

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du doctorat

de l'université de CAEN

Spécialité Constituants Élémentaires

Arrêté du 30 mars 1992

par

David LHUILLIER

**SUJET : DIFFUSION COMPTON VIRTUELLE
A BASSE ENERGIE.**

Soutenue le 06 Octobre 1997, devant la Commission d'examen :

Bernard TAMAIN directeur

Nicole D'HOSE

Joël FELTESSE

Robert FRASCARIA

Pierre GUICHON

Charles HYDE-WRIGHT rapporteur

Jacques Van de WIELE rapporteur

*Nous savons peu de choses, mais qu'il
faillie nous tenir au difficile, c'est là une
certitude qui ne doit pas nous quitter.*

R.-M. Rilke.

Remerciements

L'encadrement exceptionnel dont j'ai bénéficié m'a donné une grande motivation pour mon travail de thèse et a beaucoup contribué au bon déroulement de ces trois années. Mes premiers et plus sincères remerciements vont donc à Nicole D'Hose, Pierre Guichon et Marc Vanderhaeghen.

Au delà de l'enrichissement que m'ont apporté la grande disponibilité de Nicole vis à vis de ses étudiants et sa maîtrise de la physique expérimentale, sa passion communicative pour la recherche m'a fait porter un nouveau regard sur les beautés de ce métier. Merci donc pour toutes ces choses que l'on apprend pas au DEA et qui font de la thèse une réelle transition vers le travail de chercheur. Je dois à Pierre l'opportunité d'avoir contribué à l'épopée du calcul des corrections radiatives. J'ai beaucoup appris au contact de sa très vaste culture scientifique et de son approche toujours astucieuse des calculs (Ah quand même, le patron, quel type !). Marc, tu as été un élément essentiel dans l'aboutissement de la partie théorique de ma thèse. La combinaison d'une profonde compréhension de la physique et d'une grande pédagogie est plutôt rare et je suis très heureux d'en avoir bénéficié. Je te suis très reconnaissant pour le temps que tu as investi dans ma formation.

J'ai beaucoup reçu au contact des membres de la collaboration. Je remercie particulièrement Dominique Marchand et Jacques Van de Wiele pour tous ces moments de doute et de joie partagés tout au long du calcul des corrections radiatives et pour avoir créé toutes ces "interférences constructives" qui nous ont permis d'arriver au bout. Concernant la partie expérimentale de ma thèse, je voudrais saluer spécialement Gabriel Tamas, Sophie Cavata, Luc Van Hoorebeke, Pierre-Yves Bertin, Charles Hyde-Wright et Pascal Vernin que j'ai eu la chance de cotoyer souvent et qui ont été l'indispensable fil d'Ariane dans le labyrinthe de l'analyse.

Vu de loin, Vincent Brindejonc et Julie Roche vous apparaîtront peut-être comme mes plus proches collaborateurs mais alors vous n'aurez pas tout vu. Cher frère, chère sœur, je n'ose même pas sonder le vide incommensurable qu'aurait creusé votre absence durant ces trois ans si par malheur j'avais été fils unique !!

Les prises de données à Mainz ont été l'occasion d'apprécier la bonne ambiance de toute la collaboration Belge de Gent. Un grand coup de chapeau également à l'ensemble des étudiants allemands de l'accélérateur et du Hall A1 qui ont toujours été présents et ont fourni un énorme travail pour le bon déroulement de notre expérience. Merci à Michael Distler qui a mis à notre disposition son programme d'analyse et Jan Friedrich qui s'est beaucoup investi dans la prise de données et leur analyse.

Je tiens également à remercier tous ces générateurs de bulles d'oxygène qui m'ont

accompagné, qui ont vite dissout les périodes "indigestes" et apporté tant de pétillant. Merci à toi Camille pour ta solide et présente amitié. De Caen à Paris en passant par le Verdon, tu seras toujours un compagnon de route privilégié. Chère Vanou, tu sais déjà combien j'ai pu apprécier ton amitié durant ton séjour ici. Je n'oublierai pas toute la "FORCAAAAAA!" que tu m'as apportée pendant la dure période de la rédaction et ton coup de téléphone, depuis le Brésil, le matin même de ma soutenance. "C'était vraiment mimi ca !". Christophe je garde beaucoup de grands souvenirs de nos sorties à Fontainebleau, dans les calanques et les Ecrins et j'espère qu'il y en aura beaucoup d'autres. Je te dois sans doute mon plus grand merci pour un bon assurage, sur une certaine face sud ... Un grand merci aussi à tous les acteurs de ces bons moments de la vie quotidienne au labo: Rosella, Claire, Patrick, Pascal, Michel, Eric, Thierry, Stéphanie, Agatino, Johann et sur les blocs de Bleau : Pierre-Francois, Claude, Paolo.

Je suis très reconnaissant à Charles Hyde-Wright et Jacques Van de Wiele d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, merci pour la considération que vous avez porté à ce travail. Merci également à Robert Frascaria, Bernard Tamain et Joël Feltesse d'avoir accepté d'être membres du jury.

Le système de vidéoconférence du LAL a permis à Charles Hyde-Wright de suivre ma soutenance depuis le Thomas Jeferson Lab et de jouer pleinement son rôle de membre du jury. Ce pari doit sa réussite à Christian Helft et Daniel Bresson qui ont tout de suite montré leur intérêt dans l'utilisation inhabituelle de cet équipement. Je les remercie chaudement pour leur grande disponibilité.

Je ne saurais clore ces remerciements sans penser également aux personnes qui m'ont accueilli à mon arrivée au SPhN, Jean Mougey et l'équipe du projet ETA : Alain Boudard, Michel Garçon et Benjamin Mayer. Je dois à leur soutien d'avoir pu valoriser les huit premiers mois de ma thèse et d'avoir réussi à m'intégrer dans une nouvelle collaboration suite à l'arrêt du projet ETA.

Enfin, mes dernières pensées vont à mes parents qui ont toujours su m'apporter soutien, confiance et réconfort. Merci surtout pour tous les "baggages" que vous m'avez donnés et qui sont bien utiles pour "tracer la route".

Table des matières

I	Motivations physiques	5
I.1	Diffusion Compton réelle	5
I.1.1	Diffusion Thomson	6
I.1.2	Ordres supérieurs - Diffusion Rayleigh	9
I.1.3	Les observables polarisabilités	11
I.1.4	Données expérimentales	16
I.1.5	Modèles et prédictions théoriques	18
I.2	Diffusion Compton virtuelle	24
I.2.1	Généralisation du processus Compton	24
I.2.2	Cinématique de la réaction	26
I.2.3	Développement de la section efficace VCS en puissances de q' .	30
I.2.4	Décomposition en ondes partielles de l'amplitude $\mathbf{T}_{\text{NonBorn}}$. .	34
I.2.5	Modèles théoriques	38
II	Dispositif expérimental	45
II.1	La physique à Mainz	45
II.2	Système d'accélération	48
II.3	Mesure d'intensité	50
II.4	Cible d'hydrogène liquide	53
II.5	Spectromètres	54
II.6	Système de détection	57

II.6.1	Chambres à dérive	57
II.6.2	Scintillateurs	59
II.6.3	Compteurs Cherenkov	61
II.7	Trigger	62
III	Analyse	65
III.1	Méthode expérimentale.	65
III.2	Définitions des cinématiques mesurées	70
III.2.1	Variables leptoniques (q, q', ϵ)	72
III.2.2	Variables hadroniques $(\theta_{\gamma\gamma}^{em}, \varphi)$	73
III.2.3	Découpages de l'espace de phase.	77
III.2.4	Statistique	79
III.3	Sections efficaces absolues	80
III.3.1	Sélection des événements	80
III.3.2	Les paramètres de la normalisation	100
III.3.3	L'angle solide	102
IV	Corrections radiatives	109
IV.1	Nécessité des corrections	110
IV.2	Exemple détaillé de la diffusion élastique	111
IV.2.1	Rappels	111
IV.2.2	Contributions à l'ordre α^3	113
IV.2.3	Traitement des infinis	124
IV.2.4	Mise en œuvre des corrections	142
IV.2.5	Les corrections réelles dans la simulation de l'angle solide	148
IV.3	Corrections Radiatives à la Diffusion Compton Virtuelle	150
IV.3.1	Hypothèses de calcul	151

IV.3.2	Etude des corrections virtuelles	152
IV.3.3	Compensation des divergences IR et contribution des corrections réelles de photons mous	158
IV.3.4	Méthode d'intégration numérique pour les corrections virtuelles	162
IV.3.5	Sections efficaces corrigées et discussions	176
V	Résultats-Discussion	183
V.1	Sections efficaces VCS	183
V.1.1	Sélection des événements	183
V.1.2	Résultats à $q' = 45, 67.5$ et 90 MeV/c	185
V.1.3	Erreurs systématiques	186
V.2	Comparaison au théorème de basse énergie et effet des polarisabilités.	197
V.3	Perspectives	198
V.3.1	Extensions possibles dans le domaine des polarisabilités	198
V.3.2	Autres domaines cinématiques du VCS.	200
A	Conventions	205
A.1	Notations	205
A.2	Systèmes d'unités	205
B	Généralités sur l'optique magnétique	209
C	Calculs en D dimensions	213
C.1	Algèbre de Dirac	213
C.2	Intégrales utiles	213
D	Règles de Feynman et constantes de renormalisation dans QED	215
E	Traitement des singularités	217

Introduction

La compréhension de l'interaction forte canalise une grande partie des efforts de recherche en physique fondamentale. Au-delà des caractéristiques des noyaux atomiques stables, les avancées technologiques permettent aujourd'hui d'observer la dynamique des systèmes régis par cette force.

L'énergie croissante disponible auprès des accélérateurs d'ions lourds ouvre la voie à une nouvelle thermodynamique de la matière nucléaire vers des états de plus en plus éloignés de la stabilité. Pour des excitations suffisantes, la mise en évidence de transitions de phase vers les degrés de liberté plus internes que sont les nucléons puis les quarks et les gluons constitue l'un des enjeux majeurs de ce programme.

L'étude de la matière hadronique, par la structure interne du nucléon, offre une vision complémentaire dans laquelle deux domaines de l'interaction forte apparaissent clairement.

(i) Dans les réactions à grand transfert, qui sondent les interactions à courte distance (≤ 0.1 fm), le nucléon est décrit par le modèle de partons quasi-libres de Feynman [1]. La mise en évidence expérimentale date de la fin des années soixantes avec les expériences de diffusion profondément inélastiques au SLAC [2]. Les partons élémentaires sont identifiés aux quarks proposés par M. Gell-Mann, Y. Ne'eman et G. Zweig en 1964 [3] pour expliquer les symétries du spectre des hadrons. Le qualificatif de quasi-libre provient de la propriété de liberté asymptotique de l'interaction forte, qui permet un traitement perturbatif à haute énergie. Dans le formalisme de la chromodynamique quantique (QCD), ceci se traduit par un couplage fonction décroissante de l'énergie.

(ii) La contre-partie pour les processus moins durs est un couplage de plus en plus important qui supprime la légitimité d'un développement en série. A basse énergie, la structure interne du nucléon devient donc inaccessible en termes de constituants élémentaires. Les observables réfèrent à des propriétés plus globales du hadron (charge, masse, moment magnétique) qui incluent les effets collectifs des degrés de libertés de QCD.

La sonde électromagnétique, entièrement décrite par l'électrodynamique quantique

(QED) est l'outil de choix pour l'étude de la matière hadronique. Dans les expériences de diffusion d'électrons, la masse invariante Q^2 du photon virtuel échangé correspond à la résolution spatiale avec laquelle on vient sonder le nucléon. L'évolution en Q^2 de la section efficace élastique s'exprime alors par deux fonctions, les facteurs de forme électriques et magnétiques, dont la transformée de fourier nous donne accès aux distributions de charges et de courants à l'intérieur du nucléon.

En diffusion Compton réelle ($Q^2 = 0$) à basse énergie, la structure interne du nucléon se manifeste par la déformation de ces distributions, induite par l'excitation électromagnétique. Les observables associées sont appelées polarisabilités électrique (α) et magnétique (β). Elles correspondent respectivement à la "rigidité" de la distribution de charge et à la résultante des mécanismes paramagnétiques et diamagnétiques du milieu interne.

Depuis les années 1960, les polarisabilités ont été largement mesurées mais ces expériences restent toujours à l'heure actuelle très délicates et les incertitudes sur α et β sont encore respectivement de 10% et 40%. Ces observables reflètent les contributions des deux degrés de liberté quark et pion à l'intérieur du nucléon et si un important effort théorique a été entrepris pour les reproduire il reste à ce jour insatisfaisant. Afin de mieux comprendre l'équilibre entre les deux composantes quark et pion du nucléon, la diffusion Compton virtuelle (VCS : Virtual Compton Scattering) donne un éclairage nouveau sur les polarisabilités en permettant des mesures à $Q^2 \neq 0$.

L'idée de mesurer expérimentalement le VCS est apparue pour la première fois en 1990 lors de l'étude du projet PEGASYS [4] qui disposait d'une très grande luminosité. En 1993 au "Thomas Jefferson Laboratory", l'expérience promue par les instigateurs de la diffusion Compton virtuelle, P. Bertin, C. Hyde-Wright et P.A.M. Guichon [5], a été particulièrement bien accueillie. Elle propose la mesure des polarisabilités dans la gamme $Q^2 = 1$ à 3 GeV^2 , sous le seuil de production du pion. En 1995, N. D'Hose et T. Walcher ont proposé une même expérience à MAMI [6] dans un domaine de Q^2 plus bas (0.33 GeV^2). Celle-ci fournit actuellement les premières données VCS et fait l'objet de cette thèse. La généralisation des polarisabilités à des $Q^2 \neq 0$ bénéficie d'une définition théorique sans ambiguïté, formulée par P.A.M. Guichon [7]. La nouvelle information recueillie est complémentaire à celle des facteurs de forme dont la dépendance en Q^2 nous permet de passer par exemple de la charge totale à la distribution de charge dans le nucléon.

Dans une première partie, le VCS est présenté comme une extension de la diffusion Compton réelle. A basse énergie, le développement des amplitudes de chaque réaction en puissances de q' , l'impulsion du photon sortant, fait apparaître un comportement très similaire. Les deux premiers termes de l'amplitude VCS sont ainsi entièrement calculables et prédit par un théorème de basse énergie. Les observables de polarisation

se manifestent à l'ordre suivant.

Expérimentalement, la diffusion Compton virtuelle s'obtient par l'électroproduction de photons sur le proton $(e, e'p')\gamma$. Les accélérateurs de nouvelle génération réunissent pour la première fois les conditions de haute luminosité et de grand cycle utile nécessaires à la mesure de ce processus. Le chapitre II est dédié à la description de l'accélérateur MAMI et des spectromètres de haute résolution auprès desquels nous avons effectué notre expérience.

La méthode expérimentale exposée dans le troisième chapitre montre toute la difficulté de nos mesures. Les polarisabilités se manifestent en effet dans l'évolution de la section efficace en fonction de q' par une faible déviation (de l'ordre de 10%) par rapport au théorème de basse énergie. L'extraction des observables correspond alors à la soustraction de deux grands nombres et demande une grande précision sur la section efficace absolue. Dans ce but, l'ensemble de la procédure d'analyse est présentée en détaillant la sélection des "bons" événements VCS, le contrôle de la normalisation de nos mesures et la simulation de l'angle solide.

La faible masse de l'électron rend sa probabilité de rayonner très importante. Au delà de l'analyse rigoureuse des données, l'évaluation précise des effets radiatifs est donc cruciale. Effectué pour la première fois par notre équipe, le calcul des corrections radiatives à l'ordre 1 du VCS utilise le formalisme de la régularisation dimensionnelle et constitue la partie théorique de cette thèse. Elle est reportée dans le chapitre IV. La complexité des diagrammes de Feynman impliqués a nécessité un traitement numérique de certains termes sur lequel je me suis plus particulièrement investi. La présentation des résultats de ce calcul met l'accent sur le contrôle des approximations effectuées et la très bonne précision obtenue.

Le dernier chapitre présente, dans l'état actuel de l'analyse, les sections efficaces obtenues pour trois cinématiques. Une première estimation des erreurs systématiques permet de conclure à un bon accord avec le théorème de basse énergie. Les perspectives pour la mesure des polarisabilités généralisées sont ensuite discutées ainsi que l'extension de la diffusion Compton virtuelle à d'autres domaines cinématiques.

Chapitre I

Motivations physiques

Ce chapitre est consacré à la description générale de la réaction de diffusion Compton virtuelle sur le proton.

Dans une première partie je ferai quelques rappels sur l'effet Compton réel à basse énergie. J'insisterai plus particulièrement sur le développement de la section efficace en puissances des impulsions des photons ainsi que sur la définition des polarisabilités. Je montrerai ensuite comment la généralisation vers la diffusion Compton virtuelle permet de prolonger ce concept de polarisabilité et nous fournit une nouvelle information sur la structure interne du nucléon, complémentaire aux connaissances actuelles. Les principaux éléments de la définition des nouvelles observables seront présentés en insistant sur la rigueur du formalisme utilisé, indépendant de tout modèle.

Le système d'unités adopté dans tout ce chapitre est celui utilisé dans la littérature sur les polarisabilités : le système de Gauss. Les notations et la correspondance avec les conventions MKSA ou Heaviside-Lorentz sont respectivement rappelées en annexe (A.1) et (A.2).

I.1 Diffusion Compton réelle

La diffusion Compton réelle (fig. I.1) est décrite ici dans la limite de basse énergie. Les premiers termes du développement de la section efficace en puissances des impulsions des photons sont discutés. Cette approche permet d'introduire la notion de polarisabilité du système cible et servira ensuite de base pour décrire le processus plus général qui nous intéresse ici, la diffusion Compton virtuelle.

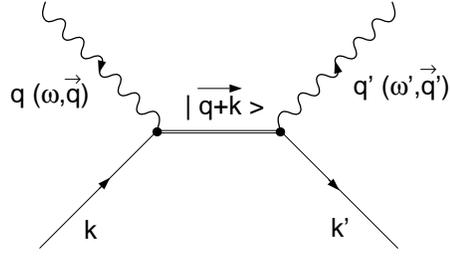


Figure I.1: Processus de diffusion Compton réelle ($q^2 = q'^2 = 0$). L'énergie du photon est reliée au module de son impulsion par $\omega = |\vec{q}| c$. Dans le référentiel du centre de masse, $\omega = \omega'$.

I.1.1 Diffusion Thomson

L'émission de rayonnement électromagnétique par des charges accélérées est un phénomène connu de longue date en électrodynamique classique. A travers cette propriété, la diffusion Compton prend l'interprétation suivante : le photon incident est une excitation électromagnétique qui fait osciller la particule cible. L'accélération résultante de la charge se traduit alors par le rayonnement d'un photon final.

La limite classique de basse énergie permet d'obtenir rapidement une première section efficace du processus [8, chap.14]. Dans la suite des calculs, le champ électromagnétique incident sera indicé "in" et le rayonné "out". On décrit le photon incident par une onde plane se propageant suivant \vec{q} avec le vecteur polarisation $\vec{\epsilon}$.

$$\vec{E}_{in}(\vec{x}, t) = \vec{\epsilon} E_0 e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Dans l'approximation non relativiste, l'accélération de la cible de charge e et de masse m est reliée à la force électrique par

$$\vec{a}(t) = \vec{\epsilon} \frac{e}{m} E_0 e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (\text{I.1})$$

Le rayonnement émis par la charge en mouvement est alors obtenu en résolvant les équations de Maxwell inhomogènes

$$\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = -\frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (\text{unit. Gauss}) \quad (\text{I.2})$$

$F^{\beta\alpha}$ désigne le tenseur électromagnétique antisymétrique relié aux usuels potentiels scalaire Φ et vecteur \vec{A}

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \\ \vec{B}_{out} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E}_{out} &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Le quadrivecteur J^β rassemble les termes de sources. J^0 représente la densité de charge et \vec{J} la densité de courant. Le flux d'énergie électrostatique rayonnée par unité de temps et de surface est donné par le vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{out} \times \vec{B}_{out} \quad (I.4)$$

d'où la puissance par unité d'angle solide et de temps

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{S} \cdot \frac{\vec{R}}{R} R^2 \quad (I.5)$$

avec \vec{R} le vecteur reliant la source et le point d'observation. Si l'on se place à des distances grandes devant la longueur d'onde émise, l'approximation d'onde plane est justifiée pour les champs rayonnés. Le vecteur unitaire \vec{n} porté par \vec{R} devient orthogonal à \vec{E}_{out} et \vec{B}_{out} avec les relations

$$\begin{aligned} \vec{B}_{out} &= \vec{n} \times \vec{E}_{out} \\ \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi} E_{out}^2 R^2 \end{aligned} \quad (I.6)$$

La dépendance en R^2 n'est qu'apparente car elle est compensée par la décroissance des champs \vec{E}_{out} et \vec{B}_{out} qui évoluent en $1/R$ dès que l'on s'éloigne suffisamment de la source. La résolution de (I.3) donne pour le champ électrique

$$\vec{E}_{out} = \frac{e}{c^2} \frac{[\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a})]}{R}$$

Appelons θ l'angle polaire entre l'accélération et la direction d'observation. On obtient:

$$|\vec{E}_{out}| = \frac{e}{c^2} \frac{\sin \theta}{R} |\vec{a}|$$

et

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta |\vec{a}|^2 \quad (I.7)$$

L'intégration dans tout l'espace de la puissance rayonnée conduit alors à la formule de Larmor

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\vec{a}|^2$$

(I.8)

La section efficace totale de diffusion s'obtient alors en injectant dans la relation précédente la valeur moyenne de l'accélération induite par le photon incident (I.1) et en normalisant au flux moyen d'énergie entrante

$$\sigma_T = \frac{\langle P \rangle}{\langle |\vec{S}_{in}| \rangle} = \left(\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle |\vec{a}|^2 \rangle \right) / \left(\frac{c}{4\pi} \frac{|E_0|^2}{2} \right) \quad (\text{I.9})$$

En utilisant la valeur moyenne de l'équation (I.1) on obtient l'expression de la section efficace de Thomson:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad (\text{I.10})$$

L'application numérique donne 0.665 *barn* pour les électrons et 0.197 μbarn pour les protons. A cause des approximations non relativistes la validité de cette expression est limitée aux très faibles impulsions de photons. Ceci correspond au domaine des grandes longueurs d'onde et explique la dépendance de la formule de Thomson en des paramètres globaux de la particule cible, la charge et la masse.

Le premier facteur de correction sera cinématique afin de prendre en compte l'effet de recul de la cible lors de la réaction. Dans le cadre de la cinématique relativiste à deux corps, le rapport des impulsions sortante et entrante de la charge donne en effet la relation bien connue de Compton

$$\frac{\omega'}{\omega} \Big|_{lab} = \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos \theta_{lab})} \quad (\text{I.11})$$

où θ_{lab} est l'angle de diffusion dans le laboratoire. L'écart à la section efficace Thomson sera donc croissant avec l'énergie ω et les grands angles de diffusion.

Le domaine de validité en énergie est intuitivement limité par l'échelle de masse de la particule cible. Ainsi la formule de Thomson est-elle appropriée pour la diffusion de rayons X par les électrons. Dans le cas du proton, le désaccord est déjà important autour de 100MeV, très en-dessous de l'énergie typique $m_p \simeq 1\text{GeV}$. La raison est la structure complexe du nucléon, totalement négligée dans l'approche précédente. En réalité, l'écart avec la diffusion Thomson va devenir important dès l'excitation des premières résonances du nucléon, c'est-à-dire pour une énergie de photon de l'ordre de la masse du méson $\pi(140\text{MeV})$.

La formule de Thomson apparaît ainsi comme le premier terme dans le développement de la section efficace sur l'énergie de photon. Pour augmenter le pouvoir descriptif du calcul, il faut bien-sûr étudier les ordres suivants. Dans le cas de la diffusion Compton sur un système composite, tel que le nucléon, la motivation sera de recueillir de l'information sur la structure interne.

I.1.2 Ordres supérieurs - Diffusion Rayleigh

Dans son article de 1954, F.E.Low [9] démontre le théorème de basse énergie suivant : dans le développement de l'amplitude de diffusion de photon par un système de spin $\frac{1}{2}$, les deux premiers termes s'expriment simplement en fonction des propriétés macroscopiques de la cible. L'ordre le plus bas redonne l'amplitude Thomson et ne dépend que de e et m . Le second terme est décrit par les trois paramètres e, m et le moment magnétique du système μ .

Pour comprendre comment se manifeste la structure interne de l'objet sondé dans les ordres supérieurs, il est très instructif de regarder la réponse d'une distribution classique de charge à une excitation électromagnétique.

Par une analyse de Fourier on peut toujours se ramener à des variations sinusoïdales dans le temps. On considère donc un champ incident dans la direction \vec{n}_0 avec un vecteur de polarisation $\vec{\epsilon}_0$

$$\begin{aligned}\vec{E}_{in} &= \vec{\epsilon}_0 E_0 e^{iq\vec{n}_0 \cdot \vec{x}} e^{-i\omega t}, & (q = \frac{\omega}{c}) \\ \vec{B}_{in} &= \vec{n}_0 \times \vec{E}_{in}\end{aligned}\quad (I.12)$$

Ce champ induit des variations des répartitions de charges et de courants dans le système cible qui se traduisent par l'apparition de multipôles oscillants. Dans un développement de basse énergie où les longueurs d'onde sont grandes en comparaison de la taille du système chargé, la contribution des moments *dipolaires* électrique \vec{d} et magnétique \vec{m} est dominante. Ces quantités sont définies classiquement par

$$\begin{aligned}\vec{d}(t) &= \vec{d} e^{-i\omega t} = \int \vec{x} \rho(x) d^3x e^{-i\omega t} \\ \vec{m}(t) &= \vec{m} e^{-i\omega t} = \frac{1}{2c} \int (\vec{x} \times \vec{J}) d^3x e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (I.13)$$

L'expression de $m(t)$ néglige un éventuel moment magnétique statique de la cible car la formule du champ rayonné ([8, p. 395] et [10, p. 248]) ne fait intervenir que les variations dans le temps des dipôles :

$$\vec{A} = \frac{1}{cR} (\dot{\vec{d}} + \dot{\vec{m}} \times \vec{n}) \quad (I.14)$$

Les contributions quadripolaires et au-delà sont négligées. Soit, d'après (I.3)

$$\begin{aligned}\vec{B}_{out} &= \frac{1}{c^2 R} \left[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + (\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) \times \vec{n} \right] \\ \vec{E}_{out} &= \frac{1}{c^2 R} \left[(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \times \vec{n} + \vec{n} \times \ddot{\vec{m}} \right]\end{aligned}\quad (I.15)$$

avec R distance de la source au point d'observation et \vec{n} vecteur unitaire associé.

La présence des dérivées secondes est due au fait qu'une charge ne rayonne que si elle

est accélérée. Dans le cas d'un mouvement uniforme, une transformation de Lorentz peut en effet toujours ramener le système au repos. D'après la formule (I.6) on obtient la puissance rayonnée par unité de temps et d'angle solide

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} \left[(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \times \vec{n} + \vec{n} \times \ddot{\vec{m}} \right]^2 \quad (\text{I.16})$$

Dans l'intégration sur tout l'espace le terme croisé ne contribue pas et les deux carrés conduisent à la même expression

$$P = \frac{2}{3c^3} \left(\ddot{\vec{d}}^2 + \ddot{\vec{m}}^2 \right) \quad (\text{I.17})$$

Le cas particulier d'une charge seule ($\vec{d} = e\vec{r}$) redonne la formule de Larmor (I.8). Dans notre cas, d et m sont des dipôles oscillants de pulsation ω créés par le champ extérieur (I.12). La dérivée seconde s'exprime donc simplement par

$$\ddot{\vec{d}}(t) = \vec{d} \frac{d^2}{dt^2} (e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \vec{d} \quad (\text{I.18})$$

avec la même relation pour \vec{m} . La formule de la puissance totale rayonnée devient alors

$$P = \frac{2}{3c^3} \omega^4 \left| \vec{d}^2 + \vec{m}^2 \right| \quad (\text{I.19})$$

La dépendance obtenue en ω^4 se retrouve dans la section efficace. Elle est connue sous le nom de *Loi de Rayleigh*. Cette loi, qui favorise la diffusion des fréquences les plus élevées, contribue à la couleur bleue du ciel, plus diffusée que le rouge.

Au niveau de l'amplitude totale de diffusion sur un système de spin 1/2 nous pouvons donc écrire maintenant le développement :

$$T_{tot} = T_{Thomson}^0(e, m) + \omega T^1(e, m, \mu) + \omega^2 T_{Rayleigh}^2 + \mathcal{O}(\omega^3) \quad (\text{I.20})$$

Les deux premiers termes sont donnés par le théorème de basse énergie. L'ordre suivant donne une dépendance en ω^4 (loi de Rayleigh) dans la section efficace qui contient le module carré de l'amplitude. Sa première manifestation sera cependant à l'ordre deux, via le terme croisé $\omega^2 T_{Thomson}^{0*}(e, m) T_{Rayleigh}^2$. Comme pour la puissance rayonnée (I.19), son expression sera paramétrisée par les dipôles électrique et magnétique induits dans le système cible.

I.1.3 Les observables polarisabilités

Donnons quelques images de la polarisation électrique d'un système composite. Pour une interprétation classique considérons tout d'abord le modèle simpliste d'une charge $(-e)$ placée dans une sphère de rayon r_0 uniformément chargée et de charge totale $(+e)$ (modèle de l'atome d'hydrogène de J.J. Thomson, 1904). Sous l'effet d'un champ extérieur statique \vec{E}_0 le système se polarise et évolue vers une position d'équilibre où la charge $(-e)$ est à une distance r du centre de la sphère (fig.I.2). Le moment dipolaire induit est proportionnel à \vec{E}_0

$$\vec{d}(t) = \alpha \vec{E}_0$$

et définit le coefficient α , la polarisabilité électrique. Le champ interne \vec{E}_{int} à un rayon $r < r_0$ est donné par le théorème de Gauss

$$\begin{aligned} \oint \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} &= 4\pi Q_{int} \quad (\text{unités de Gauss}) \\ \vec{E}_{int} &= \frac{e}{r_0^3} \vec{r} \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

L'équilibre s'écrit par la somme nulle des forces appliquées à l'électron

$$-\frac{e^2}{r_0^3} \vec{r} - e\vec{E}_0 = \vec{0}$$

Le champ \vec{E}_{int} agit donc comme une force de rappel $\vec{F} = -k\vec{r}$ avec la constante

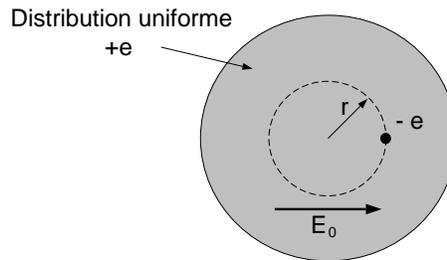


Figure I.2: Modèle simple d'un système polarisable.

de raideur $k = e^2/r_0^3$. Le moment dipolaire induit permet d'exprimer simplement la polarisabilité électrique α

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \alpha \vec{E}_0 = -e \vec{r} \\ \alpha &= \frac{e^2}{k} = r_0^3 \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

La quantité α varie donc comme l'inverse de la rigidité du système et prend, dans les unités de Gauss, la dimension d'un volume. L'unité expérimentale pour la mesure de

cette observable à l'échelle du nucléon est $10^{-4} fm^3$.

Cette vision classique de la polarisabilité est intuitive et montre la relation avec une caractéristique de la structure interne de la cible. Dans le cas d'un milieu microscopique comme le nucléon, la mécanique quantique nous permet de compléter cette interprétation. Soit H_0 l'hamiltonien du système dans son état fondamental, l'interaction entre le dipôle induit et le champ électrique introduit le terme supplémentaire

$$H_0 \rightarrow H_0 + W \quad W = -\vec{d} \cdot \vec{E}_0$$

La nature électromagnétique de cette interaction fait que W est faible comparé à H_0 , gouverné par l'interaction forte. La théorie des perturbations est donc applicable. Le développement au premier ordre de l'état propre du nucléon est

$$|N \rangle_{(\vec{E}_0)} = |N \rangle_0 + \sum_{N^* \neq N} |N^* \rangle \frac{\langle N^* | W | N \rangle_0}{E_N^0 - E_{N^*}^0} \quad (I.23)$$

$|N \rangle_0$ désigne l'état propre du système initial dans un niveau fondamental et $|N^* \rangle$ les états excités. E_N^0 et $E_{N^*}^0$ sont les énergies associées, non perturbées.

En choisissant un repère tel que \vec{E}_0 soit parallèle à O_z , $W = -d_z E_0$ et on obtient pour la valeur moyenne de l'opérateur dipolaire \vec{d}

$${}_{(\vec{E}_0)} \langle N | d_x | N \rangle_{(\vec{E}_0)} = {}_{(\vec{E}_0)} \langle N | d_y | N \rangle_{(\vec{E}_0)} = 0 \quad \text{par parité}$$

et

$$\begin{aligned} {}_{(\vec{E}_0)} \langle N | d_z | N \rangle_{(\vec{E}_0)} &= {}_0 \langle N | d_z | N \rangle_0 \\ &- \sum_{N^* \neq N} {}_0 \langle N | d_z | N^* \rangle \frac{\langle N^* | d_z E_0 | N \rangle_0}{E_N^0 - E_{N^*}^0} \\ &- \sum_{N^* \neq N} \langle N^* | d_z | N \rangle_0 \frac{{}_0 \langle N | d_z E_0 | N^* \rangle}{E_N^0 - E_{N^*}^0} \end{aligned}$$

d_z est un opérateur impair, sa moyenne sur la fonction d'onde paire $|N \rangle_0$ est donc nulle. Dans le reste de l'expression, le champ E_0 se factorise et le coefficient de proportionnalité donne

$$\alpha = 2 \sum_{N^* \neq N} \frac{|\langle N^* | d_z | N \rangle_0|^2}{E_{N^*}^0 - E_N^0} \quad (I.24)$$

Cette dernière expression montre qu'en mécanique quantique l'interprétation de la réaction de la cible n'est plus une déformation continue de la répartition de charge. La réponse à l'excitation électromagnétique est maintenant décomposée sur la base des états propres du nucléon. A travers la sommation sur tous ces états, l'observable

de polarisabilité est donc sensible à tout le spectre d'excitation du nucléon.

Le traitement de la polarisabilité magnétique β est analogue. Dans l'hamiltonien le terme de perturbation provient cette fois de l'interaction entre le moment magnétique $\vec{\mu}$ du système et le champ magnétique \vec{B}_0

$$H_0 \rightarrow H_0 + W \quad W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$$

L'alignement des dipôles magnétiques dans le champ \vec{B}_0 est similaire à celui des dipôles électriques suivant \vec{E}_0 et conduit à une formule de la polarisabilité identique à (I.24) dans laquelle μ_z remplace l'opérateur dipolaire d_z

$$\beta = 2 \sum_{N^* \neq N} \frac{|\langle N^* | \mu_z | N \rangle|^2}{E_{N^*}^0 - E_N^0} \quad (\text{I.25})$$

L'application d'un champ magnétique sur le système va également induire des courants qui, par la loi de Lenz, s'opposent à la perturbation. La polarisabilité β mesurée sera donc la somme de deux composantes, une paramagnétique (positive) et une diamagnétique (négative). Dans une approche non relativiste, une contribution supplémentaire proviendra également du terme de contact de la diffusion de photons ou "seagull" (fig. I.3 et Eq. I.54). La manifestation uniquement dans la polarisabilité

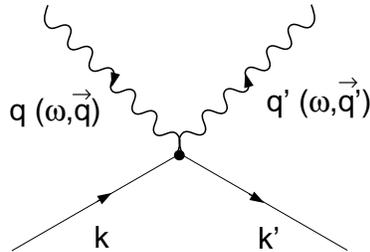


Figure I.3: Terme de contact de la diffusion Compton réelle.

magnétique s'explique par l'absence de composantes temporelles dans ce terme de contact (Eq. I.55) qui ne peut donc contribuer qu'au niveau des répartitions de courants et non de charges. Nous admettrons que cette contribution est diamagnétique. En pratique, l'extraction des termes de Rayleigh dans la section efficace de diffusion Compton ne donnera pas directement accès aux grandeurs α et β . Les illustrations précédentes décrivent en effet la réponse d'un milieu soumis à un champ *statique* ou du moins de longueur d'onde très grande devant la taille du système. Dans un tel champ, la structure interne du nucléon se polarise mais, contrairement à un système macroscopique, nous n'avons aucun moyen de mesurer la polarisation. La solution consiste à appliquer une excitation variable dans laquelle les distributions de charges et de

courants oscillent. D'après la section I.1.2, nous savons que l'accélération résultante va induire un rayonnement dont la probabilité d'émission contient une contribution de la polarisation suivant l'ordre 2 de la fréquence (Eq.I.20).

Avec une énergie croissante de photon la polarisation du nucléon devient donc détectable mais en même temps la longueur d'onde diminue et la variation du champ à l'intérieur du nucléon ne peut plus être négligée. Le caractère étendu de la cible apporte des termes correctifs, souvent appelés "de retard" par analogie avec les potentiels retardés qui prennent en compte la propagation de l'onde électromagnétique d'une source vers un point d'observation. La polarisabilité électrique mesurée $\bar{\alpha}$ devient ainsi la somme de la quantité *statique* α illustrée ci-dessus et des termes de corrections $\Delta\alpha$ [11] :

$$\bar{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha = \alpha + \frac{e^2}{3m_p} \langle r^2 \rangle \quad (\text{I.26})$$

où $\langle r^2 \rangle$ désigne le rayon carré moyen de la distribution de charge.

Par opposition à la quantité α , $\bar{\alpha}$ est qualifiée de polarisabilité *dynamique*. Elle constitue l'observable accessible expérimentalement. Pour comprendre la dépendance en $\langle r^2 \rangle$ des termes de correction, il suffit de développer le facteur de forme de la répartition de charge dans la limite de faible impulsion ¹

$$\begin{aligned} F(|\vec{q}|^2) &= \int \rho(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r \\ F(|\vec{q}|^2) &= 1 - \frac{1}{6} \vec{q}^2 \langle r^2 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

où $\rho(r)$ représente la densité de charge du proton avec la normalisation $\int \rho(r) d^3r = 1$ pour le proton. Le terme quadratique du facteur de forme est présent aux deux vertex électromagnétiques de la figure (I.1) et ajoute à la section efficace Thomson une contribution en $|\vec{q}|^2$. Cette contribution intervient donc au même ordre que l'interférence Thomson-Rayleigh et devient expérimentalement indiscernable de l'effet des polarisabilités statiques.

L'observable β reçoit une correction de retard similaire, proportionnelle au rayon carré moyen et diamagnétique :

$$\bar{\beta} = \beta - \Delta\beta_{\text{retard}} \quad (\text{I.28})$$

¹Le développement du facteur de forme en puissances de \vec{q}^2 est justifié par le caractère hors-couche de l'état intermédiaire de la diffusion Compton (fig. I.1). Pour une expérience sur cible fixe ($\vec{k}_{lab} = \vec{0}$) on aura par exemple pour le dénominateur du propagateur $(q+k)^2 - m^2 = 2m\omega \neq 0$. Il ne faut donc pas raisonner avec le facteur de forme élastique $G_E^p(Q^2)|_{Q^2=0} = 1$ qui n'est valide ici qu'à l'ordre 0 et qui enlèverait à l'interaction photon réel-nucléon toute sensibilité à la structure interne.

La notation “ β ” inclue ici la composante paramagnétique de l’alignement des dipôles magnétiques, la composante diamagnétique des boucles de courant et le terme de seagull.

Dans leur ensemble les effets de retard sont importants au niveau des observables et sont à prendre soigneusement en compte. Le recul global de la cible doit également être inclus pour les diffusions à grand angle mais le terme correctif $(\omega'/\omega)^2$ se factorise dans la section efficace sans modifier les polarisabilités.

L’expression de la section efficace différentielle [12] en fonction de l’angle θ de diffusion dans le laboratoire résume bien toutes les caractéristiques de la diffusion Compton :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right|_{lab} &= \frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} \\ &- \frac{e^2}{m} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \omega\omega' \left[\frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2} (1 + \cos \theta)^2 + \frac{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}{2} (1 - \cos \theta)^2 \right] + \mathcal{O}(\omega^4) \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

Le premier terme $d\sigma_0/d\Omega$ est la section efficace de Powell [13] qui décrit, dans le laboratoire, le processus sur un nucléon ponctuel de moment magnétique $(1 + \lambda)e\hbar/2mc$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} \right|_{lab} &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left\{ \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right] + \lambda \left[\left(\frac{2\omega\omega'}{m^2 c^4} \right) (1 - \cos \theta)^2 \right] \right. \\ &+ \lambda^2 \left[\left(\frac{\omega\omega'}{m^2 c^4} \right) \left(4(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)^2 \right) \right] \\ &+ \lambda^3 \left[\left(\frac{\omega\omega'}{m^2 c^4} \right) \left(2(1 - \cos \theta) + \sin^2 \theta \right) \right] \\ &\left. + \lambda^4 \left[\left(\frac{\omega\omega'}{2m^2 c^4} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

$\lambda = 1.79$ pour le proton. Le cas $\lambda = 0$ redonne la formule de Klein-Nishina [14] établie pour la diffusion photon-électron.

Il est intéressant de comparer les sections efficaces (I.29) et (I.30) avec le module carré de l’amplitude (I.20). Remarquons tout d’abord que la symétrie entre les états initial et final de la diffusion Compton réelle implique ici un développement simultané sur les puissances de ω et de ω' . L’ordre de chaque terme de l’expression (I.20) reste valable à condition de considérer le produit symétrique des impulsions des deux photons. A l’ordre zéro on retrouve la section efficace Thomson proportionnelle à $|T_{Thomson}^0(e, m)|^2$. Dans la section efficace non polarisée, la sommation sur les spins ne fait contribuer que les ordres pairs. Le terme suivant contient donc les deux contributions à l’ordre 2 :

(i) Le module carré $|T^1(e, m, \mu)|^2$ contenu dans la formule de Powell et qui, en accord avec le théorème de basse énergie [9], dépend uniquement de la charge, de la masse

et du moment magnétique.

(ii) L'interférence $T_{Thomson}^{0*}(e, m) T_{Rayleigh}^2$ qui constitue le deuxième terme de (I.29) et contient la première réponse de la structure interne du nucléon à une excitation électromagnétique, décrite par les deux observables de polarisabilités dynamiques $\bar{\alpha}$ (I.26) et $\bar{\beta}$ (I.28).

Les puissances impaires du développement interviennent dans les expériences avec faisceau et cible polarisés. De l'information supplémentaire sur la structure interne du nucléon est alors accessible par l'intermédiaire du terme d'ordre trois qui contient d'autres observables de polarisabilité. Cette parité de la section efficace ne sera plus valable dans le cas du VCS pour lequel la symétrie entre les deux photons n'existe plus.

I.1.4 Données expérimentales

La mesure de la diffusion Compton utilise les contraintes de la cinématique à deux corps. Le faisceau de photons est créé par bremsstrahlung d'un faisceau d'électrons d'énergie connue. Si le dispositif expérimental est équipé d'un système d'étiquetage du photon incident il suffit de connaître, dans l'état final, l'angle ou l'impulsion du photon ou du proton diffusé.

La validité du développement de la section efficace en puissances des impulsions de photons demande cependant de rester dans un domaine cinématique de basse énergie, c'est-à-dire loin de l'excitation de la première résonance du nucléon ($m_{\Delta} = 1232\text{MeV}$). Au delà de 100MeV d'énergie de photon les contributions des ordres supérieurs ne sont plus négligeables. Dans les expériences sur cible fixe d'hydrogène cela implique donc des impulsions de recul très faibles pour le proton, difficiles à mesurer précisément. C'est pourquoi la plupart des dispositifs expérimentaux [15, 16, 17] utilisent la méthode de détection de l'énergie du photon sortant à l'aide de cristaux de NaI qui donnent entre 1 et 3% de résolution. Les premières mesures des polarisabilités par Gol'danskii *et al.* [18] en 1960 et Baranov *et al.* [19] en 1975 ne disposaient pas de système d'étiquetage. La cinématique était alors contrainte par la détermination de l'angle *et* de l'énergie du photon sortant. L'étude du côté proton reste possible à condition de maximiser son impulsion en le détectant à l'avant. L'expérience de Zieger *et al.* [20] a utilisé cette technique en plaçant un spectromètre proton à 0 deg. La connaissance de l'angle et de l'impulsion du proton permet alors de s'affranchir de la signature du photon incident.

La dépendance angulaire de la section efficace (I.29) montre immédiatement que le choix du domaine en θ rend la mesure sensible à différentes combinaisons linéaire des

observables $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} + \bar{\beta} & \text{ à } \theta = 0 \\ \bar{\alpha} - \bar{\beta} & \text{ à } \theta = \pi \\ \bar{\alpha} & \text{ à } \theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{I.31}$$

La mesure de $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ à l'avant est particulièrement intéressante car elle est reliée à

Laboratoire	Energie (MeV)	Angles	$\bar{\alpha} + \bar{\beta}$	$\bar{\alpha} - \bar{\beta}$
Moscow [19]	70 – 110	90°, 150°	5.8 ± 3.3 ± 0.2	17.8 ± 2.0 ± 0.9
Illinois [15]	32 – 72	60°, 135°	15.8 ± 4.5 ± 0.1	11.9 ± 5.3 ± 0.2
Mainz [20]	98 – 132	180°	...	7.6 ± 2.9 ± 1.0
Saskatoon [16]	149 – 286	24°, 135°	12.1 ± 1.7 ± 0.9	7.9 ± 1.4 ± 2.0
Sask./Illin. [17]	70 – 148	90°, 135°	15.0 ± 3.1 ± 0.4	10.8 ± 1.8 ± 1.0

Tableau I.1: Résumé des mesures des polarisabilités dans les unités $10^{-4} fm^3$. La première erreur indiquée combine les erreurs statistiques et systématiques tandis que la seconde est une estimation de l'incertitude introduite par le modèle utilisé pour l'extraction des observables.

une règle de somme démontrée par Migdal [21] Baldin [22]

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \sigma_{tot}(\omega)\tag{I.32}$$

La section efficace d'absorption totale σ_{tot} donne donc une contrainte sur les observables de polarisabilités qui permet de compléter ou de vérifier l'analyse de la diffusion Compton. La valeur communément utilisée [23, 24] est

$$(\bar{\alpha} + \bar{\beta})_{proton} = 14.2 \pm 0.5 \cdot 10^{-4} fm^3\tag{I.33}$$

Le tableau (I.1) est tiré de la référence la plus récente [17] sur la mesure des polarisabilités et rassemble les principaux résultats expérimentaux. Les zones correspondantes du plan $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$ sont représentées fig.I.4. La combinaison de toutes les données, contrainte par la règle de somme de Baldin (I.32), donne la moyenne globale suivante

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} & = (12.1 \pm 0.8 \pm 0.5) \cdot 10^{-4} fm^3 \\ \bar{\beta} & = (2.1 \mp 0.8 \mp 0.5) \cdot 10^{-4} fm^3\end{aligned}\tag{I.34}$$

La première barre d'erreur représente l'incertitude systématique et statistique de la mesure, la seconde dépend du modèle utilisé pour extraire les observables.

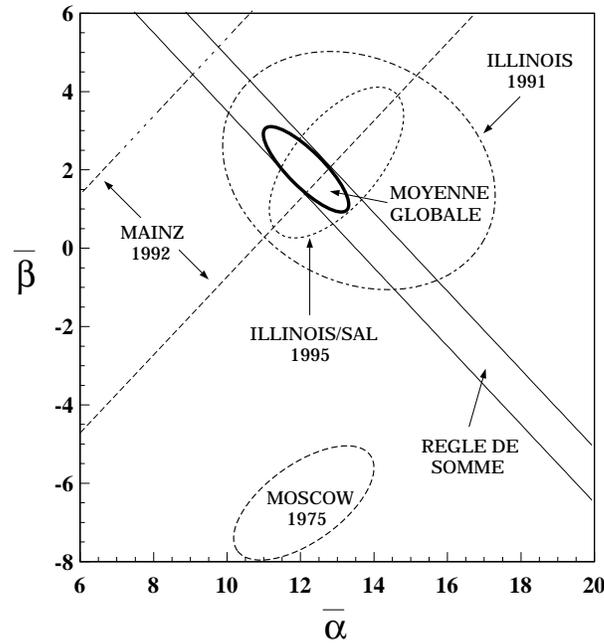


Figure I.4: Image des mesures des polarisabilités dans le plan $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$. La contrainte de la règle de somme de Baldin est utilisée dans le cumul de toute la statistique. L'expérience (Moscow 1975) n'a pas été prise en compte dans la moyenne globale mais elle affecte peu le résultat final.

I.1.5 Modèles et prédictions théoriques

Les polarisabilités du nucléon ont motivé de nombreux calculs dans le cadre de modèles très différents les uns des autres. Le but de ce paragraphe est de faire ressortir les mérites et les limitations spécifiques de chaque approche.

Modèle de quarks non relativiste

Les degrés de liberté fondamentaux de ce modèle sont les quarks constituants, plongés dans le potentiel confinant d'un oscillateur harmonique. Ces quarks sont massifs et sont à distinguer des quarks légers du modèle des partons. Dans les années 1970 ce modèle connaît un grand succès dû à son impressionnant accord avec toute la spectroscopie des hadrons observés expérimentalement. Des améliorations ont ensuite été apportés par Isgur et Karl [25]. Dans l'approximation $m_u \simeq m_d$ le modèle n'a que trois paramètres qui sont la masse m_q des quarks constituants, l'énergie $\hbar\omega$ de l'oscillateur harmonique et la constante de structure fine chromomagnétique α_s . Les relations avec certaines grandeurs expérimentales permettent de fixer ces paramètres:

- \mathbf{m}_q : On rappelle l'expression du moment magnétique du proton

$$\mu_p = (1 + \kappa) \frac{e\hbar}{2m_p}$$

avec $\kappa = 1.79$ le moment anormal. Dans le cadre du modèle, μ apparaît comme la somme des moments magnétiques élémentaires des trois quarks de spin $S = 1/2$:

$$\vec{\mu}_p = \sum_{i=1}^3 \mu_i \vec{\sigma}_i, \quad \mu_i = \frac{e_i \hbar}{2m_q} \quad \text{et} \quad \vec{S}_i = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_i$$

L'égalité des deux expressions implique $m_q = m_p/2.79$ et fixe ainsi la masse des quarks à $m_q \simeq 336$ MeV.

- α_s : L'oscillateur harmonique confinant ne sépare pas les niveaux du nucléon N et de la résonance $\Delta(1232)$. La levée de cette dégénérescence nécessite l'ajout d'un terme d'interaction hyperfine spin-spin qui contient en facteur α_s . La valeur de cette constante est ajustée afin de reproduire l'écart en masse entre N et $\Delta(1232)$ (fig.I.5).
- $\hbar\omega$: La première transition électrique $E1$ du nucléon connecte $\hbar\omega$ avec les résonances $N^{*(-)}$ de parité négative. L'illustration de la figure (I.5) montre que $\hbar\omega$ doit alors correspondre à la différence de masse entre le niveau fondamental et la moyenne des premières $N^{*(-)}$. On obtient [26] $\hbar\omega \simeq 500$ MeV.

Le rayon carré moyen du nucléon est relié à l'énergie de l'oscillateur par

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\hbar}{(m_q \omega)}, \quad \text{soit} \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} \simeq 0.48 fm$$

L'application numérique est environ deux fois inférieure à la valeur expérimentale. Ce désaccord montre les limitations du modèle. Si $\hbar\omega$ est ajusté pour décrire le rayon de charge, la spectroscopie devient inexate.

On peut noter que dans ce modèle le rayon de charge du neutron est nul et implique l'absence de corrections de retard dans les polarisabilités.

Le calcul des polarisabilités est une application directe des formules (I.24) à (I.28) :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= 2 \sum_{N^*} \frac{|\langle N | d_z | N^* \rangle|^2}{m_{N^*} - m_N} + \sum_{i=1}^3 \frac{e_i^2 \langle r_i^2 \rangle}{3m_p} \\ &= 2 \frac{e^2 \langle r^2 \rangle}{3\hbar\omega} + \sum_{i=1}^3 \frac{e_i^2 \langle r_i^2 \rangle}{3m_p} \end{aligned}$$

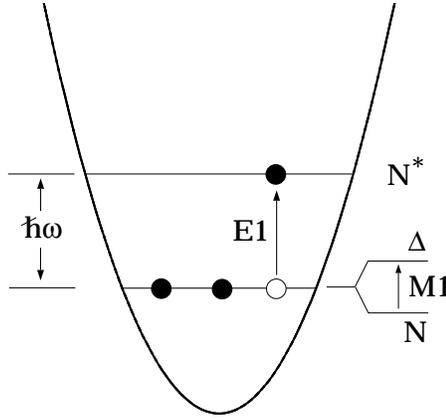


Figure I.5: Excitations du nucléon dans le modèle de quarks non relativiste.

$$\begin{aligned}
 \bar{\beta} &= \beta - \beta_{retard} \\
 &= 2 \frac{|\langle N | \mu_z | \Delta \rangle|^2}{m_\Delta - m_N} - \underbrace{\frac{\langle (\sum e_i \vec{r}_i)^2 \rangle}{2m_p}}_{seagull} - \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{e_i^2 \langle r_i^2 \rangle}{6m_{q_i}}}_{retard} \\
 &= 2 \frac{e^2 \left| \frac{2\sqrt{2}}{3} \mu_p \right|^2}{m_\Delta - m_N} - \frac{\langle (\sum e_i \vec{r}_i)^2 \rangle}{2m_p} - \sum_{i=1}^3 \frac{e_i^2 \langle r_i^2 \rangle}{6m_{q_i}}
 \end{aligned}$$

Les applications numériques dans le système d'unité de Gauss donnent:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 4.4 & \Delta\alpha &= 1.2 & \bar{\alpha} &= 6.6 & (10^{-4} \text{ fm}^3) \\
 \beta &= 7.3 & \Delta\beta &= -3.3 & \bar{\beta} &= 4.0 & (10^{-4} \text{ fm}^3)
 \end{aligned}$$

D'autres exemples de calculs des polarisabilités du nucléon avec le modèle de quarks non relativiste se trouvent dans les références [27] et [28]. Un ajustement de l'énergie de l'oscillateur harmonique pourrait améliorer la comparaison théorie-expérience (Eqs.I.34) via la dépendance en $\langle r^2 \rangle$ du terme de correction mais nous avons vu que cela serait au détriment de la spectroscopie.

