

Importance des différents effets physiques ds le plan ρ - T

Intérieur stellaire = matière fortement ou partiellement ionisée = plasma
arts au gas parfait classique : effets de Coulomb, de dégénérescence, de
mécanique quantique, de relativité.

Densité de particules n_l ; densité de matière ρ ; fraction de masse X

$$\rho = \sum_l n_l m_l \quad ; \quad n_l = \frac{N_l}{V} \quad ; \quad m_l = \frac{A_l}{N_0} \quad N_0 = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ nbr d'Avogadro}$$

$$X_l = n_l m_l / \rho \Rightarrow n_l = \rho \frac{X_l}{m_l}$$

Poids moléculaire moyen μ (\neq potentiel chimique !)

• ionique : $\frac{1}{\mu_i} = \sum_l \frac{X_l}{A_l} = \sum_l \frac{n_l}{\rho N_0}$

• électronique : $\frac{1}{\mu_e} = \frac{n_e}{\rho N_0} = \sum_l \frac{X_l Z_l}{A_l}$

• moyen : $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e}$

milieu complètement neutre : $n_e = 0 \Rightarrow \mu_e = \infty \Rightarrow \mu = \mu_i$

milieu complètement ionisé : $n_e = \sum_l n_l Z_l \Rightarrow \mu \approx \frac{2}{1 + 3X + 0.5Y}$

! $\mu_e = 2$ Velt sauf pour H pur où $\mu_e = 1$

Distance moyenne entre particules a

• ions : $a_i = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{V}{N_i} \right)^{1/3}$

• électrons : $a_e = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{V}{N_e} \right)^{1/3} = \frac{a_i}{\bar{Z}^{1/3}}$

$$(\bar{Z} = \sum \frac{N_i}{N} Z_i)$$

Longueur d'onde de Compton λ_c

$$\lambda_c = \frac{hc}{mc^2} = \frac{h}{mc} \quad (\lambda_c = \frac{\lambda_c}{2\pi})$$

Longueur d'onde thermique de De Broglie Λ

• Particule non relativiste (NR) : $\Lambda = \frac{h\nu}{kT} = \frac{h}{(mkT)^{1/2}} \quad \Lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$
($\nu = \sqrt{kT/m}$)

• Particule ultra relativiste (UR) : $\Lambda = \frac{hc}{kT}$

Paramètre de couplage Γ ou r_s

$$= \frac{\text{Energie potentielle moyenne}}{\text{Energie cinétique}} = \frac{\langle E \rangle}{K} ; E = \frac{e^2}{a} \text{ ou } \frac{e^2}{a_e}$$

• Particules classiques : $K = kT \Rightarrow \Gamma = \frac{e^2}{akT}$

• Particules quantiques : $K = \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \Rightarrow r_s = \frac{a_e}{a_0}$

$$\Gamma \sim \rho^{1/3} \quad r_s \sim \rho^{-1/3} \quad \rho \uparrow \rightarrow \Gamma \uparrow, r_s \downarrow$$

Paramètre de dégénérescence τ

$$\tau = \frac{kT}{kT_F} = 2 \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{2/3} \frac{r_s}{\Gamma}$$

$$kT_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

Longueur d'écran λ_s

$$\lambda_s = \frac{h\nu}{\hbar \Omega_p}$$

$$\Omega_p^i = \left(\frac{4\pi n_i Z^2 e^2}{m_i} \right)^{1/2} \quad (\text{fréquence plasma})$$

$$\Omega_p^e = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \right)^{1/2}$$

• Particules classiques : $\nu = \sqrt{kT/m} \rightarrow \lambda_s = 2\pi \left(\frac{kT}{4\pi n_i Z^2 e^2} \right)^{1/2} \sim \lambda_D$

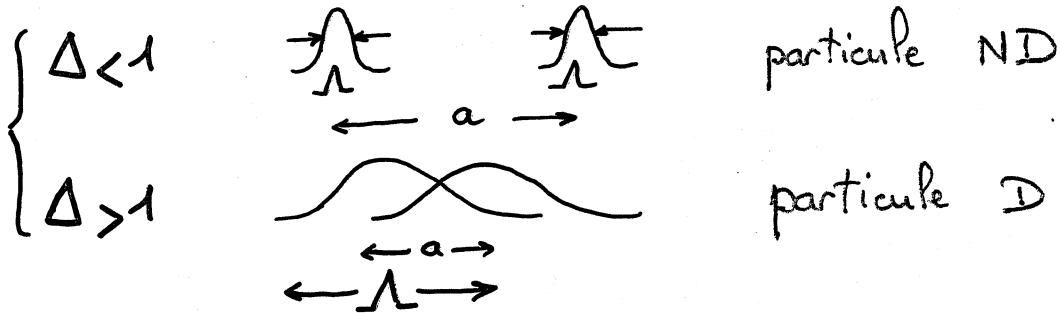
• Particules quantiques : $\nu = v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}} \rightarrow \lambda_s = 2\pi \left(\frac{\varepsilon_F}{2\pi n_e e^2} \right)^{1/2} \sim \lambda_D$

Effets de dégénérescence électronique

- $\bar{\sigma} \ll 1 \rightarrow e^-$ totalement dégénérés (naines blanches)
- $\bar{\sigma} \gg 1 \rightarrow e^- \sim$ particules classiques (soleil : $\bar{\sigma} \sim 4$)
- $\bar{\sigma} \sim 1 \rightarrow e^-$ partiellement dégénérés

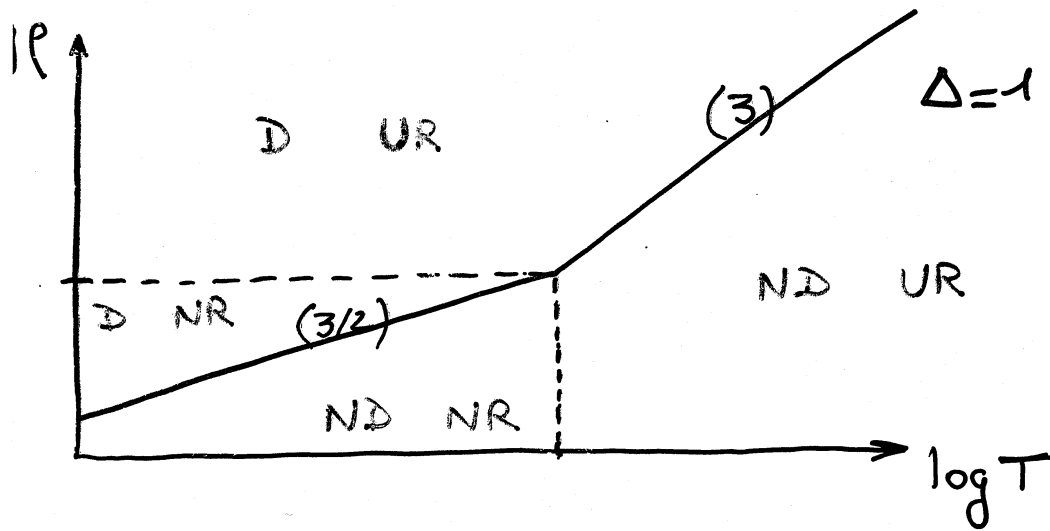
Effets de dégénérescence ionique

nombre de Fermi : $\Delta = \frac{\Lambda}{a}$



i) NR $\Delta = 1 = \frac{\Lambda}{a} \propto \frac{n^{1/3}}{T^{1/2}}$

ii) UR $\Delta = 1 = \frac{\Lambda}{a} \propto \frac{n^{1/3}}{T}$



~~Fondamentalement les conditions $\Delta = 1$ et $\bar{\sigma} = 1$ conduisent toutes au même résultat qualitatif.~~

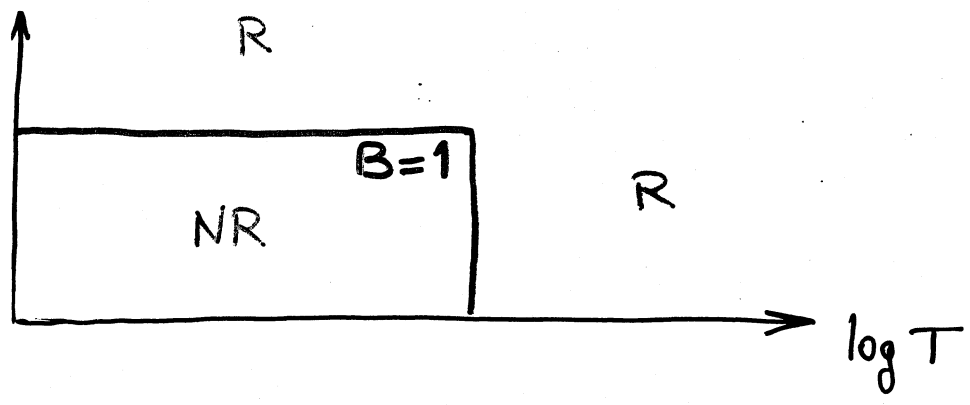
• Effets relativistes

nombre d' Einstein : $B = \frac{\chi_c}{\mathcal{A} \text{ ou } a} = \frac{\text{énergie cinétique}}{\text{énergie au repos}}$

