

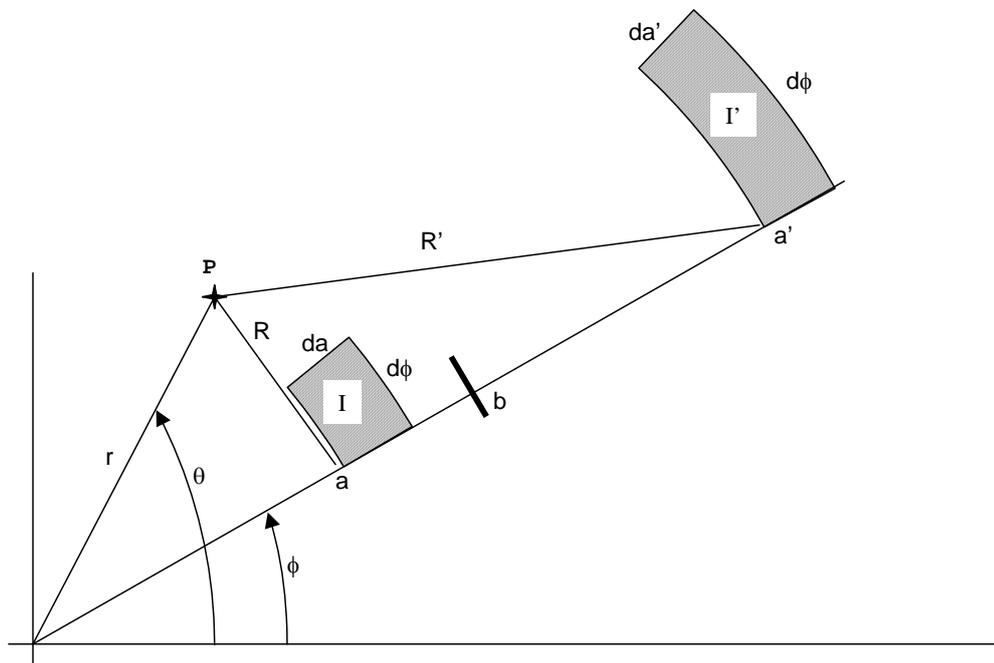
# Formules analytiques du champ principal pour des aimants multipolaires à distribution de courant sinusoïdale en présence de fer

## Introduction

Une recherche bibliographique sur les aimants multipolaires avec une distribution de courant de type sinusoïdal permet de trouver un certain nombre de formules analytiques du champ principal. La plupart traite d'aimants avec une couche épaisse de distribution de courant sans fer ou, inversement, avec une couche très mince de courant avec fer. Le cas complet d'une couche épaisse avec fer n'a été trouvé que dans le papier de J.P. Blewett [1] pour une perméabilité relative du fer infinie. Les formules analytiques, présentées dans ce formulaire, correspondent au dernier cas avec une perméabilité relative du fer  $\mu$  constante.

## Hypothèses

### *Géométrie*



$a$  : rayon sur lequel se situe la distribution de courant principale

$b$  : rayon interne du fer

$a'$  : rayon sur lequel se situe la distribution de courant image du courant principal

$\phi$  : angle auquel se situent les distributions de courant

On s'intéressera au champ généré au point P de coordonnées  $(r, \theta)$ . Ce point se situe respectivement à la distance R et R' des distributions de courant principal en a et image en a'.

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)}$$

$$R' = \sqrt{a'^2 + r^2 - 2a'r \cos(\phi - \theta)}$$

### **Distribution de courant**

I représente le courant principal et I' le courant image. Par définition :

$$I = \iint J a da d\phi \quad \text{et} \quad I' = \iint J' a' da' d\phi$$

où J et J' sont les densités de courant principal et image.

L'application du principe de miroir magnétique [2] donne  $a' = \frac{b^2}{a}$  et  $J' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left(\frac{a}{b}\right)^4 J$  pour lequel  $\mu$  représente la perméabilité relative du fer.

