logiciel graphique PAW [21] a été écrit dans le but d'utiliser le formalisme précédemment développé aux calculs des tolérances de la ligne de focalisation finale de TESLA. Les résultats ainsi obtenus seront présentés dans la seconde section de ce chapitre mais nous commencerons ici par une description détaillée de la ligne elle-même se rapportant aux paramètres actuels du faisceau TESLA 250 GeV.

4.1 Les paramètres et le système de focalisation finale de TESLA

4.1.1 Introduction

Les paramètres du faisceau TESLA au point d'interaction sont répertoriés dans le tableau 4.1 [22]. La ligne de transfert destinée au transport du faisceau de la fin du linac jusqu'au point de collision (*beam delivery system* ou BDS) se compose de cinq modules distincts dont les fonctions principales sont décrites brièvement ci-après [22]:

- une section d'adaptation (*Linac Matching Section* ou LMS) composée de six quadrupôles succédant au dernier quadrupôle du linac et dont le rôle essentiel est de pouvoir moduler à souhait les caractéristiques transverses du faisceau au niveau des collimateurs localisés en aval.

Energie [GeV]	$E_0 = 250$
Emittance normalisée horizontale [rad m]	$\gamma\epsilon_x = 14 \cdot 10^{-6}$
Taille faisceau horizontale (<i>RMS</i>) [nm]	$\sigma_{x_0}^* = 845$
Divergence angulaire horizontale (<i>RMS</i>) [μ rad]	$\sigma_{x'_0}^* = 34$
Fonction β horizontale [mm]	$\beta_x = 25$
Emittance normalisée verticale [rad m]	$\gamma\epsilon_y = 25 \cdot 10^{-8}$
Taille faisceau verticale (<i>RMS</i>) [nm]	$\sigma_{y_0}^* = 19$
Divergence angulaire verticale (<i>RMS</i>) [μ rad]	$\sigma_{y'_0}^* = 27$
Fonction β verticale [mm]	$\beta_y = 0.7$
Rapport d'aspect	$R_{asp} = 44.47$
Longueur du paquet (<i>RMS</i>) [mm]	$\sigma_z = 0.7$
Dispersion en énergie (<i>RMS</i>) [%]	$\sigma_\delta = 0.1$
Nombre de particules par paquet	$N_e = 3.6 \cdot 10^{10}$
Nombre de paquets par train	$N_b = 1130$
Fréquence de répétition [Hz]	$f_{rep} = 5$
Luminosité géométrique nominale [$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$]	$\mathcal{L}_0 = \frac{f_{rep} N_b N_e^2}{4\pi \sigma_{x_0}^* \sigma_{y_0}^*} = 3.6 \cdot 10^{33}$
Facteur de réduction H_A	$H_A = 0.86 (A_x = 0.03, A_y = 0.99)$
Luminosité géométrique [$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$]	$\overline{\mathcal{L}}(0) = H_A \mathcal{L}_0 = 3.1 \cdot 10^{33}$

TAB. 4.1 – Paramètres faisceau au point d'interaction

- une section de collimation (*Collimation Section* ou CS) constituée de quatre régions distinctes au centre desquelles (forts β et forte dispersion horizontale) est disposée une paire de collimateurs interceptant dans les deux plans transverses les particules de mauvaise énergie et de grande amplitude. Les deux derniers collimateurs sont en quadrature de phase (dans les deux plans transverses) avec le point d'interaction et donc en phase avec le dernier doublet. De ce fait, leur fonction première est d'intercepter les particules susceptibles de posséder une grande amplitude transverse au niveau des deux derniers quadrupôles et donc d'engendrer un fort rayonnement synchrotron inondant le détecteur. Les deux premiers collimateurs, quant à eux, sont disposés en phase par rapport au point d'interaction. Sont donc écartées les particules de forte divergence angulaire au niveau du dernier doublet, c'est à dire celles qui sont le plus sensibles aux aberrations chromatiques générées en aval de la section de collimation.

- une station de mesure et de correction (*Tuning and Diagnostic Section* ou TDS) qui, comme son nom l’indique, est désignée pour la mesure des émittances transverses et la minimisation des couplages (x - y). La correction de ces couplages s’effectue dans un premier sous-module contenant quatre quadrupôles tournés (*Skew Quadrupole Correction Section* ou SQSC), localisés à des avances de phases judicieusement choisies et pouvant ainsi moduler de façon orthogonale les quatre coefficients de couplage (x - y) de la matrice faisceau. Ces derniers s’annulent alors théoriquement lorsque l’émittance verticale du faisceau est minimale; celle-ci est mesurée en aval à l’aide de quatre *wire scanners* agencés régulièrement le long de trois mailles FODO et demie, d’avance de phase 45° et de période 11 m (*Emittance Measurement Section* ou EMS).
- une seconde section d’adaptation (*Beta Matching Section* ou BMS) contenant sept quadrupôles; ces derniers fournissent un nombre suffisant de paramètres de liberté pour ce qui est de l’adaptation du faisceau à l’entrée du système de focalisation finale (quatre conditions) et du choix de l’avance de phase dans les deux plans transverses entre les collimateurs et le point d’interaction.
- le système de focalisation finale (*final focus system* ou FFS) composé de deux sous-modules: une section de correction chromatique (*Chromatic Correction Section* ou CCS) et un télescope (*Final Transformer* ou FT). La FFS sera décrite de façon détaillée dans la prochaine sous-section, son rôle essentiel étant la démagnification du faisceau par un facteur 15×50 .

	L [m]	s [m]	β_x [m]	β_y [m]	μ_x [2π *rad] depuis l’IP	μ_y [2π *rad] depuis l’IP
LMS	17.3	0.0	163.390	54.656	9.077	6.211
CS	389.5	17.3	13.081	7.244	8.625	6.125
TDS	183.4	406.8	13.081	7.244	5.125	4.625
BMS	31.5	590.2	21.258	9.713	3.107	2.879
CCS	331.4	621.7	5.614	1.766	2.500	2.500
FT	142.5	953.1	5.614	1.766	0.500	0.500
IP		1095.6	0.025	0.0007	0.000	0.000

TAB. 4.2 – *Longueur, fonctions β et avances de phases à l’entrée des différents modules constituant la BDS*

Les principales caractéristiques de la BDS sont listées dans le tableau 4.2. La démagnification totale du faisceau de la sortie du linac (maille FODO 60° , de période 94.5 m) jusqu'au point d'interaction est 81×279 , obtenue en grande partie par le système de focalisation finale décrit ci-après.

4.1.2 Description détaillée de la BMS et de la FFS

BMS

Type de l'élément	Nom de l'élément	L [m]	K_1 [m^{-2}]
<i>Drift</i>	DB0	0.3	
Quadrupôle	QBF1	1.2	0.096813
<i>Drift</i>	DB1	3.75	
Quadrupôle	QBD1	1.2	-0.106993
<i>Drift</i>	DB1	3.75	
Quadrupôle	QBF2	1.2	0.081993
<i>Drift</i>	DB1	3.75	

Quadrupôle	QBD2	1.2	-0.127817
<i>Drift</i>	DB1	3.75	
Quadrupôle	QBF3	1.2	0.218132
<i>Drift</i>	DB1	3.75	
Quadrupôle	QBD3	1.2	-0.214178
<i>Drift</i>	DB1	3.75	
Quadrupôle	QBF4	1.2	0.151212
<i>Drift</i>	DB0	0.3	

TAB. 4.3 – Force et agencement des quadrupôles dans la BMS [23]

La BMS est une ligne de transfert relativement courte (31.5 m) constituée de sept quadrupôles (voir Tab. 4.3). D'une part, elle permet d'ajuster dans une plage de valeurs relativement vaste les fonctions β_x^* et β_y^* au point de collision tout en annulant les paramètres de Twiss α_x et α_y (couplages $(x - x')$ et $(y - y')$) à l'entrée de la FFS (et donc à l'IP puisque la FFS se comporte idéalement comme un pur télescope dans les deux plans transverses); d'autre part, le rôle de la BMS est également d'optimiser le choix des avances de phases, $\Delta\mu_x$ et $\Delta\mu_y$, entre la sortie de la section de collimation et le point d'interaction. L'évolution des fonctions β le long de cette ligne dans un fonctionnement normal de la machine (tailles faisceau $845 \text{ nm} \times 19 \text{ nm}$ au centre du détecteur) est montrée en figure 4.1. Les avances de phases correspondantes sont alors $\mu_x \approx 219^\circ$ et $\mu_y \approx 137^\circ$, ce qui permet aux collimateurs de la CS d'avoir les avances de phases requises par rapport au point d'interaction (c.-à-d. $m\pi$ ou $(2n + 1)\pi/2$).

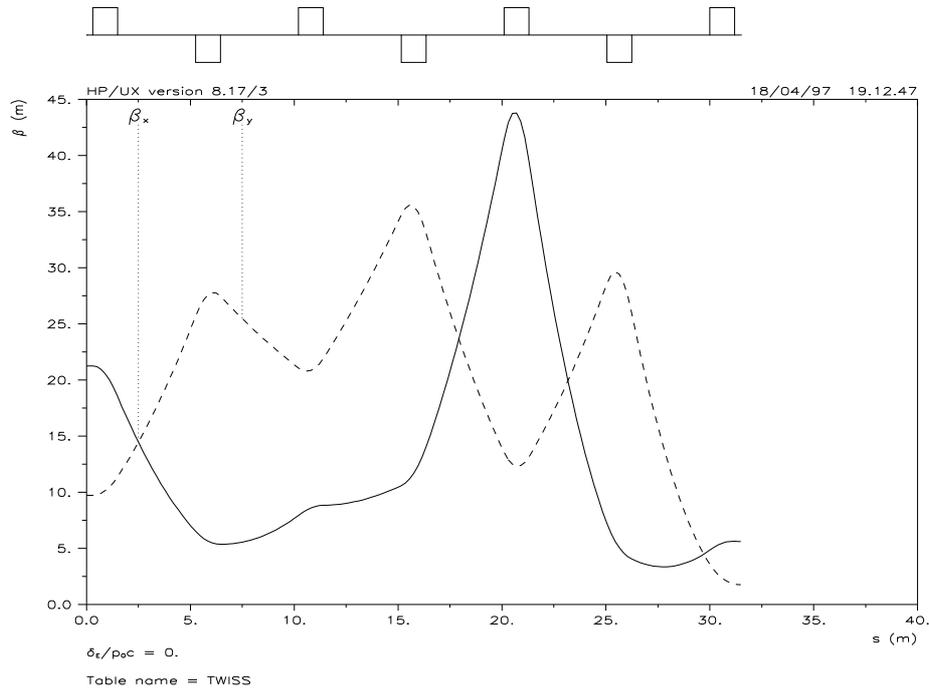


FIG. 4.1 – Evolution des fonctions β dans la BMS

CCS

La CCS est une ligne longue d'environ 330 m, de matrice R égale à l'identité et dont la fonction première est de minimiser la forte chromaticité engendrée par les deux derniers quadrupôles du télescope final (termes T_{126} et T_{346}). Le principe de correction chromatique par un entrelacement de dipôles et d'hexapôles est évidemment déjà bien connu [16] et nous n'en rappellerons que les aspects principaux. Qualitativement, il s'agit de générer, par l'insertion de dipôles droits, des régions fortement dispersives au sein desquelles sont disposés des hexapôles. Si l'on considère l'un de ces hexapôles de force intégrée g_2 et situé dans une région où la dispersion horizontale prend la valeur d_x , toute particule d'impulsion non nominale, $P = P_0 * (1 + \delta)$, voit, en le traversant, un champ quadrupolaire de force intégrée approximativement égale à $g_1 = g_2 d_x \delta$; mais la focalisation que subit cette même particule au niveau de l'un des quadrupôles du télescope final (et surtout au niveau du dernier doublet) fluctue également en fonction de son énergie, ($g(\delta) = g(0)/(1 + \delta)$ où $g(0)$ est la force intégrée que voit la particule de référence au niveau du quadrupôle considéré). Via une optimisation de la force des hexapôles, il devient alors possible de minimiser la somme de ces deux effets.

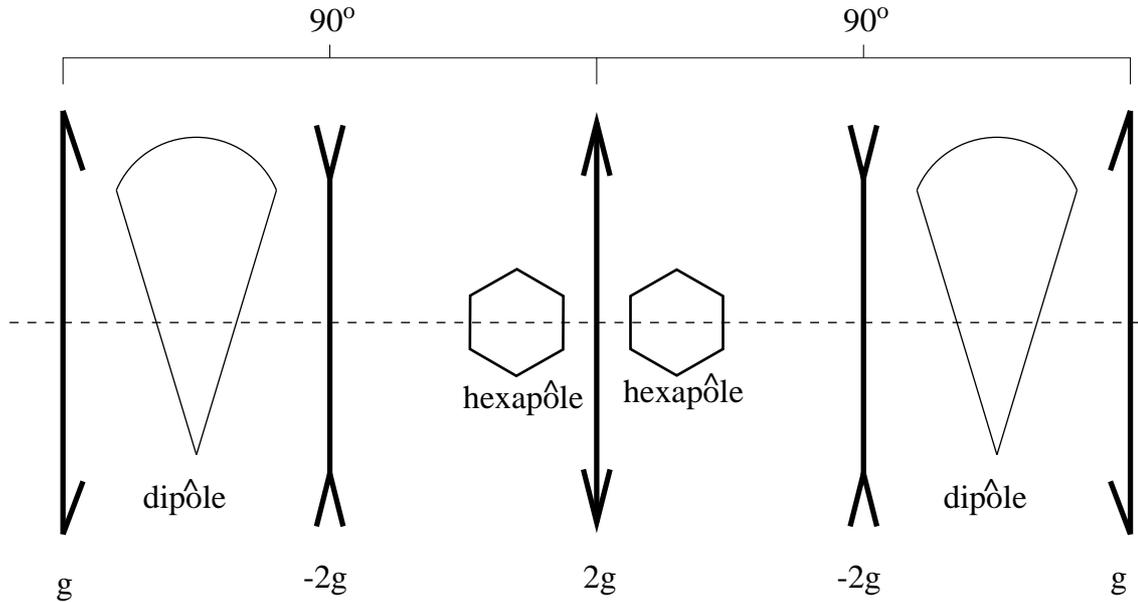


FIG. 4.2 – Représentation schématique d’une cellule 180° de la CCSH

Revenons maintenant à la description détaillée de la ligne CCS. Son *design* est identique à celui du *Final Focus Test Beam* (FFTB) opérant au SLAC [24]. Elle se compose de deux régions distinctes, CCSH et CCSV, qui corrigent de façon quasi indépendante la chromaticité horizontale et la chromaticité verticale engendrées par le dernier doublet du télescope final. L’une et l’autre de ces régions comptent deux cellules d’avance de phase 180° . Chacune de ces quatre cellules abritent deux dipôles (à entrée et sortie normales) disposés symétriquement par rapport au quadrupôle central (la dispersion horizontale est ainsi nulle aux deux extrémités de la CCSH et de la CCSV) ainsi qu’une paire d’hexapôles de part et d’autre de ce même quadrupôle (cf. Fig. 4.2). Par conséquent, les paires d’hexapôles sont séparées les unes des autres par une avance de phase égale à π de sorte qu’elles n’engendrent aucune aberration géométrique supplémentaire dans la matrice T totale de la ligne (voir par exemple Ref. [16] pour une démonstration de ce résultat). Enfin, du fait de l’inversion des polarités des dipôles dans CCSH et CCSV (cf. Tab. 4.4), la CCS entière est en forme de “S” avec deux angles de déflexion opposés de l’ordre de 3 mrad générés chacun par quatre dipôles de longueur 19.5 m et de champ 32.7 mT. Le rayonnement synchrotron le long de ces huit dipôles n’induit alors qu’une infime augmentation de la dispersion en énergie du faisceau; de même, la perte relative en énergie entre deux paires d’hexapôles consécutives reste elle aussi très faible, estimée en dessous de 2×10^{-5} [22].