hautes températures \rightarrow énergie cinétique = énergie thermique $\rightarrow \mathcal{A}$
 hautes densités \rightarrow " = énergie de Fermi $\rightarrow a$

i) hautes T $B=1 = \frac{\chi_c}{\mathcal{A}} \propto T^{1/2}$

ii) hautes ρ $B=1 = \frac{\chi_c}{a} \propto \rho^{1/3}$



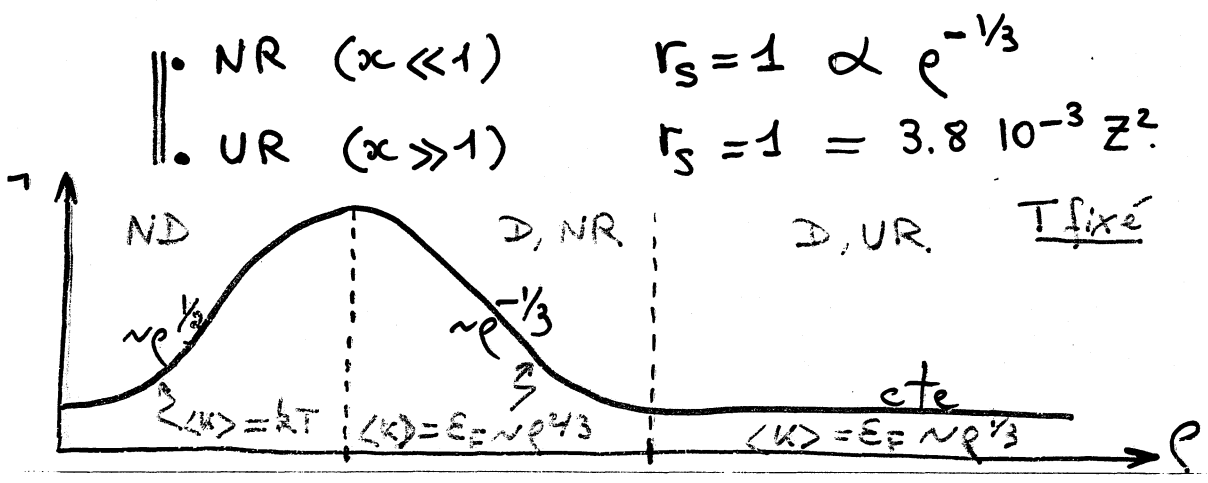
• Effets non idéaux

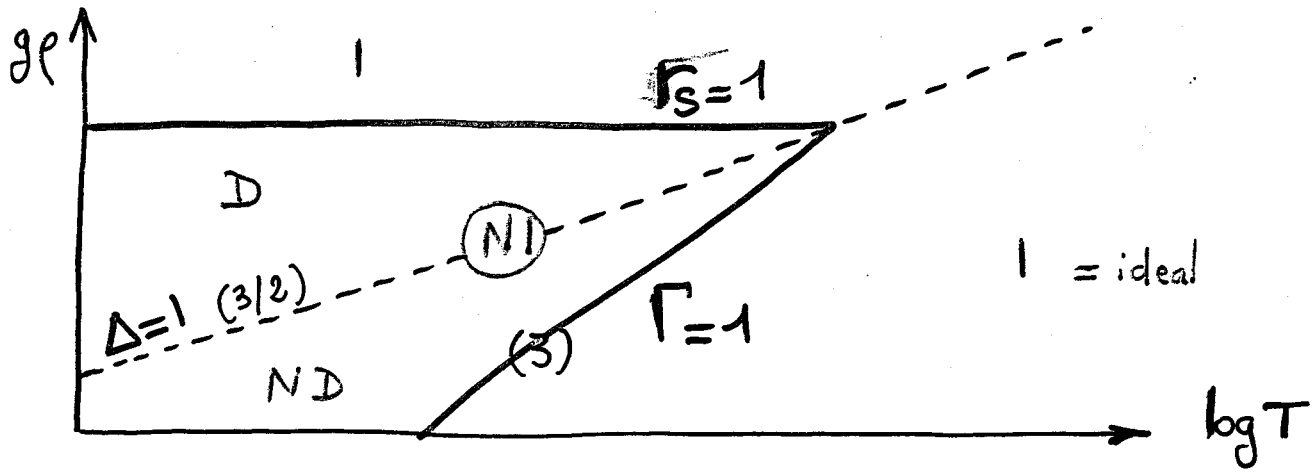
Γ ou $\Gamma_s < 1$ plasma faiblement corrélé ($\langle K \rangle > \langle E \rangle$)

Γ ou $\Gamma_s > 1$ plasma fortement corrélé ($\langle K \rangle < \langle E \rangle$)

i) ND $\Gamma=1 \propto \frac{\rho^{1/3}}{T}$

ii) D $E_F = mc^2 (\sqrt{1+x^2} - 1)$ où $x = \frac{\hbar}{mc} (3\pi^2 n)^{1/3}$





• Effets collectifs

nombre de Debye $\Theta = \frac{\Lambda}{\lambda_s} = \frac{\hbar \Omega_p}{kT}$

$\Theta < 1 \rightarrow$ calcul classique

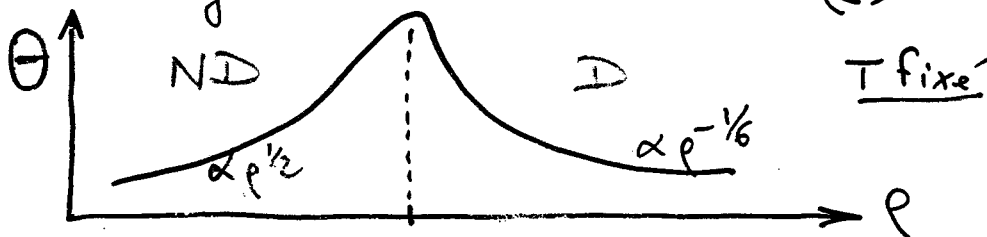
$\Theta > 1 \rightarrow$ effets collectifs sur le potentiel d'interaction (\leftrightarrow théorie de Debye du solide) \rightarrow calcul quantique de l'interaction (phonons)

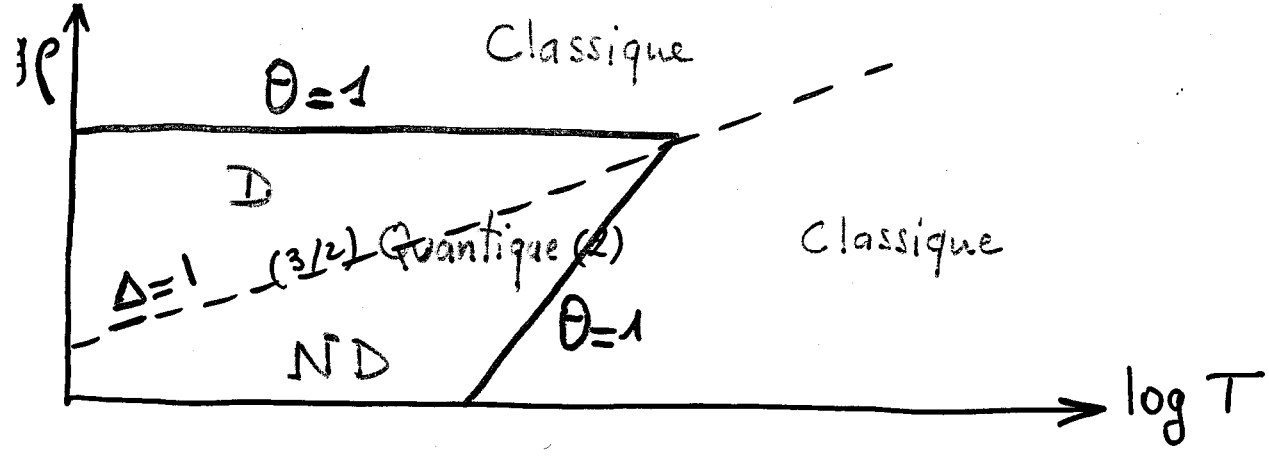
Θ représente les effets quantiques sur l'interaction, différents des effets quantiques reliés aux degrés de liberté de translation, appelés effets de dégénérescence, donnés par $\bar{\sigma}$. $\Theta = 1$ n'est à considérer que si les particules sont ~~non relativistes~~ non relativistes sous toutes les conditions astrophysiques d'intérêt.