Nous étudierons une distribution de courant principal parfaitement sinusoïdale :

$$J = J_0 \cos(p\phi) \quad \text{où } p \text{ représente le nombre de pôles divisé par deux.}$$

Cette distribution donne une distribution image :

$$J' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left( \frac{\left(\frac{b^2}{a'}\right)}{b} \right)^4 J_0 \cos(p\phi) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left(\frac{b}{a'}\right)^4 J_0 \cos(p\phi)$$

### **Calcul du potentiel vecteur**

Le potentiel vecteur au point P s'écrit de la manière suivante [3] :

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{\mu_0 I'}{2\pi} \ln\left(\frac{R'}{a'}\right)$$

On peut réécrire le logarithme avec une série de TAYLOR de la façon suivante :

$$\ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 2\frac{r}{a} \cos(\phi - \theta)\right)$$

$$\ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{1}{2} \left[ \ln\left(1 - \frac{r}{a} e^{i(\phi - \theta)}\right) + \ln\left(1 - \frac{r}{a} e^{-i(\phi - \theta)}\right) \right]$$

$$\text{si } r < a \quad \ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{1}{2} \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in(\phi-\theta)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{-in(\phi-\theta)} \right]$$

$$\ln\left(\frac{R}{a}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\phi-\theta)]$$

$$\text{si } r > a \quad \ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{1}{2} \ln \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left( 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2 \frac{a}{r} \cos(\phi-\theta) \right) \right]$$

$$\ln\left(\frac{R}{a}\right) = \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos[n(\phi-\theta)]$$

Ce calcul est identique pour le terme image, d'où deux cas pour l'expression du potentiel vecteur :

$$\text{Si } r < a \quad A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \iint J_0 \cos(p\phi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\phi-\theta)] a da d\phi \right. \\ \left. + \iint \frac{\mu-1}{\mu+1} J_0 \cos(p\phi) \left(\frac{b}{a'}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a'}\right)^n \cos[n(\phi-\theta)] a' da' d\phi \right]$$

$$\text{Si } r > a \quad A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \iint J_0 \cos(p\phi) \left( - \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos[n(\phi-\theta)] \right) a da d\phi \right. \\ \left. + \iint \frac{\mu-1}{\mu+1} J_0 \cos(p\phi) \left(\frac{b}{a'}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a'}\right)^n \cos[n(\phi-\theta)] a' da' d\phi \right]$$

Sachant que :

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\phi) d\phi = 0 \quad \forall p$$

$$\text{et} \quad \int_0^{2\pi} \cos(p\phi) \cos[n(\phi-\theta)] d\phi = \pi \delta_{p,n} \cos(n\theta) \quad \text{où } \delta_{p,n} = 1 \Leftrightarrow p = n$$

$$\text{soit} \quad \int_0^{2\pi} \cos(p\phi) \cos[n(\phi-\theta)] d\phi = \pi \cos(p\theta) \quad \forall p$$

Le potentiel vecteur devient :

$$\text{Si } r < a \quad A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int \frac{a}{p} \left(\frac{r}{a}\right)^p \cos(p\theta) da + \frac{\mu-1}{\mu+1} \int \frac{b^4}{pa'^3} \left(\frac{r}{a'}\right)^p \cos(p\theta) da' \right]$$

$$\text{Si } r > a \quad A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int \frac{a}{p} \left(\frac{a}{r}\right)^p \cos(p\theta) da + \frac{\mu-1}{\mu+1} \int \frac{b^4}{pa'^3} \left(\frac{r}{a'}\right)^p \cos(p\theta) da' \right]$$

## Calcul du champ principal

Le champ principal se déduit du potentiel vecteur de la manière suivante :

$$B_r = \frac{dA_z}{rd\theta} \quad \text{et} \quad B_\theta = -\frac{dA_z}{dr}$$

D'où les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Si } r < a & \left\{ \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int \left(\frac{r}{a}\right)^{(p-1)} \sin(p\theta) da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int \frac{r^{(p-1)}}{a^{(p+3)}} \sin(p\theta) da' \right] \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int \left(\frac{r}{a}\right)^{(p-1)} \cos(p\theta) da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int \frac{r^{(p-1)}}{a^{(p+3)}} \cos(p\theta) da' \right] \end{aligned} \right. \\ \text{Si } r > a & \left\{ \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int \left(\frac{a}{r}\right)^{(p+1)} \sin(p\theta) da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int \frac{r^{(p-1)}}{a^{(p+3)}} \sin(p\theta) da' \right] \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\int \left(\frac{a}{r}\right)^{(p+1)} \cos(p\theta) da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int \frac{r^{(p-1)}}{a^{(p+3)}} \cos(p\theta) da' \right] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

## Calcul d'un dipôle épais (p=1)

Dans le cas d'un dipôle "réel", la distribution de courant est réalisée sur une certaine épaisseur. On appellera  $a_1$  le rayon intérieur du bobinage et  $a_2$  son rayon extérieur.