Dans un modèle de quarks, la polarisabilité β traduit l'alignement du moment magnétique $\vec{\mu}$ de chaque quark dans la direction du champ extérieur \vec{B} . La nature de l'interaction est semblable à l'orientation d'un aimant dans un champ magnétique ($E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$) et donne une contribution purement paramagnétique. Nous verrons dans la suite de ce paragraphe que la vision du proton en quarks constituants n'est pas complète à basse énergie et nécessite l'introduction de nouveaux degrés de liberté: les mésons π . L'existence de boucles de pions chargés dans le nucléon fait alors apparaître un comportement comparable à des boucles de courants qui suivent la loi de Lentz. Au niveau de la polarisabilité β ceci se traduit par une importante composante diamagnétique.

Les polarisabilités mettent ainsi en évidence la principale limitation du modèle de quarks, l'absence du nuage de pions.

Modèle chirale de quarks

Le rôle privilégié des pions provient d'une propriété fondamentale de QCD, non respectée dans le modèle de quarks précédent : la symétrie chirale. Cette symétrie est présente au niveau du lagrangien de la théorie qui reste invariant sous les transformations vectorielles et axiales :

$$\begin{aligned}\psi &\xrightarrow{V} e^{i\alpha_a\tau^a/2}\psi \\ \psi &\xrightarrow{A} e^{i\gamma_5\beta_a\tau^a/2}\psi\end{aligned}$$

Les matrices τ^a sont les générateurs du groupe d'isospin SU(2). α_a et β_a sont les angles de rotations associés.

La réalisation de ces symétries au niveau des états propres de QCD impliquerait une dégénérescence du spectre des particules observées. Or nous savons que seule la symétrie vectorielle se manifeste par une classification des hadrons en multiplets. Le scénario de la symétrie chirale est une brisure spontanée par le vide de la théorie. Une direction privilégiée apparaît ainsi dans l'espace des rotations axiales bien que les autres directions ne soient en aucune sorte moins favorables. La connexion entre ces états équivalents se fait à énergie constante par l'intermédiaire de modes de masse nulle appelés "bosons de Goldstone" [29]. A chaque générateur du groupe d'isospin axial correspond un tel boson, dont les nombres quantiques sont ceux des mésons pseudo-scalaires π^-, π^0, π^+ . Cette identification se justifie par la très faible masse de ces particules par rapport aux autres mésons.

L'approche des modèles hybrides de sacs chiraux (Cloudy bag [30], chiral bag [31])

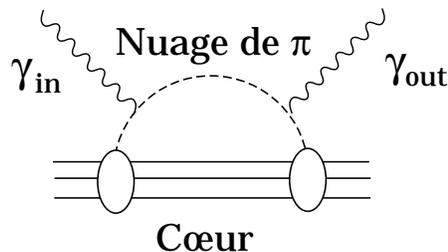


Figure I.6: Contribution du nuage de pion à la diffusion Compton.

est une tentative d'unification entre la vision du nucléon en trois quarks constituants et ces degrés de libertés plus collectifs que constituent les pions. Le point de départ

est un lagrangien effectif décrivant les quarks de valence confinés dans un potentiel ad hoc et interagissant avec le champ de pion. La description du nucléon devient alors celle d'un cœur de quarks entouré d'un nuage de pions (fig. I.6).

Dans la diffusion de photons sur le nucléon, le couplage électromagnétique se fait aussi bien sur les quarks que sur les pions chargés du nuage. Le calcul des polarisabilités met en évidence une contribution importante du nuage de pions dans la réponse à une excitation électromagnétique. L'intérêt des modèles de sacs chiraux réside dans cette nouvelle information mais celle-ci reste cependant qualitative car le couplage pion-quark est traité perturbativement, généralement dans l'approximation linéaire, et la forte contribution du champ de pion met en doute l'omission des ordres supérieurs. Pour un rayon du cœur de quarks de $0.6 fm$, R.Weiner et W.Weise [32] obtiennent une polarisabilité électrique du proton $\alpha_p = (7 - 9) 10^{-4} fm^3$, dont la moitié provient du nuage de pions, et une polarisabilité magnétique $\beta_p \leq 2 10^{-4} fm^3$, dominée par l'alignement du spin des quarks dans la transition $N - \Delta(1232)$.

Solitons chiraux

Les solitons chiraux sont à l'opposé des modèles de quarks dans le sens où le degré de liberté dominant est le mode collectif des pions. La variable élémentaire est le champ chiral

$$U(x) = \exp[i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)/f_\pi] \quad (I.35)$$

exprimé en termes du champ de pion $\vec{\pi}$ où la flèche dénote le caractère isovectoriel. f_π désigne la constante de désintégration du pion et sa valeur expérimentale [33] est 92.4 MeV. Le terme de premier ordre dans le lagrangien effectif de basse énergie est indépendant de tout modèle et s'écrit

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [\partial_\mu U(x) \partial^\mu U^\dagger(x)] \quad (I.36)$$

Le couplage dérivatif conduit à une interaction nulle à la limite d'énergie nulle. Ceci contraste avec l'interaction entre quarks et gluons qui est forte à basse énergie. L'utilisation du champ chiral équivaut à une sommation sur tous les degrés de liberté internes et permet ainsi un développement en puissances de l'impulsion qui est à la base de la théorie des perturbation chirales.

Les termes suivants du lagrangien impliquent les mésons vecteurs qui interviennent comme les premières excitations dipolaires du vide de QCD. Dans cette approche, les baryons sont des solitons topologiques, c'est-à-dire des solutions localisées et stables des équations non linéaires des champs de pions. Le premier modèle fut proposé par

Skyrme [34] en 1961. La référence [35] décrit les développements plus récents.

La vision du nucléon qui en ressort est à nouveau un cœur baryonique entouré d'un nuage de pions. Le calcul des polarisabilités [36, 37, 38] montre l'effet dominant des interactions électromagnétiques avec les pions chargés. L'imprécision sur certains paramètres théoriques d'entrée donne l'intervalle $\alpha \simeq (1.0 - 1.4) \cdot 10^{-3} fm^3$. La polarisabilité paramagnétique provient de la transition $N \rightarrow \Delta$,

$$\beta_{para} = \frac{4e^2}{m_\Delta - m_N} \left(\frac{\mu_v}{2m_p} \right)^2 \quad (I.37)$$

avec le moment magnétique $\mu_v = (\mu_p - \mu_n)/2 = 2.353$.

Comme énoncé précédemment, l'application d'un champ magnétique extérieur modifie le courant porté par les pions produisant, suivant la loi de Lentz, un champ opposé. Ceci se traduit par une grande composante diamagnétique dont le calcul donne

$$\beta_{dia} = -\frac{1}{2} \alpha \quad (I.38)$$

La polarisabilité magnétique totale est petite comparée à α , en accord avec les résultats expérimentaux. Cependant, la prise en compte des corrections de retard altère la comparaison entre les valeurs absolues prédites et mesurées.

Théorie des perturbations chirales

La théorie des perturbations chirales permet, à basse énergie, un traitement rigoureux des degrés de liberté des mésons π sous la forme d'un développement systématique en puissances des impulsions et du paramètre $\mu = m_\pi/m_p \simeq 0.15$. Le premier terme du lagrangien est celui de l'équation (I.36). Un calcul récent [39] a été mené à l'ordre d'une

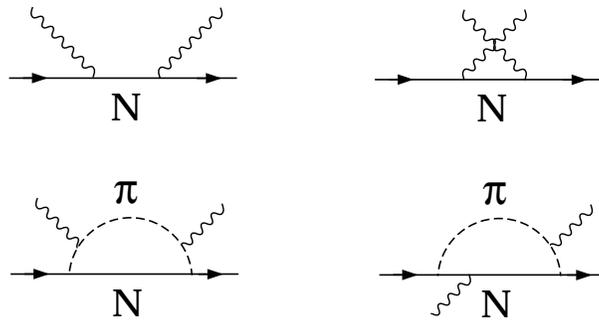


Figure I.7: Exemples de diagrammes de diffusion Compton associés au développement à l'ordre 1 des perturbations chirales.

boucle de pion (fig. I.7) et donne pour les polarisabilités électrique et magnétique du proton :

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_p &= \frac{e^2 g_{\pi N}^2}{192\pi^3 m^3} \left[\frac{5\pi}{2\mu} + 18 (\ln \mu + 1) + \mathcal{O}(\mu) \right] \simeq 8 \cdot 10^{-4} \text{ fm}^3 \\ \bar{\beta}_p &= \frac{e^2 g_{\pi N}^2}{192\pi^3 m^3} \left[\frac{\pi}{4\mu} + 18 \ln \mu + 30 + \mathcal{O}(\mu) \right] \simeq -2.3 \cdot 10^{-4} \text{ fm}^3\end{aligned}$$

La valeur négative de β_p montre la nécessité de l'introduction de la résonance $\Delta(1232)$ pour compléter la vision “ nuage de pions ” des perturbations chirales. Dans le cadre de l'ajout phénoménologique des contributions Δ [40], un bon accord avec les polarisabilités expérimentales est obtenu. De récents travaux [41] ont exploré une approche plus rigoureuse dans laquelle $\Delta(1232)$ est traitée explicitement comme un nouveau degré de liberté de la théorie et conduit à un développement supplémentaire suivant le paramètre $(M_\Delta - M_N) \ll M_N$. Le calcul des contributions de la résonance conduit à des effets bien plus importants que ceux de l'approche phénoménologique et supprime le bon accord avec l'expérience.

Conclusion

Ce survol des principales tentatives de description des polarisabilités du nucléon met en évidence le rôle important du nuage de pions dans la réponse à une excitation électromagnétique. La partie paramagnétique de l'observable $\bar{\beta}$ associée à la structure en quark (résonance $\Delta(1232)$) apparaît ainsi compensée pour une grande partie par la contre-réaction diamagnétique des courants de pions.

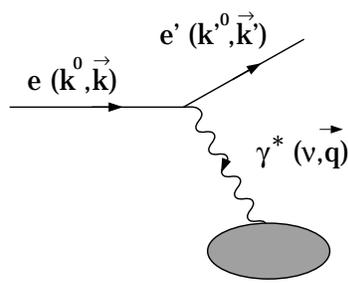
D'une manière générale, un accord satisfaisant avec les données n'a pas encore été obtenu et ceci renforce l'intérêt du travail expérimental et théorique dans ce domaine.

I.2 Diffusion Compton virtuelle

I.2.1 Généralisation du processus Compton

L'interaction électromagnétique entre deux particules chargées est décrite au premier ordre par l'échange d'un seul photon virtuel. L'existence de ce photon est limitée dans l'espace et le temps par les inégalités d'Heisenberg ce qui justifie son qualificatif de virtuel. La figure ci-dessous montre la cinématique dans le cas de la diffusion d'électrons ultra-relativistes. Une propriété remarquable du photon virtuel est sa masse non nulle qui implique la possibilité d'une polarisation longitudinale du photon c'est-à-dire un

état d'hélicité nulle avec un champ électrique parallèle à la direction de propagation de la particule.



$$\begin{aligned}\nu &= k^0 - k'^0 \\ \vec{q} &= \vec{k} - \vec{k}'\end{aligned}$$

Masses invariante du photon virtuel:

$$\begin{aligned}Q^2 &= -q^2 = -\nu^2 + |\vec{q}|^2 \\ Q^2 &= 4k^0 k'^0 \sin^2 \frac{\theta_e^{lab}}{2} \quad (m_e \ll |\vec{k}|)\end{aligned}$$

Le sujet de cette thèse est l'extension de la diffusion Compton sur le proton dans le cas où le photon incident est virtuel. Expérimentalement la diffusion Compton virtuelle est accessible par l'électroproduction de photon $p(e, e'p)\gamma$ illustrée fig.I.8. Le cœur du processus est mis en évidence par le cadre pointillé. Les quadri-vecteurs des particules impliquées définissent trois invariants relativistes que nous utiliserons souvent par la suite :

$Q^2 = -q^2$, la masse invariante du photon-virtuel.

$s = (p + q)^2 = (p' + q')^2$, l'énergie disponible dans le système proton-photon.

$t = (q - q')^2$ le transfert au proton.

Le centre de masse (CM) est le référentiel défini par : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{p}' + \vec{q}' = \vec{0}$.

Nous nous intéressons ici à la région de basse énergie caractérisée par une valeur de

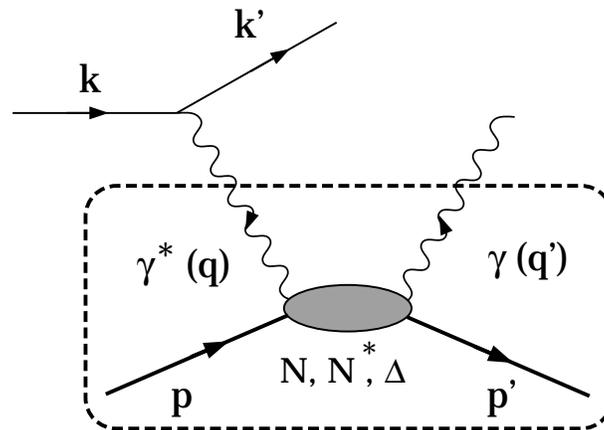


Figure I.8: Graphe de la diffusion Compton virtuelle.

\sqrt{s} inférieure au seuil de production de π^0 ($m_p < \sqrt{s} < m_p + m_\pi$). L'intérêt de cette

cinématique est l'extraction, indépendante de tout modèle, de nouvelles informations sur la structure interne du nucléon.

Par rapport à la diffusion Compton réelle, le degré de liberté supplémentaire du photon virtuel brise la symétrie état initial- état final et oblige à une analyse différente. L'idée est ici de développer la section efficace en fonction de l'impulsion q' du photon final. Le théorème de Low [42] pour le rayonnement à basse énergie par des particules chargées montre que les deux premiers termes du développement sont connus. Le troisième, équivalent du terme de Rayleigh, contient les premiers effets non triviaux dus à la structure du nucléon. Il sont paramétrisés par de nouvelles observables appelées les *polarisabilités généralisées*. En comparaison des polarisabilités α et β définies dans la diffusion Compton réelle, ces nouvelles quantités gardent toujours une sensibilité à tout le spectre de QCD (I.24) mais prennent en plus une dépendance en Q^2 .

L'apport de cette évolution en Q^2 est semblable à celui de l'étude des facteurs de forme qui permet de passer des caractéristiques globales de charge et de moment magnétique aux distributions de charge et de courant dans le volume du nucléon. La nouvelle vision que le VCS apporte ici est complémentaire dans le sens où les polarisabilités généralisées renvoient une image de la dynamique de ces répartitions internes.

Le premier calcul de l'amplitude de diffusion Compton virtuelle est dû à R.A. Berg et Lindner [43]. Le formalisme des polarisabilités généralisées, qui constitue le cadre théorique de notre expérience, a été développé par P.A.M. Guichon *et al.* [7]. A MAMI, nous mesurons pour la première fois les observables de polarisation à $Q^2 = 0.33 \text{ GeV}^2$ grâce à la détermination précise de sections efficaces absolues. Le processus VCS sur le proton a déjà été mis en évidence par l'expérience NE18 au SLAC [44] mais l'analyse de l'effet observé est restée qualitative.

I.2.2 Cinématique de la réaction

Nous avons vu dans la section précédente sur la diffusion Compton réelle que l'échelle d'énergie validant un développement de la section efficace en puissances de l'impulsion de photon était $E = m_\pi \simeq 140 \text{ MeV}$. Cette gamme d'énergie assure ainsi une contribution faible des ordres supérieurs, au-delà du terme de Rayleigh.

Le choix de rester sous le seuil de production de pions fixe la borne supérieure en impulsion et simplifie grandement la description du processus. En effet, en limitant l'énergie disponible dans le centre de masse de la réaction sous la masse du méson le plus léger, $m_p < \sqrt{s} < m_p + m_\pi$, les résonances dans l'état intermédiaire (fig.I.8) ne peuvent pas décroître dans les canaux nucléon-mésons. Le seul état final possible est proton-photon(s) ce qui supprime tous les problèmes de corrections des interactions

hadroniques dans l'état final. Les résonances du proton contribuent donc aux observables de polarisabilité via la sommation sur les états intermédiaires (I.24) mais elles ne sont excitées que virtuellement.

Je consacrerai le reste de ce paragraphe à la définition des principales variables cinématiques. Les notations reliées à chacune des particules sont résumées dans le tableau (I.2). La présence de cinq particules, deux entrantes et trois sortantes, dans la réaction

	e^- inc.	e^- sort.	γ virt.	p inc.	p sort.	γ réel
4-vecteur	k	k'	q	p	p'	q'
hélicité ou spin	h	h'	λ	σ	σ'	λ'
	$(\pm 1/2)$	$(\pm 1/2)$	$(-1, 0, +1)$	$(\pm 1/2)$	$(\pm 1/2)$	$(-1, +1)$
masse	$m_e \ll \vec{k} $	$m_e \ll \vec{k}' $	$-Q^2$	m_p	m_p	0

Tableau I.2: Notations adoptées pour chaque particule. La composante énergie d'un 4-vecteur v sera indicée v^0 et son impulsion notée \vec{v} .

de diffusion Compton virtuelle implique a priori 20 paramètres pour décrire toutes les composantes des quadri-vecteurs. Différentes considérations permettent cependant de réduire considérablement le nombre d'inconnues :

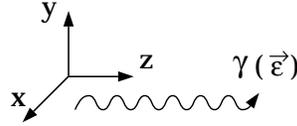
- La connaissance de la masse physique relie l'énergie et l'impulsion ce qui ne laisse que trois composantes libres pour chaque 4-vecteur.
- L'expérience est réalisée avec un faisceau d'électrons incident de direction connue sur une cible fixe d'hydrogène liquide. La seule variable de l'état initial est donc l'énergie de l'électron. Avec les trois impulsions des particules sortantes il reste donc 10 paramètres.
- Les 4 équations de conservation de l'énergie-impulsion donnent 4 relations supplémentaires.

Le choix de 6 variables indépendantes suffit donc à contraindre entièrement la cinématique de la réaction. En l'absence de polarisation de la cible ou du faisceau, la physique possède de plus une symétrie par rapport à l'angle ϕ entre un plan de référence et le plan de la diffusion de l'électron (fig. I.9) qui ramène le nombre de paramètres à 5. Leur répartition est la suivante :

- **Caractérisation de la partie leptonique**

Toute la cinématique des électrons incidents et diffusés ainsi que celle du photon virtuel est déterminée par les énergies k^0 et k'^0 et l'angle de diffusion θ_e . Ce jeu de variables a l'avantage d'utiliser des quantités définies dans le référentiel

du laboratoire (fig.I.9) et facilement accessibles. Le choix n'est cependant pas unique et des bijections vers d'autres ensembles de variables définies dans le centre de masse tels que (Q^2, s, ϵ) ou $(q, q', \epsilon)_{CM}$ sont possibles. ϵ est le taux de polarisation linéaire dans le plan transverse du photon virtuel. Il est défini à partir des composantes transverses du vecteur de polarisation [45].



$$\epsilon = \frac{\epsilon_x^2 - \epsilon_y^2}{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}$$

Les équations suivantes explicitent les relations avec k, k' et θ_ϵ :

$$\begin{aligned} \nu &= k_{lab}^0 - k'_{lab}{}^0 \simeq |\vec{k}|_{lab} - |\vec{k}'|_{lab} \\ \vec{q}_{lab} &= \vec{k}_{lab} - \vec{k}'_{lab} \\ Q^2 &= 4 |\vec{k}|_{lab} |\vec{k}'|_{lab} \sin^2 \frac{\theta_\epsilon^{lab}}{2} \\ &= -(s + m_p^2) + 2\sqrt{s} \sqrt{m_p^2 + q^2} \\ s &= (p + q)^2 = m_p^2 - Q^2 + 2 m_p \nu \\ &= (p' + q')^2 = m_p^2 + 2q' \sqrt{m_p^2 + q'^2} + 2q'^2 \\ \epsilon &= \frac{1}{1 + 2 \frac{|\vec{q}'|_{lab}^2}{Q^2} \tan^2 \frac{\theta_\epsilon^{lab}}{2}} \end{aligned} \quad (I.39)$$

Pour montrer l'équivalence entre (Q^2, s) et (q, q') il suffit de réécrire l'énergie s dans le centre de masse d'une réaction à deux corps généralisée par $1+2 \rightarrow 3+4$. Dans le CM on a

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= p^0(3) + p^0(4) \\ s &= p^{02}(3) + p^{02}(4) + 2 p^0(3)p^0(4) \\ &= 2 \vec{p}^2(3) + \vec{p}^2(4) + m_3^2 + m_4^2 + 2 p^0(3) \sqrt{s} - 2 p^{02}(3) \end{aligned}$$

Ce qui, en utilisant $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ se réduit à la formule très utile

$$p^0(3) = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2 \sqrt{s}} \quad (CM) \quad (I.40)$$

Un calcul identique peut être mené pour $p^0(1), p^0(2)$ ou $p^0(4)$ et s'applique immédiatement au cas du VCS :

$q^0 = \frac{s-Q^2-m_p^2}{2\sqrt{s}}$	$ \vec{q} = \sqrt{Q^2 + q^{02}}$	(CM)
$q'^0 = \frac{s-m_p^2}{2\sqrt{s}}$	$ \vec{q}' = q'^0$	
$p^0 = \frac{s+Q^2+m_p^2}{2\sqrt{s}}$	$ \vec{p} = \vec{q} $	
$p'^0 = \frac{s+m_p^2}{2\sqrt{s}}$	$ \vec{p}' = \vec{q}' $	

- **Caractérisation de la partie hadronique**

La définition de la partie leptonique fixe toutes les variables “d’entrée” de la réaction. Pour la diffusion photon-proton, les seuls degrés de liberté encore disponibles sont les angles. On définit donc l’angle polaire $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ dans le centre de masse entre le photon virtuel incident et le photon réel diffusé et l’angle φ entre les deux plans de réaction illustrés sur la (fig.I.9). $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ et φ complètent l’ensemble des 5 paramètres. La cinématique de la réaction est ainsi entièrement contrainte par l’un des trois ensembles équivalents suivants :

$$\begin{pmatrix} k^{lab} \\ k'^{lab} \\ \theta_e^{lab} \\ \theta_{\gamma\gamma}^{cm} \\ \varphi \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} Q^2 \\ s \\ \epsilon \\ \theta_{\gamma\gamma}^{cm} \\ \varphi \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} q \\ q' \\ \epsilon \\ \theta_{\gamma\gamma}^{cm} \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (I.41)$$

Le jeu de paramètres incluant l’impulsion du photon final q' est le plus utilisé puisque près du seuil q' est faible et permet un développement limité de l’amplitude.

La transformation de Lorentz qui relie le référentiel du laboratoire à celui du centre de masse est caractérisée par le vecteur de la vitesse relative $\vec{\beta}$ et le facteur γ associé

$$\begin{aligned} \vec{\beta} &= \frac{\vec{p}_{tot}}{E_{tot}} = \frac{\vec{q}_{lab}}{\nu + m_p} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_{tot}}{\sqrt{s}} = \frac{\nu_{lab} + m_p}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

Le “Boost” de Lorentz est donc orienté suivant l’impulsion du photon virtuel ce qui provoque une concentration de l’espace de phase de l’état final autour de cette direction.

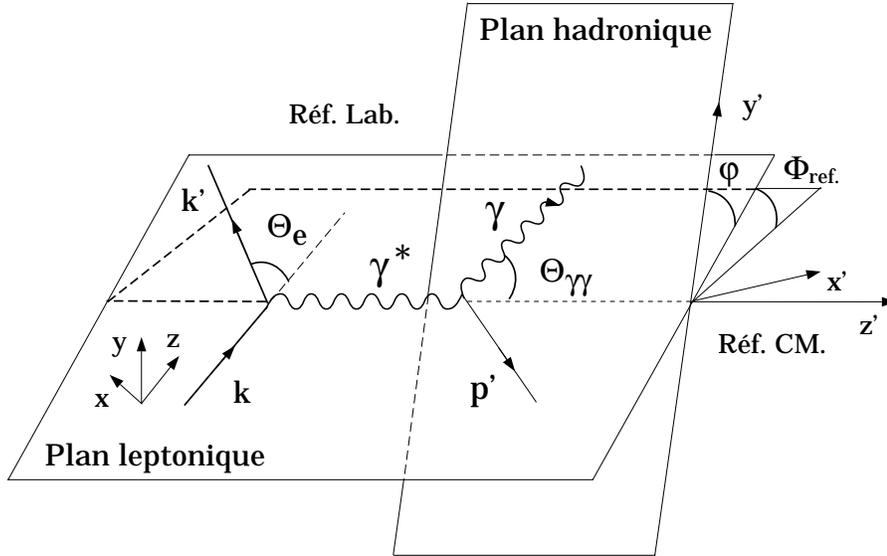


Figure I.9: Plans de diffusion leptonique et hadronique et leurs repères associés.

I.2.3 Développement de la section efficace VCS en puissances de q'

A présent que toutes les variables pertinentes de la réaction ont été définies, revenons à l'expression de la section efficace du processus sous la forme d'un développement en puissances de q' . Ce travail théorique est publié en détail dans l'article de P.A.M. Guichon *et al.* [7] et je me contenterai ici de retracer les principaux arguments qui nous amènent jusqu'à la définition des polarisabilités généralisées.

En l'absence d'électrons ou de protons polarisés, l'expression générale de la section efficace est

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{-5}}{32 \sqrt{(p \cdot k)^2 - m_p^2 m_e^2}} \delta^4(p + k - p' - k' - q') \mathcal{M} \frac{d^3 \vec{k}' d^3 \vec{p}' d^3 \vec{q}'}{k'^0 p'^0 q'^0} \quad (\text{I.42})$$

avec \mathcal{M} le module carré de l'amplitude de transition $T^{ee'\gamma}$ sommé sur les spins finals et moyenné sur les initiaux

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4} \sum_{\sigma \sigma' h' \lambda'} |T^{ee'\gamma}|^2 \quad (\text{I.43})$$

L'approximation ultrarelativiste pour l'électron ($m_e \simeq 0$) implique la conservation de l'hélicité, $h = h'$. Le flux d'électrons incidents ainsi que la densité de nucléons dans la cible sont pris en compte dans le facteur de flux. Enfin, l'intégration sur l'espace de phase utilise la normalisation des états

$$\langle p|p' \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

En pratique l'expérience est effectuée en détectant en coïncidence l'électron et le proton diffusé et en signant la présence du photon final par une masse manquante nulle. La section efficace cinq fois différentielle correspondante est alors

$$\frac{d\sigma_{lab}}{d|\vec{k}'|_{lab}d\Omega_{k'_{lab}}d\Omega_{p'_{c.m.}}} = \frac{(2\pi)^{-5}}{64 m_p} \frac{k'_{lab}}{k_{lab}} \frac{s - m_p^2}{s} \mathcal{M} \quad (\text{I.44})$$

La figure I.10 illustre le fait que, dans l'état final, le photon peut provenir soit de la ligne leptonique soit de la ligne hadronique. Le premier cas est décrit par l'amplitude de Bethe-Heitler alors que le second correspond à la diffusion Compton virtuelle sur le proton. Expérimentalement les deux cinématiques sont indiscernables et la section efficace totale mesurée contient donc le carré de la somme cohérente des deux processus.

L'amplitude de Bethe-Heitler et la contribution du nucléon dans l'état intermédiaire

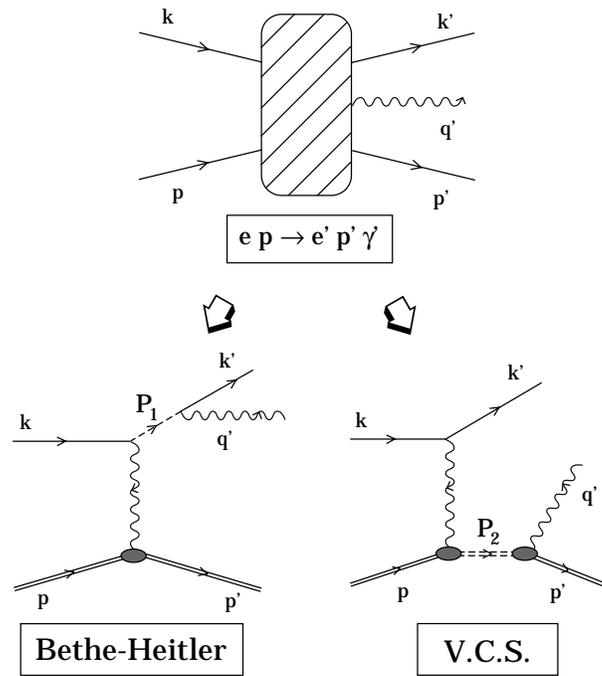


Figure I.10: L'amplitude de l'électroproduction de photon est la somme cohérente des deux processus Bethe-Heitler et VCS. Les deux diagrammes "croisés" avec couplage du photon réel sur les lignes entrantes ne sont pas représentés.

du VCS apportent une singularité dans le développement en q' de l'amplitude. Cette divergence associée à l'émission de photons mous est bien connue sous le nom de "catastrophe infra-rouge" et est détaillée dans le chapitre IV de cette thèse. D'une manière générale, la présence d'une singularité provient de la propagation d'un état intermédiaire sur couche. Dans le cas de l'amplitude VCS, la cinématique sous le

seuil de production du méson π interdit le passage sur couche des états autres que le nucléon. L'écriture des propagateurs P_1 et P_2 de la figure I.10 illustre le comportement en q' :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\not{k}' + \not{q}' - m_e}{(k' + q')^2 - m_e^2} \propto \frac{1}{2 k' \cdot q'} \\ P_2 &= \frac{\not{p}' + \not{q}' - M}{(p' + q')^2 - M^2} \Big|_{M=m_p} \propto \frac{1}{2 p' \cdot q'} \end{aligned}$$

Le graphe de la diffusion Compton réelle (fig. I.1) contient le même type de propagateur mais la symétrie entre l'état final et l'état initial fait apparaître une compensation au numérateur. La limite d'énergie nulle reste donc finie et tend vers l'amplitude classique de Thomson.

La première étape du traitement de l'amplitude totale Bethe-Heitler+VCS consiste à isoler la partie singulière qui, d'après ce qui précède, se décompose en deux termes :

- T_{BH} , l'amplitude de Bethe-Heitler qui décrit l'émission du photon final par un électron.
- T_{Born} , la contribution du nucléon dans l'état intermédiaire du VCS.

Afin qu'il soit par lui-même invariant de jauge, le terme de *Born* regroupe en plus la contribution de l'anti-nucléon. Toutes les autres contributions, correspondant aux états excités du nucléon, sont regroupées dans le terme $T_{NonBorn}$, par construction régulier en q' et invariant de jauge. L'amplitude totale se réécrit ainsi

$$T^{\epsilon\epsilon'\gamma} = T_{BH} + T_{Born} + T_{NonBorn} \quad (\text{I.45})$$

L'intérêt de cette séparation réside dans la connaissance complète de $BH + Born$ à partir de la théorie de l'électrodynamique quantique (QED) et des facteurs de forme élastiques du proton. Dans la partie *Born*, même si le nucléon intermédiaire peut se propager hors-couche les vertex hadroniques sont en effet toujours décrits avec les facteurs élastiques. La contribution hors-couche du facteur de forme est rejetée dans le terme *NonBorn*². La figure (I.11) illustre un calcul numérique [46] des contributions BH et Born avec $(q, q', \epsilon, \varphi)$ fixés et $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ variable. Les facteurs de forme utilisés proviennent d'ajustements sur les données les plus récentes [47, 48]. On remarque la structure du terme BH, très piquée aux deux angles correspondant à l'émission du photon réel dans les directions des électrons incident et diffusé (les "oreilles de chats"). Ce

²Cette séparation est une convention. On peut admettre des effets hors couche dans le terme de Born s'ils sont invariants de jauge. Cela revient à redéfinir les polarisabilités.

phénomène dit de “peaking” est discuté dans la section (IV.2.2). L’information recherchée sur la structure interne du nucléon est, par définition, concentrée dans le terme NonBorn et va se manifester par une déviation par rapport à la courbe BH+Born. Nous pouvons donc déjà conclure que la région expérimentalement propice est celle des angles arrières, loin des directions des électrons, où la contribution relative du rayonnement du proton est la plus importante.

Dans le développement de la partie régulière $T_{NonBorn}$ le premier terme est a priori

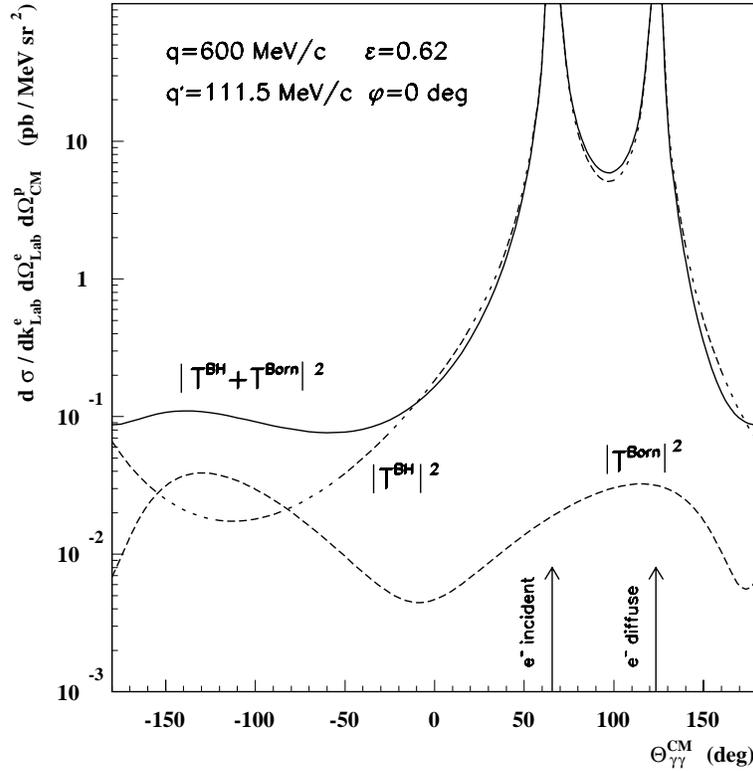


Figure I.11: Les contributions de $|T^{BH}|^2$ (tirets), $|T^{Born}|^2$ (pointillés) et de leur somme cohérente $|T^{BH+Born}|^2$ (trait plein) sont représentés en échelle logarithmique en fonction de $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$. L’exemple de cinématique choisi a été mesuré à MAMI (Cf. section III.2).

d’ordre 0 en q' . Le théorème de Low montre cependant que la contrainte d’invariance de jauge annule ce premier coefficient. La dépendance en q' de l’amplitude totale s’écrit donc sous la forme

$$T^{ee'\gamma} = \underbrace{\frac{a_{-1}}{q'} + a_0 + a_1 q' + \dots}_{T_{BH+Born}} + \underbrace{a_1^{NB} q' + \dots}_{T_{NonBorn}} \quad (I.46)$$

Les coefficients des deux premiers ordres, a_{-1} et a_0 , sont déterminés par QED et les facteurs de forme élastiques. La première manifestation des états excités du nucléon apparaît dans le troisième terme qui comprend une partie connue a_1 et une

partie non triviale a_1^{NB} paramétrisée par les polarisabilités généralisées. Ceci constitue une application du théorème de Low à la diffusion Compton virtuelle dans le sens où les deux premiers ordres du développement de l'amplitude ne dépendent que de caractéristiques connues du nucléon et que le troisième terme contient de nouveaux renseignements sur la structure interne. En raison de la virtualité du photon incident la charge et le moment magnétique anormal sont remplacés par les facteurs de forme élastiques du proton.

Le prochain paragraphe est consacré à la définition des nouvelles observables qui paramétrisent l'équivalent du terme de Rayleigh et à leur connexion avec la limite de la diffusion Compton réelle.

1.2.4 Décomposition en ondes partielles de l'amplitude T_{NonBorn}

L'idée directrice dans la définition des polarisabilités généralisées telle qu'elle est présentée dans l'article de P.A.M. Guichon *et al.* est de concentrer toute la dépendance angulaire et de spin dans des fonctions connues en décomposant la partie hadronique NonBorn de l'amplitude sur la base des harmoniques sphériques. La limite de basse énergie de cette décomposition équivaut ensuite à ne retenir que les termes dominants, c'est-à-dire linéaires en q' .

On a pour l'amplitude Non-Born

$$T_{NB} = \epsilon'_\mu{}^* H_{NB}^{\mu\nu} \epsilon_\nu$$

où ϵ_ν et $\epsilon'_\mu{}^*$ sont respectivement les vecteurs polarisation des photons incident et sortant et $H_{NB}^{\mu\nu}$ le tenseur hadronique. On utilise une base d'harmoniques sphériques *vectorielles* définies par

$$\vec{y}_M^{Ll}(\hat{k}) = \sum_{\lambda\mu} \langle l \lambda, 1 \mu | L M \rangle Y_\lambda^l(\hat{k}) \vec{e}(\mu)$$

Pour le développement en multipôles, on définit les vecteurs magnétique, électrique et longitudinal par les combinaisons linéaires suivantes

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_M^L &= \vec{y}_M^{LL} \\ \vec{\mathcal{E}}_M^L &= \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \vec{y}_M^{L, L-1} + \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \vec{y}_M^{L, L+1} \\ \vec{\mathcal{L}}_M^L &= \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \vec{y}_M^{L, L-1} - \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \vec{y}_M^{L, L+1} \end{aligned}$$

Ces vecteurs vérifient les propriétés

$$\vec{\mathcal{M}}_M^L(\hat{k}) = \frac{\vec{L}_k Y_M^L(\hat{k})}{\sqrt{L(L+1)}}, \quad \vec{\mathcal{E}}_M^L = -i\hat{k} \times \vec{\mathcal{M}}_M^L(\hat{k}), \quad \vec{\mathcal{L}}_M^L = \hat{k} Y_M^L(\hat{k}) \quad (I.47)$$

où $\vec{L}_k = -i\vec{k} \times \vec{\nabla}_k$ est le moment angulaire par rapport à \vec{k} . Les relations (I.47) montrent immédiatement que les vecteurs électrique et magnétique sont transverses à \vec{k} et s'annulent quand $L = 0$. Un choix naturel pour les 4 vecteurs de base $V^\mu(\rho LM, \hat{k})$ est alors

$$\begin{aligned} V^\mu(0LM, \hat{k}) &= \begin{pmatrix} Y_M^L(\hat{k}) \\ \vec{0} \end{pmatrix}, & V^\mu(3LM, \hat{k}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\mathcal{L}}_M^L(\hat{k}) \end{pmatrix}, \\ V^\mu(1LM, \hat{k}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\mathcal{M}}_M^L(\hat{k}) \end{pmatrix}, & V^\mu(2LM, \hat{k}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\mathcal{E}}_M^L(\hat{k}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec les relations habituelles de fermeture et d'orthogonalité.

L'invariance de jauge

$$q_\mu H_{NB}^{\mu\nu}(q'\sigma', q\sigma) = H_{NB}^{\mu\nu}(q'\sigma', q\sigma) q'_\nu = 0$$

impose des relations entre certains multipôles qui, par conséquent, ne sont plus indépendants les uns des autres. Il est possible notamment d'exprimer les multipôles avec $\rho = 3$ en fonction de ceux avec $\rho = 0$. Ceci permet de se restreindre à une base de trois quadrivecteurs :

$$\begin{aligned} W^\mu(\rho LM, \hat{k}) &= V^\mu(\rho LM, \hat{k}) \quad \rho = 1, 2 \\ W^\mu(0LM, \hat{k}) &= V^\mu(0LM, \hat{k}) + \frac{k^0}{|\vec{k}|} V^\mu(3LM, \hat{k}) \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

Le développement en ondes partielles est alors automatiquement invariant de jauge et s'écrit

$$\begin{aligned} H_{NB}^{\mu\nu}(q'\sigma', q\sigma) &= 4\pi\mathcal{N} \sum g_{\rho'\rho'} W^\mu(\rho' L' M', \hat{q}') H_{NB}^{\rho' L' M', \rho LM}(q'\sigma', q\sigma) \\ &\quad \times g_{\rho\rho} W^{\nu*}(\rho LM, \hat{q}) \end{aligned}$$

où $(L, M), (L', M')$ sont respectivement les moments angulaires totaux et leurs projections du photon initial et final. La sommation concerne toutes les valeurs possibles de ces 4 variables alors que ρ et ρ' sont maintenant limités à 0, 1 ou 2. La dénomination des multipôles est fixée par la valeur de ρ :

$\rho = 0$: type charge ou longitudinal, $\rho = 1$: type magnétique, $\rho = 2$: type électrique. Une analyse angulaire complète permet ensuite de factoriser toute la dépendance en spin et en angle dans des coefficients de Clebsch-Gordan pour faire apparaître des multipôles réduits, fonctions uniquement de q et q'

$$\begin{aligned} H_{NB}^{\rho' L' M', \rho LM}(q'\sigma', q\sigma) &= (-1)^{\frac{1}{2} + \sigma' + L + M} \sum_{S_s} \langle \frac{1}{2} - \sigma', \frac{1}{2} \sigma | S s \rangle \\ &\quad \times \langle L' M', L - M | S s \rangle H_{NB}^{(\rho' L', \rho L)S}(q', q) \end{aligned}$$

Le moment S traduit le retournement possible ($S = 1$) ou non ($S = 0$) du spin du nucléon lors de la transition. Les symétries de parité et de conservation du moment angulaire conduisent aux règles de sélection

$$\begin{aligned} (-1)^{\rho+L} &= (-1)^{\rho'+L'}, \quad \rho, \rho' = 0, 1, 2 \\ S &= 0, 1 \quad |L - L'| \leq S \leq L + L' \end{aligned}$$

De plus le photon réel ne peut être que transverse ce qui supprime le cas $\rho' = 0$. Dans la limite basse énergie on peut montrer [49] que les multipôles se comportent comme $q^{L'}$. Or la structure interne du nucléon intervient à partir du troisième terme, d'ordre q^1 , dans le développement de l'amplitude. On ne retient donc que les composantes $L' = 1$ du terme NonBorn. Le tableau (I.3) résume les nombres quantiques possibles pour les multipôles respectant ces règles de sélections.

Nous voyons ainsi que 10 multipôles sont a priori nécessaires pour décrire le compor-

ρ'	ρ	L	S	Multipôles (γ', γ^*)	Notations $H_{NB}^{(\rho'L', \rho L)S}$
1	0	0, 2	1	(M1, L0), (M1, L2)	$H_{NB}^{(11,00)1}$, $H_{NB}^{(11,02)1}$
	2	2	1	(M1, E2)	$H_{NB}^{(11,22)1}$
	1	1	0, 1	(M1, M1)	$H_{NB}^{(11,11)0}$, $H_{NB}^{(11,11)1}$
2	0	1	0, 1	(E1, L1)	$H_{NB}^{(21,01)0}$, $H_{NB}^{(21,01)1}$
	2	1	0, 1	(E1, E1)	$H_{NB}^{(21,21)0}$, $H_{NB}^{(21,21)1}$
	1	2	1	(E1, M2)	$H_{NB}^{(21,12)1}$

Tableau I.3: Nombres quantiques permis pour les multipôles du terme NonBorn à l'ordre q' .

tement à basse énergie de l'amplitude VCS. Au premier ordre en q' , les multipôles avec $\rho, \rho' = 2$ s'expriment en fonction de nouveaux multipôles avec $\rho, \rho' = 0$. Si on introduit la notion de multipôle mixte

$$\hat{H}_{NB}^{(\rho'L'M', \rho LM)} = (4\pi\mathcal{N})^{-1} \int d\hat{q} d\hat{q}' V_\mu(\rho'L'M', \hat{q}') H_{NB}^{\mu i} [\mathcal{Y}_M^{L L+1}(\hat{q}')]^i$$

les polarisabilités généralisées sont définies par

$$P^{(\rho'L', \rho L)S}(q) = \left(\frac{1}{q^{L'} q^L} H_{NB}^{(\rho'L', \rho L)S}(q', q) \right)_{q'=0}, \quad \rho', \rho = 0, 1. \quad (\text{I.49})$$

$$\hat{P}^{(\rho'L', L)S}(q) = \left(\frac{1}{q^{L'} q^{L+1}} \hat{H}_{NB}^{(\rho'L', L)S}(q', q) \right)_{q'=0}, \quad \rho = 2, \rho' = 0, 1. \quad (\text{I.50})$$

La liste des 10 observables se répartit alors en 3 quantités scalaires, indépendantes du spin

$$P^{(01,01)0}, \quad P^{(11,11)0}, \quad \hat{P}^{(01,1)0}$$

et 7 fonctions dépendantes du spin

$$P^{(01,01)1}, \quad P^{(11,11)1}, \quad P^{(01,12)1}, \quad P^{(11,02)1} \\ P^{(11,00)1}, \quad \hat{P}^{(01,1)1}, \quad \hat{P}^{(11,2)1}$$

L'application combinée des symétries de “crossing”³ et de conjugaison de charge, propriétés fondamentales de la matrice S, permet de mettre en évidence des relations supplémentaires entre les polarisabilités généralisées. Dans le cas de la diffusion Compton virtuelle, l'ensemble des deux transformations redonne en effet le même processus $p(e, e'p')\gamma$ [43] et conduit à l'égalité des deux amplitudes suivantes du VCS :

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}(q, q', p, p') = \mathcal{M}^{\mu\nu}(q, q', -p', -p)$$

où les quadrivecteurs (q, q', p, p') réfèrent aux notations de la figure (I.8). L'implication de cette contrainte sur les polarisabilités est calculée dans [50] et conduit aux 4 relations :

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{\frac{3}{2}} P^{(01,01)0}(q) + \sqrt{\frac{3}{8}} P^{(11,11)0}(q) + \frac{3q^2}{2\tilde{q}_0} \hat{P}^{(01,1)0}(q), & (I.51) \\ 0 &= P^{(11,11)1}(q) + \sqrt{\frac{3}{2}}\tilde{q}_0 P^{(11,02)1}(q) + \sqrt{\frac{5}{2}}q^2 \hat{P}^{(11,2)1}(q), \\ 0 &= 2\tilde{q}_0 P^{(01,01)1}(q) + 2\frac{q^2}{\tilde{q}_0} P^{(11,11)1}(q) - \sqrt{2}q^2 P^{(01,12)1}(q) \\ &\quad + \sqrt{6}q^2 \hat{P}^{(01,1)1}(q), \\ 0 &= 3\frac{q^2}{\tilde{q}_0} P^{(01,01)1}(q) - \sqrt{3} P^{(11,00)1}(q) - \sqrt{\frac{3}{2}}q^2 P^{(11,02)1}(q) \end{aligned}$$

ce qui réduit à 6 le nombre d'observables indépendantes.

Lorsque $Q^2 \rightarrow 0$ il est souhaitable de retrouver les quantités mesurées avec des photons réels . Ceci n'est pas évident a priori car l'approche du point d'énergie nulle diffère fortement entre le VCS et le Compton réel. Une illustration de la trajectoire suivie dans le plan (q, q') est donnée figure (I.12). Dans le centre de masse de la réaction, le Compton réel vérifie toujours $q=q'$ alors que pour le VCS la limite $q' \rightarrow 0$ est atteinte avec un q arbitraire fixe. Lorsque $\vec{q}' = \vec{0}$ le photon virtuel a pour énergie

$$\tilde{q}^0 = m - \sqrt{(m^2 + \tilde{q}^2)} \simeq -\frac{\tilde{q}^2}{2m} \quad (I.52)$$

³L'opération de crossing échange une particule en son anti-particule, avec le quadrivecteur opposé.

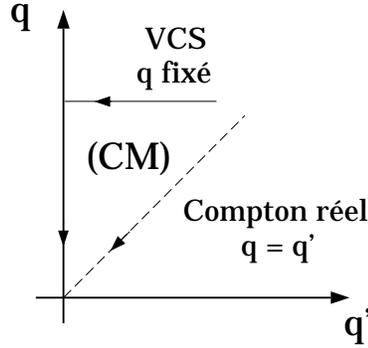


Figure I.12: Cinématiques de la limite $\vec{q}' \rightarrow \vec{0}$ dans le centre de masse de la diffusion Compton réelle et du VCS.

Les observables $P^{(\rho'L',\rho L)S}$ et $\hat{P}^{(\rho'L',L)S}$ (Eq. I.49, I.50) ont été définies pour que la limite $|\vec{q}'| \rightarrow \vec{0}$ soit indépendante de la trajectoire suivie dans le plan (q, q') .

$P^{(01,01)0}(Q^2)$ et $P^{(11,11)0}(Q^2)$ sont particulièrement intéressantes car elles généralisent les polarisabilités réelles α et β au cas du photon virtuel avec les relations :

$$P^{(01,01)0}(0) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\alpha}{e^2} \right) \quad , \quad P^{(11,11)0}(0) = -\sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{\beta}{e^2} \right) \quad (\text{I.53})$$

Elles sont supposées apporter une contribution dominante au terme NonBorn. Dans l'écriture (I.53), e^2 doit être considérée comme la notation de la constante de structure fine. Les relations restent donc indépendantes du système d'unité (annexe A.2) en adoptant les mêmes conventions pour le numérateur et le dénominateur.

Le point essentiel dans cette étude du terme NonBorn est l'absence de tout modèle dans la définition des polarisabilités généralisées. La seule méthode utilisée est l'analyse multipolaire complète du terme linéaire en q' .

La section suivante est consacrée à une très brève présentation des différentes approches théoriques effectuées récemment pour évaluer ces observables.

I.2.5 Modèles théoriques

Peu de calculs des polarisabilités généralisées sont publiés à l'heure actuelle. L'approche est comparable à celle de la diffusion Compton réelle (section I.1.5) avec les deux visions du nucléon que constituent les modèles de quarks et les modèles chiraux.

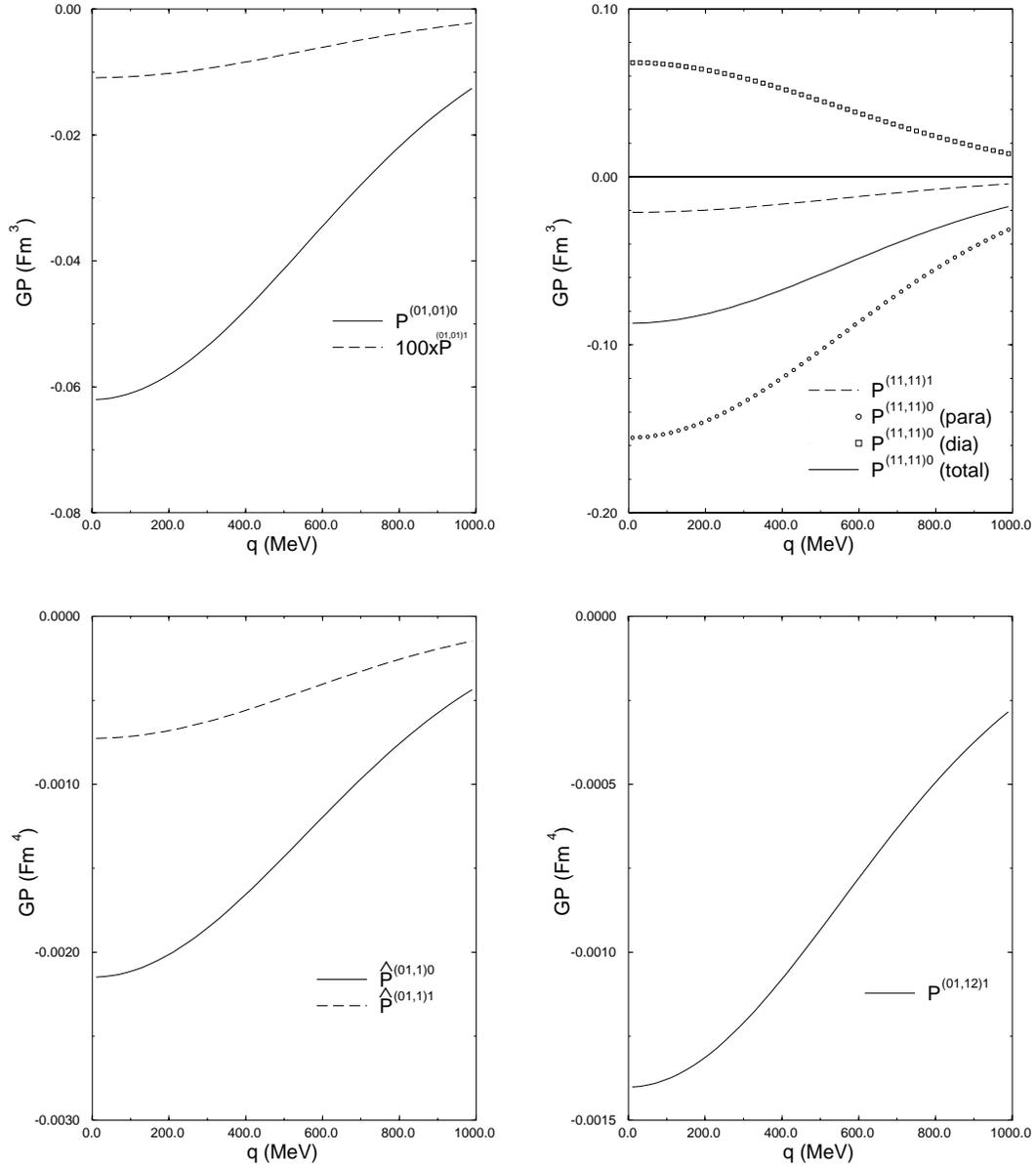


Figure I.13: Polarisabilités généralisées dans le modèle de quarks non relativiste [7]. Les polarisabilités réelles $\alpha(0)$ et $\beta(0)$ s'obtiennent   l'aide des relations (I.53) avec $e^2 = 1/137$.

Modèle de quarks non relativiste

Une première estimation des polarisabilités généralisées a été calculée par G.Q. Liu *et al.* [7] dans le cadre d'un modèle de quarks non relativiste (NRQM). L'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H_{NRQM} = \sum_n -\frac{(\vec{\nabla}_n)^2}{2m_q} + V(\vec{r}_n)$$

où m_q est la masse des quarks constituants et $(\vec{r}_n, -i \vec{\nabla}_n)$ respectivement la position et l'impulsion du quark n . L'interaction avec le photon se met sous la forme :

$$V(\vec{r}) = \int d\vec{r}' \left[A_\mu(\vec{r}') J_h^\mu(\vec{r}') + \frac{1}{2} A_\mu(\vec{r}') A_\nu(\vec{r}') S^{\mu\nu}(\vec{r}') \right] \quad (\text{I.54})$$

avec $A_\mu(\vec{r})$ champ du photon et

$$J^0(\vec{r}) = \sum_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n), \quad (\text{I.55})$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sum_n \frac{q_n}{2m_q} \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \left(\frac{\vec{\nabla}_n}{i} - \vec{\sigma}_n \times \vec{\nabla}_n \right) - \left(\frac{\vec{\nabla}_n}{i} - \vec{\sigma}_n \times \vec{\nabla}_n \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right],$$

$$S^{ij}(\vec{r}) = \sum_n \frac{q_n^2}{m_q} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \delta(i, j), \quad (i, j) = (1, 2, 3)$$

$$S^{0\mu} = S^{\mu 0} = 0$$

Le tenseur $S^{\mu\nu}$ correspond au terme de contact ou "Seagull" (fig.I.3).

