

1 Introduction

Considérons un câble de Rutherford constitué de N brins répartis en deux couches et torsadés entre eux. Ce câble est soumis à un champ magnétique variable dans le temps et uniforme dans l'espace perpendiculaire à sa grande face. Ce câble a les caractéristiques suivantes : pas de twist L , largeur ($2c$) et hauteur moyenne h .

2 Modélisation du câble

Le modèle utilisé repose sur les principes suivants [1] :

- Les brins sont modélisés par des fils infiniment fins comme représenté sur la Fig. (1).
- Sur une longueur de un pas de torsade, chaque brin a deux contacts de croisement avec chacun des $(N-1)$ autres brins. Ce contact est modélisé par une résistance élémentaire dite de croisement et notée R_C .
- Sur toute la longueur du câble, chaque brin est en contact continu avec les deux brins qui lui sont adjacents. Le modèle propose de discrétiser ce contact grâce à des résistances élémentaires dite adjacentes et noté R_a qui sont placées entre deux brins adjacents au niveau de chaque nœud constitué par les résistances de croisement.

3 Calcul des pertes par courants de couplage interbrin dans le cas où R_a est infinie

Ce calcul est analogue à celui développé par [2].

Dans ce calcul, nous supposons que les résistances adjacentes sont très grandes devant les résistances de croisement et que leur influence peut être négligée. Dans ce cas, les plus petites boucles dans lesquels des courants interbrin peuvent être générés sont constituées par deux brins adjacents, situés sur une face, croisant deux brins adjacents de la face opposée. Ces boucles seront appelées boucles élémentaires. Le câble peut alors être représenté par le réseau de circuits de la Fig. (2).

Deux indices sont nécessaires pour identifier correctement les résistances de croisement du réseau de la Fig. (2): un premier indice pour les lignes, p , où $1 < p < N-1$, et un second indice pour les colonnes, q , où q est supposé pouvoir prendre toutes les valeurs entières relatives.

Une ligne est définie comme une série de contact entre brins de couches opposées sur une droite parallèle à l'axe du câble. Une colonne est définie comme une série de contacts entre brins de couches opposées sur une ligne en zigzag le long de la largeur du câble. Les lignes sont comptées à partir du petit bord du câble.

Les colonnes sont comptées de gauche à droite à partir d'une position de référence arbitraire, le long de l'axe du câble. Le courant circulant dans une résistance

de croisement donnée $r_{p,q}$ est noté $i_{p,q}$ et est compté positivement lorsqu'il circule du bas vers le haut perpendiculairement à la grande face du câble (voir Fig. (3)).

Le flux magnétique, $\Phi_{p,q}$, à travers une boucle élémentaire est lié par ses indices à la résistance de croisement située dans le coin gauche et est compté positivement lorsqu'il entre dans le câble par le bas perpendiculairement à la grande face du câble.

Pour une colonne donnée, il y a $(N-1)$ résistances de croisement, $(N-1)$ courants de croisement et $(N-1)$ boucles élémentaires.

Les courants de croisement peuvent être déterminés en appliquant la loi de Faraday aux $(N-1)$ boucles de la colonne q . Pour la boucle du petit bord du câble (Fig. (3.a)), nous avons

$$r_{1,q}i_{1,q} + r_{1,q+1}i_{1,q+1} - r_{2,q}i_{2,q} = \frac{d\Phi_{1,q}}{dt} \quad (1.a)$$

Pour les boucles au milieu du câble, et pour p pair avec $2 < p < N-2$ (Fig. (3.b)), la loi de Faraday s'écrit

$$r_{p,q}i_{p,q} + r_{p,q+1}i_{p,q+1} - r_{p+1,q+1}i_{p+1,q+1} - r_{p-1,q+1}i_{p-1,q+1} = \frac{d\Phi_{p,q}}{dt} \quad (1.b)$$

et pour p impair avec $3 < p < N-2$ (Fig. (3.c))

$$r_{p,q}i_{p,q} + r_{p,q+1}i_{p,q+1} - r_{p+1,q}i_{p+1,q} - r_{p-1,q}i_{p-1,q} = \frac{d\Phi_{p,q}}{dt} \quad (1.c)$$