Il se présente alors 3 cas d'étude :  $0 < r < a_1$ ,  $a_1 < r < a_2$  et  $a_2 < r < b$

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 < r < a_1 & \left\{ \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int_{a_1}^{a_2} \sin(\theta) da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{\sin(\theta)}{a'^4} da' \right] \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int_{a_1}^{a_2} \cos(\theta) da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{\cos(\theta)}{a'^4} da' \right] \end{aligned} \right. \\ \text{soit} & \left\{ \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ (a_2 - a_1) + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^3 - a_1^3}{3b^2} \right) \right] \sin(\theta) \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ (a_2 - a_1) + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^3 - a_1^3}{3b^2} \right) \right] \cos(\theta) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On constatera bien entendu que le champ principal à l'intérieur du bobinage ne dépend pas du rayon. Si on regarde la participation du fer au champ principal, le rapport  $B_{\text{fer}}/B_{\text{bobinage}}$  s'écrit de la manière suivante :

$$\Delta f = \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^3 - a_1^3}{3b^2(a_2 - a_1)} \right) = \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2}{3b^2} \right)$$

Ce rapport tend vers  $\frac{\mu-1}{\mu+1}\left(\frac{a}{b}\right)^2$  lorsque  $a_1$  et  $a_2$  tendent vers  $a$ , ce qui représente le cas d'un bobinage mince.

$$\text{Si } a_1 < r < a_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int_{a_1}^r \left(\frac{a}{r}\right)^2 da + \int_r^{a_2} da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{1}{a'^4} da' \right] \sin(\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\int_{a_1}^r \left(\frac{a}{r}\right)^2 da + \int_r^{a_2} da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{1}{a'^4} da' \right] \cos(\theta) \end{array} \right.$$

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \frac{r^3 - a_1^3}{3r^2} + (a_2 - r) + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^3 - a_1^3}{3b^2} \right) \right] \sin(\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\frac{r^3 - a_1^3}{3r^2} + (a_2 - r) + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^3 - a_1^3}{3b^2} \right) \right] \cos(\theta) \end{array} \right.$$

$$\text{Si } a_2 < r < b \quad \left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{1}{a'^4} da' \right] \sin(\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{1}{a'^4} da' \right] \cos(\theta) \end{array} \right.$$

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \frac{a_2^3 - a_1^3}{3r^2} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^3 - a_1^3}{3b^2} \right) \right] \sin(\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\frac{a_2^3 - a_1^3}{3r^2} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^3 - a_1^3}{3b^2} \right) \right] \cos(\theta) \end{array} \right.$$

## Calcul d'un quadripôle épais (p=2)

De manière identique au dipôle, on retrouve les 3 cas d'étude :  $0 < r < a_1$ ,  $a_1 < r < a_2$  et  $a_2 < r < b$ .

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 < r < a_1 \quad & \left\{ \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int_{a_1}^{a_2} \frac{r \sin(2\theta)}{a} da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{r \sin(2\theta)}{a'^5} da' \right] \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int_{a_1}^{a_2} \frac{r \cos(2\theta)}{a} da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{r \cos(2\theta)}{a'^5} da' \right] \end{aligned} \right. \\ \text{soit} \quad & \left\{ \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^4 - a_1^4}{4b^4} \right) \right] r \sin(2\theta) \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^4 - a_1^4}{4b^4} \right) \right] r \cos(2\theta) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Le rapport  $B_{\text{fer}}/B_{\text{bobinage}}$  s'écrit alors :

$$\Delta f = \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^4 - a_1^4}{4b^4 \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} \right)$$

Ce rapport tend vers  $\frac{\mu-1}{\mu+1} \left(\frac{a}{b}\right)^4$  lorsque  $a_1$  et  $a_2$  tendent vers  $a$  dans le cas d'un bobinage mince.

