

## 1 Modèle de brin

Le brin schématisé dans ce calcul est un brin Nb<sub>3</sub>Sn "étain interne" de type ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), fabriqués par la compagnie IGC. Ses caractéristiques sont les suivantes [1] : le diamètre du brin est de 0.81mm, il est torsadé de manière à avoir 1.2 tour par centimètre. Le brin est composé de 19 sous-éléments. Un sous-élément est composé d'environ 162 filaments en Nb 7.5%wt Ta disposés de manière circulaire autour d'une piscine d'étain dans une matrice de cuivre. Ces sous-éléments sont répartis à l'aide de 6 espaceurs en CuSn. Les barrières anti-diffusion, séparant la zone contenant les sous-éléments de la couronne de cuivre, sont en niobium (extérieure) et tantale (intérieure). Le rapport cuivre-sur-non-cuivre est de 1.44. La Fig. (1) en présente une coupe transversale.

Ce brin peut être décomposé en plusieurs parties comme représenté Fig. (2) : une zone cylindrique formée par les sous-éléments qui a pour rayon  $R_0$  et résistivité transverse équivalente  $\rho_0$ . Cette zone est entourée de trois couronnes concentriques de rayons respectifs  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  et de résistivité  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$ . Ces trois couronnes correspondent respectivement à la couronne de bronze entourant la zone multifilamentaire, aux barrières anti-diffusion qui seront traitées comme une seule couronne et à la couronne de cuivre. Chaque sous-élément est lui-même constitué d'un cœur cylindrique de rayon  $R_b$  et de résistivité  $\rho_b$  et d'une zone annulaire multifilamentaire de rayon extérieur  $R_f$  et de résistivité  $\rho_f$ . Les sous-éléments sont torsadés entre eux avec un pas de torsade,  $l_p$ . Il s'ensuit que les filaments à l'intérieur d'un sous-élément sont eux-mêmes torsadés avec le pas  $l_p$ .

Le calcul des pertes sera mené en deux temps. Tout d'abord, nous calculerons les pertes par couplage interfilamentaire à l'intérieur d'un sous-élément supposé seul dans l'espace. Puis nous calculerons les pertes par couplage entre sous-éléments à l'intérieur d'un brin. Dans ce second calcul, les sous-éléments seront assimilés à des monofilaments.

Pour les deux calculs, nous nous placerons dans l'approximation des états quasi-stationnaires, et l'on supposera que les filaments (réels dans le cas du calcul à l'intérieur d'un sous-élément ou effectifs dans le cas du calcul entre sous-éléments) ne sont pas saturés. Les pertes dans le brin seront calculées comme la somme des deux types de pertes.

## 2 Pertes dans un sous-élément seul dans l'espace

Considérons un sous-élément rectiligne et infiniment long soumis à un champ magnétique variable dans le temps, uniforme dans l'espace et perpendiculaire à l'axe du sous-élément. Nous supposons que ce sous-élément est torsadé avec un pas de torsade  $l_p$ . Les filaments constitutifs de ce sous-élément sont donc torsadés avec le même pas de torsade.

## 2.1 Définition des repères

Nous pouvons définir trois repères pour ce calcul [2], ces repères sont représentés sur la Fig. (3).

Soit le repère trirectangulaire  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , fixe par rapport à un observateur. L'axe  $\vec{e}_z$  étant lié à l'axe du sous-élément, nous supposons que le champ magnétique auquel est soumis le sous-élément est variable dans le temps, uniforme dans l'espace et dirigé suivant  $e_y$ .

Considérons l'intersection, P, d'une courbe (C) parallèle à un filament avec le plan  $z=0$  : nous pouvons alors introduire un repère de coordonnées cylindriques  $(e_r, e_\theta, e_z)$  défini par

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Le repère  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  se déduit du repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{e}_z$ .

Les filaments étant torsadés, la courbe (C) associée à un filament est une hélice de rayon  $r$  et de pas de twist  $l_p$ . Nous pouvons alors introduire un repère  $(\vec{e}_r, \vec{e}_n, \vec{e}_s)$  défini par

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

Le repère  $(\vec{e}_r, \vec{e}_n, \vec{e}_s)$  est tel que  $\vec{e}_s$  est tangent à (C) au point P. Il se déduit du repère  $(e_r, e_\theta, e_z)$  par une rotation d'angle  $(-\alpha)$  autour de  $\vec{e}_r$ , où  $\alpha$  est définie par

$$\tan \alpha = \frac{2\pi r}{l_p} \quad (3)$$

## 2.2 Pertes dans la zone filamentaire

### 2.2.1 Détermination du champ électrique

Nous utiliserons les relations de symétrie dans le sous-élément définies par [3], à savoir :  $E_x(x,y)$  antisymétrique en  $x$  et  $y$  et  $E_y(x,y)$  symétrique en  $x$  et  $y$ .