Type de l'élément	Nom de l'élément	L [m]	K_0L [rad], K_1 [m ⁻²] ou K_2 [m ⁻³]	Type de l'élément	Nom de l'élément	L [m]	K_0L [rad], K_1 [m ⁻²] ou K_2 [m ⁻³]
Quadrupôle	QFFH	0.500	0.069411	Quadrupôle	QFDV	0.500	-0.069411
<i>Drift</i>	DRBQ	0.100		<i>Drift</i>	DRBQ	0.100	
Dipôle	BFH	19.511	7.667 10 ⁻⁴	Dipôle	BFV	19.511	7.667 10 ⁻⁴
<i>Drift</i>	DRBQ	0.100		<i>Drift</i>	DRBQ	0.100	
Quadrupôle	QFDM	1.000	-0.069411	Quadrupôle	QFFW	1.000	0.069411
<i>Drift</i>	DFH	18.411		<i>Drift</i>	DFV	18.411	
Hexapôle	SFH	1.200	8.617250	Hexapôle	SFV	1.200	39.972583
<i>Drift</i>	DRQS	0.100		<i>Drift</i>	DRQS	0.100	
Quadrupôle	QFFM	1.000	0.069411	Quadrupôle	QFDW	1.000	-0.069411
<i>Drift</i>	DRQS	0.100		<i>Drift</i>	DRQS	0.100	
Hexapôle	SFH	1.200	8.617250	Hexapôle	SFV	1.200	39.972583
<i>Drift</i>	DFH	18.411		<i>Drift</i>	DFV	18.411	
Quadrupôle	QFDM	1.000	-0.069411	Quadrupôle	QFFW	1.000	0.069411
<i>Drift</i>	DRBQ	0.100		<i>Drift</i>	DRBQ	0.100	
Dipôle	BFH	19.511	7.667 10 ⁻⁴	Dipôle	BFV	19.511	7.667 10 ⁻⁴
<i>Drift</i>	DRBQ	0.100		<i>Drift</i>	DRBQ	0.100	
Quadrupôle	QFFH	0.500	0.069411	Quadrupôle	QFDV	0.500	-0.069411

TAB. 4.4 – Force et agencement des aimants dans une cellule 180° des lignes CCSH et CCSV [23]

FT

La ligne FT est un système purement télescopique d'une longueur approximative de 140 m. Composé de deux doublets de quadrupôles, distants d'environ 130 m (cf. Tab. 4.5), ce dernier réduit les tailles transverses du faisceau par un facteur 15 horizontalement et 50 verticalement. Afin d'achever une telle démagnification, le dernier doublet du télescope contient deux "quadrupôles supras" de 48 mm de diamètre interne [22] pouvant atteindre des gradients de l'ordre de 250 T/m, soit $K_1 \approx 0.3 \text{ m}^{-2}$ à 250 GeV.

L'évolution des fonctions β_x , β_y , D_x (dispersion horizontale), μ_x et μ_y le long de la ligne (CCS-FT) est montrée aux figures 4.3 et 4.4.

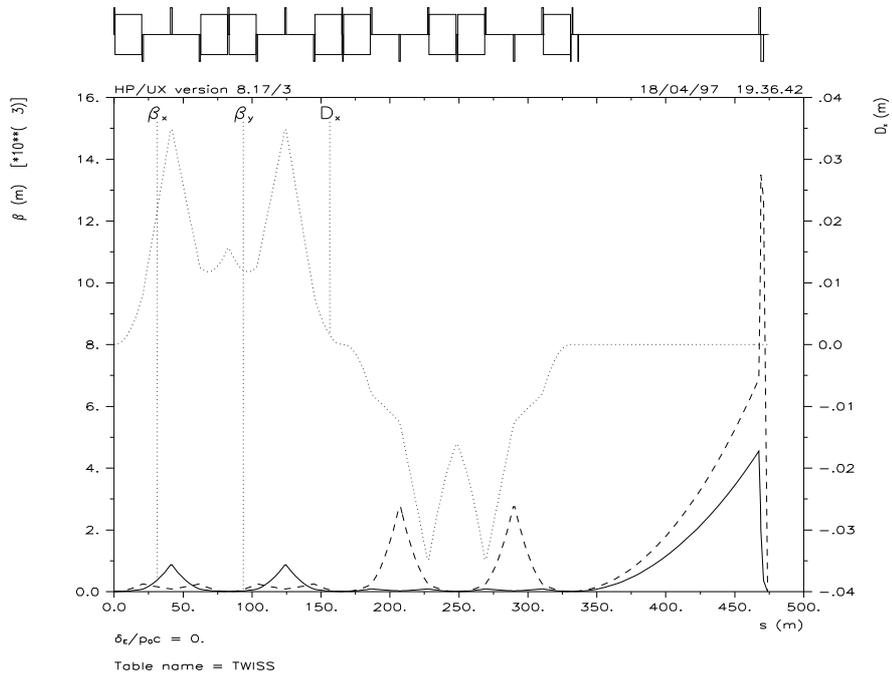


FIG. 4.3 – Evolution des fonctions β et de la dispersion horizontale dans la FFS

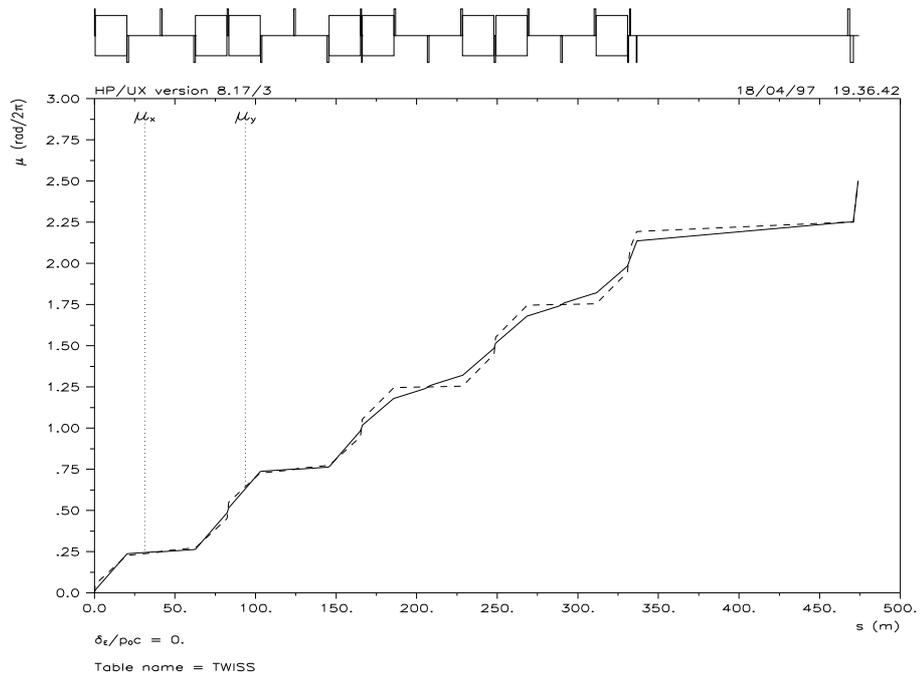


FIG. 4.4 – Evolution des fonctions μ_x et μ_y dans la FFS

Type de l'élément	Nom de l'élément	L [m]	K_1 [m ⁻²]
<i>Drift</i>	DF1	0.7500	
Quadrupôle	QFF1	0.5000	0.089911
<i>Drift</i>	DF2	3.6454	
Quadrupôle	QFD1	0.5000	-0.091602
<i>Drift</i>	DF3	130.6110	
Quadrupôle	QFF2	1.2543	0.299791
<i>Drift</i>	DFD	0.3500	
Quadrupôle	QFD2	1.9054	-0.299791
<i>Drift</i>	DFIP	3.0000	

TAB. 4.5 – Force et agencement des quadrupôles dans le télescope final [23]

4.1.3 Aberrations

Comme nous l'avons précisé à la sous-section précédente, la forte chromaticité engendrée par les deux quadrupôles du dernier doublet est corrigée en amont par les quatre paires d'hexapôles de la CCS dont la force est fixée par la condition $T_{0_{126}} = T_{0_{346}} = 0$. Il subsiste bien sûr des aberrations chromatiques d'ordre supérieur (entre autres les termes $U_{0_{ijk6}}$) susceptibles d'induire à leur tour un grossissement des tailles transverses du faisceau au point de collision¹ (cf. relations 3.16). Cependant, comme nous allons le voir, la condition d'achromaticité au deuxième ordre est suffisante pour la FFS de TESLA, compte tenu d'une dispersion en énergie du faisceau relativement faible.

Dans ce but, nous illustrons en figure 4.5 la dépendance en énergie des fonctions β au point d'interaction et relative à la ligne (BMS-FFS)². Cette dernière détermine l'acceptance en énergie du système; comme annoncé précédemment, elle apparaît plus que suffisante comparée à la dispersion totale en énergie du train de paquets estimée à moins de 0.2% à l'entrée de la BMS. De plus, les hexapôles de la CCS n'engendrent pas d'aberrations géométriques au deuxième ordre puisqu'ils viennent par paires consécutives séparées les unes des autres par une avance de phase de 180° [16]. Cependant, d'autres aberrations subsistent évidemment au troisième ordre (matrice U) et au-delà. Leurs effets sur les tailles

1. Ces aberrations ont été identifiées comme venant principalement des termes $U_{0_{1266}}$ et $U_{0_{3466}}$ [25].

2. En considérant la BDS entière, on obtient pour les fonctions $\beta_x(\delta)$ et $\beta_y(\delta)$ des courbes quasi identiques à celles données en figure 4.5 [22].

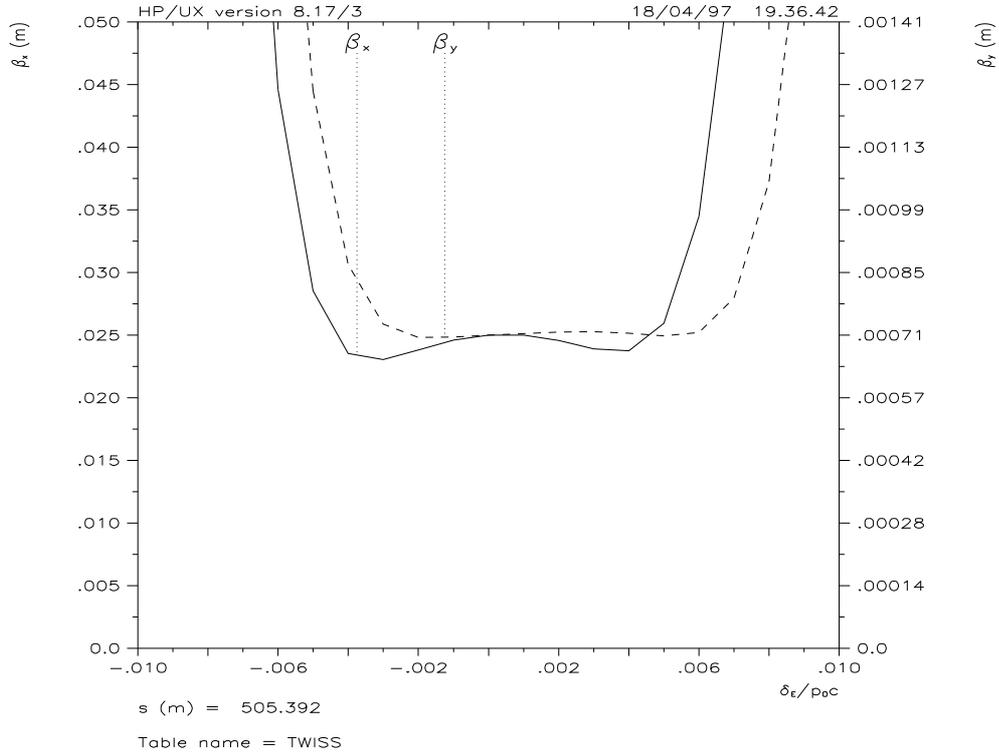


FIG. 4.5 – Acceptance en énergie de la ligne (BMS-FFS)

transverses du faisceau au point d'interaction ont été quantifiés en utilisant les relations 3.16 du chapitre précédent. Les valeurs numériques ainsi obtenues sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\delta \sigma_x^*}{\sigma_{x_0}^*} \right)^{aber} = -0.4\% \\ \left(\frac{\delta \sigma_y^*}{\sigma_{y_0}^*} \right)^{aber} = 0.3\% \end{array} \right.$$

qui sont d'un ordre équivalent à celles estimées par un pur *tracking*. L'effet est donc tout à fait négligeable³.