Pour la boucle du grand bord du câble et si N est pair (Fig. (3.d)), nous pouvons écrire

$$r_{N-1,q}i_{N-1,q} + r_{N-1,q+1}i_{N-1,q+1} - r_{N-2,q}i_{N-2,q} = \frac{d\Phi_{N-1,q}}{dt} \quad (1.d)$$

et si N est impair, nous avons

$$r_{N-1,q}i_{N-1,q} + r_{N-1,q+1}i_{N-1,q+1} - r_{N-2,q+1}i_{N-2,q+1} = \frac{d\Phi_{N-1,q}}{dt} \quad (1.e)$$

Référence [3] donne une méthode pour trouver les solutions générales du système. Nous supposons pour simplifier le système que les résistances de croisement, les courants de croisement et les flux magnétiques élémentaires sont uniformes le long de l'axe du câble, et, pour $1 < p < N-1$, et pour tout q , satisfont les conditions

$$r_{p,q} = r_{p,q+1} \quad (2)$$

$$i_{p,q} = i_{p,q+1} \quad (3)$$

et

$$\Phi_{p,q} = \Phi_{p,q+1} \quad (4)$$

De là, la dépendance en q s'élimine et le système s'écrit

$$2r_1 i_1 - r_2 i_2 = \frac{d\Phi_1}{dt} \quad (5.a)$$

$$2r_p i_p - r_{p+1} i_{p+1} - r_{p-1} i_{p-1} = \frac{d\Phi_p}{dt} \quad \text{pour } 2 < p < N-2 \quad (5.b)$$

et

$$2r_{N-1} i_{N-1} - r_{N-2} i_{N-2} = \frac{d\Phi_{N-1}}{dt} \quad (5.c)$$

(Il est à noter que les Eqs. (5.b) et (5.c) s'appliquent pour p ou N pair ou impair)

Les solutions du système d'Eqs. (5.a) à (5.c) sont

$$i_1 = \frac{1}{Nr_1} \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (6.a)$$

et

$$i_p = p \frac{r_1}{r_p} i_1 - \frac{1}{r_p} \sum_{m=1}^{p-1} (p-m) \frac{d\Phi_m}{dt} \quad \text{pour } 2 < p < N-1 \quad (6.b)$$

Les pertes dissipées par unité de longueur de câble par les courants de croisement, P_{Lc} , peuvent s'écrire

$$P_{Lc} = \frac{N}{L} \sum_{p=1}^{N-1} r_p i_p^2 \quad (7)$$

Si l'on considère que les résistances de croisement et les flux magnétiques élémentaires sont tous égaux, respectivement à R_c et Φ , alors les Eqs. (6) à (7) deviennent

$$i_p = \frac{p(N-p)}{2R_c} \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{pour } 1 < p < N-1 \quad (8)$$

et

$$P_{Lc} = \frac{N^2(N^2-1)}{120R_c L} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \quad (9)$$

Nous avons ici utilisé les identités

$$\sum_{p=1}^N p = \frac{N(N+1)}{2} \quad (10)$$

$$\sum_{p=1}^N p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad (11)$$

et

$$\sum_{p=1}^N p^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \quad (12)$$

En considérant qu'il y a $N(N-1)$ boucles élémentaires par pas de torsade, une estimation de Φ peut être donnée par

$$\Phi \approx \frac{(2c)L}{N(N-1)} B \quad (13)$$

où B est la valeur du champ magnétique supposé uniforme dans l'espace et perpendiculaire à la grande face du câble.