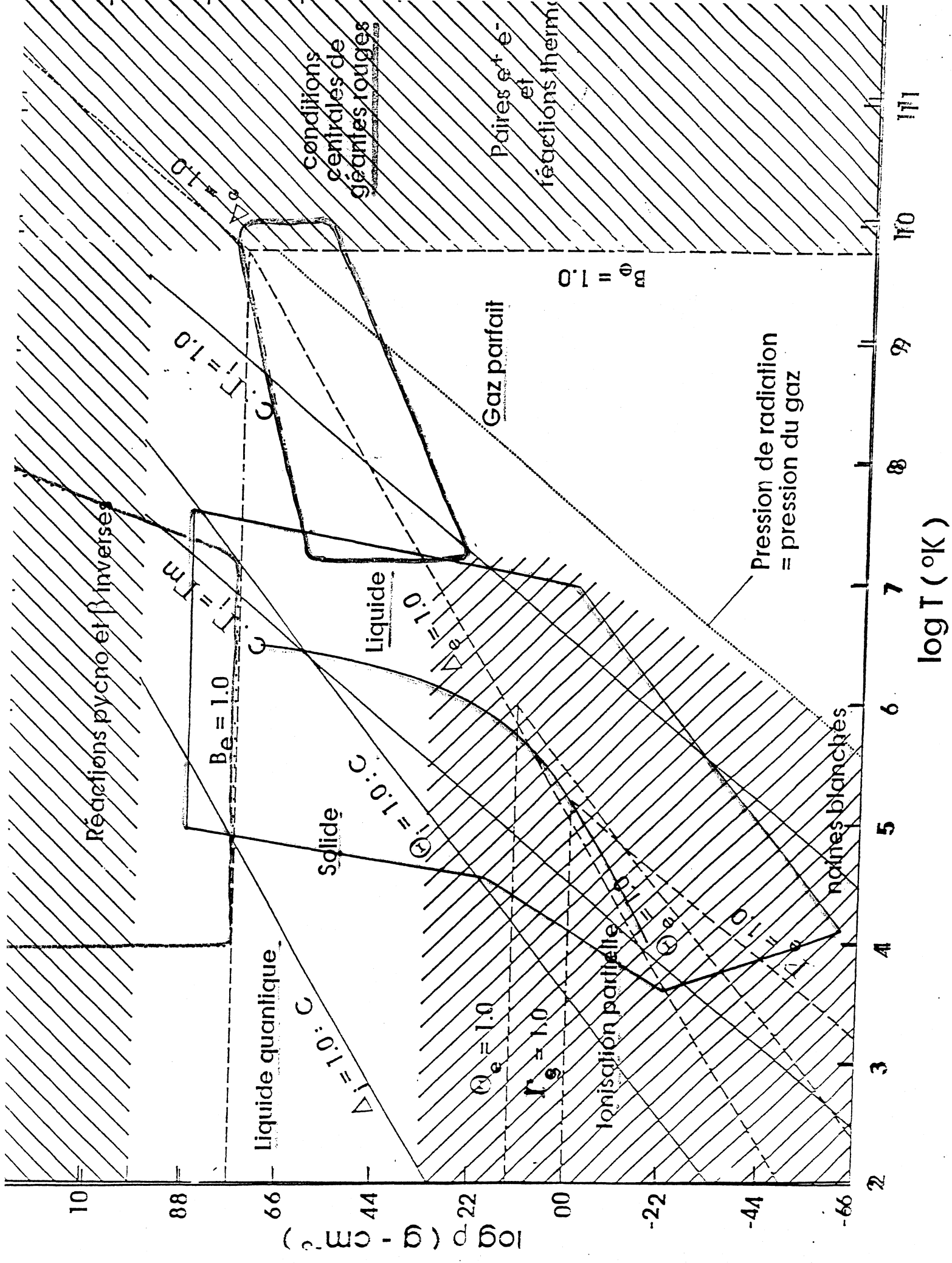
• particules ND : $\Theta = 1 \propto \frac{\rho^{1/2}}{T}$

• particules D : $kT = \epsilon_F \rightarrow \Theta = 1 \propto \rho^{-1/6}$

dégénérescence forte, on ne peut plus séparer distinctement les degrés de liberté de translation des degrés de liberté d'interaction (\leftrightarrow Non commutativité des opérateurs)







Séquence principale

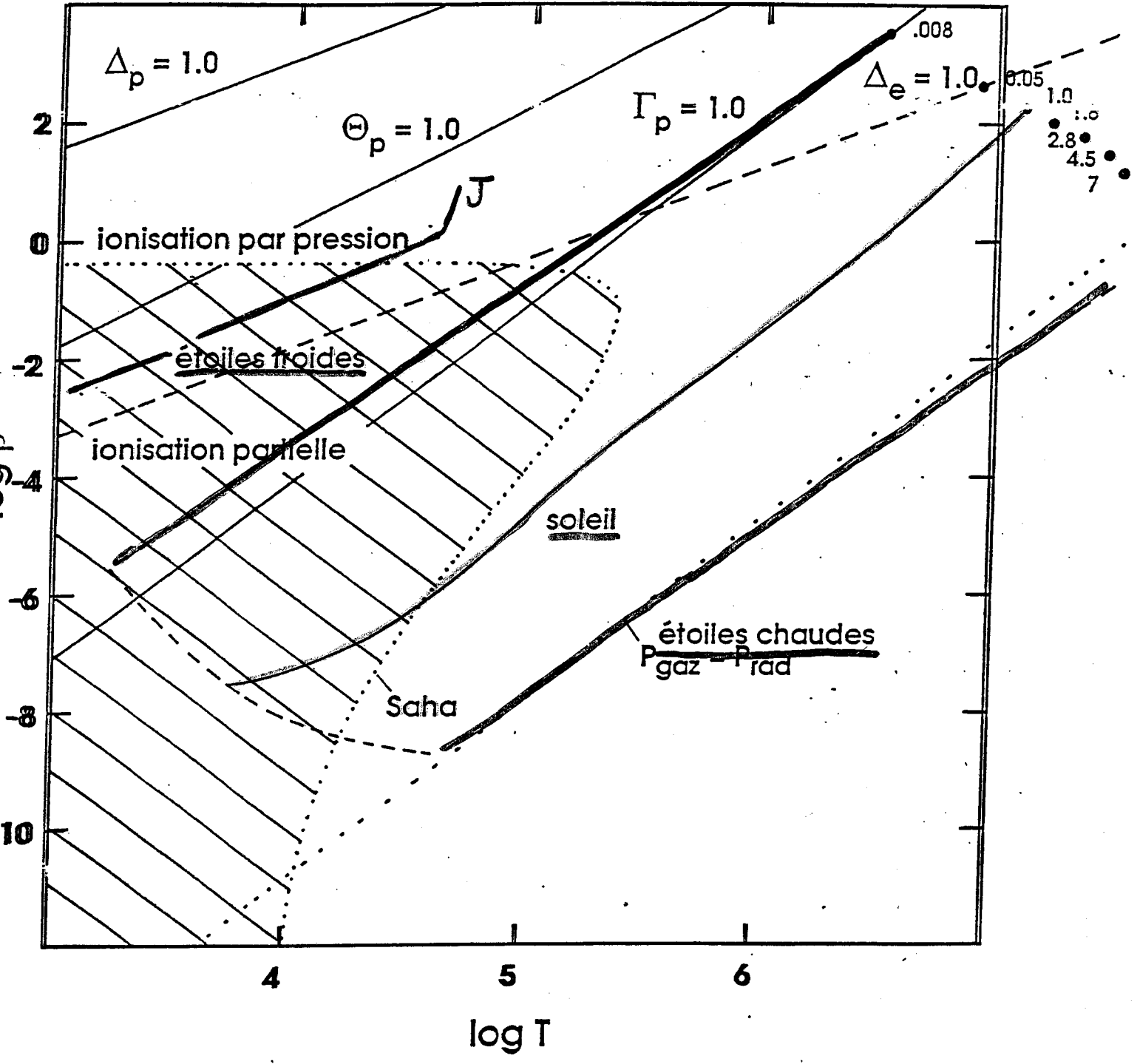
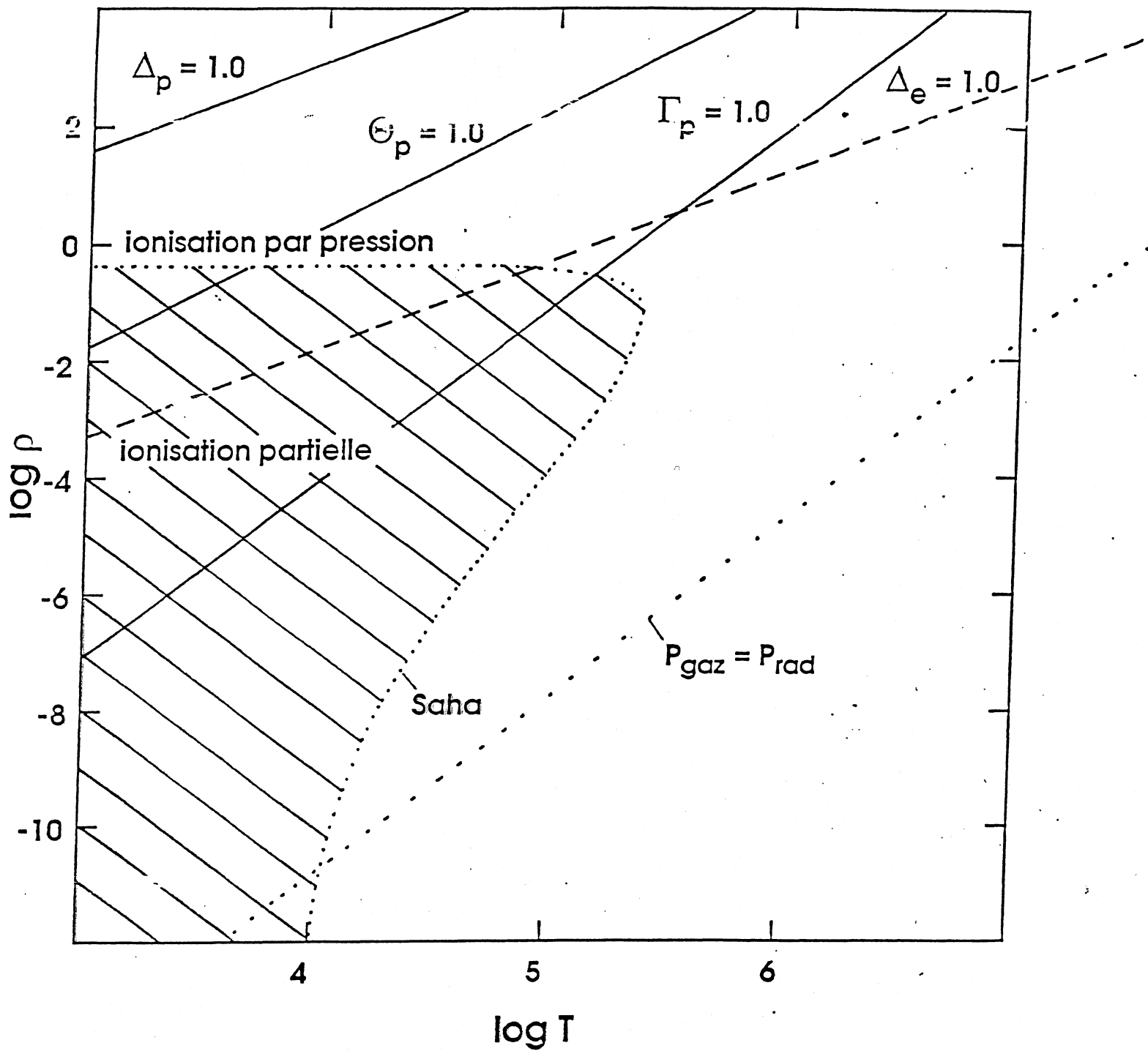
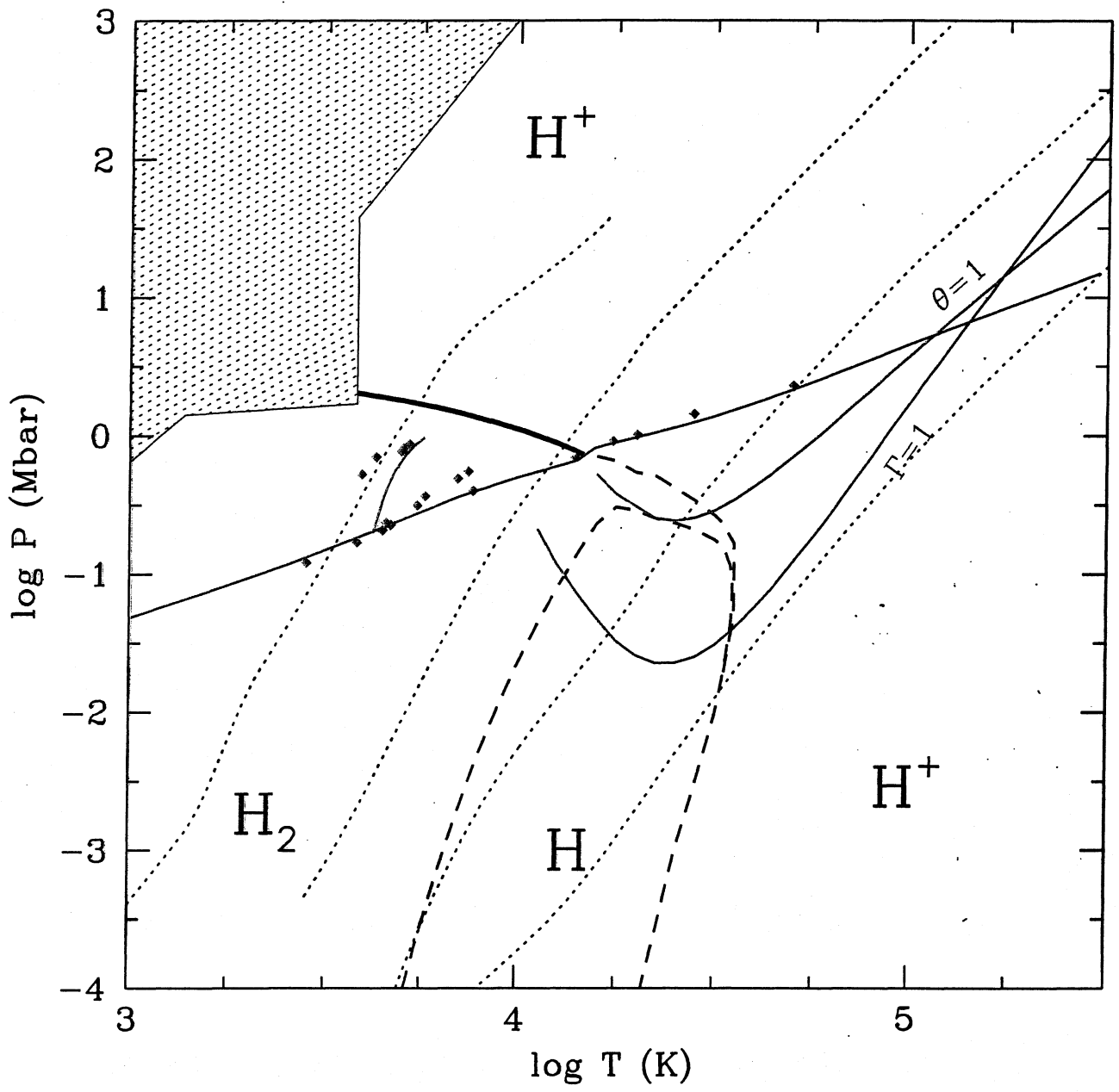