3. Pour une raison très simple qui apparaîtra à la section suivante, ces deux valeurs numériques proviennent d'un calcul effectué sur la ligne (BMS-FFS) et non pas sur la BDS entière.

4.2 Tolérances

Les défauts d’alignement ainsi que les erreurs de champ dans les aimants localisés en amont de la BMS seront facilement détectables et corrigés dans la TDS (*Tuning and Diagnostic Section*). En revanche, les erreurs apparaissant en aval de la BMS seront plus difficiles à mesurer et leurs effets seront plus délicats à minimiser par les moniteurs de taille faisceau moins précis et moins nombreux équipant le point d’interaction et la sortie de la CCS. Toute cette dernière partie sera donc consacrée à des calculs de tolérances ne concernant plus que les aimants de la ligne (BMS–FFS).

Il est clair cependant qu’il existe également certaines tolérances concernant la précision avec laquelle s’opèrent les corrections au niveau de la TDS. Celles-ci peuvent alors s’exprimer en terme de tolérances sur les conditions initiales de la distribution du faisceau au début de la BMS:

- la déviation 6–dimensionnelle δX_0 du faisceau à l’entrée de la ligne (BMS–FFS) qui engendre un *offset* $\delta X^* = R_0 \delta X_0$ au point de collision (R_0 désignant, comme au chapitre 3, la matrice R associée à la ligne idéale).
- la fluctuation $\delta \Sigma_0$ de la matrice faisceau initiale Σ_0 qui, transportée jusqu’au point d’interaction, génère des couplages non nuls: $\delta \Sigma^* = R_0 \delta \Sigma_0 \tilde{R}_0$.

En reprenant la formule 3.32 donnant l’expression de la luminosité géométrique, on pourrait alors calculer facilement ses dérivées premières et secondes en fonction des quantités $\delta X_{0,1,2}$ et $\delta \Sigma_{0,1,2}$ (associées aux faisceaux 1 et 2) et, de la même façon qu’à la section 3.3, en déduire les tolérances recherchées.

Néanmoins, nous avons préféré insister ici sur les tolérances relatives aux défauts de la ligne (BMS–FFS) et nous avons gardé l’hypothèse d’un faisceau idéal à l’entrée de cette ligne (c.–à–d. $\delta X_0 = 0$ et $\delta \Sigma_0 = 0$).

4.2.1 Classification des erreurs par leurs effets sur l’*offset* δX et sur la matrice R

On considère ici les effets isolés de défauts d’alignement et d’erreurs de champ de chaque aimant de la ligne (BMS–FFS). Les dérivées premières de l’*offset* δX et de la matrice R au point d’interaction ont alors été calculées pour tous les types d’erreurs considérés au chapitre 2, c’est à dire les six erreurs géométriques des dipôles, quadrupôles et hexapôles, les trois erreurs de champ dans les dipôles (erreurs de champ dans la composante dipolaire ainsi que dans les deux composantes quadrupolaires, la composante droite et la composante

ournée) et l'erreur de champ quadrupolaire dans les quadrupôles de la ligne. Ces résultats sont alors présentés dans les six séries d'histogrammes décrits ci-après, figures 4.6 à 4.11.

Déplacements transverses

Un déplacement horizontal des dipôles et quadrupôles ou un déplacement vertical des quadrupôles⁴ crée, respectivement, au premier ordre dans l'erreur considérée

- une déviation horizontale ou verticale de la position du faisceau au point d'interaction.
- une déviation angulaire horizontale ou verticale du faisceau au point d'interaction.
- une dispersion horizontale ou verticale au point d'interaction.
- une dispersion angulaire horizontale ou verticale au point d'interaction.
- une erreur de champ quadrupolaire droit ou tourné générée au niveau des hexapôles de la ligne au sein desquels la trajectoire centrale a été déviée. Puisque ces derniers viennent par paires consécutives séparées par une matrice de transfert égale à $-\mathbf{1}$, l'effet est nul au premier ordre pour tous les aimants (quadrupôles ou dipôles) localisés en dehors des deux paires d'hexapôles de la CCSH ou en dehors de celles de la CCSV. Pour tous les autres aimants, l'erreur de champ quadrupolaire droit crée un *waist-shift* horizontal et vertical au point d'interaction alors que l'erreur de champ dans la composante quadrupolaire tournée engendre un couplage $(x-y)$ dans la matrice faisceau en bout de ligne.

Le déplacement horizontal ou vertical d'un hexapôle n'influe pas au premier ordre sur l'*offset* du faisceau au point d'interaction mais il engendre

- une dispersion horizontale ou verticale au point d'interaction.
- une dispersion angulaire horizontale ou verticale au point d'interaction.
- une erreur de champ quadrupolaire droit ou tourné dont les effets sur la matrice faisceau au point d'interaction sont similaires à ceux évoqués précédemment.

La figure 4.6 montre alors les effets des déplacements horizontaux x_{mag} et verticaux y_{mag} des aimants de la ligne (ou x_{BQ} et y_{BQ} , pour dipôles et quadrupôles, lorsque le déplacement transverse des hexapôles n'a aucun effet au premier ordre) sur l'*offset* 4-dimensionnel (δx^* ,

4. On suppose ici une parfaite homogénéité verticale du champ dans les dipôles, de sorte qu'un déplacement vertical de ces derniers n'a aucune incidence sur le faisceau.

δp_x^* , δy^* , δp_y^*), sur la dispersion 4-dimensionnelle (D_x^* , $D_{p_x}^*$, D_y^* , $D_{p_y}^*$), sur le *waist-shift* horizontal et vertical (z_x^* , z_y^*) ainsi que sur les trois coefficients de couplage (r_{xy}^* , r_{xpy}^* , r_{ypx}^*), tous calculés au point d'interaction. Pour exemple, le premier histogramme de la figure 4.6 donne la valeur absolue des coefficients a_i (barres noires) et b_i (barres blanches) qui interviennent dans le développement au premier ordre des quantités δx^* et δy^* en fonction des déplacements transverses des dipôles et quadrupôles de la ligne:

$$\begin{cases} \frac{\delta x^*}{\sigma_x^*} = \sum_{i \in \text{BQ}} a_i \frac{x_i}{\sigma_x^*} \\ \frac{\delta y^*}{\sigma_y^*} = \sum_{i \in \text{BQ}} b_i \frac{y_i}{\sigma_y^*} \end{cases}.$$

Comme dans la formule précédente, les déplacements transverses des aimants seront toujours mis à l'échelle des tailles faisceau au point d'interaction. Les dérivées premières de l'*offset* δX et de la matrice faisceau Σ^* ont été, quant à elles, divisées par des facteurs adéquats qui tiennent compte de l'importance relative de ces quantités sur le grossissement de taille faisceau ou sur la diminution de la luminosité au point de collision (voir Eq. 3.13 et Eq. 3.36 au chapitre précédent). Cette normalisation définie ci-après sera alors adoptée pour tous les histogrammes apparaissant dans les figures 4.6 à 4.11:

- σ_x^* (resp. σ_y^*) pour δx^* (resp. δy^*): premier histogramme en Fig. 4.6.
- σ_x^*/σ_z (resp. σ_y^*/σ_z) pour δp_x^* (resp. δp_y^*): second histogramme en Fig. 4.6.
- σ_x^*/σ_δ (resp. σ_y^*/σ_δ) pour D_x^* (resp. D_y^*): troisième histogramme en Fig. 4.6.
- $\sigma_x^*/(\sigma_z\sigma_\delta)$ (resp. $\sigma_y^*/(\sigma_z\sigma_\delta)$) pour $D_{p_x}^*$ (resp. $D_{p_y}^*$): quatrième histogramme en Fig. 4.6.
- β_x^* (resp. β_y^*) pour z_x^* (resp. z_y^*): cinquième histogramme en Fig. 4.6.
- l'unité pour les trois coefficients de couplage ($x-y$): sixième histogramme en Fig. 4.6.

Rotations transverses

Par rotations transverses, nous entendons la rotation Θ autour de l'axe vertical et la rotation Φ autour de l'axe horizontal (cf. chapitre 2). Leurs effets sur le faisceau au point d'interaction sont alors rigoureusement identiques et d'une intensité similaire à ceux générés par les déplacements transverses des aimants pour la raison simple suivante. En effet, avec nos conventions, les rotations Θ et Φ d'un élément quelconque de la ligne correspondent à des déplacements transverses moyens de son axe magnétique donnés respectivement par

$dx = \theta L/2$ et $dy = \phi L/2$ où L est la longueur de l'aimant considéré; si ces rotations avaient été définies autour du point central de l'aimant, les déplacements correspondants dx et dy auraient été nuls. Ainsi, mis à part les dipôles de la CCS qui font une vingtaine de mètres, on s'attend à des tolérances du même ordre de grandeur sur le déplacement horizontal dx (resp. vertical dy) et l'angle azimutal θ (resp. l'angle d'élévation ϕ) de chacun des autres aimants (avec la correspondance $1 \text{ m} \leftrightarrow 1 \text{ rad}$).

Les valeurs absolues des quantités listées au paragraphe précédent (paragraphe “Déplacements transverses”) sont alors illustrées en figure 4.7. Les angles sont en radians.

Intéressons-nous par exemple à l'effet d'une rotation d'angle ϕ du dernier quadrupôle QFD2 sur la déviation d'orbite verticale du faisceau au point de collision. Au vu du premier histogramme de la figure 4.7, on a $(\delta y^*/\sigma_y^*) \sim 10^8 \phi$, soit $(\delta y^*/\sigma_y^*) \sim \mathbf{2} (dy/\sigma_y^*)$ en utilisant la correspondance $\phi L/2 \leftrightarrow dy$ évoquée précédemment et sachant que $\sigma_y^* = 19 \text{ nm}$ (cf. Tab. 4.1) et que la longueur du dernier quadrupôle fait approximativement 2 m (cf. Tab. 4.5). Maintenant, si l'on observe le premier histogramme de la figure 4.6, on retrouve immédiatement ce résultat!

Déplacements longitudinaux

Le déplacement longitudinal d'un hexapôle n'a évidemment aucune incidence sur l'orbite du faisceau ni sur la matrice faisceau calculée dans l'approximation linéaire puisque sa matrice de transfert reste égale à l'identité. En revanche, s'il s'agit d'un dipôle ou d'un quadrupôle, un tel déplacement engendre au premier ordre

- une déviation horizontale de la position et de l'angle du faisceau au point d'interaction si l'aimant considéré est un dipôle.
- une dispersion horizontale au point d'interaction pour les dipôles et quadrupôles de la CCS (région dispersive).
- un *waist-shift* horizontal et vertical pour tous les dipôles et quadrupôles de la ligne.

L'effet des déplacements longitudinaux z_{BQ} des dipôles et quadrupôles de la ligne (ou z_B , pour les dipôles uniquement) sur les quantités δx^* , δy^* , D_x^* , $D_{p_x}^*$, z_x^* et z_y^* est alors montré en Fig. 4.8. Ces déplacements sont normalisés à la longueur σ_z du faisceau.

Rotations autour de l'axe longitudinal

Ce type de rotation se rapporte à la rotation d'angle Ψ du chapitre 2. Comme précédemment, cette dernière n'a aucun effet sur les hexapôles de la ligne (pour ce qui est de

l'optique linéaire). Lorsqu'il s'agit de dipôles ou de quadrupôles, les effets engendrés sont les suivants:

- une déviation verticale de la position et de l'angle du faisceau au point d'interaction pour la rotation Ψ_B d'un dipôle.
- une dispersion verticale au point d'interaction pour la rotation Ψ_{BQ} d'un des dipôles ou quadrupôles de la CCS (région dispersive).
- un couplage $(x-y)$ au point d'interaction pour tous les dipôles et quadrupôles de la ligne.

Ces effets sont illustrés en figure 4.9. Les angles Ψ_B et Ψ_{BQ} sont en radians.

Erreurs de champ

Les effets des erreurs de champ dans les dipôles et quadrupôles de la ligne ($\delta k_{BQ}/k_{BQ}$ ou $\delta h_B/h_B$ pour les dipôles uniquement) sur le faisceau au point d'interaction sont illustrés en figure 4.10. Ils sont rigoureusement du même type que ceux générés par un déplacement longitudinal de ces aimants⁵.

Enfin, le dernier type d'erreur considéré ici est celui des harmoniques quadrupolaires dans le champ des dipôles. Les effets engendrés sont les suivants:

- une dispersion horizontale (resp. verticale) au point d'interaction pour une erreur de champ quadrupolaire droit k_1^+ (resp. tourné k_1^-) des dipôles de la ligne.
- un *waist-shift* horizontal et vertical (resp. un couplage $(x-y)$) au point d'interaction pour une erreur k_1^+ (resp. k_1^-).

En figure 4.11, les erreurs k_1^+ et k_1^- sont normalisées par le carré de la courbure des différents dipôles de la ligne, $h_B^2 = 1/\rho_B^2$. D'après nos conventions (cf. Tab. 1.2), elles sont reliées aux coefficients multipolaires usuels, b_2 et a_2 , par

$$b_2 = r_0 k_1^+ \rho_B \quad \text{et} \quad a_2 = -r_0 k_1^- \rho_B$$

où r_0 est le rayon de référence auquel s'effectue la mesure de l'harmonique considérée (voir par exemple Ref. [26] pour la définition des coefficients multipolaires a_n et b_n).

5. Le déplacement longitudinal ds d'un aimant quelconque de la ligne peut aussi s'interpréter comme une erreur de champ localisée en entrée et en sortie de l'élément considéré.