En combinant les Eqs. (9) et (13), les pertes par unité de longueur de câble s'écrivent

$$P_{Lc} \approx \frac{(N^4 - 1)(2c)^2 L}{120(N-1)^2 R_c} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \approx \frac{N^2(2c)^2 L}{120R_c} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (14)$$

On reconnaît ici une expression identique à celles données par Carr et *al* [4] et Morgan [5]. Cette expression est très semblable à celles données par Verweij [6] et Sytnikov et *al* [7]. Les différences concernent la dépendance en N et s'expliqueraient par les modélisations des résistances aux bords du câble [6]. De plus, cette expression est à rapprocher de celle donnée par Wilson [8], à condition de faire la correspondance entre la résistance de contact par unité de surface définie par Wilson et notre résistance de croisement.

Pour obtenir les pertes par unité de volume de câble, P_{Vc} , il suffit de diviser l'Eq. (14) par la section du câble, à savoir $(2c)h$, d'où

$$P_{Vc} \approx \frac{N^2(2c)L}{120hR_c} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (15)$$

4 Calcul des pertes par courants de couplage interbrin dans le cas où R_c est infinie (Modèle discret)

Nous supposons ici que les résistances de croisement sont très grandes devant les résistances adjacentes et que leur influence peut être négligée. Dans ce cas, les deux faces du câble peuvent être traitées séparément et nous ne travaillerons que sur la face supérieure du câble. Les plus petites boucles dans lesquels des courants interbrin peuvent être générés sont alors constituées par deux résistances adjacentes consécutives. Ces boucles seront appelées boucles élémentaires.

Le câble peut être représenté par le réseau de circuits de la Fig. (4). Deux indices sont nécessaires pour identifier correctement les résistances adjacentes du réseau de la Fig. (4): un premier indice pour les lignes, p , où $1 < p < N-1$, et un second indice pour les colonnes, q , où q est supposé pouvoir prendre toutes les valeurs entières relatives.

Une ligne est définie comme une série de contact entre brins sur une droite parallèle à l'axe du câble. Une colonne est définie comme une série de contacts entre brins sur une ligne en zigzag le long de la largeur du câble.

Les lignes sont comptées à partir du petit bord du câble. Les colonnes sont comptées de gauche à droite à partir d'une position de référence arbitraire le long de l'axe du câble. Le courant circulant dans une résistance donnée $r_{p,q}$ est noté $i_{p,q}$ et est compté positivement lorsqu'il circule du haut vers le bas de la grande face du câble (voir Fig. (5)).

Le flux magnétique, $\Phi_{p,q}$, à travers une boucle élémentaire est lié par ses indices à la résistance adjacente située en bas à gauche et est compté positivement lorsqu'il entre dans le câble par le bas perpendiculairement à la grande face du câble. Les boucles élémentaires ont la même surface que dans le calcul précédent.

Pour une colonne donnée, il y a N résistances adjacentes, N courants adjacents et $(N-1)$ boucles élémentaires.

Les courants adjacents peuvent être déterminés en appliquant la loi de Faraday aux $(N-1)$ boucles de la colonne q . Pour la boucle du petit bord du câble (Fig. (5.a)), nous avons

$$r_{2,q}i_{2,q} - r_{1,q}i_{1,q} = \frac{d\Phi_{1,q}}{dt} \quad (16.a)$$

Pour les boucles au milieu du câble, et pour p pair avec $2 < p < N-1$ (Fig. (5.b)), la loi de Faraday s'écrit

$$r_{p+1,q+1}i_{p+1,q+1} - r_{p,q}i_{p,q} = \frac{d\Phi_{p,q}}{dt} \quad (16.b)$$

et pour p impair avec $3 < p < N-2$ (Fig. (5.c))

$$r_{p+1,q}i_{p+1,q} - r_{p,q}i_{p,q} = \frac{d\Phi_{p,q}}{dt} \quad (16.c)$$

Pour la boucle du grand bord du câble (Fig. (5.d)) et si N est pair, nous pouvons écrire

$$r_{N,q+1}i_{N,q+1} - r_{N-1,q}i_{N-1,q} = \frac{d\Phi_{N-1,q}}{dt} \quad (16.d)$$

