RAPPELS DE RELATIVITE GENERALE

- principes de relativité et d'équivalence
- action d'Einstein-Hilbert
- formalisme hamiltonien
  et problème des conditions initiales
- champs de matière

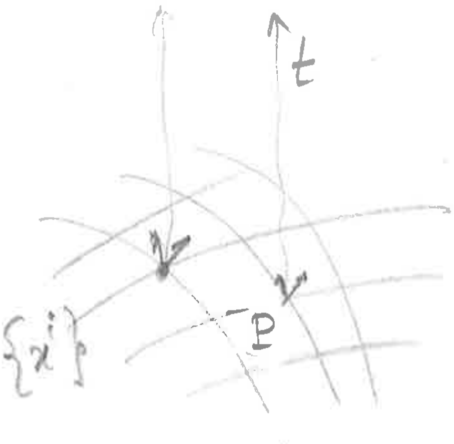
(Einstein 1915)

La RG est basée sur deux ppes fondamentaux

- principe de relativité restreinte (Einstein, Lorentz, Poincaré 1905) qui soustend toute la physique actuelle et en particulier le modèle standard de la physique des particules

- principe d'équivalence qui est spécifique à l'interaction gravitationnelle et est la traduction moderne de l'égalité de la chute des corps dans un champ gravitationnel

Principe de relativité restreinte



Système de référence $\{t, x^i\}$

- 3 coordonnées spatiales x^i $(i=1,2,3)$ pour repérer les positions des corps dans l'espace
- un système d'horloges en chaque point pour dater les instants successifs en ce point

évènement : la donnée, dans un référentiel particulier, de valeurs particulières de x^i et de t (marqué par l'horloge située en x^i)

$$\mathcal{P} = (t, x^i) = (t, x, y, z)$$

A partir d'un référentiel $\{t, x^i\}$ on peut effectuer un changement arbitraire de référentiel en définissant

$$\begin{cases} t' = f^0(t, x^i) \\ x'^i = f^i(t, x^i) \end{cases}$$

(la transformation étant supposée inversible)

et un même évènement sera repéré dans les 2 référentiels, par

$$P = (t, x^i) = (t', x'^i)$$

<u>principe de relativité</u> (Galilée ca 1610)

• Il existe une classe privilégiée de référentiels $\{T, X^i\}$ appelés <u>référentiels inertiels</u>, dans lesquels le mouvement des corps <u>non soumis à l'action de forces extérieures</u>, est rectiligne et uniforme.

• Les <u>lois de la nature sont invariantes</u> (gardent la même forme) dans tous les référentiels inertiels.

La relativité galiléenne est définie par le groupe de Galilée qui transforment les référentiels inertiels $\{T, X^i\} \to \{T', X'^i\}$

La relativité restreinte est définie par les transformation de Lorentz-Poincaré $\{X^\alpha\} \longrightarrow \{X'^\alpha\}$ où $\alpha = 0, 1, 2, 3$ et on pose $X^0 = cT$

$$X'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta X^\beta + a^\beta$$

où $\Lambda^\alpha{}_\beta$ sont les matrices de Lorentz satisfaisant

$$\boxed{\eta_{\gamma\delta} \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\delta{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}}$$

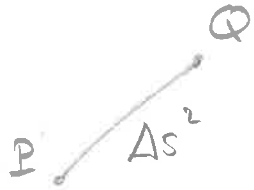
où $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ est la matrice de Minkowski (dans la signature $+2$)

Les transformations de Lorentz - Poincaré forment un groupe à 10 paramètres

a^α 4 paramètres de translation

$\Lambda^\alpha{}_\beta$ $\begin{cases} \text{3 paramètres de rotation spatiale } R^i{}_j \\ \text{3 paramètres de vitesses } V^i \text{ pour les transformations spéciales ou boost } \Lambda^\alpha{}_\beta(\vec{V}) \end{cases}$

et laissent l'intervalle entre deux évènements P et Q invariant dans un changement $\{X\} \longrightarrow \{X'\}$



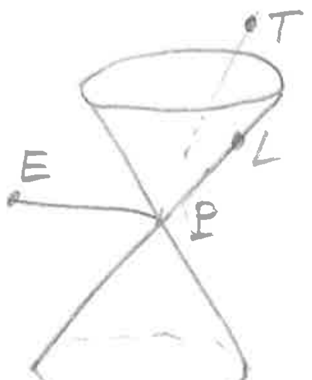
$$\boxed{\Delta s^2 = \eta_{\alpha\beta}\, \Delta X^\alpha \Delta X^\beta} \qquad \Delta X^\alpha \equiv X^\alpha_Q - X^\alpha_P$$

alors $\Delta s'^2 = \eta_{\alpha\beta} \Delta X'^\alpha \Delta X'^\beta$

$$= \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta \Delta X^\gamma \Delta X^\delta = \eta_{\gamma\delta} \Delta X^\gamma \Delta X^\delta = \Delta s^2$$

et donc laissent invariant la structure de l'espace-temps de Minkowski donnée par les cônes de lumière

$$\mathcal{C}_P = \{ \text{évènements } L \text{ tels que } \Delta s^2_{PL} = 0 \}$$



$\Delta s^2_{PL} = 0$ séparation du genre lumière (propagation d'un signal lumineux de P à L)

$\Delta s^2_{PT} < 0$ genre temps

$\Delta s^2_{PE} > 0$ genre espace

On peut toujours trouver une transformation $\{X\} \longrightarrow \{X'\}$ tq

$$X'^i_T = X'^i_P$$

$\{X\} \longrightarrow \{X''\}$ —

$$X''^0_E = X''^0_P$$

Principe d'équivalence

expérimentalement $\boxed{m_i = m_g}$

10^{-13} pendules de torsion
10^{-13} tir laser sur la Lune
10^{-15} Microscope

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\vec{F} \quad \text{(loi de la dynamique)}$$

$$\vec{F}_g = m_g\,\vec{g} \quad \text{(loi de la gravitation)}$$

ppe d'équivalence faible (PEf)

Tous les corps tests (non chargés, d'extension spatiale négligeable) tombent avec la même accélération dans un champ de gravitation, indépendamment de leur structure et composition interne

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{g} \qquad \forall \text{ corps test}$$

Dans un voisinage suffisamment petit, localement, $\vec{g}$ est constant et uniforme, donc on peut définir un référentiel en chute libre avec tous les corps

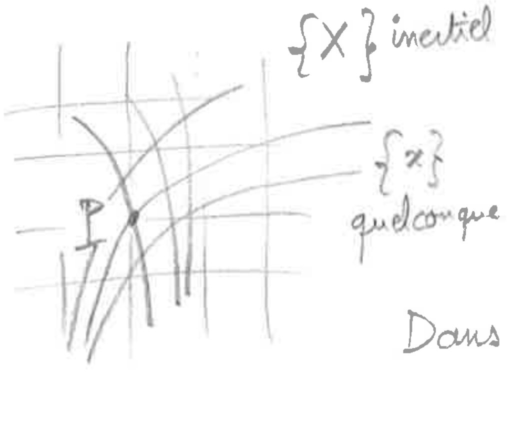
$$\begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 \\ t' = t \end{cases} \qquad \frac{d^2\vec{x}\,'}{dt'^2} = 0 \quad \forall \text{ corps}$$

qui est donc un référentiel inertiel (localement)

ppe d'équivalence d'Einstein (PEE)

Dans le réf. localement inertiel $\{X\} \equiv \{t', \vec{x}\,'\}$ toutes les lois non gravitationnelles de la nature prennent la forme donnée par la relativité restreinte.