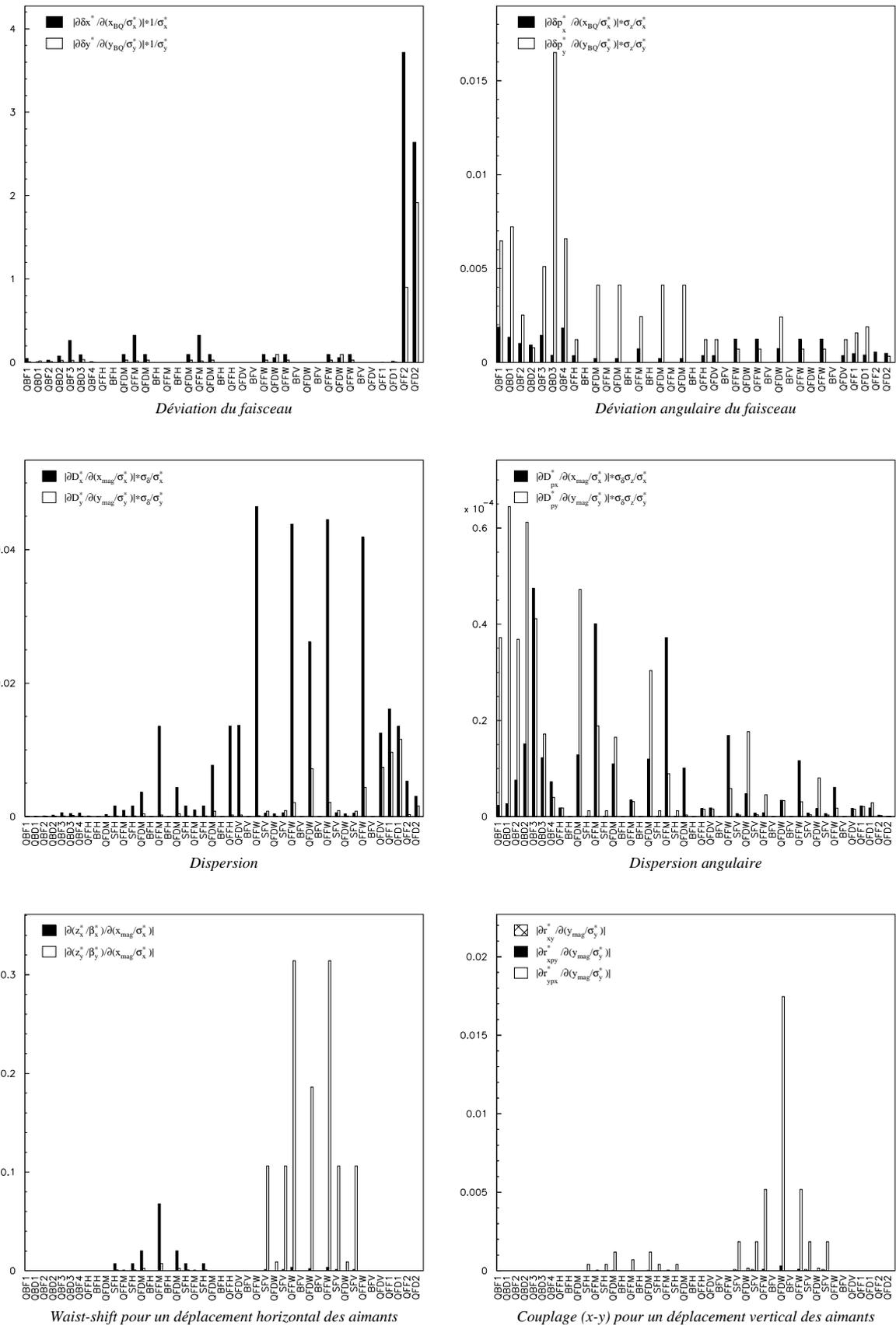


FIG. 4.6 – Effets engendrés par les déplacements transverses des aimants de la ligne (BMS–FFS)

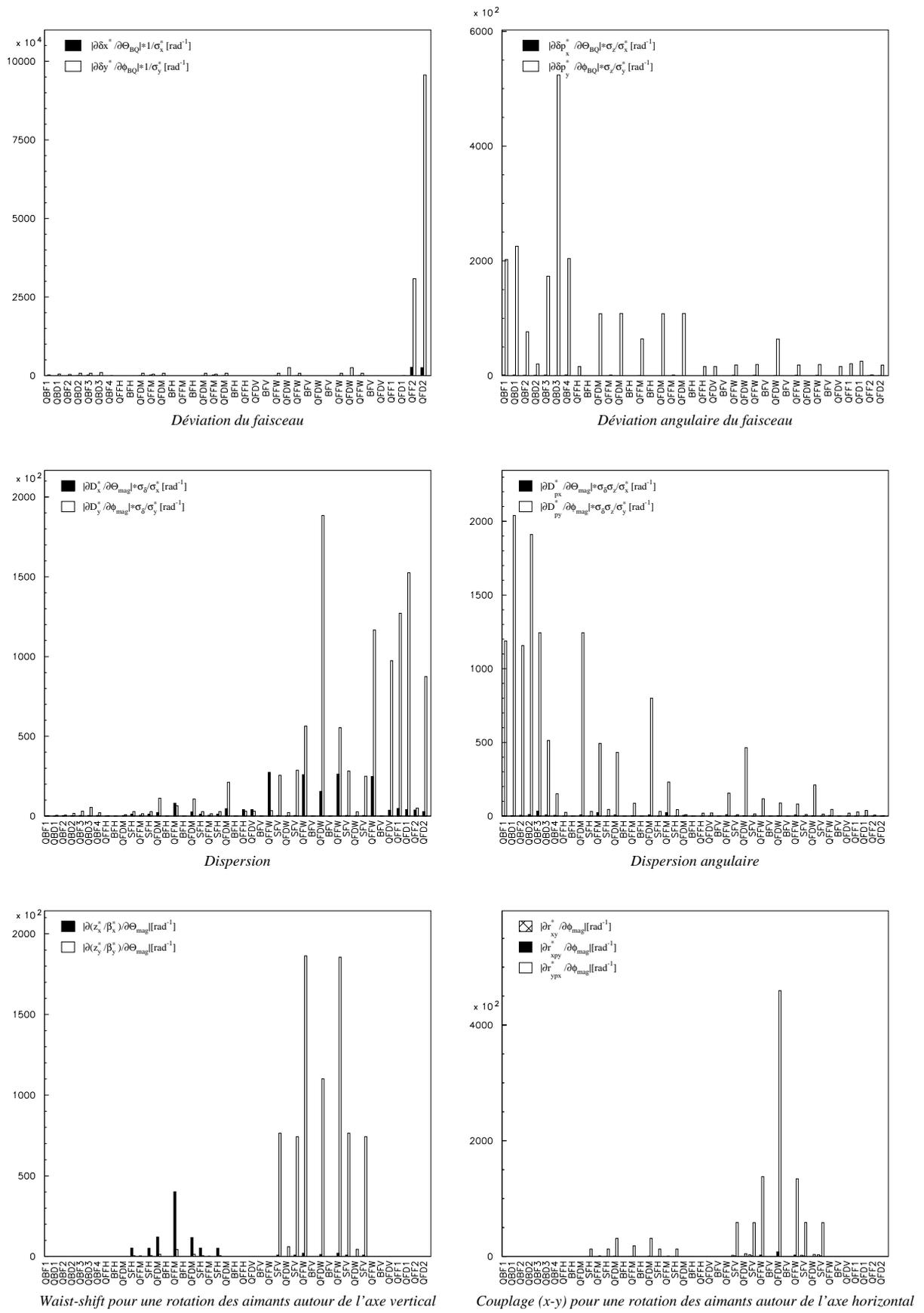


FIG. 4.7 – Effets engendrés par les rotations transverses des aimants de la ligne (BMS–FFS)

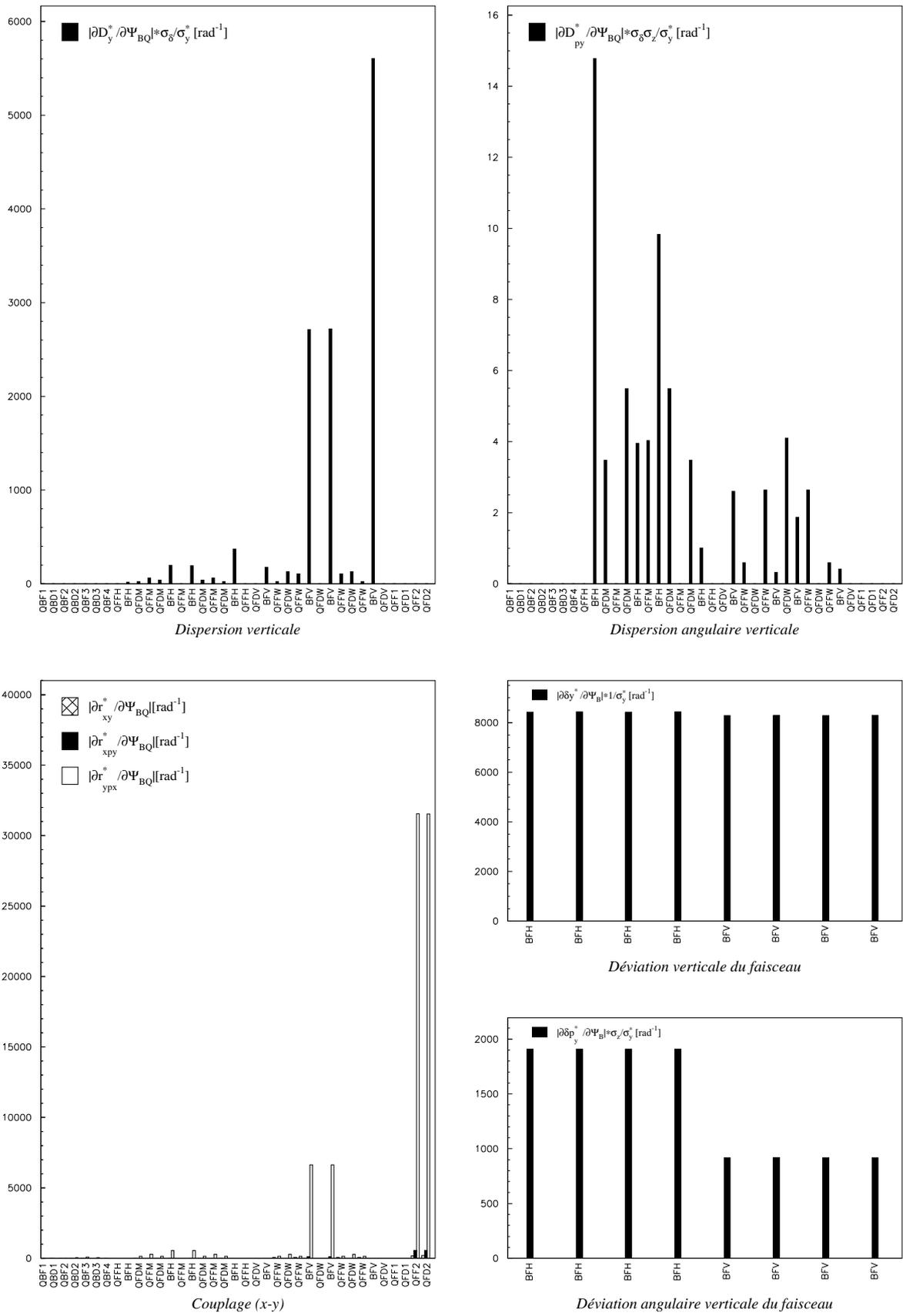


FIG. 4.9 – Effets engendrés par les rotations des dipôles et quadrupôles de la ligne (BMS–FFS) autour de l’axe longitudinal

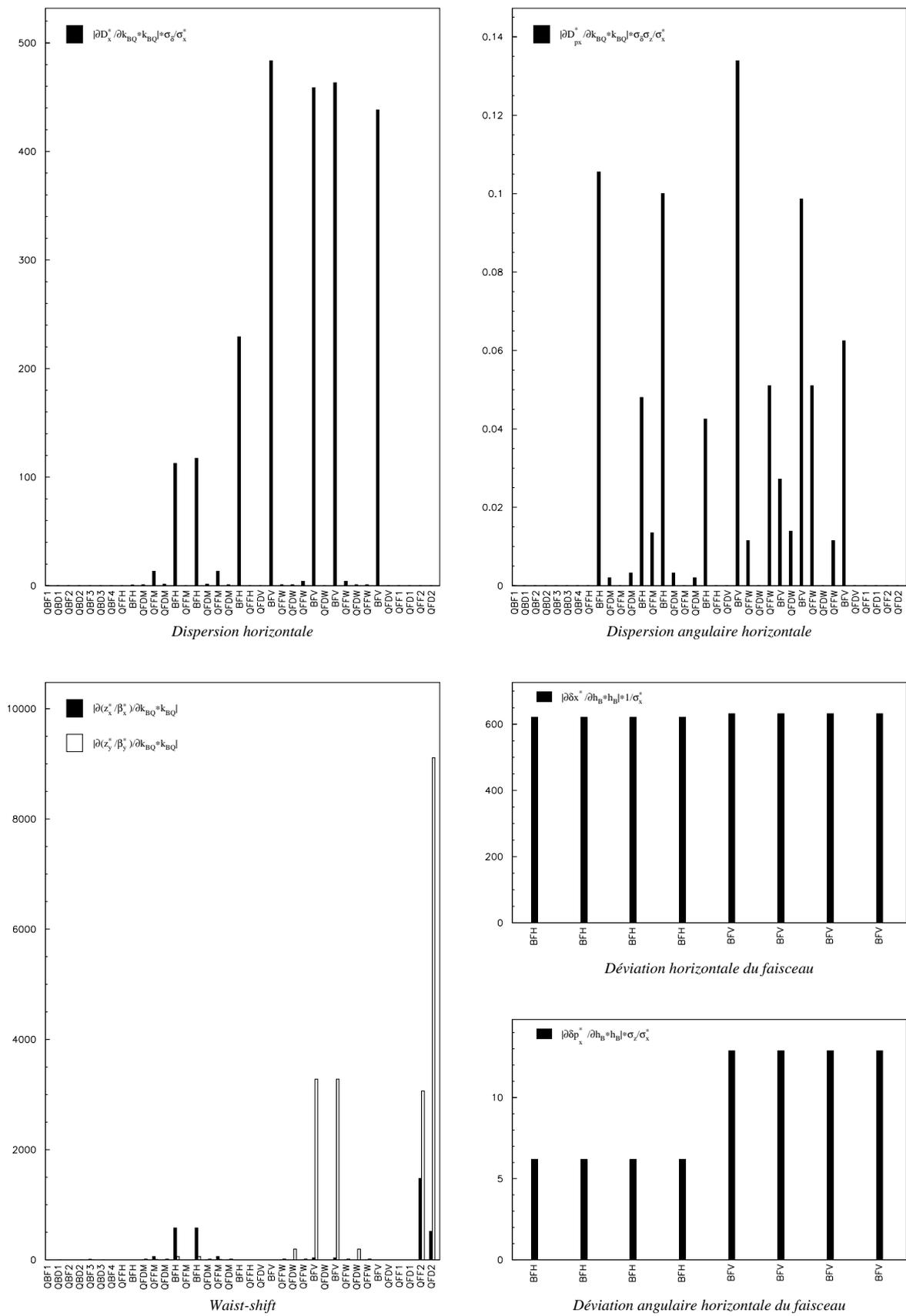


FIG. 4.10 – Effets engendrés par les erreurs de champ dans les dipôles et quadrupôles de la ligne (BMS-FFS)