et si N est impair, nous avons

$$r_{N,q}i_{N,q} - r_{N-1,q}i_{N-1,q} = \frac{d\Phi_{N-1,q}}{dt} \quad (16e)$$

Afin de résoudre le système, nous ajoutons la condition [9]

$$\sum_{p=1}^N i_{p,q} = 0 \quad \text{quelque soit } q \quad (17)$$

On suppose par la suite que les résistances adjacentes, les courants adjacents et les flux magnétiques élémentaires sont uniformes le long de l'axe du câble, et, pour $1 \leq p \leq N$, et pour tout q , satisfont les conditions

$$r_{p,q} = r_{p,q+1} \quad (18)$$

$$i_{p,q} = i_{p,q+1} \quad (19)$$

et

$$\Phi_{p,q} = \Phi_{p,q+1} \quad (20)$$

De là, la dépendance en q s'élimine et le système s'écrit

$$r_{p+1}i_{p+1} - r_p i_p = \frac{d\Phi_p}{dt} \quad \text{pour } 1 < p < N-1 \quad (21)$$

et la condition définie par l'Eq. (17) s'écrit

$$\sum_{p=1}^N i_p = 0 \quad (22)$$

Les solutions du système d'Eqs. (21) et (22) sont

$$i_1 = - \frac{\sum_{q=1}^{N-1} \left(\frac{d\phi_q}{dt} \sum_{i=q+1}^N \frac{1}{r_i} \right)}{\sum_{j=1}^N \frac{r_j}{r_p}} \quad (23)$$

et

$$i_p = \frac{1}{r_p} \left(\sum_{q=1}^{p-1} \frac{d\phi_q}{dt} + r_1 i_1 \right) \quad \text{pour } 2 < p < N \quad (24)$$

De plus, les pertes dissipés par unité de longueur de câble par les courants adjacents sur une face, P_{fa} , peuvent s'écrire

$$P_{fa} = \frac{N}{L} \sum_{p=1}^N r_p i_p^2 \quad (25)$$

Si l'on considère les résistances adjacentes et les flux magnétiques élémentaires tous égaux, respectivement à R_a et Φ , alors les Eqs. (23) à (25) se réduisent

$$i_p = \frac{1}{R_a} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right) \left[(p-1) - \frac{(N-1)}{2} \right] \quad \text{pour } 1 < p < N \quad (26)$$

et

$$P_{fa} = \frac{N^2}{L} \frac{1}{R_a} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \frac{1}{12} (N^2 - 1) \quad (27)$$

Nous avons ici utilisé les identités données par les Eqs. (10) et (11).

En considérant qu'il y a $N(N-1)$ boucles élémentaires par pas de twist et que ces boucles ont la même surface que dans la section précédente, une estimation de Φ est à nouveau donnée par l'Eq. (13).

En combinant les Eqs. (13) et (27), les pertes par unité de longueur de câble sur une face s'écrivent

$$P_{fa} \approx \frac{(2c)^2 L}{12 R_a} \frac{(N+1)}{(N-1)} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \approx \frac{(2c)^2 L}{12 R_a} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (28)$$

Si l'on désire l'expression des pertes par unité de longueur sur le câble, P_{La} , il suffit de multiplier par deux l'expression déterminée à l'Eq. (28), soit

$$P_{La} \approx \frac{2(2c)^2 L}{12 R_a} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (29)$$

Les pertes par unité de volume, P_{Va} , s'obtiennent en divisant l'Eq. (29) par la section du câble à savoir $(2c) \cdot (h)$ d'où

$$P_{Va} \approx \frac{2(2c)L}{12 h R_a} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (30)$$

On reconnaît ici une expression identique à celles données par Carr et *al* [4] et Sytnikov et *al* [7]. Cette expression est très semblable à celles données par Verweij [6]. La différence concerne la dépendance en N et s'expliqueraient, là aussi, par la modélisation des résistances aux bords du câble. De plus, cette expression est à rapprocher de celle donnée par Wilson [8], à condition de faire la correspondance entre la résistance de contact par unité de surface définie par Wilson et notre résistance adjacente.