Les approximations de ce modèle sont l'omission des termes de recul (nucléon statique) et l'absence de déformation du nucléon (qui implique $\hat{P}^{(11,2)1} = 0$). Dans le cas d'un photon final de type magnétique, les seules résonances accessibles par une transition magnétique dipolaire M1 sont P11 (N^*) et P33 (Δ). Le faible taux de décroissance de la résonance N^* dans le canal (N, γ) laisse $\Delta(1232)$ comme seule contribution. De plus, la densité de charge non relativiste (Eq. I.55) étant indépendante du spin, elle ne peut pas connecter le nucléon et la $\Delta(1232)$. Il en résulte que les transitions de type charge ($\rho = 0$) vers magnétique ($\rho' = 1$) ne sont pas possibles, c'est-à-dire que $P^{(11,00)1} = P^{(11,02)1} = 0$.

Il reste donc 7 polarisabilités non nulles dont l'évolution en fonction de q est illustrée figure (I.13). Pour $P^{(11,11)1}$, généralisation de la susceptibilité magnétique β , les contributions paramagnétique du Δ et diamagnétique du terme de seagull sont montrées séparément.

D'une manière générale, ces résultats permettent de fixer l'ordre de grandeur de l'effet des polarisabilités dans la section efficace expérimentale (fig.I.15). Le non respect de

symétries fondamentales telles que l'invariance relativiste et la chiralité est cependant inscrit dans la construction du modèle et limite le pouvoir de prédiction. Ceci explique l'écart relativement important entre les valeurs expérimentales des polarisabilités réelles et le calcul de $\alpha(q)$ et $\beta(q)$ dans la limite $q \rightarrow 0$ (tableau I.4).

Lagrangien effectif

Le calcul des polarisabilités dans le cadre d'un lagrangien effectif (ELM) constitue une approche phénoménologique du problème. Le principe consiste à évaluer la contribution du terme *Non-Born* dans l'amplitude totale de la réaction $p(e, e'p)\gamma$ par une somme de diagrammes de Feynman contenant les états intermédiaires dominants.

Le modèle élaboré par M.Vanderhaeghen [46] considère tous les processus de la figure (I.14), dans un formalisme relativiste. Les graphes (e) et (f) donnent la contribution, dans l'état intermédiaire du VCS, de la résonance $\Delta(1232)$ et des principales résonances de la seconde région : P11(1440), D13(1520), S11(1535), S13(1620), S11(1650) et D33(1700). Les couplages des résonances sont ajustés sur les données expérimentales de décroissance $N\gamma$.

Les diagrammes (g) et (h) traitent l'échange de mésons π^0 et σ (deux pions corrélés avec $I = J = 0$) dans la voie t . Le couplage au nucléon est issu du potentiel de Bonn [51] et celui au photon s'obtient à partir des mesures $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

L'ajustement de tous les paramètres du modèle sur des valeurs expérimentales assure une description proche de la réalité à condition de prendre en compte tous les processus dominants. Une limitation provient du fait que les mesures de décroissance $N\gamma$ ne donnent accès qu'à des couplages avec un photon sur couche. Un autre effet concerne la contribution de l'état intermédiaire $\pi - N$ non résonant (onde s) qui est généralement importante près du seuil, mais son inclusion nécessiterait un calcul complet à une boucle.

Ces considérations peuvent expliquer le désaccord encore présent pour $\alpha(0)$ par rapport à la valeur expérimentale de la polarisabilité réelle (tableau I.4).

Modèle sigma linéaire

Un calcul complémentaire des polarisabilités généralisées a été mené, à l'ordre d'une boucle, par A. Metz et D. Drechsel [52] sur la base du modèle sigma linéaire (LSM) défini par la densité de lagrangien [53] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i \not{\partial} - m_N)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi} \cdot \partial^\mu\vec{\pi} - \frac{1}{2}m_\pi^2\vec{\pi}^2 - g_{\pi N} \bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\psi \end{aligned}$$

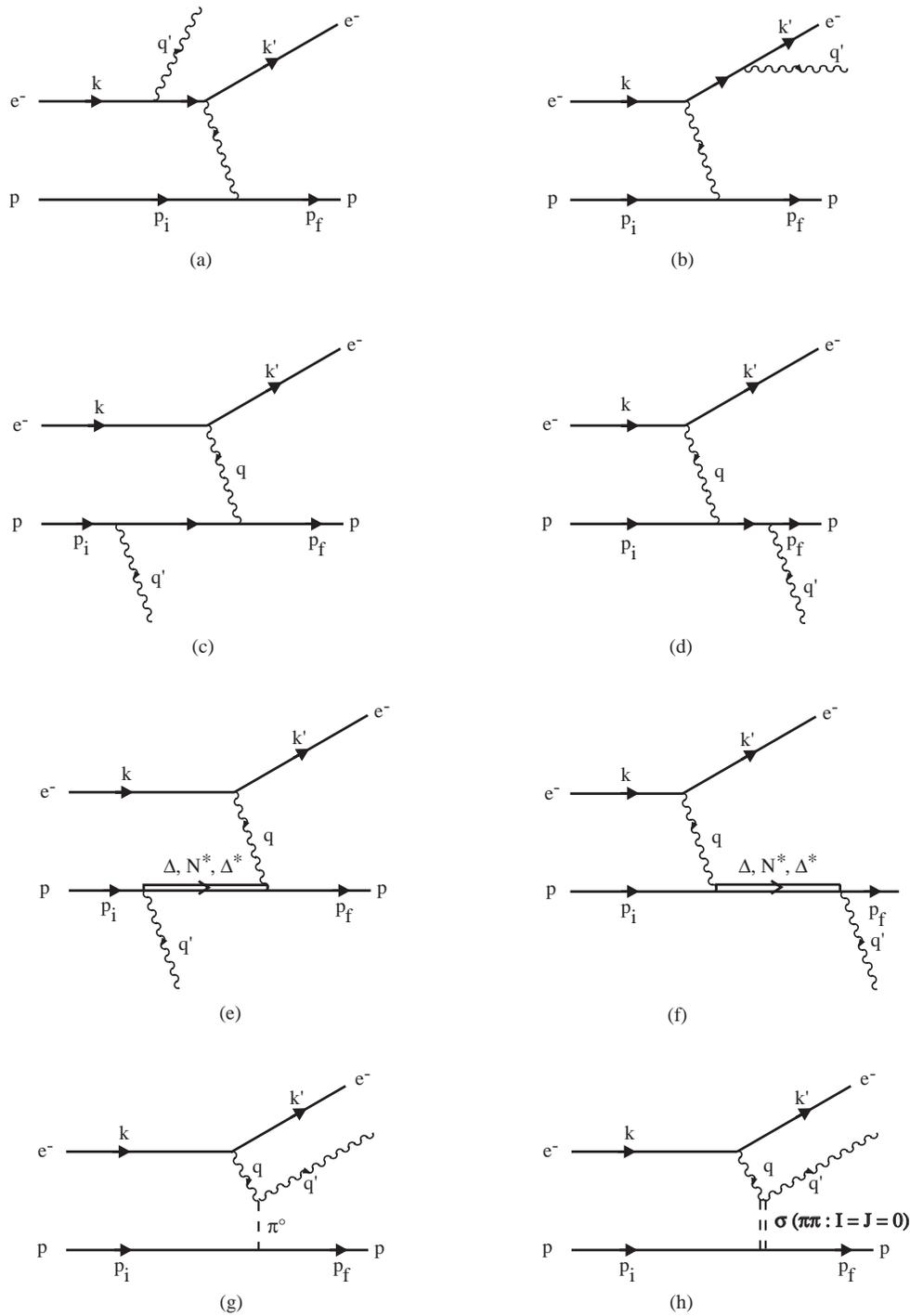


Figure I.14: Diagrammes de Feynman considérés dans la description de $p(e, e'p)\gamma$: Bethe-Heitler (a) et (b); Born (c) et (d); résonances du nucléon Δ, N^*, Δ^* (e) et (f); échange de π^0 (g); échange de méson σ ($\pi\pi$ corrélés: $I = J = 0$) (h).

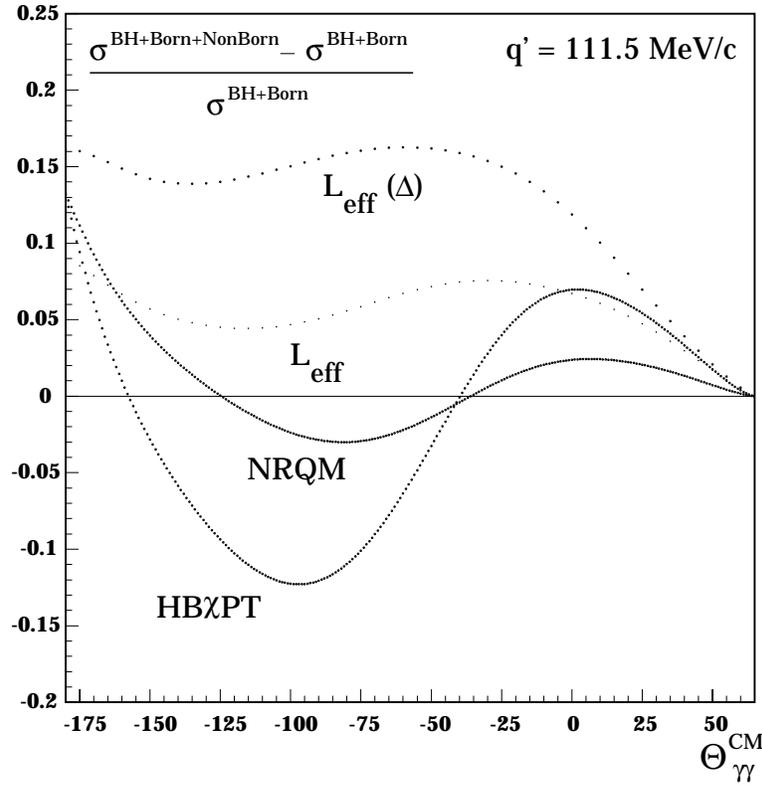


Figure I.15: Prédications de l'effet relatif du terme Non-Born par rapport à la section efficace BH+Born dans différents modèles, à $q' = 111.5 \text{ MeV}/c$. NRQM : quarks non relativiste; $L_{eff}(\Delta)$: Lagrangien effectif avec la contribution de la résonance $\Delta(1232)$ uniquement; L_{eff} : Lagrangien effectif complet; HB χ PT : théorie des perturbations chirales.

$$-\frac{1}{2f_\pi} (m_\sigma^2 - m_\pi^2) (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \left[\sigma + \frac{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}{4f_\pi} \right] \quad (\text{I.56})$$

Les différents termes de (I.56) décrivent respectivement : le nucléon, le pion et le σ libres, le couplage nucléon-mésons et enfin l'interaction entre mésons. Les qualités de ce modèle résident dans le respect de l'invariance relativiste, de l'invariance de jauge et de la symétrie chirale qui est cruciale dans la description du nucléon à basse énergie.

Dans ce formalisme, l'absence de structure du nucléon, en dehors du nuage de pions et de sigmas, diminue cependant le réalisme des prédictions. Le calcul de la polarisabilité magnétique en particulier, donne un résultat négatif en contradiction avec l'expérience (tableau I.2.5) car seule la contribution du nuage de pions est prise en compte et la transition $N - \Delta$ est absente.

Par son approche relativiste, cette étude respecte les symétries de crossing et de conjugaison de charge et a permis de révéler les relations supplémentaires existant

entre les polarisabilités généralisées (section I.2.4).

Perturbations chirales adaptées aux baryons lourds.

De même qu'en photon réel, de récents travaux [54] sont entrepris dans le cadre de la théorie des perturbations chirales pour le calcul des polarisabilités généralisées du nucléon. La figure (I.15) présente les derniers résultats en comparaison avec les modèles précédents.

En conclusion une comparaison des différentes prédictions dans la limite $q \rightarrow 0$,

	Réf.	$\alpha(0)$	$\beta(0)$	$\frac{e^2}{4\pi} \hat{P}^{(01,1)0}(0)$
NRQM	[7]	5.6	3.8	-1.6
ELM	[46]	7.3	1.6	
LSM	[52]	7.5	-2.0	-3.8
HB χ PT	[54]	12.8	1.3	
Exp.	[17]	12.1 ± 1	2.1 ∓ 1	

Tableau I.4: Comparaison des valeurs des trois polarisabilités scalaires évaluées à $q = 0$. Les valeurs sont données en fm^3 .

avec les valeurs expérimentales des polarisabilités réelles est présentée dans le tableau (I.4). Le très bon accord des perturbations chirales à une boucle est quelque peu atténué par les récents résultats de calculs plus complets [41], qui montrent une large déviation par rapport aux valeurs expérimentales.

Chapitre II

Dispositif expérimental

II.1 La physique à Mainz

Dans le cadre de l'étude de la matière nucléaire, la sonde hadronique (faisceau de protons) permet de bénéficier de l'importante section efficace nucléon-nucléon. Cependant la structure complexe de la sonde elle-même et sa sensibilité à l'interaction forte qui régit le milieu que l'on veut étudier amènent des difficultés supplémentaires dans l'extraction des propriétés internes du noyau. Ceci justifie le développement de machines à faisceau d'électrons qui constituent une sonde purement électromagnétique du milieu nucléaire, parfaitement décrite par la théorie de l'électrodynamique quantique. La contre-partie est la faiblesse des sections efficaces d'interaction qui demande l'emploi de hautes luminosités. Avec la contrainte de la technologie des premières installations qui fournissent des faisceaux pulsés de faible cycle utile, la seule solution est l'augmentation de l'intensité crête de chaque paquet d'électrons. Les détecteurs doivent alors supporter des taux de comptage instantanés de plus en plus élevés avec une détérioration du rapport Signal/Bruit dans les expériences de coïncidence.

Le microtron de Mainz (MAMI) répond donc aux besoins des accélérateurs de nouvelle génération en délivrant un faisceau continu d'électrons jusqu'à une intensité de $100 \mu\text{A}$ et une énergie de 855 MeV. Le cycle utile très proche de 100% permet l'usage d'une grande luminosité ($\mathcal{L} \geq 10^{37} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-2}$) et ouvre la porte vers une nouvelle physique plus exclusive avec détection en coïncidence de plusieurs produits de réaction. L'échelle d'énergie proche du GeV permet d'atteindre une résolution spatiale de quelques dixièmes de fermis, particulièrement adaptée aux études des composants du noyau et des propriétés du nucléon. Le système d'accélération est composé de trois microtrons dont les mises en service successives ont conduit à un faisceau de 14 MeV en 1979, 180 MeV en 1983 et enfin 855 MeV, disponibles depuis 1991.

L'implantation du système d'accélération ainsi que la distribution des différentes salles expérimentales sont illustrées figure (II.1). Chaque salle regroupe une collaboration indépendante, responsable des équipements et du programme scientifique [55] :

- **A1** : Ce hall est dédié aux expériences de coïncidence avec des électrons. Le dispositif expérimental se compose de trois spectromètres de haute résolution, nommés A,B et C, en rotation autour d'un même axe (fig. II.7). La mesure de la diffusion Compton virtuelle est réalisée au sein de cette collaboration et les caractéristiques du système de détection sont discutées en détail dans la suite de ce chapitre. Parmi les différents programmes scientifiques abordés on peut citer les réactions $(e, e'p)$ sur les noyaux de deutérium, carbone, oxygène et calcium, la mesure du facteur de forme magnétique du neutron, l'électroproduction de π^0 au seuil sur le proton [56] ainsi que des mesures de triple-coïncidence $(e, e'pp)$ et $(e, e'p\pi)$.
- **A2** : Ce hall utilise un faisceau de photons réels étiquetés [57], d'énergie comprise entre 50 et 800 MeV. La physique explorée concerne les sections efficaces d'absorption totale de photon sur les noyaux légers H, H², He³, He⁴, ainsi que la photo-production de pions chargés, mesurées avec le détecteur de grande acceptance DAPHNE [58]. La production de mésons neutres (π^0, η) décroissants en photons a été étudiée avec le détecteur TAPS [59]. Un large programme de mesure de la diffusion Compton sur le proton, ⁴He et ¹²C a également été entrepris à l'aide du détecteur CATS [60].
- **A3** : La motivation physique de la collaboration A3 est la mesure du facteur de forme électrique du neutron G_E^n . L'expérience de Mainz mesure l'asymétrie de la section efficace $\vec{e} - \vec{n}$ qui donne accès à un terme d'interférence avec une sensibilité accrue à G_E^n . Les premiers résultats [61] ont l'intérêt de présenter une mesure absolue du facteur de forme dans le domaine $Q^2 = 5$ à 15 fm^{-2} .
- **A4** : Ce hall est dédié à la violation de parité en diffusion d'électrons. La motivation physique est la mesure du facteur de forme étrange du proton. L'expérience sera réalisée à l'aide d'un calorimètre électromagnétique à base de cristaux de PbF_2 qui fournissent un signal Cherenkov.
- **X1** : Dans ce hall, le faisceau d'électrons de MAMI est utilisé comme source intense de rayons X pour des applications en physique des matériaux, biologie et médecine.

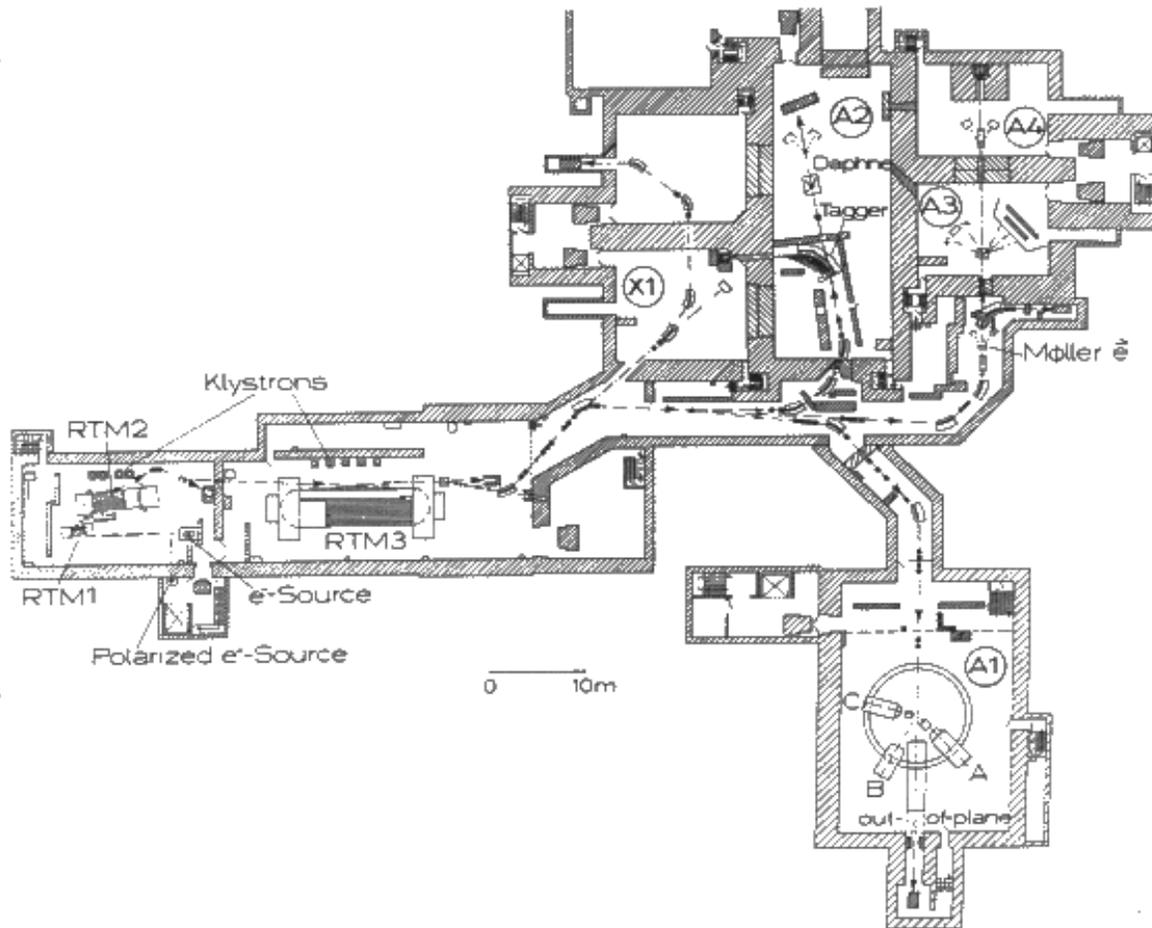


Figure II.1: Plan de l'accélérateur MAMI et des différentes salles expérimentales.

II.2 Système d'accélération

Les difficultés technologiques liées à l'obtention d'un faisceau continu de haute intensité limitent fortement la taille et le gain des portions accélératrices. La haute énergie des électrons ne peut alors être atteinte que par des recirculations. La solution adoptée à Mainz est celle du microtron dont le principe est illustré figure (II.2).

Les électrons sont injectés dans l'accélérateur linéaire (linac) du microtron et gagnent

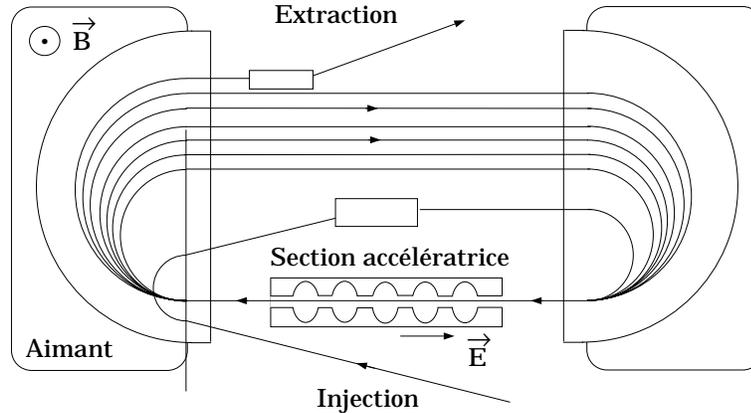


Figure II.2: Principe du microtron.

une certaine quantité d'énergie. A la sortie, ils pénètrent le champ magnétique uniforme de l'aimant qui les défléchit de 180 degrés. Après une section sans champ électromagnétique, les électrons entrent dans le deuxième aimant qui les renvoie dans le linac pour être à nouveau accélérés. Après chaque passage, le rayon de courbure dans les aimants augmente et les particules utilisent des trajectoires de retour de plus en plus éloignées. Cette procédure est ainsi répétée jusqu'à ce que les électrons acquièrent une énergie suffisante et atteignent l'élément magnétique d'extraction qui leur permet de quitter le microtron.

Les principales caractéristiques de l'appareillage ont été discutées dès 1974 et se déduisent de quelques considérations simples exposées dans la référence [62]. Le premier argument est la volonté de réutiliser des technologies bien maîtrisées qui conduit au choix de cavités accélératrices fonctionnant à température ambiante. De nombreuses contraintes sont ensuite fixées par la condition de résonance :

$$2.096 \text{ (cm.Tesla.MeV}^{-1}) \Delta T = \nu \lambda B \quad (\text{II.1})$$

où ΔT est le gain en énergie dans le linac, λ la longueur d'onde de la radio-fréquence accélératrice et B le module du champ magnétique des aimants. ν représente le nombre de longueurs d'onde dont la trajectoire des électrons est augmentée d'un tour à un

autre dans le microtron.

Le fonctionnement d'un linac à température ambiante et en continu impose clairement un gain ΔT faible pour réduire la puissance fournie et les problèmes de refroidissement. La vérification de la relation (II.1) demande alors $\nu\lambda$ et B petits. La limite sur $\nu\lambda$ est l'espacement entre deux orbites successives donné par :

$$d = \frac{\nu\lambda}{\pi}$$

Un avantage du microtron est l'utilisation d'un tube individuel pour chaque trajectoire de retour. La mise en place d'aimants défecteurs sur chaque tube

RTM		I	II	III
Données générales				
énergie d'entrée	MeV	3.5	14	180
énergie de sortie	MeV	14	180	≤ 855
Aimants				
champ magnétique	T	0.10	0.56	1.28
diamètre max.	m	0.97	2.17	4.43
distance entre aimants	m	1.7	5.6	12.8
Linacs				
nombre de klystrons		1	2	5
puissance totale	kW	9	65	168
gain d'énergie/tour	MeV	0.60	3.24	7.50
Faisceau				
résolution en énergie (FWHM)	keV	18	36	120
émittance verticale	$\pi.mm.mrad$	0.17	0.014	0.001
émittance horizontale	$\pi.mm.mrad$	0.17	0.014	0.007
courant	μA	≤ 100		
énergie	MeV	180 - 855 par pas de 15 MeV		

Tableau II.1: Paramètres de l'accélérateur MAMI à Mainz.

permet alors d'extraire des énergies de faisceau espacées de ΔT MeV sur toute la gamme accessible. L'encombrement des tubes et des défecteurs implique $d \geq 4$ cm. Un choix optimum est facilement obtenu en prenant $\nu = 1$, qui assure une bonne stabilité de faisceau, et $\lambda = 12$ cm, longueur d'onde pour laquelle toute une technologie de klystrons était déjà disponible.

Le choix de l'intensité du champ magnétique est un compromis essentiellement financier. La variation du rayon de courbure est en effet inversement proportionnelle à B et un champ trop bas entraîne des dimensions d'aimant et des coûts de réalisation

prohibitifs. Le meilleur compromis se situe dans l'intervalle $1 - 1.5$ T ce qui, d'après (II.1), donne l'encadrement $5.7 \text{ MeV} \leq \Delta T \leq 8.6 \text{ MeV}$.

Le dimensionnement du linac se résume à un équilibre entre la longueur d'accélération L et la puissance dissipée P . Pour une même longueur d'accélération l'augmentation de L diminue en effet P et solutionne les problèmes de refroidissement mais rend l'optique de faisceau beaucoup plus complexe et couteuse.

L'idée directrice pour atteindre l'énergie maximale de 855 MeV est donc un nombre important de recirculations dans de courtes sections accélératrices. A MAMI, la montée en énergie est réalisée en trois étapes par trois microtrons de tailles croissantes dont l'agencement est illustré sur la figure (II.1). Le rapport entre les énergies sortante et entrante de chaque étage reste ainsi modeste et simplifie grandement les optiques d'injection et de focalisation. Les paramètres principaux sont présentés dans le tableau (II.1) ainsi que les qualités du faisceau distribué aux salles expérimentales. L'injection dans le premier élément accélérateur est assurée par un Van de Graaff qui porte les électrons issus de la source à 3.5 MeV.

II.3 Mesure d'intensité

Les caractéristiques du faisceau délivré par MAMI ont déjà été présentées dans le tableau (II.1). La précision sur la mesure de son intensité est également un paramètre important car elle intervient directement dans la section efficace expérimentale. Je décris dans ce paragraphe quatre méthodes utilisées à Mainz :

- **Cage de Faraday** : Par cette méthode la charge du faisceau est collectée par une électrode qui se décharge vers la masse via une résistance connue. La lecture de la tension aux bornes de la résistance donne, par la loi d'Ohm, la valeur du courant. Pour assurer la collection de toute la charge incidente une enceinte conductrice portée à un potentiel négatif entoure l'électrode (cage de Faraday). L'interception du faisceau par l'électrode rend cette mesure destructive. C'est pourquoi, dans le hall A1, la cage de Faraday se situe loin derrière la cible, dans le "beam dump". A fort courant, l'évacuation de la puissance dissipée devient critique et nécessite un refroidissement par circulation d'eau désionisée qui introduit une résistance de fuite et détériore la mesure.
- **Le rayonnement synchrotron** : L'accélération radiale subie par le faisceau d'électron dans un aimant conduit à l'émission de rayonnements électromagnétiques (Cf. chap.I). L'axe du cône d'émission est tangent à la trajectoire

avec un angle au sommet de l'ordre $m_e c^2/E$ où E est l'énergie de l'électron. La connaissance du champ magnétique et la mesure du flux rayonné donne accès à l'intensité du faisceau.

A MAMI, le principe de détection est une plaque métallique interposée dans le rayonnement synchrotron. Par effet photo-électrique, les photons incidents sont convertis en électrons libres et le signal est recueilli à l'aide d'une différence de potentiel. Ce détecteur est particulièrement adapté à la mesure des bas courants.

- **Cavité résonante** : Le corps de ce détecteur est un guide d'onde de géométrie précise, positionné autour du faisceau. Le volume intérieur constitue une cavité résonante dans laquelle peuvent s'instaurer des ondes stationnaires. Les parois sont conductrices et imposent des conditions aux limites telle que l'annulation de la composante tangentielle du champ électrique. Les longueurs d'onde des modes stationnaires possibles prennent des valeurs discrètes, ne dépendant que des dimensions de la cavité.

La radio-fréquence de 2.5 GHz ($\lambda = 12$ cm) contenue dans la microstructure du faisceau induit, lors du passage dans la cavité, l'excitation de plusieurs fréquences de résonance. La puissance électromagnétique ainsi perdue par le faisceau est extraite de la cavité à l'aide d'antennes et sa mesure permet de remonter au courant. Cette méthode est non destructive.

- **Sonde Foerster** : Le principe de cette sonde est le transformateur à courant continu, basé sur deux toroïdes ferromagnétiques entourant le faisceau. Dans un premier temps il est plus simple de raisonner sur un seul anneau pour comprendre le mécanisme de génération d'un signal relié à la présence du courant continu.

Tout réside dans la propriété d'hystérésis d'aimantation des matériaux ferromagnétiques : la figure (II.3) illustre le fait que les variations de l'aimantation \vec{M} en fonction du champ magnétique d'excitation \vec{H} sont fortement non-linéaires avec un phénomène de saturation pour les trop grandes valeurs de $|\vec{H}|$. Ainsi, si l'on excite un anneau ferromagnétique par un courant alternatif dans un enroulement, l'induction magnétique \vec{B} qui circule dans le matériau n'est pas directement proportionnelle à l'excitation. La réponse au signal d'entrée est déformée par les non-linéarités. De plus, à chaque période d'oscillation correspond le parcours d'un cycle d'hystérésis qui dégrade une partie de l'énergie électromagnétique en chaleur ($W = v \int \vec{M} \cdot d\vec{H}$ avec v volume de l'échantillon).

Considérons maintenant le passage du faisceau au centre du toroïde. Le courant continu induit un champ magnétique $\vec{H}_{faisceau}$ constant qui s'ajoute comme un

décalage constant aux excitations de la bobine. On voit alors que le parcours du cycle d'hystérésis n'est plus le même et que le signal recueilli sera déformé différemment. Une analyse de Fourier peut facilement mettre en évidence la présence du courant continu mais la mesure de son intensité paraît difficile par cette méthode car la fonction de transfert totale, de la cause à l'effet, ne peut pas être connue avec précision. La solution utilisée se base sur une méthode de zéro dont la figure (II.4) présente le montage simplifié. La compensation du

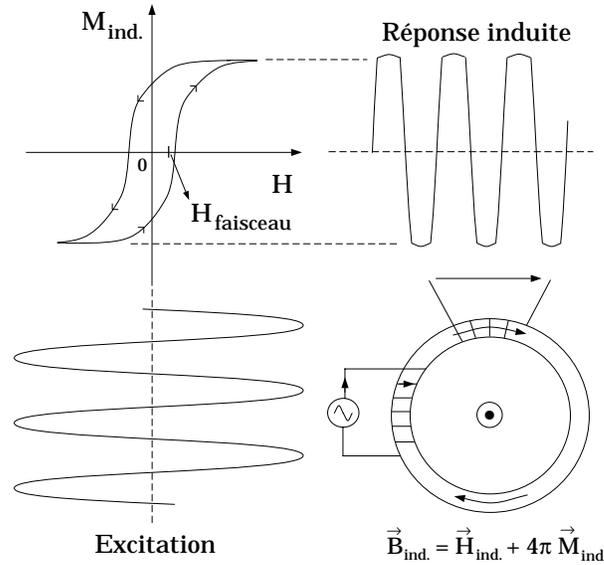


Figure II.3: Hystérésis d'un anneau ferromagnétique.

champ induit par le faisceau est réalisée à l'aide d'un circuit de retour traversé par un courant opposé.

On utilise ici deux toroïdes identiques couplés à un même générateur mais par l'intermédiaire de bobinages enroulés en sens opposé l'un de l'autre. En l'absence de faisceau, les contre-réactions de chaque anneau sont identiques et la différence $V_a - V_b$ est nulle. La présence du faisceau induit un décalage constant dans le champ magnétique mais les excitations en opposition de phase du générateur donnent dans la différence $V_a - V_b$ un effet sensible à deux fois cet offset. Un circuit électronique réinjecte alors un courant à travers les deux anneaux jusqu'à retrouver le zéro. A ce moment, la valeur du courant injecté est égale à celle du faisceau.

A MAMI, l'implantation de cette sonde sur l'axe du linac du troisième microtron augmente la précision de la mesure d'un facteur égal au nombre de tours dans la machine. La résolution obtenue à 855 MeV est ainsi de 0.5 nA.

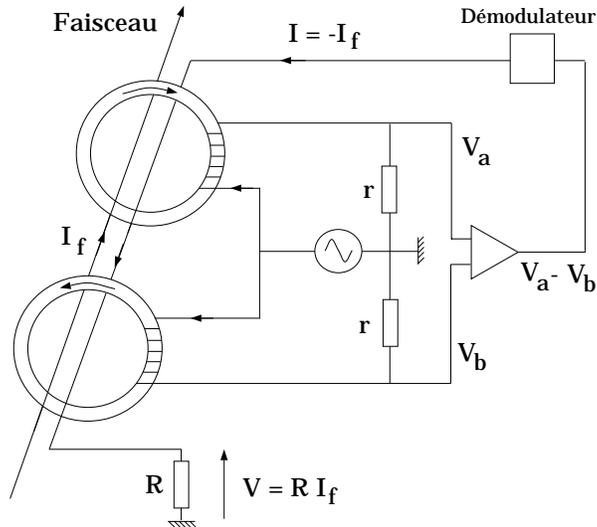


Figure II.4: Principe de la mesure du courant continu I_f par la sonde Fœrster.

L'expérience VCS a utilisé cette sonde qui est la plus fiable pour les forts courants.

II.4 Cible d'hydrogène liquide

La cible est construite sur le principe d'une boucle en circuit fermé. La circulation de l'hydrogène liquide est actionnée par un ventilateur qui assure un flot constant dans la cellule cible (fig.II.6). La chaleur déposée par le faisceau d'électrons se dissipe ensuite lors de son passage dans l'échangeur de chaleur refroidi par un cryo-générateur Philips d'une puissance de 60W.

Ce dispositif permet de supporter de forts courants sur une cellule cible étendue

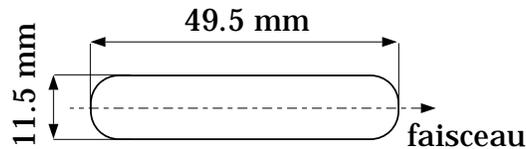


Figure II.5: Géométrie de la cellule cible.

(fig.II.5). Des tests ont été effectués jusqu'à $35\mu A$ ce qui équivaut à une luminosité

$$\mathcal{L} = 4.5 \cdot 10^{37} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

Pour éviter les problèmes de fluctuation de densité par la formation de bulles, un système de déviation magnétique, le “wedler”, fait balayer le faisceau sur une surface de $\pm 3\text{mm}$ en horizontal par $\pm 2\text{mm}$ en vertical avec une fréquence de quelques kHz. La position instantanée du faisceau est codée et enregistrée pour chaque évènement.

La géométrie de la cellule cible, étroite et allongée suivant le faisceau, permet

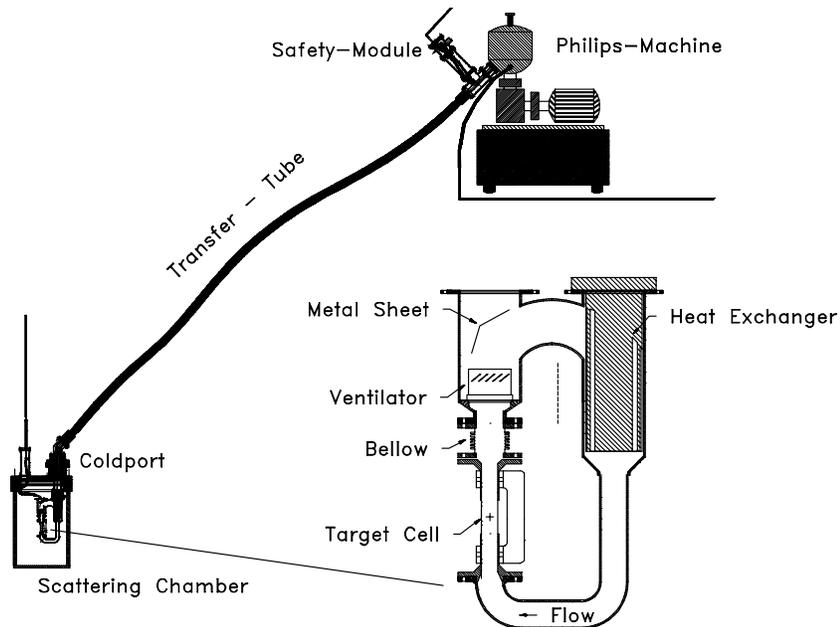


Figure II.6: Cible d'hydrogène liquide avec son circuit d'alimentation.

d'augmenter la luminosité tout en minimisant les pertes d'énergie des produits de réaction qui peuvent devenir critiques pour les expériences au seuil (fig.II.5). Les parois sont des feuilles de Havar de $9\mu\text{m}$ d'épaisseur qui représentent environ un dixième de l'épaisseur cible en unité de longueur de radiation.

II.5 Spectromètres

Dans ce paragraphe je résume brièvement les caractéristiques des spectromètres de haute résolution du hall A1. Un rappel sur les bases de l'optique magnétique et sa terminologie est présenté en annexe B. La figure II.7 montre une vue d'ensemble du dispositif. Les deux spectromètres notés **A** et **C** possèdent des optiques semblables composées d'un quadrupôle, d'un sextupôle et de deux dipôles (optique QSDD). Le premier quadrupôle fournit une focalisation transverse qui permet d'obtenir un large angle solide. Les deux dipôles génèrent la dispersion tandis que le sextupôle corrige

principalement des aberrations dans le plan non dispersif. Ces deux spectromètres sont point-point en dispersif pour optimiser la résolution en impulsion et parallèle-point en transverse pour une bonne détermination de l'angle de diffusion. La contrepartie de l'optique parallèle-point est une moins bonne connaissance de la position transverse (Cf. Annexe B).

Ce manque de résolution est compensé par le spectromètre **B**, constitué d'un seul

	units	A	B	C
Configuration		QSDD	D	QSDD
Optique dispersive		point-point	point-point	point-point
Optique transverse		parallèle-point	point-point	parallèle-point
Impulsion max.	[MeV/c]	735	870	551
Angle solide max.	[msr]	28	5.6	28
Angle de diffusion	[deg]	18 → 160	7 → 62	18 → 160
Long. trajectoire centrale	[m]	10.75	12.03	8.53
Dispersion	[cm/%]	5.77	8.22	4.52
Long. de cible vue	[mm]	50	50	50
Inclinaison du plan focal	[deg]	45	47	45
Acceptance				
Implusion	[%]	20	15	25
Angle dispersif (vert.)	[mrad]	±70	±70	±70
Angle non dispersif (hor.)	[mrad]	±100	±20	±100
Résolutions				
Impulsion		10 ⁻⁴	10 ⁻⁴	10 ⁻⁴
Angle à la cible	[mrad]	3	3	3
Position à la cible	[mm]	3-5	1	3-5

Tableau II.2: Paramètres des spectromètres du hall A1.

dipôle. Son champ magnétique possède un gradient qui donne une focalisation transverse et l'inclinaison de ses faces d'entrée et de sortie rajoute des contributions quadru et sextupolaires. Les qualités de ce spectromètre sont de très bonnes résolutions en impulsion et en position grâce à son optique point-point sur les deux axes. Une autre caractéristique importante est sa compacité qui lui permet de mesurer des angles de diffusion aussi petits que 7 degrés. Ceci est un atout majeur dans les séparations longitudinales-transverses qui demandent un grand bras de levier en angle. En contrepartie de ces avantages l'angle solide et l'acceptance en impulsion se trouvent réduits en comparaison de **A** et **C**. Enfin le spectromètre **B** a la possibilité de s'incliner verticalement de 10 degrés pour mesurer des cinématiques hors du plan.

Les éléments de la matrice de transport sont déterminés par des expériences de "sieve-slit" pour différentes valeur de champ dans les aimants et prennent en compte

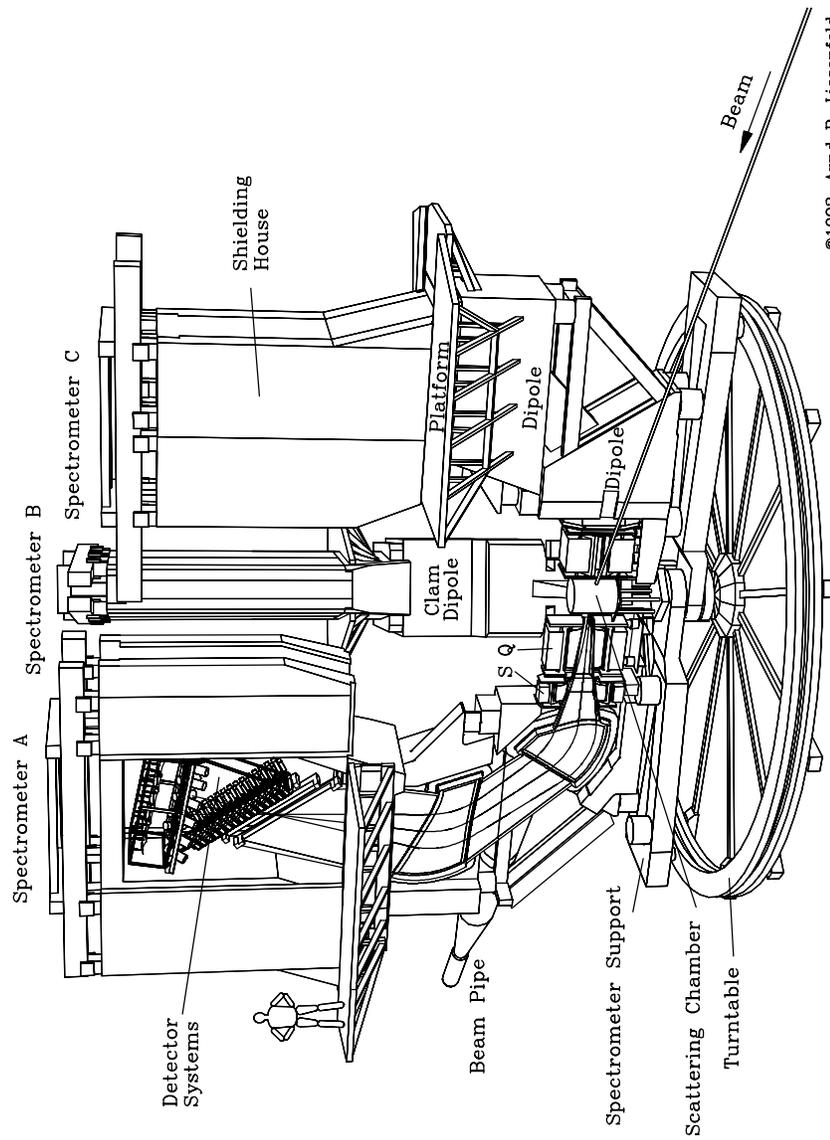


Figure II.7: Vue d'ensemble des trois spectromètres du hall A1.

l'extension de la cible. Les principales propriétés des trois spectromètres sont résumées dans le tableau (II.2).

II.6 Système de détection

En sortie des spectromètres, le système de détection a pour but de valider l'évènement et de déclencher l'acquisition des coordonnées mesurées au plan focal.

II.6.1 Chambres à dérive

Les chambres à dérive constituent le premier étage de détection et sont dédiées à la détermination des coordonnées $(x, \theta_x, y, \theta_y)$ d'intersection d'une trace chargée avec le plan focal.

Le principe de fonctionnement est illustré figure II.8 par une vue en coupe. Les ca-

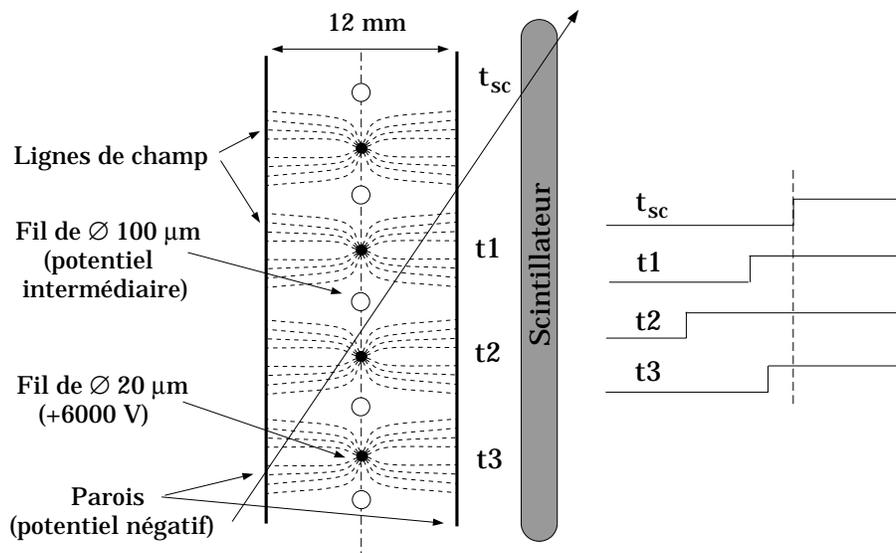


Figure II.8: Illustration des lignes de champ dans une chambre à dérive verticale. Le “start” du temps de collection est donné par l’instant d’arrivée des charges sur le fil tandis que le signal du plan de scintillateurs délivre le “stop”, commun à tous les fils.

thodes sont formées de deux plans parallèles de feuilles conductrices portées à un potentiel négatif. Les fils d’anodes sont portés à +6000V et possèdent un diamètre très fin de $20\mu\text{m}$ pour provoquer l’effet d’avalanche. L’intérieur de l’enceinte contient un mélange gazeux de 50% d’argon et 50% d’isobutane qui a la bonne propriété d’un faible taux de recombinaison après son ionisation par une particule chargée. Pour une

bonne collection des charges produites, la répartition des lignes de champ est optimisée par l'implantation entre chaque fil d'anode de fils plus épais ($100\mu\text{m}$ de diamètre), connectés à un potentiel intermédiaire. La lecture des différents temps de collection permet de remonter à l'orientation de la trace. En sortie de la chambre à dérive, la particule traverse un plan de scintillateur qui sert de référence en temps commune à tous les fils. Le circuit électronique d'acquisition utilise cette référence comme si-

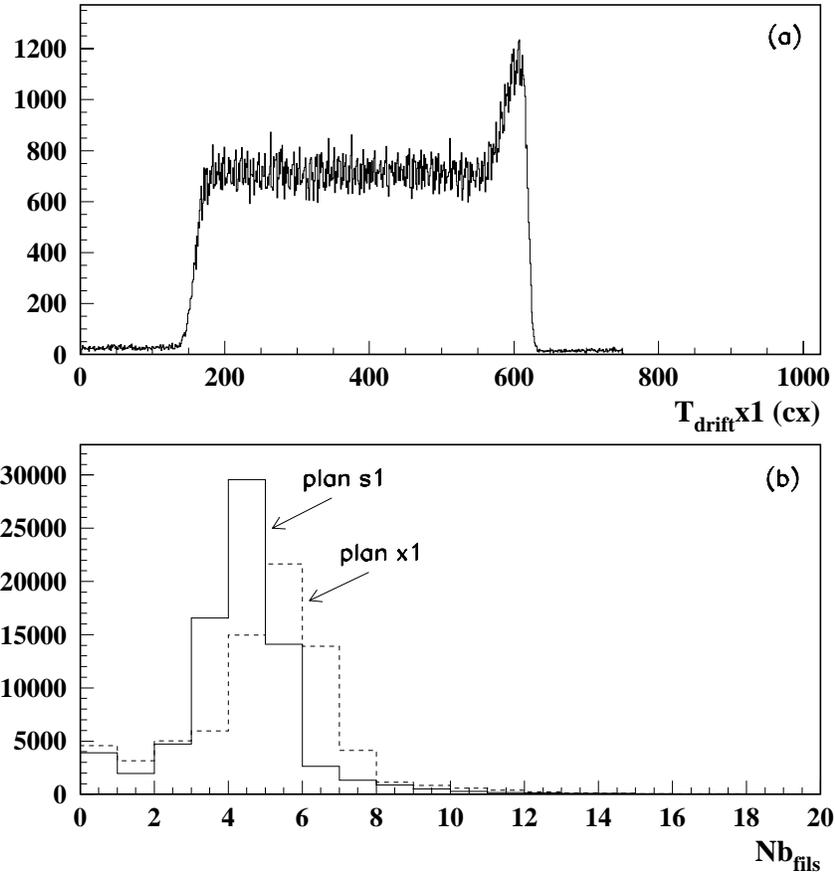


Figure II.9: (a) : Spectre en temps de drift pour les fils du plan X1. Un canal correspond à 50 ps. (b) : Nombre moyen de fils touchés dans les plans X1 (trait continu) et S1 (trait pointillé).

gnal de fin de collection des charges (montage en “common stop”) ce qui implique un renversement du spectre en temps, les fils les plus proches de la trace donnant les réponses les plus tardives (fig.II.9-a). L'appareillage utilisé dans le hall A1 se compose de deux plans de fils orientés perpendiculairement à l'axe dispersif (les plans x_1 et x_2) et de deux autres plans (appelés s_1 et s_2) tournés de 40 degrés par rapport aux

précédents. x_1 est positionné confondu avec le plan focal du spectromètre et s_1 juste au-dessus. Les contraintes mécaniques donnent un écartement entre les deux plans de 24mm (fig.II.10). Une paire quasi identique (x_2, s_2) se situe plus en arrière à une distance $d = 272\text{mm}$ avec un dimensionnement légèrement supérieur afin d'englober la dispersion des traces en aval du plan focal.

Le bras de levier entre les deux plans “ x ” permet de déterminer la position sur l’axe dispersif, directement reliée à l’impulsion, ainsi que θ_x , relié à l’angle de diffusion hors du plan de réaction. Les plans “ s ”, par leur composante sur l’axe transverse, fournissent l’information complémentaire (y, θ_y) de l’angle de diffusion et de la coordonnée horizontale du vertex à la cible.

La bonne reconstruction de la trajectoire nécessite un nombre suffisant de fils touchés pour alimenter l’algorithme d’approximation linéaire. L’inclinaison du plan focal par rapport aux chambres à dérive (tableau II.2) est donc cruciale. L’angle de 45 degrés utilisé ici implique un maximum de probabilité de 5 fils touchés pour les plans x (fig.II.9-b). Pour les plans s , l’orientation de 40 degrés par rapport aux fils des plans x est un bon compromis puisque le nombre moyen de fils touchés tombe à 4 mais avec une efficacité accrue du fait que l’on se rapproche de la parallèle à la trajectoire ionisante.

II.6.2 Scintillateurs

En sortie des chambres à dérive, les particules chargées traversent deux plans de scintillateurs d’épaisseur 3 et 10 mm dénommés respectivement “TOF” (Time Of Flight) et “dE” (perte d’énergie). Chaque plan est segmenté en 15 lattes pour le spectromètres **A**, 14 pour **B**, qui sont lues à chaque extrémité par un photomultiplicateur (fig.II.11).

La première fonction de ces détecteurs est la mesure de l’instant de passage de la particule. Ce repère en temps, associé à la traversée du plan TOF, constitue le point de départ pour le déclenchement de l’acquisition. Nous avons vu précédemment qu’il est également utilisé pour le comon-stop des chambres à dérive.

La condition, dans la logique d’acquisition, d’un signal dans le deuxième plan de scintillateurs permet de réduire le bruit de photons, qui ont une faible probabilité de déposer de l’énergie dans les deux plans.

Outre l’information temporelle, l’intégration de l’énergie déposée dans chaque plan peut aider à la discrimination des particules. Pour l’expérience VCS, les variations de ΔE_{TOF} en fonction de ΔE_{dE} séparent les contributions des protons et des pions positifs. Dans notre analyse, cette information est cependant redondante avec les autres

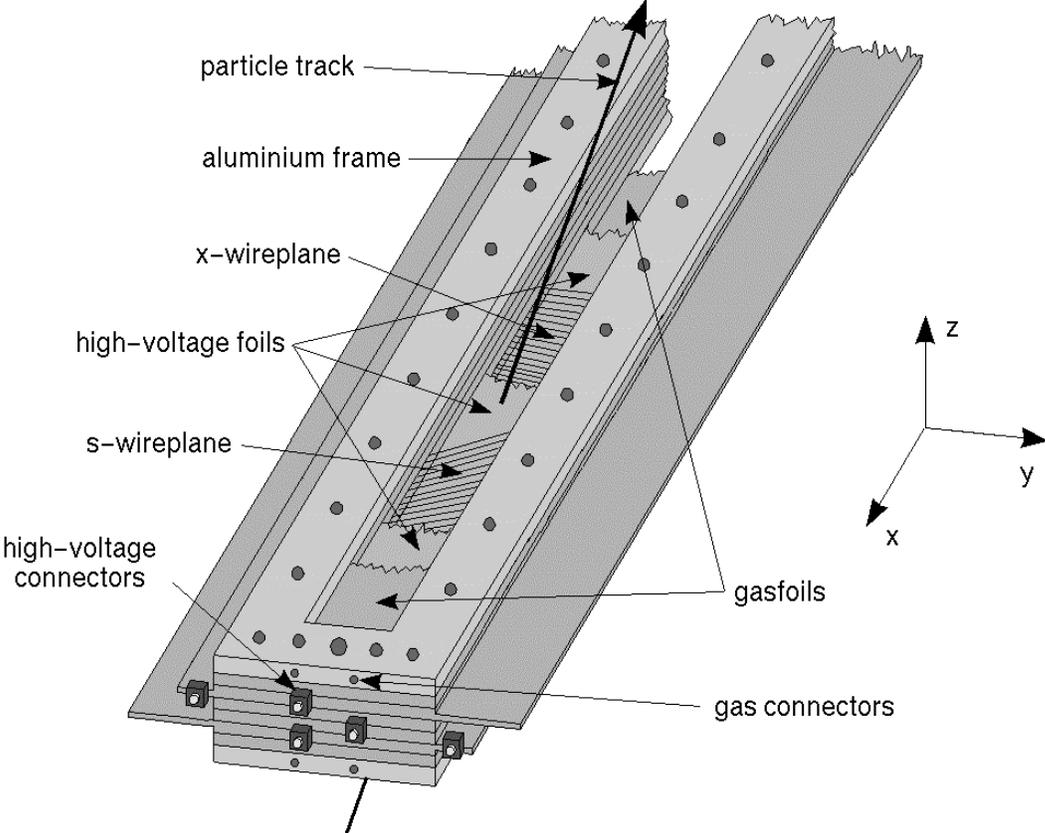


Figure II.10: Chambres à dérive verticales.