Tous les champs non gravitationnels doivent se coupler universellement à un même objet $g_{\mu\nu}$ (dans un référentiel arbitraire $\{x^\mu\}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3$) se ramenant à la matrice de Minkowski dans les référentiels inertiels $\{X^\alpha\}$ (en chute libre).



$$ds^2\big|_P = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu = \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\,dX^\alpha dX^\beta}_{\text{en coord. loc. inertielles en ce point}}$$

Dans un changement de réf. quelconque $\quad ds'^2(x') = ds^2(x)$

$$\{x\} \longrightarrow \{x'\}$$

$$\boxed{g'_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\, g_{\mu\nu}(x)}$$

tenseur d'ordre 2 variance $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ $\quad$ (ds^2 est un scalaire ou tenseur $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$)

Mouvement d'un corps libre (non soumis à l'action de force extérieures)

$$\frac{d^2X^\alpha}{dp^2} = 0$$ par déf. du réf. loc. inertiel en ce point (où p est un paramètre affine le long de la trajectoire) $\quad p = a\tau + b$ ds le cas d'une particule massive

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{dp} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\, u^\rho u^\sigma = 0}$$

où $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{dp}$ = 4-vitesse de la particule $\quad$ ($a^\mu = 0$ donne le mvt géodésique de la particule)

a^μ = 4-accélération

$$\boxed{u'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\, u^\nu(x)}$$
idem pour a^μ

tenseurs d'ordre 1 ou vecteurs $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\partial_\rho g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\sigma}\right)$$

<u>symbole</u> de Christoffel (n'est pas un tenseur car $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ en réf. loc. inertiel)

où $g^{\mu\nu}$ métrique inverse ($g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$), est un tenseur $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

tenseur de Kronecker δ^μ_ρ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$\sqrt{-g}\, d^4x$ volume invariant de l'espace-temps, scalaire $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Dérivée covariante tq $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$

$$\boxed{\nabla_\nu u^\mu = \partial_\nu u^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\rho \quad \text{tenseur } \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}$$

Théorème de Ricci $\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = 0$

(preuve : $\nabla_\mu g_{\rho\sigma}$ est un tenseur $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ qui se ramène à $\partial_\alpha \eta_{\beta\gamma} = 0$ en réf. inertiel)

Identité de Ricci

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) V^\lambda = R^\lambda_{\ \cdot\rho\mu\nu} V^\rho$$

$$\boxed{R^\lambda_{\ \cdot\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}}$$

tenseur $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ de Riemann (tenseur de courbure)

symétries
$$\begin{cases} R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = R_{\nu\mu\sigma\rho} \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} \\ R^\lambda_{\ \cdot\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\ \cdot\nu\rho\mu} + R^\lambda_{\ \cdot\mu\nu\rho} = 0 \end{cases}$$

(24 composantes indépendantes en 4 dim)

Identité de Bianchi

$$\nabla_\sigma R^\lambda_{\ \cdot\mu\nu\rho} + \nabla_\rho R^\lambda_{\ \cdot\mu\sigma\nu} + \nabla_\nu R^\lambda_{\ \cdot\mu\rho\sigma} \equiv 0$$

(preuve : utiliser des coord. loc. inertielles)

Identité d'Einstein (ou de Bianchi contractée)

$$\boxed{\nabla_\nu \underbrace{\left(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)}_{\text{tenseur d'Einstein } G^{\mu\nu}} \equiv 0}$$

$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\ \cdot\mu\lambda\nu}$ tenseur de Ricci

$R = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}$ scalaire de courbure

Théorie de la relativité générale

Basée sur l'action d'Einstein-Hilbert (1915)

$$\boxed{S = \frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalaire de courbure}}}{R} + \underbrace{S_m[\psi, g]}_{}}$$

scalaire de courbure — action des champs de matière ψ universellement couplés à la métrique (PEE)

Ω = volume d'espace-temps

Cette théorie est la théorie métrique la plus simple (c'est-à-dire satisfaisant au PEE) : la seule variable dynamique décrivant le champ gravitationnel est la métrique $g_{\mu\nu}$.

(Les théories alternatives vont supposer des champs en plus de $g_{\mu\nu}$: ϕ, V^μ, autre métrique $f_{\mu\nu}$, etc.)

On varie l'action par rapport à la métrique en supposant

$$\boxed{\delta g_{\mu\nu}\big|_\Sigma = 0}$$

où Σ est une hyper-surface (3d) entourant le volume d'espace-temps considéré, soit $\Sigma = \partial\Omega$.

Il faut varier $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ quand $g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$

Formules de Palatini

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\left(\nabla_\nu \delta g_{\rho\lambda} + \nabla_\rho \delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\nu\rho}\right) \\ \delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} \end{aligned}}$$

($\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ n'est pas un tenseur mais sa variation est un tenseur, ce qui se prouve en recherchant directement la loi de transformation de $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)$ lorsque $\{x\} \longrightarrow \{x'\}$ et vérifiant que $\Gamma'^\mu_{\nu\rho}(x) - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)$ se comporte comme un tenseur.)

Les formules de Palatini se prouvent immédiatement par passage dans un ref. loc. inertiel.

$$\delta\left(\sqrt{-g}\,R\right) = \delta\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}$$

$$g = \det g_{\mu\nu} \qquad \delta g = g\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} \qquad \delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$$

$$\boxed{\delta\left(\sqrt{-g}\,R\right) = \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu}\,G_{\mu\nu} + \nabla_\mu\,\delta V^\mu\right)}$$

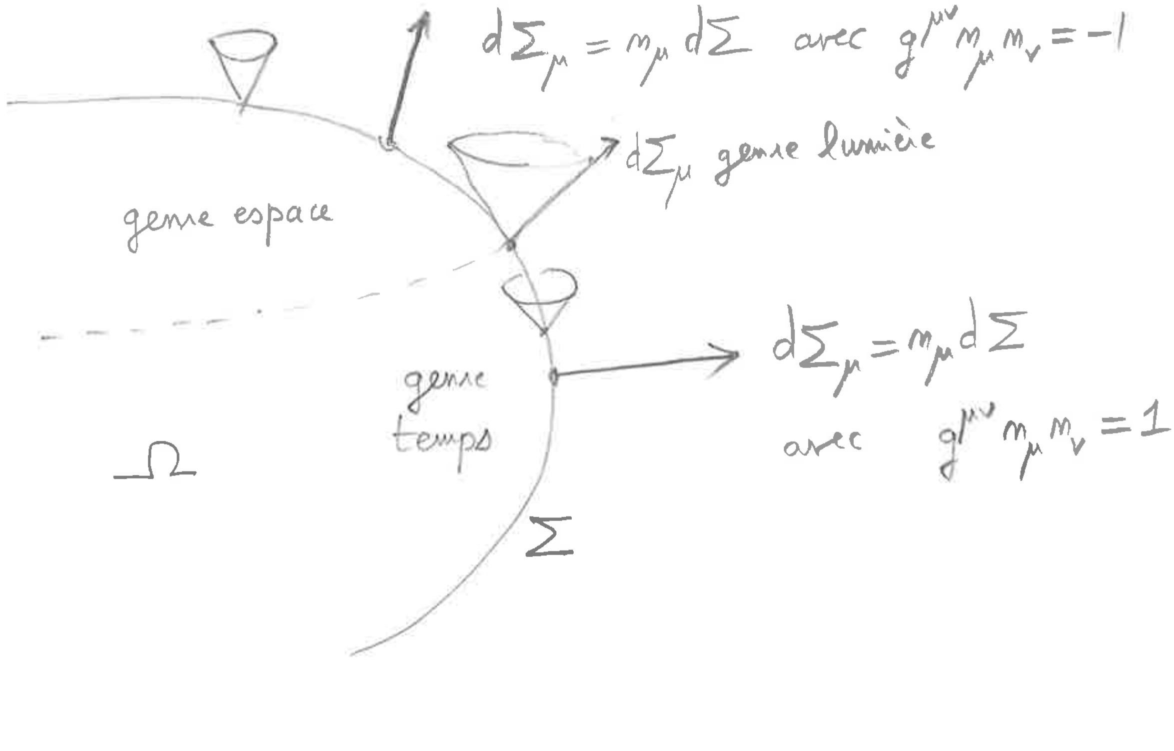
tenseur d'Einstein $\boxed{G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R}$

avec $\delta V^\mu = g^{\rho\sigma}\,\delta\Gamma^\mu_{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}\,\delta\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}$

$$\boxed{\delta V_\mu = \nabla^\nu\left(\delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\,g^{\rho\sigma}\,\delta g_{\rho\sigma}\right)}$$