$$\begin{aligned} \text{Si } a_1 < r < a_2 \quad & \left\{ \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int_{a_1}^r \left(\frac{a}{r}\right)^3 da + \int_r^{a_2} \frac{r}{a} da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{r}{a'^5} da' \right] \sin(2\theta) \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\int_{a_1}^r \left(\frac{a}{r}\right)^3 da + \int_r^{a_2} \frac{r}{a} da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{r}{a'^5} da' \right] \cos(2\theta) \end{aligned} \right. \\ \text{soit} \quad & \left\{ \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \frac{r^4 - a_1^4}{4r^4} + \ln\left(\frac{a_2}{r}\right) + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^4 - a_1^4}{4b^4} \right) \right] r \sin(2\theta) \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\frac{r^4 - a_1^4}{4r^4} + \ln\left(\frac{a_2}{r}\right) + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^4 - a_1^4}{4b^4} \right) \right] r \cos(2\theta) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Si } a_2 < r < b \quad \left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{r}{a'^5} da' \right] \sin(2\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 da + \frac{\mu-1}{\mu+1} b^4 \int_{b^2/a_2}^{b^2/a_1} \frac{r}{a'^5} da' \right] \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \frac{a_2^4 - a_1^4}{4r^4} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^4 - a_1^4}{4b^4} \right) \right] r \sin(2\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\frac{a_2^4 - a_1^4}{4r^4} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^4 - a_1^4}{4b^4} \right) \right] r \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

### Calcul d'un multipôle épais ( $p \geq 3$ )

Pour des multipôles d'ordre supérieur ou égal à 3, il est possible de généraliser les formules de champ pour les 3 cas d'étude :  $0 < r < a_1$ ,  $a_1 < r < a_2$  et  $a_2 < r < b$ .

Si  $0 < r < a_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \frac{a_2^{(p-2)} - a_1^{(p-2)}}{(p-2)a_1^{(p-2)}a_2^{(p-2)}} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)b^{2p}} \right) \right] r^{(p-1)} \sin(p\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \frac{a_2^{(p-2)} - a_1^{(p-2)}}{(p-2)a_1^{(p-2)}a_2^{(p-2)}} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)b^{2p}} \right) \right] r^{(p-1)} \cos(p\theta) \end{array} \right.$$

Cette formule est valable pour tout  $p$  sauf  $p=2$  où  $\frac{a_2^{(p-2)} - a_1^{(p-2)}}{(p-2)a_1^{(p-2)}a_2^{(p-2)}}$  devient  $\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ .

Si  $a_1 < r < a_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \frac{r^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)r^{2p}} + \frac{a_2^{(p-2)} - r^{(p-2)}}{(p-2)r^{(p-2)}a_2^{(p-2)}} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)b^{2p}} \right) \right] r^{(p-1)} \sin(p\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\frac{r^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)r^{2p}} + \frac{a_2^{(p-2)} - r^{(p-2)}}{(p-2)r^{(p-2)}a_2^{(p-2)}} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)b^{2p}} \right) \right] r^{(p-1)} \cos(p\theta) \end{array} \right.$$

Cette formule est valable pour tout  $p$  sauf  $p=2$  où  $\frac{a_2^{(p-2)} - r^{(p-2)}}{(p-2)r^{(p-2)}a_2^{(p-2)}}$  devient  $\ln\left(\frac{a_2}{r}\right)$ .

Si  $a_2 < r < b$

$$\begin{cases} B_r = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ \frac{a_2^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)r^{2p}} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)b^{2p}} \right) \right] r^{(p-1)} \sin(p\theta) \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \left[ -\frac{a_2^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)r^{2p}} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \left( \frac{a_2^{(p+2)} - a_1^{(p+2)}}{(p+2)b^{2p}} \right) \right] r^{(p-1)} \cos(p\theta) \end{cases}$$

Cette formule est valable pour tout p.

## **Références**

- [1] 'Iron shielding for air core magnets', J.P. Blewett – Proceedings of the 1968 summer study on the superconducting devices and accelerators  
BNL 50155 (C-55) (Part III, page 1042)
- [2] CERN Accelerator School – Superconductivity in particle accelerators  
CERN 89-04, 10 March 1989 (page 100)
- [3] CERN Accelerator School – Superconductivity in particle accelerators  
CERN 89-04, 10 March 1989 (page 92)