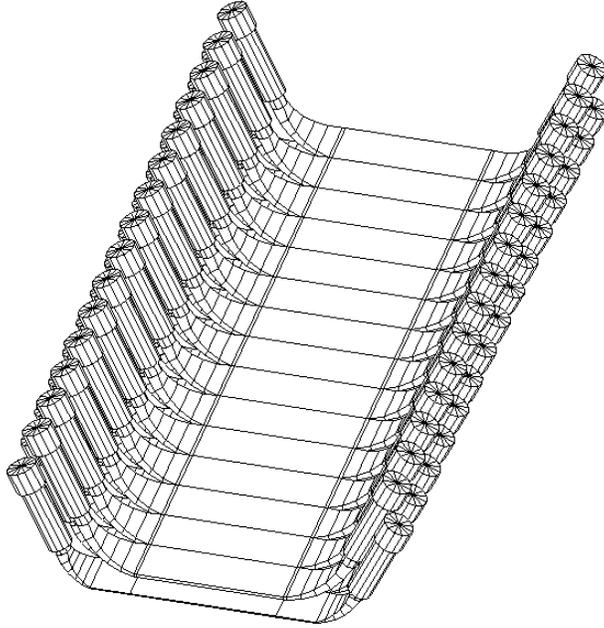


Figure II.11: Plans de scintillateurs.

coupures appliquées et donc non utilisée.

II.6.3 Compteurs Cherenkov

Le signal cherenkov est utilisé pour la discrimination entre électrons et π^- , μ^- . Dans la gamme d'impulsion acceptée par les spectromètres, ces deux types de particules sont en effet au minimum d'ionisation et ne peuvent pas être identifiées par leur dépôt d'énergie dans les scintillateurs.

Le compteur cherenkov constitue le dernier étage du système de détection. Le radiateur utilisé est du gaz fréon ($C_2F_2Cl_4$) d'indice de réfraction $n = 1.0013$ pour la longueur d'onde 400nm. Une particule chargée traversant ce milieu déclenche l'émission de lumière cherenkov si sa vitesse est supérieure à c/n . Le seuil en impulsion correspondant est donc de seulement 10 MeV pour les électrons contre 2740 MeV pour les pions. La seule erreur de discrimination provient de l'inefficacité de collection de la lumière cherenkov via un système de miroirs et de photomultiplicateurs. Une mesure expérimentale effectuée avec un plan de scintillateurs placé derrière le compteur donne une efficacité de 99.98%. Dans le spectromètre **B**, la géométrie du détecteur fait que les 2% inférieurs de l'acceptance en impulsion ne sont pas vus. Ceci donne lieu à une inefficacité de détection des événements VCS, estimée dans le chapitre III.

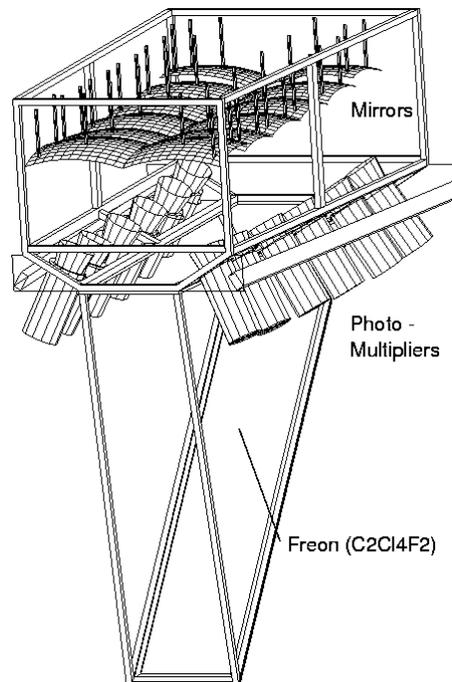


Figure II.12: Détecteur Cherenkov.

II.7 Trigger

Dans chaque spectromètre on réalise une coïncidence entre les deux plans de scintillateurs, “DE” et “ToF”. La détection du proton du côté A implique des seuils relativement hauts sur les photomultiplicateurs. Du côté B, le cherenkov n’est pas inclus dans la logique de déclenchement mais lu au moment de l’acquisition.

Les deux spectromètres peuvent être lus en coïncidence, ou séparément afin de mesurer des événements en simples. Cette possibilité a été largement exploitée lors de notre expérience afin de contrôler la luminosité et normaliser nos section efficace avec des mesures de cinématiques élastiques (Cf. chapitre III).

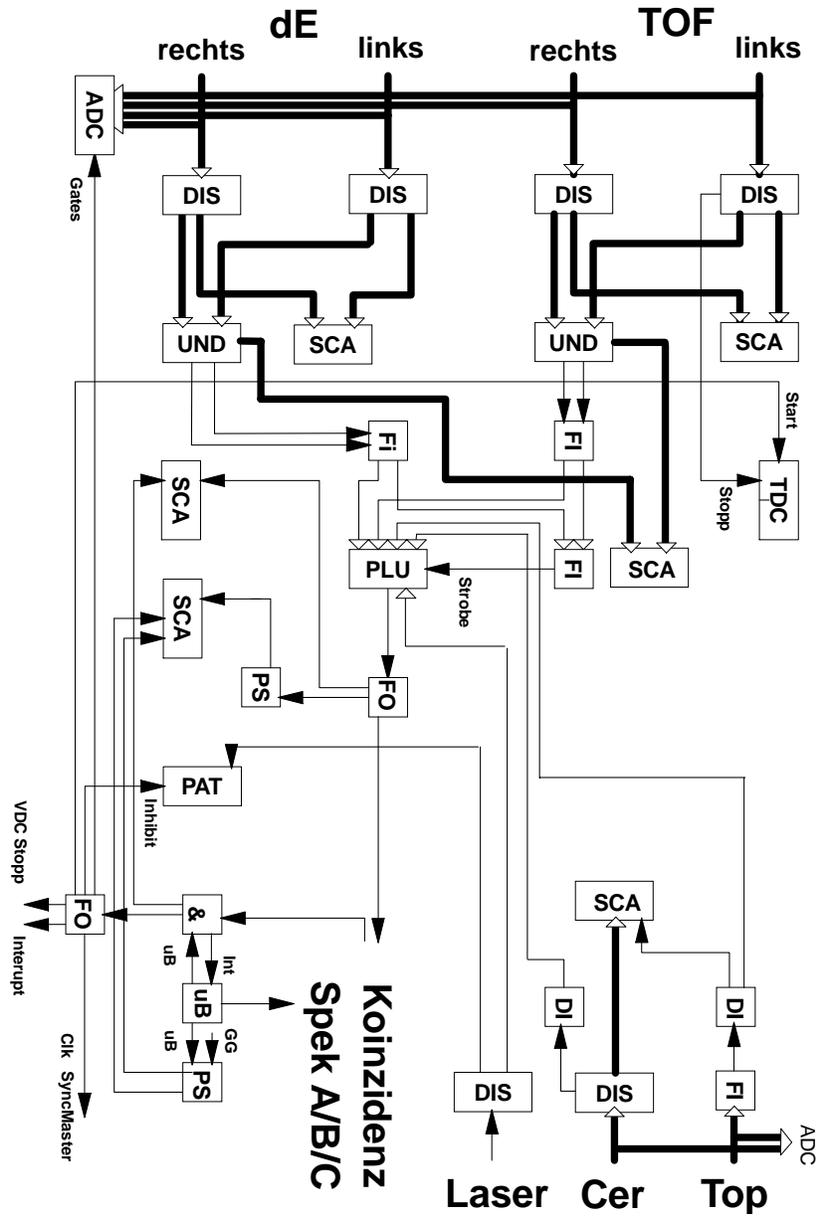


Figure II.13: Logique de déclenchement pour un spectromètre.

Chapitre III

Analyse

Dans le premier chapitre, le développement de la section efficace VCS en puissances de l'impulsion q' du photon sortant nous montre que la polarisation du proton intervient à partir du troisième terme, équivalent au terme de Rayleigh de la diffusion Compton réelle. L'effet de cette polarisation du milieu interne est paramétrisée par les polarisabilités généralisées, définies indépendamment de tout modèle.

Ce chapitre a pour objet de décrire l'ensemble de la procédure de mesure de ces observables. Une première partie présente la méthode expérimentale comme une étude de l'évolution de la section efficace en fonction de q' et donne les combinaisons linéaires accessibles des observables. Les contraintes de l'appareillage sont ensuite discutées afin de justifier le choix des cinématiques mesurées.

Le comportement à bas q' de la diffusion Compton virtuelle est dicté par un théorème de basse énergie et les polarisabilités se manifestent par une faible déviation ($\leq 10\%$) aux plus grands q' . L'information recherchée est donc extraite de la différence de deux grands nombres et demande une très bonne précision sur la mesure de la section efficace absolue. La dernière partie de ce chapitre décrit la procédure de l'analyse des données et détaille les nombreux contrôles de la normalisation de nos mesures.

III.1 Méthode expérimentale.

La mesure de la diffusion Compton virtuelle est réalisée à Mainz par la détection en coïncidence du proton et de l'électron de recul dans deux spectromètres de haute résolution du hall A1 (Chap. II). La présence du photon réel final est signée par la masse invariante nulle du quadrivecteur de la particule manquante. Un schéma simplifié du montage est présenté figure (III.1).

D'après l'équation (I.43) le développement de l'élément de matrice en puissances de

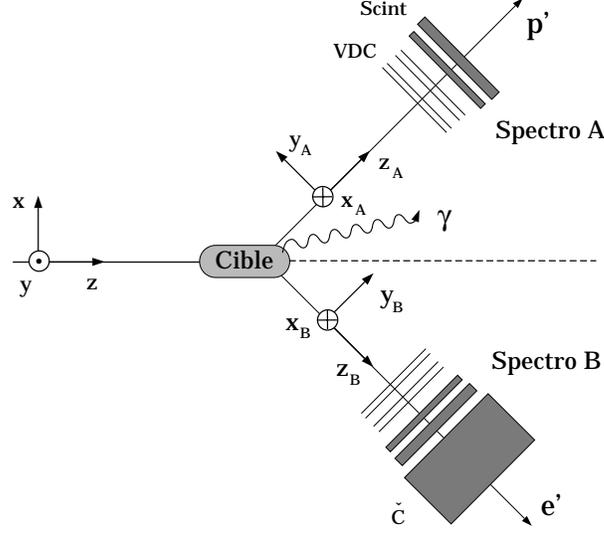


Figure III.1: Représentation simplifiée du dispositif expérimental. Les conventions adoptées pour les référentiels du laboratoire et des spectromètres sont indiquées.

q' , module de l'impulsion du photon réel, est équivalent à celui du module carré de l'amplitude totale (la sommation sur les spins ne change pas l'ordre du développement et est omise pour alléger l'écriture). Au niveau de la section efficace, l'espace de phase ramène une puissance de q' au numérateur :

$$\frac{d\sigma_{lab}}{d|\vec{k}'|_{lab}d\Omega_{k'_{lab}}d\Omega_{p'_{c.m.}}} = \frac{(2\pi)^{-5}}{64 m_p} \frac{k'_{lab}}{k_{lab}} \frac{s - m_p^2}{s} \mathcal{M}^{exp} = \frac{(2\pi)^{-5}}{64 m_p} \frac{k'_{lab}}{k_{lab}} \frac{2}{\sqrt{s}} q' \mathcal{M}^{exp}$$

On a donc :

$$\frac{d\sigma_{lab}}{d|\vec{k}'|_{lab}d\Omega_{k'_{lab}}d\Omega_{p'_{c.m.}}} \propto q' \mathcal{M}^{exp}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{exp} &\propto |T^{ee'\gamma}|^2 = |T_{BH+Born} + T_{NonBorn}|^2 \\ &\propto \left| \frac{a_{-1}}{q'} + a_0 + a_1 q' + \dots + a_1^{NB} q' + \dots \right|^2 \\ &\propto \frac{\mathcal{M}_{-2}^{exp}}{q'^2} + \frac{\mathcal{M}_{-1}^{exp}}{q'} + \mathcal{M}_0^{exp} + \mathcal{O}(q') \end{aligned} \quad (III.1)$$

Ce développement ne fixe que la dépendance en q' , les coefficients \mathcal{M}_i^{exp} sont donc a priori des fonctions des 4 autres variables nécessaires pour contraindre la cinématique ($q, \epsilon, \theta, \varphi$) (Cf. section I.2.2). L'expression de l'amplitude montre clairement que \mathcal{M}_{-2}^{exp}

et \mathcal{M}_{-1}^{exp} proviennent de la contribution du seul terme BH+Born alors que \mathcal{M}_0^{exp} contient en plus un terme d'interférence avec NonBorn :

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{4} \sum_{spin} \left\{ \underbrace{|a_0|^2 + a_{-1}^* a_1 + a_{-1} a_1^*}_{|T_{BH+Born}|^2} + \underbrace{a_{-1}^* a_1^{NB} + a_{-1} a_1^{NB*}}_{T_{BH+Born} \times T_{NonBorn}^*} \right\} \quad (III.2)$$

On retrouve ainsi au niveau de la section efficace ce qui était déjà établi (section I.2.3) pour l'amplitude: les deux premiers termes du développement sont connus et la première contribution des états excités du nucléon apparaît au troisième ordre.

Indiçons LET pour "Low Energy Theorem" les coefficients suivants :

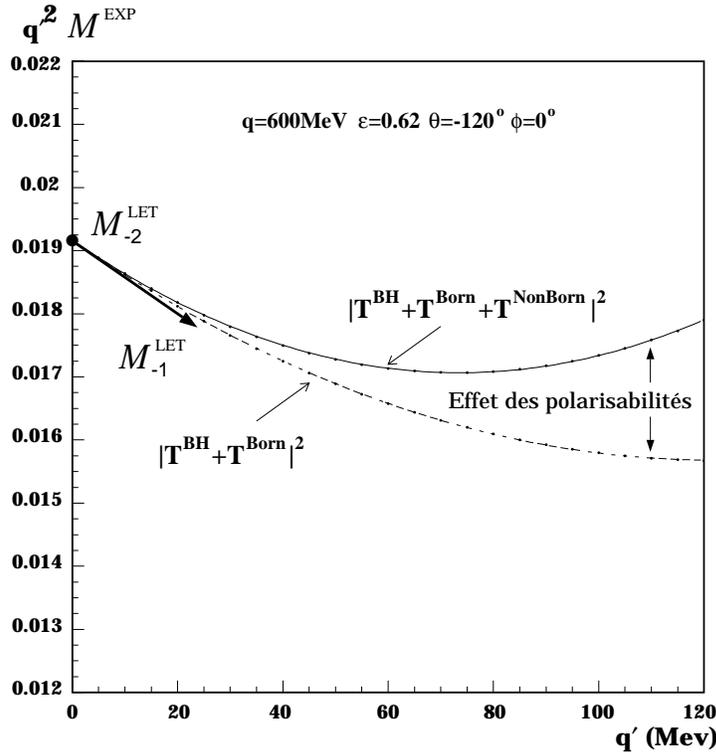


Figure III.2: La méthode expérimentale consiste à étudier $q'^2 \times \mathcal{M}^{exp}$ en fonction de q' dans plusieurs cellules en $(q, \epsilon, \theta, \varphi)$. L'ordonnée et la pente à l'origine sont contraintes par le théorème de basse énergie. L'extraction de la courbure donne l'information sur les polarisabilités. L'effet du terme NonBorn est ici estimé par un modèle de Lagrangien effectif [46].

$$\mathcal{M}^{LET} = \frac{1}{4} \sum_{spin} |T_{BH+Born}|^2 = \frac{\mathcal{M}_{-2}^{LET}}{q'^2} + \frac{\mathcal{M}_{-1}^{LET}}{q'} + \mathcal{M}_0^{LET} + \mathcal{O}(q')$$

Dans l'équation (III.1) le théorème de basse énergie se traduit par

$$\mathcal{M}_{-2}^{exp} = \mathcal{M}_{-2}^{LET} \quad , \quad \mathcal{M}_{-1}^{exp} = \mathcal{M}_{-1}^{LET} \quad (III.3)$$

Ces relations nous donnent l'opportunité de contraindre fortement notre analyse. La représentation fig.(III.2) de l'évolution de $q'^2 \mathcal{M}^{exp}$ en fonction du module de l'impulsion q' montre en effet que l'ordonnée et la pente à l'origine sont fixées par le théorème de basse énergie. L'accord des données avec ces prédictions est un test très puissant des résultats expérimentaux qui assure la crédibilité de l'extraction de la courbure contenant l'information sur les polarisabilités.

La méthode expérimentale se résume donc à un ajustement polynomial de $q'^2 \mathcal{M}^{exp}$ en puissances de q' , dans différentes cellules en $(q, \epsilon, \theta, \varphi)$, afin de valider les coefficients \mathcal{M}_{-2}^{exp} et \mathcal{M}_{-1}^{exp} et d'évaluer \mathcal{M}_0^{exp} . D'après l'équation (III.2) nous savons que \mathcal{M}_0^{exp} contient une contribution du terme de BH+Born, calculable. Après soustraction de cette partie connue il ne reste que l'effet des polarisabilités généralisées qui est paramétrisé dans [7] par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{exp} - \mathcal{M}_0^{LET} &= \frac{4me^6 q}{\tilde{Q}^2(1-\epsilon)} \sqrt{\frac{2E(q)}{E(q)+m}} & (III.4) \\ &\left\{ \sin\theta_{\gamma\gamma}^{cm} \left(\omega'' \sin\theta_{\gamma\gamma}^{cm} - \omega' k_T \cos\varphi \cos\theta_{\gamma\gamma}^{cm} \right) (\epsilon P_{LL}(q) - P_{TT}(q)) \right. \\ &- \left(\omega'' \sin\theta_{\gamma\gamma}^{cm} \cos\varphi - \omega' k_T \cos\theta_{\gamma\gamma}^{cm} \right) \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)} P_{LT}(q) \\ &\left. - \left(\omega'' \sin\theta_{\gamma\gamma}^{cm} \cos\theta_{\gamma\gamma}^{cm} \cos\varphi - \omega' k_T (1 - \cos^2\varphi \sin^2\theta_{\gamma\gamma}^{cm}) \right) \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)} P'_{LT}(q) \right\} \end{aligned}$$

Les paramètres $\tilde{Q}, k_T, \omega, \omega', \omega''$ et $E(q)$ sont des variables cinématiques définies pour une énergie de photon réel nulle (conditions équivalentes à la diffusion élastique) :

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= [Q]_{q'=0} \\ k_T &= \tilde{Q} \sqrt{\frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)}} \\ \omega &= - \left[q' \left(\frac{1}{p \cdot q'} + \frac{1}{k \cdot q'} \right) \right]_{q'=0} \\ \omega' &= + \left[q' \left(\frac{1}{k' \cdot q'} - \frac{1}{k \cdot q'} \right) \right]_{q'=0} \\ \omega'' &= + \left[\omega q - \omega' \sqrt{k'^2 - k_T^2} \right]_{q'=0} \\ E(q) &= \sqrt{q^2 + m^2} \end{aligned}$$

La présence de la limite $q' = 0$ traduit le fait que les polarisabilités sont extraites de la courbure à l'origine dans l'évolution de la section efficace en fonction de q' (fig.

III.2). Dans cette limite $s = m_p^2$ et les composantes du photon virtuel s'écrivent :

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0 &= -\frac{\tilde{Q}^2}{2m_p} = m - \sqrt{m^2 + \tilde{q}^2} \\ \tilde{q}^2 &= \tilde{Q}^2 \left(1 + \frac{\tilde{Q}^2}{2m_p}\right)\end{aligned}\quad (\text{III.5})$$

L'expression (III.4) explicite la factorisation de toute la dépendance angulaire dans des fonctions connues. En l'absence de polarisation du faisceau seules 8 observables interviennent dans l'expression de $\mathcal{M}_0^{exp} - \mathcal{M}_0^{LET}$. Elles sont rassemblées dans les 4 combinaisons linéaires P_{LL}, P_{TT}, P_{LT} et P'_{LT} fonctions de q uniquement :

$$\begin{aligned}P_{LL}(q) &= -2\sqrt{6} m G_E(\tilde{Q}) \underbrace{P^{(01,01)0}(q)}_{\rightarrow\alpha} \\ P_{TT}(q) &= \frac{3}{2} G_M(\tilde{Q}) \left(2\tilde{q}_0 P^{(01,01)1}(q) + \sqrt{2}q^2(\sqrt{3}\hat{P}^{(01,1)1}(q) + P^{(01,12)1}(q))\right) \\ P_{LT}(q) &= \sqrt{\frac{3}{2}}m\frac{q}{\tilde{Q}}G_E(\tilde{Q}) \underbrace{P^{(11,11)0}(q)}_{\rightarrow\beta} + \frac{\sqrt{3}\tilde{Q}}{2q}G_M(\tilde{Q}) \left(P^{(11,00)1}(q) + \frac{q^2}{\sqrt{2}}P^{(11,02)1}(q)\right) \\ P'_{LT}(q) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{m}{\tilde{Q}}G_E(\tilde{Q}) \left(2\tilde{q}_0 \underbrace{P^{(01,01)0}(q)}_{\rightarrow\alpha} + \sqrt{6}q^2 \hat{P}^{(01,1)0}(q)\right) - \frac{3}{2}\tilde{Q}G_M(\tilde{Q})P^{(01,01)1}(q)\end{aligned}\quad (\text{III.6})$$

Les expressions (III.4) et (III.6) impliquent quelques remarques générales sur l'analyse :

- L'application des relations (I.51) issues des symétries de crossing et de conjugaison de charge conduit à :

$$P_{LT}(q) = -\frac{q}{\tilde{q}_0} P'_{LT}(q) \quad (\text{III.7})$$

Au départ, 10 polarisabilités étaient définies, les 4 relations de symétrie (I.51) impliquent seulement 6 quantités indépendantes mais $\hat{P}^{(11,2)1}$, liée au rapport E_2/M_1 , n'est accessible que dans une expérience avec électrons polarisés. Il reste donc 5 observables indépendantes :

$$P^{(01,01)0}(q), P^{(11,11)0}(q), P^{(01,01)1}(q), P^{(01,12)1}(q), \text{ et } \hat{P}^{(01,1)1}(q)$$

- Les prédictions des modèles HB χ PT et NRQM donnent une valeur de $P^{(01,01)1}(q)$ de l'ordre de $P^{(01,01)0}(q)/500$. Sa contribution est donc négligée et les combinaisons linéaires P_{LT} et P'_{LT} deviennent proportionnelles à $P^{(11,11)0}(q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \beta$.

D'après (III.4), l'expression de la déviation au théorème de basse énergie autour de $\theta_{\gamma\gamma}^{cm} = 0$

$$\Delta\mathcal{M}_0 = \Delta\mathcal{M}_0^{exp} - \Delta\mathcal{M}_0^{LET} \propto [P_{LT}(q) + \sin^2\varphi P'_{LT}(q)]$$

permet alors une mesure de l'extension de la polarisabilité β .

- La dépendance angulaire factorisée devant les polarisabilités peut également être mise à profit avec le choix $\theta_{\gamma\gamma}^{cm} = 90^\circ$ et $\varphi = 0$ ou 180° . On obtient immédiatement d'après (III.4) l'expression

$$\Delta\mathcal{M}_0(\varphi = 0^\circ) + \Delta\mathcal{M}_0(\varphi = 180^\circ) \propto [\epsilon P_{LL}(q) - P_{TT}(q)]$$

qui est dominée par la polarisabilité $P^{(01,01)0}(q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \alpha$. Cette utilisation des propriétés de la dépendance angulaire est similaire au cas de la diffusion Compton réelle. D'une manière générale, l'étude du VCS dans un grand nombre de cellules ($q, \epsilon, \theta, \varphi$) est également l'occasion d'améliorer la précision de l'ajustement polynomial sur $q'^2 \mathcal{M}^{exp}$.

- La séparation de P_{LL} et P_{TT} nécessite une variation suffisante en ϵ .

L'extraction des polarisabilités généralisées de la section efficace de diffusion Compton virtuelle passe par la mesure de cinématiques à différentes valeurs de q' . L'effet mesuré représente une faible déviation par rapport à BH+Born (section I.2.5) et demande une très grande précision sur la détermination de la section efficace en valeur absolue. Pour cette première expérience l'objectif est d'atteindre une précision de 3% ce qui équivaut à une incertitude de $\simeq 30\%$ sur les observables si on suppose un effet de 10% dans la section efficace.

Le choix de ces cinématiques est bien sûr pondéré par les contraintes expérimentales (énergies et résolutions disponibles) et fait l'objet du prochain paragraphe.

III.2 Définitions des cinématiques mesurées

L'intérêt de la diffusion Compton virtuelle réside dans la définition, indépendante de tout modèle, de nouvelles observables qui donnent une dépendance en \tilde{Q}^2 aux polarisabilités du nucléon. L'expérience de diffusion Compton virtuelle à MAMI s'est fixée pour objectif la mesure d'un premier point à $\tilde{Q}^2 = 0.33\text{GeV}^2$. La méthode d'analyse demande l'étude de plusieurs cinématiques avec une évolution de l'impulsion q' du photon réel dans le centre de masse. La borne supérieure est fixée par le seuil

de production de π^0 :

$$q'_{max} = \frac{s_{seuil} - m_p^2}{2\sqrt{s_{seuil}}}; \quad s_{seuil} = (m_p + m_\pi)^2$$

$$q'_{max} = \frac{m_\pi}{2} \left(1 + \frac{m_p}{m_p + m_\pi} \right) = 126.5 \text{ MeV}/c$$

Une attention particulière doit être portée aux faibles valeurs de l'impulsion q' du photon diffusé puisque sur elles repose la validation du théorème de basse énergie. Au cours de l'expérience, deux principales limitations sont apparues pour déterminer le plus petit q' mesurable. La première, expérimentale, provient d'une pollution de la cinématique élastique ($q' = 0$) par l'intermédiaire d'un rebond sur la structure interne du spectromètre proton. Ce problème est discuté dans la section (III.3.1). La deuxième, théorique, concerne la mise en œuvre des corrections radiatives réelles. Dans le formalisme utilisé, q' doit en effet rester très supérieure à l'impulsion des photons radiatifs mous émis, dont l'ordre de grandeur est donné par la résolution expérimentale (Cf. section IV.2.4). Ceci impose pour le VCS un photon réel d'au moins quelques dizaines de MeV/c.

A l'intérieur de ces contraintes, nous avons adopté la mesure de cinq points en q' , repartis de la manière suivante

$$q' = 33.6, 45.0, 67.5, 90.0, 111.5 \text{ MeV}$$

Il reste à présent les quatre degrés de liberté ($q, \epsilon, \theta, \varphi$) pour déterminer entièrement

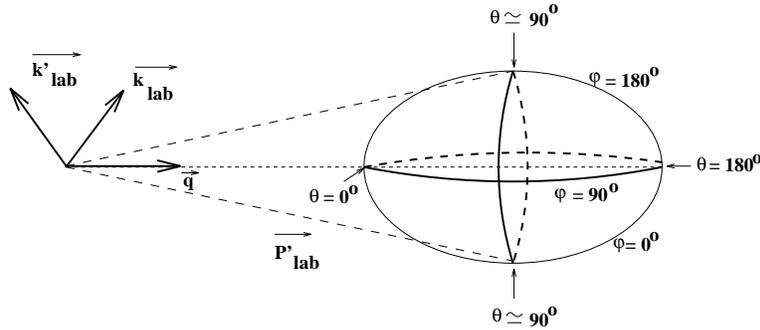


Figure III.3: Transformation de Lorentz appliquée sur l'espace de phase du proton suivant la direction du photon virtuel. L'extrémité de \vec{p}_{lab} décrit la surface d'un ballon de rugby. Sa norme est directement reliée à $\cos \theta$ (minimum pour $\theta = 0$, maximum pour $\theta = 180^\circ$). La référence $\varphi = 0$ correspond à l'émission du photon réel dans le demi-plan leptonique contenant \vec{k}_{lab} et \vec{k}'_{lab} .

les cinématiques. L'impulsion q du photon virtuel est le générateur de la transformation de Lorentz qui relie le référentiel de centre de masse avec celui du laboratoire.

L'espace de phase du proton est donc focalisé en un cône autour de la direction de q (fig.III.3). La détection du proton de recul requiert un spectromètre de large acceptance afin de recueillir un maximum de l'espace de phase. Nous choisissons le spectromètre A (Cf. section II.5). Du côté électron, le choix de l'acceptance réduite du spectromètre B fixe les variables leptoniques dans un faible domaine de variation autour de la valeur nominale. L'optique magnétique, complémentaire à celle de A, donne une bonne résolution en position pour le vertex.

III.2.1 Variables leptoniques (q, q', ϵ)

D'après (I.41), les domaines de variations de k_{lab} , k'_{lab} et θ_e^{lab} définissent également ceux de Q^2 et q . Pour une expérience en coïncidence, les limitations sur les valeurs possibles de Q^2 proviennent des contraintes de détection du proton.

La détérioration de la résolution provoquée par les pertes d'énergie et les diffusions multiples dans la cible devient critique à trop faible impulsion et un minimum de 250 MeV/c est demandé pour le proton de recul. Ceci fixe la borne inférieure de Q^2 à 0.15 GeV². La borne supérieure, $Q^2 = 0.35$ GeV², est imposée par l'impulsion maximum (735 MeV/c) acceptée par le spectromètre A. L'intervalle équivalent sur l'impulsion du photon virtuel s'écrit $390 < q < 660$ MeV/c. Expérimentalement il est intéressant de maximiser la focalisation du proton en choisissant une grande impulsion de photon virtuel. Pour toutes les cinématiques de notre expérience, q est ainsi fixé à 600 MeV/c. La variation du paramètre ϵ n'est intéressante que dans le cas où elle offre un bras de levier suffisant pour une séparation de $P_{LL}(q)$ et $P_{TT}(q)$. Dans notre expérience, l'intervalle des taux de polarisation accessibles $0.54 < \epsilon < 0.62$ est trop étroit. De même que q , ϵ est donc fixé à une valeur unique : 0.62. Le choix d'un ϵ le plus proche possible de 1 est favorable au taux de comptage car on peut montrer [63, p.186] que le flux de photons virtuels, qui intervient linéairement dans la section efficace, varie comme $1/(1 - \epsilon)$.

Les paramètres du bras électron pour les cinq valeurs de q' sont présentés dans le tableau (III.1). Afin de maintenir (q, ϵ) constants, il faut modifier k_{lab} , k'_{lab} et θ_e^{lab} pour chaque cinématique. Le principe d'accélération (section II.2) impose la contrainte d'un pas de 15 MeV pour l'énergie du faisceau. L'acceptance étroite du spectromètre électron donne en réalité accès à de petites variations autour de ces valeurs centrales. Pour notre analyse, nous avons utilisé les largeurs suivantes :

$$q' = q'_{ref} \pm 15 \text{ MeV} \quad q = (600 \pm 20) \text{ MeV} \quad \epsilon = 0.62 \pm 0.02$$

q'	q	ϵ	k_{lab}	k'_{lab}	θ_e^{lab}	$\theta_{\gamma^{virtuel}}^{lab}$
MeV/c	MeV/c		MeV	MeV	deg	deg
111.5	600	0.62	855	539	52.2	-39.1
90.0	600	0.62	825	538	53.0	-40.6
67.5	600	0.62	795	537	53.8	-42.2
45.0	600	0.62	765	535	54.5	-43.8
33.6	600	0.62	750	534	54.9	-44.6

Tableau III.1: Variations des énergies et des angles électron pour garder q et ϵ constants avec cinq valeurs de q'.

Cette discussion a permis de fixer la cinématique du côté électron et le positionnement du spectromètre B. La section suivante présente l'étude du bras hadronique caractérisé par les deux dernières variables $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ et φ .

III.2.2 Variables hadroniques ($\theta_{\gamma\gamma}^{cm}, \varphi$)

Du côté proton, le but est d'optimiser l'intersection entre le ballon de rugby de l'espace de phase (fig.III.3) et le spectromètre A, afin de collecter le plus grand domaine possible en $(\theta_{\gamma\gamma}^{cm}, \varphi)$. La mesure de nombreuses combinaisons des polarisabilités permettra en effet de résoudre plus précisément l'équation (III.4).

La figure (III.4) montre l'évolution de ces variables angulaires dans le plan $(p', \theta_p)_{lab}$. On reconnaît une projection de l'espace de phase illustré sur la figure (III.3). Les événements à φ constant se répartissent suivant les méridiens du ballon de rugby. Pour un module d'impulsion donné du proton dans le centre de masse, le module dans le laboratoire ne dépend que de l'écart par rapport à l'axe de la transformation de Lorentz (direction du photon virtuel). Cet écart est mesuré par l'angle $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$. Chaque parallèle du ballon de rugby est donc associée à une valeur constante de $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$.

L'acceptance du spectromètre proton délimite un rectangle dans le plan $(p', \theta_p)_{lab}$. Les dimensions relatives de ce rectangle et du contour de l'espace de phase dépendent de l'impulsion q' du photon réel à laquelle on se place. Pour q' très faible, tous les événements se concentrent près de la ligne de la cinématique élastique et peuvent être contenus dans une seule acceptance. Lorsque q' augmente, les domaines en p' et θ_p s'élargissent et plusieurs réglages différents du spectromètre A sont nécessaires pour parcourir tout l'espace de phase.

Si nous considérons que les deux spectromètres évoluent dans le même plan horizontal, l'acceptance angulaire verticale de A ($\pm 70\text{mrad}$) implique une coupure sur les φ hors du plan. La zone "utile" de l'espace de phase se situe donc pour nous autour des

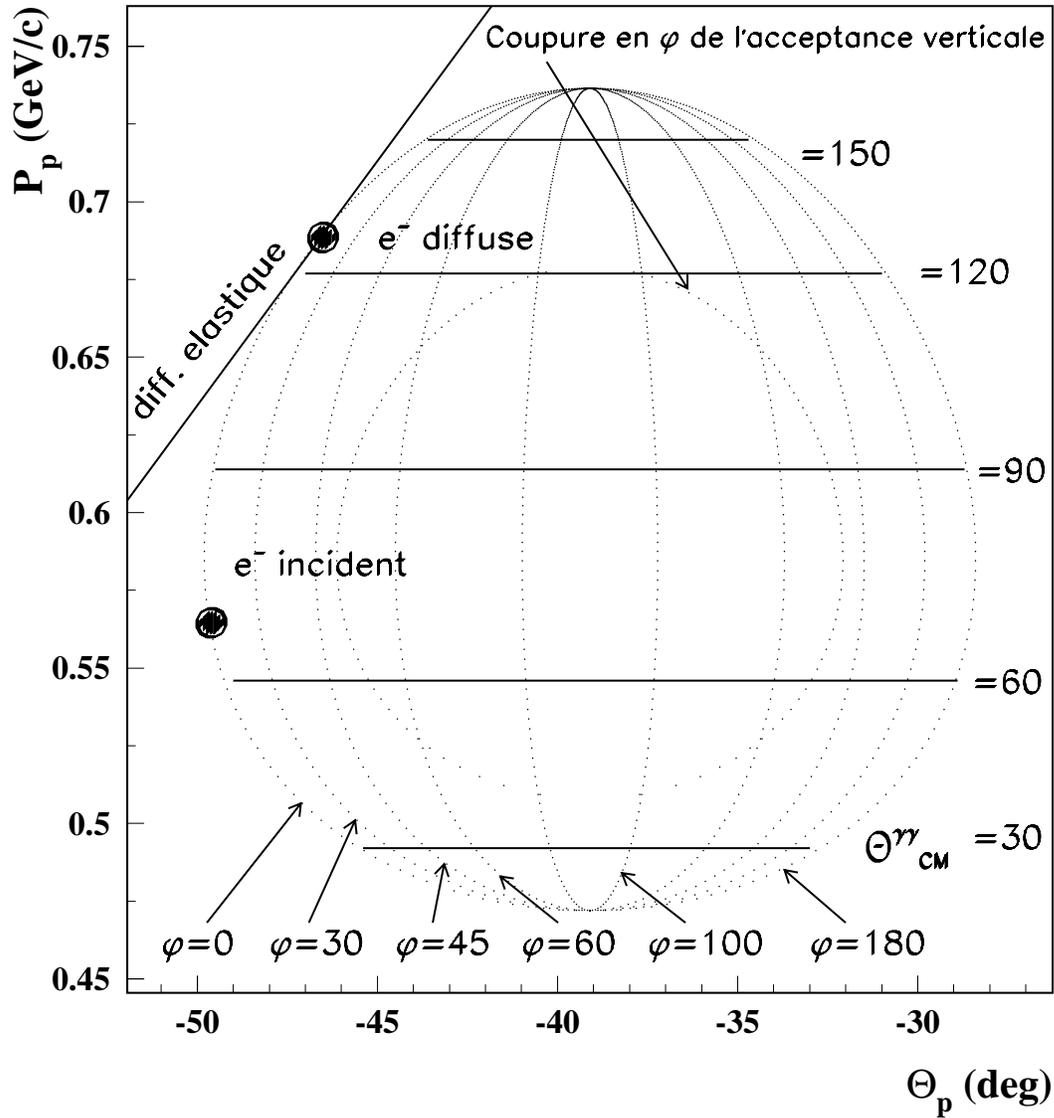


Figure III.4: Distribution des événements dans le plan de l'impulsion P_p et de l'angle θ_p du proton dans le laboratoire, avec $q = 600 \text{ MeV}/c$, $\epsilon = 0.62$ et q' choisi à $111.5 \text{ MeV}/c$. $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ varie suivant les parallèles au ballon de rugby tandis que φ décrit les méridiens. L'acceptance verticale finie ($\pm 70 \text{ mrad}$) des deux spectromètres évoluant dans le même plan horizontal implique une coupure en φ représentée au centre.

méridiens $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 180^\circ$.

Les deux points particuliers correspondant à l'émission du photon réel suivant la direction de l'électron incident ou sortant sont également représentés sur la figure (III.4). Cette région, très fortement dominée par le processus de Bethe-Heitler (fig.I.11), n'est pas propice à la mesure des polarisabilités.

Le choix final des cinq cinématiques est exposé dans le tableau (III.2). Avec les

q = 600MeV/c $\epsilon = 0.62$						
q' MeV/c	notation	k ^{lab} MeV	k ^{lab} MeV	θ_e^{lab} deg	p ^{lab} MeV	θ_p^{lab} deg
111.5	e_2	855	539.4	52.18	655.0	-30.6
111.5	e_23	-	-	-	596.0	-
111.5	e_3	-	-	-	536.4	-
111.5	e_13	-	-	-	483.0	-34.9
111.5	e_1	-	-	-	-	-39.2
90.0	d_2	825	537.5	53.02	636.4	-33.2
90.0	d_23	-	-	-	572.8	-
90.0	d_3	-	-	-	521.0	-
90.0	d_13	-	-	-	500.0	-37.1
90.0	d_1	-	-	-	-	-41.0
67.5	c_2	795	536.5	53.78	636.3	-36.8
67.5	c_12	-	-	-	556.0	-
67.5	c_1	-	-	-	536.0	-41.7
45.0	b_2	765	534.7	54.51	601.2	-38.4
45.0	b_1	-	-	-	550.0	-40.2
33.6	a_2	750	533.85	54.87	583.2	-39.7
33.6	a_1	-	-	-	546.3	-40.7

Tableau III.2: Cinématiques de la diffusion Compton virtuelle mesurées à MAMI. Dans la notation des réglages, l'ordre alphabétique des lettres correspond aux impulsions croissantes du photon réel q'. La numérotation à deux chiffres désigne une position de recouvrement avec deux autres mesures voisines.

valeurs croissantes de q' nous voyons que le nombre de mesures nécessaires pour parcourir la région autour du méridien $\varphi = 180^\circ$ augmente. La figure (III.5) présente l'image des différents réglages dans le plan $(\theta_p, P_p)_{lab}$ pour les quatre premières cinématiques. Les mesures successives dans une même cinématique ne sont pas juxtaposées mais mettent à profit la possibilité d'un recouvrement. Pour quasiment chaque point observé de l'espace de phase, nous disposons donc de deux résultats indépendants, dont le bon accord est un test de la maîtrise de l'appareillage et de l'analyse. Afin d'illustrer la déformation de l'espace de phase avec q', les cinq contours sont

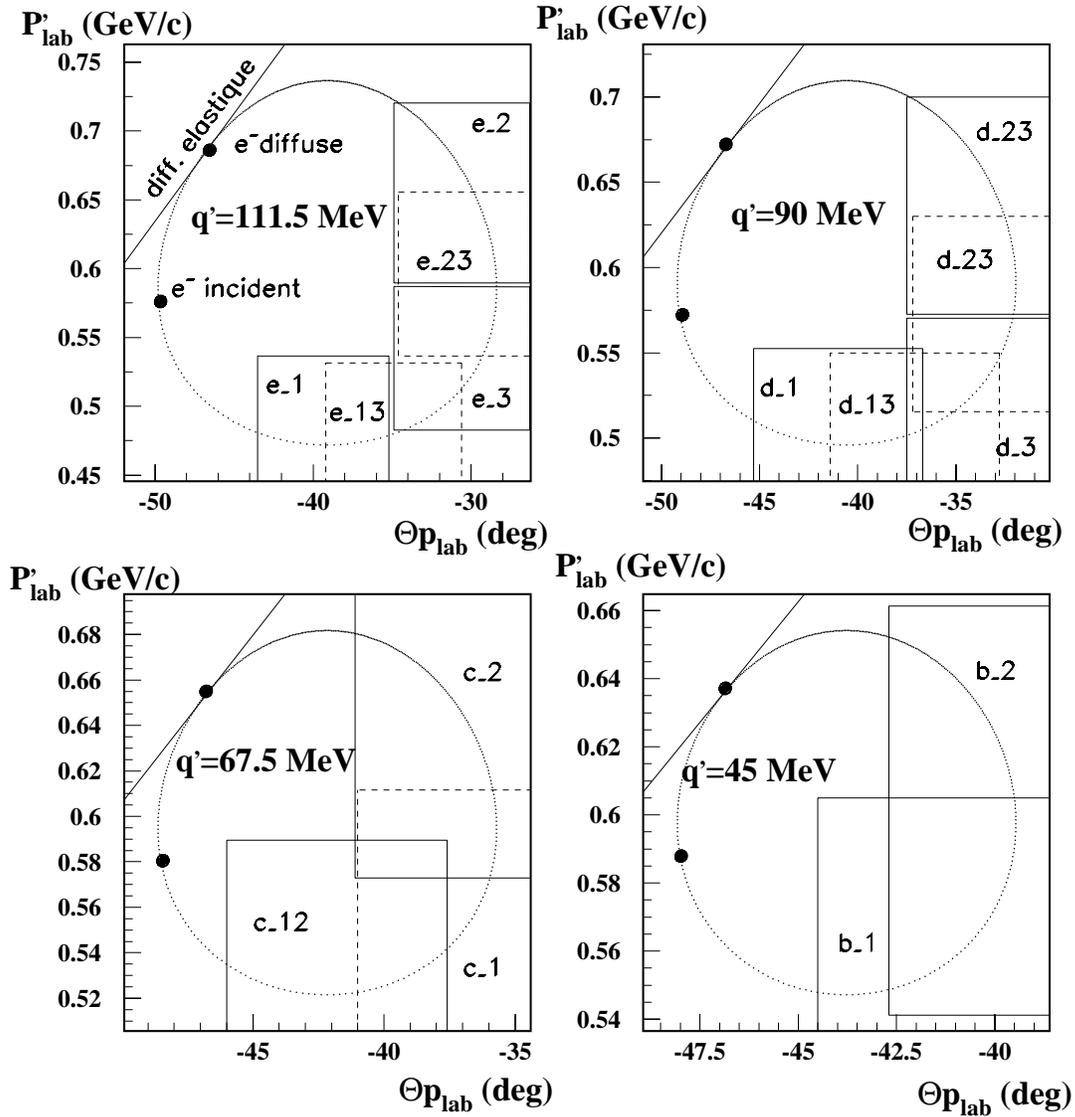


Figure III.5: Choix des différentes mesures effectuées pour les quatre premières cinématiques afin de couvrir le plus efficacement possible l'espace de phase du proton.

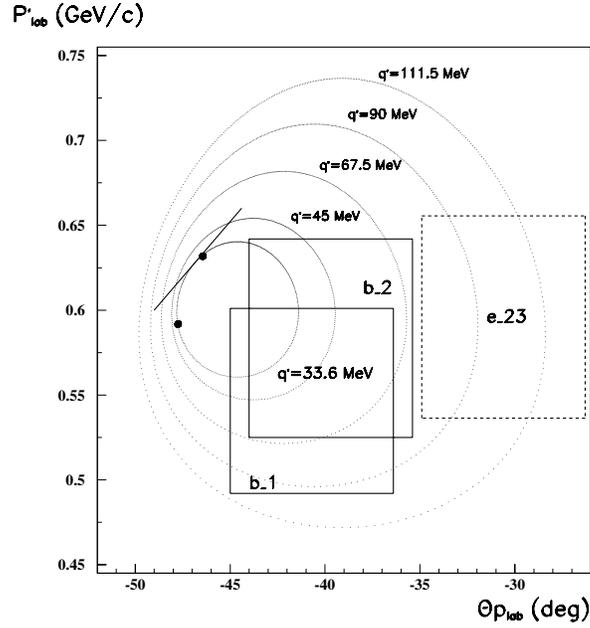


Figure III.6: Illustration de l'acceptance du spectromètre A pour les mesures à $q' = 33.6$ MeV/c. L'échelle des axes permet de suivre l'évolution de l'espace de phase avec q' et de comparer le domaine angulaire accessible pour deux valeurs extrêmes de l'impulsion de photon : 33.6 et 111.5 MeV.

affichés simultanément figure (III.6). Les positionnements de l'acceptance du spectromètre A sont indiqués pour $q' = 33.6$ MeV. Les changements d'énergie de faisceau et d'angle de l'électron diffusé modifient la position de la ligne élastique d'une cinématique à l'autre. Cependant, par l'équivalence (I.41) entre les variables (q, q', ϵ) et (Q^2, s, ϵ) , le maintien de $q = 600$ MeV/c et $\epsilon = 0.62$ assure la limite

$$\tilde{Q}^2 = \lim_{q' \rightarrow 0} Q^2 = 0.33 \text{ GeV}^2$$

identique pour toutes les mesures.

III.2.3 Découpages de l'espace de phase.

Pour les éléments différentiels de la section efficace

$$\frac{d\sigma_{lab}}{d|\vec{k}'|_{lab} d\Omega_{k'}^{lab} d\Omega_{p'}^{c.m.}} \quad (\text{III.8})$$

nous avons vu que l'espace de phase de l'électron diffusé était défini par l'acceptance étroite du spectromètre B avec les intervalles :

$$q' = q'_{ref} \pm 15 \text{ MeV} \quad q = (600 \pm 20) \text{ MeV} \quad \epsilon = 0.62 \pm 0.02$$

En ce qui concerne l'angle solide $d\Omega_{p'}^{c,m}$ du proton de recul, le positionnement des spectromètres impose une mesure dans le plan de diffusion leptonique. Avec la contrainte de l'acceptance angulaire verticale, nous limitons notre étude à une bande de $\pm 22^\circ$ autour de ce plan, qui correspond à la largeur maximale mesurable pour $q' = 111.5 \text{ MeV}/c$.

L'idée est de définir des cellules $\Delta\Omega_{p'}^{c,m} = \Delta\varphi \times \Delta \cos \theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ de dimension à peu près

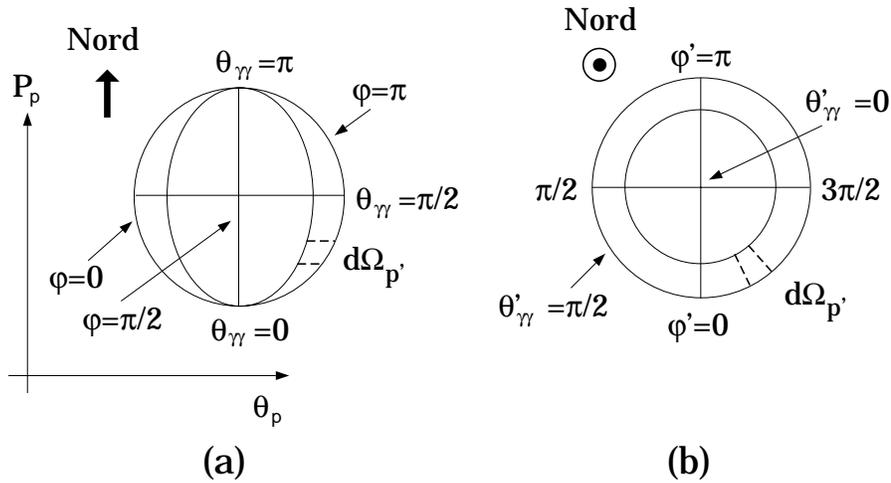


Figure III.7: Représentation des deux systèmes d'angles utilisés pour décrire l'espace de phase du proton. La bande de $\pm 22^\circ$ autour du plan horizontal est indiquée dans chaque cas. Deux exemples d'angles solides sont matérialisés par les traits pointillés et notés $d\Omega_{p'}$.

constante étant donné que, loin des “oreilles du chat” (fig.I.11), le taux de comptage varie peu. Le premier découpage utilisé est représenté sur la figure (III.7-a) qui reproduit l'espace de phase du proton dans le plan $(P_p - \theta_p)$. La sélection du plan de diffusion correspond à $\Delta\varphi = (0 \text{ ou } 180^\circ) \pm 22^\circ$ tandis que $\Delta \cos \theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ est fixé à 0.1.

La deuxième option (fig.III.7-b) équivaut à un changement de coordonnées dans lequel l'axe pôle Sud \rightarrow pôle Nord du ballon de rugby n'est plus vertical du bas vers le haut mais perpendiculaire au plan de la figure, pôle Nord vers l'avant. Dans ce repère, la variable φ' décrit les nouveaux méridiens et θ' les nouvelles parallèles. Les éléments d'angle solides $\Delta\Omega_{p'}^{c,m}$ sont définis par la bande $\theta' = 90 \pm 22^\circ$ avec φ' décrivant des secteurs de 11.25° ($2\pi/32$).

En plaçant l'origine au centre de l'espace de phase et en assimilant celui-ci à une

sphère, les composantes du vecteur \overrightarrow{OM} d'un événement s'expriment dans les deux repères par :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta' \sin \varphi' \\ r \cos \theta' \\ r \sin \theta' \cos \varphi' \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

D'où les relations entre les deux systèmes d'angles :

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi' &= \cos \theta / \sin \theta' \\ \sin \varphi' &= \sin \theta \cos \varphi / \sin \theta' \\ (\text{si } \sin \varphi' < 0 &\Rightarrow \varphi' = 2\pi - \varphi) \end{aligned}$$

Avec les angles θ et φ , les éléments d'angles solides deviennent très étirés en θ et très étroits en φ à l'approche des pôles. L'avantage des variables du second repère est de travailler avec des portions de l'espace de phase de formes plus homogènes qui permettent une sélection plus efficace des événements VCS dans la région des pôles. La comparaison des résultats avec ces deux découpages différents, exposée dans le chapitre V, est un test supplémentaire de l'analyse et de la simulation de l'angle solide.

III.2.4 Statistique

L'effet des polarisabilités généralisées se manifeste par une déviation de l'ordre de 10% dans la section efficace absolue, ce qui demande une grande précision sur la mesure pour leur extraction. Pour cette première expérience, l'objectif est d'obtenir une erreur relative sur les observables :

$$\frac{\Delta Pol}{Pol} = 30 \%$$

Le nombre d'événements mesurés N_{mes} nécessaire dans chaque cellule en $(q, q', \epsilon, \theta_{\gamma\gamma}^{cm}, \varphi)$ se déduit par :

$$\begin{aligned} N_{Pol} &\simeq 0.1 N_{mes} \\ \Delta N_{Pol} &= \Delta N_{mes} = \sqrt{N_{mes}} \\ \frac{\Delta Pol}{Pol} &= \frac{\sqrt{N_{mes}}}{0.1 N_{mes}} = 0.3 \end{aligned}$$

Soit $N_{mes} = 1111$ événements dans chaque cellule, correspondant à une précision sur le taux de comptage de 3%.

Le tableau (III.3) résume les taux de comptages obtenus pour différentes cinématiques ainsi que le temps d'acquisition passé sur chacun d'eux. La principale limitation sur l'intensité du faisceau provient du taux d'événements simples du côté proton qui ne doit pas engendrer un courant supérieur à 6 μA dans les chambres à fils (limite à $\simeq 150$ kHz).

III.3 Sections efficaces absolues

Une section efficace différentielle est toujours le rapport d'un nombre de coups dans un certain angle solide sur un coefficient de normalisation, la luminosité :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_{evts}}{\mathcal{L} \Delta\Omega} \quad (\text{III.10})$$

L'erreur totale sur la section efficace est la somme quadratique des erreurs sur chacune des trois quantités du membre de droite de l'équation (III.10). Dans les trois paragraphes suivants je présenterai les procédures de calcul et de contrôle utilisées dans l'analyse pour l'extraction de ces quantités. L'efficacité du système de détection et les coupures cinématiques sont tout d'abord discutées pour l'obtention du taux de comptage N_{evts} . La deuxième partie expose les contrôles des paramètres de la luminosité \mathcal{L} . Enfin, les grandes lignes de la simulation de l'angle solide $\Delta\Omega$ sont présentées.

III.3.1 Sélection des événements

L'acquisition d'un événement VCS est déclenchée par la détection en coïncidence d'un signal dans les scintillateurs des spectromètres A et B. Les données brutes stockées sur disque sont principalement :

- L'information temps des scintillateurs et l'énergie déposée.
- Les numéros de fils touchés dans les chambres à dérive et les temps de drift associés.
- Le signal cherenkov pour le spectromètre B.
- La position du faisceau sur la cible.