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G}\left(\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \int_\Sigma d\Sigma_\mu\,\delta V^\mu\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{où}\\ S = S_g + S_m\end{array}\right)$$

où $\Sigma = \partial\Omega$ est le bord du volume d'espace temps



Métrique induite sur la surface Σ

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \qquad (\Sigma \text{ genre espace})$$

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \qquad (\text{genre temps})$$

C'est le projecteur sur la surface Σ (orthogonal à n^μ)

$$\boxed{n^\nu \gamma_{\mu\nu} = 0 \qquad \gamma_\mu^\rho \gamma_\rho^{\ \nu} = \gamma_\mu^{\ \nu}}$$

et est appelée aussi la 1ère forme fondamentale sur Σ

Comme $\delta g_{\mu\nu} = 0$ sur Σ on prouve facilement que

$$\boxed{\gamma^{\rho\sigma} \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} \big|_\Sigma = 0}$$

ce qui permet de prouver

$$\begin{aligned} n^\mu \delta V_\mu \big|_\Sigma &= n^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - n_\nu g^{\rho\sigma} \nabla^\nu \delta g_{\rho\sigma} \\ &= n^\mu g^{\nu\rho} \underbrace{\left(\nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} \right)}_{\text{anti-sym } \rho \leftrightarrow \mu} \\ &= n^\mu \gamma^{\nu\rho} \left(\nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} \right) \\ &= - n^\mu \gamma^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} \big|_\Sigma \end{aligned}$$

On définit aussi la (trace de la) courbure extrinsèque

$$\boxed{K = \gamma_\nu^\mu \nabla_\mu n^\nu} \equiv g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$$

où $K_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure extrinsèque de Σ appelé aussi 2ème forme fondamentale sur Σ

Comme Σ ne varie pas et que $\delta g_{\mu\nu}|_\Sigma = 0$ le vecteur n^μ ne varie pas, $\delta n^\mu = 0$, et donc

$$\delta K = \delta\left[\left(\delta^\mu_\nu \pm g_{\nu\rho} n^\mu n^\rho\right)\left(\partial_\mu n^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} n^\sigma\right)\right]$$

$$= \gamma^\mu_\nu \, \delta\Gamma^\nu_{\mu\sigma} n^\sigma$$

$$= \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} n^\rho \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} \quad \text{(par Palatini)}$$

$$= -\frac{1}{2} n^\mu \delta V_\mu$$

A ce stade

$$\delta S'_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

où

$$\boxed{S'_g = S_g + \frac{c^3}{8\pi G} \int_\Sigma K \, d\Sigma}$$

(Regge et Teitelboim)

qui est l'action gravitationnelle à utiliser en RG quand les termes de bord sur Σ sont pris en compte.

Variation du terme de matière $S_m[\Psi, g]$. Par définition le tenseur énergie-impulsion des champs de matière est

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}}$$

variation avec le champ de matière Ψ fixé

Par construction $T^{\mu\nu}$ est toujours un tenseur symétrique.

$$\delta\left(S'_g + S_m\right) = 0$$

conduit alors aux équations d'Einstein (noter que $\delta g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = - \delta g_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$)

$$\boxed{G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}}$$

On peut aussi introduire une <u>constante cosmologique</u> Λ

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda)$$

$$\boxed{G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}}$$

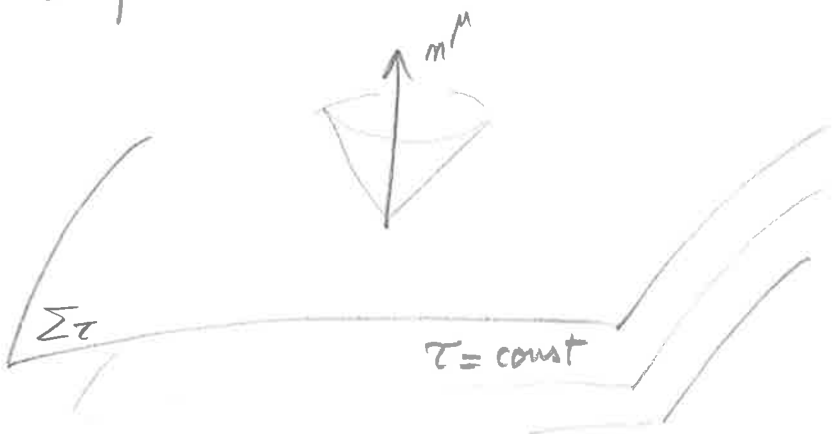
qui joue un rôle crucial dans le modèle standard cosmologique.

<u>Problème des conditions initiales en RG</u>

En physique ordinaire on décrit les phénomènes qui surviennent et évoluent dans un espace-temps "de fond" donné. L'évolution temporelle des variables dynamiques est déterminée à partir de leurs valeurs initiales et dérivées temporelles premières à l'instant initial $t=0$.

En RG la variable dynamique est l'espace-temps lui-même. Quelles quantités doit-on spécifier "initialement" de façon à déterminer de façon unique l'"évolution" de l'espace-temps ?

Il faut considérer une "foliation" de l'espace-temps par des hypersurfaces à 3 dimensions du genre espace, Σ_τ (surfaces de Cauchy) étiquetées par une fonction globale de temps τ.



La métrique induite sur cette famille d'hypersurfaces est

$$\boxed{\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu}$$

("Première forme fondamentale sur Σ_τ")

où n^μ est le champ de vecteur du genre temps orthogonal à Σ_τ

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1$$

Donc $\gamma_{\mu\nu}$ est en fait le projecteur sur la surface

$$\boxed{n^\nu \gamma_{\mu\nu} = 0 \qquad \gamma_\mu^{\ \rho} \gamma_\rho^{\ \nu} = \gamma_\mu^{\ \nu}}$$

Le vecteur n_μ est orthogonal à Σ_τ donc doit être proportionnel à $\nabla_\mu \tau$. On pose

$$\boxed{n_\mu = -\alpha \nabla_\mu \tau}$$

où α est appelé le "<u>laps</u>" associé à la famille Σ_τ.

Le vecteur unitaire n_μ est donc orthogonal à une famille d'hypersurfaces et on sait que la caractérisation de cette propriété est le théorème de Frobenius :

$$\boxed{n_{[\mu}\nabla_\nu n_{\rho]} = 0}$$

qui se vérifie directement en utilisant $n_\mu = -\alpha \nabla_\mu \tau$.
Réciproquement tout champ de vecteur satisfaisant cette propriété est hypersurface-orthogonal.