Appliquons l'équation de Maxwell-Faraday, i.e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (4)$$

avec  $\vec{B} = B\vec{e}_y$  à la zone filamentaire dans le repère cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . Nous avons alors les équations

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = -\frac{dB}{dt} \sin \theta \quad (5.a)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{dB}{dt} \cos \theta \quad (5.b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0 \quad (5.c)$$

Le sous-élément étant infiniment long, nous supposons que les composantes du champ électrique sont indépendantes de la variable  $z$ . De là, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} = -\frac{dB}{dt} \sin \theta \quad (6.a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{dB}{dt} \cos \theta \quad (6.b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0 \quad (6.c)$$

En utilisant indifféremment les Eqs. (6.a) ou (6.b), la composante du champ électrique suivant  $z$  s'écrit

$$E_z = \left( \frac{dB}{dt} \right) r \cos \theta + E_{z,0}(t) \quad (7)$$

où  $E_{z,0}(t)$  est une fonction dépendant du temps seul.

En utilisant le repère lié à un filament et en supposant celui-ci non saturé, nous pouvons écrire

$$\vec{E} \cdot \vec{e}_s = 0 \quad (8)$$

A l'aide des relations de passage définies par l'Eq. (2) nous avons

$$E_\theta \sin \alpha + E_z \cos \alpha = 0 \quad (9)$$

d'où

$$E_\theta = -\frac{1}{\tan \alpha} E_z \quad (10)$$

En combinant les Eqs. (3), (7) et (10), la composante  $E_\theta$  du champ électrique peut s'écrire

$$E_\theta = -\left(\frac{l_p}{2\pi}\right)\left(\frac{dB}{dt}\right)\cos\theta - \left(\frac{l_p}{2\pi r}\right)E_{z,0}(t) \quad (11)$$

L'antisymétrie de  $E_x$  en  $y=0$  impliquent la relation  $E_\theta(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0$  quelque soient  $r$  et  $t$ . Nous avons alors  $E_{z,0}(t)=0$ , d'où

$$E_\theta = -\left(\frac{l_p}{2\pi}\right)\left(\frac{dB}{dt}\right)\cos\theta \quad (12)$$

et

$$E_z = \left(\frac{dB}{dt}\right)r\cos\theta \quad (13)$$

Finalement, en utilisant l'Eq. (6.c), nous pouvons déterminer la troisième composante,  $E_r$ , du champ électrique, soit

$$E_r = -\left(\frac{l_p}{2\pi}\right)\left(\frac{dB}{dt}\right)\sin\theta + E_{r,0}(r,t) \quad (14)$$

où  $E_{r,0}(r,t)$  est une fonction à déterminer. L'antisymétrie de  $E_x$  en  $x=0$  impliquent la relation  $E_r(\theta = 0) = 0$  quelque soient  $r$  et  $t$ . Nous avons alors  $E_{r,0}(r,t)=0$ , d'où

$$E_r = -\left(\frac{l_p}{2\pi}\right)\left(\frac{dB}{dt}\right)\sin\theta \quad (15)$$

### 2.2.2 Calcul des pertes

Dans la zone multifilamentaire, nous pouvons écrire

$$\vec{E} = [\rho]\vec{J} \quad (16)$$

où  $[\rho]$  est un tenseur représentant la résistivité du milieu dans le repère  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  et  $J$  la densité de courant électrique circulant dans le milieu.

Nous considérons le milieu comme étant homogène et isotrope (en particulier  $\rho_{\text{transverse}} = \rho_{\text{longitudinal}}$ ). Le tenseur se réduit alors à une constante égale à  $\rho_f$ .

Les pertes de la zone multifilamentaire par unité de volume de sous-élément  $P_{Vf}$  s'écrivent alors

$$P_{Vf} = \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_{R_b}^{R_f} \frac{|\vec{E}|^2}{\rho_f} r dr d\theta \quad (17)$$

d'où

$$P_{Vf} = \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_{R_b}^{R_f} \left(\frac{l_p}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \frac{1}{\rho_f} r dr (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ + \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_{R_b}^{R_f} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \frac{1}{\rho_f} r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta \quad (18)$$

Tous calculs fait, il vient

$$P_{Vf} = \frac{1}{\rho_f R_f^2} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \left[ \left(\frac{l_p}{2\pi}\right)^2 (R_f^2 - R_b^2) + \left(\frac{R_f^4 - R_b^4}{4}\right) \right] \quad (19)$$

Nous reconnaissons ici une expression identique à celle donnée par Devred et al [4] si nous appliquons leur expression de la constante de temps à notre géométrie de sous-élément et que nous déterminons, à partir de celle-ci, l'expression des pertes. De plus, elle est identique à celles données par Turck [5] et Ciazynski [6] à condition de négliger les pertes dues à la composante  $E_z$  du champ électrique et, dans le cas de [6], d'appliquer son expression à notre géométrie .