5 Calcul des pertes par courants de couplage interbrin dans le cas où R_c est infinie (Modèle continu)

Dans ce second modèle, le câble est considéré comme un milieu continu. Cette approche a été originellement développée par Carr [9].

Le câble considéré est identique à ceux décrit précédemment et l'on considère, comme dans la section 4, que les résistances de croisement sont très grande et que leur influence peut être négligée. Les courants adjacents parcourent indépendamment chaque face du câble et passent d'un brin adjacent à un autre à travers les résistances adjacentes. Nous travaillerons sur une face du câble.

On suppose que les phénomènes sont indépendants de la variable x , le trièdre (x, y, z) étant défini sur la Fig. (6). On peut alors introduire une densité linéique de courant $J_x(y)$ représentée sur cette même figure.

Considérons un contour construit à partir de deux brins adjacents et formant un losange. Les grands cotés du losange sont formés par les axes des brins, les petits cotés sont formés par des segments de droite joignant les deux axes des brins parallèlement aux extrémités du câble. La Fig. (7) représente un tel contour.

Sur ce contour, en utilisant la loi de Lenz, nous pouvons écrire

$$2 \left(\frac{dB}{dt} \right) y \frac{2a}{\sin \theta} = 2 J_x(y) \Delta y \Delta R \quad (31)$$

où a est le rayon d'un brin, θ est l'angle entre la direction du brin et la base du câble, Δy est la largeur sur laquelle la densité de courant passe d'un brin à un autre à travers la résistance ΔR .

Nous pouvons définir une conductance par unité de longueur entre deux brins adjacents, g , telle que

$$\Delta R = \frac{1}{g \Delta y} \quad (32)$$

Si l'on définit la résistance entre deux brins adjacents sur un demi pas de transposition, $r_{L/2}$, nous avons

$$r_{L/2} = \frac{1}{g(2c)} \quad (33)$$

où $(2c)$ est la largeur du câble. Cette résistance peut être exprimée en fonction des résistances R_a définies précédemment. Sur un demi pas de twist, il vient

$$r_{L/2} = \frac{R_a}{N} \quad (34)$$

où N est le nombre de brins dans le câble (les résistances R_a sont en parallèle dans ce modèle).

En combinant les Eqs. (32) à (34), la relation définie dans l'Eq. (33) s'écrit

$$2\left(\frac{dB}{dt}\right)y\frac{2a}{\sin\theta} = 2J_x(y)\frac{2cR_a}{N} \quad (34)$$

Nous pouvons alors déterminer la densité linéique de courant $J_x(y)$

$$J_x(y) = \left(\frac{dB}{dt}\right)\frac{yNa}{c\sin\theta R_a} \quad (36)$$

Il est à noter que la densité linéique $J_x(y)$ est une fonction linéaire de y .

Une fois déterminée la densité linéique de courant, nous pouvons déterminer les pertes par unité de volume dues aux courants de couplage interbrin lorsque R_c est infinie.

Les pertes totales sont définies par

$$P = \sum 2\Delta R(J_x\Delta y)^2 \quad (37)$$

En utilisant l'Eq. (32), nous obtenons

$$P = \sum \frac{2}{g} J_x^2 \Delta y \quad (38)$$

En faisant tendre Δy vers 0 nous pouvons écrire

$$P = \int_0^c \frac{2}{g} J_x^2 dy \quad (39)$$

Afin de déterminer les pertes par unité de volume, calculons l'élément de volume liée au contour choisi. Tous calculs fait, nous obtenons

$$V = \frac{2cLh}{2N} \quad (40)$$

où h est l'épaisseur du câble et L le pas de torsade du brin.