Fig 1

H + e⁻





Approche formelle de l'EOS

Thermodynamique de i espèces de particules ds un volume V à la température T

fonction de partition $Z = \text{Tr} \{ \exp(-H/kT) \}$

(Tr prise sur tous les états quantiques du système)

potentiel thermodynamique = énergie libre de Helmholtz

$$F(T, V, \{N_i\}) = -kT \ln Z(T, V, \{N_i\})$$

phys. macroscopique \longleftrightarrow phys. microscopique

Grandeurs Thermodynamiques du système

$$P = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T ; \quad S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V ; \quad U = F + TS ; \quad \mu_j = \left. \frac{\partial F}{\partial N_j} \right|_{N_{i \neq j}, V, T}$$

$$\chi_T^{-1} = -V \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_T ; \quad C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V$$

$(= \frac{1}{kT^2} [\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2])$

$$\rightarrow \nabla_{ad}, \quad \Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad c_s^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s$$

Conditions obligatoires

• Stabilité $\rightarrow \chi_T > 0$ et $C_V > 0$

• Consistence thermodynamique $\rightarrow \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T$

Equation d'état du Gaz Parfait

$$Z = Z_{\text{trans}} Z_{\text{int}} \rightarrow F = F_{\text{trans}} + F_{\text{int}}$$

(plusieurs espèces : $F = \sum_{\alpha} F_{\alpha}$)

applicable essentiellement aux étoiles de la SP. Particules en présence = particules lourdes (atomes, ions, molécules en surface ($T_e \lesssim 5000 \text{ K}$)) (NR, ND), des e^- libres (R, ND $\xrightarrow{\text{évolution}}$ D, UR), des photons (D, UR)

1. La FP du gaz parfait

$$\ln Z = -\eta N + \sum_k \ln(1 \pm e^{\eta - \beta \epsilon_k})^{\pm 1}$$

+ : **FD**
- : **BE**

$$\eta = \beta \mu; \beta = 1/kT$$

\downarrow
tous états d'énergie

$$N = \sum_k (e^{-\eta + \beta \epsilon_k} \pm 1)^{-1} = \# \text{ de particules} \rightarrow \text{fixe } \eta$$

Cas non dégénéré ($\eta = -\infty$) $\rightarrow e^{\beta \epsilon_k - \eta} \gg 1 \rightarrow$ **MB** $N = e^{\eta} \sum_k e^{-\beta \epsilon_k}$

2. Gaz parfait d'électrons

$$\ln Z_e = -\eta N_e + \frac{2V}{h^3} \int \ln(1 + e^{\eta - \beta \epsilon(p)}) d\vec{p}$$

$$N_e = \frac{2V}{h^3} \int [e^{-\eta + \beta \epsilon(p)} + 1]^{-1} d\vec{p}$$

$$\epsilon(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

\swarrow NR
 \searrow UR

$\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$
 $\epsilon(p) = pc$

$$\dots \dots N_e = \sqrt{2} \frac{V}{\pi^2 h^3} m^3 c^3 \delta^{3/2} (F_{1/2}(\eta, \delta) + \delta F_{3/2}(\eta, \delta))$$

$$F_e = \eta \delta mc^2 N_e - \sqrt{2} \frac{V}{\pi^2 h^3} m^4 c^5 \delta^{5/2} \left(\frac{2}{3} F_{3/2}(\eta, \delta) + \frac{\delta}{3} F_{5/2}(\eta, \delta) \right)$$

$$\delta = \frac{kT}{mc^2}; \quad F_k(\eta, \delta) = \int_0^{\infty} \frac{(1 + \frac{\delta x}{2})^{1/2}}{e^{-\eta + x} + 1} x^k dx \quad (k > -1)$$

$$x = \epsilon(p)/kT$$

Limite ND $\eta = -\infty$

$\rightarrow P_e = \frac{N_e kT}{V}$ ND $\forall \gamma$

- Cas non relativiste ($\gamma \rightarrow 0$) $P_e = \frac{2}{3} \frac{E_e}{V}$ ND, NR
- Cas ultra relativiste ($\gamma \rightarrow 1$) $P_e = \frac{1}{3} \frac{E_e}{V}$ ND, UR