### 2.3 Pertes dans le cœur résistif

Rappel : comme dans le cas de la zone multifilamentaire, nous utiliserons les relations de symétrie déjà déterminées à savoir :  $E_x(x,y)$  antisymétrique en  $x$  et  $y$  et  $E_y(x,y)$  symétrique en  $x$  et  $y$ . De plus, nous utiliserons la condition donnée par [7] à savoir :

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \quad (20)$$

#### 2.3.1 Détermination du champ électrique

Dans le cœur résistif, nous avons

$$\vec{E}_b = \rho_b \vec{J}_b \quad (21)$$

où  $E_b$ ,  $\rho_b$  et  $J_b$  sont respectivement le champ électrique, la résistivité et la densité de courant circulant dans le cylindre de rayon  $R_b$ . Si l'on définit  $E_{b\perp}$  par

$$\vec{E}_{b\perp} = E_{br}\vec{e}_r + E_{b\theta}\vec{e}_\theta \quad (22)$$

alors l'Eq. (6.c) est équivalente à

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{b\perp} = \vec{0} \quad (23)$$

D'où :

$$\vec{E}_{b\perp} = -\vec{\nabla} V_{b\perp} \quad (24)$$

Par ailleurs, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (25)$$

Dans l'approximation des états quasi-stationnaires, nous pouvons négliger les variations de  $D$  en fonction du temps. L'Eq. (25) s'écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (26)$$

En prenant la divergence de cette équation et en utilisant les propriétés liées à cet opérateur, nous avons

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (27)$$

En combinant les Eqs. (21), (24) et (27), nous arrivons à

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V_{b\perp}) = \Delta V_{b\perp} = 0 \quad (28)$$

En réécrivant la dernière équation en coordonnées cylindriques, nous avons

$$\frac{\partial^2 V_{b\perp}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{b\perp}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{b\perp}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (29)$$

car  $V_{b\perp}$  est indépendant de  $z$ .

En utilisant la méthode de séparation des variables,  $V_{b\perp}$  peut être écrit sous la forme

$$V_{b\perp}(r, \theta) = f_b(r)g_b(\theta) \quad (30)$$

L'équation de Laplace devient alors

$$g_b \frac{\partial^2 f_b}{\partial r^2} + \frac{g_b}{r} \frac{\partial f_b}{\partial r} - \frac{f_b}{r^2} \frac{\partial^2 g_b}{\partial \theta^2} = 0 \quad (31)$$

Une solution de cette équation [8] est

$$V_{b\perp}(r, \theta) = \sum_{m>0} \left( A' r^m + \frac{B'}{r^m} \right) (C' \cos m\theta + D' \sin m\theta) + (E' \theta + F') \ln \frac{r}{r_0} \quad (32)$$

où  $A', B', C', D', E', F', m$  et  $r_0$  sont des constantes à déterminer.

A partir du potentiel et en utilisant l'Eq. (24), nous pouvons déterminer les composantes du champ électrique

$$E_{br} = - \sum_{m>0} \left( A' m r^{m-1} - B' \frac{m}{r^{m+1}} \right) (C' \cos m\theta + D' \sin m\theta) - \frac{(E' \theta + F')}{r} \quad (33.a)$$

$$E_{b\theta} = - \sum_{m>0} \left( A' r^{m-1} + \frac{B'}{r^{m+1}} \right) [C' (-m) \sin m\theta + D' m \cos m\theta] - \frac{E'}{r} \ln \frac{r}{r_0} \quad (33.b)$$

De plus l'Eq. (13) est valable dans tout les milieux, à savoir

$$E_{bz} = r \left( \frac{dB}{dt} \right) \cos \theta \quad (33.c)$$

En utilisant les conditions d'antisymétrie de  $E_x$  en  $x=0$  et  $y=0$ , il vient  $C'=E'=F'=0$ .

La relation de passage de la composante tangentielle du champ électrique entre les deux milieux s'écrit

$$E_{f\theta}(R_b) = E_{b\theta}(R_b) \quad (34)$$

où  $E_{f\theta}$  est la composante tangentielle du champ électrique dans la partie multifilamentaire. En identifiant les parties angulaires (indépendantes dans l'équation de Laplace de la partie radiale) des deux composantes tangentielles du champ électrique, il vient  $m=1$ . Les Eqs.(33.a) à (33.c) s'écrivent alors

$$E_{br} = - \left( A' D' - \frac{B' D'}{r^2} \right) \sin \theta \quad (35.a)$$

$$E_{b\theta} = - \left( A' D' + \frac{B' D'}{r^2} \right) \cos \theta \quad (35.b)$$

et

$$E_{bz} = \left( \frac{dB}{dt} \right) r \cos \theta \quad (35.c)$$

En utilisant la condition donnée par l'Eq. (20), il vient  $B'D'=0$ . Les composantes du champ électrique s'écrivent alors

$$E_{br} = -A' D' \sin \theta \quad (36.a)$$

$$E_{b\theta} = -A' D' \cos \theta \quad (36.b)$$

et

$$E_{bz} = \left( \frac{dB}{dt} \right) r \cos \theta \quad (36.c)$$

En utilisant la relation de continuité définie par l'Eq. (34) et en utilisant les Eqs. (12) et (36.b), il vient

$$A'D' = \left( \frac{l_p}{2\pi} \right) \left( \frac{dB}{dt} \right) \quad (37)$$