Pour mon analyse, j'ai utilisé le programme Cindy++, écrit en C++ par M.O. Distler [56], qui traite les données des chambres à dérive pour reconstruire les coordonnées des

cinématique	date	I (μA)	tps faisceau (heure)	taux A (kHz)	taux B (kHz)	taux VCS (Hz)
a_1	Avril 97	23	11	140	10	0.45
a_2	Avril 97	31	9	140	11.9	1.06
	Avril 96	25	11	113	10	0.89
b_1	Avril 96	22	9	120	8	0.38
b_2	Mars 97	25	9	115	9	0.75
	Avril 96	22	12	103	8	0.67
c_1	Avril 97	21	9	130	4	0.36
c_12	Avril 97	17	14	130	3	0.19
c_2	Avril 97	27	14	130	5	0.51
d_2	Avril 97	23	11	135	2.8	0.23
	Mars 96	17	13	110	2	0.18
d_23	Avril 97	16	9	129	1.9	0.11
	Mars 96	15	12	139	2	0.11
d_3	Avril 97	11	12	122	1.4	0.05
	Mars 96	9	10	110	1	0.04
d_13	Avril 97	13	2	130	1.6	-
	Mars 96	12	10	127	1.6	-
d_1	Mars 96	15	10	116	1.9	-
e_1	Avril 97	15	15	155	1.8	-
	Nov. 95	25	12	105	1.9	-
e_13	Avril 97	10	15	133	1.2	-
	Nov. 95	6.5	10	100	1.2	-
e_2	Avril 97	23	15	152	2.6	-
	Nov. 95	15	12	100	1.7	-
e_23	Avril 97	16.5	15	150	1.9	-
	Nov. 95	10	13	135	1.7	-
e_3	Avril 97	12	15	140	1.4	-
	Nov. 95	7.9	15	124	1.2	-

Tableau III.3: Taux de comptages mesurés pour les différentes cinématiques VCS. La dernière colonne correspond au taux de “bons” événements VCS, à l’intérieur de toutes les coupures expérimentales, pour une intensité I indiquée dans la troisième colonne et une épaisseur de cible fixée à 36 mm. Seules figurent les valeurs pour les cinématiques analysées.

particules à l'intersection du plan focal. Par l'intermédiaire des matrices de transport de chaque spectromètre les composantes des quadrivecteurs électron et proton sont reconstruites au niveau de la sortie de la cible. Enfin la correction des pertes d'énergie lors de la traversée de la cible permet de remonter jusqu'au vertex.

Ces différentes informations au niveau du vertex, de la sortie de la cible et du plan focal sont stockées dans des fichiers "ntuples" [64] et constituent la base de départ pour la sélection des événements VCS. La fiabilité de la mesure dépend de l'efficacité des détecteurs eux-mêmes mais aussi des algorithmes de traitement des données brutes. Ces points sont discutés dans les paragraphes suivants. Les coupures cinématiques, à l'intérieur desquelles le taux de comptage est évalué, sont également présentées.

Efficacité de la reconstruction des trajectoires.

Les temps de drift des fils touchés dans les chambres à dérive constituent l'information la plus en amont dans la reconstruction d'un événement. De son traitement dépend la bonne caractérisation de l'interaction mesurée.

La première étape de l'algorithme de reconstruction des trajectoires consiste à repérer dans chaque plan les plus larges "clusters" de fils touchés. Certains fils peuvent être éliminés s'ils remplissent l'une des conditions suivantes :

- Fil reconnu comme bruyant dans le spectre des numéros touchés et "éteint" artificiellement lors du traitement informatique.
- Temps de drift en dessous du minimum défini.
- Fil isolé du cluster, associé au bruit de fond ambiant.

Une fois que l'ensemble des "bons" fils est sélectionné, la cohérence du signal est vérifiée, notamment en ce qui concerne le nombre de changements de signe dans l'évolution des temps de drift d'une extrémité à l'autre du cluster. La figure (II.8) illustre que la réponse typique au passage d'une particule chargée est en effet une distribution des temps d'abord croissante (signe +) qui passe par un maximum, correspondant au fil le plus proche de la trajectoire (montage électronique en "common stop"), puis qui redécroit (signe -). Pour un événement typique on attend donc la détection d'un seul changement de signe.

En final, les temps de drift des fils retenus sont corrigés de la géométrie des lignes de champs afin d'accéder aux distances de la trajectoire à chaque fil. Le point d'intersection de la particule avec le plan de la chambre ainsi que son angle d'incidence sont alors obtenus par un ajustement linéaire.

Dans notre analyse, trois niveaux de contrainte sur le nombre de bons fils étiquetés sont applicables :

- OK_1 : au moins 3 fils touchés dans chacune des paires de plans x et s .
- OK_2 : au moins 2 fils touchés dans chaque plan.
- OK_3 : au moins 3 fils touchés dans chaque plan.

Le problème se pose alors de l'inefficacité des chambres qui, uniquement par l'absence de réponse de certains fils, peut faire échouer les critères de reconstruction précédents. Connaissant la multiplicité moyenne dans chaque plan (5 fils dans x et 4 dans s , cf. section II.6.1), le critère " OK_3 " apparaît assez contraignant et donc plus sensible que les autres à l'inefficacité. Un moindre écart à la réponse standard suffit à le mettre en défaut.

La détermination de l'efficacité de chaque fil a été développée par J. Friedrich, étu-

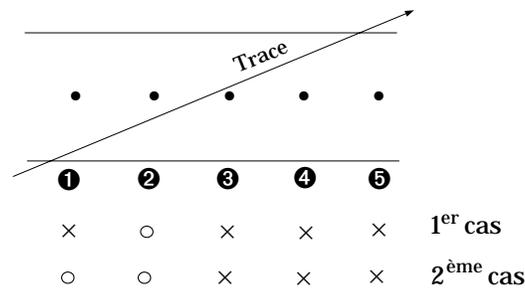


Figure III.8: Exemple de réponses au passage d'une particule chargée. Le deuxième cas montre la nécessité de considérer l'ensemble des fils qui *auraient du* répondre pour une estimation correcte de l'inefficacité.

diant de la collaboration A1 en thèse sur l'expérience VCS. Le principe repose sur l'observation que dans le cluster sélectionné par l'algorithme de reconstruction, tous les fils situés entre les deux extrémités doivent avoir un signal. Pour chaque événement, les fils défaillants sont repérés et la sommation sur l'ensemble des données à analyser fournit une inefficacité moyenne. Considérons l'exemple illustré dans la figure (III.8). Dans le premier cas, les extrémités du cluster correspondent aux numéros 1 et 5 et le fil 2 est compté comme inefficace. Cette première approche doit cependant être affinée pour gérer les effets de bord du cluster. Nous voyons en effet que dans le deuxième cas, l'algorithme va considérer le cluster 3,4,5 sans repérer de fils inefficaces alors que 1 et 2 sont défaillants. L'idée est donc de délimiter le cluster non plus par les deux fils extrêmes qui ont répondu mais plutôt par ceux qui auraient du répondre,

indépendamment de la présence d'un signal.

La méthode utilisée repose sur l'observation des spectres en temps du premier et du dernier fil touché. En corrigeant de la corrélation avec l'angle de la trajectoire, on obtient la dépendance de la figure (III.9). La réponse la plus probable forme le pic du côté des temps de drift les plus courts, les deux plateaux bien marqués vers les temps plus longs sont interprétés comme la réponse d'un fil qui aurait du être en deuxième ou troisième position dans le cluster. Le fait qu'il soit détecté en première position signifie que le ou les deux fils précédents ont été inefficaces. Suivant la position dans le spectre en temps des fils extrêmes il est donc possible de traiter l'inefficacité des fils adjacents au cluster sélectionné. Cette méthode a l'avantage d'être indépendante de la géométrie des cellules des chambres à dérive.

En analysant une première fois un ensemble de données par cette méthode, nous avons donc accès à l'efficacité moyenne ξ de chaque fil. A partir du critère de sélection choisi (OK_1, OK_2, OK_3), un calcul combinatoire donne la probabilité de perdre la trajectoire qui est compensée par une pondération supérieure à 1 de l'événement. A titre d'exemple, je détaille le calcul de cette probabilité avec la contrainte OK_3 . On considère les quatre plans de fils, repérés par l'indice $p = 1, \dots, 4$. Dans chacun de ces plans, n_p fils sont touchés par la trajectoire ($n_p \geq 3$ avec la condition OK_3). Soit \mathcal{P}_p la probabilité d'avoir au moins 3 fils touchés dans le plan p . Avec le critère OK_3 , la probabilité de reconstruire la trajectoire vaut

$$\prod_{p=1}^4 \mathcal{P}_p$$

Connaissant l'efficacité de chaque fils, nous pouvons calculer la probabilité de toutes les configurations possibles entre 0 et n_p fils. La normalisation à 1 conduit à :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{m=0}^{n_p} C_{n_p}^m \prod_{i=1}^m \xi_p(i) \prod_{i=m+1}^{n_p} (1 - \xi_p(i)) \\ 1 &= \underbrace{\sum_{m=3}^{n_p} \dots}_{\mathcal{P}_p} + \underbrace{\sum_{m=0}^2 \dots}_{(1-\mathcal{P}_p)} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

avec $\xi_p(i)$ l'efficacité du $i^{\text{ème}}$ fil touché dans le plan p et $C_{n_p}^m = n_p!/[m!(n_p - m)!]$.

D'où l'efficacité de la reconstruction de la trajectoire :

$$1 - \delta = \prod_{p=1}^4 \mathcal{P}_p = \prod_{p=1}^4 \left\{ 1 - \sum_{m=0}^2 C_{n_p}^m \prod_{i=1}^m \xi_p(i) \prod_{i=m+1}^{n_p} (1 - \xi_p(i)) \right\} \quad (\text{III.12})$$

qui est corrigée par la pondération de l'événement $1/(1 - \delta)$.

Pour notre analyse, nous utilisons la contrainte la moins forte pour la reconstruction

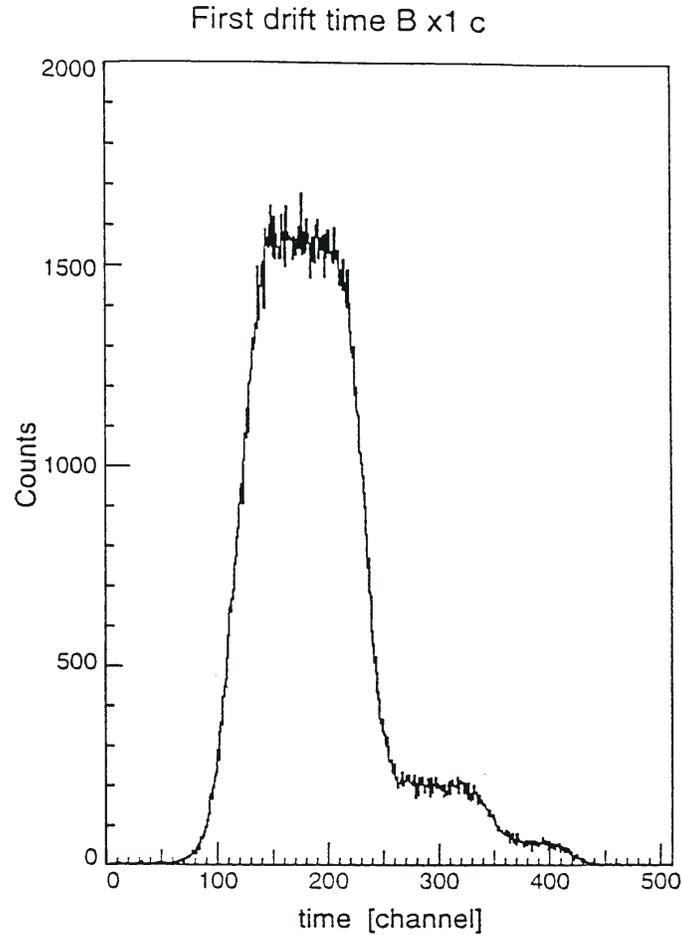


Figure III.9: Spectre en temps du premier fil touché d'un cluster. Les deux plateaux à droite du pic principal correspondent à la présence d'un ou deux fils adjacents inefficaces.

des trajectoires, OK_1 . Le rejet de cette condition par un événement demande une grande inefficacité de détection, très peu probable. Ceci explique un effet observé de la pondération très faible qui amène à la conclusion d'une très bonne efficacité de reconstruction.

Temps de coïncidence

Le premier critère de sélection d'une interaction dans la cible est la détection en coïncidence de l'arrivée d'une particule dans le spectromètre A et dans B. Avec notre dispositif expérimental, l'information temps est donnée par le plan de scintillateurs "ToF" de chaque spectromètre (fig.II.13). Lorsqu'un proton est détecté dans A, le

signal électron est attendu dans B durant un intervalle maximum de 70 ns (limitation du bruit de fond). La répartition des temps $t_A - t_B$ mesurés est illustrée figure (III.10). La corrélation entre l'électron et le proton diffusés des événements VCS se traduit par un pic, au dessus de la distribution plate des coïncidences fortuites. La position

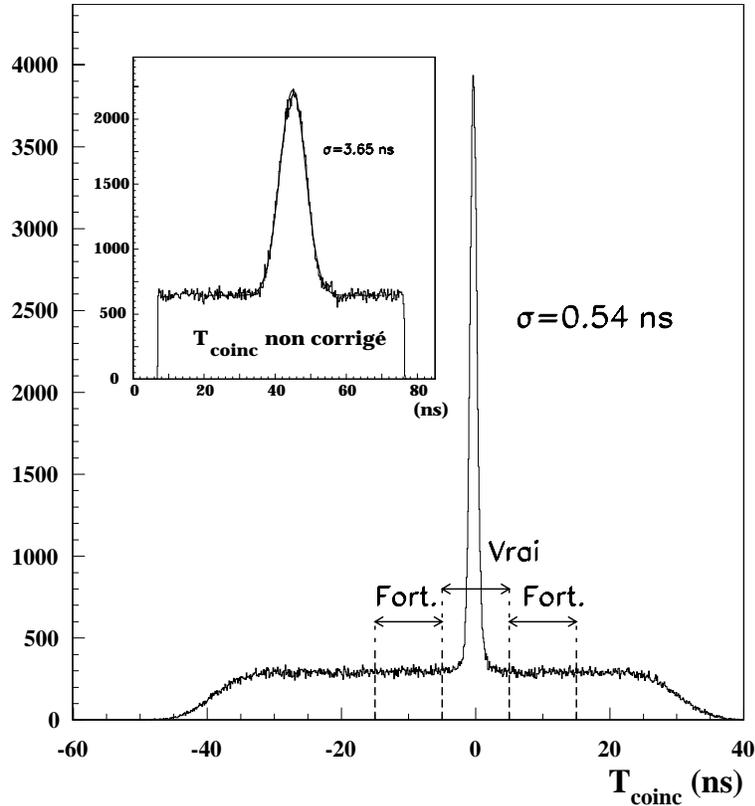


Figure III.10: Exemple de pic de coïncidence obtenu pour la cinématique d₂₃. Le cycle utilise 100% de MAMI et la haute résolution de l'appareillage permettent une soustraction des fortuites très confortable. Les largeurs d'intervalles utilisées pour l'analyse sont reportées. L'encadré illustre le pic en temps issu des données brutes.

centrale du pic dépend du retard pur (longueur de câblage) entre les montages électroniques de A et de B. En ce qui concerne la largeur, plusieurs effets contribuent. Leur correction permet d'augmenter le rapport signal/bruit et améliore la précision de la soustraction des fortuites :

- La longueur des trajectoires dans les spectromètres, et donc le temps nécessaire pour atteindre les plans de scintillateurs, dépendent de la position de l'événement dans l'acceptance. A partir des coordonnées détectées au plan focal et connaissant l'optique magnétique des aimants, il est possible de remonter à la distance parcourue. La vitesse mesurée de la particule permet alors de

corriger la différence de temps par rapport à une trajectoire de référence.

- La mesure en temps des scintillateurs “ToF” est toujours effectuée par les photomultiplicateurs de l’extrémité “gauche” des lattes (fig.II.13). Le temps de collection de la lumière varie donc avec la distance du point de traversée de la particule. Cette distance peut être estimée en prolongeant la trajectoire reconstruite au plan focal dans le plan des scintillateurs. La correction utilise alors la vitesse moyenne de propagation de la lumière dans la latte, mesurée à 13.14 cm/ns.
- Le câblage indépendant de chaque photomultiplicateur peut induire des retards différents d’une latte à l’autre. Le réglage de ces “offsets” s’effectue à l’aide d’une procédure d’itération qui ajuste la moyenne du pic de coïncidence à une même valeur pour toutes les paires possibles de scintillateurs.

Ces corrections sont incluses dans le programme de traitement des données brutes Cindy++. L’expression complète du temps de coïncidence devient :

$$T_{coinc} = \underbrace{t_B - t_A}_{T_{coinc}^{brut}} + (t_B^{traj.} + t_B^{trans.} + t_B^{offset}) - (t_A^{traj.} + t_A^{trans.} + t_A^{offset})$$

avec

$$t^{traj.} = \frac{L - L_{ref}}{\beta c} \quad \text{et} \quad t^{trans.} = \frac{D_{scint.}}{v_{scint.}} \quad (\text{III.13})$$

La figure (III.10) montre les améliorations obtenues à partir du spectre brut, reporté dans l’encadré. Le rapport Signal/Bruit passe de 2.0 à 5.4 et la résolution de 3.65 à 0.54 ns. Ces caractéristiques témoignent de la haute résolution de l’appareillage et de l’avantage d’un grand cycle utile.

La localisation des “bons” événements dans un pic étroit permet la soustraction fiable du fond de coïncidences fortuites.

Reconstruction du vertex.

Afin de mieux dissiper la puissance incidente sur la cible, un système magnétique, appelé le “wedler”, fait balayer le faisceau sur une surface de $6 \times 4 \text{ mm}^2$ autour du point central. Ce dispositif est calibré après chaque changement d’énergie de faisceau afin d’assurer un bon centrage et les bonnes amplitudes de déviation. La figure (III.11) illustre la répartition des vertex reconstruits dans le plan perpendiculaire au faisceau. Les côtés du rectangle exploré sont plus peuplés que le centre car ils correspondent

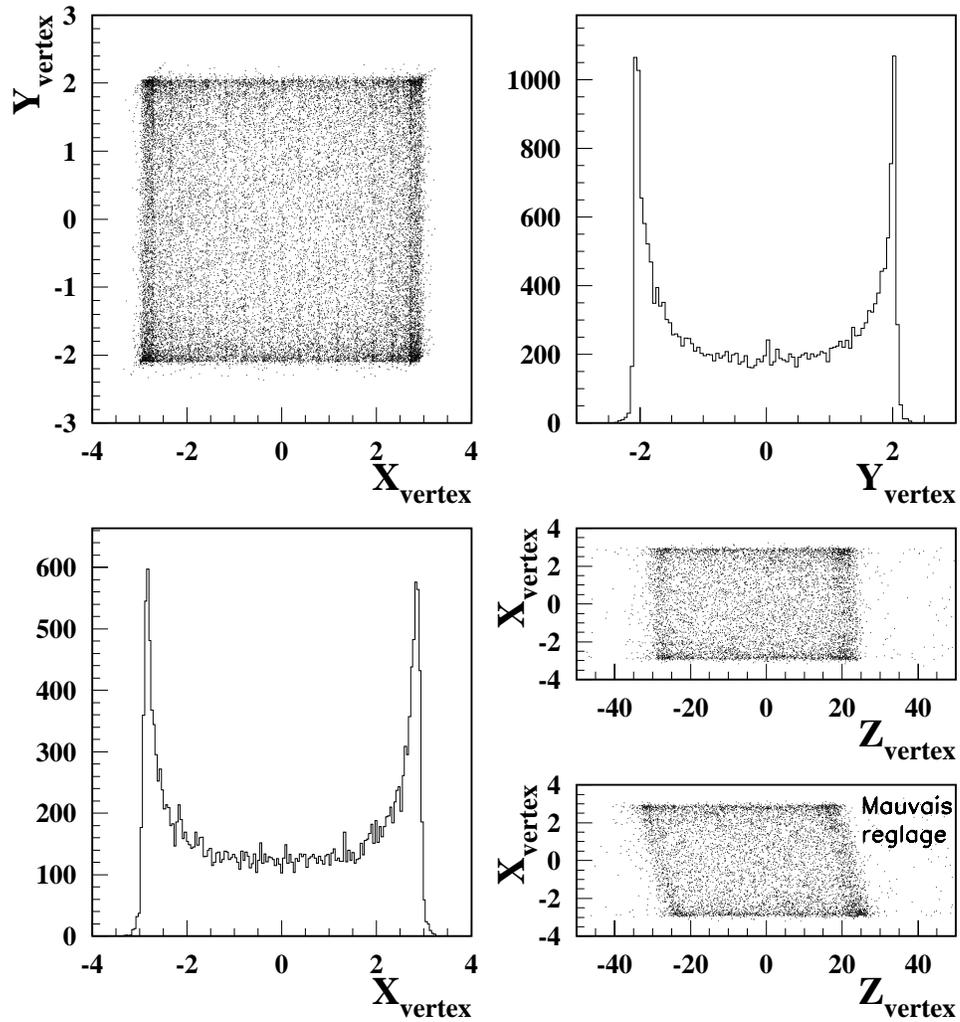


Figure III.11: Distribution des événements dans le plan perpendiculaire à l'axe du faisceau. La vitesse de balayage, minimum aux bords et maximum au centre, explique la densité plus importante pour les positions extrêmes verticales et horizontales. Les deux figures réduites montrent un test de la calibration qui consiste à vérifier l'absence de corrélation entre les coordonnées transverses et z .

aux points de rebroussement où le balayage passe par une vitesse nulle.

L'encodage des déviations du wedler permet une connaissance précise de la position du faisceau dans le plan (X, Y) . La coordonnée transverse Y peut également s'obtenir par

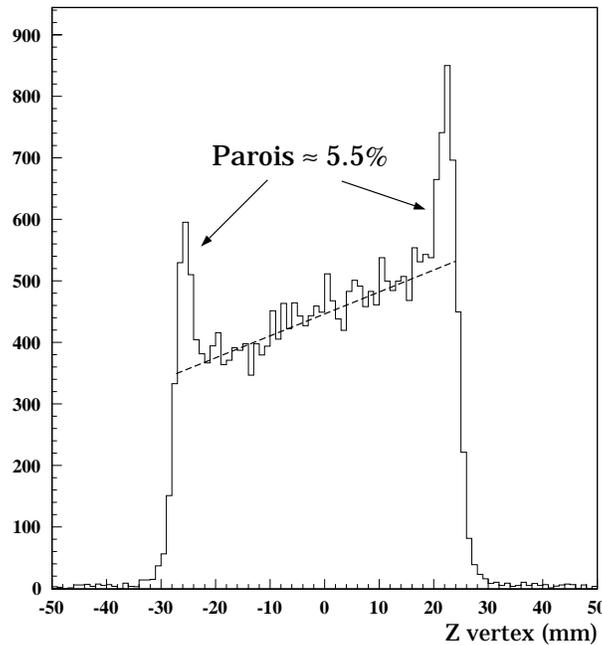


Figure III.12: Distribution des événements sur l'axe du faisceau obtenue pour la cinématique d₂₃. Les coupures appliquées portent sur le cherenkov, le temps de coïncidence et la masse manquante. La position centrale reconstruite est décalée de 1.5 mm vers l'arrière.

l'intersection des deux trajectoires reconstruites des spectromètres A et B. Cependant, l'optique parallèle-point en transverse du côté proton favorise plutôt la détermination de l'angle de diffusion et offre une moins bonne résolution sur Y . L'intérêt de cette dernière méthode réside uniquement dans le test de la reconstruction de A.

La détermination de la coordonnée Z du vertex, suivant l'axe du faisceau, utilise les informations du wedler et de la trajectoire reconstruite du spectromètre B qui possède une bonne résolution en position.

La connaissance du point d'interaction et de la direction des trajectoires permet de calculer la distance parcourue dans la cible par les électrons incident et sortant et par le proton de recul. La perte d'énergie associée est estimée à partir du processus d'ionisation qui domine dans notre gamme d'énergie. Le bremsstrahlung est pris en compte dans la simulation de l'angle solide (section III.3.3).

La figure (III.12) montre un spectre expérimental obtenu avec la cinématique d₂₃. La mesure des bords de cible à mi-hauteur donne un décalage de 1.5 mm vers l'arrière par rapport à la position centrale théorique. Les origines possibles de ce décalage sont

discutées dans la section (V.1.3). Par la suite les coupures effectuées dans l'analyse seront symétriques par rapport à ce point.

La contribution des parois paraît relativement importante et a justifié une mesure en cible vide afin d'estimer la pollution vers l'intérieur. La coupure sur l'impulsion q' du photon sortant n'est cependant pas appliquée et l'effet de 5.5% indiqué ici est surévalué. La prise de données en cible vide donne également l'occasion de vérifier la résolution en position. Cette étude fait l'objet du prochain paragraphe.

Contribution cible vide.

La contribution des parois de la cible est gouvernée par la cinématique de la diffusion quasi élastique dans l'épaisseur des fenêtres de havar. Pour une estimation du taux de comptage et de la contamination vers l'intérieur, nous avons pris des données avec une cible vide de géométrie identique construite par I. Ewald [65]. La figure (III.13) montre la distribution des événements suivant l'axe du faisceau avec une sélection en temps et en masse manquante. Les parois sont reconstruites par deux pics de largeur à mi-hauteur 3.7mm ce qui correspond à une résolution en position de 1.5 mm, légèrement supérieure à la valeur nominale de 1 mm donnée pour le spectromètre B (tableau II.2). La valeur centrale de chaque pic est mesurée à -25.9 et $+23.0$ mm, soit une longueur de cible de 48.9 mm. La valeur théorique à comparer avec cette mesure doit prendre en compte le balayage du faisceau sur les fenêtres arrondies de la cellule cible (fig.II.5). Une simulation donne $L_{théo} = 48.7$ mm, en bon accord avec l'expérience. Pour l'analyse, la coupure sur l'intérieur de la cible est définie par $-19.5 \text{ mm} < Z_{vertex} < 16.5 \text{ mm}$. Nous voyons que la contribution des parois est faible dans cette région. Elle est estimée à $\simeq 1.8\%$ sur l'exemple de la figure (III.13). Si l'on inclue le taux de comptage relatif au VCS de 5.5% indiqué figure (III.12), la contamination finale tombe en-dessous de 0.1% et devient négligeable.

Pollution en deutérium

Une dernier contrôle au niveau de la cible concerne la pureté de l'hydrogène liquide utilisé. La principale pollution provient du taux de deutérium. Quelques tests ont été effectués avec les spectromètres positionnés pour observer la diffusion quasi-élastique sur le proton du deutérium. Les résultats montrent que la contamination isotopique est négligeable.

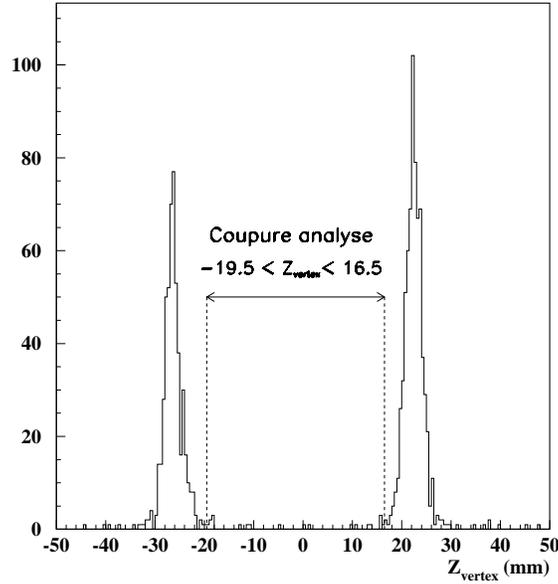


Figure III.13: Distribution des vertex suivant l’axe faisceau observée avec une cible vide. L’acquisition correspond à 2h de données avec le réglage a_1 et une intensité de $9.2 \mu A$. Les seuls critères de sélection appliqués sont le temps de coïncidence et la masse manquante $|M_{miss}^2| < 4000 \text{ MeV}^2$.

Détecteur Cherenkov.

Indépendamment de la coupure dans l’épaisseur de cible, le détecteur cherenkov placé à l’arrière du système de détection du spectromètre B, permet une réjection efficace des particules négatives (π^- , μ^-) autres que les électrons. La figure (III.14-a) montre le temps de coïncidence obtenu pour la cinématique VCS “e_2” à $q' = 111.5 \text{ MeV}/c$ sans aucune coupure. La contribution des pions et des muons apporte une dissymétrie dans le spectre due à leur longueur de trajectoire différente dans le spectromètre. Le seuil en impulsion est très élevé pour ces particules ($\mu^- : 2074$, $\pi^- : 2740 \text{ MeV}/c$) ce qui exclue la possibilité qu’elles déclenchent le rayonnement cherenkov (fig.III.14-b). La question se pose en revanche de l’efficacité de détection des électrons. La figure(III.14-d) montre le spectre en masse manquante associé aux particules qui n’ont pas donné de signal cherenkov et qui ne proviennent pas des parois (coupure sur l’intérieur de la cible : $-19.5 < Z_{vertex} < 16.5 \text{ mm}$). La présence d’un pic à $M_{miss}^2 = m_{\pi^0}^2$ associe une grande majorité de ces événements à l’électroproduction de π^0 . Ceci s’explique par le fait que la cinématique place ces électrons très bas dans l’acceptance en impulsion du spectromètre B, dans une zone non couverte par le détecteur cherenkov (section

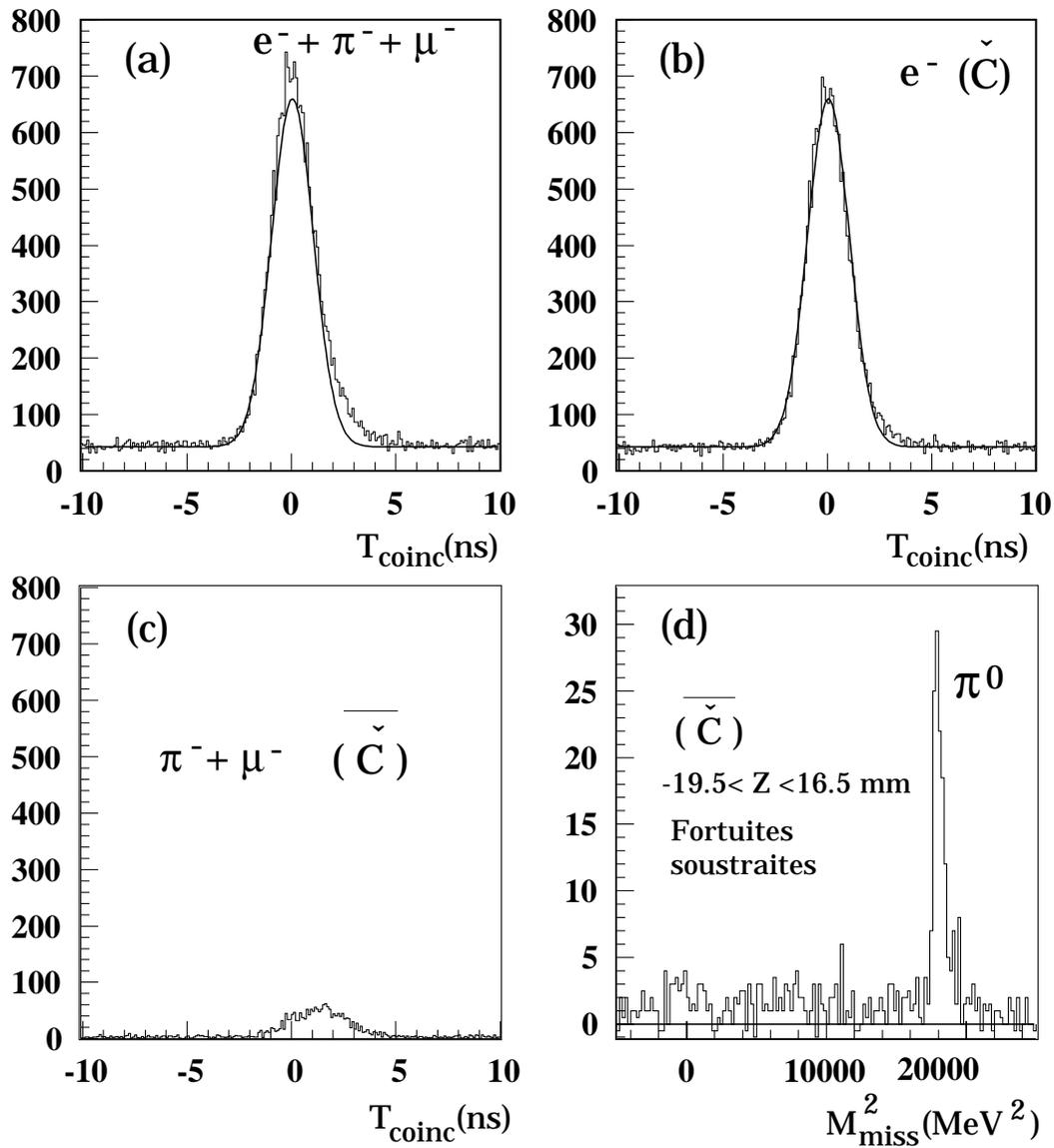


Figure III.14: La condition d'un signal cherenkov dans $B(\check{C})$ supprime la contribution des π^- et des μ^- ((a) et (b)). Une faible fraction des événements ($\leq 1\%$) est cependant rejetée alors qu'ils rentrent dans toutes les coupures de l'analyse ((c) et (d)).

II.6.3). Pour évaluer l'inefficacité de détection du processus de diffusion Compton virtuelle le rapport des taux de comptages $N(\bar{c})/N(c)$ est calculé à l'intérieur de toutes les coupures de l'analyse et donne un résultat $\leq 1\%$.

Rebond dans le spectromètre A

Pour les cinématiques les plus proches de la diffusion élastique (a : $q' = 33.6$ MeV/c et b : $q' = 45.0$ MeV/c), une importante contribution d'événements mal reconstruits par le spectromètre proton est observée. La figure (III.15-a) montre la distribution des vertex dans le plan horizontal de la cible. La coordonnée transverse X_{vertex} reportée ici n'utilise pas l'information du wedler mais l'intersection des trajectoires des deux spectromètres. La non validité de la reconstruction du spectromètre A place le vertex des protons déviés en-dehors des limites de la cible. L'étude du côté électron montre que ces événements proviennent d'une diffusion élastique dans la cible, caractérisée par $q' = 0$ et $\sqrt{s} = m_p$ (fig. III.15-b).

Les illustrations de la région d'espace de phase du proton mesurée dans les cinématiques "a" et "b" (fig. III.5 et III.6) montrent que les protons diffusés élastiquement sont hors de l'acceptance du spectromètre et ne peuvent donc pas être détectés en coïncidence avec l'électron associé. Cependant, ces images ne font que définir une cinématique nominale, pour une interaction au centre de la cible. En évoluant de l'arrière vers l'avant de la cible, l'acceptance angulaire horizontale, par exemple, se déplace vers les plus grands angles de diffusion. La figure (III.16) schématise les ouvertures des deux spectromètres et le domaine de la ligne élastique en coïncidence avec l'électron pour le réglage b.1. L'évolution de l'acceptance angulaire proton, de la position centrale vers l'avant de la cible, montre que certains événements élastiques arrivent dans l'ouverture physique du spectromètre même s'ils restent trop hauts en impulsion pour être normalement détectés dans le plan focal. L'interprétation de la contribution observée est alors un rebond de certains protons sur les bords du collimateur ou sur un pôle de l'aimant avec un changement de direction qui renvoie les particules dans les détecteurs du plan focal. La position et l'angle dans ce plan sont bien reconstruits mais l'impulsion est erronée et la trajectoire calculée par l'optique magnétique n'est pas valide. L'utilisation de différentes tailles de collimateurs fait varier linéairement le taux de rebonds en fonction de l'angle solide. L'hypothèse la plus probable est donc celle d'une interaction avec un pôle de l'aimant plutôt que sur un bord de la fenêtre d'entrée. Malgré la faible probabilité associée à l'observation d'un rebond, la section efficace élastique, à l'origine du phénomène, domine tellement celle du VCS (\simeq cinq ordres de grandeur) que la contamination résultante est importante. Au delà de la compréhension de cette contribution, la principale préoccupation est

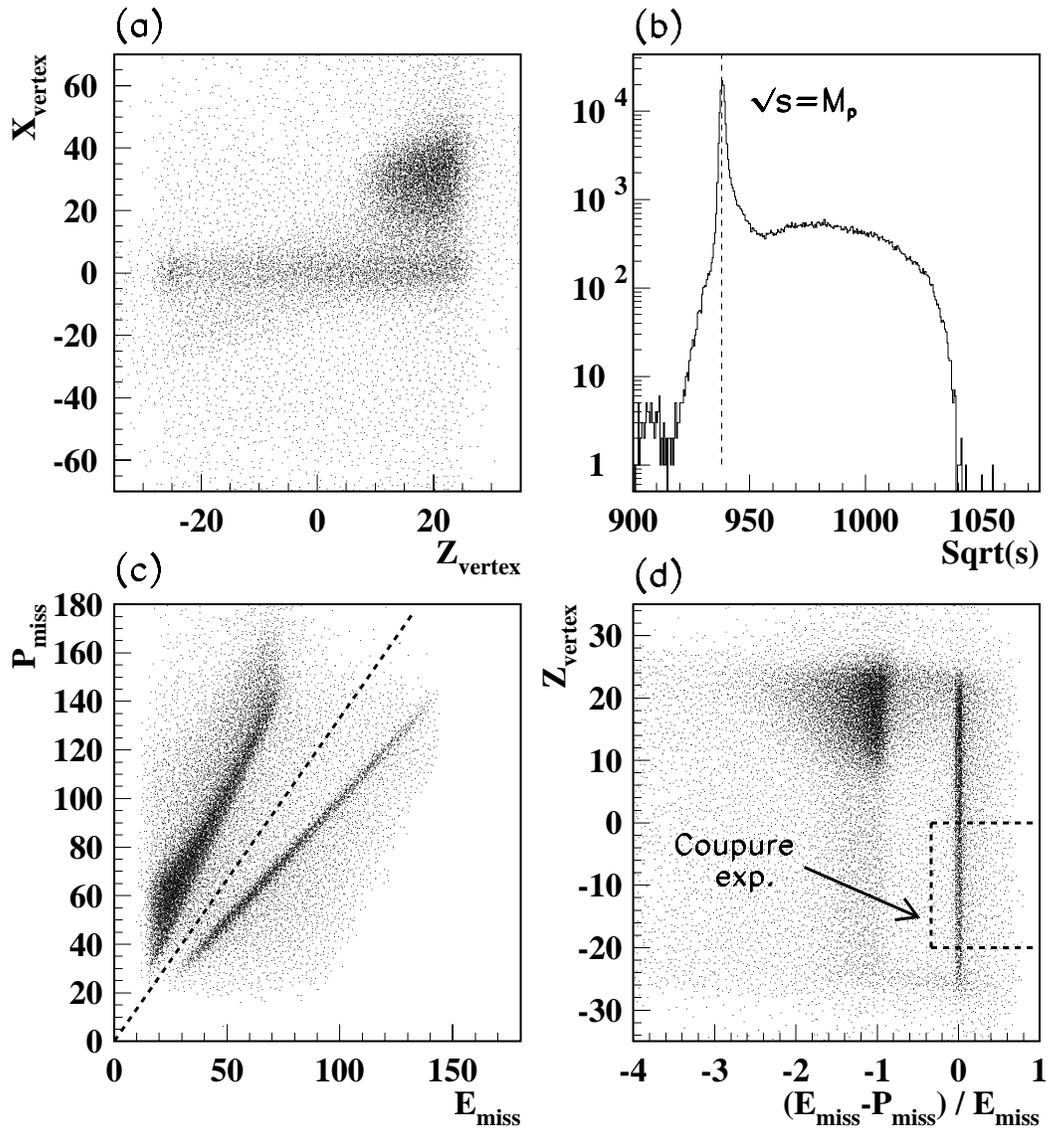


Figure III.15: Illustration de la contamination des événements VCS par le rebond des protons de la cinématique élastique dans le spectromètre A. Le réglage utilisé est b_1.
 (a) : Manifestation du rebond par le vertex reconstruit en-dehors des limites de la cible.

(b) : Du côté électron, la présence d'un pic à $\sqrt{s} = m_p$ signe une diffusion élastique dans la cible des événements rebond.

(c) : Séparation, dans le plan $E_{miss} - P_{miss}$, entre les événements VCS (sur la bissectrice) et les rebonds (au-dessus) : $P_{miss} < 4/3 E_{miss}$.

(d) : Coupures effectuées dans l'analyse pour atténuer la contamination des rebonds.

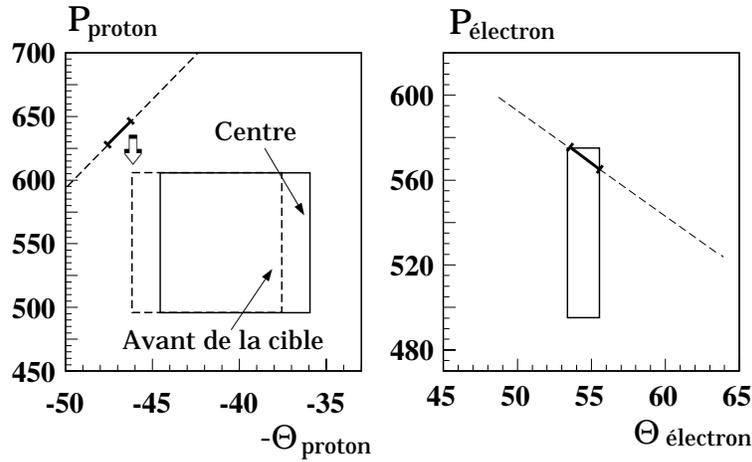


Figure III.16: Position dans l'acceptance du spectromètre A, du domaine de cinématique élastique sélectionné par l'acceptance de B.

la mise en place d'un critère suffisamment sélectif afin de la séparer des bons événements VCS. Le spectre de la figure (III.15-b) montre qu'une coupure nette n'est malheureusement pas triviale. Les effets de résolution expérimentale et surtout la queue radiative associée aux rebonds ont tendance à mélanger les deux contributions, sans distinction cinématique possible. La sélection la plus efficace repose sur la masse manquante. Le mécanisme du rebond après la diffusion élastique peut s'écrire :

$$k + p \rightarrow k' + p' \rightarrow k' + p'' + R$$

où p'' désigne le quadrivecteur du proton après diffusion dans le spectromètre sur un noyau qui recule avec le quadrivecteur R . La masse manquante reconstruite par l'appareillage vaut

$$M_{miss}^2|_{rebond} = R^2 = (k + p - k' - p'')^2 = (p' - p'')^2 \quad (\text{III.14})$$

Le noyau de recul est typiquement du fer que l'on peut, dans une première approximation, considérer comme infiniment lourd. Le proton ne subit alors qu'un changement d'angle, impliquant les relations

$$p''^0 = p'^0, \quad \vec{p}' \cdot \vec{p}'' = |\vec{p}'|^2 \cos \theta_{p'p''}$$

L'expression de la masse manquante (III.14) devient :

$$M_{miss}^2|_{rebond} = 2|\vec{p}'|^2 (\cos \theta_{p'p''} - 1) \leq 0$$

Ceci se traduit, dans le plan Impulsion-Energie manquantes, par une répartition des événements rebonds au-dessus de la ligne " $E_{miss} = P_{miss}$ " du VCS (fig. III.15-c). Ce

raisonnement est faussé par la non validité du quadrivecteur proton reconstruit après le rebond. Cependant, une simulation de la “réflexion” du proton, sans changement d’impulsion, conduit à des distributions qualitativement en accord avec les données. Dans le cas de la cinématique b_1, la coupure appliquée est $P_{miss} < 4/3 E_{miss}$. Celle-ci élimine une grande majorité des rebonds sans atteindre les événements VCS dont l’extention du côté des masses manquantes négatives se limite essentiellement à la résolution expérimentale. Afin de minimiser la contribution de la queue radiative du rebond qui passe au-delà de la coupure, seule la partie arrière de la cible est prise en compte (fig. III.15-d). Pour passer le collimateur du spectromètre protons, les événements élastiques provenant de cette zone doivent en effet subir d’importantes variations de la cinématique par rayonnement de photons ou collisions, ce qui limite fortement leur probabilité. La figure (III.15-d) illustre les coupures effectuées pour l’analyse. Les événements VCS se répartissent sur la ligne $(E_{miss} - P_{miss})/E_{miss} = 0$ tandis que les rebonds sont concentrés du côté négatif, dans la région des Z_{vertex} élevés.

Distribution en φ

Pour notre expérience la possibilité d’incliner verticalement le spectromètre B n’est pas utilisée et toutes les mesures se font dans le plan horizontal du laboratoire. L’acceptance verticale des deux collimateurs en coïncidence définit donc un domaine accessible en φ symétrique autour de 0 ou 180°. La figure (III.17) montre les distributions expérimentales obtenues avec les deux réglages de la cinématique à $q' = 45$ MeV/c. Les spectres sont bien centrés autour de 180°. Les formes, très différentes d’un réglage à l’autre, s’expliquent en observant sur la (fig.III.5) la région d’espace de phase du proton interceptée par le spectromètre A. Dans le cas de b_2, la position de l’acceptance très à droite dans le ballon de rugby sélectionne les événements proches du méridien $\varphi = 180^\circ$ d’où la distribution relativement serrée autour de cette valeur. La position b_1 intercepte quant à elle le “pôle sud” où tous les méridiens se rejoignent ce qui explique une largeur plus importante. Le profil très différent de celui d’une gaussienne provient des effets combinés de la coupure de l’acceptance et de la section efficace croissante lorsque l’on se rapproche de la diffusion élastique. Pour ce réglage, le découpage de l’espace de phase suivant θ' et φ' (section III.2.3) aura l’avantage de considérer plus d’événements et sera plus efficace par rapport aux données accumulées.

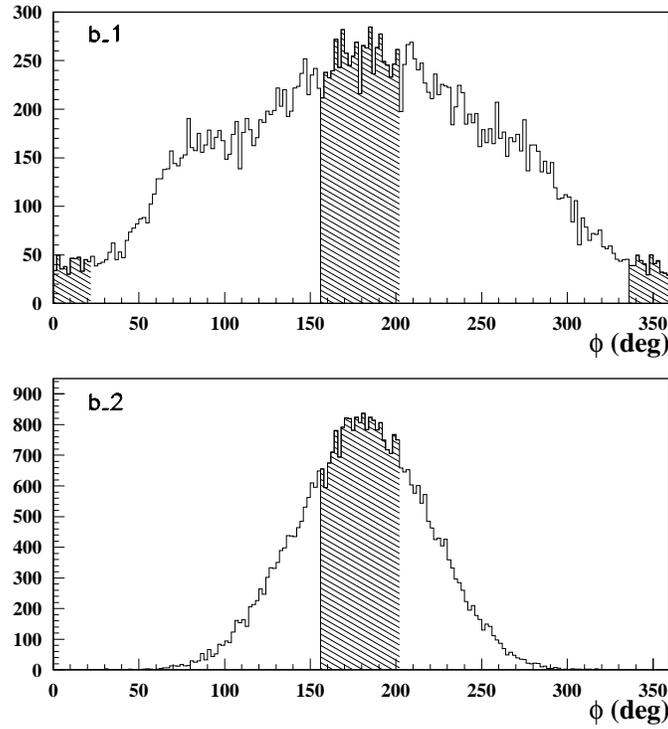


Figure III.17: Exemples de distributions en φ obtenues à $q' = 45$ MeV. Le profil des spectres est le reflet du domaine angulaire intercepté pour chacun des deux réglages b_1 et b_2. La sélection de l'analyse $\varphi = 0 \pm 22^\circ$ ou $180 \pm 22^\circ$ est indiquée par les zones hachurées.

Masse manquante

A l'intérieur de toutes les sélections décrites précédemment, l'identification des événements VCS, c'est-à-dire la signature que la partie non détectée de l'état final est un photon, repose sur la mesure d'une masse manquante nulle. Celle-ci est obtenue par la relation

$$M_{miss}^2 = [e + p - (e' + p')]^2 \quad (\text{III.15})$$

où $(e + p)$ désigne le quadrivecteur de l'état initial corrigé des pertes moyennes d'énergie et $(e' + p')$ celui de l'état final, détecté par les deux spectromètres. Cette équation montre que la reconstruction de M_{miss}^2 est sensible à toutes les erreurs possibles sur les quadrivecteurs des électrons et protons incidents et sortants. En dehors de l'efficacité et de la résolution de l'appareillage, une bonne maîtrise de l'alignement et de la calibration des détecteurs est donc nécessaire.

En réécrivant (III.15) dans le référentiel du laboratoire

$$M_{miss}^2 = [k_{lab}^0 + m_p - k'_{lab}{}^0 - p'_{lab}{}^0]^2 - [\vec{k} - \vec{k}' - \vec{p}']^2$$

on obtient les relations suivantes pour la répercussion sur la masse manquante des incertitudes en angle et en impulsion des particules (la notation “lab”, omise pour plus de clareté, s’applique à tous les angles et impulsions) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{miss}^2}{\partial |\vec{k}|} &= 2 q' (1 - \cos \theta_{\gamma'e}) \\ \frac{\partial M_{miss}^2}{\partial |\vec{k}'|} &= -2 q' (1 - \cos \theta_{\gamma'e}) \\ \frac{\partial M_{miss}^2}{\partial |\vec{p}'|} &= -2 q' \left(\frac{|\vec{p}'|}{p'^0} - \cos \theta_{\gamma'p'} \right) \\ \frac{\partial M_{miss}^2}{\partial \theta_e} &= -2 |\vec{k}'| \left(|\vec{k}| \sin \theta_e - |\vec{p}'| \sin(\theta_e + \theta_{p\parallel}) \cos \theta_{p\perp} \right) \\ \frac{\partial M_{miss}^2}{\partial \theta_p} &= -2 |\vec{p}'| \left(|\vec{k}| \sin \theta_p - |\vec{k}'| \sin(\theta_p + \theta_{e\parallel}) \cos \theta_{e\perp} \right) \end{aligned} \quad (III.16)$$

La largeur totale de la masse manquante reconstruite s’obtient par la somme quadratique de toutes les contributions. Les valeurs des angles et des impulsions sont fixées par le choix de la cinématique mesurée. La résolution des spectromètres donne les incertitudes :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k}{k} &= 10^{-4}, & \frac{\Delta k'}{k'} &= 10^{-4}, & \frac{\Delta p'}{p'} &= 10^{-4} \\ \Delta \theta_e &= 3 \text{ mrad}, & \Delta \theta_p &= 3 \text{ mrad} \end{aligned}$$

L’application numérique pour la cinématique e2 est un accord avec la largeur expérimentale $\Delta M_{miss}^2 = 435 \text{ MeV}^2$ observée sur la figure (III.18-a).

L’énergie nominale disponible dans le centre de masse reste sous le seuil de production du π^0 mais pour les grandes valeurs de q' (90 et 111.5 MeV/c) l’ouverture des spectromètres recouvre quand même une partie de l’espace de phase du pion d’où le pic observé à $M_{miss}^2 = m_{\pi^0}^2 = 18219 \text{ MeV}^2$.

Dans le domaine d’énergie des polarisabilités étudié à MAMI, la haute résolution des spectromètres du hall A1 sépare complètement cette contribution de celle des photons. Les formules (III.16) montrent cependant que la largeur en masse manquante varie essentiellement comme l’impulsion q'_{lab} du photon réel. Pour des expériences à plus haute énergie ($q' \gg m_\pi$) la séparation des deux états devient beaucoup plus problématique.

La figure (III.18-b) montre le spectre avec la coupure supplémentaire $q' = 90 \pm 15$

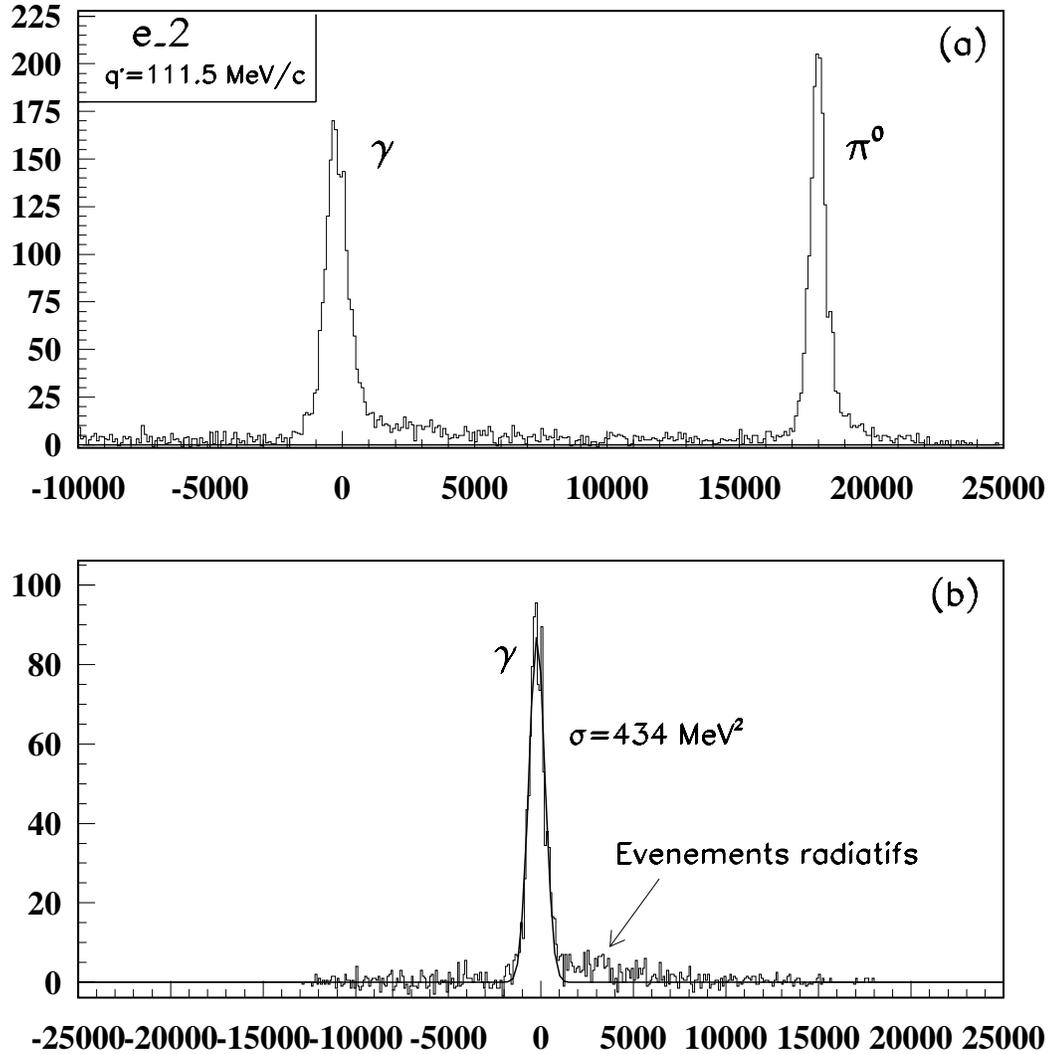


Figure III.18: Spectres en masse manquante obtenus pour la cinématique e_2 . La résolution des spectromètres du hall A1 sépare clairement la contribution des π^0 de celle des photons (a). Après l'application de toutes les coupures de l'analyse, la figure (b) montre un spectre bien centré en zéro et sans bruit de fond résiduel.