En RG les conditions initiales pour l'évolution de l'espace-temps sont données par la métrique induite sur une hypersurface de Cauchy Σ_τ, soit $\gamma_{\mu\nu}$ ($1^{\text{ère}}$ forme fondamentale), et sa "dérivée temporelle première" orthogonale à l'hypersurface qui est la dérivée de Lie dans la direction du vecteur n^μ, soit

$$\boxed{K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu}}$$

C'est le tenseur de courbure extrinsèque de la surface, ou $2^{\text{ème}}$ forme fondamentale. C'est la courbure de la surface telle que mesurée par un observateur vivant en dehors de la surface, dans l'espace ambiant.

Il y a plusieurs façons de définir la dérivée de Lie.
On peut la définir de façon <u>passive</u>, comme le changement dans les composantes du tenseur dans une transformation de coordonnées $\{x\} \longrightarrow \{x'\}$ infinitésimale $x'^\mu = x^\mu - n^\mu(x)$, soit

$$\mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu}(x) - \gamma_{\mu\nu}(x) \quad \text{avec} \quad \underbrace{\gamma'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\gamma_{\rho\sigma}(x)}_{\text{loi des tenseurs}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu} = n^\rho \nabla_\rho \gamma_{\mu\nu} + 2\gamma_{\rho(\mu}\nabla_{\nu)} n^\rho}$$

valable pour tout tenseur $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n^\rho \nabla_\rho (n_\mu n_\nu) + \nabla_{(\mu} n_{\nu)} + n_\rho n_{(\mu} \nabla_{\nu)} n^\rho$$

$$= n_{(\mu} a_{\nu)} + \nabla_{(\mu} n_{\nu)} \quad \text{où} \quad \boxed{a_\mu = n^\rho \nabla_\rho n_\mu}$$ est l'accélération

$$a_\mu = n^\rho \nabla_\rho(-\alpha \nabla_\mu \tau) = -n^\rho \nabla_\rho \alpha \nabla_\mu \tau - \alpha n^\rho \nabla_\mu \nabla_\rho \tau$$

$$= n^\rho n_\mu \nabla_\rho \ln\alpha + \alpha n^\rho \nabla_\mu\left(\frac{1}{\alpha} n_\rho\right)$$

$$= \text{———} + \nabla_\mu \ln\alpha$$

$$\boxed{a_\mu = \gamma_\mu^{\ \nu} \nabla_\nu \ln\alpha}$$

Frobenius $\quad 0 = n^\rho \left(n_{[\mu} \nabla_\nu n_{\rho]}\right) = \frac{1}{3} n^\rho \left(n_\mu \nabla_{[\nu} n_{\rho]} + n_\nu \nabla_{[\rho} n_{\mu]} + n_\rho \nabla_{[\mu} n_{\nu]}\right)$

$$0 = \nabla_{[\mu} n_{\nu]} + n_{[\mu} a_{\nu]}$$

$$\boxed{K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu + n_\mu a_\nu = \gamma_\mu^{\ \rho} \nabla_\rho n_\nu}$$

automatiquement symétrique en $\mu\nu$

Pour tout vecteur confiné sur la surface Σ

$$n_\mu A^\mu = 0$$

on définit la dérivée covariante induite sur la surface par

$$D_\mu A^\nu = \gamma_\mu^{\ \rho} \gamma_\sigma^{\ \nu} \nabla_\rho A^\sigma$$

C'est la dérivée compatible avec la métrique induite

$$\boxed{D_\mu \gamma_{\nu\rho} = 0}$$

On définit la courbure riemannienne sur la surface par ex par l'identité de Ricci

$$\left(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu\right) A_\rho = \mathcal{R}_{\rho \cdot \mu\nu}^{\ \sigma} A_\sigma$$ (pour tout vecteur tq $n^\mu A_\mu = 0$)

Le tenseur $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ s'appelle la courbure intrinsèque de la surface, de même que $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ est la courbure intrinsèque de l'espace-temps.

On a alors les 2 <u>equations de Gauss-Codazzi</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \gamma_\mu^{\ \lambda} \gamma_\nu^{\ \tau} \gamma_\rho^{\ \varepsilon} \gamma_\sigma^{\ \pi} R_{\lambda\tau\varepsilon\pi} - K_{\mu\rho} K_{\nu\sigma} + K_{\mu\sigma} K_{\nu\rho} \\ D_\nu K_\mu^{\ \nu} - D_\mu K &= \gamma_\mu^{\ \nu} G_{\nu\rho}\, n^\rho \end{aligned}}$$

où $G_{\nu\rho} = R_{\nu\rho} - \frac{1}{2} g_{\nu\rho} R$ est le tenseur d'Einstein

La 1ère eq. s'obtient en partant de l'identité de Ricci $D_{[\mu}D_{\nu]}A_\rho = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\rho\cdot\mu\nu}^{\ \ \ \ \sigma}A_\sigma$ et en faisant apparaître l'id de Ricci correspondante pour la courbure 4d, soit $\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}A_\rho = \frac{1}{2}R_{\rho\cdot\mu\nu}^{\ \ \ \ \sigma}A_\sigma$.

Prenant la trace de la 1ère eq. de GC on obtient

$$\boxed{\mathcal{R} + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 2\, n^\mu n^\nu G_{\mu\nu}}$$

Le problème des conditions initiales en RG se formule donc en partant de <u>données de Cauchy</u> sur une hyper-surface initiale Σ

$$\begin{cases} \gamma_{\mu\nu} = \text{métrique induite} \\ K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu} \quad \text{courbure extrinsèque} \end{cases}$$

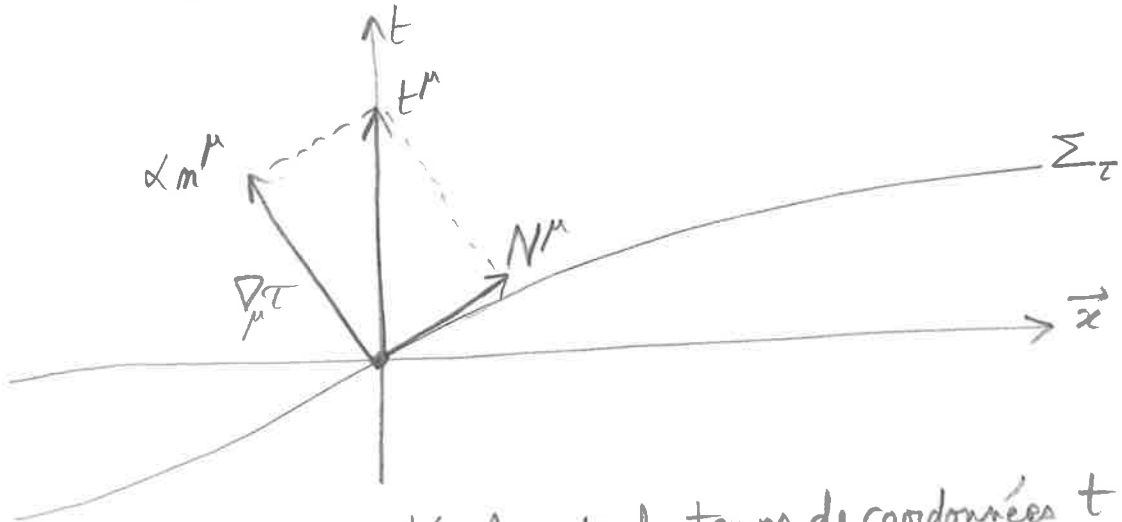
et qui <u>satisfont</u> les équations de contraintes