d'où

$$E_{br} = - \left( \frac{l_p}{2\pi} \right) \left( \frac{dB}{dt} \right) \sin \theta \quad (38.a)$$

$$E_{b\theta} = - \left( \frac{l_p}{2\pi} \right) \left( \frac{dB}{dt} \right) \cos \theta \quad (38.b)$$

et

$$E_{bz} = \left( \frac{dB}{dt} \right) r \cos \theta \quad (38.c)$$

### 2.3.2 Calcul des pertes

Les pertes du cœur résistif par unité de volume de sous-élément  $P_{Vb}$  s'écrivent

$$P_{Vb} = \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_b} \frac{|\vec{E}|^2}{\rho_b} r dr d\theta \quad (39)$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{Vb} &= \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_b} \left( \frac{l_p}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \frac{1}{\rho_b} r dr (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_b} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \frac{1}{\rho_b} r^2 \cos^2 \theta dr d\theta \end{aligned} \quad (40)$$

Tous calculs fait, il vient

$$P_{Vb} = \frac{1}{\rho_b} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \left( \frac{R_b}{R_f} \right)^2 \left[ \left( \frac{l_p}{2\pi} \right)^2 + \frac{R_b^2}{4} \right] \quad (41)$$

Nous reconnaissons ici aussi une expression identique à celle donnée par Devred et al [4] si nous appliquons leur expression de la constante de temps à notre géométrie de sous-élément et que nous déterminons, à partir de celle-ci, l'expression des pertes. De plus, elle est identique à celles données par Turck [5] et Ciazynski [6] à condition de négliger les pertes dues à la composante  $E_Z$  du champ électrique et, dans le cas de [6], d'appliquer son expression à notre géométrie .

## 2.4 Pertes totales dans le sous-élément

Les pertes totales par unité de volume de sous-élément,  $P_{Vs}$ , sont :

$$P_{Vs} = \frac{1}{R_f^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\rho_f} \left[ \left( \frac{l_p}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{R_f^2 - R_b^2}{2} \right) + \left( \frac{R_f^4 - R_b^4}{4} \right) \right] + \frac{R_b^2}{\rho_b} \left[ \left( \frac{l_p}{2\pi} \right)^2 + \frac{R_b^2}{4} \right] \right\} \quad (42)$$

## 3 Pertes dans un brin seul dans l'espace

Dans ce calcul, les sous-éléments sont considérés comme des monofilaments. Par abus de langage, nous appellerons zone filamentaire la zone contenant ces sous-éléments. Les symétries déterminées dans le calcul du sous-élément seul dans l'espace restent valables. De même, les repères définis précédemment peuvent être utilisés dans ce calcul à condition de faire la correspondance sous-élément/brin et filament/sous-élément.

### 3.1 Pertes dans la zone filamentaire :

Les calculs sont analogues à ceux développés dans le cas du sous-élément isolé.

#### 3.1.1 Détermination du champ électrique

En développant des calculs analogues à ceux du paragraphe 2.2.1, nous montrons que les composantes du champ électrique dans la partie filamentaire s'écrivent

$$E_r = - \left( \frac{l_p}{2\pi} \right) \left( \frac{dB}{dt} \right) \sin \theta \quad (43.a)$$

$$E_{\theta} = -\left(\frac{l_p}{2\pi}\right)\left(\frac{dB}{dt}\right)\cos\theta \quad (43.b)$$

et

$$E_z = \left(\frac{dB}{dt}\right)r\cos\theta \quad (43.c)$$

### 3.1.2 Calcul des pertes

En utilisant l'Eq. (17) et en considérant le milieu comme étant de résistivité homogène, isotrope et de valeur  $\rho_0$ , les pertes de la zone multifilamentaire par unité de volume de brin  $P_{V0}$  s'écrivent alors

$$P_{V0} = \frac{1}{\pi R_3^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \frac{|\vec{E}|^2}{\rho_0} r dr d\theta \quad (44)$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{V0} = & \frac{1}{\pi R_3^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \left(\frac{l_p}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \frac{1}{\rho_0} r dr (\cos^2\theta + \sin^2\theta) d\theta \\ & + \frac{1}{\pi R_3^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \frac{1}{\rho_0} r^2 \cos^2\theta r dr d\theta \end{aligned} \quad (45)$$

Tous calculs fait, il vient

$$P_{V0} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \left(\frac{R_0}{R_3}\right)^2 \left[ \left(\frac{l_p}{2\pi}\right)^2 + \frac{R_0^2}{4} \right] \quad (46)$$

## 3.2 Pertes dans les couronnes résistives

Ce calcul est analogue à celui développé par B. Turck [9].