Limite D, R $\eta = +\infty$

correction à T finie ($T \ll T_F$)

• $\eta = \frac{1}{\gamma} \left[(1 + y^2)^{1/2} - 1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{\sigma^2}{y^2 (1 + y^2)^{1/2}} \right]$

$= \frac{p_F}{mc}$; $p_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3}$ $\rightarrow y = 1.009 \left(\rho_6 \frac{\langle Z \rangle}{\langle A \rangle} \right)^{1/3}$

($\rho_6 \equiv$ densité en unité de 10^6 g cm^{-3}) ; $\langle X \rangle = \sum_{i=1}^Z x_i X_i$; $X_i = \frac{N_i}{N}$

$= \frac{kT}{kT_0}$; $T_0 = \frac{mc^2}{k_B} = 5.93 \cdot 10^9 \text{ K}$ tq $T_F = T_0 [(1 + y^2)^{1/2} - 1]$

• $P_e = P_0 \left\{ y \left(\frac{2}{3} y^2 - 1 \right) (1 + y^2)^{1/2} + \sinh^{-1} y + \frac{4\pi^2}{9} \frac{\sigma^2 y (y^2 + 2)}{(1 + y^2)^{1/2}} \right\}$
(Chandrasekhar)

$P_0 = \frac{1}{8\pi^2} \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} \approx 1.801 \cdot 10^{11} \text{ Mbar}$

• $U_e = P_0 \left\{ y (1 + 2y^2) (1 + y^2)^{1/2} - \frac{8}{3} y^3 - \sinh^{-1} y + \frac{4\pi^2}{3} \frac{\sigma^2 y (1 + y^2)^{1/2}}{3} \right\}$

limite UR $\rightarrow P \sim y^4 \propto \rho^{4/3}$ \rightarrow "adoucissement" de l'EOS $\rightarrow M_C$
 limite NR $\rightarrow P \propto \rho^{5/3}$
 limite $\sigma=0$ + limites NR ($y \ll 1$) et UR ($y \gg 1$)

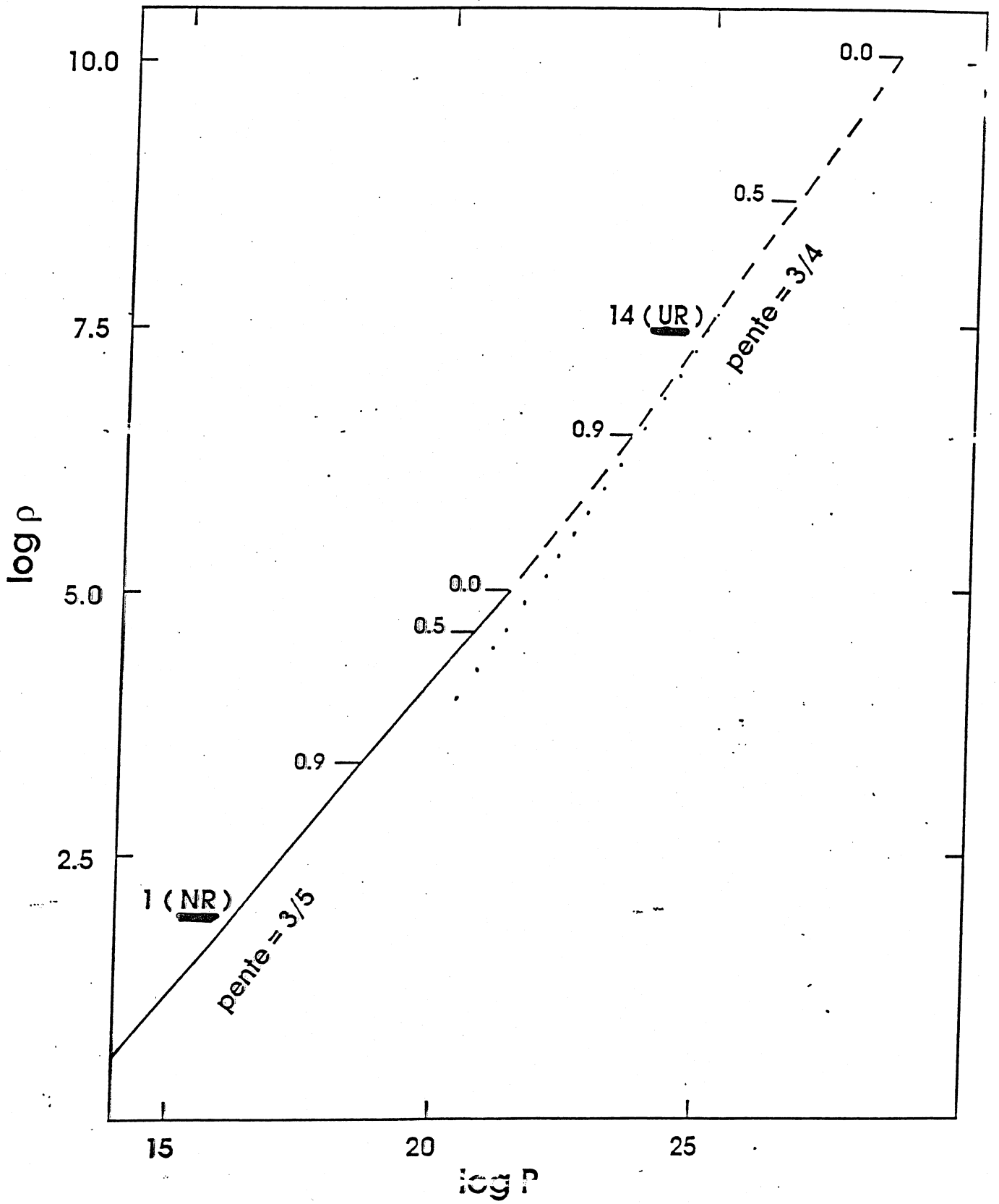
$P_e = (\gamma - 1) \frac{U_e}{V} \rho^\gamma$

ex adiabatique
 $\frac{-n P}{\text{Ln} \rho} \Big|_T$

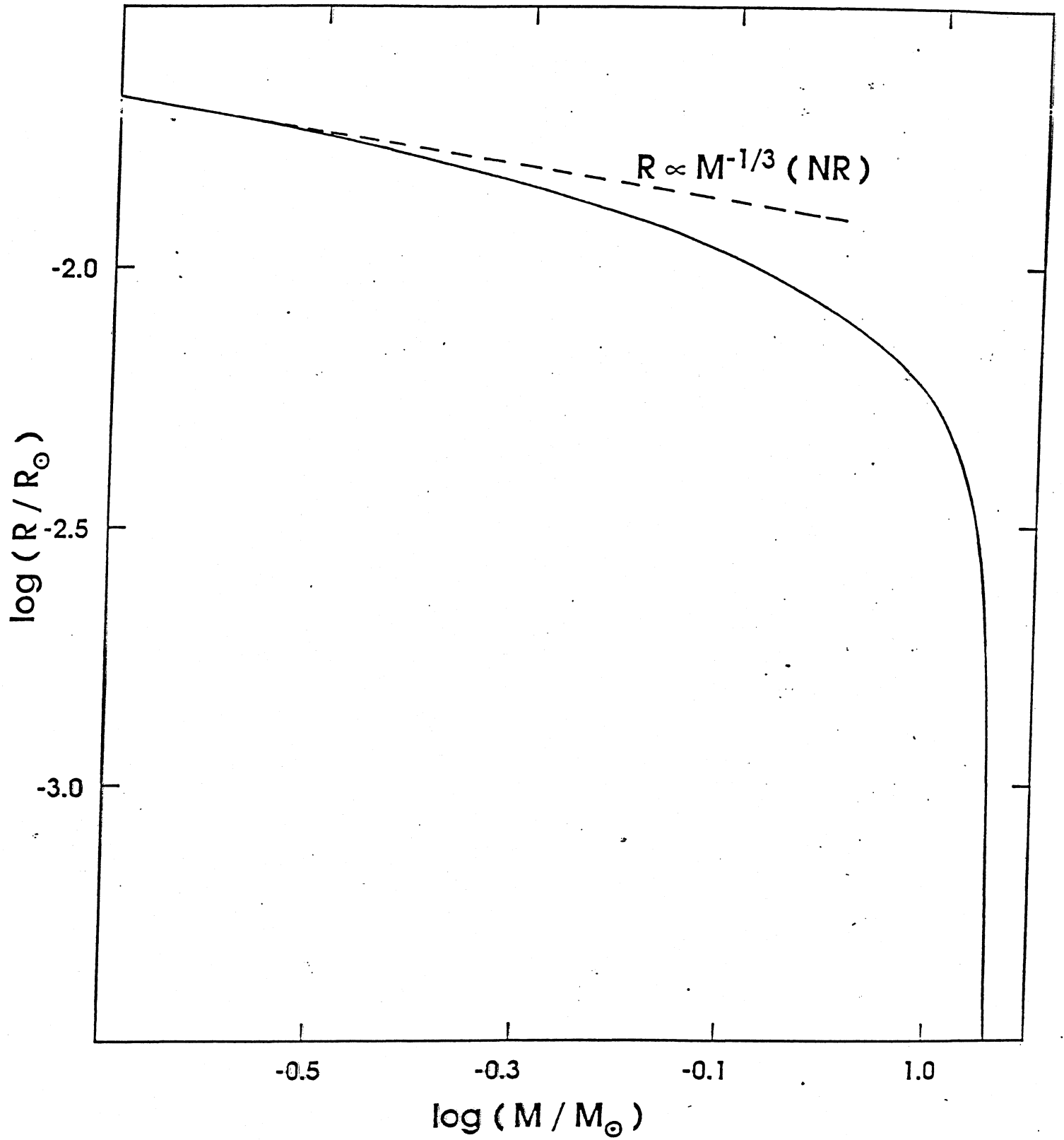
$y \ll 1 \rightarrow \gamma = 5/3$
 $y \gg 1 \rightarrow \gamma = 4/3$