MeV/c. Les événements π^0 sont supprimés et aucun bruit de fond ne subsiste loin du pic de photons. La valeur centrale est très proche de zéro ce qui témoigne d'une bonne reconstruction de l'interaction. La superposition d'un profil gaussien met en évidence la présence d'une queue radiative du côté des masses manquantes positives. Ceci s'interprète comme la manifestation des corrections radiatives réelles au VCS. L'effet dominant est l'émission d'un seul photon supplémentaire, q'' , par l'électron incident ou sortant. La masse manquante reconstruite devient donc

$$M_{q'q''}^2 = q'q'' (1 - \cos \theta_{q'q''}) \geq 0 \quad (\text{III.17})$$

Le spectre des photons q'' est illustré section (IV.3.3). D'une manière générale, la présence de ces événements radiatifs dans le taux de comptage apporte une correction importante à la section efficace. La contribution de tous les processus possibles avec un photon supplémentaire est calculable à partir de la théorie de l'électrodynamique quantique. Ce travail a constitué la partie théorique de ma thèse et est reporté dans le chapitre IV. Le calcul et la mise en œuvre des corrections radiatives du VCS et de la diffusion élastique y sont présentés.

A ce stade de l'analyse, nous avons défini la méthode de sélection des événements VCS et les cellules cinématiques à l'intérieur desquelles le taux de comptage est évalué. L'efficacité du système de détection a été vérifiée. Les deux paragraphes suivants présentent le contrôle de la luminosité et la simulation de l'angle solide qui permettent l'obtention de la section efficace expérimentale.

III.3.2 Les paramètres de la normalisation

La luminosité \mathcal{L} (Eq.III.10) exprime le nombre de noyaux cible présents dans le flux incident du faisceau et assure la normalisation de la section efficace :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{Nb. } e^-/s \times \text{Temps d'acquisition} \times \text{Nb. atomes cible/cm}^2 \quad (\text{III.18}) \\ &= \frac{I}{e} \times T \times \frac{\rho \mathcal{N} t}{A} \end{aligned}$$

avec

I (A)	Courant du faisceau
$e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$	Charge de l'électron
T (s)	Temps réel d'acquisition
ρ (g.cm ⁻³)	Densité de la cible
$\mathcal{N} = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	Constante d'Avogadro
t (cm)	Épaisseur utile de la cible
$A = 1.008 \text{ (g.mol}^{-1}\text{)}$	Masse molaire de l'hydrogène atomique

L'extraction précise d'une section efficace implique le contrôle de tous ces paramètres. La mesure du courant de faisceau est délivrée par la sonde foerster (section II.3) qui est la plus fiable dans la gamme de courant 3-28 μA que nous avons utilisée. L'implantation de cette sonde sur le linac du troisième microtron assure une très bonne précision (section II.3).

La reconstruction de l'épaisseur t est vérifiée par l'étude des distributions en Z_{vertex} en cible pleine et vide. Malgré un décalage global de -1.5 mm, nous considérons que la coupure $-19.5 < Z_{vertex}(mm) < 16.5$ utilisée dans l'analyse correspond effectivement à la sélection d'une longueur de 3.6 cm de cible.

L'acquisition d'un événement demande la lecture par l'électronique des informations du système de détection et leur écriture sur disque. La durée de la prise de données est corrigée de ce temps mort durant lequel l'acquisition est indisponible. Cette correction dépend bien-sûr directement du taux de comptage dans les détecteurs. Elle varie de 2% pour les cinématiques VCS à grand q' jusqu'à 14% pour $q' = 33.6$ MeV et 20% pour l'élastique.

La densité ρ de l'hydrogène liquide est une grandeur difficile à contrôler. Lors de

$E_{faisceau}$ (MeV)	θ_B (deg.)	$k'_{réf}$ (MeV)	δP_B (%)	I (μA)	Temps mort (%)	$\sigma_{exp}/\sigma_{theo}$ (%)
705.11	37.19	588.1	+4	3.3	19	99.0 \pm 0.5
-	42.67	-	0	-	17	100.3 \pm 0.5
-	45.03	-	-4	-	18	98.0 \pm 0.5
750.11	58.25	543.8	0	5.0	13	100.7 \pm 0.7
-	49.97	583.3	0	6.3	6.8	100.8 \pm 1.0
-	-	-	-	-	12.8	100.1 \pm 0.7
795.11	52.02	599.8	0	11.7	14	99.7 \pm 0.8
-	-	-	-	12.4	15	100.3 \pm 0.5

Tableau III.4: Mesures de la section efficace de diffusion élastique $(e, e')p$ pour différents valeurs de courant et de temps mort. θ_B et $k'_{réf}$ désignent l'angle et l'impulsion de référence du spectromètre B. Plusieurs positions dans l'acceptance en impulsion (δP_B) sont également testées.

l'expérience, la pression et la température sont asservies respectivement à 2.1 bar et 21.4 K et restent très stables dans le temps. Si l'on considère une puissance de réfrigération disponible de 60 W, en supposant un dépôt moyen d'énergie de 1 MeV

pour un électron traversant la cible, la puissance dissipée par le faisceau vaut :

$$P_{dissipée} = E_{déposée} \times \text{Nb. } e^-/s = 1 \cdot 10^6 \times 1.6 \cdot 10^{-19} \times \frac{I(A)}{1.6 \cdot 10^{-19}}$$

ce qui autorise un courant maximum de $60 \mu\text{A}$, bien supérieur à celui que nous avons utilisé.

Ces arguments assurent une stabilité globale du fluide circulant dans la cible. Il reste cependant la possibilité de fluctuations locales de la densité à la proximité du faisceau. Le meilleur moyen de tester cette hypothèse est d'effectuer plusieurs mesures d'un processus connu en variant l'intensité. Cette étude, menée par J. Roche, est présentée dans le tableau (III.4) qui regroupe des mesures de sections efficaces de diffusion élastique $(e, e')p$ pour différents courants de 3.3 à $12.4 \mu\text{A}$. L'utilisation de plus fortes intensités est interdite en raison du taux de comptage élevé. La dernière colonne montre le rapport de la mesure expérimentale, corrigée des corrections radiatives, sur la prédiction théorique en %.

La stabilité et le bon accord des résultats excluent la possibilité de fluctuations de la densité. L'influence du temps mort ainsi que de la position de la cinématique dans l'acceptance en impulsion (δP_B) sont également testés.

III.3.3 L'angle solide

La première estimation de l'angle solide est donnée par l'ouverture géométrique des fenêtres d'entrée des spectromètres. Cette approximation sera bonne pour un processus avec un espace de phase peu étendu (typiquement la diffusion élastique) et bien centré dans l'acceptance. En dehors de ces conditions, l'effet d'acceptance en impulsion devient important. Pour notre analyse L. Van Hoorebeke a développé un programme complet de simulation de l'angle solide [66] qui prend en compte la cinématique de la réaction étudiée et permet également d'inclure tous les effets de cible étendue ainsi que la résolution des détecteurs.

Le principe est la détermination du rapport entre le nombre N d'événements simulés dans une région de l'espace de phase et la luminosité totale \mathcal{L} générée

$$\frac{N}{\mathcal{L}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

La normalisation est assurée via le calcul de \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = N_{tot} / \int_0^{\Omega_{Max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

où $d\Omega_{Max}$ représente l'enveloppe, connue, à l'intérieur de laquelle les N_{tot} événements ont été générés. Si l'intégrale n'est pas analytique, elle est calculée numériquement au cours de la simulation par la méthode "acceptance-rejection" [67, p.168].

Concernant la section efficace différentielle, une première solution consiste à utiliser une valeur constante :

$$\frac{N}{\mathcal{L}} = \frac{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int d\Omega} = \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle \Delta\Omega_{cst} \quad (\text{III.19})$$

et à générer les événements uniquement suivant l'espace de phase. La procédure de simulation est alors la suivante :

- L'électron incident est généré avec l'énergie et la direction du faisceau. Sa position dans le plan perpendiculaire suit la distribution horizontale et verticale du système de balayage (fig.III.11).
- Le point d'interaction est uniformément réparti dans l'épaisseur de la cible. Le quadrivecteur k de l'électron incident au vertex est corrigé des distorsions induites par l'épaisseur de cible traversée. Les processus pris en compte sont l'élargissement angulaire de la diffusion multiple, les pertes d'énergie par collision et par rayonnement de photons. Pour cette dernière correction, les rayonnements internes et externes sont traités par la méthode du radiateur équivalent. Le détail des probabilités d'émission de photons est donné dans la section IV.2.5. L'inclusion des changements de cinématique provoqués par l'émission de photons revient à appliquer les corrections radiatives réelles au niveau de la simulation avec un effet de l'ordre de 20% sur l'angle solide. (fig.III.19-a et b). Nous verrons dans le chapitre IV que la correction réelle complète comporte des termes supplémentaires qui modifient grandement ce chiffre. Cependant ces termes sont indépendants de l'énergie du photon émis et peuvent être pris en compte au niveau du résultat final, après la simulation.
- Le quadrivecteur k' de l'électron sortant est ensuite généré, avec la section efficace différentielle constante $\langle d\sigma/d\Omega \rangle$, dans un domaine cinématique limité en angle par l'acceptance du spectromètre (les bornes utilisées sont en fait légèrement plus larges pour prendre en compte les effets de diffusion multiple et de cible étendue). L'intervalle considéré en impulsion a pour borne supérieure la valeur de la cinématique élastique et pour borne inférieure la plus basse impulsion acceptée par le spectromètre.

Dans le cas d'une simulation de la diffusion élastique, la cinématique du côté proton est entièrement contrainte. Pour le VCS, tout l'espace de phase du photon réel associé à l'acceptance électron est généré et le quadrivecteur du proton

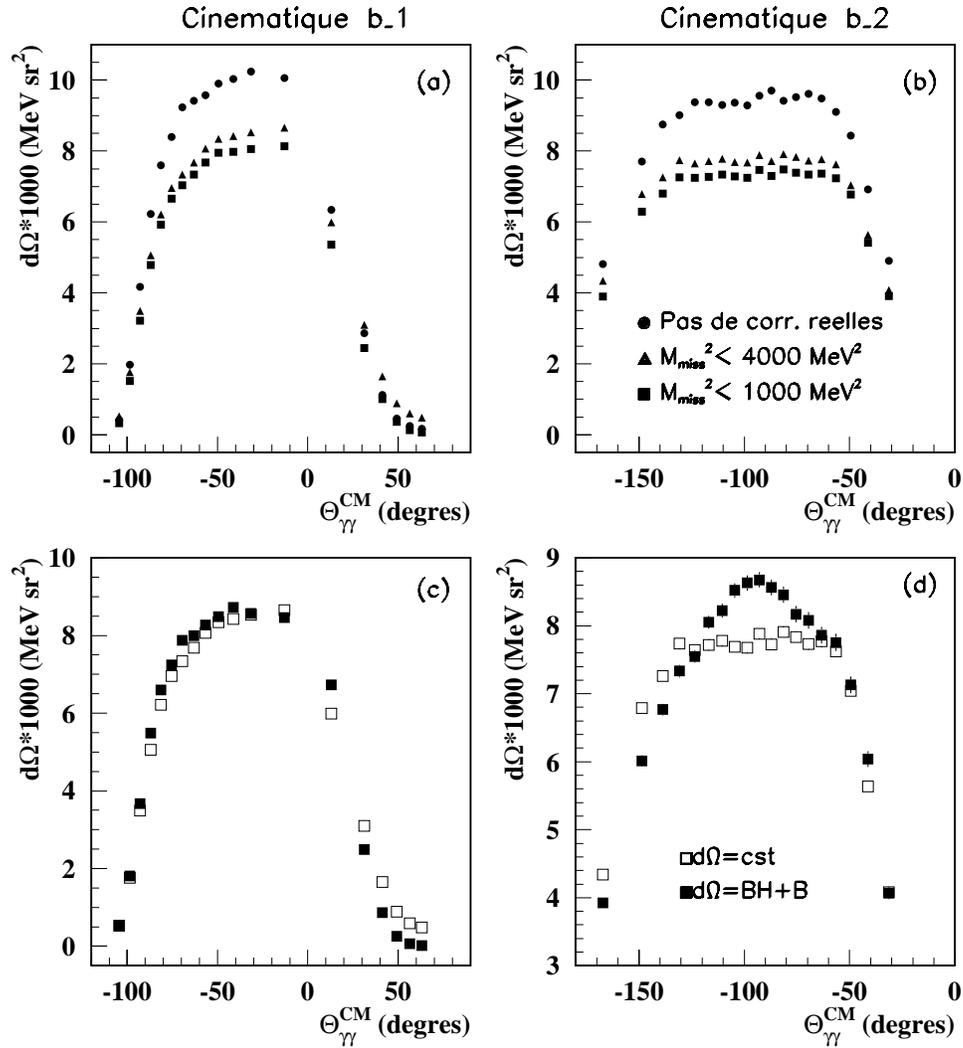


Figure III.19: Angles solides simulés pour les deux réglages b_1 et b_2 avec $q' = 45$ MeV/c. L'angle indiqué correspond à la valeur moyenne dans la cellule sélectionnée. (a),(b) : effet des corrections radiatives réelles avec deux coupures différentes sur M_{miss}^2 , équivalentes à deux coupures dans le spectre en q'' (Eq. III.17). La section efficace utilisée est constante. (c),(d) : comparaison des résultats entre une section efficace constante et variable pour une coupure $|M_{miss}^2| < 4000$ MeV².

de recul s'obtient par $p' = p + k + k' - \gamma$. Les particules sortantes sont corrigées de la traversée de la cible et des fenêtres d'entrée des spectromètres de la même manière que l'électron incident.

- A ce stade de la procédure nous disposons d'une simulation des événements tels que les spectromètres les voient sortir de la cible. Les effets de résolution de l'appareillage sur la reconstruction des coordonnées peuvent être inclus a posteriori en convoluant par une gaussienne. La génération de la totalité du cône du proton permet d'étudier avec la même simulation tous les réglages d'une cinématique.

L'extraction de l'angle solide est ensuite une application directe de la formule (III.19). Pour une simulation encore plus réaliste, il est possible de prendre en compte les variations de la section efficace à l'intérieur de la zone considérée. Ceci s'illustre par la nouvelle formulation

$$\begin{aligned} \frac{N}{\mathcal{L}} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \int \left(1 + \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0} \right) d\Omega \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 (\Delta\Omega_{cst} + \epsilon) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \Delta\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

où $(d\sigma/d\Omega)_0$ représente la section efficace au centre du domaine. Les déviations par rapport à ce point central sont traitées événement par événement et sommées dans l'angle solide $\Delta\Omega$. Dans le cas du VCS, la section efficace utilisée est BH+Born, cinq fois différentielle : $d^5\sigma/dk'd\Omega_{e'}^{lab}d\Omega_{p'}^{cm}$. La dépendance dans les différentes variables est calculée numériquement et stockée dans une matrice. La valeur de la section efficace à un point précis de l'espace de phase s'obtient par interpolation entre les nœuds voisins du réseau. Si l'on admet que l'effet des polarisabilités (terme NonBorn) change très peu la forme de la section efficace, cette méthode permet de simuler un angle solide très proche de la réalité. La comparaison entre $\Delta\Omega_{cst}$ et $\Delta\Omega$ est illustrée figure (III.19-c et d).

Avec l'inclusion du flou de la résolution expérimentale, la simulation peut donner une vision réaliste des variables cinématiques reconstruites à la cible. La comparaison avec les données est alors un bon test de la crédibilité de la simulation et également un outil supplémentaire pour la compréhension de certaines distributions expérimentales atypiques telles que le rebond. Au regard de la figure (III.20), la simulation donne une bonne description des distributions en M_{miss}^2 , φ et $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ qui présentent l'intérêt d'être sensibles à tous les paramètres de la réaction. On notera cependant que la largeur de la masse manquante simulée est presque deux fois inférieure à celle de l'expérience.

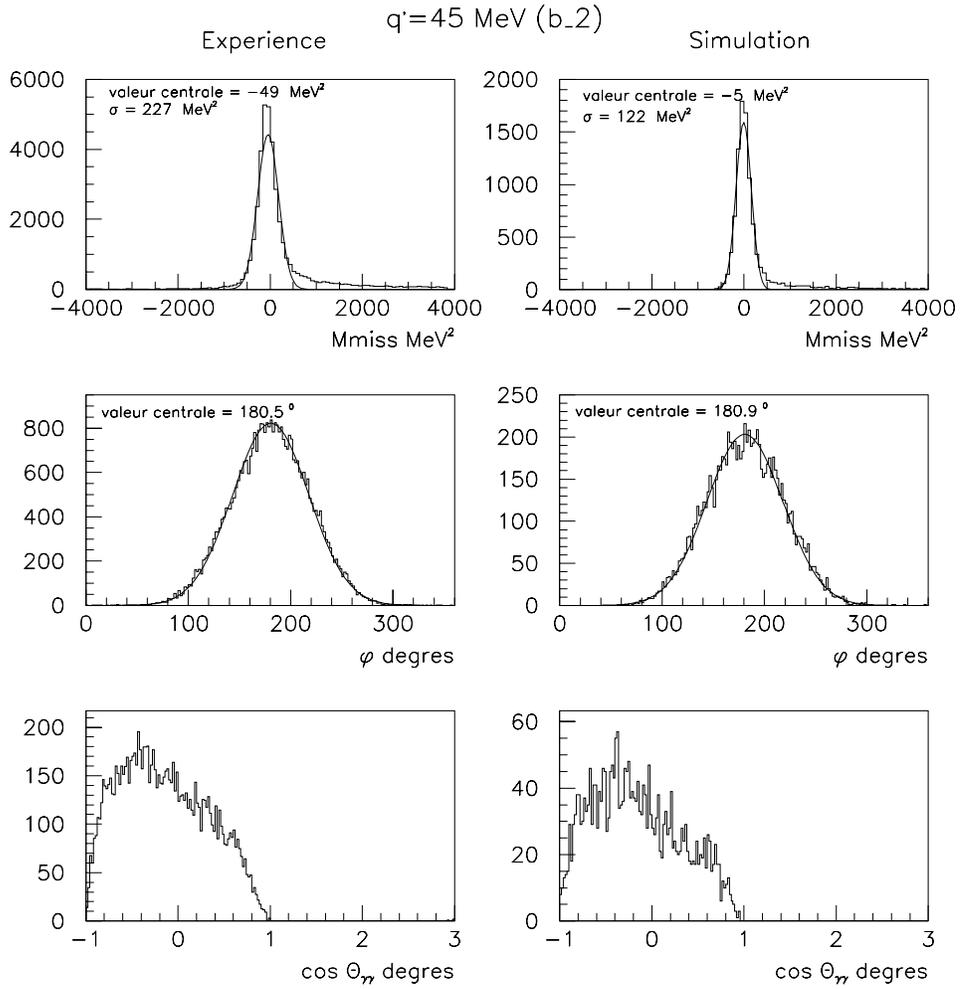


Figure III.20: Comparaison de spectres expérimentaux et simulés pour la cinématique b.2.

Cette différence est révélatrice de lacunes encore présentes dans la simulation où d'un élargissement de la distribution expérimentale encore mal compris pour certaines cinématiques. L'implication au niveau de l'angle solide calculé est discutée section (V.1.3).

Au terme de ce chapitre, nous avons défini la procédure de sélection des “bons” événements VCS ainsi que les éléments de l'espace de phase à l'intérieur desquels nous évaluons le taux de comptage. Nous disposons d'un contrôle de la luminosité et d'une simulation de l'angle solide. Nous sommes donc en mesure d'extraire une section efficace expérimentale du VCS. La comparaison au théorème de basse énergie demande cependant la prise en compte des corrections radiatives qui font l'objet du prochain chapitre.

Chapitre IV

Corrections radiatives

Ce chapitre présente le travail de thèse effectué pour le calcul des corrections radiatives à la diffusion Compton virtuelle sur le proton. La rédaction se veut pédagogique pour permettre au lecteur d'appréhender les concepts et les problèmes que l'on rencontre dans tout calcul de ce type. Ainsi, après quelques commentaires sur la nécessité et la classification des corrections radiatives en général, je consacrerai une large partie du chapitre à l'étude des corrections radiatives de la diffusion élastique. Elle constitue en effet le cas le plus simple mais contient déjà tous les outils nécessaires au traitement d'un processus plus complexe telle que la diffusion Compton virtuelle. L'accent sera mis sur le traitement des infinis qui apparaissent dans les calculs. Cette présentation du cadre théorique des corrections radiatives n'est pas exhaustive mais cherche plutôt à répondre aux attentes d'un utilisateur non spécialiste désireux de mieux comprendre les mécanismes mis en jeu.

La dernière partie de ce chapitre présentera la transposition au cas de notre expérience. L'essentiel du travail pour ce nouveau problème réside plus dans l'augmentation du volume des calculs que dans l'augmentation de leur complexité mathématique. Dans ce sens, des algorithmes de calcul numérique ont dû être développés pour obtenir la contribution totale des corrections. Après la discussion des principales difficultés rencontrées je montrerai que les nombreux tests indépendants des techniques employées pour les résoudre confèrent une très bonne fiabilité aux résultats obtenus. Le système d'unité adopté pour l'ensemble de ce chapitre est Heaviside-Lorentz (A.2), couramment utilisé en théorie quantique des champs.

Enfin je ne saurais aborder ce sujet sans souligner que tous les résultats présentés sont le fruit d'une collaboration très étroite avec Dominique Marchand, Jacques Van de Wiele et Marc Vanderhaeghen. C'est grâce à cette union que ce travail m'a été tout d'abord possible et par la suite si enrichissant.

IV.1 Nécessité des corrections

Toute interaction entre des particules chargées implique un réarrangement du courant électromagnétique de l'état initial vers l'état final du système. Plus classiquement cela signifie que des charges sont accélérées et que par conséquent, des photons sont émis (section I.1). L'origine des corrections radiatives réside dans cette simple constatation mais nous allons voir que c'est la faible masse de l'électron qui les rend nécessaires. En raisonnant toujours avec des arguments classiques, on comprend en effet que l'accélération, source du rayonnement, sera d'autant plus importante que l'inertie du système est petite. L'émission de photons par un électron se trouve donc grandement favorisée par rapport à celle d'un proton ou même d'un muon.

Puisque nous n'échapperons point à la correction essayons alors d'en évaluer la sévérité. Pour se faire il est utile d'introduire la notion d'ordre. Nous savons déjà que l'origine du problème réside dans l'émission de photons par les électrons impliqués dans le processus. Or les règles de Feynman de l'électrodynamique quantique (annexe D) nous montrent qu'à chaque vertex d'une interaction électromagnétique est associée la charge de la particule. Pratiquement cela signifie qu'à chaque fois que l'on branche un photon sur une ligne d'électron l'amplitude du processus est multipliée par une puissance supplémentaire de e . Dans la section efficace, qui contient le module de l'amplitude au carré, c'est donc un facteur e^2 qui apparaît. L'habitude est plutôt de raisonner avec la quantité sans dimension α définie dans le système d'unité d'Heaviside-Lorentz par :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.036} \quad (\text{IV.1})$$

Nous voyons donc que chaque vertex électromagnétique introduit un facteur $\alpha^{1/2}$ dans l'amplitude, soit α dans la section efficace. Cette quantité représente la constante de couplage de l'interaction et nous fournit naturellement la notion d'ordre d'une correction radiative. Lors de l'étude sur la cinématique élastique, nous verrons que l'expérimentateur mesure nécessairement une certaine somme des contributions de *tous* les ordres. La situation pourrait alors paraître inextricable si nous n'avions pas dans notre jeu les atouts de la sonde électromagnétique. L'interaction lepton-photon est en effet parfaitement connue dans le cadre de QED et surtout, la constante de couplage est assez petite (Eq. IV.1) pour faire un développement perturbatif en puissance de α . Ainsi les ordres élevés des corrections radiatives pourront être négligés et le calcul du seul premier terme correctif de la série donnera déjà une bonne approximation de l'effet total sur la section efficace. Il serait même tentant à ce stade de donner à un terme d'ordre n une contribution d'environ 1% de l'ordre $(n - 1)$ puisque $\alpha \simeq 0.01$. Ce raisonnement est trop naïf car le nombre de diagrammes différents qui

contribuent aux corrections radiatives est une fonction très rapidement croissante de l'ordre auquel on se place. Le calcul de l'amplitude contient donc la somme cohérente de nombreux diagrammes et il s'avère difficile d'évaluer précisément la correction avant le résultat final. Cependant, de nombreux travaux sur les corrections radiatives en électrodynamique quantique [68] (facteur de Landé g de l'électron, Lamb-shift) ont montré, d'une façon spectaculaire le pouvoir prédictif des calculs perturbatifs. Ce succès nous permet d'appliquer avec confiance ce formalisme à d'autres processus. La facilité que possède l'électron de rayonner des photons implique donc la nécessité des corrections radiatives et la nature perturbative de l'interaction électromagnétique va nous permettre d'évaluer cet effet au premier ordre en α . La prochaine section a pour but de décrire entièrement cette procédure dans le cas de la correction à la diffusion élastique $ep \rightarrow e'p'$.

IV.2 Exemple détaillé de la diffusion élastique

IV.2.1 Rappels

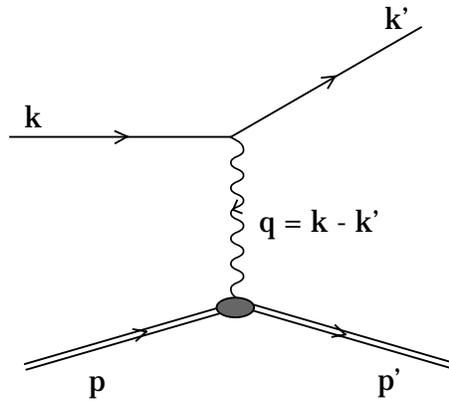


Figure IV.1: Diagramme en arbre de la diffusion élastique électron-proton.

Le diagramme de la diffusion élastique électron-proton est illustré fig.IV.1. L'interaction électromagnétique entre les deux charges est décrite par l'échange d'un photon virtuel γ^* de masse invariante $q^2 = (k - k')^2 < 0$. Cet invariant joue le rôle de la résolution avec laquelle on vient sonder le proton. Le couplage avec le courant de l'électron est simplement donné par :

$$\langle k' | j^\mu | k \rangle = -ie \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)$$

$$= -\frac{ie}{2m_e} \bar{u}(k') [(k' + k)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(k) \quad (\text{IV.2})$$

Le passage à la deuxième égalité utilise la décomposition de Gordon et fait apparaître qu'un spin 1/2 interagit à la fois via sa charge (premier terme identique à un spin 0) et son moment magnétique.

Dans le cas du proton il faut tenir compte de la structure composite de la particule. Le réarrangement des constituants du proton sous l'effet d'une perturbation électromagnétique est un problème complexe, régi par l'interaction forte, face auquel notre seule réponse possible pour l'instant (du moins dans le domaine de basse énergie) est de définir des observables qui traduisent une certaine caractéristique de la structure interne. Nous avons vu par exemple que le processus de diffusion Compton nous renseignait sur les polarisabilités du nucléon. Dans la diffusion élastique, les observables impliquées sont les facteurs de forme qui apparaissent naturellement en écrivant de la manière la plus générale, respectant les symétries physiques, l'élément de matrice du courant du proton:

$$\langle p' | J^\mu | p \rangle = ie \bar{u}(p') [F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{1}{2m_p} F_2(q^2) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p) \quad (\text{IV.3})$$

où F_1 et F_2 sont les facteurs de forme de Dirac et Pauli, fonctions de q^2 , seul scalaire disponible au vertex du proton. La limite physique $Q^2 = 0$ donne les normalisations suivantes : $F_1(0) = 1$, charge du proton, et $F_2(0) = \kappa = 2.79$, moment magnétique anormal. L'application des règles de Feynman donne alors l'amplitude invariante du processus :

$$T = -\frac{i}{q^2} j^\mu J_\mu \quad (\text{IV.4})$$

Pour obtenir la section efficace il faut prendre le module au carré, sommer sur les états de spins finals et moyenner sur les états de spins initiaux :

$$d\sigma \propto \mathcal{M}^2 = \frac{1}{4} \sum_{spins} |T|^2 \quad (\text{IV.5})$$

Il reste ensuite à intégrer l'espace de phase des particules sortantes et à normaliser par le flux entrant. On obtient finalement :

$$d\sigma = \frac{1}{4m_p E} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'^0} (2\pi)^4 \delta^4(p + k - p' - k') \mathcal{M}^2 \quad (\text{IV.6})$$

La dérivation complète des calculs [63, p.177] conduit à:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{élas.}} = \frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{Mott}} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{IV.7})$$

avec :

$$\begin{aligned}\tau &= -q^2/4m_p^2 \\ G_E &= F_1 + \frac{q^2}{4m_p^2}F_2 \\ G_M &= F_1 + F_2\end{aligned}$$

et

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{E'}{E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{IV.8})$$

La section efficace de Mott décrit la diffusion élastique d'une particule relativiste de spin 1/2 sur un objet de spin 0 qui serait ponctuel. Le terme dépendant des facteurs de forme de Sachs G_E et G_M , combinaisons linéaires des facteurs de forme $F_{(1,2)}$, contient l'information sur la nature composite du proton et modifie la distribution angulaire de la section efficace. Les observables $G_{(E,M)}$ sont directement reliées aux distributions de charges et de courants dans le nucléon (Cf. par exemple [63, p.178]).

IV.2.2 Contributions à l'ordre α^3

Etant donné que la section efficace de diffusion élastique est en α^2 , les corrections radiatives à l'ordre suivant vont consister à calculer la contribution de tous les diagrammes "élastique + photon" qui donnent une dépendance totale en α^3 . Je rappelle que seules les corrections sur la ligne d'électrons sont prises en compte en regard de la grande masse du proton. La première étape consiste naturellement à répertorier tous les graphes de Feynman.

- L'émission d'un photon réel donne directement deux processus possibles illustrés fig.(IV.2). La présence de trois vertex électromagnétiques nous assure une dépendance en α^3 dans la section efficace. Ce même argument exclut d'ailleurs la contribution de l'émission de plusieurs photons qui sera d'ordre au moins α^4 . L'état final des deux processus de la figure(IV.2) est différent de celui de la diffusion élastique. La contribution de l'émission d'un photon réel s'ajoute donc au niveau de la section efficace et non de l'amplitude.
- Il reste encore une possibilité avec un seul photon rayonné qui consiste à refermer l'extrémité libre du photon sur la ligne d'électron. Ce photon devient donc virtuel dans le sens où il est émis puis réabsorbé dans un volume d'espace temps contraint par les inégalités d'Heisenberg. La conséquence cruciale de la réabsorption du photon est que l'on recouvre exactement le même état final que

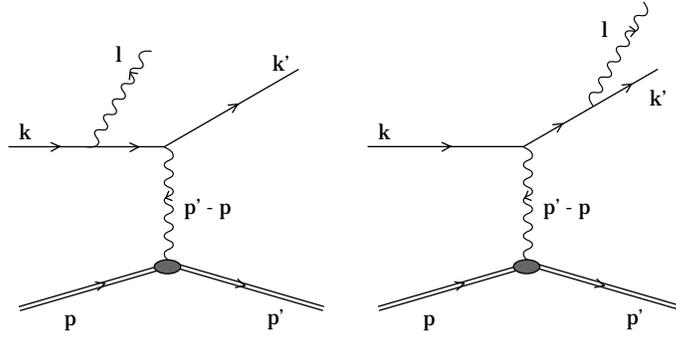


Figure IV.2: Diagrammes de corrections réelles au premier ordre pour la diffusion élastique électron-proton.

celui de la diffusion élastique non corrigée. La contribution de la correction des photons virtuels intervient donc au niveau de la *somme cohérente* des amplitudes. La présence de deux vertex supplémentaires donne une contribution en α^4 , négligée dans la section efficace. Mais le développement du module au carré total fait également apparaître un terme d'interférence à l'ordre α^3 qui doit absolument être pris en compte pour la cohérence du calcul :

$$\begin{aligned} \sigma \propto |A|^2 &= \left| \underbrace{A_{Elas.}^0}_{\alpha} + \underbrace{A_{virtuel}^1}_{\alpha^2} \right|^2 \\ &= \underbrace{|A_{Elas.}^0|^2}_{\alpha^2} + 2 \underbrace{Re(A_{Elas.}^{0*} * A_{virtuel}^1)}_{\alpha^3} + \underbrace{|A_{virtuel}^1|^2}_{\alpha^4, \text{ négligé}} \quad (\text{IV.9}) \end{aligned}$$

La fig.IV.3 montre les six graphes supplémentaires des corrections virtuelles. Le graphe (c) de la polarisation du vide représente la fluctuation du photon virtuel médiateur de l'interaction en paire (e^+e^-). La création-annihilation de cette paire lui confère toutes les propriétés d'une correction de photons virtuels (pas de modification de l'état final, terme d'interférence en α^3). Le caractère topologiquement isolé de ce diagramme en fait un sous-ensemble invariant de jauge.

L'échange de deux photons des graphes (d) intervient également à l'ordre α^3 mais leur contribution n'est significative que pour un faible angle de diffusion [69] et [70, p.716]. A Mainz les mesures sont effectuées autour de 50 degrés ce qui permet de négliger ces processus.

Enfin, nous verrons que les deux graphes de "Self-energy" ne contribuent que lorsque le photon radiatif virtuel est couplé à au moins une ligne interne.

Seuls quatre diagrammes sont donc à calculer pour la diffusion élastique. Par de simples raisonnements sur la "construction" des processus corrigés, deux classes dis-

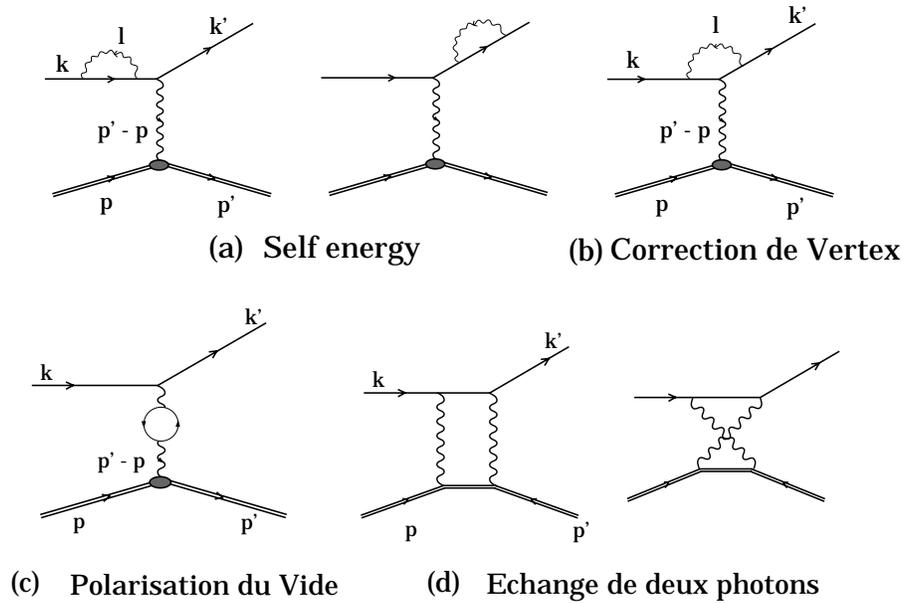


Figure IV.3: Processus de corrections virtuelles au premier ordre pour la diffusion élastique électron-proton.

tinctes sont nettement apparues :

- Les *corrections radiatives réelles* qui proviennent de l'émission d'un photon réel par la ligne d'électron et qui contribuent au niveau de la somme des sections efficaces.
- Les *corrections radiatives virtuelles* qui proviennent de l'émission-absorption d'un photon virtuel par la ligne d'électron et qui contribuent au niveau de la somme cohérente des amplitudes.

Ces deux classes de corrections porteront le qualificatif supplémentaire d'“internes” puisqu'elles concernent le noyau cible qui participe à la réaction. Notre expérience utilisant une cible étendue d'hydrogène liquide, il est bien sûr possible que l'électron interagisse également avec un autre nucléon lors de la traversée de la matière. Ces interactions secondaires se manifestent par des pertes d'énergie par collisions mais également sous forme de rayonnement de freinage (bremsstrahlung) qui constitue une troisième catégorie de corrections radiatives dont la prise en compte est brièvement discutée en fin de cette section: les corrections réelles externes (Cf. IV.2.5).

Corrections radiatives internes réelles

La première caractéristique de l'émission de photons réels est qu'elle modifie l'état final du processus puisqu'une particule supplémentaire est apparue et que l'électron qui a rayonné a perdu l'énergie emportée par le photon. Considérons par exemple la distribution en énergie de l'électron sortant. Pour un angle de diffusion fixé, la cinématique élastique à deux corps contraint cette distribution à une valeur discrète E_{diff}^0 . Le spectre expérimental attendu est alors une distribution piquée à E_{diff}^0 qui résulte de la convolution de toutes les réponses des éléments d'appareillage, avec un écart type égal à la résolution de la mesure. En apportant un (des) photon(s) supplémentaire(s) dans l'état final l'effet des corrections réelles sera visible sous la forme d'une queue radiative qui peuple les états d'électrons diffusés vers les plus basses énergies. La correction utilisée pour supprimer cette contribution excédentaire des photons réels dans le taux de comptage expérimental est détaillée dans la section (IV.2.4).

Dans la suite de ce paragraphe, je présenterai quelques étapes du calcul d'émission de photons réels afin de bien illustrer les caractéristiques du processus. Pour cela reprenons les deux graphes fig.IV.2 et écrivons l'amplitude totale par simple application des règles de Feynman :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_d + \mathcal{M}_c &= \epsilon^{\mu*}(l, \lambda) \bar{u}(p', \sigma') [J^\beta] u(p, \sigma) \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2} \\ &\bar{u}(k', h') \left\{ [-ie\gamma^\alpha] i \frac{\not{k} - \not{l} + m_e}{(k-l)^2 - m_e^2} [-ie\gamma_\mu] \right. \\ &\quad \left. + [-ie\gamma_\mu] i \frac{\not{k}' + \not{l} + m_e}{(k'+l)^2 - m_e^2} [-ie\gamma^\alpha] \right\} u(k, h) \end{aligned} \quad (IV.10)$$

Les indices d et c signifient respectivement direct et croisé. Ils marquent l'émission du photon par l'électron incident ou sortant. J^β décrit le vertex hadronique avec la même expression que dans l'équation (IV.3). Le point clé du calcul consiste à se placer dans la limite des photons mous pour laquelle les termes en l sont négligeables devant ceux en k ou k' . Cette approximation et l'application de l'équation de Dirac pour l'électron permettent de réexprimer simplement les deux numérateurs. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_d + \mathcal{M}_c &\simeq -\frac{i\epsilon^2}{q^2} \bar{u}(p', \sigma') [\gamma^\alpha] u(p, \sigma) \bar{u}(k', h') [\gamma_\alpha] u(k, h) e \epsilon^{\mu*} \left(\frac{k'}{k'.l} - \frac{k}{k.l} \right)_\mu \\ &\simeq \mathcal{M}_{Born} e \epsilon^{\mu*} \left(\frac{k'}{k'.l} - \frac{k}{k.l} \right)_\mu \end{aligned} \quad (IV.11)$$

où \mathcal{M}_{Born} désigne l'élément de matrice pour la diffusion élastique pure à l'ordre α . Le passage à la section efficace se fait en prenant le module carré de l'amplitude. Il

reste ensuite à multiplier par le facteur de flux et à intégrer sur l'espace de phase du photon mou. La factorisation du processus Born se retrouve ainsi au niveau de la section efficace et le facteur correcteur intervient au carré avec un signe moins du à la contraction des vecteurs de polarisation du photon réel :

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(k, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(k, \lambda) = -g_{\mu\nu} + (\text{termes de contribution nulle}) \quad (\text{IV.12})$$

L'intégration sur l'espace de phase n'est pas absorbée par le terme de Born. La borne supérieure de l'énergie du photon est limitée par la coupure expérimentale $\Delta E = E_{diff}^0 - E_{diff}^{exp} \ll (k, k')$ qui assure la limite de photons mous :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{\gamma_{\text{reel}}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{\text{Born}} e^2 \cdot \int_0^{|\vec{l}| < \Delta E} \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3 2|\vec{l}|} (-P^2) \quad (\text{IV.13})$$

avec $P^{\mu} = \left(\frac{k'}{k'.l} - \frac{k}{k.l} \right)^{\mu}$

Au delà de la factorisation de la correction dans la limite $|\vec{l}| < \Delta E$, cette dernière équation est très riche d'enseignements sur la radiation d'un photon réel. Toutes les caractéristiques de ce processus se déduisent en effet par une simple étude des propriétés du quadrivecteur P :

- *Le rayonnement est très piqué dans les directions des électrons :*

Le quadrivecteur P comporte deux dénominateurs qui jouent un rôle symétrique. Développons le produit scalaire à quatre dimensions $(k.l)$ sachant que le même raisonnement s'applique à $(k'.l)$:

$$(k.l) = k^0 |\vec{l}| - |\vec{k}| |\vec{l}| \cos \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} |\vec{l}| (\sqrt{|\vec{k}|^2 + m_e^2} - |\vec{k}|) \quad (\text{IV.14})$$

Dès que la masse devient négligeable par rapport au module de l'impulsion k , le dénominateur tend donc vers zéro lorsque la direction du photon est très proche de celle de l'électron ($\theta \simeq 0$). Au niveau de la section efficace cela se traduit dans le spectre en angle d'émission par deux pics très prononcés centrés sur les directions des électrons incidents et sortants. Ce comportement est à l'origine de l'approximation dite de "peaking", utilisée dans de nombreux calculs, qui ramène tout le rayonnement le long de la direction des électrons. Une étude grossière de l'amplitude dans la limite $m \ll |\vec{k}|$ donne une hauteur du pic proportionnelle à $|\vec{k}|/m^2$ et une largeur en $m/|\vec{k}|$.

- *Le rayonnement augmente avec l'angle de diffusion θ_e et l'impulsion des électrons :*

La seule dépendance du facteur correctif en θ_e intervient au numérateur de $(-P^2)$ qui, dans la limite ultra-relativiste, est proportionnel à $(k.k') = |\vec{k}| |\vec{k}'| (1 - \cos \theta_e)$. Indépendamment de la direction d'émission du photon réel, la section efficace croît donc avec l'angle de diffusion des électrons et est maximale pour $\theta_e = 180$ degrés.

Il est possible d'interpréter ce comportement de manière plus intuitive en considérant l'électron tel que nous le décrit la théorie quantique des champs c'est-à-dire une charge ponctuelle entourée du nuage de ses fluctuations quantiques (émission-absorption de photons virtuels, création-annihilation de paires ...). Nous verrons un peu plus loin que cette vision des choses nous permet d'interpréter la renormalisation de la charge de l'électron mais pour l'instant essayons de comprendre ce qu'il advient de cet "habillage" lors de la diffusion. Le transfert subi par l'électron s'exprime par la la masse invariante du photon virtuel échangé: $|Q^2| = (k - k')^2 = 4kk' \sin^2 \frac{\theta_e}{2}$. Le temps d'interaction et le volume d'espace impliqués seront proportionnels à $1/\sqrt{|Q^2|}$. Cela signifie qu'en augmentant le transfert, on vient sonder une partie de plus en plus restreinte du nuage de l'électron. Toute la zone hors de portée vis à vis des temps et distances de l'interaction ne subit donc pas le transfert. Le réarrangement qui en résulte, déshabillage de l'électron incident ou réhabillage de l'électron sortant va se manifester par un rayonnement électromagnétique le long de la direction de la particule. En augmentant l'angle de diffusion ou l'impulsion des électrons on augmente le transfert et donc l'effet de rayonnement.

- *La probabilité d'émission est inversement proportionnelle à l'énergie du photon :* Réécrivons l'équation (IV.13) en factorisant $|\vec{l}|^2$ dans le dénominateur de P et en utilisant $d^3\vec{l} = |\vec{l}|^2 d|\vec{l}| d\Omega_l$. On obtient alors la variation typique du spectre infra-rouge en $d|\vec{l}|/|\vec{l}|$ où la probabilité d'émission d'un photon décroît comme l'inverse de son énergie :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{\gamma_{\text{reel}}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{\text{Born}} (-e^2) \cdot \int_0^{|\Delta E|} \frac{d\Omega_l}{2(2\pi)^3} \frac{d|\vec{l}|}{|\vec{l}|} \left(\frac{k'^\mu}{k' \cdot \hat{l}} - \frac{k^\mu}{k \cdot \hat{l}}\right)^2 \quad (\text{IV.15})$$

\hat{l} est le vecteur normé de direction \vec{l} .

Nous nous heurtons ici au problème classique des corrections radiatives puisque l'intégration va donner une contribution infinie aux photons de faible énergie et la section efficace sera divergente. Ce problème est bien connu sous le nom de catastrophe infra-rouge et a suscité beaucoup d'interrogations et de travaux jusque dans les années soixante. Je laisse pour l'instant le calcul échoué sur ce point car nous verrons que la seule inclusion des corrections radiatives virtuelles,

objet du prochain paragraphe, le remettra à flot et libèrera la section efficace de la divergence infra-rouge.

Je terminerai ce paragraphe par quelques commentaires sur les section efficaces Bethe-Heitler (BH) et Born qui illustrent bien les propriétés discutées ci-dessus et donnent un nouvel éclairage sur la diffusion Compton virtuelle. Au regard de leur graphe de Feynman, il est tentant d'assimiler ces deux processus à des corrections radiatives réelles respectivement sur l'électron et le proton. Cependant, un élément crucial de l'analyse du VCS est la signature du photon émis, alors que la correction radiative réelle de la diffusion élastique contient l'intégrale sur tout l'espace de phase

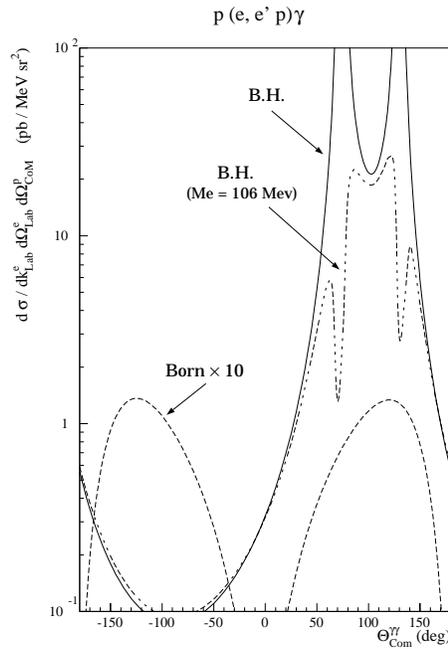


Figure IV.4: Sections efficaces différentielles pour les processus Bethe-Heitler (courbe en trait continu), Born (tirets) et Bethe-Heitler avec une masse fictive de l'électron égale à celle du muon (pointillés). Les courbes mettent en évidence le comportement très piqué du rayonnement autour de la particule émettrice. L'évolution en masse montre l'élargissement des pics et révèle leur structure interne. Pour des raisons de lisibilité, la courbe du processus Born a été multipliée par 10.

des photons mous. Dans ce sens, la diffusion Compton virtuelle doit être considérée comme un processus électromagnétique indépendant. De même que pour la cinématique élastique, les corrections radiatives restent nécessaires mais interviennent à l'ordre supérieur en α . Elles font l'objet de la section (IV.3).

Dans la limite où q' , l'impulsion du photon rayonné dans BH ou Born, reste petite devant les impulsions des électrons et des protons, toutes les propriétés énoncées de l'émission de photons réels restent néanmoins valables et permettent une très

bonne description de la cinématique. Ainsi, la fig.IV.4 montre une dépendance angulaire calculée numériquement pour une cinématique typique mesurée à Mainz avec $|\vec{q}'| = 33\text{MeV}/c$. La section efficace différentielle exprimée dans le référentiel du laboratoire est représentée en fonction de l'angle $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ que forment le photon virtuel échangé et le photon réel dans le centre de masse $\vec{\gamma}^* + \vec{p} = \vec{\gamma} + \vec{p}' = \vec{0}$. La courbe en trait continu décrit le Bethe-Heitler seul et met clairement en évidence les deux pics d'émission centrés aux valeurs de $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ qui correspondent aux directions \vec{k} et \vec{k}' .

La courbe en tirets est calculée avec un électron hypothétique de 106MeV (masse du μ). Cette évolution en masse de la section efficace a l'intérêt de résoudre la structure fine des pics. Nous avons vu en effet que la largeur était proportionnelle à la masse. Un creux est ainsi mis en évidence au centre de chaque pic. Cela signifie que le numérateur de P , dans la direction exacte de l'électron, s'annule plus vite que le dénominateur. L'interprétation physique est la conservation de l'hélicité qui interdit l'émission d'un photon à angle exactement nul par une particule sans masse (électron ultra-relativiste). Cette caractéristique reste invisible pour le Bethe-Heitler à cause de l'espacement des pas de calcul. La dernière courbe, en pointillés, représente la contribution du processus Born où le photon est émis par la ligne du proton. L'ordre de grandeur de la section efficace comparé à celui de Bethe-Heitler confirme tout d'abord qu'une particule lourde rayonne peu. En ce qui concerne la dépendance en angle, on retrouve deux pics d'émissions très élargis par l'effet de la masse. Rappelons cependant que le proton initial est au repos dans le laboratoire et donc ne rayonne pas. Ainsi les deux pics observés ne sont en fait qu'un seul, aligné sur la direction du proton sortant et creusé en son centre par la conservation de l'hélicité. Dans le laboratoire le proton sortant a nécessairement la direction du photon virtuel ce qui explique la position du creux à $\theta_{\gamma\gamma}^{cm} = 0$ degré.

Corrections radiatives internes virtuelles

J'aborde ici la deuxième "famille" de corrections radiatives qui a été mise en évidence au début de ce chapitre à savoir les corrections de photons virtuels. La description in extenso des calculs se trouve dans de nombreux livres de théorie des champs et ne ferait qu'alourdir l'exposé. Ainsi, je m'attacherai plus à faire ressortir les points clé du problème en donnant autant que possible la priorité à l'argumentation physique plutôt qu'à la rigueur mathématique. Seuls trois types distincts de processus interviennent pour la diffusion élastique (fig.IV.3) et je commencerai par une brève description de chacun d'eux.

- *Correction de vertex* : Ce diagramme corrige le couplage d'une particule chargée avec le photon (fig.IV.3-b). Le calcul montre que ceci revient à généraliser la matrice γ^μ du vertex par l'expression :

$$\bar{u}(-ie\gamma^\mu)u \rightarrow \bar{u}(-ie\Gamma^\mu)u, \quad \Gamma^\mu = A(q^2)\gamma^\mu + iB(q^2)\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \quad (\text{IV.16})$$

D'un point de vue physique, l'apparition d'un nouveau terme magnétique en $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ aura pour conséquence de modifier le moment magnétique de l'électron $\mu = \hbar e/2m_e$. Etant donné que l'on s'intéresse aux corrections au premier ordre, cette modification sera proportionnelle à α (Eq.IV.39).

Rentrons un peu plus en détail dans le calcul de ce diagramme en appliquant les règles de Feynman. Une caractéristique des corrections virtuelles au premier ordre réside dans la présence d'une boucle dans les lignes internes, inhérente au processus d'émission-absorption. Par simple conservation de l'énergie et de l'impulsion aux vertex, on voit qu'un quadrivecteur l "tourne" dans cette boucle sans apparaître sur les lignes externes (pas de changement dans la cinématique de la réaction). La prise en compte de toutes les valeurs possibles de ce quadrivecteur se manifeste par une intégrale en d^4l . On obtient ainsi pour le courant leptonique corrigé :

$$\bar{u}[-ie\Gamma^\mu(k, k')]u = \bar{u} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [-ie\gamma^\alpha] i \frac{\not{k}' - \not{l} + m_e}{(k' - l)^2 - m_e^2} [-ie\gamma^\mu] i \frac{\not{k} - \not{l} + m_e}{(k - l)^2 - m_e^2} [-ie\gamma^\beta] \frac{-ig_{\alpha\beta}}{l^2} u$$

$$\text{soit } \Gamma^\mu(k, k') = -ie^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\alpha(\not{k}' - \not{l} + m_e)\gamma^\mu(\not{k} - \not{l} + m_e)\gamma_\alpha}{l^2(l^2 - 2k'l)(l^2 - 2k.l)} \quad (\text{IV.17})$$

Etudions le comportement de cette intégrale dans la limite infra-rouge (IR), $l \rightarrow 0$. Par un simple comptage de puissances on arrive à :

$$\lim_{l \rightarrow 0} \Gamma^\mu(k, k') \propto \int \frac{d^4l}{l^4} \quad (\text{IV.18})$$

qui montre une divergence logarithmique. La catastrophe infra-rouge existe donc également pour l'émission de photons mous virtuels. Nous verrons dans la section (IV.2.3) que ce nouvel obstacle est en réalité une nécessité puisqu'une compensation des divergences des corrections réelles et virtuelles va s'opérer au niveau de la section efficace. La procédure va donc consister à propager les singularités infra-rouges jusqu'au bout du calcul et à vérifier leur annulation. Continuons pour l'instant à mettre en évidence les propriétés de la correction

de vertex avec une autre limite qu'il est naturel d'étudier à savoir $l \rightarrow \infty$, ou limite Ultra-Violette (UV). Par la même méthode de ne garder que les puissances dominantes de l , on obtient immédiatement :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Gamma^\mu(k, k') \propto \int \frac{d^4 l}{l^4} \quad (\text{IV.19})$$

Le comportement est identique à la limite IR (IV.18) et mène à la même conclusion d'une nouvelle divergence logarithmique dans la limite UV. A peine sortit du Charybe de l'émission infra-rouge nous tombons donc dans le Scylla de l'ultra-violet. La signification et le traitement de ces infinis sont reportés au paragraphe (IV.2.3) afin de poursuivre le recensement des divergences dans les deux autres processus des corrections virtuelles.