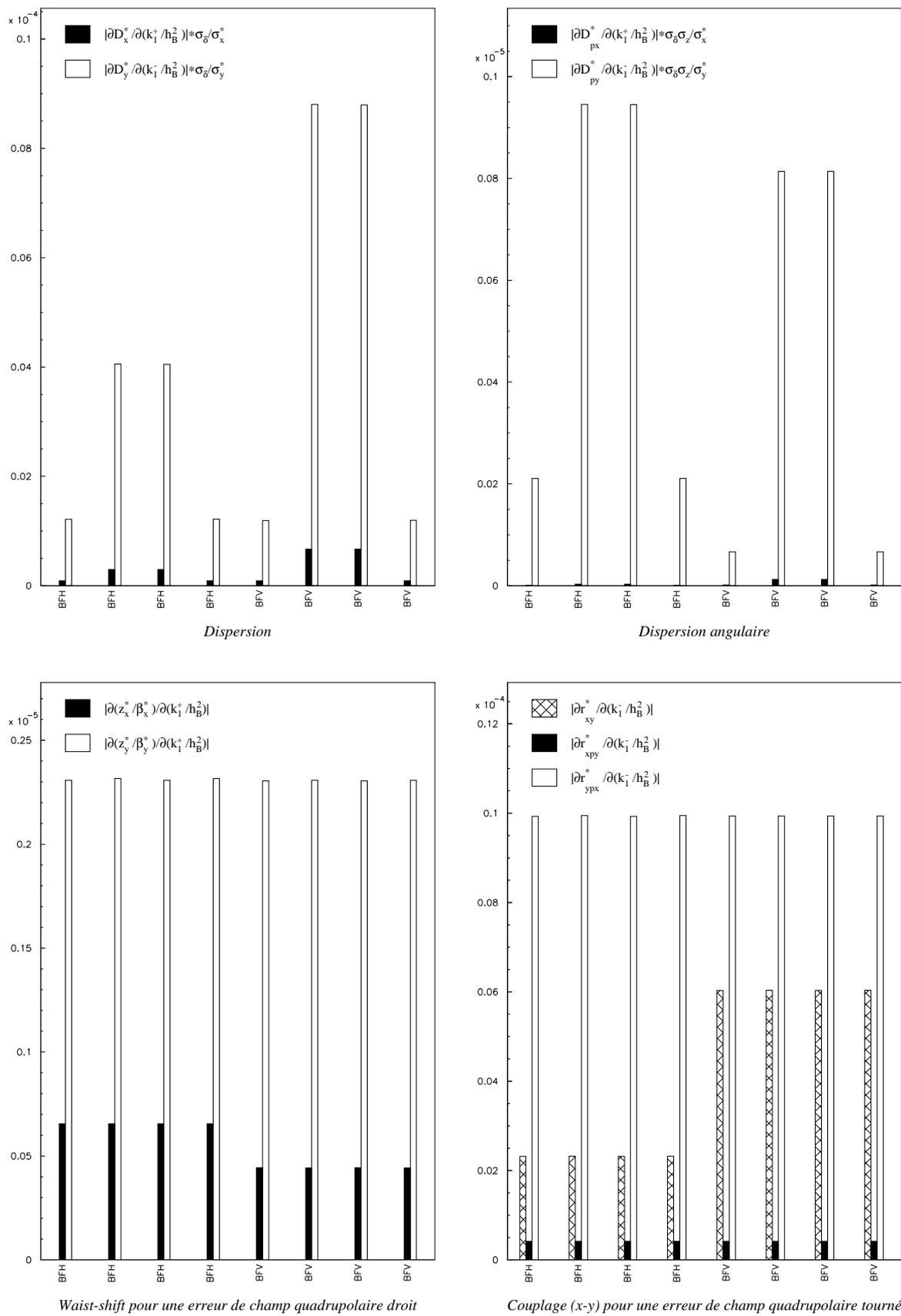


FIG. 4.11 – Effets engendrés par les erreurs de champ quadrupolaire dans les dipôles de la ligne (BMS–FFS)

4.2.2 Exemples

L'objectif de cette sous-section est de valider par une méthode directe certains des résultats remarquables observés sur la série d'histogrammes précédents.

Sensibilité des quantités δx^* et δp_x^* par rapport aux déplacements longitudinaux des dipôles de la CCS

Dans un premier temps, tâchons de comprendre pourquoi le déplacement longitudinal ds d'un des dipôles de la CCS crée une déviation d'orbite horizontale du faisceau au point de collision qui ne dépend pas du dipôle considéré (voir les deux derniers histogrammes de la figure 4.8):

$$\frac{|\delta x^*|}{\sigma_x^*} \sim \mathbf{0.042} \frac{|ds|}{\sigma_z} \quad \text{et} \quad \frac{|\delta p_x^*|}{(\sigma_x^*/\sigma_z)} \sim \mathbf{2.3 \cdot 10^{-4}} \frac{|ds|}{\sigma_z} . \quad (4.1)$$

Remarquons tout d'abord que ces dipôles sont de même longueur, $L \sim 20$ m, et que leur force respective sont deux à deux identiques en valeur absolue (cf. Tab. 4.4), $\alpha \sim \pm 7.7 \cdot 10^{-4}$ rad selon qu'il s'agit des dipôles de la CCSH ou de ceux de la CCSV. Ainsi, les quantités s_α , $\delta X_{\text{in}}^{(1)}$ et $\delta X_{\text{out}}^{(1)}$ définies à la sous-section 2.3.3 valent respectivement

$$s_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sin \alpha \sim \alpha = \pm 7.7 \cdot 10^{-4} \quad , \quad c_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \cos \alpha \sim 1 \quad ,$$

$$\delta X_{\text{in}}^{(1)} = (0, 0, 0, 0, -ds/\beta_0, 0) \quad \text{et} \quad \delta X_{\text{out}}^{(1)} = (s_\alpha ds, 0, 0, 0, c_\alpha ds/\beta_0, 0) .$$

En reprenant la section 2.3 traitant des erreurs géométriques, l'*offset* δX à la sortie de l'un des dipôles considérés vaut donc, au premier ordre dans le défaut ds ,

$$\delta X = \delta X_{\text{out}}^{(1)} + R_{\text{bend}}^{(0)} \delta X_{\text{in}}^{(1)} \sim \pm (|\alpha| ds, 0, 0, 0, 0, 0) .$$

Il s'agit maintenant de transporter la quantité δX jusqu'au point d'interaction mais commençons par introduire quelques notations et par faire les quelques approximations suivantes.

- Tout d'abord, on néglige la focalisation du faisceau au niveau des dipôles (leur force étant relativement faible, ils agissent comme de simples *drifts* sur le mouvement transverse des particules) et l'on se place dans l'approximation "lentille mince" pour les quadrupôles de la CCS.
- On note BFH_i , $i = 1 \dots 4$, (resp. BFV_i , $i = 1 \dots 4$) le $i^{\text{ème}}$ dipôle de la CCSH (resp. de la CCSV). On désigne par CELLH_i , $i = 1 \dots 4$, (resp. par CELLV_i , $i = 1 \dots 4$) la $i^{\text{ème}}$ maille FODO de la CCSH (resp. de la CCSV) d'avance de phase $\mu = \mu_x = \mu_y = 90^\circ$

et de longueur $2L_F$ avec $L_F \sim 21$ m (cf. Tab. 4.4). Si g est la force intégrée d'un demi-quadrupôle de la CCS (avec la convention $g > 0$), alors $gL_F = \sin(\mu/2) = \sqrt{2}/2$ avec $g \sim 0.035$ (cf. Tab. 4.4). Les matrices R associées à chacune de ces mailles et projetées dans le plan $(x-x')$ sont donc, avec des notations évidentes,

$$\begin{cases} R_h \stackrel{\text{def}}{=} R_{\text{CELLH}_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_h \\ -1/\lambda_h & 0 \end{pmatrix} \\ R_v \stackrel{\text{def}}{=} R_{\text{CELLV}_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_v \\ -1/\lambda_v & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

où $\lambda_{h,v} = 2L_F(1 \pm gL_F) = 2L_F(1 \pm \sqrt{2}/2)$. On note au passage que $R_H^2 = R_V^2 = -\mathbf{1}$.

• La matrice R relative au télescope final et projetée dans le plan $(x-x')$ est notée R_{FT} et est donnée par

$$R_{\text{FT}} = \begin{pmatrix} -1/m_x & 0 \\ 0 & -m_x \end{pmatrix}$$

où $m_x = 15$ est la démagnification horizontale du faisceau.

• On désigne enfin par R_{h_i} (resp. par R_{v_i}) la matrice de transfert projetée dans le plan $(x-x')$ de la sortie du dipôle BFH_{*i*} (resp. BFV_{*i*}) jusqu'au point de collision.

En utilisant les notations précédentes et en s'inspirant de la figure Fig. 4.2, il vient

$$\begin{aligned} R_{h_1} &= R_{\text{FT}} R_v^4 R_h^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2g & 1 \end{pmatrix} \\ &= R_{\text{FT}} R_v^4 R_h^4 \left(\begin{pmatrix} 1 & L_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/m_x & L_F/m_x \\ -g m_x & -(1-gL_F)m_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$R_{h_2} = R_{\text{FT}} R_v^4 R_h^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/m_x & 0 \\ -g m_x & m_x \end{pmatrix}$$

$$R_{h_3} = -R_{h_1} \quad \text{et} \quad R_{h_4} = -R_{h_2} \quad \text{en utilisant} \quad R_h^2 = -\mathbf{1}$$

puis, en changeant g en $-g$, on a immédiatement

$$R_{v_1} = \begin{pmatrix} -1/m_x & L_F/m_x \\ g m_x & -(1+gL_F)m_x \end{pmatrix}$$

$$R_{v_2} = \begin{pmatrix} 1/m_x & 0 \\ g m_x & m_x \end{pmatrix}$$

$$R_{v_3} = -R_{v_1} \quad \text{et} \quad R_{v_4} = -R_{v_2} \quad \text{en utilisant} \quad R_v^2 = -\mathbf{1} .$$

Les coefficients de matrice $(R_{h_i})_{11}$ et $(R_{v_i})_{11}$ sont donc deux à deux égaux en valeur absolue et il en est de même pour les coefficients $(R_{h_i})_{21}$ et $(R_{v_i})_{21}$:

$$|(R_{h_i})_{11}| = |(R_{v_i})_{11}| = 1/m_x \quad \text{et} \quad |(R_{h_i})_{21}| = |(R_{v_i})_{21}| = g m_x, 1 \leq i \leq 4.$$

Ainsi, indépendamment du dipôle considéré dans la CCS et d'après tout ce qui précède, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|\delta x^*|}{\sigma_x^*} = \frac{|\alpha| \sigma_z}{m_x \sigma_x^* \sigma_z} \frac{|ds|}{\sigma_z} = \frac{7.7 \cdot 10^{-4} \times 0.7 \cdot 10^{-3}}{15 \times 845 \cdot 10^{-9}} \frac{|ds|}{\sigma_z} \sim \mathbf{0.043} \frac{|ds|}{\sigma_z} \\ \frac{|\delta p_x^*|}{(\sigma_x^*/\sigma_z)} = \frac{|\alpha| g m_x \sigma_z^2}{\sigma_x^* \sigma_z} \frac{|ds|}{\sigma_z} = \frac{7.7 \cdot 10^{-4} \times 0.035 \times 15 \times 0.7^2 \cdot 10^{-6}}{845 \cdot 10^{-9}} \frac{|ds|}{\sigma_z} \sim \mathbf{2.35 \cdot 10^{-4}} \frac{|ds|}{\sigma_z}, \end{array} \right.$$

à comparer avec les relations 4.1 issues d'une lecture directe de la figure 4.8 !

Enfin, par des raisonnements analogues, nous pourrions comprendre pourquoi tous les dipôles de la CCS ont la même sensibilité aux erreurs de champ (resp. aux erreurs d'angle ψ) en terme de déviation d'orbite horizontale (resp. verticale) du faisceau au point de collision (voir les deux derniers histogrammes des figures 4.9 et 4.10).

Sensibilité élevée du quadrupôle central de la CCSV par rapport à un déplacement vertical dy

Intéressons-nous maintenant au couplage $(y - x')$ étonnamment élevé, généré au point de collision par un déplacement vertical dy du quadrupôle QFDW central de la CCSV (voir le dernier histogramme de la Fig. 4.6):

$$\left| r_{yp_x^*} \right| \sim \mathbf{0.018} \frac{|dy|}{\sigma_y^*}. \quad (4.2)$$

Comme annoncé à la sous-section 4.2.1, ce couplage provient d'une erreur de champ quadrupolaire tourné δK_1^- engendrée au niveau des deux hexapôles SFV qui lui succèdent et au sein desquels la trajectoire centrale a été déviée d'une quantité δy_s ; rappelons également que cet effet est quasi inexistant pour tous les aimants situés en dehors des deux paires d'hexapôles de la CCSH ou en dehors de celles de la CCSV. De plus, les hexapôles SFV ayant une force intégrée égale à $K_2 L_s \sim 48 \text{ m}^{-2}$ presque cinq fois supérieure à celle les hexapôles SFH de la CCSH (cf. Tab. 4.4), on comprend que le quadrupôle central de la CCSH soit bien moins sensible (en terme de couplage $(y - x)$ généré à l'IP) et on a

$$\delta g^- = 2 K_2 L_s \delta y_s \quad (4.3)$$

où δg^- est la force de l'erreur de champ δK_1^- intégrée sur la longueur des deux hexapôles SFV considérés; à l'avenir, ces derniers seront supposés infiniment minces et superposés au

dernier quadrupôle QFDW de la CCSV.

