

Champs Magnétiques et Effet Dynamo dans les Corps Célestes

Dr. Allan Sacha Brun

Service d'Astrophysique, CEA Saclay
(lcd-www.colorado.edu/sabrun & sacha.brun@cea.fr)

Magnétohydrodynamique, Effet Dynamo et Théorie du champ moyen

- Les équations du mouvement ou hydrodynamiques
- Les équations de Maxwell et d'induction
- Théorie des champs moyens, effet dynamo, effets α et ω

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

L'Effet Dynamo qu'est ce que c'est?

La source principale de champs magnétiques dans l'Univers est due à l'effet dynamo.

Une définition: c'est la propriété que possède un fluide conducteur de générer un champ magnétique par ses mouvements (par auto-induction) et d'entretenir ce champ contre la dissipation Ohmique

C'est un effet tri dimensionnel, il y a par exemple un théorème anti-dynamo de Cowling interdisant une dynamo purement axisymétrique

Quelques livres de référence:

MHD: Cowling (1957), Moffatt (1978), Radler & Krause (1981), Parker (1989), Choudhuri (1997), Davidson (2000),
Magnétisme cosmique: Zeldovich et al. (1983), Parker (1989), Hollerbach & Rudiger (2004),
Dynamique des fluides et turbulence: Kundu & Cohen (2003), Rieutord (1995), Lesieur 1999, Frisch 1999

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Equations du Mouvement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = & -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla P + \rho \mathbf{g} \\ & - 2\rho\Omega_0 \times \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho T \frac{\partial S}{\partial t} = & -\rho T(\mathbf{v} \cdot \nabla)S + \nabla \cdot (\kappa_r \rho c_p \nabla T) \\ & + 2\rho\nu \left[e_{ij}e_{ij} - 1/3(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] + \rho\epsilon, \end{aligned} \quad (3)$$

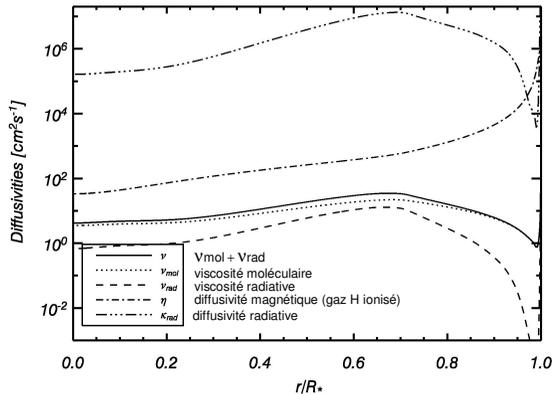
Tenseur visqueux:

$$\mathcal{D}_{ij} = -2\rho\nu \left[e_{ij} - 1/3(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ij} \right],$$

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Diffusivités dans le Soleil

Reference Sun

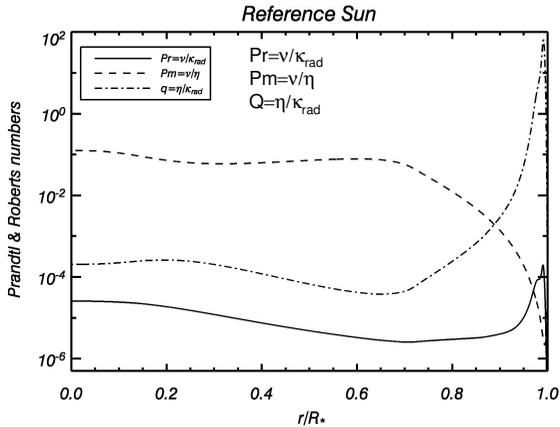


$$\nu_{rad} = \frac{4}{15} \frac{a}{c} \frac{T^4}{\rho^2 \kappa_{opa}} \quad \nu_{mol} = \frac{2.2 \cdot 10^{-15} T^{5/2}}{\ln \Lambda} \frac{1}{\rho} \quad \eta = 5.2 \cdot 10^{11} \ln \Lambda T^{-3/2}$$

$$\kappa_{rad} = \frac{\chi}{\rho c_p} = \frac{4}{3} \frac{acT^3}{\rho^2 c_p \kappa_{opa}} \quad \text{See Zeldovich et al. 1983, for a discussion of the formula of } \nu, \eta, \kappa$$

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Nombres de Prandtl (Pr), Prandtl magnétique (Pm) & Roberts (Q)



Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Equation de Maxwell (cgs)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7)$$

Remarque: 3 types de matériaux magnétiques ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, \mathbf{B} champ magnétique):

Diamagnétisme (perméabilité magnétique $\mu < 1$): la plus part des matériaux sont diamagnétiques (l'eau par ex) (répulsion limitant le champ extérieur imposé) (couches électronique pleines)

Paramagnétique ($\mu > 1$): attraction faible (couches électroniques non pleines) (aluminium par ex)

Ferromagnétique ($\mu \gg 1$): attraction forte, existence de domaines magnétiques par orientation favorable des spins électroniques, magnétisation résiduelle (hysteresis) (le fer par ex).

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Equations d'Induction

A partir des équations de Maxwell (5) et (7), en négligeant le courant de déplacement (valable si $v \ll c$):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} \text{ et } \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}),$$

et de loi d'Ohm, pour un fluide conducteur en mouvement à la vitesse \mathbf{v} :

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right)$$

on peut déduire l'équation d'induction:

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Equations d'Induction

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{c\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\ &= -\nabla \times \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})} \quad (8)$$

avec $\eta = c^2/4\pi\sigma$ la diffusivité magnétique,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \text{ si } \eta = \text{cst.}$$

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Quelques Remarques sur l'Equation d'Induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}$$

Si le fluide est au repos, l'équation se réduit à: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{B}$
 Ceci est une équation de **diffusion**, le champ magnétique **B décroît** dans une sphère uniforme de rayon R en un temps Ohmique:

$$\tau_{\eta} = \frac{R^2}{\pi^2 \eta}$$

Dans les conducteurs en laboratoire, τ_{η} est petit (10 s pour une sphère de cuivre de 1m), mais dans les conducteurs cosmiques il peut être gigantesque ($> 10^{10}$ d'années)

Par contre si le fluide est en mouvement (et que sa résistance est négligeable), l'équation devient:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Cela signifie que les lignes de champ magnétique sont « gelées » dans le fluide

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Quelques Remarques sur l'Equation d'Induction

Le nombre de **Reynolds magnétique** $Rm = vL/\eta$ permet de connaître le régime dans lequel le système étudié se trouve, il est généralement petit dans les expériences de laboratoires ($Rm \sim 1$ et < 50) & grand dans les objets cosmiques. Il y a théoriquement effet dynamo si Rm est suffisamment grand

Cela signifie que bien que le courant électrique dans les conducteurs de laboratoires soit principalement déterminé par la conductivité σ , dans un corps cosmique σ n'a que très peu d'influence sur l'amplitude des courants circulant, un changement par ex d'un facteur 10 de σ , n'induisant pas de changement significatif de **B**. La conductivité ne sert qu'à déterminer le champ électrique **E** (faible) nécessaire à la présence de ses courants (Cowling 1957).

Remarque: le premier terme de l'équation d'induction peut être décomposé en 2 parties,

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

un terme (le 1er) de **distortion** et **d'étirement** de **B** et un terme de **transport advectif**, et le dernier terme est lié à la **compressibilité** du fluide (nul si $\text{Div } \mathbf{v} = 0$).

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Kinematic Mean Field Theory

Starting point is the magnetic induction equation of MHD:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B},$$

where \mathbf{B} is the magnetic field, \mathbf{u} is the fluid velocity and η is the magnetic diffusivity (assumed constant for simplicity).

Assume scale separation between large- and small-scale field and flow:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u},$$

where \mathbf{B} and \mathbf{U} vary on some large length scale L , and \mathbf{u} and \mathbf{b} vary on a much smaller scale l .

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_0, \quad \langle \mathbf{U} \rangle = \mathbf{U}_0,$$

where averages are taken over some intermediate scale $l \ll a \ll L$.

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

For simplicity, ignore large-scale flow, for the moment.

Induction equation for mean field:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_0,$$

where mean emf is $\mathfrak{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$.

This equation is exact, but is only useful if we can relate \mathfrak{E} to \mathbf{B}_0 .