- *Self-energy d'un fermion* : Ce diagramme est une correction au propagateur de l'électron (fig.IV.3-a). Son expression est une fonction de k , seule variable disponible. On la note $i\Sigma(k)$. Dans le cas de la diffusion élastique, le photon virtuel est nécessairement branché sur une ligne extérieure c'est-à-dire un électron sur couche de masse, se propageant librement. Cette correction à la propagation libre est alors absorbée dans la définition des spineurs de Dirac solutions des equations :

$$\begin{aligned} (\not{k} - m_e) u(k) &= 0 \\ (\not{k} + m_e) v(k) &= 0 \end{aligned}$$

L'ensemble de la contribution et le traitement des éventuelles divergences de la Self-energy sont donc déjà pris en compte pour la diffusion élastique par la seule utilisation des spineurs renormalisés $u(k)$ et $\bar{u}(k)$ dans le calcul. Nous verrons toutefois que dans le cas de la diffusion Compton virtuelle le photon peut se coupler à des électrons hors couche (ligne interne, $k^2 \neq m^2$) et donner des corrections supplémentaires. L'expression générale de $i\Sigma(k)$ s'écrit :

$$i\Sigma(k) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} [-ie\gamma^\mu] i \frac{\not{k} + \not{l} + m_e}{(k+l)^2 - m_e^2} [-ie\gamma^\nu] \frac{-ig_{\mu\nu}}{l^2} \quad (\text{IV.20})$$

Le comportement asymptotique de cette l'intégrale est convergent dans la limite IR et linéairement divergent dans la limite UV :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (-i\Sigma) \propto \int \frac{d^4 l}{l^3} \quad (\text{IV.21})$$

- *Polarisation du vide* : Ce processus est une correction au propagateur du photon qui traduit la fluctuation de ce dernier en paire (e^+e^-) (fig.IV.3-c). L'ordre zéro

pour le propagateur d'un photon de quadrivecteur q entre deux vertex μ et ν est donné, en jauge de Feynman ($\partial_\mu A^\mu = 0$), par :

$$G_{\mu\nu}^0 = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \quad (\text{IV.22})$$

Cherchons l'expression générale de la correction à une boucle. Le seul scalaire disponible est q^2 et les seules quantités possibles à deux indices sont $g_{\mu\nu}$ et $q_\mu q_\nu$. On écrit donc :

$$-i\Pi_{\mu\nu} = -i \left[A(q^2) q^2 g_{\mu\nu} + B(q^2) q_\mu q_\nu \right] \quad (\text{IV.23})$$

L'invariance de jauge, $q^\mu \Pi_{\mu\nu} = q^\nu \Pi_{\mu\nu} = 0$, donne tout de suite la relation $A(q^2) = -B(q^2)$. De même, la conservation du courant électromagnétique qui va se brancher sur ce photon ($J^\mu q_\mu = 0$) assure que la contribution du terme en $q_\mu q_\nu$ sera nulle. La covariance et la symétrie de jauge imposent donc une expression avec un simple facteur correctif que l'on note :

$$-i\Pi_{\mu\nu} = -i\Pi(q^2) q^2 g_{\mu\nu} \quad (\text{IV.24})$$

L'écriture des règles de Feynman nous donnent le comportement IR et UV de la polarisation du vide :

$$-i\Pi_{\mu\nu} = - \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} [-ie] \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu i \frac{\not{l} + m_e}{l^2 - m_e^2} [-ie\gamma^\mu] i \frac{\not{q} + \not{l} + m_e}{(q+l)^2 - m_e^2} \right\} \quad (\text{IV.25})$$

La présence d'une boucle de fermions explique le signe moins global. Les puissances dominantes de l dans les limites IR et UV donnent :

$$\lim_{l \rightarrow 0} (-i\Pi_{\mu\nu}) \stackrel{IR}{\propto} \int d^4 l \quad \text{et} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} (-i\Pi_{\mu\nu}) \stackrel{UV}{\propto} \int \frac{d^4 l}{l^2} \quad (\text{IV.26})$$

La polarisation du vide serait donc convergente IR mais quadratiquement divergente UV! Cependant, l'invariance de jauge (Eq IV.24) ne laisse apparaître qu'une divergence logarithmique dans la limite UV.

Au terme de cette étude, il s'avère donc que tous les diagrammes de correction au premier ordre contiennent des infinis dans leur expression (figure IV.5). La section suivante présente l'outil mathématique que nous avons choisi pour nous permettre de manipuler ces infinis à savoir la régularisation dimensionnelle. La nature physique différente des divergences IR et UV y est clairement établie et leur traitements spécifiques, respectivement la compensation et la renormalisation, sont argumentés.

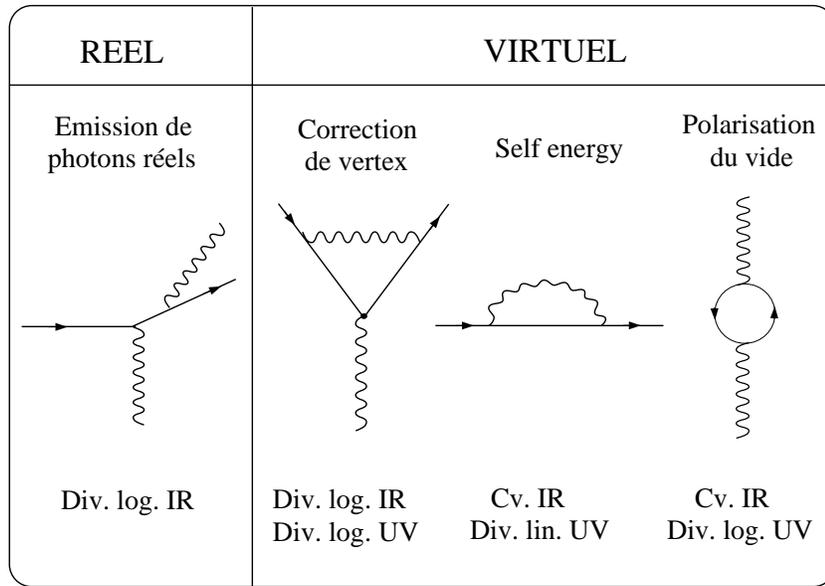


Figure IV.5: récapitulatif de toutes les divergences rencontrées dans les diagrammes de corrections radiatives au premier ordre de la diffusion élastique.

IV.2.3 Traitement des infinis

Nous avons vu précédemment que les sources des infinis qui apparaissent dans les calculs sont toujours des intégrales divergentes. Or les expériences sont là pour nous prouver que la section efficace de diffusion élastique est bien finie. Les problèmes rencontrés sont donc nécessairement des artifices de calcul et des compensations doivent s'opérer pour retracer les résultats expérimentaux. L'idée est de régulariser les intégrales afin d'isoler les divergences et mettre en évidence ces mécanismes de compensation. Précisons tout d'abord le terme de régularisation. Il désigne une méthode par laquelle l'intégrale est modifiée pour devenir finie. Un exemple simple de régularisation est bien sûr la coupure qui consiste, dans le cas d'une divergence UV, à remplacer la borne supérieure $+\infty$ par un paramètre Λ qui peut prendre des valeurs très grandes mais qui restera toujours fini. Une petite formule vaut parfois mieux qu'un long discours :

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_a^{\Lambda} \frac{dx}{x} = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \ln \frac{\Lambda}{a} \quad (\text{IV.27})$$

L'intérêt de la manipulation est que l'intégrale est maintenant calculable tout en gardant son comportement logarithmique divergent à travers le terme $\ln \Lambda$. L'espoir inhérent à toute procédure de régularisation va donc être de pouvoir travailler avec ces "signature" des infinis jusqu'au point de leur compensation.

Nous allons voir que la compensation des infinis UV, ou renormalisation, fait appel à l'inclusion de nouveaux diagrammes, appelés contre-termes, qui trouvent leur justification physique dans le traitement quantique de l'électromagnétisme. La renormalisabilité de QED est un critère très restrictif de la théorie associé à l'absence de dimensions de la constante de couplage α [71, p.56]. En revanche, l'isolation des pôles IR va mettre en évidence une compensation directe entre les corrections réelles et virtuelles.

Plusieurs schémas de régularisation ont été développés. Une revue est présentée dans le très bon ouvrage introductif de T. Muta [72, p.103], voir également [71, p.45]. Le critère de choix de la méthode sera que la théorie régularisée conserve le maximum des lois physiques présentes au départ, telles que l'invariance de Lorentz, la symétrie de jauge, l'unitarité... Dans l'emploi de la coupure par exemple, le fait d'imposer une borne supérieure finie Λ brise de manière évidente l'invariance par translation. La symétrie de jauge est également supprimée. Par son aspect intuitif cette méthode fut historiquement la première développée mais une technique mathématique plus évoluée, la régularisation dimensionnelle, permet de respecter plus de symétries (en particulier l'invariance de jauge) et a retenu notre choix pour l'ensemble des calculs. Elle fait l'objet du prochain paragraphe.

Régularisation dimensionnelle

La régularisation dimensionnelle réside dans la simple observation que la modification du nombre de dimensions de l'espace sur lequel on intègre peut supprimer une divergence. Il suffit pour s'en convaincre de réécrire l'équation (IV.26) en intégrant sur une seule dimension. Le diagramme de polarisation du vide devient alors convergent. Cette argumentation a servi de base à l'élaboration d'un schéma de régularisation par continuation de la dimension de l'espace [73, 76]. Cela signifie que la dimension de l'espace-temps devient une variable réelle D que l'on développe autour de la valeur physique par la formule :

$$D = 4 - 2\epsilon$$

(IV.28)

La poursuite des calculs demande la définition de toute une nouvelle algèbre à D dimensions dont les principaux résultats sont en annexe C. En conséquence, les intégrations sur le paramètre de boucle l deviennent des fonctions de D . Le résultat physique à quatre dimensions s'obtient simplement en prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et les éventuelles divergences sont signées par l'apparition de pôles en $1/\epsilon$.

Le respect de toutes les symétries physiques fait de la régularisation dimensionnelle

un outil de choix pour les théories de jauge. Historiquement, elle n'a cependant été pensée que dans l'optique de la régularisation UV et le problème IR restait traité par une méthode de coupure du domaine d'intégration consistant à donner une petite masse au photon. L'extension possible de la méthode dimensionnelle aux divergences IR est mise en évidence dans la référence [77]. Elle montre en effet que le même traitement mathématique va permettre d'isoler en parallèle dans les calculs les pôles IR et UV. L'exemple ci-dessous résume comment vont se manifester les deux types de divergences :

- *Divergence IR, $l \rightarrow 0$* : L'intégrale $\int \frac{d^D l}{l^4}$ est logarithmiquement divergente en dimension 4 mais convergente dès que $D > 4$ c'est-à-dire $\epsilon_{IR} < 0$.

La signature du pôle infra-rouge est toujours donnée par le facteur

$$\frac{1}{D-4} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_{IR}}$$

- *Divergence UV, $l \rightarrow \infty$* : L'intégrale $\int \frac{d^D l}{l^4}$ est logarithmiquement divergente en dimension 4 mais convergente dès que $D < 4$ c'est-à-dire $\epsilon_{UV} > 0$.

La signature du pôle ultra-violet est toujours donnée par le développement d'une fonction Γ près de l'origine (Eq. C.7) :

$$\Gamma(\epsilon_{UV}) = \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon_{UV})$$

L'origine mathématique différente des pôles IR et UV va ainsi permettre d'étiqueter sans confusion possible les facteurs $1/\epsilon$ qui apparaîtront dans le calcul. Une bonne illustration des mécanismes mis en jeu est donnée par la dérivation des termes divergents de la correction de vertex.

Réécrivons l'équation (IV.17) en dimension D :

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(k, k') &= -ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha(\not{k}' - \not{l} + m_\epsilon)\gamma^\mu(\not{k} - \not{l} + m_\epsilon)\gamma_\alpha}{l^2(l^2 - 2k' \cdot l)(l^2 - 2k \cdot l)} \\ &= -ie^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{N(l)}{D(l)} \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

où la quantité μ , homogène à une masse, est introduite pour garder la constante de couplage sans dimension lorsque l'on passe en $D \neq 4$ dimensions. Ce paramètre joue le rôle d'échelle de renormalisation. Dans la théorie de l'électrodynamique quantique, seule l'échelle physique à $Q^2 = 0$ intervient et toute dépendance en μ disparaît dans le résultat final.

Dans l'extraction des divergences, la première opération consiste à exprimer le quotient sous une forme que l'on sait intégrer. On utilise pour cela la paramétrisation de

Feynman donnée en (C.9). L'introduction de chaque nouveau paramètre permet de rassembler deux facteurs au dénominateur en un seul mais fait apparaître en contrepartie une intégration sur ce même paramètre entre 0 et 1. Dans le cas de la correction de vertex, trois facteurs dépendants de l sont présents au dénominateur et nécessitent l'introduction de deux paramètres de Feynman, x et y . Le choix pour le regroupement des deux premiers termes est totalement arbitraire et n'affecte pas le résultat final. De même pour l'ordre des intégrations sur x ou y . Une reformulation possible du dénominateur de $\Gamma^\mu(k, k')$ est ainsi la suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D(l)} &= \frac{1}{l^2(l^2 - 2k'.l)(l^2 - 2k.l)} \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{l^2[x(l^2 - 2k'.l) + (1-x)(l^2 - 2k.l)]^2} \\
&= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \frac{1}{[y[(l^2 - 2k.l) + 2xl.q] + (1-y)l^2]^3} \\
&= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \frac{1}{(\tilde{l}^2 - C)^3}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les notations

$$q = k - k', \quad \tilde{l} = l - (yk - xyq), \quad C = y^2[m_e^2 - q^2x(1-x)].$$

La définition de \tilde{l} permet de regrouper toute la dépendance en l dans un simple carré et d'exprimer le dénominateur sous une forme intégrable. Il reste alors à appliquer le changement de variable $l \rightarrow \tilde{l}$ pour obtenir un polynôme en \tilde{l} au numérateur. Pour simplifier les calculs, on peut se rappeler que l'expression de $\Gamma^\mu(k, k')$ est encadrée par les spineurs de Dirac $\bar{u}(k')$ et $u(k)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\bar{u}(k')N(l)u(k) &= \bar{u}(k') \gamma^\alpha (\not{k}' - \not{l} + m_e) \gamma^\mu (\not{k} - \not{l} + m_e) \gamma_\alpha u(k) \\
&= \bar{u}(k') [2k'^\alpha - \gamma^\alpha (\tilde{l} + y \not{k} - xy \not{q})] \gamma^\mu \\
&\quad [2(1-y)k_\alpha + (y m_e - \tilde{l} + xy \not{q}) \gamma_\alpha] u(k)
\end{aligned}$$

où nous avons appliqué l'équation de Dirac sur \not{k} et \not{k}' .

La correction de vertex s'exprime donc maintenant par une triple intégrale de la forme:

$$\Gamma^\mu(k, k') = -2ie \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \int \frac{d^D \tilde{l}}{(2\pi)^D} \frac{N(\tilde{l}, x, y)}{(\tilde{l}^2 - C)^3} \quad (\text{IV.30})$$

Le numérateur est un polynôme dans les variables \tilde{l} , x et y . Contrairement aux apparences, cette reformulation simplifie grandement les calculs car l'intégration sur \tilde{l}

devient une application directe des formules établies à D dimensions. Il ne reste ensuite que deux intégrales classiques sur x et y . Mais notre motivation première n'est pas de dériver l'expression totale de $\Gamma^\mu(k, k')$. Pour étudier le mécanisme de signature des infinis il suffit en effet d'isoler les termes les plus divergents.

La limite UV est la plus simple et la présence d'une divergence nécessite un degré supérieur ou égal à deux en \tilde{l} au numérateur. Un seul terme va donc contribuer :

$$-2ie \mu^{2\epsilon_{UV}} \iint_0^1 dx dy y \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \tilde{k}^\mu \tilde{k}^\alpha}{(\tilde{l}^2 - C)^3} \propto \mu^{2\epsilon_{UV}} \iint_0^1 dx dy y \int \frac{d^D \tilde{l}}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{l}^2}{(\tilde{l}^2 - C)^3}$$

La relation de proportionnalité s'obtient facilement en commutant les matrices γ et en utilisant la relation (C.4). Appliquons maintenant la formule d'intégration en D dimensions (C.3) :

$$\begin{aligned} I_{UV} &= \mu^{2\epsilon_{UV}} \iint_0^1 dx dy y \int \frac{d^D \tilde{l}}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{l}^2}{(\tilde{l}^2 - C)^3} & (IV.31) \\ &= i \mu^{2\epsilon_{UV}} \frac{(-1)^{1-3}}{(16\pi^2)^{\frac{D}{4}}} \frac{\Gamma(1 + \frac{D}{2}) \Gamma(3 - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(3)} \iint_0^1 \frac{dx dy y}{C^{3-1-\frac{D}{2}}} \\ &\stackrel{D \rightarrow 4}{=} \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right)^{\epsilon_{UV}} \Gamma(\epsilon_{UV}) \iint_0^1 dx dy y \left(\frac{m_e^2}{C} \right)^{\epsilon_{UV}} \end{aligned}$$

où m_e^2 est factorisée dans l'expression de C , homogène à une masse carrée, afin des faire apparaître des quantités sans dimensions. Le facteur $\Gamma(\epsilon_{UV})$, issu de l'intégration sur \tilde{l} , signe la divergence UV. Le développement à l'ordre 0 en ϵ_{UV} des termes indépendants de x et y conduit à :

$$I_{UV} \stackrel{D \rightarrow 4}{=} \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \iint_0^1 dx dy y \left(\frac{m_e^2}{C} \right)^{\epsilon_{UV}} \quad (IV.32)$$

Quelque soit le contenu de C , le pôle de la divergence UV se manifeste toujours avec la constante d'Euler et un logarithme qui rassemble toute la dépendance en μ . Nous allons voir qu'il en est de même pour la limite IR et que la compensation des infinis assure la disparation de μ dans les expressions.

Le comptage de puissance montre que seuls les termes de plus bas degré au numérateur, indépendants de \tilde{l} , vont contenir une divergence IR. Or, d'après ce qui précède nous savons que les fonctions Γ obtenues seront finies. Dans l'équation (IV.30), la seule origine de la divergence infra-rouge est donc un zéro du polynôme C . Ainsi, le simple fait que les infinis UV soient reliés aux plus fortes puissances de \tilde{l} au numérateur et les infinis IR aux plus faibles sépare mathématiquement la manifestation des

deux divergences.

Étudions donc les zéros de $C = y^2[m_e^2 - q^2x(1-x)]$. Pour $q^2 < 0$, ce polynôme n'a pas de racine en x dans l'intervalle $[0,1]$ mais en revanche il s'annule dans la limite $y \rightarrow 0$ puisque ce paramètre est en facteur. Le terme indépendant de \tilde{l} au numérateur est un polynôme de degré 2 en y . On note :

$$\begin{aligned} I_{IR} &= \mu^{2\epsilon_{IR}} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \iint_0^1 dx dy y \frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2}{(\tilde{l}^2 - C)^3} \\ &= -\frac{i}{32\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\epsilon_{IR}} \Gamma(3 - \frac{D}{2}) \iint_0^1 dx dy y \frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2}{C^{3-\frac{D}{2}}} \\ &= -\frac{i}{32\pi^2} \left[1 + \epsilon_{IR} \left(-\gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon_{IR}^2) \right] \iint_0^1 dx dy y \frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2}{(C/m_e^2)^{1+\epsilon_{IR}}} \end{aligned}$$

Soit, en ne conservant que la dépendance en y :

$$\begin{aligned} I_{IR} &\propto \int_0^1 dy y^{D-5} (\alpha + \beta y + \gamma y^2) \left[1 + \epsilon_{IR} \left(-\gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \\ &\propto \frac{\alpha}{D-4} + \frac{\beta}{D-3} + \frac{\gamma}{D-2} \left[1 + \epsilon_{IR} \left(-\gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \\ &\stackrel{D \rightarrow 4}{\propto} -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) + \beta + \frac{\gamma}{2} + \mathcal{O}(\epsilon_{IR}) \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

La divergence IR est ainsi signée par le quotient $1/(D-4)$ issu de l'intégration sur y . Le pôle s'accompagne de la même expression que dans le cas UV, avec un logarithme qui rassemble toute la dépendance en μ . La disparition de l'échelle μ dans les expressions finales est donc tout à fait parallèle à la compensation des infinis. Nous définissons pour la suite de ce chapitre la notation

$$\frac{1}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \quad (\text{IV.34})$$

par analogie avec les schéma de régularisation MS et \overline{MS} [72, p.121]. La présence de l'échelle de renormalisation dans $\bar{\epsilon}$ est propre à QED.

Cette illustration de la correction de vertex montre bien la puissance de la régularisation dimensionnelle qui permet d'isoler parallèlement, dans un même calcul, les infinis IR et UV. Leurs compensations, qui relèvent chacune d'une physique différente, est présentée dans les deux prochains paragraphes.

Renormalisation ultra-violette

Nous allons voir ici que l'émergence des divergences UV est intimement liée au traitement perturbatif des corrections radiatives. La meilleure illustration du processus

impliqué est donnée par l'écriture du lagrangien de QED :

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}_n(i\gamma^\mu\partial^\mu - m_{e_n})\psi_n - \frac{1}{4}F_n^{\mu\nu}F_{n\mu\nu} - e_n \bar{\psi}_n\gamma^\mu\psi_n A_{n\mu} \quad (\text{IV.35})$$

Les deux premiers termes décrivent la cinématique des fermions libres (équation de Dirac) et du champ électromagnétique (équations de Maxwell). La dynamique du système est contenue dans le troisième terme qui décrit le couplage vectoriel du photon à une charge e_n (la présence de l'indice n est justifiée par la suite). Ce lagrangien définit l'action de l'électrodynamique quantique et contient en germe la description de tous les processus électromagnétiques avec des fermions. Pour l'évaluation d'une amplitude ou d'une section efficace, il faudra encore fixer la valeur de certains paramètres tels que la masse et la charge de la particule en interaction. Il peut paraître inutile de soulever le problème puisque tous les physiciens s'accorderont à dire que charge et masse de l'électron, par exemple, sont parfaitement connues. Cependant, à la lumière des corrections radiatives, c'est-à-dire des processus d'ordre supérieur qui corrigent l'interaction, ces quantités connues apparaissent maintenant comme des caractéristiques globales de la particule, issues de mesures physiques *classiques*. Le qualificatif de classique dénote simplement que masse et charge sont déterminées par le comportement à grande échelle de la particule avec une mesure qui dans son principe même inclue la sommation de toutes les fluctuations quantiques.

Illustrons ce discours par l'exemple intuitif de la charge de l'électron. Les corrections

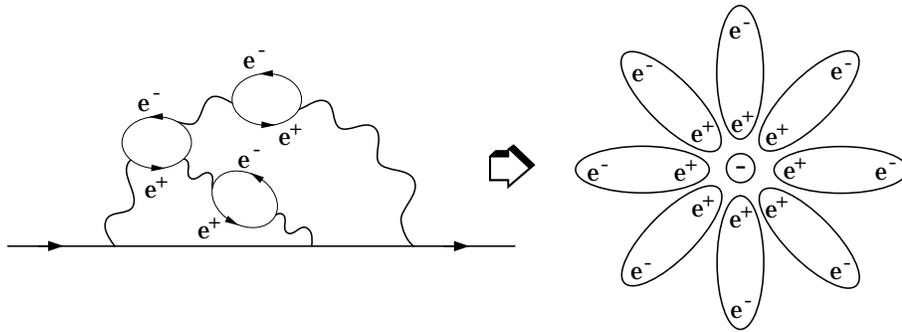


Figure IV.6: Ecrantage de la charge en électrodynamique quantique.

radiatives nous montrent qu'un électron libre ne se propage jamais *nu* mais qu'il est *habillé* par une myriade de photons virtuels. À l'ordre 1, on obtient la correction de self-energy, à l'ordre 2, le photon virtuel va pouvoir osciller en paire e^+e^- avant d'être réabsorbé et ainsi de suite. On comprend que la sommation de tous les ordres va faire intervenir un nuage de photons et de paires. Ces dernières, sous l'effet du champ coulombien de l'électron, auront tendance à se polariser radialement et produire un écrantage de la charge (fig. IV.6).

La vision quantique de l'électron montre ainsi une charge ponctuelle entourée d'un nuage virtuel polarisé et expérimentalement, toute mesure de la charge va inclure une sommation sur toutes ces fluctuations. Le dilemme provient alors du fait que le lagrangien de QED ne décrit que des interactions avec des quantités nues, libres des corrections quantiques (d'où l'indice n de l'équation IV.35). Le champ de l'électron par exemple traduit une entité ponctuelle qui ne serait accessible expérimentalement qu'avec une résolution infinie. L'idée de la renormalisation est donc de relier les deux limites afin de pouvoir poursuivre les calculs. Cette relation est **supposée** multiplicative et donne lieu aux équations :

$$\begin{aligned} \text{de la fonction d'onde : } \quad \psi_n &= Z_2^{1/2} \psi \\ \text{du champ de photon : } \quad A_n^\mu &= Z_3^{1/2} A^\mu \\ \text{de la masse : } \quad m_{e_n} &= Z_m m \\ \text{de la charge : } \quad e_n &= Z_g e \end{aligned}$$

Les coefficients "Z" renormalisent toutes les grandeurs *physiques* du lagrangien (IV.35) pour les ramener aux valeurs *nues*. Ils sont développés en série de la constante de couplage et l'ordre du développement correspond avec l'ordre des corrections radiatives. Grâce aux relations précédentes nous pouvons écrire le lagrangien de l'électromagnétisme en faisant apparaître explicitement les quantités physiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &\quad \boxed{\begin{aligned} &+ (Z_2 - 1)\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial^\mu)\psi - (Z_2 Z_m - 1)\bar{\psi}m\psi \\ &+ (Z_3 - 1)\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \\ &+ (Z_1 - 1)\left(-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\right) \end{aligned}} \quad \text{Contre-Termes} \end{aligned} \tag{IV.36}$$

où $Z_1 = Z_g Z_2 Z_3^{1/2}$. On reconnaît effectivement l'expression (IV.35) transposée avec des valeurs physiques. Pour rétablir l'égalité entre les deux lagrangiens il faut cependant ajouter des termes supplémentaires, quatre pour QED, qui rétablissent la dépendance en les quantités nues par l'intermédiaire des coefficients Z . Ils seront nommés "contres-terms" et leur présence dans le lagrangien va introduire de nouveaux diagrammes qui entreront dans la somme cohérente des amplitudes (exemples fig.IV.7 et IV.8).

Maintenant on peut se demander comment la limite UV est reliée à la renormalisation. L'argument physique est que sonder un objet dans la limite UV équivaut à l'observer avec une résolution infinie. Dans le cas d'une correction radiative, le photon de très grande énergie ne sera donc sensible qu'aux structures de plus petite échelle, c'est-à-dire les quantités nues. L'apparition de divergences dans la limite UV pourrait donc s'interpréter par des quantités nues infinies. La correction apportée par le

contre-terme correspondant est alors également infinie et le résultat physique, fini, apparaît à travers la compensation des deux contributions divergentes. A l'ordre le plus bas, toutes ces corrections infinies (telle que l'écrantage de la charge) sont prises en compte par l'utilisation des valeurs physiques sans avoir recours aux contre-terme ($Z = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$). En revanche, chaque calcul d'un processus d'ordre supérieur vient sonder à nouveau l'habillage des fluctuations quantiques et il faut évaluer la contribution du contre-terme à l'ordre correspondant.

Tout ce mécanisme de subtiles compensations est certes déroutant mais il découle simplement de notre incapacité à décrire la physique autrement que par un développement perturbatif à partir des quantités nues. La renormalisation n'aurait pas de raison d'être si nous étions capables de mesurer un processus à un ordre donné en s'affranchissant de la sommation totale. La compensation des quantités infinies par des corrections infinies n'a donc aucun sens physique et ne fait que traduire la limitation du formalisme mathématique employé.

Le calcul des contre-terme s'obtient en ajoutant formellement la contribution des nouveaux diagrammes et en imposant de retrouver la limite des quantités physiques. Deux exemples typiques sont présentés ci-dessous.

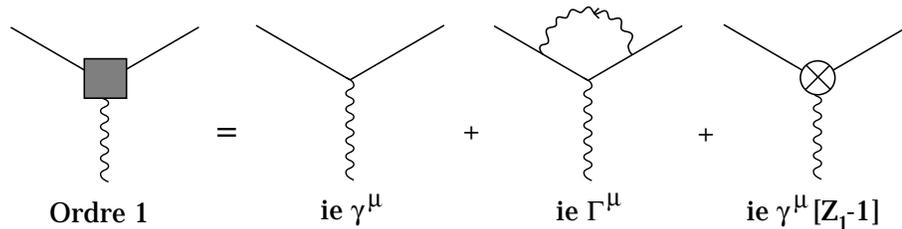


Figure IV.7: Diagrammes et contre-terme de la correction de vertex à l'ordre 1.

- Considérons tout d'abord le cas de la correction de vertex. L'expression du couplage électron-photon à l'ordre 1 implique la sommation des trois graphes de la fig.IV.7. Le courant électromagnétique corrigé prend alors une forme générale semblable à (IV.3) :

$$\begin{aligned}
 \langle |J_{em}^\mu| \rangle &= -\bar{u} \left[ie \gamma^\mu + ie (F(q^2)\gamma^\mu + iG(q^2) \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m_e}) + ie \gamma^\mu (Z_1 - 1) \right] u \\
 &= -ie\bar{u} \left[\gamma^\mu (1 + F(q^2) + Z_1 - 1) + i\sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m_e} G(q^2) \right] u \quad (\text{IV.37})
 \end{aligned}$$

La contrainte physique ici est de retrouver la charge mesurée $-|e|$ de l'électron en facteur devant γ^μ dans la limite $q^2 = 0$. Le signe négatif de cette charge a déjà été absorbé par la convention d'écriture du facteur (ie) , il reste donc la

relation :

$$1 + F(q^2 = 0) + Z_1 - 1 = 1$$

$$\boxed{Z_1 = 1 - F(0)} \quad (\text{IV.38})$$

La limite $G(q^2 = 0)$ ne contraint pas de contre-terme mais apporte une nouvelle contribution au terme d'interaction magnétique, en $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$, entre l'électron et le champ du photon (Cf.IV.2.1). Ceci revient à modifier le moment magnétique de l'électron [78] :

$$\|\vec{\mu}_e\| = \frac{\hbar e}{2m} \underbrace{[1 + G(q^2 = 0)]}_{g/2}$$

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (\text{IV.39})$$

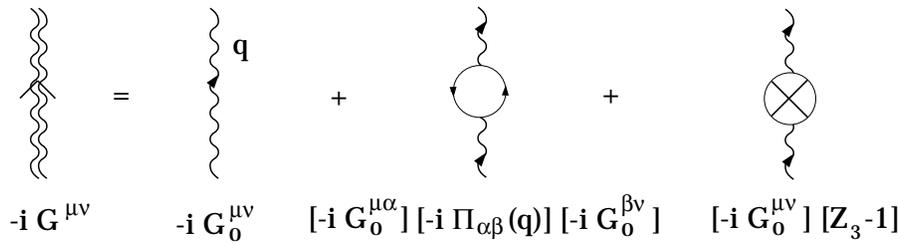


Figure IV.8: Diagrammes et contre-terme contribuant à la propagation d'un photon d'impulsion q à l'ordre 1. Le propagateur corrigé est noté $-iG^{\mu\nu}$, le propagateur nu $-iG_0^{\mu\nu} = -ig^{\mu\nu}/q^2$ et $\Pi_{\alpha\beta}(q)$ désigne la polarisation du vide.

- Pour une correction à la propagation d'une particule la condition sera de demander un pôle à la valeur de la masse physique. Illustrons par exemple la propagation du photon corrigée à l'ordre 1. Les graphes impliqués ainsi que les relations utilisées sont définies fig.IV.8. L'expression du propagateur habillé prend la forme :

$$-iG^{\mu\nu} = -iG_0^{\mu\nu} + (-iG_0^{\mu\alpha}) (-i\Pi_{\alpha\beta}(q)) (-iG_0^{\beta\nu}) + (-iG_0^{\mu\nu}) (Z_3 - 1)$$

$$G^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{\Pi^{\mu\nu}(q)}{q^4} + (Z_3 - 1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}$$

Soit, d'après (IV.24) :

$$G^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} [1 - (\Pi(q^2) - Z_3 + 1)] \quad (\text{IV.40})$$

Le propagateur physique a un pôle à $q^2 = 0$ avec un résidu 1 et impose donc :

$$\begin{aligned} \Pi(q^2 = 0) - Z_3 + 1 &= 0 \\ \boxed{Z_3 = 1 + \Pi(0)} & \quad (IV.41) \end{aligned}$$

Le calcul des contre-termes marque l'aboutissement de la procédure de renormalisation. Grâce à ceux-ci, le cadre théorique de l'interaction, défini avec des quantités nues, est raccordé avec la limite des quantités physiques. QED garde ainsi son pouvoir prédictif dans le domaine UV. Les expressions analytiques des contre-termes à l'ordre 1 nécessitent le calcul de toutes les corrections au pic élastique et leur dérivation est trop laborieuse pour être décrite ici. Les résultats finals sont cependant regroupés en annexe D. Ces formules mettent en évidence un détail technique, mais qui a son importance dans la pratique, à savoir que certains contre-termes ramènent des divergences IR supplémentaires. Ce problème est discuté en fin du paragraphe suivant qui traite de la compensation des infinis IR.

Compensation Infra-rouge

A ce stade du calcul, la procédure de renormalisation a permis la suppression des infinis UV mais les diagrammes de corrections réelles et virtuelles comportent encore des divergences infra-rouges. Dès le départ on peut se douter que leur traitement sera fondamentalement différent car contrairement à la limite UV qui pose le problème de la définition des quantités nues, la limite IR de l'électromagnétisme est tout à fait physique et rejoint même l'approche empirique que nous pouvons avoir de cette interaction.¹ C'est également l'existence physique de cette limite qui nous a permis d'évaluer les contre-termes dans le paragraphe précédent. La continuité de QED vers la limite classique soutient ainsi l'hypothèse d'une compensation naturelle de toutes les divergences IR. Etant donné que celles-ci apparaissent à la fois dans les corrections réelles et dans les corrections virtuelles qui ont des états finals différents, cette compensation ne peut s'opérer qu'au niveau de la section efficace. L'idée est discutée pour la première fois par Bloch et Nordsieck dans leur article de référence publié en 1937 [79]. La preuve complète de la compensation dans le cas général a été apportée par Jauch et Rohrlich 17 ans plus tard [80, chap.16]. Je m'attacherai par la suite à exposer les principaux arguments qui permettent de mieux comprendre le mécanisme de la compensation. Ceux-ci seront ensuite validés par un calcul général à l'ordre 1. Dans leur excellent article de 1961, Yennie, Frautschi et Suura [81] présentent les

¹Dans le cas de la Chromo-Dynamique Quantique, la limite IR des degrés de liberté internes (quarks et gluons) n'est pas définie à cause de la présence du confinement à basse énergie.

points clé du traitement des divergences IR et étoffent leurs démonstrations de quelques raisonnements semi-classiques qui ont l'intérêt de rendre l'approche du problème plus intuitive. La première remarque consiste à montrer que les divergences IR sont nécessairement associées avec une émission ou une absorption de photons mous (réels ou virtuels) sur une ligne externe de particule chargée. Physiquement on comprend en effet qu'un photon de faible énergie, c'est-à-dire de grande longueur d'onde, ne soit sensible qu'aux caractéristiques à grande échelle du courant électromagnétique, alors que l'émission/absorption sur une ligne interne ne correspond au contraire qu'à une région très restreinte de l'espace-temps, limitée par les inégalités de Heisenberg. Si l'on poursuit cet argument, le couplage d'un photon infiniment mou sur une ligne externe d'un diagramme nous conduit naturellement à l'hypothèse de la factorisation du terme divergent devant l'élément de matrice décrivant le processus élémentaire. Cette extraction des facteurs singuliers IR est une propriété très importante des corrections radiatives qui va permettre le traitement complet des divergences et la démonstration de leur compensation.

Le reste du paragraphe est consacré au calcul des pôles IR dans le cas général d'un processus électromagnétique mais corrigé à l'ordre 1 uniquement. Les hypothèses des couplages sur les lignes externes et de la factorisation sont vérifiées et l'on montre que les contributions divergentes des corrections réelles et virtuelles sont effectivement égales et opposées. Ce calcul n'est qu'une adaptation de la démonstration à tous les ordres fournie dans les ouvrages [72, chap.6] et [82, chap.13].

Considérons tout d'abord l'amplitude de transition T_0 avec N lignes externes d'électrons sur couche (fig. IV.9).

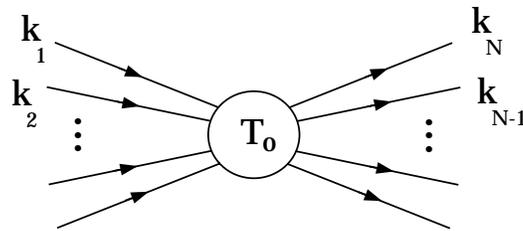


Figure IV.9: Processus électromagnétique représenté par l'amplitude T_0 avec N lignes externes d'électrons.

Nous allons successivement évaluer les termes divergents issus de tous les branchements possibles d'un photon réel puis d'un photon virtuel sur les lignes externes.

- *Corrections de photons réels :*

Par rapport à l'amplitude T_0 , le seul changement apporté par l'ajout d'un pho-

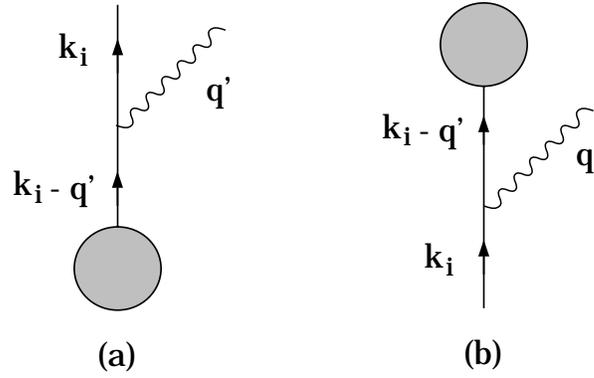


Figure IV.10: Couplage d'un photon réel mou à un électron (a) sortant, (b) entrant.

ton réel d'impulsion q' sur un électron sortant d'impulsion k_i est le remplacement de $\bar{u}(k_i)$ par :

$$\bar{u}(k_i) (-ie) \not{\epsilon}(q') i \frac{\not{k}_i + \not{q}' + m_e}{(k_i + q')^2 - m_e^2} \simeq -e \frac{k_i \cdot \epsilon(q')}{k_i \cdot q'} \bar{u}(k_i) \quad (\text{IV.42})$$

où la dernière expression est obtenue de manière analogue à (IV.11) en négligeant q' devant k_i dans la limite des photons mous et en appliquant l'équation de Dirac pour l'électron sortant. Dans le cas d'un électron entrant on obtient de même à la place du spineur $u(k_i)$:

$$i \frac{\not{k}_i - \not{q}' + m_e}{(k_i - q')^2 - m_e^2} (-ie) \not{\epsilon}(q') u(k_i) \simeq e \frac{k_i \cdot \epsilon(q')}{k_i \cdot q'} u(k_i) \quad (\text{IV.43})$$

Si l'on définit la signature $\eta_i = +1$ pour un électron entrant et -1 pour un sortant, le branchement d'un photon mou sur une ligne externe va donc simplement multiplier l'amplitude T_0 par un facteur

$$e\eta_i \frac{k_i \cdot \epsilon(q')}{k_i \cdot q'} \quad (\text{IV.44})$$

La prise en compte de tous les couplages possibles conduit à une somme cohérente de N amplitudes avec un photon dans lesquelles T_0 reste en facteur. Soit T_1^R cette amplitude totale à l'ordre 1, on obtient :

$$T_1^R = T_0 \sum_{i=1}^N e\eta_i \frac{k_i \cdot \epsilon(q')}{k_i \cdot q'} \quad (\text{IV.45})$$

Cette expression valide donc l'hypothèse de factorisation des corrections de photons réels mous. Elle a déjà été rencontrée dans le cas des corrections réelles au pic élastique et les équations (IV.11) à (IV.15) montrent bien que dans

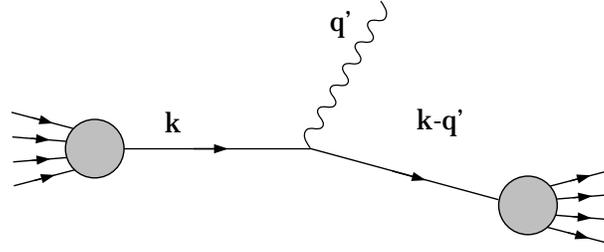


Figure IV.11: Emission d'un photon par un électron hors couche.

l'intégration sur l'espace de phase du photon le produit scalaire au dénominateur conduit effectivement à une divergence IR.

Un raisonnement similaire nous permet de remarquer ici que l'émission à partir d'une ligne interne n'apportera pas de contribution divergente. Considérons en effet la propagation d'un électron d'impulsion k , hors couche de masse (fig.IV.11). Le couplage d'un photon réel remplace le propagateur par :

$$i \frac{\not{k} + m_e}{k^2 - m_e^2} \rightarrow i \frac{\not{k} + m_e}{k^2 - m_e^2} (-ie) \not{\epsilon}(q') i \frac{\not{k} - \not{q}' + m_e}{(k - q')^2 - m_e^2} \quad (\text{IV.46})$$

Le caractère hors-couche de l'électron ($k^2 \neq m_e^2$) joue le rôle de coupure IR et empêche le deuxième dénominateur d'avoir un comportement singulier en q' . Le même argument s'applique à l'émission d'un photon virtuel et place ainsi tout le problème des divergences IR sur les lignes externes du processus.

Connaissant l'amplitude T_1^R écrivons maintenant la correction à la probabilité de transition à l'ordre 1 :

$$W_1^R = \int_R \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2q'^0} \sum_{pol} |T_1^R|^2, \quad R = \{q', q'^0 < \omega \ll k_i\} \quad (\text{IV.47})$$

La notation "pol" désigne la sommation sur les polarisations du photon et le domaine d'intégration "R" borne l'énergie q'_0 inférieure à ω pour rester dans la limite des photons mous. D'après (IV.12) et (IV.45) la somme sur toutes les hélicités du photon donne

$$W_1^R = |T_0|^2 \int_R \frac{d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^3 2q'^0} \sum_{i,j=1}^N e^2 \eta_i \eta_j \frac{-k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot q')(k_j \cdot q')} \quad (\text{IV.48})$$

Pour un photon réel l'énergie est égale au module de l'impulsion $q'^0 = |\vec{q}'|$. On peut donc réécrire l'intégrale comme

$$W_1^R = |T_0|^2 \sum_{i,j=1}^N -e^2 \eta_i \eta_j (k_i \cdot k_j) \int_R \frac{dq'^0}{(2\pi)^3 2q'^0} \underbrace{\int d^2 \Omega_{q'}}_I \frac{q'^{02}}{(k_i \cdot q')(k_j \cdot q')} \quad (\text{IV.49})$$

L'utilisation de la paramétrisation de Feynman (C.9) simplifie grandement l'intégration angulaire dans I :

$$\begin{aligned} I &= \int d^2\Omega_{q'} \int_0^1 dx \frac{q'^0{}^2}{[x(k_i \cdot q') + (1-x)(k_j \cdot q')]^2} \\ &= \int d^2\Omega_{q'} \int_0^1 \frac{dx}{[E_x - \vec{P}_x \cdot \hat{q}']^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

où \hat{q}' est le vecteur normé de direction \vec{q}' et E_x , \vec{P}_x sont définis par

$$E_x = x k_i^0 + (1-x) k_j^0, \quad \vec{P}_x = x \vec{k}_i + (1-x) \vec{k}_j$$

Suite à cette reformulation, I apparaît clairement indépendante de q'_0 . Pour traiter la dépendance angulaire il suffit alors d'orienter l'axe z suivant la direction \vec{P}_x et l'on trouve immédiatement

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^1 dx \int_{-1}^1 d \cos \theta_{q'} \frac{dx}{[E_x - \|\vec{P}_x\| \cos \theta_{q'}]^2} = 4\pi \int_0^1 \frac{dx}{E_x^2 - \|\vec{P}_x\|^2} \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{dx}{m_e^2 - x(1-x)(k_i - k_j)^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

Finalement, l'expression de la probabilité de transition se ramène à

$$W_1^R = |T_0|^2 f \int_0^\omega \frac{dq'^0}{q'^0}, \quad (\text{IV.52})$$

$$\text{avec } f = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i,j=1}^N -e^2 \eta_i \eta_j (k_i \cdot k_j) \int_0^1 \frac{dx}{m_e^2 - x(1-x)(k_i - k_j)^2}$$

La divergence IR de l'émission de photons réels est concentrée dans la singularité de l'intégrale quand $q'^0 \rightarrow 0$. Pour signaler la présence du pôle on peut appliquer le principe de la régularisation dimensionnelle et se placer en $D = 4 - 2\epsilon$ dimensions :

$$W_1^R = |T_0|^2 f \int_0^\omega \frac{d^{D-3}q'^0}{(q'^0)^{D-3}} = |T_0|^2 f \frac{1}{D-4} (\omega)^{D-4} \quad (\text{IV.53})$$

Comme attendu, le pôle IR se manifeste par le rapport $1/(D-4)$. Ce calcul montre que la contribution divergente de la correction de photons réels à l'ordre 1 pour un processus quelconque ne provient que de l'émission depuis des lignes

externes et se factorise devant la probabilité de transition à l'ordre le plus bas. Son expression dans le schéma de régularisation dimensionnelle est :

$$W_1^R = |T_0|^2 f(\omega)^{-2\epsilon_{IR}} \frac{1}{-2\epsilon_{IR}} \quad (\text{IV.54})$$

- *Corrections de photons virtuels :*

Nous nous concentrons maintenant sur la partie complémentaire des corrections radiatives constituée par l'émission-absorption de photons virtuels. D'après l'étude précédente, nous savons que les contributions divergentes IR ne proviennent que des branchements sur les lignes externes dont l'illustration est donnée fig.(IV.12). Afin d'isoler les singularités nous procédons de la même manière que

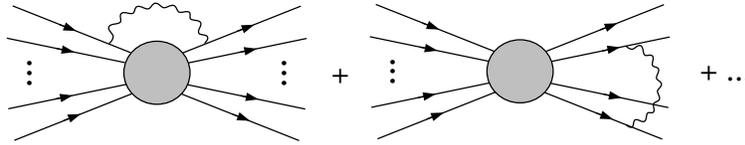


Figure IV.12: Différents couplages d'un photon virtuel aux lignes externes.

pour les photons réels en exprimant les modifications apportées à l'amplitude de base par l'ajout du photon radiatif. Pour des raisons de clarté d'écriture je décris ci-dessous le cas où le photon virtuel connecte une ligne externe sortante (k_i) avec une ligne externe entrante (k_j). Ce choix est purement illustratif et n'affecte en rien la généralité de la démonstration. Si T_0 décrit l'amplitude de départ, on peut faire apparaître les spineurs associés à k_i et k_j en écrivant $T_0 = \bar{u}(k_i)\mathcal{M}u(k_j)$. La connexion du photon virtuel rajoute les propagateurs des électrons et du photon ainsi qu'une intégration sur le quadrivecteur q parcourant la boucle. La limite des photons mous est imposée par le domaine d'intégration noté $V : 0 < |q^0| < \Lambda \ll (k_i, k_j)$.

$$\int_V \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{u}(k_i) (-ie)\gamma_\mu i \frac{\not{k}_i - \not{q} + m_e}{(k_i - q)^2 - m_e^2} \mathcal{M} i \frac{\not{k}_j - \not{q} + m_e}{(k_j - q)^2 - m_e^2} (-ie)\gamma_\nu u(k_j) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}$$

En appliquant une fois de plus l'équation de Dirac à k_i et k_j et en négligeant q on obtient :

$$\int_V \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(-ie^2)}{q^2} \frac{k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot q)(k_j \cdot q)} \underbrace{\bar{u}(k_i)\mathcal{M}u(k_j)}_{T_0} \quad (\text{IV.55})$$

L'hypothèse de la factorisation est donc vérifiée également pour les corrections virtuelles. Le même raisonnement appliqué au cas général avec la possibilité

de deux électrons entrant ou deux sortant donne l'expression suivante pour le facteur multiplicatif complet :

$$\int_V \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(-ie^2)}{q^2} \frac{-\eta_i \eta_j k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot q)(k_j \cdot q)} \quad (\text{IV.56})$$

Considérant tous les branchements possibles sur les N lignes externes, on obtient pour l'amplitude à l'ordre 1 :

$$T_1 = T_0 \frac{1}{2} \int_V \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(-ie^2)}{q^2} \sum_{i,j=1}^N \frac{-\eta_i \eta_j k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot q)(k_j \cdot q)} \quad (\text{IV.57})$$

où le facteur $1/2$ corrige du double comptage provenant de la permutation $i \leftrightarrow j$ dans la sommation sur ces indices. D'après (IV.9) nous savons que la correction virtuelle intervient dans la probabilité de transition via la somme cohérente des amplitudes :

$$\begin{aligned} W^V \propto |T_{tot}|^2 &= |T_0 + T_1 + \dots|^2 \\ &= \underbrace{|T_0|^2}_{\text{ordre 0}} + 2 \underbrace{\text{Re}(T_0^* * T_1)}_{\text{ordre 1}} + \text{ordres supérieurs} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} W_1^V &= 2 \text{Re}(T_0^* * T_1) \quad (\text{IV.58}) \\ &= |T_0|^2 \text{Re} \left[-ie^2 \int_V \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \sum_{i,j=1}^N \frac{-\eta_i \eta_j k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot q)(k_j \cdot q)} \right] \end{aligned}$$

La présence du facteur $(-i)$ implique que la seule contribution réelle du produit $T_0^* * T_1$ ne peut provenir que de la partie imaginaire du propagateur du photon. On rappelle en effet que la prescription physique pour le pôle $q^2 = 0$ est :

$$\frac{1}{q^2} \longrightarrow \frac{1}{q^2 + i\epsilon} = \frac{\mathcal{P}}{q^2} - i\pi \delta(q^2) \quad (\text{IV.59})$$

\mathcal{P} désignant le partie principale. L'expression (IV.59) devient alors:

$$W_1^V = \pi e^2 |T_0|^2 \int_V \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta(q^2) \sum_{i,j=1}^N \frac{\eta_i \eta_j k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot q)(k_j \cdot q)} \quad (\text{IV.60})$$

Les propriétés de la fonction δ permettent d'écrire :

$$\delta(q^2) = \delta(q^{02} - |\vec{q}|^2) = \frac{1}{2|q^0|} \left[\delta(q^0 - |\vec{q}|) + \delta(q^0 + |\vec{q}|) \right] \quad (\text{IV.61})$$

D'où

$$W_1^V = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} |T_0|^2 \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dq^0}{2|q^0|} \int d|\vec{q}| |\vec{q}|^2 \int d\Omega_q \sum_{i,j=1}^N \frac{\eta_i \eta_j k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot q)(k_j \cdot q)} [\delta(q^0 - |\vec{q}|) + \delta(q^0 + |\vec{q}|)] \theta(|\vec{q}|) \quad (\text{IV.62})$$

La fonction $\theta(|\vec{q}|)$ rappelle simplement la contrainte que $|\vec{q}|$ doit rester positif. Après intégration sur $|\vec{q}|$ on obtient :

$$W_1^V = |T_0|^2 \underbrace{\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d\Omega_q \sum_{i,j=1}^N q^{0^2} \frac{\eta_i \eta_j k_i \cdot k_j}{(k_i \cdot q)(k_j \cdot q)}}_{-f} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dq^0}{2|q^0|} \quad (\text{IV.63})$$

où nous reconnaissons la quantité f définie en (IV.53) qui a été démontrée indépendante de q^0 . En utilisant la parité par rapport à q^0 dans l'intégrale, la probabilité de transition se réduit à :

$$W_1^V = |T_0|^2 (-f) \int_0^{\Lambda} \frac{dq^0}{q^0} \quad (\text{IV.64})$$

Dans le cadre de la régularisation dimensionnelle, la singularité IR se manifeste alors par l'expression :

$$\boxed{W_1^V = |T_0|^2 (-f) (\Lambda)^{-2\epsilon_{IR}} \frac{1}{-2\epsilon_{IR}}} \quad (\text{IV.65})$$

La compensation des divergences IR se vérifie directement en développant W_1^R et W_1^V dans la limite $\epsilon_{IR} \rightarrow 0$. Soit W_1 la probabilité totale de transition corrigée à l'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 + W_1^R + W_1^V \\ &= |T_0|^2 \left[1 + f \left(\frac{1}{-2\epsilon_{IR}} + \ln \omega - \frac{1}{-2\epsilon_{IR}} - \ln \Lambda \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon_{IR}) \\ &\stackrel{\epsilon_{IR} \rightarrow 0}{=} |T_0|^2 \left[1 + f \ln \frac{\omega}{\Lambda} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.66})$$

Les paramètres ω et Λ sont des limites finies en énergie en dessous desquelles les photons sont considérés comme mous. L'équation (IV.66) ne comporte donc plus de termes divergents IR.

Cette démonstration a mis en évidence les caractéristiques de la compensation infra-rouge ainsi que la factorisation de la correction. Il faut cependant garder à l'esprit

que, par les coupures ω et Λ , nous nous sommes confinés dans la région des photons mous. Dans un calcul complet, des divergences UV vont apparaître et vont nécessiter une procédure de renormalisation. La présence, signalée au paragraphe précédent, d'infinis IR dans certains contre-termes va modifier les termes en facteur mais nous admettrons ici que le mécanisme de compensation n'est pas remis en cause.

IV.2.4 Mise en œuvre des corrections

Cette section résume tout d'abord les expressions obtenues pour chaque graphe après intégration. Seule la limite $Q^2 \gg m_e^2$ est reportée ici, les expressions exactes se trouvent dans l'appendice A de la référence [83].

La compensation des divergences infra-rouges est vérifiée et l'on montre la factorisation de l'ensemble des corrections radiatives pour la cinématique élastique. L'application pratique des corrections réelles internes est ensuite illustrée sur un exemple de données acquises à Mainz. Je conclurai la discussion sur les rayonnements internes par quelques remarques sur la contribution des ordres supérieurs et le procédé d'exponentiation. Enfin, le dernier paragraphe présente brièvement le traitement des corrections réelles externes.

Expressions analytiques des corrections radiatives internes

Etant donné que le diagramme de self-energy ne contribue pas dans le cas de la diffusion élastique (Cf. IV.2.2), seuls trois processus sont à prendre en compte à l'ordre 1 des corrections radiatives :

- *Emission d'un photon réel* : L'intégrale (IV.15) sur l'espace de phase du photon est effectuée sans autre approximation que de négliger l devant les impulsions des autres particules. Le traitement de la singularité infra-rouge utilise le formalisme de la régularisation dimensionnelle dans lequel l'intégrale est évaluée en D-1 dimensions :

$$I_{\gamma\text{réel}} = -e^2 \int_0^{|\mathbf{l}| < \Delta E/\mu} \frac{d|\mathbf{l}|}{(2\pi)^{D-1}} \frac{|\mathbf{l}|^{D-2}}{2|\mathbf{l}|^3} \int_{D-3} d\Omega_l \left(\frac{k'^\mu}{k' \cdot \hat{l}} - \frac{k^\mu}{k \cdot \hat{l}} \right)^2 \quad (\text{IV.67})$$

Les bornes d'intégration sont rendues sans dimension par le changement de variable $l \rightarrow l/\mu$ qui introduit la même échelle μ de régularisation que dans le cas de la correction de vertex (Eq. IV.29). Le calcul complet est présenté dans [83]. Le développement de l'intégrale IV.67 conduit à une expression analytique

[84, 85] dont je ne donne ici que la limite ultrarelativiste ($\beta_e, \beta'_e \simeq 1$, vitesses des électrons entrant et sortant) avec $Q^2 \gg m_e^2$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{\gamma_{rel}} \stackrel{Q^2 \gg m_e^2}{\simeq} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}}\right)_{Born} \times \left\{ \frac{\alpha_{em}}{\pi} \left[-\frac{1}{\epsilon_{IR}} + \gamma_E - \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2}\right) \right] \left[\ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) - 1 \right] + \delta_R \right\} \quad (IV.68)$$

On reconnaît la manifestation du pôle IR sous la forme $1/\bar{\epsilon}_{IR}$ (Eq.IV.34) qui provient de la formule de l'angle solide à D-3 dimensions (Eq. C.6). La partie finie δ_R est donnée par :

$$\delta_R \stackrel{Q^2 \gg m_e^2}{\simeq} \frac{\alpha_{em}}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{4(\Delta E)^2}{m_e^2}\right) \left[\ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) - 1 \right] - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\beta_e^2}{4}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\beta_e'^2}{4}\right) - \frac{1}{4} \ln^2(1-\beta_e^2) - \frac{1}{4} \ln^2(1-\beta_e'^2) + \ln 2 \ln[(1-\beta_e^2)(1-\beta_e'^2)] + 2 \left[\ln^2\left(\sin\frac{\theta_e}{2}\right) - \ln^2 4 \right] - \frac{\pi^2}{6} - Sp\left(\sin^2\frac{\theta_e}{2}\right) \right\}. \quad (IV.69)$$

où ΔE représente l'énergie maximale rayonnée et Sp la fonction de Spence (C.2). Cette quantité est prise dans le repère du laboratoire et sera choisie de l'ordre de la résolution expérimentale. La limite de photons mous dans laquelle cette correction est calculée impose la condition $\Delta E \ll (E, E')$.