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{R} + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} &= \frac{16\pi G}{c^4} n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \\ D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K &= \frac{8\pi G}{c^4}\gamma_\mu^\nu T_{\nu\rho} n^\rho \end{aligned}}$$

1 contrainte hamiltonienne et une contrainte d'impulsion. On peut montrer que le problème des conditions initiales (avec contraintes) est <u>bien posé dans le sens d'Hadamard</u> (Choquet-Bruhat)

Décomposition 3+1 ou Arnowitt-Deser-Misner (ADM)

Etant donné la foliation Σ_τ ($\tau \in \mathbb{R}$) on introduit un vecteur t^μ normalisé par $t^\mu \nabla_\mu \tau = 1$, et qui représente la direction temporelle d'un système de coordonnées $\{t, \vec{x}\}$



Le vecteur t^μ décrit l'écoulement du temps de coordonnées t au travers de la surface. On décompose alors

$$\boxed{t^\mu = N^\mu + \alpha n^\mu}$$

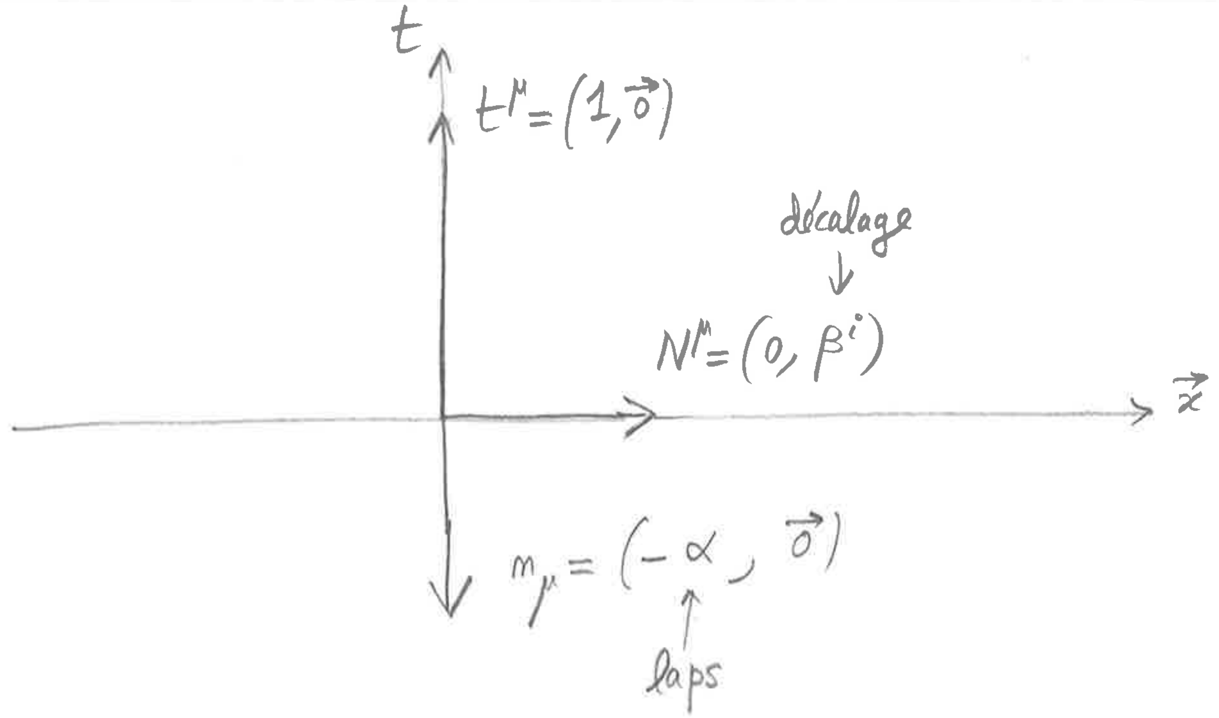
où $N^\mu \in \Sigma_\tau$ c.a.d. $n_\mu N^\mu = 0$. On a donc

$$\boxed{\alpha = - n_\mu t^\mu \qquad N^\mu = \gamma^\mu_\nu t^\nu}$$

Le vecteur N^μ s'appelle le "<u>décalage</u>" (ou "shift") et on rappelle que α est le "<u>laps</u>" (ou "lapse").

On va alors se placé dans un système de coordonnées $\{t, \vec{x}\}$ <u>adapté</u> à la foliation Σ_τ, dans le sens où

$$\boxed{t = \tau} \qquad (\text{et } t^i = 0)$$



Les 10 composantes de la métrique $g_{\mu\nu}$ sont alors décomposées en laps (α), décalage (β_i) et métrique spatiale $\gamma_{ij} = g_{ij}$

On introduit la métrique inverse γ^{ij} (telle que $\gamma^{ik}\gamma_{kj} = \delta^i_j$) et on manie les indices spatiaux uniquement avec γ_{ij} ou γ^{ij}.

Par ex on pose $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$.

La décomposition 3+1 (ou ADM) de la métrique s'écrit

$$\boxed{ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)}$$

On introduit la dérivée covariante D_i associée à γ_{ij} tq

$$\boxed{D_i \gamma_{ij} = 0}$$

et la courbure extrinsèque devient (exercice)

$$\boxed{K_{ij} = \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_t \gamma_{ij} - D_i\beta_j - D_j\beta_i\right)}$$

Les conditions initiales sont spécifiées par γ_{ij} et K_{ij}.

Formalisme hamiltonien de la RG

En RG, décrite par le lagrangien d'Einstein-Hilbert, toutes les quantités (tenseurs) sont covariantes. Mais pour définir le formalisme hamiltonien on a besoin de décrire l'évolution dans le temps des variables dynamiques, et donc de briser la covariance manifeste des équations.

On va rechercher un hamiltonien qui dépendra (en particulier) de la métrique spatiale induite γ_{ij} sur la famille d'hypersurfaces Σ, et bien sûr de sa variable conjuguée π^{ij}.

On va d'abord exprimer le lagrangien d'Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L}_g = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} R \qquad (G=c=1)$$

à l'aide de α, β_i et γ_{ij} (et leurs dérivées). On a

$$R = 2\left(G_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right) n^\mu n^\nu \qquad (\text{car } g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1)$$

et d'après l'éq. de Gauss-Codazzi

$$2\, G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \mathcal{R} + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}$$

D'autre part, avec l'identité de Ricci

$$R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = - n^\mu \left(\nabla_\mu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\mu\right) n^\rho$$

$$= \nabla_\mu n^\mu \nabla_\rho n^\rho - \nabla_\rho n^\mu \nabla_\mu n^\rho + (\text{div. totale})$$

où $(\text{div. totale}) = \nabla_\mu A^\mu$ peut-être ignoré au niveau de l'action, ce qui donne

$$R_{\mu\nu}\, n^\mu n^\nu = K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + (\text{div. totale})$$

Le lagrangien d'EH peut s'écrire

$$\mathcal{L}_g = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\left(\mathcal{R} - K^2 + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}\right)$$

et en coordonnées adaptées (où on a $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}$, $\gamma = \det \gamma_{ij}$)

$$\boxed{\mathcal{L}_g = \frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{16\pi}\left(\mathcal{R} + K^{ij} K_{ij} - K^2\right)}$$

la courbure intrinsèque étant $K_{ij} = \frac{1}{2\alpha}\left(\dot{\gamma}_{ij} - 2 D_{(i}\beta_{j)}\right)$