$\frac{1}{3} \leq \frac{P_e V}{U_e} \leq \frac{2}{3} \frac{V \rho}{\gamma}$
 UR NR

P_e, U_e indépendants de T ; $C_v \propto \sigma^2 \ll 1$



Relation masse-rayon pour naines blanches



• Limite partiellement dégénérée ($\zeta \gg 1$), NR

$$\left. \begin{array}{l} \rho \downarrow \text{ à } T \text{ ct.} \\ T \uparrow \text{ à } \rho \text{ ct.} \end{array} \right\} \zeta \uparrow$$

η est donné par la condition

$$\bullet P_e = \frac{2}{3} \frac{N_e}{V} mc^2 \delta \frac{F_{3/2}(\eta)}{F_{1/2}(\eta)} = \underline{n_e kT} \times \left(\frac{3}{2} \frac{F_{3/2}(\eta)}{F_{1/2}(\eta)} \right) \rightarrow 1 \text{ qd } \eta \rightarrow -\infty$$

dégénérescence forte : $P_e \sim n_e kT \frac{2}{5} \eta \left(1 + \frac{\pi^2}{2\eta^2} + \dots \right)$

$$\eta = \frac{\mu}{kT} \sim \frac{kT_F}{kT} = \zeta^{-1}$$

dégénérescence faible : $P_e \sim n_e kT \left(1 + n_e \frac{h^3}{2^{7/2} (2\pi m_e kT)^{3/2}} + \dots \right)$

• Limite UR

$$\bullet P_e = \frac{1}{3} n_e mc^2 \frac{F_3(\eta)}{F_2(\eta)} = \frac{1}{3} \frac{E_e}{V}$$

dégénérescence faible : $P_e \sim n_e kT \left(1 + n_e \frac{c^3 h^3}{256 \pi (kT)^3} + \dots \right)$

dégénérescence forte : $P_e \sim n_e kT \frac{\eta}{4} \left(1 + \frac{\pi^2}{\eta^2} + \dots \right)$

$$\eta = \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{1/3} \frac{ch}{kT}$$

3. Gaz parfait de photons

$$S=1 \quad \eta=0$$

$$F_V = -kT \ln Z_V = -\frac{4\sigma}{3c} VT^4 \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$$

(Stephan-Boltzman)

$$P_V = -F_V/V \quad ; \quad S_V = -4F_V/T \quad ; \quad E_V = 3P_V V$$

• Gaz parfait atomique

sont des particules "lourdes" ds l'étoile \Rightarrow ND, NR \rightarrow statistique MB
monoatomique :

$$FP : Q = \sum_i e^{-\epsilon_i/kT} \quad i \equiv \text{état} ; \epsilon_i \equiv \text{energie de l'état } i$$

$$\epsilon_i = \underbrace{\epsilon_{it}}_{\text{translation}} + \underbrace{\epsilon_{ie}}_{\text{excitation électronique (états de spin } e^-)} + \underbrace{\epsilon_{in}}_{\text{excitation nucléaire (états de spin } n)}$$

états de translation

$$Q_t = \left[\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} V \right]^N$$

états d'excitations électroniques

$$Q_e = \sum_{ie} e^{-\epsilon_{ie}/kT} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\beta\epsilon_n} = z e^{-\beta\epsilon_1}$$

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\beta(\epsilon_1 - \epsilon_n)} \approx g_1 + o(e^{-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)})$$

2 états possible de spin

$$Q_e = g_1 e^{-\beta\epsilon_1} \quad \gg kT \forall n$$

ment	spin du fondamental	ϵ_1 (eV)	g_1	z (5040K)	z (10080K)
I	\uparrow ou \downarrow	-13.6	2	2	2
eI	$\uparrow\downarrow$	-79	1	1	1
e II (He ⁺)	\uparrow ou \downarrow	-54.4	2	2	2

exemple : atome H

$$\text{Schrödinger} \rightarrow \varepsilon_n = -\frac{R}{n^2} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad R=1Ry$$

2 états de spin + n^2 valeurs possibles de l et m pour n donné

$$\rightarrow g_n = 2n^2$$

$$\rightarrow \left[z = \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 e^{-\beta R \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} \right] \quad (\text{pour H isolé!})$$

états d'excitation nucléaires

nergies d'excitation nucléaire $\sim \alpha$ MeV $\rightarrow T > 10^{10}$ K

noyaux ds leur état fondamental de multiplicité $2S_{nuc} + 1$

$$\rightarrow Q_n = 2S_n + 1$$

$$F_a(\{N_i\}, V, T) = -\sum_i N_i kT \left\{ 1 + \ln \left[\frac{V}{N_i} \left(\frac{2\pi m_i kT}{h^2} \right)^{3/2} z_i(T) (2S_{n_i} + 1) \right] - \frac{\varepsilon_{i1}}{kT} \right\}$$

i s espèces $F = \sum_s F_s$

$$P_a = \sum_i \frac{N_i kT}{V}$$

$$\beta_a = \sum_i \left\{ \frac{5}{2} N_i k + N_i k \ln \left[\frac{V}{N_i} \left(\frac{2\pi m_i kT}{h^2} \right)^{3/2} z_i(T) (2S_{n_i} + 1) \right] + N_i kT \frac{\partial \ln z_i}{\partial T} \right\}$$

Pour un gaz parfait monoatomique : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$

$$\left(C_p - C_v = Nk \quad C_v = \frac{\partial E}{\partial T} \Big|_V \right)$$

Pour des ions (\equiv atomes complètement ionisés) $\frac{z_i}{S_{n=0}} = 1$
Pour des e^- $\varepsilon_{1=0}$ $z_e = 2$

$$j_i = kT \ln \left\{ \frac{N_i}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m_i kT} \right)^{3/2} \frac{1}{z_i(T) (2S_{n_i} + 1)} \right\} + \varepsilon_{1i}$$

1. Gaz parfait moléculaire

$$\epsilon_i = \underbrace{\epsilon_{it}}_{\text{translation}} + \underbrace{\epsilon_{iv}}_{\text{vibration}} + \underbrace{\epsilon_{ir}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\epsilon_{ie}}_{\text{excitation électronique}}$$

états de vibration

$$\epsilon_{v_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (\text{énergie p}^{\text{elle}} \quad V(r) = \frac{1}{2} k(r-r_e)^2)$$

$$\rightarrow Q_v = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \epsilon_{v_n}) = \frac{\exp(-\theta_v/2T)}{1 - \exp(-\theta_v/T)} \quad ; \quad \theta_v = \frac{\hbar \omega}{k}$$

$$H_2 \rightarrow \theta_v = 6210 \text{ K}$$

états de rotation

$$\epsilon_r = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad m^+ \text{ inertie} \\ \theta, \phi \text{ coordonnées angulaires} \\ L = m r \text{ angulaire} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$$

valeurs propres de $L^2 = j(j+1) \hbar^2 \quad j=0, 1, 2, \dots$

$$\rightarrow Q_r = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-j(j+1)\theta_r/T} \quad ; \quad \theta_r = \frac{\hbar^2}{2Ik}$$

$$\rightarrow \theta_r = 85.4 \text{ K}$$

$$\theta_r \gg T : Q_r = 1 + 3e^{-2\theta_r/T} + 5e^{-6\theta_r/T} + 7e^{-12\theta_r/T}$$