### 3.2.1 Détermination du champ électrique

Les Eqs. (23) à (27) restent valables dans les couronnes résistives du brin, nous pouvons donc définir un potentiel  $V_{1\perp}$  dans chaque couronne. Ce potentiel satisfait l'équation :

$$\Delta V_{i\perp} = 0 \quad (47)$$

En utilisant l'Eq. (32), nous savons que le potentiel peut s'écrire

$$V_{i\perp}(r, \theta) = \sum_{m \neq 0} \left( A'_i r^{m_i} + \frac{B'_i}{r^{m_i}} \right) (C'_i \cos m_i \theta + D'_i \sin m_i \theta) + (E'_i \theta + F'_i) \ln \frac{r}{r_{0i}} \quad (48)$$

où  $A'_i, B'_i, C'_i, D'_i, E'_i, F'_i, r_{0i}$  et  $m_i$  sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites.

Nous désirons tout d'abord que  $V_i$  soit symétrique dans une rotation de  $2\pi$  en  $\theta$ , soit

$$V_i(r, \theta) = V_i(r, \theta + 2\pi) \quad (49)$$

d'où  $m_i$  est un entier et  $E'_i = 0$  quelque soit  $i$ .

A partir de l'expression du potentiel, nous pouvons déterminer, à l'aide de l'Eq. (24), l'expression des composantes du champ électrique :

$$E_{ir}(r, \theta) = - \sum_{m > 0} \left[ A'_i m_i r^{m_i-1} + (-m_i) \frac{B'_i}{r^{m_i+1}} \right] (C'_i \cos m_i \theta + D'_i \sin m_i \theta) - \frac{F'_i}{r} \quad (50.a)$$

$$E_{i\theta}(r, \theta) = - \sum_{m > 0} \left( A'_i r^{m_i-1} + \frac{B'_i}{r^{m_i+1}} \right) [C'_i (-m_i) \sin m_i \theta + D'_i m_i \cos m_i \theta] \quad (50.b)$$

et nous avons toujours

$$E_{iz} = r \left( \frac{dB}{dt} \right) \cos \theta \quad (50.c)$$

Par symétrie,  $E_x$  est antisymétrique en  $x$  et  $y$  et  $E_y$  est symétrique en  $x$  et  $y$ . Ces relations impliquent dans le repère cylindrique

$$E_{ir}(\theta = 0) = 0 \text{ quelque soit } r$$

et

$$E_{i\theta}(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0 \text{ quelque soit } r$$

De là, il vient alors  $C'_i = F'_i = 0$  quelque soit  $i$ . Les composantes du champ électrique s'écrivent donc

$$E_{ir}(r, \theta) = - \sum_{m > 0} \left[ A'_i m_i r^{m_i-1} + (-m_i) \frac{B'_i}{r^{m_i+1}} \right] D'_i \sin m_i \theta \quad (51.a)$$

$$E_{i\theta}(r, \theta) = - \sum_{m > 0} \left( A'_i r^{m_i-1} + \frac{B'_i}{r^{m_i+1}} \right) D'_i m_i \cos m_i \theta \quad (51.b)$$

et nous avons toujours

$$E_{iz} = r \left( \frac{dB}{dt} \right) \cos \theta \quad (51.c)$$

D'autre part, les conditions qui expriment la continuité de la composante azimuthale du champ électrique et la continuité de la composante radiale de la densité de courant, sont :

(i) à l'interface entre la zone multifilamentaire et la première couronne résistive

$$E_{0\theta}(R_0, \theta) = E_{1\theta}(R_0, \theta) \quad (52.a)$$

(ii) à l'interface entre la première et la deuxième couronne résistive

$$E_{1\theta}(R_1) = E_{2\theta}(R_1) \quad (52.b)$$

et

$$\frac{E_{1r}(R_1)}{\rho_1} = \frac{E_{2r}(R_1)}{\rho_2} \quad (52.c)$$

(iii) à l'interface entre la deuxième et la troisième couronne résistive

$$E_{2\theta}(R_2) = E_{3\theta}(R_2) \quad (52.d)$$

et

$$\frac{E_{2r}(R_2)}{\rho_2} = \frac{E_{3r}(R_2)}{\rho_3} \quad (52.e)$$

(iv) à la périphérie du brin

$$\frac{E_{3r}(R_3, \theta)}{\rho_3} = 0 \quad (52.f)$$

où  $E_{0\theta}(R_0, \theta)$  est la composante azimuthale du champ électrique de la zone filamentaire calculée au rayon  $R_0$ , et  $E_{i\theta}$  et  $E_{ir}$  sont les composantes azimuthale et radiale du champ électrique de la couronne de rayon  $R_i$ .

En identifiant la partie angulaire (indépendante dans l'équation de Laplace de la partie radiale) de l'Eq. (51.b) avec celle donnée par l'Eq. (43.b), il vient  $m_1=1$ . En utilisant les relations de continuité, sur les composantes azimuthales, données par les Eqs. (52.a), (52.b) et (52.d), on montre que  $m_i=1$  quelque soit  $i$ . Les composantes du champ électrique s'écrivent donc

$$E_{ir}(r, \theta) = - \left[ A'_i - \frac{B'_i}{r^2} \right] D'_i \sin \theta \quad (53.a)$$

$$E_{i\theta}(r, \theta) = - \left( A'_i + \frac{B'_i}{r^2} \right) D'_i \cos \theta \quad (53.b)$$