On a donc une densité de lagrangien ordinaire

$$\mathcal{L}_g\left[\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}, \alpha, \beta_i\right]$$ (et les gradients spatiaux de β_i et γ_{ij})

la seule dépendance dans une dérivée temporelle étant celle de la métrique spatiale. On définit donc le moment conjugué associé à la métrique spatiale

$$\boxed{\Pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}}$$

et on trouve

$$\boxed{\Pi^{ij} = \frac{\sqrt{\gamma}}{16\pi}\left(K^{ij} - \gamma^{ij} K\right)}$$

(densité de tenseur)

Le hamiltonien est donc donné par la transformation de Legendre (au sens ordinaire)

$$\boxed{\mathcal{H}_g = \Pi^{ij}\,\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_g}$$

qui doit ensuite être exprimée en fonction du moment conjugué

$$\mathcal{H}_g = \Pi^{ij}\left(2\alpha K_{ij} + 2 D_i \beta_j\right) - \frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{16\pi}\left(\mathcal{R} + K^{ij}K_{ij} - K^2\right)$$

et on substitue $K_{ij} = \frac{16\pi}{\sqrt{\gamma}}\left(\Pi_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\Pi\right)$. De plus on intègre par partie le terme avec shift. Finalement

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{H}_g = \alpha\left[-\frac{\sqrt{\gamma}\,\mathcal{R}}{16\pi} + \frac{16\pi}{\sqrt{\gamma}}\left(\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{1}{2}\Pi^2\right)\right] \\ - 2\sqrt{\gamma}\,\beta_i\, D_j\left(\frac{\Pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}}\right)\end{aligned}}$$

Les variables canoniques sont γ_{ij}, Π^{ij}, α, β_i.

Comme il n'y a pas de dépendance dans les moments conjugués de α et β_i on peut immédiatement écrire

$$\frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial \beta_i} = 0$$

et on retrouve les contraintes

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{R} - \frac{(16\pi)^2}{\gamma}\left(\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{1}{2}\Pi^2\right) = 0 \\ &D_j\left(\frac{\Pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}}\right) = 0 \end{aligned}}$$

contrainte hamiltonienne

contrainte de moment

qui doivent être imposées sur γ_{ij}, K_{ij} sur une surface de Cauchy initiale.

D'autre part on a les équations de Hamilton conjuguées

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial \Pi^{ij}} = \dot{\gamma}_{ij}} \iff$$

définition de la courbure extrinsèque

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha}\left(\dot{\gamma}_{ij} - 2D_{(i}\beta_{j)}\right)$$

et l'équation d'évolution

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial \gamma_{ij}} = -\dot{\Pi}^{ij}} \iff \dot{\Pi}^{ij} = -\frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{16\pi} G^{ij} - \frac{32\pi\alpha}{\sqrt{\gamma}}\left(\Pi^{ik}\Pi_k^{\ j} - \frac{1}{2}\Pi\Pi^{ij}\right) + \cdots$$

donne l'équation d'évolution pour Π^{ij}.

Le hamiltonien "sur la couche de masse" est zéro à cause des deux équations de contrainte. Est-ce que cela signifie que l'énergie de l'espace-temps est nulle ? Non car on n'a pas inclus les termes de surface à l'infini (on a négligé les dérivées totales) et ce sont les termes de surface à l'∞ qui donnent l'énergie totale de l'espace-temps.

Le calcul est similaire à celui du terme de surface dans l'action d'EH. Quand on varie

$$H_g = \int d^3x \, \mathcal{H}_g$$

le terme de surface va venir de la variation de $\alpha \sqrt{\gamma} \, \mathcal{R}$.

On a une formule similaire au cas quadri-dimensionnel

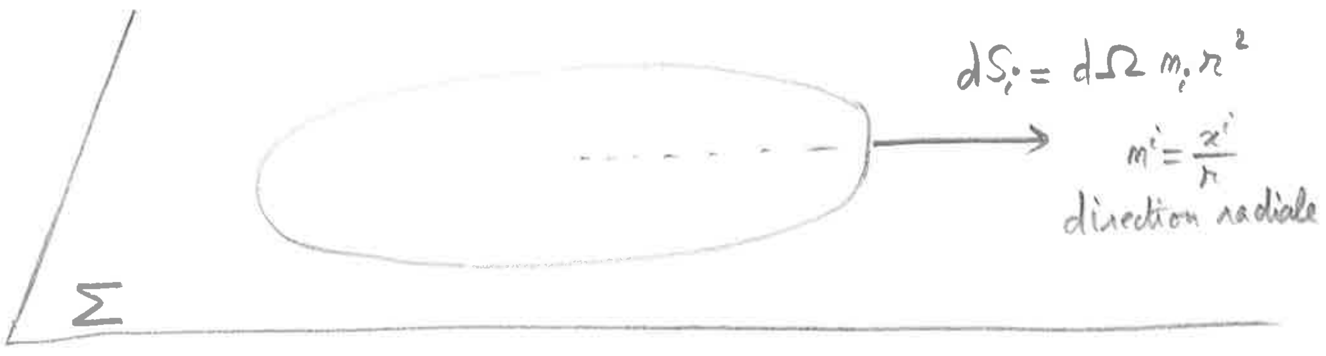
$$\delta(\sqrt{\gamma}\, \mathcal{R}) = \sqrt{\gamma}\left(\delta\gamma^{ij} \mathcal{R}_{ij} + D_i \delta v^i \right)$$

avec $\delta v^i = D^j\left(\delta\gamma_{ij} - \gamma_{ij}\gamma^{kl}\delta\gamma_{kl}\right)$

On se place dans le cas d'un espace-temps asymptotiquement plat, donc on a $\alpha = 1 + O(\frac{1}{r})$, $\beta_i = O(\frac{1}{r^2})$ et $\gamma_{ij} = \delta_{ij} + O(\frac{1}{r})$ quand $r \to +\infty$. Donc $\delta\gamma_{ij} = O(\frac{1}{r})$.

$$\delta H_g = \int d^3x \left[\frac{\delta H_g}{\delta \gamma_{ij}} \delta\gamma_{ij} + \frac{\delta H_g}{\delta \Pi^{ij}} \delta \Pi^{ij} \right] - \frac{1}{16\pi} \int d^3x \sqrt{\gamma}\, D_i \delta v^i$$

où $\frac{\delta H_g}{\delta \gamma_{ij}}$ et $\frac{\delta H_g}{\delta \Pi^{ij}}$ ont été calculés auparavant. On peut évaluer le terme de surface sur une sphère de coordonnée située à l'∞ $r \to +\infty$ (avec $t =$ const.).