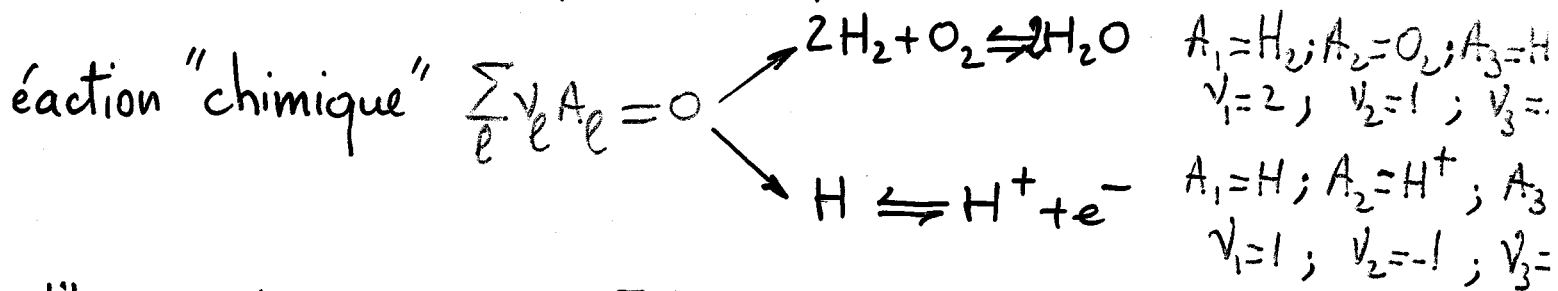
$$\theta_r \ll T : Q_r = \frac{I}{\alpha \theta_r} \left(1 + \frac{\theta_r}{3T} + \dots\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 \text{ for sym. mol. (H}_2) \\ \alpha = 1 \text{ for asym. mol. (CO)} \end{array} \right.$$

$$\left(\{N_i\}, V, T \right) = F_a - \sum_i N_i kT \left[-\frac{\theta_v}{2T} - \ln(1 - e^{-\theta_v/T}) + \ln\left(\frac{T}{\alpha \theta_r}\right) \right]$$

pour un gaz parfait moléculaire

- $\theta_r \leq T < \theta_v \quad \gamma = 7/5 \quad \left(+ 2 \text{ degrés liberté : } \theta \text{ et } \phi \right)$
- $T > \theta_v \quad \gamma = 9/7 \quad \left(\text{ " " : cin. + pot. } \right)$

6. Equilibre chimique . Equation de Saha



équilibre $\Rightarrow \delta F = 0 = \sum_i \frac{\partial F}{\partial N_i} \Big|_{N_j, V, T} \delta N_i = \sum_i \mu_i \delta N_i = 0$

δN_i sont liés par la réaction chimique (conservation du nbr de nucléon
 $\therefore \delta N_H = -\delta N_{H^+}$ ou $\delta N_{H_2} = -2\delta N_H$) et par la condition d'électroneutralité (ex: $\delta N_e = \delta N_{H^+}$).

$\rightarrow \left(\sum_i \mu_i \right)_I = \left(\sum_i \mu_i \right)_{II}$ toujours vrai (GP, D, ND, R, NR)

sur la réaction d'ionisation, et en notant que $S_{nz} = S_{nz+1}$, et utilisant les résultats pour le gaz parfait (eqn.), on obtient

$$\frac{n_{z+1} n_e}{n_z} = 2 \frac{z_{z+1}}{z_z} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_z / kT}$$
 eqn. de Saha

avec $\chi_z = \epsilon_1(z+1) - \epsilon_1 z$ z^{ime} p^t d'ionisation de l'élément
 $(z e^- \Rightarrow z+1 \text{ états d'ionisation})$
 $\Rightarrow z \text{ eqns de Saha}$

Si $F = F_{id} + \Delta F \rightarrow \mu_i = \mu_i^{id} + \Delta \mu_i$
 $\rightarrow \chi_z \rightarrow \chi_z + \Delta \chi_z$

avec $\Delta \chi_z = \Delta \mu_{z+1} + \Delta \mu_e - \Delta \mu_z$ Saha étendue

L'eq. de Saha est acceptable pr décrire l'équilibre d'ionisation ds les intérieurs stellaires

A plus haute densité le résultat est faux, voire m^a abérant
 puisqu'il conduit à une recombinaison!! \rightarrow Fontaine (papier diffusion + p.106)
 \rightarrow Deppen

Exemple: enveloppe stellaire (milieu partiellement ionisé)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{HI} & e_{11} = -13.6 \text{ eV} = -\chi_1 \\ \text{HII} & e_{12} = 0 \\ \text{HeI} & e_{13} = -79 \text{ eV} = -\chi_3 - \chi_4 \\ \text{HeII} & e_{14} = -54.4 \text{ eV} = -\chi_4 \\ \text{HeIII} & e_{15} = 0 \\ e^- & e_{1e} = 0 \end{array} \right.$$

$$P = (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_e) kT + \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad (\text{on néglige excit. énigme})$$

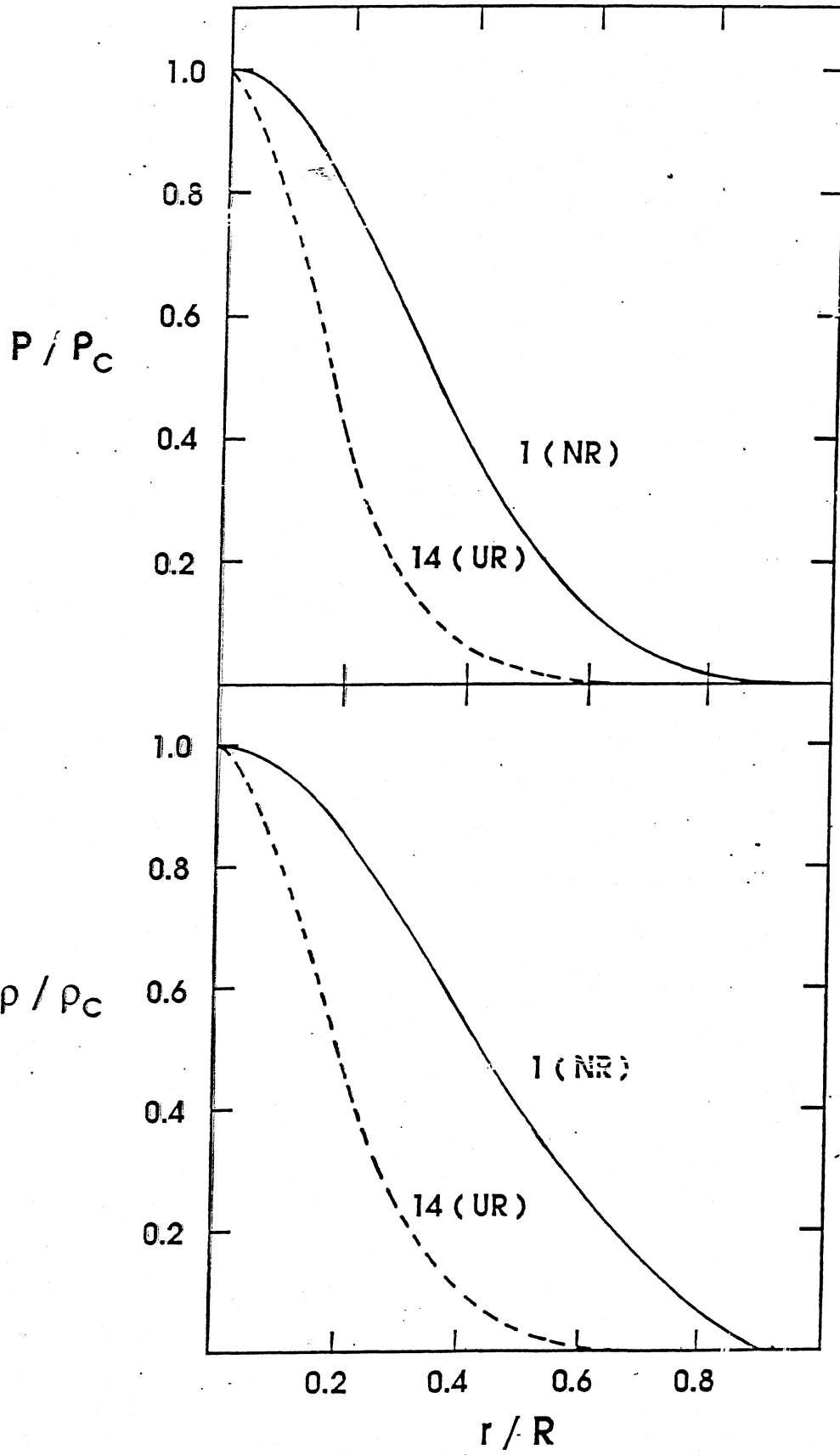
conservation de la charge: $n_e = n_2 + n_4 + 2n_5$

$$\text{aha} : \left\{ \begin{array}{l} n_e \frac{n_2}{n_1} = 2 \frac{z_2}{z_1} \Lambda^{3/2} e^{-\beta\chi_1} \\ n_e \frac{n_4}{n_3} = 2 \frac{z_4}{z_3} \Lambda^{3/2} e^{-\beta\chi_3} \\ n_e \frac{n_5}{n_4} = 2 \frac{z_5}{z_4} \Lambda^{3/2} e^{-\beta\chi_4} \end{array} \right.$$

$$\left(\Lambda = \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)$$

$$= 2, z_2 = 1 \quad z_3 = 1 \quad z_4 = 2 \quad z_5 = 1$$

$$\text{action de masse: } \begin{aligned} n_1 + n_2 &= X_e N_0 \\ n_3 + n_4 + n_5 &= (1-X) e N_0 \end{aligned}$$



Les frontières dans le plan (ρ, T)

électrons: $n = \frac{\rho N_0}{\mu_e} \quad \mu_e = 2,$

ions: $n = \frac{\rho N_0}{A},$

Z est la charge de la particule (ex: $Z = 2$ pour HeIII).