et

$$E_{iz} = r \left( \frac{dB}{dt} \right) \cos \theta \quad (53.c)$$

En définissant de nouvelles constantes  $A_i$  et  $B_i$  par

$$A'_1 D'_1 = A_1 \quad (54.a) \quad \text{et} \quad B'_1 D'_1 = B_1 \quad (54.b)$$

les composantes du champ électrique s'écrivent encore

$$E_{ir}(r, \theta) = - \left[ A_1 - \frac{B_1}{r^2} \right] \sin \theta \quad (55.a)$$

$$E_{i\theta}(r, \theta) = - \left( A_1 + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (55.b)$$

et

$$E_{iz} = r \left( \frac{dB}{dt} \right) \cos \theta \quad (55.c)$$

En réécrivant les conditions de continuités sur les composantes radiales, nous déduisons

$$A_3 - \frac{B_3}{R_3^2} = 0 \quad (55.a) \quad \text{et} \quad A_1 R_0 + \frac{B_1}{R_0} = \left( \frac{l_p}{2\pi} \right) \left( \frac{dB}{dt} \right) R_0 \quad (55.b)$$

$$A_1 R_1^2 + B_1 = A_2 R_1^2 + B_2 \quad (55.c) \quad \text{et} \quad \rho_2 (A_1 R_1^2 - B_1) = \rho_1 (A_2 R_1^2 - B_2) \quad (55.d)$$

$$A_2 R_2^2 + B_2 = A_3 R_2^2 + B_3 \quad (55.e) \quad \text{et} \quad \rho_3 (A_2 R_2^2 - B_2) = \rho_2 (A_3 R_2^2 - B_3) \quad (55.f)$$

En résolvant ces équations, les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  peuvent s'écrire

$$A_1 = \frac{DR_0}{R_0^2 + \delta R_1^2} \quad (56.a)$$

$$B_1 = A_1 R_1^2 \delta \quad (56.b)$$

$$A_2 = \frac{A_1 R_1^2 (\delta + 1)}{R_1^2 + \gamma R_2^2} \quad (56.c)$$

$$B_2 = A_2 R_2^2 \gamma \quad (56.d)$$

$$A_3 = \frac{A_2 R_2^2 (\gamma + 1)}{R_3^2 + R_2^2} \quad (56.e)$$

$$B_3 = A_3 R_3^2 \quad (56.f)$$

où  $D$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont définis par

$$D = \left( \frac{dB}{dt} \right) \frac{l_p R_0}{2\pi} \quad (57.a)$$

$$\gamma = \frac{\rho_3 (R_3^2 + R_2^2) + \rho_2 (R_3^2 - R_2^2)}{\rho_3 (R_3^2 + R_2^2) - \rho_2 (R_3^2 - R_2^2)} \quad (57.b)$$

et

$$\delta = \frac{\rho_2 (\gamma R_2^2 + R_1^2) + \rho_1 (\gamma R_2^2 - R_1^2)}{\rho_2 (\gamma R_2^2 + R_1^2) - \rho_1 (\gamma R_2^2 - R_1^2)} \quad (57.c)$$

### 3.3 Calcul des pertes

Une fois connu le champ électrique régnant dans chaque zone résistive, nous pouvons calculer les pertes de ces zones par unité de volume de brin,  $P_{Vi}$

$$P_{Vi} = \frac{1}{\pi R_3^2} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_i} \frac{|\vec{E}_i|^2}{\rho_i} r dr d\theta \quad (58)$$

Une fois ces calculs effectués, les pertes des zones résistives, par unité de volume de brin s'écrivent

$$P_{V1} = \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \left( \frac{l_p}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{R_0}{R_3} \right)^2 \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} (R_0^2 + \delta^2 R_1^2) a_1^2 + \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \frac{(R_1^4 - R_0^4)}{4 R_3^2 \rho_1} \quad (59.a)$$

$$P_{V2} = \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \left( \frac{l_p}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\rho_2} \left( \frac{R_0}{R_3} \right)^2 \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2} (R_1^2 + \gamma^2 R_2^2) a_2^2 + \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4 R_3^2 \rho_2} \quad (59.b)$$

$$P_{V3} = \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \left( \frac{l_p}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\rho_3} \left( \frac{R_0}{R_3} \right)^2 \frac{R_3^2 - R_2^2}{R_2^2} (R_2^2 + R_3^2) a_3^2 + \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \frac{(R_3^4 - R_2^4)}{4 R_3^2 \rho_3} \quad (59.c)$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont définis par

$$a_1 = \frac{R_0}{R_0^2 + \delta R_1^2} \quad (60.a)$$

$$a_2 = \frac{R_0 R_1^2 (\delta + 1)}{(R_0^2 + \delta R_1^2) (R_1^2 + \gamma R_2^2)} \quad (60.b)$$

$$a_3 = \frac{R_0 R_1^2 (\delta + 1) R_2^2 (\gamma + 1)}{(R_0^2 + \delta R_1^2) (R_1^2 + \gamma R_2^2) (R_3^2 + R_2^2)} \quad (60.c)$$