Consider the induction equation for the fluctuating field:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \nabla \times \mathbf{G} + \eta \nabla^2 \mathbf{b},$$

Where $\mathbf{G} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$. "pain in the neck term"

Si, \mathbf{G} est petit, alors la force électromotrice moyenne (mean emf), peut être développée en fonction de $\langle \mathbf{B} \rangle_\phi$:

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle_\phi = \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{b})_i \rangle_\phi = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle_\phi + \beta_{ijk} \frac{\partial \langle B_j \rangle_\phi}{\partial x_k} + \dots$$

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

BASIC PROPERTIES OF THE MEAN FIELD EQUATIONS

Add back in the mean flow U_0 and the mean field equation becomes

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\alpha \mathbf{B}_0 + \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}_0) + (\eta + \beta) \nabla^2 \mathbf{B}_0$$

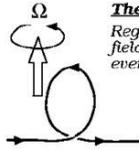
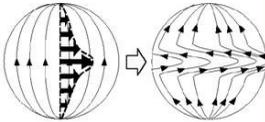
ici α et β
considérés
isotropes

Now consider simplest case where $\alpha = \alpha_0 \cos \theta$ and $U_0 = U_0 \sin \theta \mathbf{e}_\phi$

In contrast to the induction equation, this can be solved for axisymmetric mean fields of the form $\mathbf{B}_0 = B_{0t} \mathbf{e}_\phi + \nabla \times (A_{0,r} \mathbf{e}_\phi)$

The Ω effect

Conversion of poloidal to toroidal field by differential rotation.

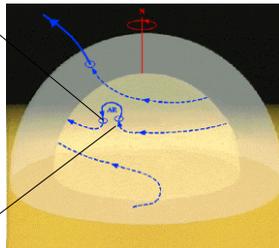
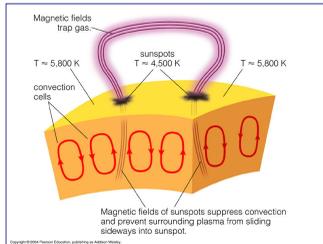
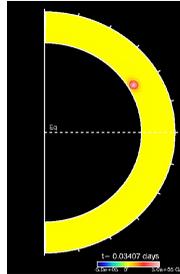
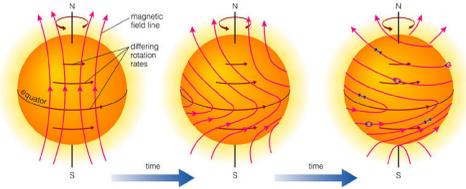


The α effect

Regeneration of poloidal field from toroidal by cyclonic events in rotating convection.

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Transport and generation of B_{tor}



Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Modèles de Dynamo cinématique 2-D MHD axisymétrique du Soleil

- Distributed dynamo: fails
- Interface dynamo:
 - 1) alpha-omega $\alpha\omega$
 - 2) Babcock-Leighton (flux transport)
 - 3) mixed of both! (best model so far)

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Modèles Dynamo Champs Moyens:

- Résolvent équation d'induction en axisymétrique (donc introduction d'un terme pour satisfaire Cowling anti-dynamo théoreme)
- C'est l'effet **alpha**, toroidal -> poloidal
- Ou un terme **source de surface S**, toroidal -> poloidal
- Assument un profil de rotation => effet **Omega** (pol->tor)
- Régime **cinématique** (pas de retour sur champ de vitesse)
- Certains modèles prescrivent aussi une **circulation méridienne**

Plus: rapide donc large étude d'espace de paramètres
paramétrisation de alpha permet un réglage fin,
résultats comparable aux observations

Moins: cinématique, prescrit alpha, Omega
(éventuellement déduit de l'héliosismologie), MC (si présente) et mag diffusivité de manière non consistante

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Dynamo Champs magnétiques moyens

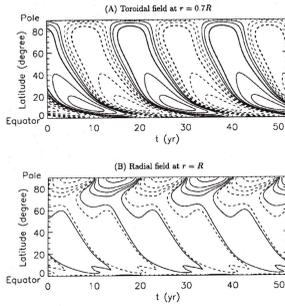


FIG. 7.—Butterfly diagrams for a solar-like solution. The format and contour level spacing is identical to Fig. 3. This solution is produced using parameter values $u_0 = 1500 \text{ cm s}^{-1}$, $\delta_0 = 20 \text{ cm s}^{-1}$, and $\eta_r = 3 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, corresponding to $C_0 = 4.7 \times 10^3$, $C_2 = 4.64$, and $R_{\text{eff}} = 348$. It is characterized by a cycle period $T = 19.8 \text{ yr}$, maximum toroidal field strength below the interface, $B_{\text{max}} = 10 \text{ kG}$, and maximum surface polar field $B_{\text{max}} = 140 \text{ G}$. Note how the surface polar field (b) changes sign as the low-latitude toroidal field on (a) is maximal in amplitude.