Effet physique	électrons	ions
A) Dégénérescence $\Delta = 1$	NR) $\log \rho = -7.52 + \frac{3}{2} \log T$ UR) $\log \rho = -22.18 + 3 \log T$	NR) $\log \rho = -2.92 + \frac{3}{2} \log T + \frac{5}{2} \log A$ UR) $\log \rho = -22.48 + 3 \log T + \log A$
B) Relativité $B = 1$	ND) $\log T = 9.77$ D) $\log \rho = 7.14$	ND) $\log T = 13.03 + \log A$ D) $\log \rho = 16.61 + 4 \log A$
C) Interactions $\Gamma = 1$	ND) $\log \rho = -15.77 + 3 \log T$ D) $\log \rho = -0.01$	ND) $\log \rho = -15.77 + 3 \log T - \log \left(\frac{2Z^6}{A} \right)$ D) $\log \rho = 9.47 + 4 \log A + 6 \log Z$
D) Quantique $\Theta = 1$	ND) $\log \rho = -10.74 + 2 \log T$ D) $\log \rho = 1.11$	ND) $\log \rho = -7.78 + 2 \log T + 2 \log \left(\frac{A}{Z} \right)$ D) $\log \rho = 10.59 + 4 \log A + 6 \log Z$

EOS GAZ IMPARFAIT

1) Plasma complètement ionisé (intérieur stellaire) $\left\{ \begin{array}{l} \omega kT > Z^2 R \\ \epsilon_F > Z^2 R \end{array} \right.$

1.1) Limite de faibles densités et hautes températures

$$\theta \gg 1 \quad \Gamma \lesssim 1 \quad (\text{soleil} \rightarrow \Gamma \sim 0.1 \quad \theta = 4)$$

1.1.a) Théorie de Debye-Hückel

Potentiel dû à une charge $Ze \rightarrow \varphi(r) = \frac{Ze}{r} + \underbrace{\psi(r)}_{\text{champ moyen}}$

Densité de particules de type j ds le p^{el} externe $\varphi(r) \rightarrow$ MB $\rightarrow n_j(r) = \bar{n}_j e^{-\frac{Z_j e \varphi(r)}{kT}} \approx \bar{n}_j \left(1 - \frac{Z_j e \varphi(r)}{kT} \right)$

Poisson $\rightarrow \nabla^2 \varphi(r) = -4\pi Q(r)$

$$Q(r) = \sum_j Z_j e n_j(r) = e \left(\underbrace{\sum_j Z_j \bar{n}_j}_0 - \sum_j Z_j^2 \bar{n}_j \frac{e \varphi(r)}{kT} \right)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi(r) = \frac{Ze}{r} e^{-r/\lambda_D} \\ \lambda_D = \left(\frac{kT}{4\pi e^2 \sum_j \bar{n}_j Z_j^2} \right)^{1/2} \end{array} \right. \quad (Ze \equiv \text{particule de référence})$$

électromagnétisme $\rightarrow \left. \begin{array}{l} E = \frac{V}{2} \sum_j Z_j e \bar{n}_j \psi_j \\ \psi_j(r) = -\frac{Ze}{\lambda_D} \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} E_c^{DH} \\ NkT \end{array} = -\frac{\sqrt{3}}{2} (\Gamma \bar{Z}^2)^{3/2} \right.$

$$= \sum_i N_i = N_{e^-} + \sum_i N_{i^+}; \quad \Gamma = \frac{e^2}{a kT}; \quad a = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{V}{N} \right)^{1/3}; \quad \bar{Z}^2 = \sum_i \frac{N_i}{N} Z_i^2$$

$$F_c^{DH} = -T \int_0^\infty \frac{E}{T^2} dT = \frac{2}{3} E_c^{DH}; \quad P_c^{DH} = -\left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T = \frac{1}{3} \frac{E_c^{DH}}{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = NkT + \frac{4\sigma T^4}{3c} + P_{DH}}$$

1.2. Hautes densité et faibles températures

$$E_F > Z^2 R_y \Leftrightarrow \rho \gtrsim 0.4 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\rho < 10^{12-14} \text{ g cm}^{-3} \rightarrow \text{matière nucléaire} \quad (\star \hat{=} \text{neutrons})$$

$$kT \ll \Gamma > 1$$

route des étoiles à neutrons : $\rho_m \sim 10^4 - 10^7 \text{ g cm}^{-3} \rightarrow \text{Fe}^{26+}$
 $T \sim 10^{7-8} \text{ K} \rightarrow \Gamma \sim 10 - 10^3$

Intérieur des NB : \sim m conditions . Supernovae I $\rightarrow \rho_m \sim 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$

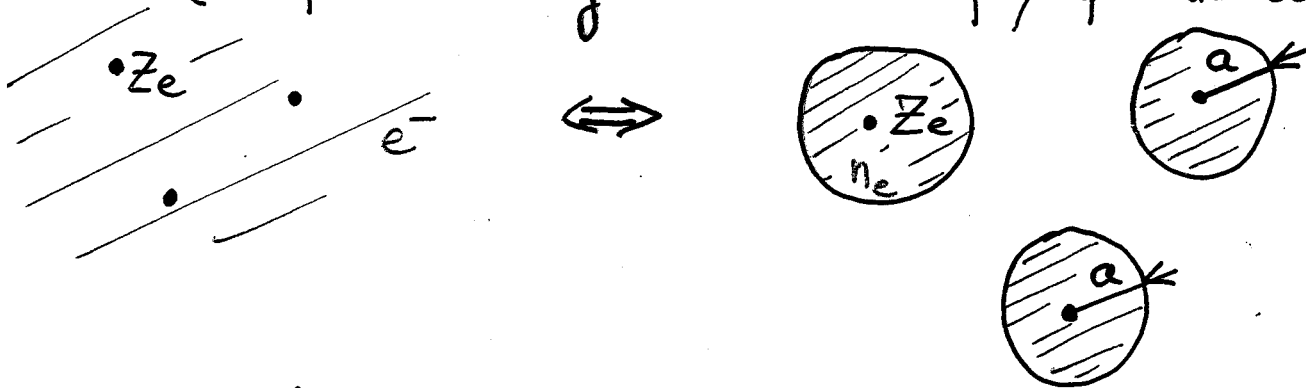
Planètes joviennes : $\rho_m \sim 1 - 10 \text{ g cm}^{-3}$
 $T \sim 10^4 \text{ K} \rightarrow \Gamma \sim 20 - 50$

1.2.1. Modèles de fond d'électrons rigide

1.2.1.a Modèle de la sphère ionique (E. Salpeter, ApJ, 196)

$$\Theta \approx 0 \quad (T \ll T_F)$$

chaque ion ds le plasma est associé une sphère contenant une densité de charges neutralisantes qui annule exactement la charge ponctuelle de l'ion (\equiv sphère de Wigner-Seitz en physique du solide)



rayon de la sphère : $a = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{V}{N_i} \right)^{1/3}$

densité de charge : $n_e = - \frac{3}{4\pi a^3} Z e$

Interaction ion- e^- :

$$E_{ie} = - \int_0^a \frac{Ze}{r} n_e(r) d\vec{r} = -Ze \int_0^a \frac{Ze}{4\pi a^3/3} \frac{4\pi r^2 dr}{r} = -\frac{3}{2} \frac{(Ze)^2}{a}$$

Interaction $e^- - e^-$:

$$E_{ee} = \int_0^a \frac{n_e(r)}{r} n_e(r) d\vec{r} = \int_0^a \frac{Ze}{a^3} r^2 \frac{Ze}{4\pi a^3/3} 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{a}$$

$$E_{IS} = E_{ie} + E_{ee} = -\frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{a}$$

ions sans interaction $\Rightarrow E_{IS}^{tot} = N \sum_i E_{i,IS}$ $N_i = \text{nbr. total ions}$

$$\Rightarrow \frac{E_{IS}^{tot}}{NkT} = -0.9 \Gamma_i \quad (\Gamma_i = \Gamma Z^2)$$

à plusieurs espèces:

$$\frac{E_{IS}^{tot}}{NkT} = -0.9 \bar{\Gamma}_i$$

$$\Gamma_i = \Gamma_e Z^{5/3} = (\Gamma \bar{Z}^{1/3}) Z^{5/3}$$

$$\bar{\Gamma}_i = \sum_i x_i \Gamma_i \quad ; \quad x_i = \frac{N_i}{N}$$

$\frac{E_c}{NkT} \geq \frac{E_{IS}^{tot}}{NkT} \quad \forall \Gamma_i > 1$ (Lieb et Narnhofer, J. Stat. Phys '75 et '76)

$$F_{IS} = E_{IS} \quad ; \quad P_{IS} = \frac{1}{3} \frac{E_{IS}}{V} < 0$$

utilisant les résultats pour le gaz parfait d' e^- :

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{U_{IS}^i}{U_e} \simeq -0.0057 \frac{Z^{2/3}}{y} \quad (y \ll 1) \quad \text{NR} \\ \frac{U_{IS}^i}{U_e} \simeq -0.0046 Z^{2/3} \quad (y \gg 1) \quad \text{UR} \end{cases} \quad (y = \frac{PF}{m_e c})$$

UR : ^{56}Fe ions $\rightarrow P_{IS}/P_e \simeq -0.04$

NR : On peut atteindre $P_{IS} \sim P_e$ à basse densité.

Faut rajouter la thermo du gaz d' e^- à la sphère ionique