### 3.4 Pertes totales dans le brin

Pour déterminer les pertes par unité de volume de brin dues aux courants de couplage intrabrin,  $P_{Vs}$ , il suffit de sommer les différentes contribution aux pertes, d'où

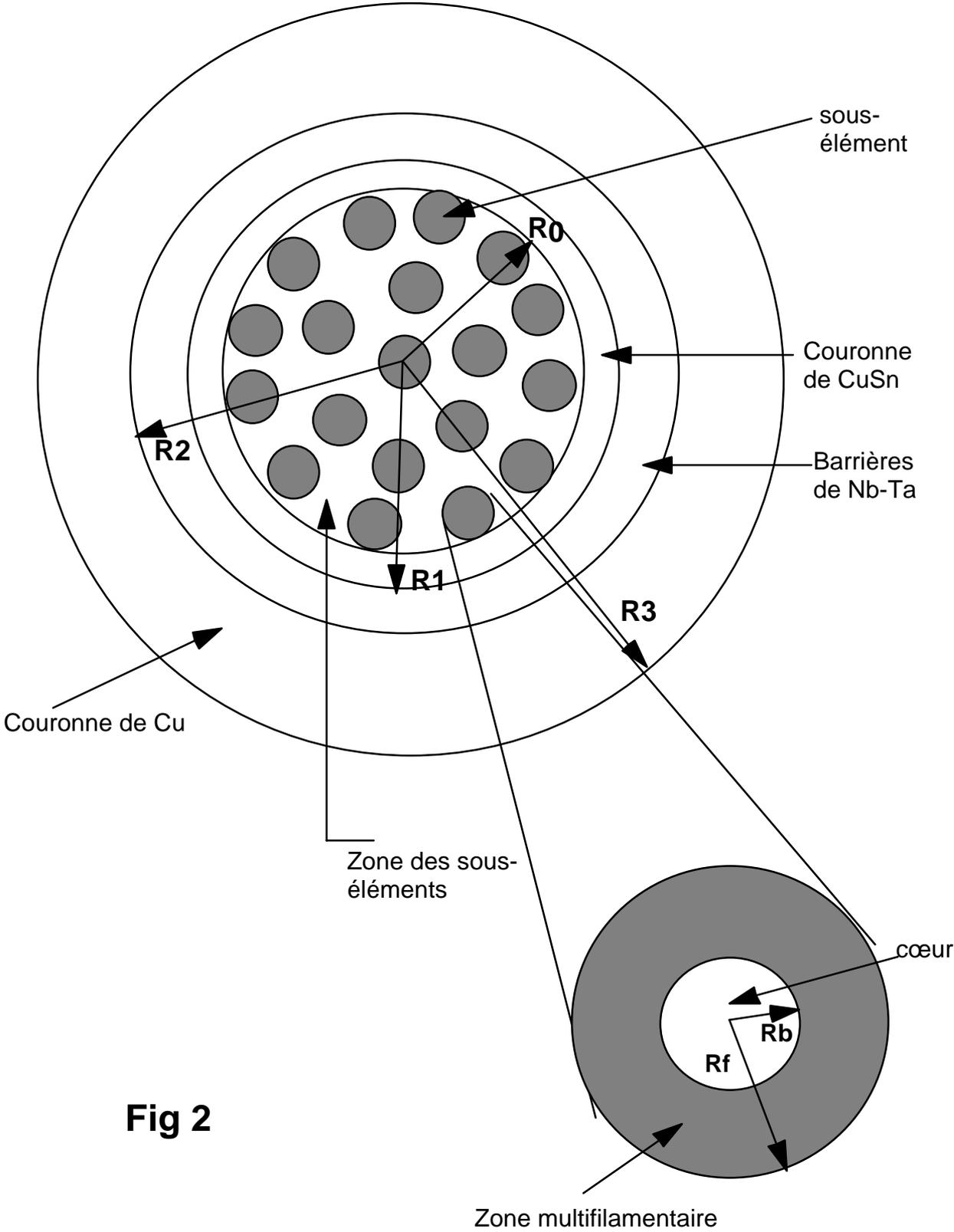
$$P_{Vs} = P_{V0} + P_{V1} + P_{V2} + P_{V3} \quad (61)$$