On peut remplacer asymptotiquement $D_i \delta v^i$ par $\partial_i \delta v^i$ car $\partial_k \gamma_{ij} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ qd $r \longrightarrow \infty$

$$\delta H_g = \cdots - \frac{1}{16\pi} \int d^3x \, \partial_i \delta v^i$$

$$= \cdots - \frac{1}{16\pi} \int d\Omega \, n^i r^2 \left(\partial_j \delta\gamma_{ij} - \partial_i \delta\gamma_{jj} \right)$$

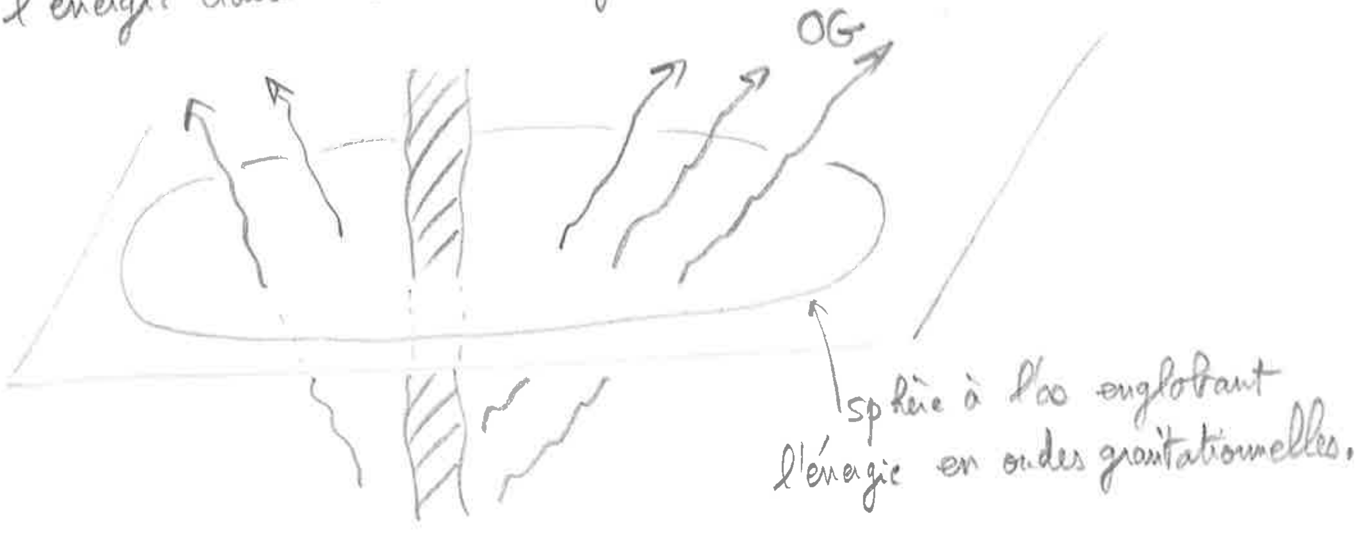
Le calcul est fait asymptotiquement quand $r \to \infty$ et seul le terme dominant contribue. Donc finalement il faut considérer le hamiltonien

$$H'_g = H_g + M_{ADM}$$

où la masse ADM est donnée par

$$\boxed{M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \int_{\substack{\text{sphère} \\ \text{à l'infini}}} d\Omega \, r^2 n^i \left(\partial_j \gamma_{ij} - \partial_i \gamma_{jj} \right)}$$

Pour un espace-temps engendré par M, $\gamma_{ij} \simeq \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \delta_{ij}$ et donc $M_{ADM} = M$. La masse ADM représente la masse totale constante de l'espace-temps (car $H_g = 0$) incluant toutes les sources de matière et l'énergie dans les ondes gravitationnelles.



Champs de matière

Jusqu'à présent on s'est occupé seulement du membre de gauche (en "marbre") des eqs. d'Einstein, et pas du membre de droite (en "bois"), sauf pour définir le tenseur énergie-impulsion de la matière

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}}$$

où $S_m = \int d^4x \, \mathcal{L}_m$ est l'action pour les champs de matière.

Si on prend le cas d'un champ scalaire

$$S_m = \int d^4x \, \mathcal{L}_m(\psi, \partial_\mu \psi, g_{\mu\nu})$$

on obtient par variation

$$\delta S_m = \int d^4x \left\{ \delta\psi \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \psi} + \underbrace{\delta \partial_\mu \psi \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \partial_\mu \psi}}_{\text{on intègre par partie}} + \delta g_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}} \right\}$$

$$\delta S_m = \int d^4x \left\{ \delta\psi \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} + \frac{\sqrt{-g}}{2} \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right\}$$

Si on varie seulement $\delta\psi$ on obtient l'eq. du mouvement de ψ

$$\boxed{\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \partial_\mu \psi} \right) = 0}$$

On va utiliser maintenant <u>la scalarité de l'action</u> vis-à-vis de transformations de coordonnées arbitraires $\{x\} \to \{x'\}$

$$x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x) \qquad (\text{pour tout } \xi^\mu)$$

Donc la densité de lagrangien $\mathcal{L}_m$ doit décrire la même physique dans $\{x\}$ et $\{x'\}$ soit

$$S_m = \int d^4x \, \mathcal{L}_m[\psi(x), g(x)] = \int d^4x' \, \mathcal{L}_m[\psi'(x'), g'(x')]$$

même $\mathcal{L}_m$ dans $\{x\}$ et $\{x'\}$

mais comme x' est une variable d'intégration on doit avoir

$$0 = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_m[\psi'(x), g'(x)] - \mathcal{L}_m[\psi(x), g(x)] \right\}$$

ce qui se traduit par

$$0 = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_\xi \psi \, \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \, \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}} \right\}$$

dérivées de Lie

$$0 = \int d^4x \left\{ \xi^\mu \nabla_\mu \psi \, \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} + \sqrt{-g}\, \nabla_\mu \xi_\nu \, T^{\mu\nu} \right\}$$

où on a utilisé $\mathcal{L}_\xi \psi = \xi^\mu \nabla_\mu \psi$ et $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2 \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}$.

$$0 = \int d^4x \, \xi^\mu \left\{ \nabla_\mu \psi \, \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} - \sqrt{-g}\, \nabla_\nu T_\mu^{\ \nu} \right\}$$

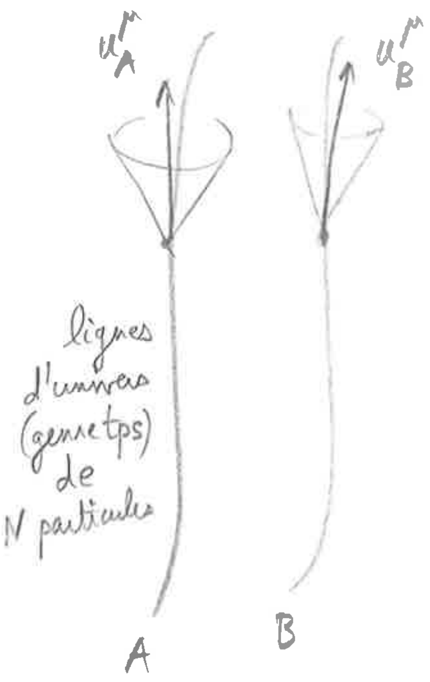
La scalarité de l'action montre donc que les équations du mouvement de la matière peuvent être obtenues de façon équivalente par la conservation covariante du tenseur énergie impulsion

$$\boxed{\sqrt{-g}\,\nabla_\nu T_\mu^{\ \nu} = \nabla_\mu \psi \,\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} = 0}$$

Les eqs d'Einstein $G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$ impliquent donc, via l'identité de Bianchi $\nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0$, les équations de la matière.

C'est une propriété très importante de la RG.