Tâchons maintenant de quantifier la déviation d'orbite verticale δy_s au niveau des deux hexapôles SFV. Le quadrupôle central y -focalisant QFDW possède une force intégrée $2g \sim 0.07 \text{ m}^{-2}$ (cf. Tab. 4.4); à sa sortie, le faisceau subit donc une déviation angulaire verticale $\delta y' = 2g dy$; enfin, puisque celui-ci est en quadrature de phase par rapport aux deux hexapôles considérés, l'*offset* δy_s est maximal au niveau de ces derniers et on a

$$\delta y_s = R_{34} \delta y' = 2 R_{34} g dy \quad (4.4)$$

où R_{34} est le coefficient (3,4) de la matrice R entre la sortie du quadrupôle central QFDW et l'entrée du quadrupôle QFDW qui lui succède:

$$R_{34} = \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & L_F \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2g & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & L_F \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right)_{12} = 2 L_F (1 + g L_F) = 2 L_F (1 + \sqrt{2}/2) . \quad (4.5)$$

Au passage, comme les deux quadrupôles QFFW (situés immédiatement de part et d'autre du quadrupôle central QFDW) ont des avances de phase $\mu_y \sim 90 \pm 45^\circ$ par rapport à la paire d'hexapôles considérée, on comprend bien pourquoi ceux-ci sont moins sensibles aux déplacements verticaux en terme de couplages $(x - y)$ (consulter une fois de plus le dernier histogramme de la figure 4.6).

Ceci étant dit, en regroupant les égalités 4.3, 4.4 et 4.5, tout se résume donc à l'analyse d'une erreur de champ quadrupolaire tourné δg^- localisée dans le dernier quadrupôle QFDW de la CCSV avec

$$\delta g^- = 8(1 + \sqrt{2}/2) g K_2 L_s L_F dy . \quad (4.6)$$

Si maintenant R_0 (resp. $R_0 + \delta R$) désigne la matrice R relative à la ligne sans erreurs (resp. avec l'erreur δg^-) et projetée dans l'espace (x, x', y, y') , alors on a

$$\delta Q \stackrel{\text{def}}{=} \delta R R_0^{-1} = R_{>} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta g^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta g^- & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{>}^{-1}$$

où $R_{>}$ est la matrice R projetée dans l'espace (x, x', y, y') , de la sortie du dernier quadrupôle QFDW de la CCSV jusqu'au point de collision:

$$R_{>} = - \begin{pmatrix} 1/m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_F & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2g & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_F & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\text{soit } R_{>} = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/m_x & L_F(\sqrt{2}-2)/m_x & 0 & 0 \\ g m_x (1+\sqrt{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\sqrt{2}+1)/m_y & -L_F(\sqrt{2}+2)/m_y \\ 0 & 0 & g m_y (\sqrt{2}-1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous calculs faits, on obtient finalement

$$\delta Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \theta_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta_8 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{2 L_F^2 \delta g^-}{m_x m_y}.$$

En reprenant l'expression du coefficient de couplage $r_{yp_x}^*$ en fonction des coefficients de la matrice δQ (cf. sous-section 3.1.2), il vient finalement

$$r_{yp_x}^* = \frac{R_{asp} \theta_8}{\beta_x^*} = -16 (1 + \sqrt{2}/2) \frac{g L_F^3 K_2 L_s \sigma_x^*}{\beta_x^* m_x m_y} \frac{dy}{\sigma_y^*}$$

soit $|r_{yp_x}^*| \sim \mathbf{0.019} \frac{|dy|}{\sigma_y^*},$

à comparer avec la relation 4.2 issue d'une lecture directe de la figure 4.6!

Revenons maintenant à la suite de notre exposé, à savoir l'estimation des tolérances de la ligne (BMS-FFS).

4.2.3 Cas d'un défaut isolé

Les figures 4.12 à 4.19 donnent les tolérances des aimants de la ligne (BMS-FFS) relatives aux différents types d'erreurs envisagées précédemment. La situation étudiée ici est similaire à celle de la sous-section 3.3.1 et le calcul des tolérances se fait à partir de l'un des quatre critères suivants:

1. $\text{Max} \left(|\delta\sigma_x^*/\sigma_x^*|, |\delta\sigma_y^*/\sigma_y^*| \right) \leq 2\%$.
2. $|\delta L/L_0| \leq 2\%$ après une hypothétique correction à la fois de l'angle et de la déviation du faisceau au point d'interaction.
3. $|\delta L/L_0| \leq 2\%$ après une correction de la déviation du faisceau au point d'interaction.
4. $|\delta L/L_0| \leq 2\%$ sans aucune correction.

Les tolérances obtenues à partir des critères 2, 3 et 4 deviennent évidemment de plus en plus serrées. Les critères 1 et 2 sont quant à eux quasi équivalents et donnent, comme attendu, des résultats tout à fait comparables, sauf cas particuliers; en effet, le premier se

base sur un contrôle des fluctuations des tailles faisceau au point d'interaction alors que le second concerne une diminution de la luminosité due uniquement aux erreurs engendrées dans la matrice faisceau (*waist-shift*, couplage $(x-y)$ et dispersion, la déviation d'orbite étant mise à zéro). Le critère de perte de luminosité de 2 % est évidemment arbitraire et critiquable, pouvant conduire à un pessimisme exagéré. Dans la pratique, il est vrai que l'on s'attend à maximiser la luminosité au mieux à 10 ou 20% près. Cependant, vu le nombre élevé d'erreurs mises en jeu, celui-ci reste couramment utilisé pour imposer la tolérance associée à un défaut unique sélectionné dans la ligne.

Dans la seconde série d'histogrammes donnés ci-après, nous avons décidé de montrer l'inverse des résultats ainsi obtenus de sorte que les barres les plus hautes correspondent aux tolérances les plus serrées. Sans trop analyser en détail chacune de ces figures et mis à part les deux quadrupôles du dernier doublet qui, comme prévu, sont les plus sensibles aux erreurs de la ligne, on remarque en particulier

- une sensibilité élevée des dipôles de la CCS à l'égard des erreurs de champ (resp. des erreurs d'angle Ψ) constatée en figure 4.18 (resp. en figure 4.17) et due à la forte dispersion horizontale (resp. verticale) et au *waist-shift* (resp. au couplage $(x-y)$) qu'ils sont susceptibles de générer à l'IP (voir respectivement les figures 4.10 et 4.9).
- une tolérance serrée de l'ordre de quelques dixièmes de microns pour l'alignement vertical du quadrupôle central QFDW de la CCSV (Fig. 4.13 et 4.16) due au fort couplage $(y-x')$ qu'il peut engendrer au point d'interaction (cf. Fig. 4.6, Fig. 4.7 et sous-section 4.2.2).
- en moyenne, plus d'un ordre de grandeur d'écart entre les tolérances relatives à l'alignement horizontal (Fig. 4.12 et 4.15) et celles relatives à l'alignement vertical des aimants (Fig. 4.13 et 4.16).

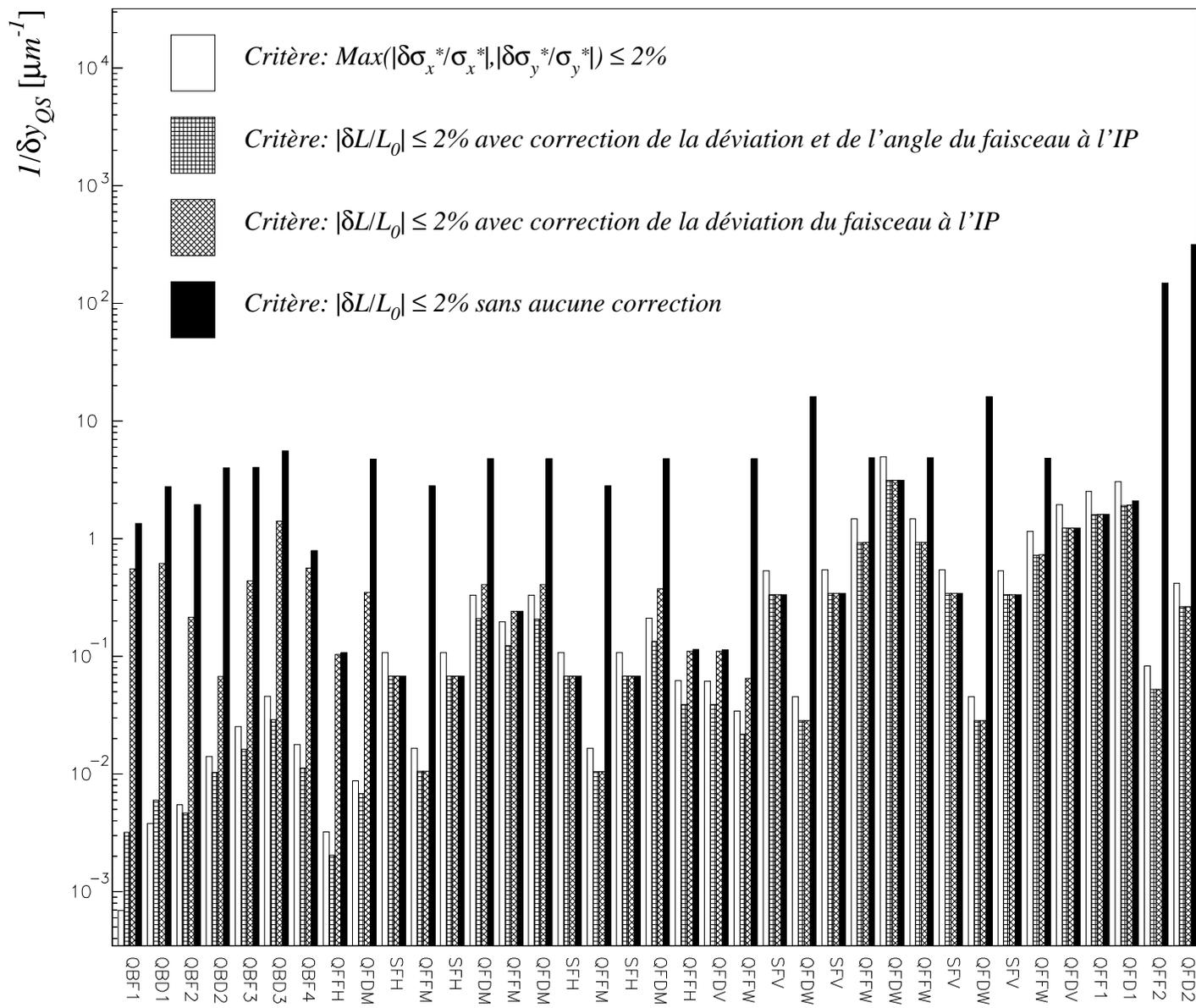


FIG. 4.13 – Tolérances sur les déplacements verticaux des quadrupôles et hexapôles de la ligne (BMS-FFS)

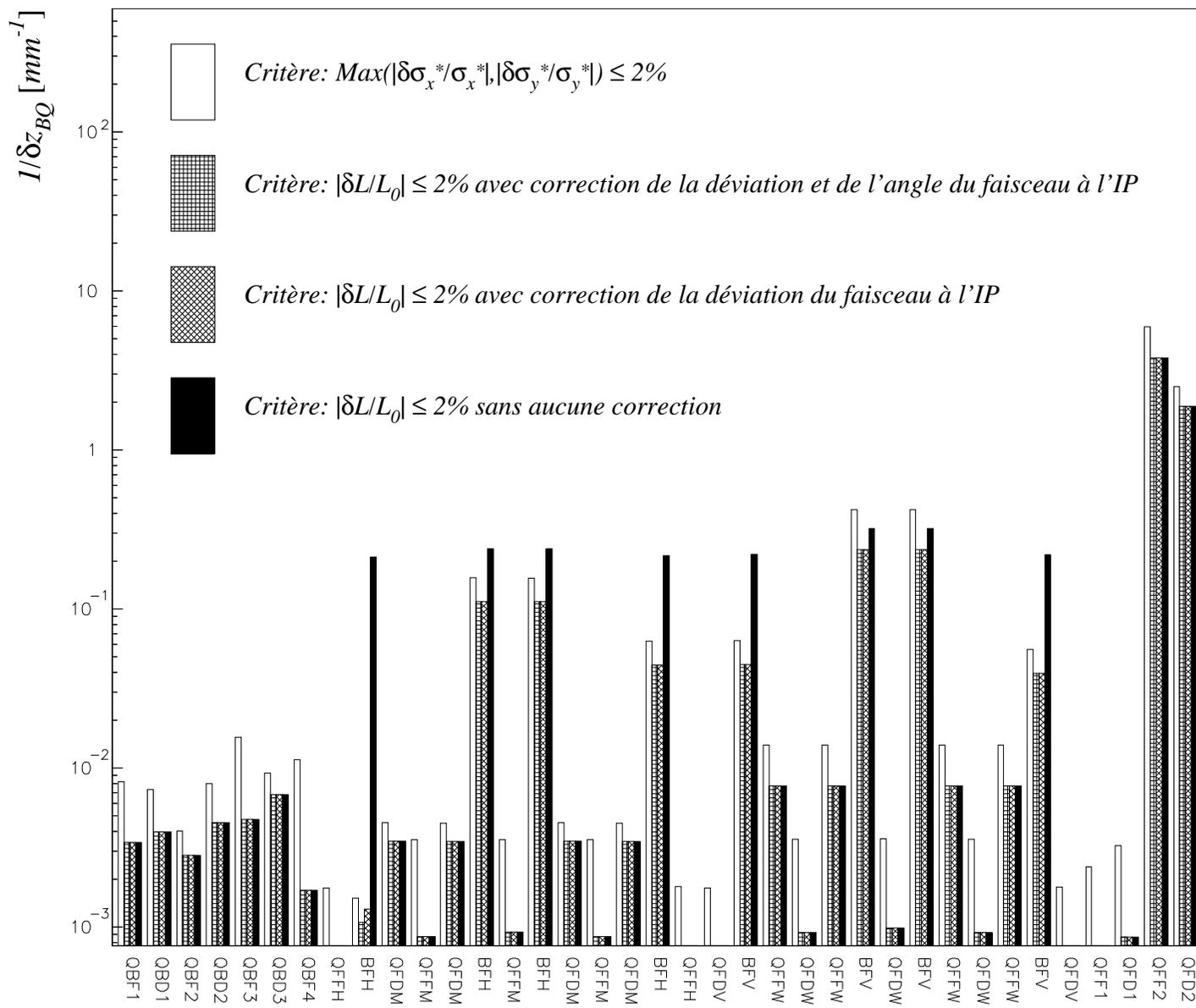


FIG. 4.14 – Tolérances sur les déplacements longitudinaux des dipôles et quadrupôles de la ligne (BMS-FFS)