## REFERENCE

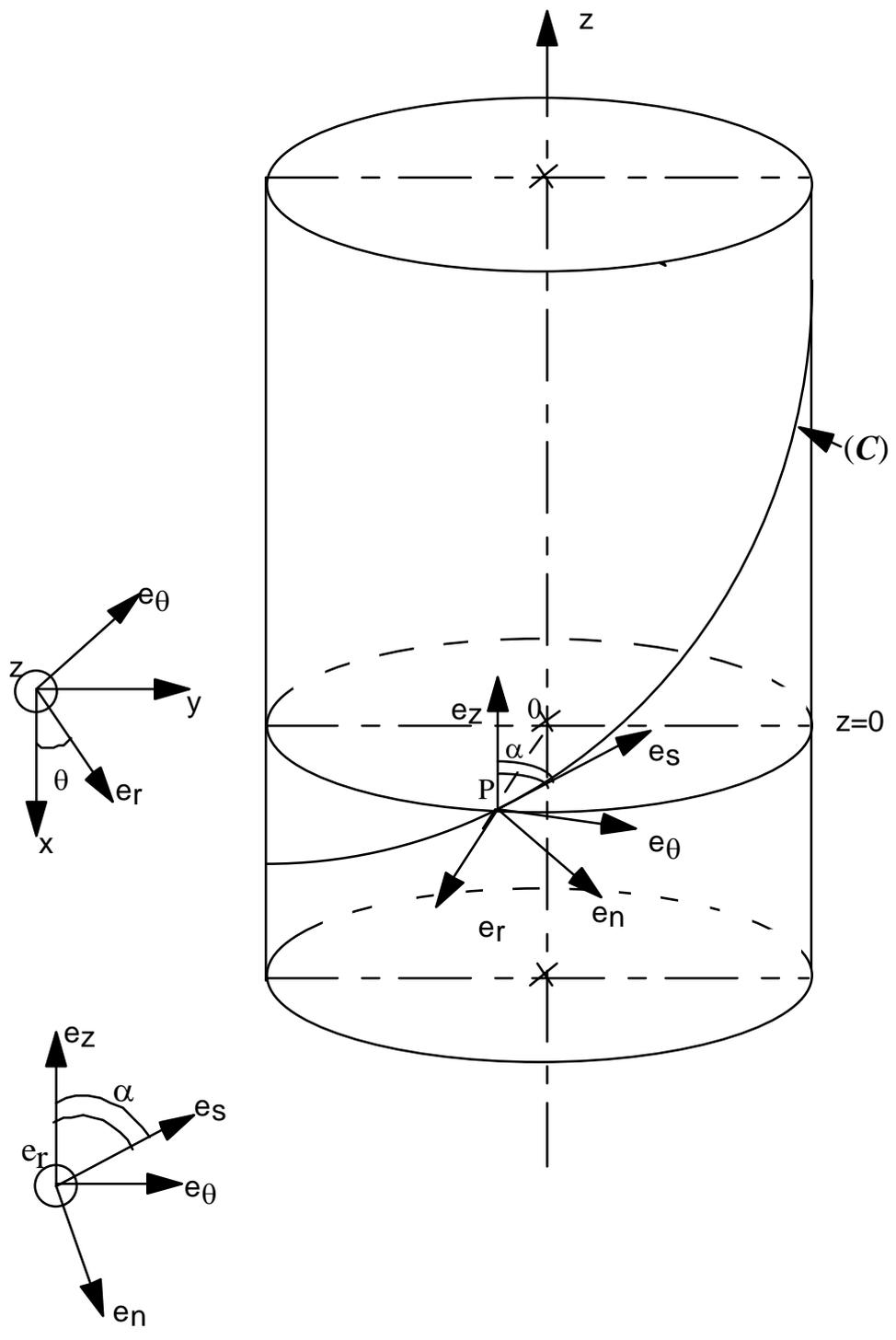
1. E. Gregory, E. Gulko, T. Pyon, L.F. Goodrich, "Properties of Internal-Tin Strand for the International Thermonuclear Experimental Reactor," *Adv.in Cryo. Engin.* Vol. 42 (1996), p. 1319-1328
2. D. Cyazynsky, "Distribution de courant et pertes à l'intérieur d'un composite multifilamentaire supraconducteur soumis à un champ magnétique variable," Thèse de Doctorat d'Etat (1985), p.16-18.
3. D. Cyazynsky, "Distribution de courant et pertes à l'intérieur d'un composite multifilamentaire supraconducteur soumis à un champ magnétique variable," Thèse de Doctorat d'Etat (1985), p.42.
4. A.Devred, T.Ogitsu, " Rampe Rate sensitivity of SSC Dipole Magnet Prototype," *Frontiers of Accelerator Technology*, S.I. Kurukowa, M. Month and S. Turner, eds., World Scientific Publishers, p.231.
5. B. Turck, "Effect of the respective positions of filament bundles and stabilizing copper on coupling losses in superconducting composites," *Cryogenics* (1982), p.466-468.
6. D. Cyazynsky, "Distribution de courant et pertes à l'intérieur d'un composite multifilamentaire supraconducteur soumis à un champ magnétique variable," Thèse de Doctorat d'Etat (1985), p.132.
7. G.B.J. Mulder, E.M.J. Niessen, "Coupling Losses of Multifilamentary Superconductors Having Several Concentric Regions and a Mixed Matrix," *IEEE Trans. of Appl. Supercond.* Vol 3 (1995), p. 142-145.
8. G. Fournet, "Electromagnétisme à partir des équations locales," Masson (1985), p. 110.
9. B. Turck, "Coupling losses in various outer normal layers surrounding the filament bundle of a superconducting composite," *J. Appl. Phys.* Vol 50 (1979).p. 5397-5401.



# Représentation schématique du brin ITER/IGC



**Fig 2**



**Fig 3**