Les pertes par unité de volume sont donc

$$P_{Va} = \frac{2N}{2cLh} \int_0^c \frac{2}{g} J_x^2 dy \quad (41)$$

En combinant les Eqs. (33), (34), (36) et (41), nous obtenons

$$P_{Va} = \frac{2N}{2cLh} \int_0^c \frac{2R_a(2c)}{N} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \frac{y^2 N^2 a^2}{c^2 (\sin\theta)^2 R_a^2} \quad (42)$$

d'où

$$P_{V_a} = \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \frac{4a^2 c N^2}{3R_a L h \sin^2 \theta} \quad (43)$$

En utilisant la relation

$$N \frac{2a}{\sin \theta} \approx L \quad (44)$$

déterminée à l'aide de considérations géométriques dans le câble, les pertes par unité de volume s'écrivent finalement

$$P_{V_a} \approx \frac{2(2c)L}{12hR_a} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (45)$$

où nous reconnaissons une formule identique à l'Eq. (30).

Si nous effectuons le rapport entre les deux types de pertes, nous avons

$$\frac{P_{V_a}}{P_{V_c}} = \frac{20}{N^2} \frac{R_c}{R_a} \quad (46)$$

Il apparait donc que, dans le cas où R_c et R_a sont du même ordre de grandeur, les pertes prédominantes sont les pertes créées au niveau des résistances de croisements.

REFERENCE

1. R. Otmani, A. Devred, T. Schild, "Mesure des résistances de contact sur un câble ITER/IGC," Note interne STCM/Nb₃Sn 5-2650--2160 004 97.
2. A.Devred, T.Ogitsu, " Rampe Rate sensitivity of SSC Dipole Magnet Prototype," *Frontiers of Accelerator Technology*, S.I. Kurukowa, M. Month and S. Turner, eds., World Scientific Publishers, p. 231.
3. A.A. Akhmetov, A.Devred, T. Ogitsu, "Periodicity of Cross-over Currents in a Rutherford-Type Cable Subjected to a Time-Dependant Magnetic Field," *Cryogenics*, Vol 29 (1989), p. 926-930.
4. W.J. Carr, V.T. Kovachev, "Interstrand Eddy Current Losses in Rutherford Cables," *Cryogenics*, Vol 35-8 (1995), p. 529-534.
5. A. Verweij, "Electrodynamics of superconducting cables in accelerator magnet," Thèse de l'Université de Twente (1995), p. 78.
6. G.H. Morgan, "Eddy currents in flat metal-filled superconcting braids," *J. Appl. Phys.*, Vol 44 (1973), p. 3319-3322.
7. V.E. Sytnikov, I.B. Peshkov, G.G. Svalov, Y.V. Prismaikov, "Transport and Induced Currents Distribution in Superconducting Transposed Cables," *Adv. in. Cryo. Eng.*, Vol 38 (1992), p. 553-558.
8. M. Wilson, "Rate Dependent Magnetization," RHEL int. note, M/A26 (1972).
9. W.J. Carr, "AC Loss and Macroscopic Theory of Superconductors," Gordon and Breach Science Publishers (1983), p. 91-105.