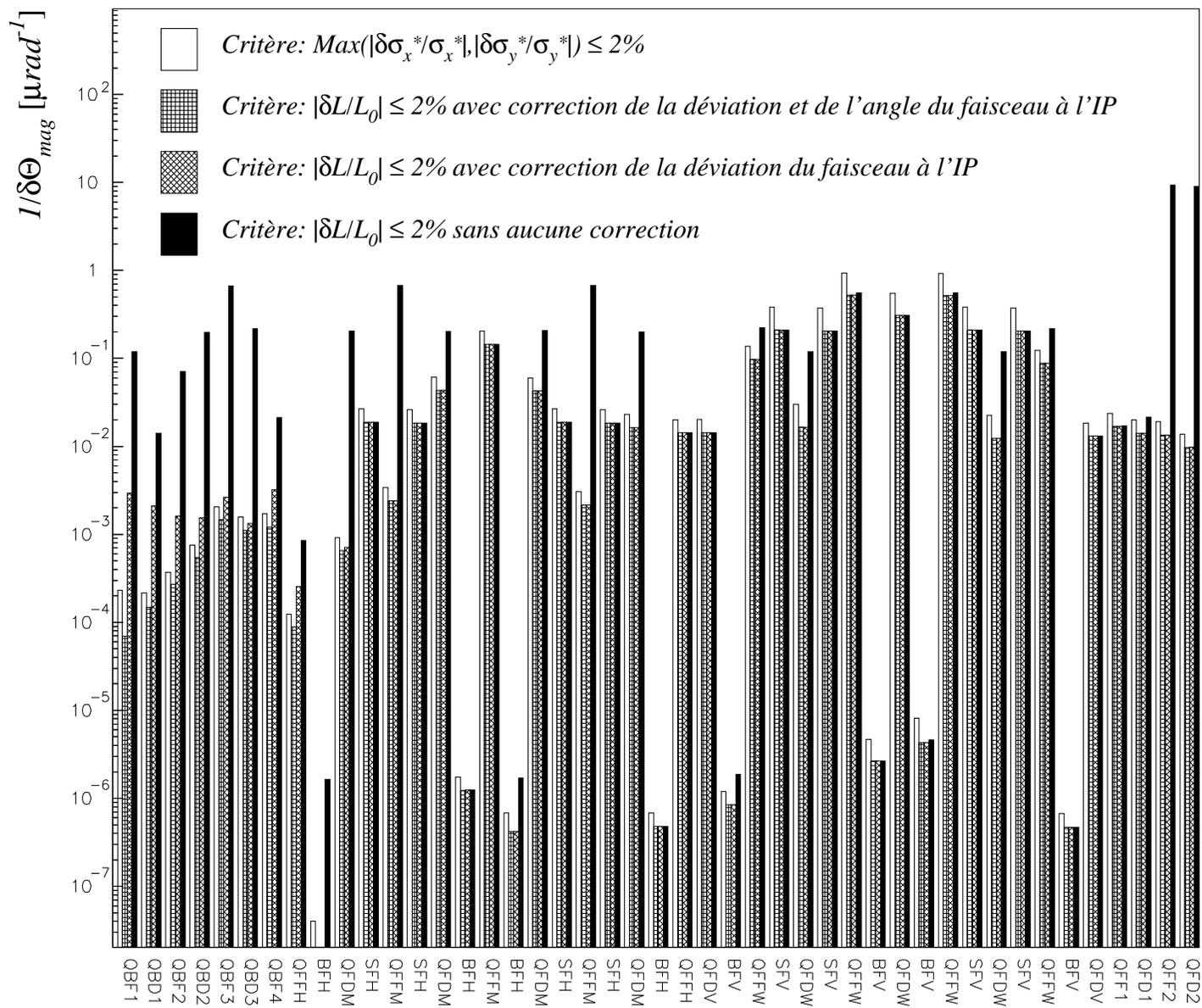


FIG. 4.15 – Tolérances sur l'angle azimutal Θ_{mag} des aimants de la ligne (BMS-FFS)

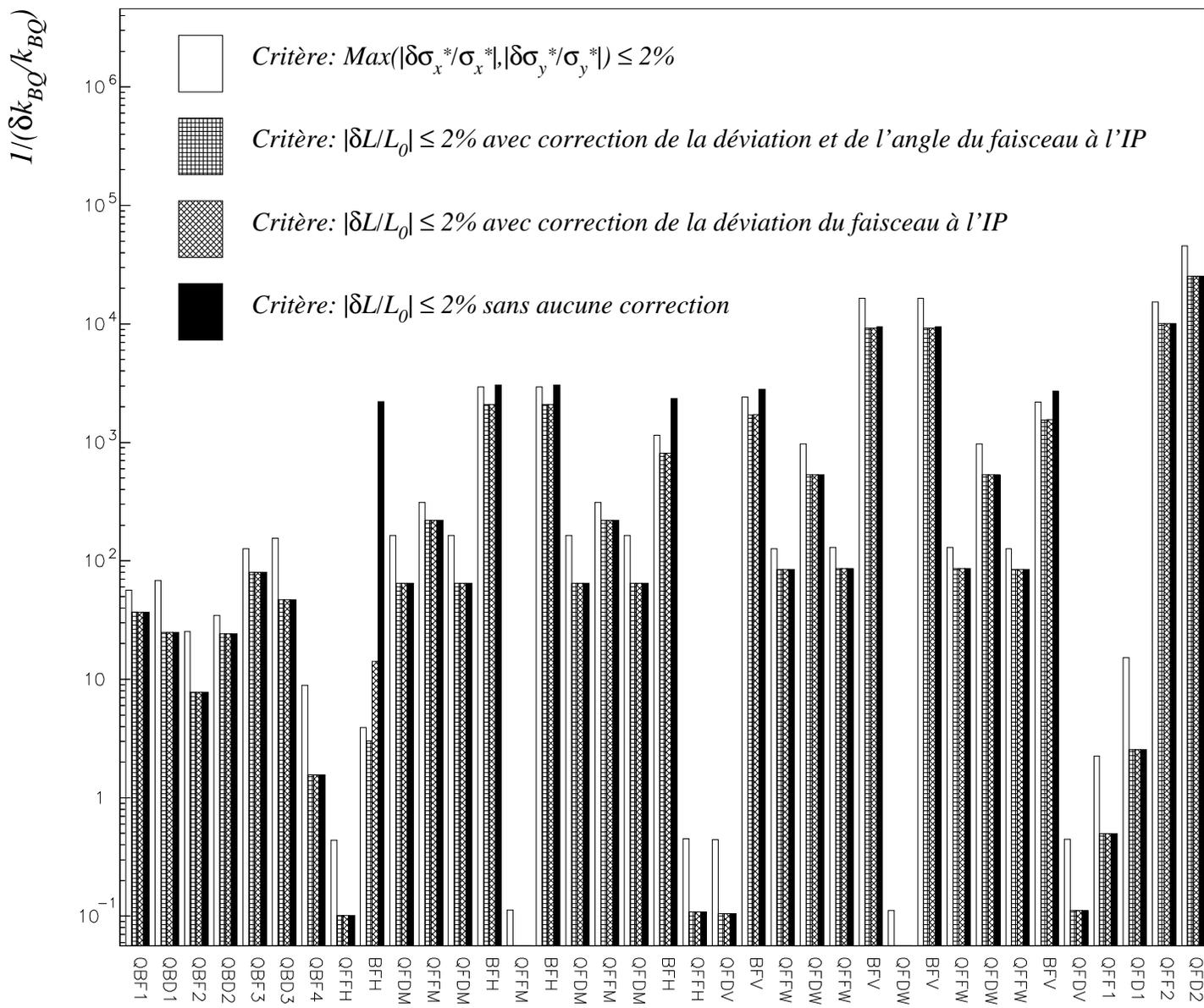


FIG. 4.18 – Tolérances sur les erreurs de champ des dipôles et quadrupôles de la ligne (BMS-FFS)

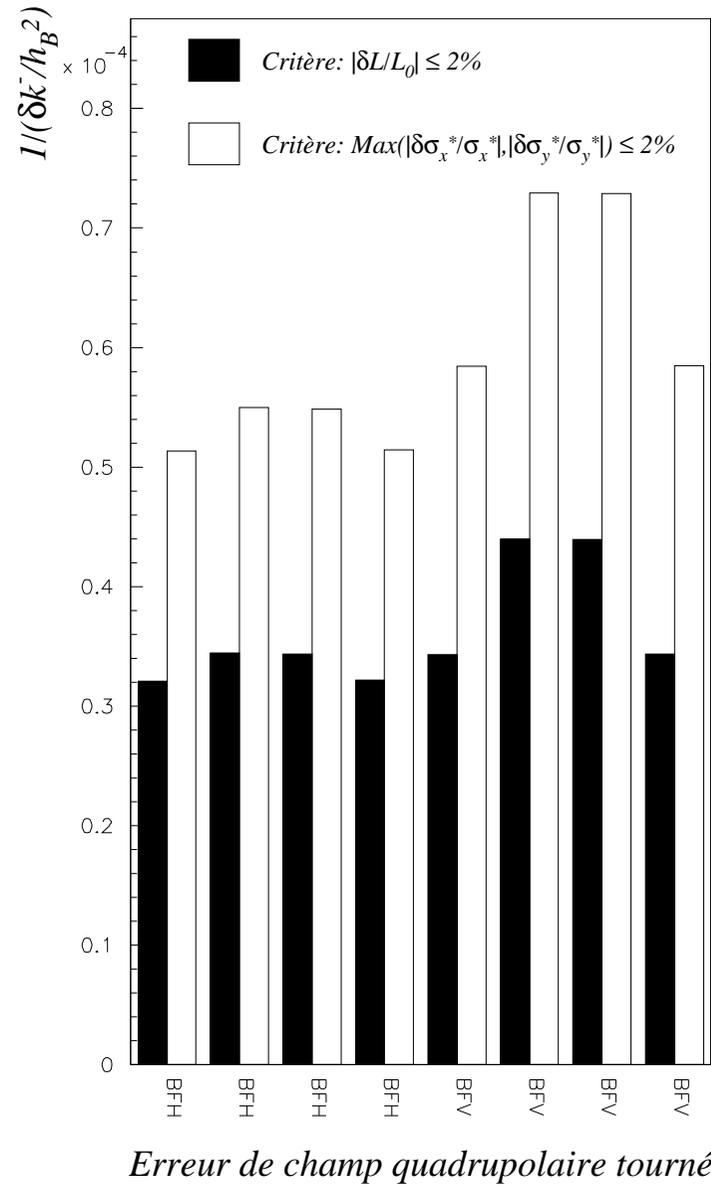
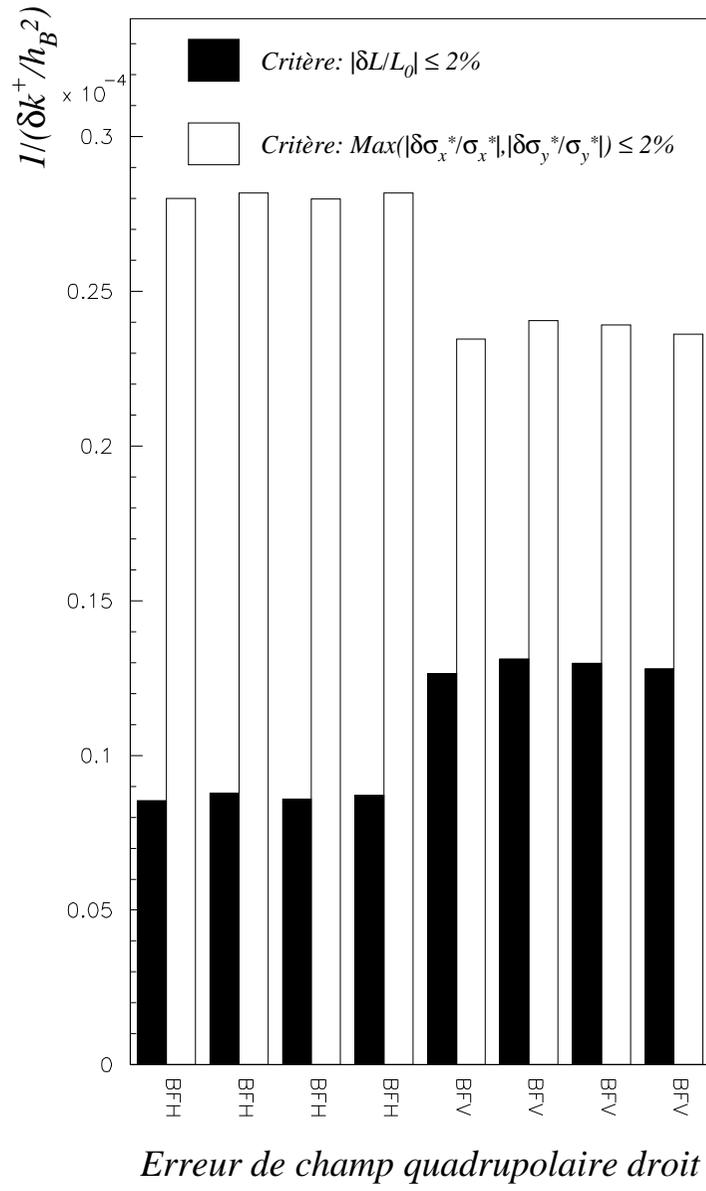