(Charbonneau et Dikpati 2001)

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

(Parker 1955
Babcock 1961
Leighton 1969,
Wang et al. 1971,
Roberts & Stix 1972
Parker 1993
Chouduri et al. 1995
Durney 1995,...
Rudiger & Brandenburg 1995
Charbonneau & Mc Gregor 1996
Tobias 1996
Kuker et al. 2001
Charbonneau et Dikpati 2001
et bien d'autres...)

Dynamo Champs magnétiques moyens

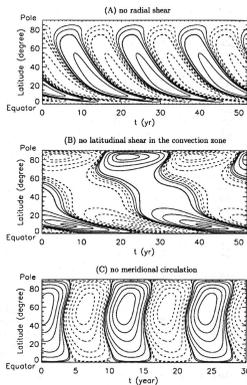


FIG. 4.—Three toroidal field butterfly diagrams resulting from various numerical “surgical” experiments. The format is the same as in Fig. 3a. (a) Solution where the radial shear was artificially shut-off, with only the latitudinal shear left to contribute to the generation of toroidal fields. (b) Opposite experiment, i.e., the latitudinal shear has been artificially shut-off. For these two solutions all parameter values are otherwise identical to the reference solution of Figs. 2 and 3. (c) Solution where the meridional circulation has been turned off. The resulting butterfly diagram bears a striking resemblance to that produced by mean field interface dynamics (see text).

Diagramme papillon

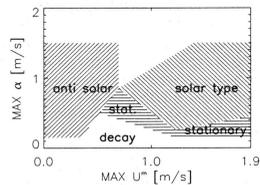


Fig. 11. The different types of solution found for varying strengths of the α -effect and the flow speed. The terms *solar type* and *anti solar* refer to equatorward and poleward drifting field belts, respectively, while *stationary* refers to a stationary field. The magnetic diffusivity always has a value of $10^{11} \text{ cm}^2/\text{s}$.

(Charbonneau et Dikpati 2001,
Kuker et al. 2002)

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Equations de la Magnétohydrodynamique

Continuité, Navier-Stokes, Energie (+ force de Laplace + diffusion Ohmique):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla P + \rho \mathbf{g} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathcal{D} + \boxed{\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}, \quad (2)$$

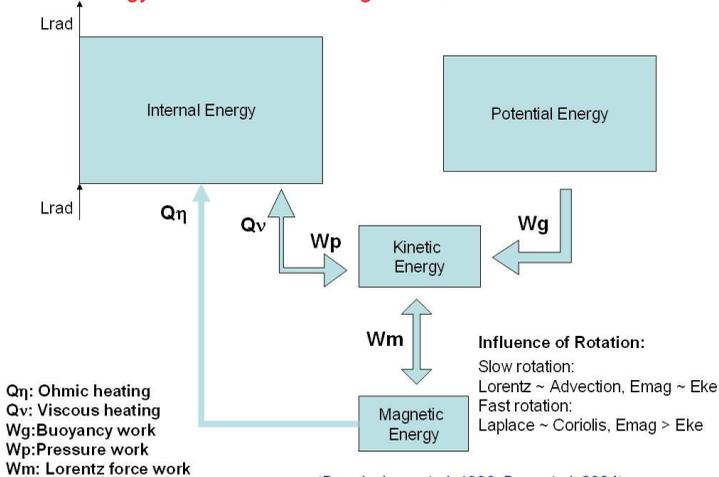
$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} = -\rho T(\mathbf{v} \cdot \nabla) S + \nabla \cdot (\kappa_r \rho c_p \nabla T) + \boxed{\frac{4\pi \eta \mathbf{J}^2}{c^2}} + 2\rho \nu [e_{ij} e_{ij} - 1/3(\nabla \cdot \mathbf{v})^2] + \rho \epsilon, \quad (3)$$

plus induction:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (8)$$

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Energy Reservoirs in a Magnetized Convection Zone



Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Dynamo cinématique vs dynamique (nonlinéaire)

Si la force de Laplace peut être négligée dans l'équation de Navier-Stokes, on parle alors de *dynamo cinématique*, l'instabilité est linéaire avec une croissance exponentielle

Dans le cas contraire (ce qui arrive pour des champs B d'amplitudes finies), on parle de *dynamo dynamique*, il y a rétroaction de la force de Laplace sur les mouvements, l'instabilité sature et le champ magnétique atteint une amplitude finie. L'énergie magnétique $ME=B^2/8\pi$ est proche de l'équipartition avec l'énergie cinétique $KE=0.5\rho v^2$ des mouvements fluides.