Particules ponctuelles



$$u_A^\mu = \frac{dy_A^\mu}{d\tau_A}$$

$$d\tau_A = \sqrt{-(g_{\mu\nu})_A\, dy_A^\mu\, dy_A^\nu} \quad \text{temps propre}$$

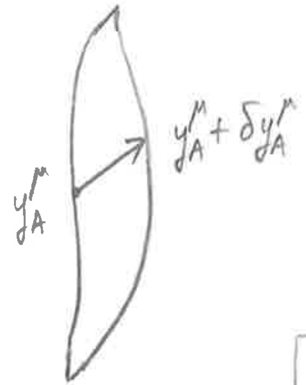
$$\boxed{S_{\text{part}} = -\sum_{A=1}^{N} m_A \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_A}$$

Variation par rapport à la métrique

$$\delta S_{\text{part}} = -\sum_A \frac{m_A}{2} \int (\delta g_{\mu\nu})_A\, u_A^\mu\, dy_A^\nu$$

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_A m_A \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_A\, u_A^\mu\, u_A^\nu\, \delta_{(4)}(x - y_A)}$$

Variation par rapport aux particules (avec $\delta y_A^\mu(\pm\infty)=0$)



$$\delta S_{part} = -m_A \int \frac{1}{2d\tau_A}\Big[-\delta y_A^\rho\, \partial_\rho g_{\mu\nu}\, dy_A^\mu\, dy_A^\nu \underbrace{-2\,(g_{\mu\nu})_A\, d\delta y_A^\mu\, dy_A^\nu}_{\text{intègre par parties}}\Big]$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau_A}\Big((g_{\mu\nu})_A\, u_A^\nu\Big) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho}\right)_A u_A^\nu\, u_A^\rho}$$

équivalent à l'équation des géodésiques

$$a_A^\mu \equiv \frac{du_A^\mu}{d\tau_A} + \left(\Gamma^\mu_{\nu\rho}\right)_A u_A^\nu\, u_A^\rho = 0$$

Ici c'est le mouvement de N particules sur une <u>métrique de fond</u> $g_{\mu\nu}$ <u>fixée</u> (supposée engendrée par des masses extérieures). On néglige donc la rétro-action des particules sur la métrique, et l'interaction gravitationnelle mutuelle des particules entre elles.

Un problème beaucoup plus compliqué est celui du mouvement des N particules sous l'action des forces gravitationnelles qu'elles engendrent. On traitera ce problème dans le cadre du lagrangien dit de Fokker pour le mouvement des particules.

Un aspect important du problème est qu'il faudra une <u>régularisation</u> pour définir le champ à la position des particules elle-mêmes, de façon à éliminer le champ propre des particules

$$(g_{\mu\nu})_A \longrightarrow \mathrm{Reg}\left[g_{\mu\nu}\right]_A$$

Klein-Gordon field

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + m^2\varphi^2\right)$$

$m \equiv \frac{mc}{\hbar}$ in SI units

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\right)$$

$$= -m^2\sqrt{-g}\,\varphi + \underbrace{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right)}_{\sqrt{-g}\,\nabla_\mu\left(g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) \equiv \sqrt{-g}\,\Box\varphi}$$

Klein-Gordon equation $\boxed{\Box\varphi - m^2\varphi = 0}$

$\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ acting on any tensor

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{4}g^{\mu\nu}\left(g^{\rho\sigma}\partial_\rho\varphi\,\partial_\sigma\varphi + m^2\varphi^2\right) - \frac{\sqrt{-g}}{2}\left(-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\varphi\,\partial_\sigma\varphi\right)$$

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \nabla^\mu\varphi\,\nabla^\nu\varphi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\nabla_\rho\varphi\,\nabla^\rho\varphi + m^2\varphi^2\right)}$$

check $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ when KG equation is satisfied.

Electromagnetic field

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{4\mu_0}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \sqrt{-g}\,j_e^\mu A_\mu$$

(μ_0 = diamagnetic constant related to dielectric constant ε_0 by $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$)

where Faraday tensor is
$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$
$$= \underbrace{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}_{\text{independant of metric}}$$

A_μ vector potential is the independant d.o.f. of EM field

j_e^μ charged current conserved in the sense $\boxed{\nabla_\mu j_e^\mu = 0}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \sqrt{-g}\, j_e^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu} = -\frac{\sqrt{-g}}{4\mu_0} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (2)(2)(-1) F_{\rho\sigma}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = \sqrt{-g}\, j_e^\mu + \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}\right)}_{\sqrt{-g}\, \nabla_\nu F^{\mu\nu} \text{ since } F^{\mu\nu} \text{ is antisymmetric}}$$

$$\boxed{\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0\, j_e^\mu}$$ Maxwell's equations in GR

Compatibility with charge conservation

$$\nabla_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} = \nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} + \underbrace{R^\mu{}_{\cdot\varepsilon\mu\nu} F^{\varepsilon\nu}}_{R_{\varepsilon\nu} F^{\varepsilon\nu} = 0} + \underbrace{R^\nu{}_{\cdot\varepsilon\mu\nu} F^{\mu\varepsilon}}_{-R_{\varepsilon\mu} F^{\mu\varepsilon} = 0}$$

since $F^{\mu\nu}$ is antisymmetric

$$= 0$$

Hence charge conservation is implied by Maxwell's equations

Interesting form: introduce coordinate charged current

$$\boxed{j_{e*}^\mu = \sqrt{-g}\, j_e^\mu}$$ (not a tensor but a tensor density) $\boxed{\partial_\mu j_{e*}^\mu = 0}$

This j_{e*}^μ represents the true d.o.f. of the charges particles

$$\boxed{\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}\right) = -\mu_0\, j_{e*}^\mu}$$

Perfect fluid

$$\boxed{\begin{aligned} S &= -\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\varepsilon \\ T^{\mu\nu} &= (\varepsilon+p)\,u^\mu u^\nu + p\,g^{\mu\nu} \end{aligned}}$$

(no heat flow included
no viscosity)
so-called perfect fluid

where $\varepsilon = \rho(1+\Pi)$

all are scalars

all are measured in particle's rest frame

ε = proper energy density (i.e. measured in rest frame)

p = pressure

Π = specific internal energy (i.e. per unit mass)

ρ = proper conserved mass density

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0$$

Thermodynamical relation

$$dU = T\,dS - p\,dV$$

where $U = M\Pi$, $V = \dfrac{M}{\rho}$, $S = M s$

s ← specific entropy

$$\boxed{d\Pi = T\,ds - p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

Other form where we pose $\boxed{h = \dfrac{\varepsilon+p}{\rho} = 1 + \Pi + \dfrac{p}{\rho}}$

specific enthalpy

$$\boxed{d\varepsilon = h\,d\rho + \rho T\,ds}$$

Independent d.o.f. of fluid

$j^\mu = \rho u^\mu$ conserved current

s = specific entropy

E.O.M. $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ is equivalent to

$$\boxed{\begin{array}{ll} u^\mu \nabla_\mu s = 0 & \text{entropy is conserved along fluid lines} \\ (\varepsilon + p) a^\mu + \left(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu\right) \nabla_\nu p = 0 & \text{Euler equation (non geodesic motion)} \end{array}}$$

Actually these two equations are equivalent to

$$\boxed{\begin{array}{l} u^\nu \left(\partial_\nu C_\mu - \partial_\nu C_\mu\right) = T \partial_\mu s \\ \text{where } C_\mu = h\, u_\mu \text{ is the enthalpy current} \end{array}}$$

This permits to make the link with the action

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, L \quad \text{with} \quad L(j^\mu, s) = -\varepsilon$$

Lagrange equations with fluid variables (exercise)

$$\boxed{j^\nu \left[\partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial j^\mu}\right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial j^\nu}\right)\right] = -\frac{\partial L}{\partial s} \partial_\mu s}$$

Here $dL = -d\varepsilon = -h\, d\rho + \rho T\, ds$

with $d\rho = \delta\sqrt{-j_\mu j^\mu} = \frac{1}{2\rho}\left(-2 j_\mu dj^\mu\right) = -u_\mu dj^\mu$

$$dL = h u_\mu dj^\mu + \rho T\, ds$$

$$\frac{\partial L}{\partial j^\mu} = h u_\mu = C_\mu \qquad \frac{\partial L}{\partial s} = \rho T$$

in agreement with previous EOM.