FIG. 4.19 – Tolérances sur les erreurs de champ quadrupolaire des dipôles de la ligne (BMS-FFS)

4.2.4 Cas d'une distribution statistique des défauts sans corrélations

Nous envisageons ici la situation où les défauts de la ligne (BMS–FFS) sont distribués de façon totalement décorrélée (cf. sous-section 3.3.2). On note σ_{ij} le second moment de l'erreur de type j affectée à l'aimant numéro i . En outre, on suppose que la quantité σ_{ij} ne dépend pas de l'aimant considéré: $\sigma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_j^{(mag)}$ quelque soit i . Dans ce modèle, la perte en luminosité au point d'interaction peut être paramétrisée par⁶

$$\langle \delta L/L_0 \rangle = -2\% \times \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_x^{(mag)}}{52 \text{ nm}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y^{(mag)}}{3 \text{ nm}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_s^{(mag)}}{235 \text{ } \mu\text{m}} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\sigma_\Theta^{(mag)}}{76 \text{ nrad}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Phi^{(mag)}}{3 \text{ nrad}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Psi^{(mag)}}{6 \text{ } \mu\text{rad}} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k}{k}}^{(mag)}}{3.2 \cdot 10^{-5}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k^+}{h_B^2}}^B}{5 \cdot 10^4} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k^-}{h_B^2}}^B}{10^4} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$\text{ou } \langle \delta L/L_0 \rangle = -2\% \times \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_x^{(mag)}}{319 \text{ nm}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y^{(mag)}}{35 \text{ nm}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_s^{(mag)}}{1.4 \text{ mm}} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\sigma_\Theta^{(mag)}}{612 \text{ nrad}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Phi^{(mag)}}{69 \text{ nrad}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Psi^{(mag)}}{12 \text{ } \mu\text{rad}} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k}{k}}^{(mag)}}{6.7 \cdot 10^{-5}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k^+}{h_B^2}}^B}{5 \cdot 10^4} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k^-}{h_B^2}}^B}{10^4} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

en incluant ou pas la contribution du dernier doublet. Enfin, après correction de la déviation du faisceau au point d'interaction, on a (dernier doublet inclus)

$$\langle \delta L/L_0 \rangle = -2\% \times \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_x^{(mag)}}{558 \text{ nm}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y^{(mag)}}{203 \text{ nm}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_s^{(mag)}}{238 \text{ } \mu\text{m}} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\sigma_\Theta^{(mag)}}{1 \text{ } \mu\text{rad}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Phi^{(mag)}}{443 \text{ nrad}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Psi^{(mag)}}{7 \text{ } \mu\text{rad}} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k}{k}}^{(mag)}}{3.3 \cdot 10^{-5}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k^+}{h_B^2}}^B}{5 \cdot 10^4} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\frac{\delta k^-}{h_B^2}}^B}{10^4} \right)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

6. Dans la situation présente, on suppose que l'une des deux lignes est sans défauts. Dans le cas contraire, les tolérances que l'on obtient ici doivent être divisées par le facteur $\sqrt{2}$.

Si, maintenant, on ne s'intéresse qu'aux défauts d'alignement transverse des aimants de la ligne, il est clair qu'en l'absence de correction la perte en luminosité reste complètement dominée par les vibrations verticales du dernier doublet (comparaison entre les relations 4.7 et 4.8). Néanmoins, cette contribution disparaît si la déviation relative des deux faisceaux au point de collision peut être mesurée puis corrigée de façon systématique (comparaison entre les relations 4.7 et 4.9). Dans ce cas, la perte en luminosité ne dépend plus que du grossissement des tailles faisceau transverses au point de collision auquel se greffe une légère contribution venant de l'angle de croisement vertical des deux faisceaux.

Conclusion

Le principal objectif de ce travail était d'élaborer une méthode de calcul très générale permettant l'analyse détaillée et systématique de la sensibilité d'une ligne optique quelconque à l'égard de différents types de défauts envisagés (erreurs de champ et défauts d'alignement des aimants) puis de l'appliquer à l'étude de la ligne de focalisation finale (FFS) de TESLA. Ce but a été atteint.

Les calculs formels aboutissant aux résultats analytiques donnés dans ce mémoire⁷ ainsi que l'écriture du programme **FFSER2** utilisant cette nouvelle méthode et générant les séries d'histogrammes du chapitre 4 ont représenté une part importante du travail effectué; cependant, j'ai préféré insister ici sur la mise en forme de la méthode elle-même. Cette dernière a été incorporée dans le programme **FFADA** [27] écrit en vue d'aider à la conception et à l'analyse des systèmes de focalisation finale des futurs collisionneurs linéaires. Elle a été utilisée pour l'estimation des tolérances des aimants de la FFS de TESLA [22] et de SBLC [22] ainsi que pour recalculer la sensibilité aux erreurs du SLC avec ses paramètres de faisceau actuel [28]. De plus, les résultats obtenus avec **FFSER2** ont toujours été parfaitement concordants avec d'autres provenant des nombreux *trackings* effectués sur la FFS de TESLA.

Insistons également sur le fait que seule une partie des résultats obtenus par **FFSER2** est actuellement exploitée pour quantifier l'effet des erreurs sur les caractéristiques transverses du faisceau au point d'interaction (IP). Seules les dérivées premières de l'*offset* δX et de la matrice R par rapport aux défauts de la ligne ainsi que certaines dérivées secondes des éléments de matrice R_{11} et R_{33} sont utilisées pour décrire les fluctuations de tailles faisceau ou de luminosité à l'IP. Les dérivées secondes des autres coefficients de matrice R et les

7. Certains de ces résultats (comme les dérivées de matrices R et T par rapport aux harmoniques quadrupolaires et hexapolaires tournées ou comme les matrices U des dipôles, quadrupôles et hexapôles avec un choix de coordonnées symplectiques) étaient à l'heure actuelle et à ma connaissance inexistant dans la littérature.

dérivées premières de matrice T par rapport aux erreurs restent quant à elles inexploitées pour l’instant. De plus, nous n’avons considéré dans ce mémoire que deux cas particuliers pour ce qui est de la loi de distribution statistique des erreurs le long de la ligne: le cas du “défaut isolé” et le cas d’une distribution de moyenne nulle et sans corrélations. Néanmoins, comme nous le remarquons au chapitre 3, la méthode reste complètement adaptée à l’étude de tout autre type de distribution plus réaliste, avec ou sans corrélations (se reporter par exemple à la référence [20] utilisant cet algorithme de calcul pour une estimation du temps caractéristique de la dégradation de la FFS de TESLA due au *ground motion*).

Enfin, à l’opposé des méthodes conventionnelles de *tracking*, cette approche offre incontestablement les deux avantages suivants: sa rapidité d’exécution (FFSER2 prend moins de cinq minutes pour parcourir l’ensemble de la (BMS–FFS) qui compte une cinquantaine d’éléments) et surtout la possibilité d’une analyse systématique et synthétique de la sensibilité d’une ligne de transfert quelconque à l’égard d’un nombre élevé de défauts dans ses aimants.

Bibliographie

- [1] F. Abe et al. [CDF Coll.]. Phys. Rev. **D50** (1994), p. 2966, et Phys. Rev. Lett. **74** (1995), p. 2626.
- [2] J. Jersak, E. Laermann et P. M. Zerwas. Phys. Rev. **D25** (1982), p. 1218.
- [3] K. L. Brown. *A First- and Second-Order Matrix Theory for the design of Beam Transport Systems and Charged Particle Spectrometers*. SLAC Rep. No. 75 and Adv. Particle Phys. **1**, p. 71–134, 1967.
- [4] A. J. Dragt (Maryland U.). *Lectures on Nonlinear Orbit Dynamics*. In Batavia 1981, Proceedings, Physics Of High Energy Particle Accelerator, AIP Conf. Proc. **87**, p. 147–313, 1981.
- [5] M. Berz. *Arbitrary order description of arbitrary optical systems*. Nucl. Ins. Meth. **A298**, p. 426–440, 1990.
- [6] L. M. Healy, A. J. Dragt, I. M. Gjaja. *Computation of error effects in nonlinear Hamiltonian systems using Lie algebraic methods*. J. Math. Phys., Vol. **33**, No. **6**, 1992.
- [7] L. M. Healy, A. J. Dragt. *Concatenation of Lie Algebraic Maps*. Lectures Notes in Physics, Springer–Verlag, 1989.
- [8] G. Leleux. *Complément sur la physique des accélérateurs*. Cours de DEA (universités Paris VI, VII et XI), “Physique et technologie des grands instruments”, 1993.
- [9] M. Abramowitz et I. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover publications, INC. , New York, 1970.
- [10] F. Ch. Iselin. *Lie Transformations and Transport Equations for Combined–Function Dipoles*. Part. Accel. **17**, p. 143–155, 1985.

- [11] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhnik. Table of integrals, series and products. Corrected and enlarged edition (1980).
- [12] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, p. 574. Second Edition, New York, 1974.
- [13] Hans Grote, F.Christoph Iselin (CERN). *The Mad Program (Methodical Accelerator Design) Version 8.10: User's Reference Manual*. CERN/SL/90-13 (AP) (Rev.3), Jan. 1993.
- [14] Karl L. Brown, Frank Rothacker, David C. Carey, F.C. Iselin (SLAC). *TRANSPORT: a computer program for designing charged particle beam transport systems*. SLAC-0091 Rev.2, May 1977.
- [15] Bruce W. Char et al.. *Maple V Release 3*. University of Waterloo, 1981-1994.
- [16] Karl L. Brown and Roger V. Servranckx. *First and second-order charged particle optics*. SLAC-PUB-3381, July 1984.
- [17] C. Møller. *General Properties of the Characteristic Matrix in the Theory of Elementary Particles I*. K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd., 23, 1 (1945).
- [18] O. Napoly. *The luminosity for beam distributions with error and wakefield effects in linear colliders*. Part. Accel., **40** (1993) 181-203.
- [19] D. Schulte. *Study of Electromagnetic and Hadronic Background in the Interaction Region of the TESLA Collider*. Ph.D. thesis, University of Hamburg, 1996.
- [20] A. Sery, O. Napoly. *Influence of Ground Motion on the Time Evolution of Beam in Linear Colliders*. DAPNIA/SEA/95-04, CE Saclay (1995) et Phys. Rev. E. **53**, p. 5323, 1996.
- [21] *PAW: Physics Analysis Workstation. An Introduction Tutorial*. CERN Geneva, Switzerland, 1995.
- [22] *Conceptual Design of a 500 GeV e+e- Linear Collider with Integrated X-ray Laser Facility*. DESY 97-048.
- [23] Olivier Napoly. Communication privée, 1997.
- [24] D. Burke for the FFTB collaboration. *Results from the Final Focus Test Beam*. Proc. of the IVth European Particle Accelerator Conf., London 1994, Vol. I, p. 23.

- [25] N. J. Walker, J. Irwin, M. Woodley. *Analysis of Higher Order Optical Aberrations in the SLC Final Focus using Lie Algebra Techniques*. SLAC-PUB-6205, April 1993.
- [26] S. Wolff. *Superconducting accelerator magnet design*, vol. II, p. 755. CERN 94-01 (Cern Accelerator School).
- [27] O. Napoly, B. Dunham. *FFADA, Computer Design of Final Focus Systems for Linear Colliders*. Fourth European Particle Accelerator Conference, London, 1994.
- [28] O. Napoly. *Systematic investigation of the SLC final focus tolerances to errors*. SLAC CN-401 (1996) and DAPNIA-SEA 96-10 (1996).

RESUME

Dans le cadre de l'étude des systèmes de focalisation finale pour les futurs collisionneurs linéaires $e^+ e^-$, une nouvelle méthode d'analyse a été mise au point dans le but de quantifier les tolérances d'une ligne optique donnée à l'égard des défauts d'alignement et des erreurs de champ de ses aimants. Utilisant un système de coordonnées symplectiques identique à celui de MAD, le *mapping* associé au transport du faisceau le long de la ligne considérée est calculé jusqu'au troisième ordre dans les non-linéarités de l'équation du mouvement (Hamiltonien tronqué à l'ordre 4). La déviation d'orbite du faisceau ainsi que la matrice R sont développées à l'ordre 2 dans les différents défauts de la ligne, ce qui inclut ainsi les effets croisés générés par deux erreurs distinctes localisées dans deux aimants différents; la matrice T (ordre 2), quant à elle, est calculée jusqu'au premier ordre dans les erreurs et la matrice U (ordre 3) associée à la ligne idéale (sans défauts) est également reproduite. Toutes les sources d'erreurs pouvant affecter le *mapping* d'un élément optique donné jusqu'à sa matrice T ont été prises en compte, à savoir: les défauts d'alignement de l'aimant considéré paramétrisés par six quantités ainsi que les erreurs de champ droit et tourné jusqu'à l'harmonique hexapolaire dans les dipôles, quadropôles et hexapôles de la ligne. Pour son application spécifique aux systèmes de focalisation finale, l'algorithme de calcul envisagé ici inclut ensuite l'estimation des tolérances de la ligne, estimation basée sur le grossissement des tailles transverses du faisceau ou sur la perte en luminosité au point d'interaction. Cette méthode a alors donné lieu à l'écriture du programme FFSE2 interfacé avec le logiciel graphique PAW et permettant d'illustrer à l'aide de nombreux histogrammes l'effet des erreurs sur le faisceau au point de collision et les tolérances qui leur sont associées. L'application à la ligne de focalisation finale de TESLA est exposée en dernier chapitre.

MOTS CLES

Optique de faisceau — *Mapping* — *Offset* δX , matrices R , T et U — Aberrations — Erreurs d'alignement et erreurs de champ — Luminosité — Tolérances — Systèmes de focalisation finale