Representation d'un cable de Rutherford

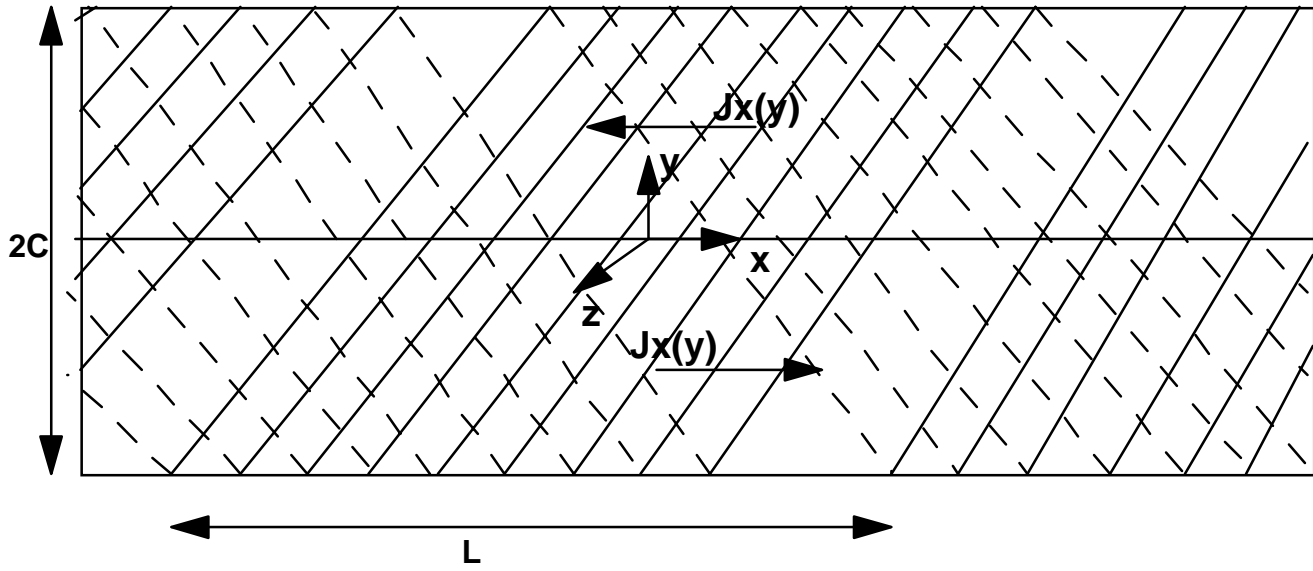


Fig 6

Representation du contour utilisé pour le calcul de $J_x(y)$

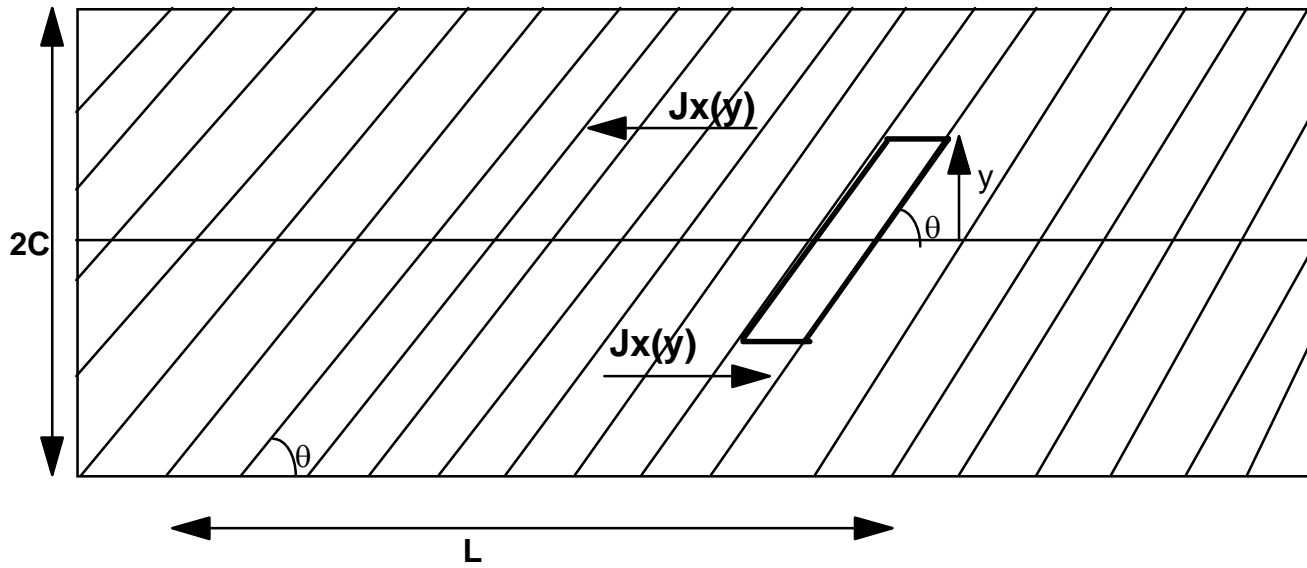


Fig 7