Remarque: la force de la Laplace peut se décomposer en 2 parties,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ &= \boxed{\frac{1}{8\pi} \nabla B^2}_a - \boxed{\frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}_b\end{aligned}$$

Une *pression magnétique* (terme a) perpendiculaire aux lignes de champ magnétique et une *tension magnétique* (terme b) le long de celles-ci.

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Modèles Dynamo Non-linéaires (cf. cours 3):

- Résolvent les équations de la Magnétohydrodynamiques (donc pas de terme extra)
- Régime dynamique (retour sur champ de vitesse par Lorentz)
- Modèles avec ou sans convection
- Certains modèles prescrivent le cisaillement dans la tachocline

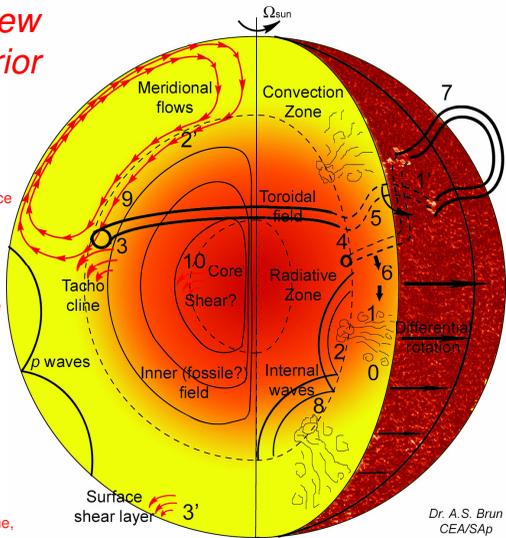
Moins: lent donc petite étude d'espace de paramètres, 'Building block' pas de modèle complet (pour l'instant), donc comparaison avec observations moins directes

Plus: dynamique, effet alpha, Omega et MC de manière consistante, 3D (variations longitudes)

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

A Theoretical View of the Sun's Interior Dynamics

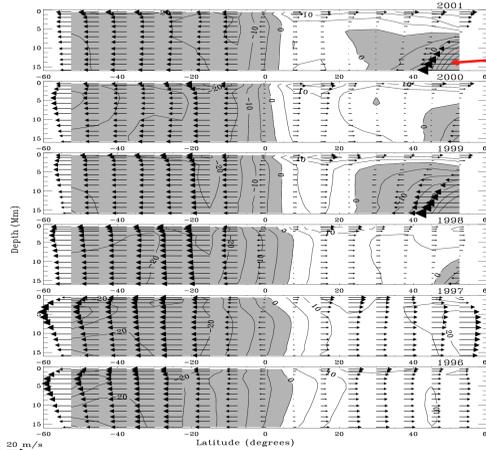
- 0: convection turbulente (panaches)
- 1: génération/auto induction de champ mag (effet alpha) ou
- 1': inclinaison des regions actives, source de Bpol
- 2: pompage turbulent de B ou
- 2': transport par circulation méridienne
- 3: organisation par cisaillement tachocline (effet omega)
- 3': cisaillement de surface, Sub surface weather
- 4: instabilité de Parker des structures toroidales (m=1 ou 2)
- 5: émergence + rotation de structures vrillées, 6: recyclage ou
- 7: apparition à la surface sur forme bi-polaire
- 8: ondes internes extractant du moment cinétique
- 9: interactions entre champ dynamo et champ interne (fossile?)
- 10: instabilité de Taylor du champ interne, il y a t il un effet dynamo dans la RZ?



Dr. A.S. Brun
CEA/SAP

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Circulation Méridienne du Soleil (Données MDI)



Apparition d'une contre cellule dans l'hémisphère nord lors du cycle 23.

Pb dynamo Babcock-Leighton qui assume 1 cellule

(Haber et al. 2002)

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

TP2: développer une subroutine F90

A partir de l'équation d'induction déduite de la théorie des champs moyens:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times (\alpha' \langle \mathbf{B} \rangle) + \eta \Delta \langle \mathbf{B} \rangle$$

et en faisant l'hypothèse d'axisymétrie ($\delta/\delta\phi=0$), puis en utilisant un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et une décomposition toroidale-poloidale pour \mathbf{B} et \mathbf{v} (en négligeant la circulation méridienne pour \mathbf{v}):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B} \rangle &= \nabla \times (A(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ \langle \mathbf{U} \rangle &= r \sin \theta \Omega_0 \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi \text{ et } \alpha \text{ sous la forme} \\ \alpha' &= \alpha_0 \alpha = \alpha_0 (1 - r)(1 - r_{min}) \cos \theta \end{aligned}$$

Déduire les coefficients a,b,c,d,dd,f,ff,g,gg,h et hh, nécessaires pour écrire la subroutine Fortran 90 permettant d'utiliser le code éléments finis pour résoudre le problème de la dynamo cinématique.

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Décomposition Toroidale-Poloidale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} &= \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times (\alpha' \langle \mathbf{B} \rangle) + \eta \Delta \langle \mathbf{B} \rangle \\ \langle \mathbf{B} \rangle &= \nabla \times (A_\phi(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ \langle \mathbf{U} \rangle &= r \sin \theta \Omega_0 \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)}{\partial t} &= \nabla \times ((r \sin \theta \Omega_0 \Omega \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \\ &\quad + \nabla \times (\alpha' (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) + \eta \Delta (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi))}{\partial t} &= \nabla \times ((r \sin \theta \Omega_0 \Omega \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \\ &\quad + \nabla \times (\alpha' (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) - \eta \nabla \times (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)}{\partial t} &= [(r \sin \theta \Omega_0 \Omega \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)]_\phi \\ &\quad + [\alpha' (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)]_\phi - \eta [\nabla \times (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)]_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \times \mathbf{b}]_\phi &= u_r b_\theta - u_\theta b_r \\ &= 0 \text{ car on néglige } \mathbf{u}_{pol}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial t} = \alpha' B_\phi + \eta \left(\Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) A_\phi$$

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04

Décomposition Toroidale-Poloidale

$$\frac{\partial(\nabla \times (A_\phi \hat{e}_\phi) + B_\phi \hat{e}_\phi)}{\partial t} = \nabla \times ((r \sin \theta \Omega_0 \Omega \hat{e}_\phi) \times (\nabla \times (A_\phi \hat{e}_\phi) + B_\phi \hat{e}_\phi)) \\ + \nabla \times (\alpha' (\nabla \times (A_\phi \hat{e}_\phi) + B_\phi \hat{e}_\phi)) + \eta \Delta (\nabla \times (A_\phi \hat{e}_\phi) + B_\phi \hat{e}_\phi)$$

$$\frac{\partial(B_\phi \hat{e}_\phi)}{\partial t} = [\nabla \times ((r \sin \theta \Omega_0 \Omega \hat{e}_\phi) \times (\nabla \times (A_\phi \hat{e}_\phi) + B_\phi \hat{e}_\phi))]_\phi \\ + [\nabla \times (\alpha' (\nabla \times (A_\phi \hat{e}_\phi) + B_\phi \hat{e}_\phi))]_\phi + \eta \Delta (B_\phi \hat{e}_\phi)$$

$$\nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) = \langle \mathbf{U} \rangle (\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle) - \langle \mathbf{B} \rangle (\nabla \cdot \langle \mathbf{U} \rangle) \\ + (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{U} \rangle - (\langle \mathbf{U} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{B} \rangle \\ = (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{U} \rangle, \text{ car } \partial/\partial\phi = 0 \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = [(\nabla \times (\mathbf{A}_\phi \hat{e}_\phi)) \cdot \nabla] (r \sin \theta \Omega_0 \Omega) \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \alpha' \frac{\partial}{\partial r} (r A) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha' \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) + \eta (\Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}) B_\phi$$

Nous considérons la dynamo $\alpha\omega$, donc on néglige ici α dans l'équation pour B_ϕ

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = [(\nabla \times (\mathbf{A}_\phi \hat{e}_\phi)) \cdot \nabla] (r \sin \theta \Omega_0 \Omega) + \eta (\Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}) B_\phi$$

Dr. A.S. Brun, Master Modélisation et Simulations, ENSTA – 02/12/04