La dépendance en ΔE est en accord avec celle de la littérature [69] et [86] mais le traitement exact de l'intégrale angulaire donne des termes indépendants supplémentaires qui seront cruciaux pour l'évaluation précise des corrections radiatives du VCS.

- *Polarisation du vide* : L'expression de cette correction (IV.25) contient deux propagateurs qui vont conduire à intégrer sur un paramètre de Feynman. Le comportement UV de l'intégrale est régularisé par l'ajout du contre-terme Z_3 (IV.40). Le propagateur à l'ordre 1 s'écrit finalement :

$$-iG^{\mu\nu} \stackrel{Q^2 \gg m_e^2}{\simeq} -i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \left\{ 1 + \frac{\alpha_{em}}{\pi} \left[-\frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln\frac{Q^2}{m_e^2} \right] \right\} \quad (IV.70)$$

en accord avec le résultat calculé dans [87, p.7].

- *Correction de vertex* : Le calcul de cette correction est assez lourd du fait de la double intégration sur les paramètres de Feynman (IV.30). La renormalisation

supprime les divergences UV mais ramène des divergences IR (IV.38 et D.4). L'expression générale du vertex renormalisé s'écrit à l'ordre 1 :

$$\Gamma^\mu = A(Q^2) \gamma^\mu - iB(Q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_e} \quad (\text{IV.71})$$

Le formalisme de la régularisation dimensionnelle donne :

$$A(Q^2) \stackrel{m_e^2 \ll Q^2}{\approx} \frac{\alpha_{em}}{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon_{IR}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) \right] \left[\ln \frac{Q^2}{m_e^2} - 1 \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m_e^2} - 2 \right) + \left(-\frac{1}{2} \ln^2 \frac{Q^2}{m_e^2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \right\} \quad (\text{IV.72})$$

$$B(Q^2) \stackrel{m_e^2 \ll Q^2}{\approx} \frac{\alpha_{em}}{\pi} \frac{m_e^2}{Q^2} \ln \frac{Q^2}{m_e^2} \quad (\text{IV.73})$$

Compensation des divergences infra-rouges

Dans le cas de la cinématique élastique, nous voyons d'après les expressions précédentes que les divergences infra-rouges proviennent uniquement de l'émission de photons réels et de la correction de vertex. Etant donné les états finals différents de ces deux processus nous savons que la sommation des singularités IR doit se faire au niveau de la section efficace (Cf.IV.2.2) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{élas.}} = \underbrace{|A_{\text{élas.}}^0|^2}_{\text{ordre0}} + 2 \underbrace{\Re(A_{\text{élas.}}^{0*} \times A_{\text{virtuel}}^1)}_{\text{ordre1}} + |A_{\text{réel}}^1|^2 \quad (\text{IV.74})$$

La contribution IR des photons réels dans l'équation (IV.68) est directement applicable et se factorise de façon évidente devant la section efficace à l'ordre 0. En multipliant la contribution IR des photons virtuels de (IV.72) par l'amplitude élastique (terme d'interférence), la singularité se factorise également. La sommation de tous les infinis IR s'écrit alors :

$$\sum_{(\text{div. IR})} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{élas.}} \times \left[\underbrace{\frac{\alpha_{em}}{\pi} \left(-\frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) \left(\ln \frac{Q^2}{m_e^2} - 1 \right)}_{\text{réel}} + 2 \underbrace{\frac{\alpha_{em}}{2\pi} \frac{1}{\epsilon_{IR}} \left(\ln \frac{Q^2}{m_e^2} - 1 \right)}_{\text{virtuel}} \right] = 0$$

et vérifie les mécanismes de factorisation et de compensation présentés dans (IV.2.3).

Factorisation des corrections finies

A ce stade des corrections radiatives, il ne reste plus de contributions divergentes. Les expressions (IV.68) et (IV.70) des corrections de photons réels et de polarisation

du vide conduisent de façon évidente à une factorisation des termes finis devant la section efficace. En ce qui concerne la correction de vertex, la fonction $B(Q^2)$ (IV.73) donne une nouvelle dépendance en $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ dans l'amplitude d'ordre 1 qui n'est pas présente à l'ordre 0 et empêche une factorisation exacte. Cependant on voit que, dès que Q^2 devient grand comparé à la masse de l'électron, cette fonction tend vers zéro comme $x \ln x$.

On néglige donc la contribution de $B(Q^2)$ et la correction de la section efficace élastique prend la forme

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{exp.}^{Elas.} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{Born}^{Elas.} \times (1 + \delta), \quad \delta = \delta_R + \delta_{Vacuum} + \delta_{Vertex} \quad (IV.75)$$

Avec, dans la limite $Q^2 \gg m_e^2$:

$$\begin{aligned} \delta_R = & \frac{\alpha_{em}}{\pi} \left\{ \ln \left(\frac{4(\Delta E)^2}{m_e^2} \right) \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \right. \\ & - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta_e^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \beta_e'^2}{4} \right) \\ & - \frac{1}{4} \ln^2 (1 - \beta_e^2) - \frac{1}{4} \ln^2 (1 - \beta_e'^2) + \ln 2 \ln [(1 - \beta_e^2)(1 - \beta_e'^2)] \\ & \left. + 2 \left[\ln^2 \left(\sin \frac{\theta_e}{2} \right) - \ln^2 4 \right] - \frac{\pi^2}{6} - Sp \left(\sin^2 \frac{\theta_e}{2} \right) \right\} \quad (IV.76) \end{aligned}$$

$$\delta_{Vacuum} = \frac{\alpha_{em}}{\pi} \left[-\frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln \frac{Q^2}{m_e^2} \right] \quad (IV.77)$$

$$\delta_{Vertex} = \frac{\alpha_{em}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m_e^2} - 2 \right) + \left(-\frac{1}{2} \ln^2 \frac{Q^2}{m_e^2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \right\} \quad (IV.78)$$

La factorisation a été montrée dès 1949 par Schwinger [78] pour la diffusion élastique. H. Navelet *et al.* [85] ont défini les conditions d'application pour les réactions hadroniques en général. La méthode exposée demande cependant de se placer dans le repère au repos de la particule manquante ce qui n'est pas possible pour le photon du VCS.

Les expressions analytiques précédentes sont en accord avec les ouvrages de théorie des champs [88, 70]. Par rapport aux articles de référence [69] et [86], le calcul complet dans le formalisme de la régularisation dimensionnelle fait apparaître des termes supplémentaires en \ln^2 qui, dans les corrections réelles et virtuelles, seront très dominants à haute énergie et grand Q^2 . La remise en cause d'un développement limité à l'ordre 1 pour ces contributions importantes est discuté dans le paragraphe sur l'exponentiation.

Corrections dépendantes de la résolution expérimentale

La formule de correction (IV.75) possède un paramètre libre, ΔE , qui représente l'énergie jusqu'à laquelle l'expérimentateur choisi d'intégrer les photons réels émis. L'illustration de cette coupure est donnée fig.(IV.13) qui montre un spectre en énergie E' de l'électron diffusé pour une cinématique élastique observée à Mainz. L'énergie de faisceau est de 795 MeV et l'angle de diffusion fixé à 52 degrés ± 10 mrad. La contrainte de la cinématique à deux corps donne pour le spectre en E' un pic centré sur la valeur théorique $E'_{th} = 599.59$ MeV avec une largeur égale à la résolution expérimentale convoluée par la largeur du domaine angulaire. Les événements avec émission de photons mous s'ajoutent à cette distribution vers les plus faibles énergies avec le spectre en $1/(E'_{th} - E')$ du Bethe-Heitler (IV.15).

La correction du facteur $\delta_{réel}$ a pour objet de compenser cette contribution. Le

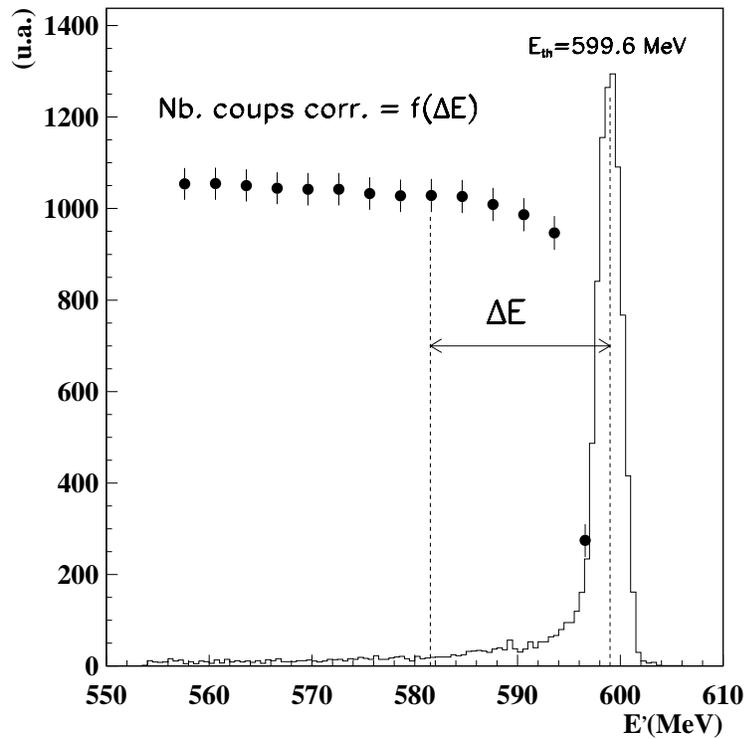


Figure IV.13: Méthode des corrections radiatives internes réelles appliquée à un spectre expérimental. Les points illustrent l'évolution du facteur correctif en fonction de ΔE .

résultat obtenu pour différentes valeurs de ΔE est indiqué par les points noirs qui

représentent le taux de comptage corrigé :

$$Nb.coups|_{Born} = \frac{1}{1 + \delta_{rel}} Nb.coups|_{Mes.} \quad (IV.79)$$

La cohérence physique de la méthode impose que la mesure corrigée soit indépendante du choix de ΔE , ce qui est effectivement observé.

Dans sa conception même, cette correction est limitée aux $\Delta E \ll (E, E')$. La déviation par rapport au plateau horizontal est donc inévitable pour ΔE suffisamment grand. On comprend également que ΔE doit être au moins supérieur à la résolution expérimentale sinon des évènements de la cinématique élastique pure sont coupés. Ceci explique la chute des points corrigés pour les très faibles ΔE .

Exponentiation des contributions dominantes

L'expression (IV.76) pose le problème de la justification d'un développement limité des corrections au premier l'ordre . Pour les valeurs suffisamment faibles de $\Delta E/E$, la correction δ_{rel} peut en effet devenir infinie négative. Schwinger [78] a évoqué le premier la nécessité de prendre en compte cette contribution dominante des photons réels à tous les ordres et a proposé d'interpréter le facteur $(1 + \delta_{rel})$ comme le premier terme de la série $e^{\delta_{rel}}$. Cette "exponentiation" de la correction a le mérite de redonner la bonne limite physique de la section efficace corrigée qui devient nulle pour $\Delta E \rightarrow 0$ (la probabilité de ne pas rayonner un photon très mou est nulle). La démonstration de l'exponentiation est basée sur les travaux de Bloch & Nordsieck [79] et Jauch & Rohrlich [80, chap.16]. Une bibliographie complète se trouve dans l'article de L.C. Maximon [69]. L'argument essentiel du calcul à tous les ordres est la considération de la partie la plus singulière de la correction c'est-à-dire la limite des photons très mous. Les émissions de plusieurs photons sont ainsi supposées ne pas perturber le mouvement de l'électron et sont traitées comme statistiquement indépendantes. La mise en évidence du développement de la série exponentielle constitue une généralisation à n photons du calcul présenté en IV.2.3 pour la compensation infra-rouge (Cf. les ouvrages de T.Muta [72] et S.Weinberg [82]).

Un raisonnement similaire s'applique au terme dominant $\ln^2(Q^2/m_e^2)$ des corrections virtuelles. L'étude de la contribution à tous les ordres est exposée dans l'ouvrage d'Akhiezer et Berestetskii [70, p.726] et démontre le développement suivant la série d'une exponentielle.

La bonne mise en œuvre des corrections au niveau de la section efficace devient donc

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{Mes.} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{Born} \times \exp(\delta) \quad (IV.80)$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{Born} \times \exp(\delta_R + \delta_{V_{vacuum}} + \delta_{V_{vertex}})$$

où δ est donné par les équations (IV.75 à IV.78).

L'exponentiation n'est démontrée que pour les termes dominants. L'inclusion des autres termes dans ou en dehors de l'exponentielle ne modifie cependant pas sensiblement le résultat final (effet $< 1\%$ sur les sections efficaces mesurées à MAMI).

IV.2.5 Les corrections réelles dans la simulation de l'angle solide

Les modifications cinématiques induites par l'émission de photons réels se traduisent par la dépendance en ΔE , énergie maximale rayonnée, dans le facteur de correction δ_R (Eq. IV.76). L'inclusion du rayonnement de photons, externe et interne, au niveau de la simulation de l'angle solide [89] possède l'intérêt de convoluer les effets d'acceptance des spectromètres avec les changements de cinématique. Les deux prochains paragraphes présentent la méthode du radiateur équivalent utilisée pour générer le spectre d'émission des électrons entrants et sortants. La direction de chaque photon rayonné est confondue avec celle de l'électron émetteur ("peaking"). Nous verrons que, pour les processus internes, cette approximation est corrigée afin de retrouver la formule exacte (Eq. IV.76).

Bremsstrahlung externe

Ce processus correspond au rayonnement de photons induit par le champ coulombien des atomes lors de la traversée de la cible. La prise en compte de ces corrections se fait à l'aide de formules empiriques qui donnent les effets moyens pour l'ensemble du parcours. La référence [90] donne la distribution de probabilité pour trouver un électron d'énergie E après avoir traversé une distance t avec une énergie initiale E_0 :

$$I_{ext}(E_0, E, t) = \frac{(\Delta E/E_0)^{bt}}{\Gamma(1+bt)} bt \left[\frac{1}{\Delta E} \left(1 - \frac{\Delta E}{E_0} + \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{IV.81})$$

Dans cette équation $\Delta E = E_0 - E$ est l'énergie totale perdue par l'émission d'un ou plusieurs photons. b vaut approximativement $4/3$ et l'épaisseur t de matière traversée est exprimée en unité de longueur de radiation. Pour ΔE faible on reconnaît, entre crochets, le spectre typique de bremsstrahlung (IV.15) avec une dépendance en $1/\Delta E$. Le facteur

$$\frac{1}{\Gamma(1+bt)} \cdot \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^{bt}$$

corrige la forme du spectre de la possibilité d'émission de plusieurs photons. La loi en puissance correspond à une resommation sur tous les ordres analogue à l'exponentiation des corrections radiatives réelles internes. Enfin, les corrections en puissances de $(\Delta E/E_0)$ dans le dernier terme prennent en compte l'effet d'écrantage de la charge lors de la traversée du matériau. L'épaisseur totale comprend une 1/2 longueur de cible avant le vertex et une 1/2 largeur après (corrigée de l'angle de sortie).

Le calcul de la luminosité pour une seule interaction dans la cible donne une dépendance linéaire en t . Dans le cas de l'émission d'un photon sur un autre noyau de la cible, la présence de deux centres diffuseurs distincts indépendants conduit à une section efficace proportionnelle au carré de l'épaisseur de cible. Pour limiter l'effet des radiations externes il faut donc veiller à ce que l'épaisseur totale de matériau traversée reste faible.

Avec le dispositif utilisé pour notre expérience le cumul des contributions de la cible, des parois de la cible et des fenêtres des spectromètres donne $5.9 \cdot 10^{-3}$ longueur de radiation. Cette faible épaisseur s'inclue tout à fait dans le domaine de validité $t < 0.1$ de l'équation IV.81 et assure une faible contribution du rayonnement externe, de l'ordre de 2% de la section efficace pour une cinématique élastique à 855 MeV.

Rayonnement interne

La distribution de probabilité pour les radiations internes est tirée de la référence [91, p.69] :

$$I_{int}(E_0, E, \nu) = \frac{\nu}{\Delta E} \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^\nu, \quad \nu = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \quad (\text{IV.82})$$

où ν joue le rôle d'une épaisseur équivalente (bt). Celle-ci est divisée en deux parties égales appliquées avant et après le vertex.

La correction au taux de comptage est donnée par la fraction d'électrons qui perdent une énergie entre 0 et ΔE :

$$\begin{aligned} \int_{E_0}^{E_0 - \Delta E} I_{int}(E_0, E, \nu) dE &= \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^\nu \\ &\simeq 1 + \frac{\alpha_{em}}{\pi} \ln \left(\frac{\Delta E^2}{E_0^2} \right) \left[\ln \left(\frac{Q^2}{m_e^2} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.83})$$

On retrouve exactement la même dépendance en ΔE que dans l'expression (IV.76) de δ_R . L'idée est donc d'utiliser dans la simulation la formule simple (IV.82) du spectre d'émission de photons afin d'intégrer les effets d'acceptance dans la partie dépendante de la cinématique. Il suffit ensuite de rajouter les termes indépendants de ΔE pour

retrouver l'accord avec la formule exacte (IV.76) de la correction réelle. Ceci revient à écrire $\delta_R = \delta_R^{sim} + (\delta_R - \delta_R^{sim})$ avec le premier terme, fonction de ΔE , inclus dans la détermination de l'angle solide (fig. III.19) et le deuxième, indépendant de ΔE , qui corrige la section efficace :

$$\begin{aligned}\delta_R^{sim} &= \frac{\alpha_{em}}{\pi} \ln\left(\frac{\Delta E^2}{E_0^2}\right) \left[\ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) - 1 \right] \\ \delta_R - \delta_R^{sim} &= \frac{\alpha_{em}}{\pi} \ln\left(\frac{4E_0^2}{m_e^2}\right) \left[\ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) - 1 \right] \\ &+ \text{termes en } (\beta_e, \beta'_e, \theta_e) \text{ de (IV.76)} \dots\end{aligned}$$

Application numérique

Les ordres de grandeurs des différents termes de la correction se répartissent de la façon suivante dans la correction de la section efficace théorique :

$$\begin{aligned}\delta_{Vacuum} + \delta_{Vertex} &\simeq -16.3\% \\ \delta_R^{sim} + (\delta_R - \delta_R^{sim}) &\simeq -23\% + 19.8\% \simeq -3.2\% \quad (\text{IV.84})\end{aligned}$$

La limite de photons mous ΔE utilisée pour la correction réelle interne est de l'ordre de 10 MeV. Les corrections radiatives vont donc dans le sens d'une diminution de la section efficace théorique ou, de manière équivalente une augmentation des taux de comptages expérimentaux. Ces ordres de grandeurs sont un point de référence vers lequel doivent tendre les corrections du VCS dans la limite $q' \rightarrow 0$.

IV.3 Corrections Radiatives à la Diffusion Compton Virtuelle

L'étude précédente des corrections à la diffusion élastique nous a fourni toutes les armes nécessaires pour attaquer le problème qui nous importe ici à savoir les corrections à la diffusion Compton virtuelle. Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, la transposition au cas du VCS ne requiert pas de nouveaux outils mathématiques mais la présence d'un photon réel supplémentaire dans l'état final alourdi considérablement les calculs en faisant notamment apparaître un propagateur de plus. Cette nouvelle complexité a d'ailleurs découragé toute tentative de développement entièrement analytique des formules de correction. Dans la suite de cette section j'exposerai la méthode retenue qui consiste en un traitement analytique des termes divergents et une évaluation numérique des termes finis. Le lecteur pourra en trouver une présentation détaillée et complémentaire dans la référence [83]. En guise

d'introduction à ce travail, je rappelle tout d'abord le contexte et les hypothèses du calcul.

IV.3.1 Hypothèses de calcul

Etant donné le faible effet des polarisabilités généralisées du nucléon relativement à la contribution $BH + Born$ (Chap.III), l'extraction de ces observables avec une erreur expérimentale raisonnable demande une très bonne précision sur la mesure absolue de la section efficace. Si l'on fixe le cahier des charges à 3% d'incertitude sur les points expérimentaux, la maîtrise des corrections radiatives devient tout à fait cruciale. Au regard des résultats obtenus avec le pic élastique, on peut en effet s'attendre à une correction de l'ordre de 20% pour le VCS. L'idée de départ est donc d'effectuer un calcul aussi complet que possible en contrôlant la portée de chaque approximation afin de limiter l'incertitude induite sur la section efficace. Dans ce but, tous les diagrammes de rayonnement de l'électron au premier ordre ont été pris en compte. Dans le cas de l'émission de photons réels l'intégration est faite sur tout l'espace de phase sans utiliser l'hypothèse du rayonnement uniquement dans les directions des particules chargées ("peaking").

Le traitement des corrections sur le proton ne poserait pas de difficultés supplémentaires hormis l'inclusion des facteurs de forme à chaque vertex hadronique. Cependant, la figure (IV.24) montre que la contribution des corrections calculée pour une particule de 50MeV est déjà négligeable par rapport à celle de l'électron. A l'échelle de masse du proton $m_p = 1\text{GeV}$, l'émission d'un photon radiatif peut donc être omise sans affecter la précision requise du calcul.

Une incertitude a priori plus difficile à évaluer concerne la partie *NonBorn* de l'amplitude. Je rappelle que la section efficace expérimentale que nous mesurons est la somme cohérente des trois processus en arbre *Bethe-Heitler*, *Born*, *NonBorn* ainsi que de leur corrections radiatives associées. Nous pouvons toujours écrire l'effet de ces corrections de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sigma^{exp} &= \sigma^{BH+Born+NonBorn+Radcorr_{tot}} \\ &= (1 - \delta) \sigma^{BH+Born+NonBorn}\end{aligned}\tag{IV.85}$$

Je souligne ici que le facteur $(1 - \delta)$ est seulement une notation et qu'il n'implique aucune factorisation des corrections. En fait, δ doit être considérée comme une fonction, avec quelque dépendance en angle ou énergie, définie par le rapport :

$$\delta = \frac{\sigma^{BH+Born+NonBorn} - \sigma^{exp}}{\sigma^{BH+Born+NonBorn}}\tag{IV.86}$$

Le calcul des corrections radiatives au VCS n'est rien d'autre que le calcul de cette fonction. Le problème est que la contribution *NonBorn* nous est inconnue (c'est ce que nous mesurons) et que toute tentative d'évaluation dépendra du model employé pour décrire les états excités du proton. Ceci nous conduit alors à émettre la principale hypothèse de notre calcul en assumant :

$$\delta \simeq \frac{\sigma^{BH+Born} - \sigma^{BH+Born+Radcorr_{(BH+Born)}}}{\sigma^{BH+Born}} \quad (\text{IV.87})$$

Dès lors δ est calculable à partir de QED et des facteurs de forme du proton. Comme expliqué précédemment, la partie "*Radcorr_{BH+Born}*" ne contiendra que le rayonnement sur l'électron. La nouvelle approximation sur δ consiste donc à supposer que les corrections du terme *NonBorn* ont le même effet relatif que celles de *BH + Born*. Au voisinage du seuil où nous nous plaçons pour cette expérience le développement en q' , imulsion du photon final, donné par le théorème de basse énergie pour le terme *NonBorn* nous assure que l'erreur est faible. Ce calcul de δ nous permet d'utiliser le formalisme de P.A.M. Guichon et al. [7] par la simple application de l'équation (IV.85) et par conséquent d'extraire les polarisabilités généralisées :

$$\begin{aligned} \sigma^{BH+Born+NonBorn} &= \frac{\sigma^{exp}}{(1-\delta)} \\ &\propto \frac{\mathcal{M}_{LET}^{-2}}{q'^2} + \frac{\mathcal{M}_{LET}^{-1}}{q'} + \mathcal{M}_{exp}^0 + \mathcal{O}(q') \end{aligned} \quad (\text{IV.88})$$

Enfin, en dernière remarque, je préciserai que tous les calculs sont menés dans le cadre de l'échange d'un seul photon virtuel. Dans le cas de la diffusion élastique, L.C. Maximon ([69] et références associées) argumente la faible contribution de l'échange de deux photons et nous faisons la même hypothèse ici pour le VCS.

Le paragraphe suivant présente la méthode utilisée pour aborder la plus importante partie du travail à savoir le traitement des corrections virtuelles.

IV.3.2 Etude des corrections virtuelles

Dans le cadre des hypothèses précédemment exposées, le calcul des corrections virtuelles au premier ordre se ramène à l'évaluation de la somme de tous les graphes de la figure IV.14. Chaque processus comporte cinq vertex et cinq lignes internes mais il est facile de prévoir que la complexité des expressions sera très différente d'un diagramme à l'autre. Nous savons par exemple que la polarisation du vide apporte simplement un facteur correctif constant au propagateur du photon (Eq. IV.24). Dans les corrections au terme de Born "V4" le photon réel est émis par le nucléon et le courant leptonique corrigé a donc la même expression que celle de la diffusion élastique,

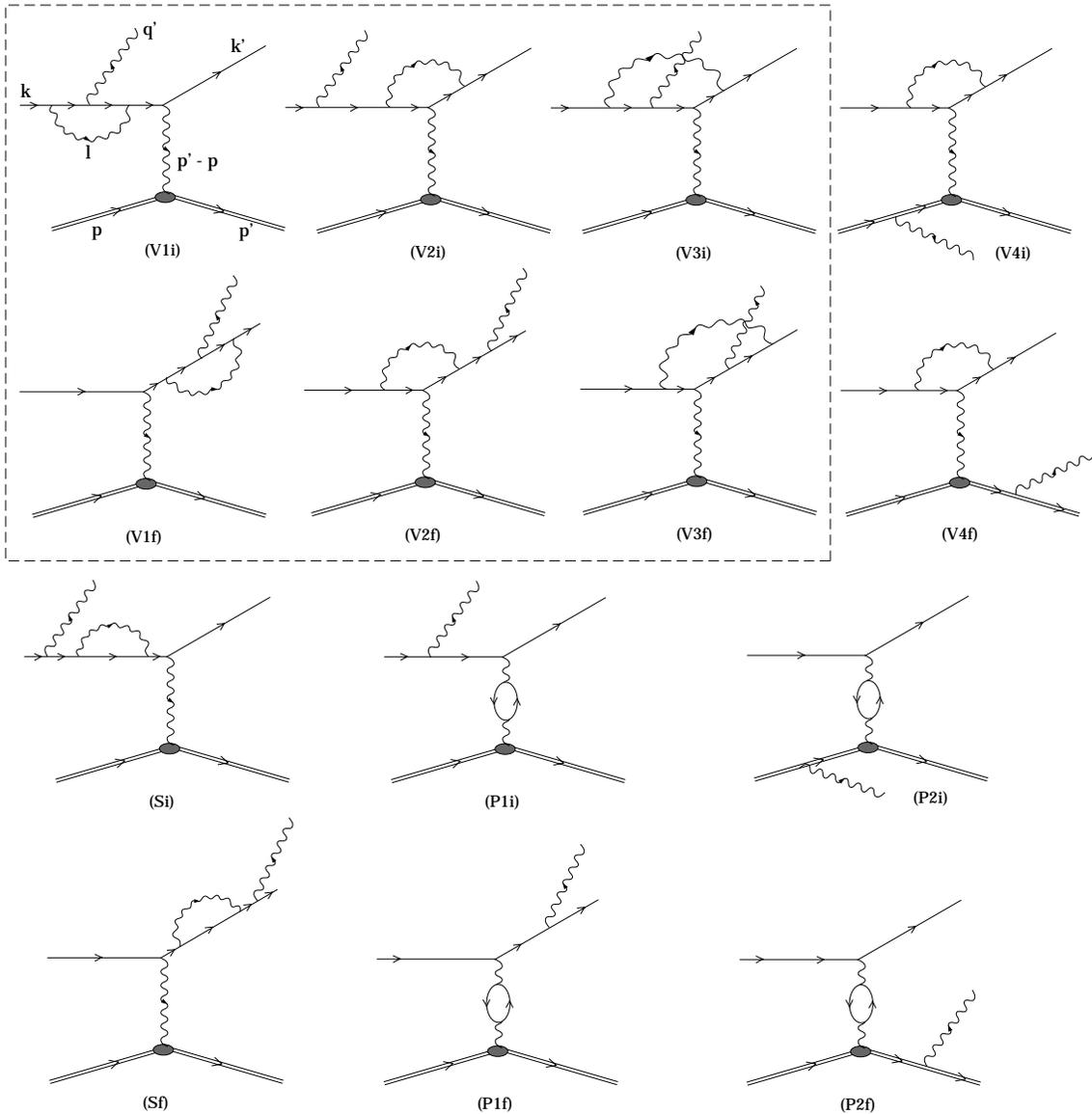


Figure IV.14: Corrections radiatives virtuelles du VCS au premier ordre. Toutes les corrections sur l'électron et la polarisation du vide sont prises en compte. Les notations V,S et P correspondent respectivement aux corrections de vertex, de self-energy et de polarisation du vide. Les indices i ou f désignent l'émission du photon réel par une ligne entrante de l'état initial ou une ligne sortante de l'état final. Les diagrammes nécessitant un traitement numérique sont rassemblés dans le cadre en tirets.

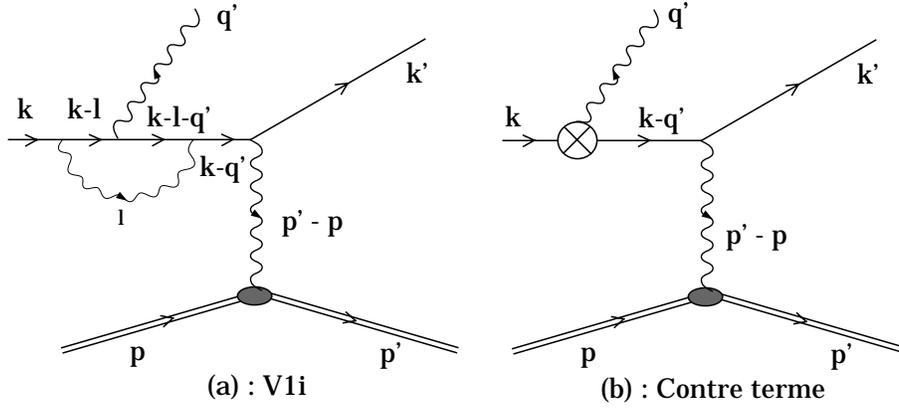
parfaitement connue. Pour les graphes restants, une complication supplémentaire provient du couplage du photon virtuel sur des lignes internes, ce qui n'est pas possible à l'ordre 1 pour la diffusion élastique. De façon équivalente cela signifie que de nouveaux propagateurs vont prendre une dépendance en l et que l'intégrale sur ce 4-vecteur va devenir plus difficile. Pour S_i et S_f , seules deux lignes internes contribuent à l'intégrale et le calcul formel de l'amplitude associée reste faisable. En revanche, pour les trois couples $V1, V2$ et $V3$ le nombre de propagateurs dépendant de l passe à quatre. Les expressions deviennent alors trop complexes pour aboutir à une expression analytique et appellent à une évaluation numérique de l'amplitude. Cependant, cette méthode n'est pas directement utilisable car nous savons que certains termes comporteront des divergences UV ou IR. Bien sûr, avec l'ajout des contre-termes et des corrections réelles, tous les infinis doivent se compenser mais il est illusoire de procéder numériquement à cette compensation. L'idée est donc de n'évaluer numériquement que les termes finis des trois couples de diagrammes $V1, V2, V3$ et de traiter analytiquement la compensation des singularités.

La méthode utilisée a été développée par Marc Vanderhaeghen [83] et s'appuie sur le fait que les divergences proviennent toujours de l'intégrale sur l'énergie-impulsion l du photon virtuel et sont facilement repérables par un comptage de puissances ou en prenant les limites $l \rightarrow 0$ et $l \rightarrow \infty$. L'astuce consiste alors à isoler la contribution divergente dans un terme indépendant d'expression plus simple et de soustraire celui-ci dans la formule de départ. La singularité se retrouve ainsi concentrée dans un terme où l'amplitude à l'ordre 0 (BH ou Born) se factorise et pour lequel la procédure de compensation des infinis devient possible analytiquement. Le reste de l'expression, toujours aussi complexe, est cependant devenu fini grâce à la soustraction et donc compatible avec un traitement numérique. A titre d'illustration je présente les premières étapes du calcul du graphe $V1_i$ de la figure IV.14 qui applique la méthode d'addition-soustraction pour la régularisation UV.

Régularisation UV : exemple du processus $V1_i$

Ce diagramme est une correction à l'émission Bethe-Heitler. Nous pouvons déjà affirmer que le photon virtuel l n'apporte pas de divergence IR puisqu'il se couple à une ligne interne (fig.IV.15-a). Etudions maintenant le comportement UV en appliquant les règles de Feynman :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{V1_i} = & \bar{u}(k') \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} [-ie\gamma^\nu] i \frac{\not{k} - \not{q}' + m_e}{(k - q')^2 - m_e^2} [-ie\gamma^\alpha] \\ & i \frac{\not{k} - \not{q}' - \not{l} + m_e}{(k - q' - l)^2 - m_e^2} [-ie \not{\epsilon}^*(q')] i \frac{\not{k} - \not{l} + m_e}{(k - l)^2 - m_e^2} [-ie\gamma^\beta] \end{aligned}$$


 Figure IV.15: Graphe $V1_i$ et son contre-terme associé.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{V1_i} &= \left(-i \frac{g_{\alpha\beta}}{l^2} \right) u(k) \cdot \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{(p' - p)^2} \right) J^\mu \\
 &= i \frac{e^4}{(p' - p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(k') \left\{ \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{q}' + m_e}{-2k \cdot q'} \right. \\
 &\quad \left. \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha (\not{k} - \not{q}' - \not{l} + m_e) \not{l} \not{q}' \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot (k - q')] [l^2 - 2l \cdot k] [l^2]} \right\} u(k) \quad (\text{IV.89})
 \end{aligned}$$

avec

$$J^\mu = -i|e| \langle \bar{N} | (F_1 \gamma^\mu + F_2 i \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m_p}) | N \rangle$$

La convergence IR est effectivement vérifiée. En revanche, une puissance deux en l au numérateur rend l'intégrale singulière dans la limite $l \rightarrow \infty$. Le terme en $\gamma^\alpha \not{l} \not{q}' \gamma_\alpha$ est donc divergent UV. La question se pose alors de savoir comment nous allons isoler ce terme infini. En effet, au dénominateur, le comportement de la singularité est entièrement dicté par les plus forts exposants de l (ici trois facteurs l^2) et reste insensible à toute modification des puissances non dominantes. L'intérêt consiste donc à se ramener à une expression déjà connue contenant la même divergence. Nous définissons :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{V1_i}^{ana} &= i \frac{e^4}{(p' - p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(k') \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{q}' + m_e}{-2k \cdot q'} \\
 &\quad \underbrace{\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha \not{l} \not{q}' \gamma_\alpha}{[l^2 - 2l \cdot k'] [l^2 - 2l \cdot k] [l^2]}}_I u(k) \quad (\text{IV.90})
 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que la limite UV de $\mathcal{M}_{V1_i}^{ana}$ est en effet identique à celle de \mathcal{M}_{V1_i} . Le progrès vient du fait que l'intégrale I correspond maintenant exactement à celle déjà rencontrée en (IV.17) pour la diffusion élastique. Le calcul de son expression

analytique utilise la paramétrisation de Feynman ainsi que les relations d'intégration à D dimensions de l'annexe C. On obtient :

$$\begin{aligned}
I = & \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \not{\epsilon}^* \left[\frac{1}{\epsilon_{UV}} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right) + 1 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \right. \\
& - \frac{1}{Q^2} \not{q} \not{\epsilon}^* \not{q} + \frac{1}{Q^2 v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) [2 \not{k} \not{\epsilon}^* \not{k} \\
& \left. - \not{q} \not{\epsilon}^* \not{k} - \not{k} \not{\epsilon}^* \not{q} + \left(\frac{v^2+1}{2} \right) \not{q} \not{\epsilon}^* \not{q}] \right\} \quad (IV.91)
\end{aligned}$$

où l'on a introduit les notations

$$q = k - k', \quad Q^2 = -q^2 \quad \text{et} \quad v^2 = 1 + \frac{4m_e^2}{Q^2}.$$

Le paramètre μ est l'échelle de masse arbitraire introduite dans les calculs pour avoir des termes sans dimension (échelle de renormalisation). Dès lors, en écrivant

$$\mathcal{M}_{V1_i} = \mathcal{M}_{V1_i}^{ana} + \underbrace{\mathcal{M}_{V1_i} - \mathcal{M}_{V1_i}^{ana}}_{\mathcal{M}_{V1_i}^{num}} \quad (IV.92)$$

nous avons une expression analytique de la divergence UV du processus $V1_i$ à travers le terme $\mathcal{M}_{V1_i}^{ana}$ et une partie restante, par construction finie, notée $\mathcal{M}_{V1_i}^{num}$. Dans ce dernier terme il faut tout de même encore soustraire formellement les deux infinis en réduisant au même dénominateur les deux fractions singulières. En utilisant C.2 on arrive immédiatement à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{V1_i}^{num} = & i \frac{e^4}{(p' - p)^2} J_\nu \cdot \bar{u}(k') \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{q}' + m_e}{-2k \cdot q'} \\
& \left\{ 2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-2 \not{l} \not{\epsilon}^* \not{l} [l \cdot (q - q') + k \cdot q']}{[l^2 - 2l \cdot (k - q') - 2k \cdot q'] [l^2 - 2l \cdot k'] [l^2 - 2l \cdot k] [l^2]} \right. \\
& + 2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - 2l \cdot (k - q') - 2k \cdot q'] [l^2 - 2l \cdot k] [l^2]} \\
& \left. \left\{ \not{l} \not{\epsilon}^* (\not{k} - \not{q}') + \not{k} \not{\epsilon}^* \not{l} - m_e^2 \not{\epsilon}^* + 4m_e \epsilon^* \cdot (k - l) - \not{k} \not{\epsilon}^* (\not{k} - \not{q}') \right\} \right\} u(k) \quad (IV.93)
\end{aligned}$$

La première intégrale provient de la soustraction des deux termes divergents en $\not{l} \not{\epsilon}^* \not{l}$ et est effectivement régulière dans la limite UV. La deuxième est le développement des termes en l^1 ou l^0 dans l'expression de départ (IV.89). Le traitement numérique de $\mathcal{M}_{V1_i}^{num}$ fait l'objet du paragraphe (IV.3.4). Avant de poursuivre avec la contribution des corrections réelles, il reste cependant à vérifier l'annulation des divergences UV par l'ajout du contre-terme figure (IV.15-b).

L'expression de ce contre-terme est simplement donnée par l'amplitude de BH dans laquelle on remplace la matrice γ^μ du couplage du photon réel par $\gamma^\mu(Z_1 - 1)$. Le

fait d'avoir isolé la divergence UV dans un terme identique à celui de la diffusion élastique nous permet alors d'utiliser pour le contre-terme le résultat de (IV.38) en facteur devant l'amplitude BH :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{V1_i}^{CT} &= \mathcal{M}_{BH_i} (Z_1 - 1) \\ &= -\mathcal{M}_{BH_i} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}_{UV}} + 4 + \frac{2}{\bar{\epsilon}_{IR}} \right)\end{aligned}\quad (IV.94)$$

\mathcal{M}_{BH_i} représente l'amplitude d'émission d'un photon réel par l'électron incident. L'écriture de la divergence UV utilise la notation " \overline{MS} " définie en (Eq. IV.34). Pour vérifier la compensation du pôle, il est utile de développer l'expression :

$$\mathcal{M}_{BH_i} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} J_\nu \bar{u}(k') \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{q}' + m_\epsilon}{2k \cdot q'} \not{\epsilon}^*(q') u(k) \quad (IV.95)$$

On constate en effet que, d'après les relations (IV.90) et (IV.91) \mathcal{M}_{BH_i} se factorise également devant la partie divergente de $\mathcal{M}_{V1_i}^{ana}$. L'ajout du contre-terme conduit donc à :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{V1_i}^{ana} + \mathcal{M}_{V1_i}^{CT} &= \mathcal{M}_{BH_i} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{2}{\bar{\epsilon}_{IR}} - 4 + 1 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p' - p)^2} J_\nu \bar{u}(k') \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{q}' + m_\epsilon}{2k \cdot q'} \frac{1}{Q^2} \\ &\quad \left\{ -\not{q} \not{\epsilon}^* \not{q} + \frac{1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) [2 \not{k} \not{\epsilon}^* \not{k} \right. \\ &\quad \left. - \not{q} \not{\epsilon}^* \not{k} - \not{k} \not{\epsilon}^* \not{q} + \frac{v^2 + 1}{2} \not{q} \not{\epsilon}^* \not{q}] \right\} u(k)\end{aligned}\quad (IV.96)$$

La divergence UV est supprimée mais le contre-terme de correction de vertex a ramené une nouvelle singularité IR (D.4). La factorisation de \mathcal{M}_{BH_i} n'apparaît alors plus du tout fortuite mais plutôt "préméditée" par le mécanisme de compensation IR. En effet, nous savons déjà par (IV.45) et (IV.57) que les divergences IR des corrections radiatives se factorisent devant l'amplitude non corrigée. La réalisation du scénario de compensation impose donc la même manifestation des infinis IR dans les contre-termes.

Cette procédure de transfert, dans un terme analytique et factorisable, de la divergence UV du graphe $V1_i$ est illustrée par la figure (IV.16). Le traitement des autres processus contenant des divergences reste identique. En final, tous les infinis UV sont régularisés par les contre-termes, la compensation des infinis IR est vérifiée dans la prochaine section.

$$\underbrace{\text{Diagram (V1i)}}_{\text{DIV. LOG. UV.}} = \underbrace{\int_{1 \rightarrow \infty} \frac{d^4 \mathbf{l}}{l^4} \times \text{Diagram (BH)}}_{\text{DIV. LOG. UV.}} \quad \text{Analytique} \Rightarrow \text{Compensé par C.T.}$$

$$+ \left[\text{Diagram} - \int_{1 \rightarrow \infty} \frac{d^4 \mathbf{l}}{l^4} \times \text{Diagram} \right] \quad \text{CONVERGENT} \Rightarrow \text{Numérique}$$

Figure IV.16: Principe du traitement analytique des divergences.

IV.3.3 Compensation des divergences IR et contribution des corrections réelles de photons mous

Les arguments généraux de compensation des divergences IR développés dans la section (IV.2.3) s'appliquent directement au cas du VCS. La sommation des corrections virtuelles et réelles intervient toujours via la même équation (IV.74) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{VCS} = \underbrace{|A_{VCS}^0|^2}_{\text{ordre0}} + 2 \underbrace{\Re(A_{VCS}^{0*} \times A_{virtuel}^1)}_{\text{ordre1}} + |A_{\gamma_{rel}}^1|^2 \quad (\text{IV.97})$$

L'ensemble des contributions est présenté dans le tableau (IV.1) qui rassemble tous les graphes de corrections à l'ordre 1 avec un photon radiatif, virtuel ou réel, branché sur une ligne externe d'électron. La partie supérieure du tableau correspond au terme d'interférence des corrections virtuelles tandis que la partie inférieure illustre le module carré des graphes d'émission de photons réels. Pour des raisons de clarté, seul les diagrammes avec le photon dur émis dans l'état initial sont mentionnés. Les termes divergents reportés incluent cependant les diagrammes croisés avec le photon dur émis dans l'état final.

Dans le cas des corrections virtuelles, la renormalisation amène trois contributions identiques provenant du contre-terme de vertex Z_1 (D.4) et une contribution du contre-terme ($-Z_2 Z_m$) de la self-energy (D.7). Cette dernière, absente pour la diffusion élastique, intervient dans le processus de VCS du fait de la présence d'un état

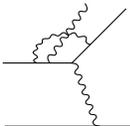
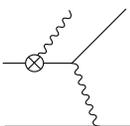
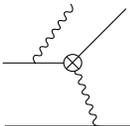
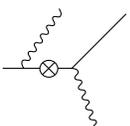
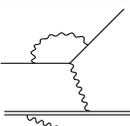
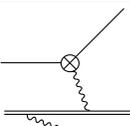
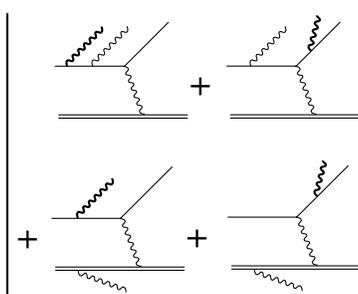
$2 \Re \left(\text{BH} + \text{Born} \right)^* \times$	
	$\mathcal{M}_{BH} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} \frac{v^2+1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right)$
	$\mathcal{M}_{BH} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} (-2)$
	$\mathcal{M}_{BH} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} (-2)$
	$\mathcal{M}_{BH} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} (+2)$
	$\mathcal{M}_{Born} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} \frac{v^2+1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right)$
	$\mathcal{M}_{Born} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} (-2)$
+	
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">  </div> <div style="margin: 0 10px;">2</div> </div>	$ \mathcal{M}_{BH} + \mathcal{M}_{Born} ^2 \cdot \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{-1}{\bar{\epsilon}_{IR}} \left\{ \frac{v^2+1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) - 2 \right\}$

Tableau IV.1: Compensation de toutes les divergences IR du VCS au niveau de la section efficace. Dans la partie inférieure du tableau, associée aux corrections réelles, les photons mous émis sont signalés en gras.

intermédiaire hors couche sur la ligne d'électron. La compensation IR est assurée, au niveau de la section efficace, par la somme nulle de tous les termes du tableau (IV.1). L'évaluation de la correction réelle finie demande a priori la prise en compte des dix diagrammes de la figure (IV.17). Cependant, dans les processus (b3i) et (b3f), le photon radiatif se couple à un électron hors couche et conduit à une dépendance linéaire [83] et non plus logarithmique en ΔE , énergie maximale émise. Dans la limite des photons mous ces diagrammes ne sont donc pas dominants et négligés dans une première approche. Il reste donc les contributions des huit diagrammes de type (b1), (b2), (b4) et (b5). Le calcul, effectué dans la limite des photons mous, est très semblable à celui de la diffusion élastique et conduit à la factorisation de la même correction devant l'amplitude de BH+Born :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{\text{Ordre 1}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'}} \right)_{\text{Ordre 0}} \cdot (1 + \delta_R) \quad (\text{IV.98})$$

avec δ_R donné par l'équation (IV.76).

L'effet de la correction est illustré pour les cinématiques à $q' = 33 \text{ MeV}/c$ et $111.5 \text{ MeV}/c$ (fig. IV.26 et IV.27).

Spectres expérimentaux des photons radiatifs

Au premier ordre, l'effet du rayonnement de photons réels sur la distribution en masse manquante reconstruite des événements VCS est la présence d'une "queue radiative" du côté positif (fig. III.18). Si l'on suppose l'émission d'un seul photon radiatif q'' , la masse manquante s'écrit en effet (Eq. III.17)

$$M_{q'q''}^2 = q'q'' (1 - \cos \theta_{q'q''}) \geq 0$$

Le but de ce paragraphe est de présenter une méthode de reconstruction du spectre expérimental de q'' afin de valider la dépendance en $1/q''$ de la probabilité d'émission et surtout de justifier l'approximation de photons mous des corrections radiatives.

L'état final ($q' + q''$) est caractérisé par six inconnues ($q'_x, q'_y, q'_z, q''_x, q''_y, q''_z$). Les spectromètres nous donnent accès au quadrivecteur manquant ($q' + q''$), soit quatre relations. Pour contraindre le système nous nous plaçons dans l'approximation du peaking (section IV.2.2) qui fixe deux variables angulaires supplémentaires en alignant le photon mou émis suivant la direction de l'électron incident ou de l'électron sortant.

Les distributions en q'' obtenues dans chacun des cas sont illustrées fig.(IV.18) pour la cinématique b.2 ($q' = 45 \text{ MeV}/c$). La dépendance en $1/q''$ est très bien reproduite.

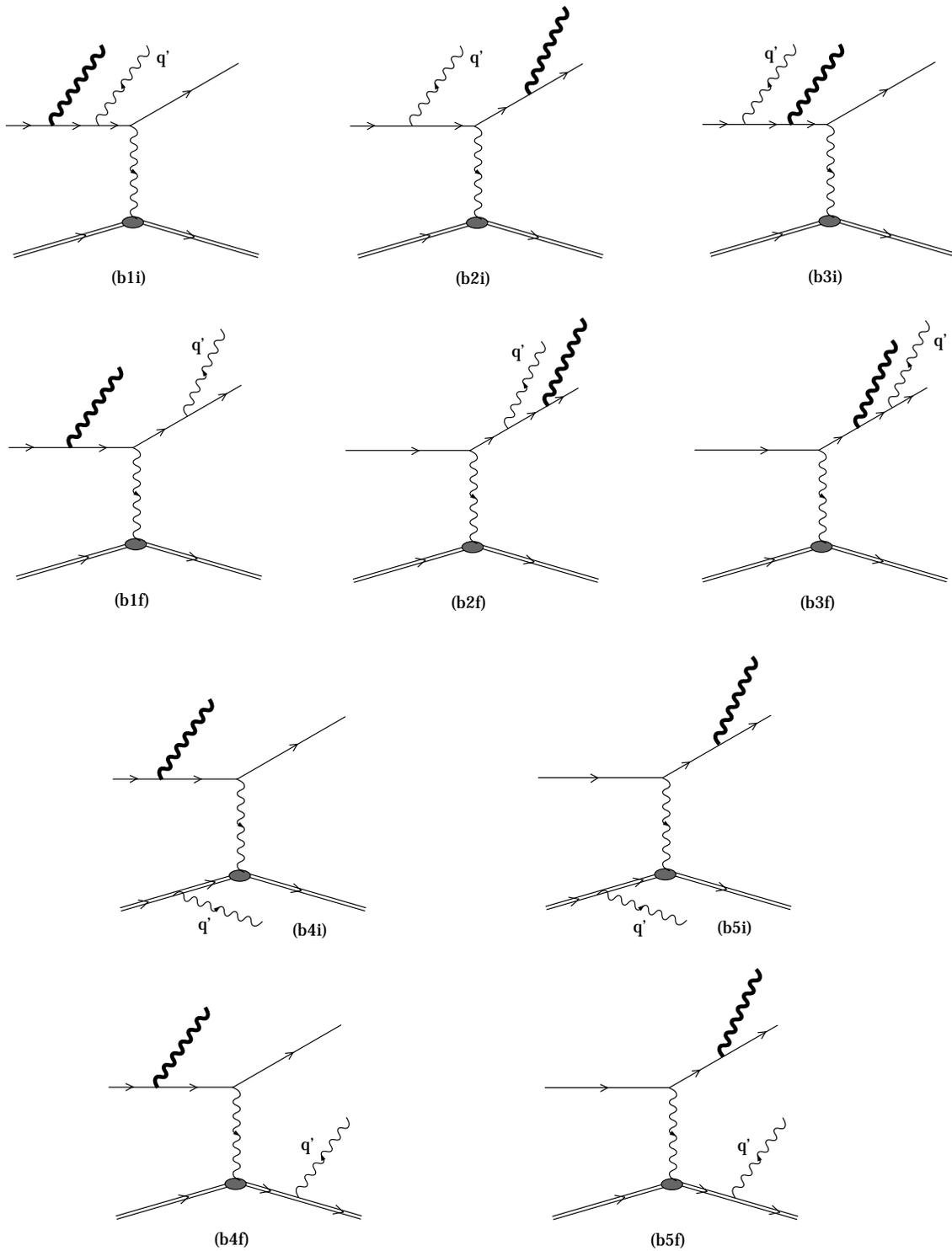


Figure IV.17: Corrections radiatives réelles au premier ordre du courant leptonique pour le VCS. Le photon “dur” de la cinématique VCS est noté q' tandis que le photon “mou” de la correction radiative est signalé en trait plus épais.

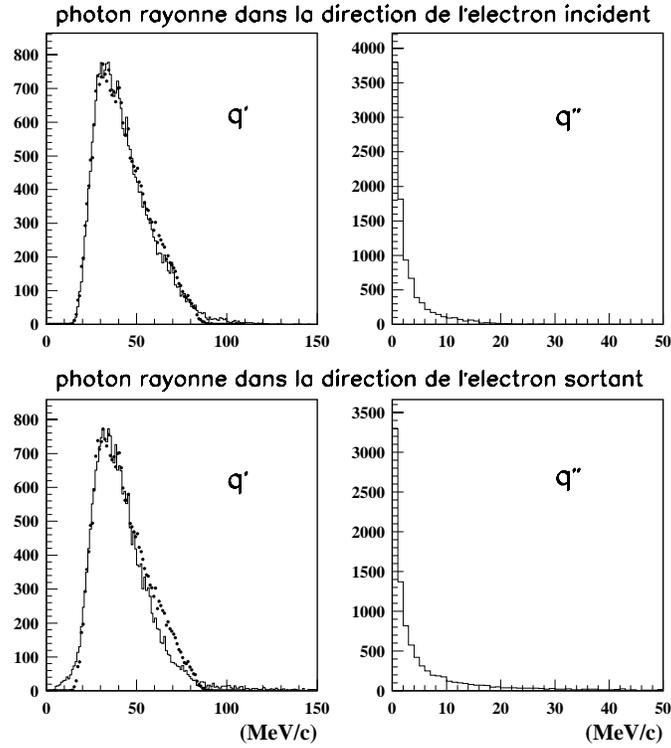


Figure IV.18: Spectres expérimentaux des photons réels radiatifs obtenus avec une coupure en masse manquante à $\pm 4000 \text{ MeV}^2$ et en supposant le rayonnement émis suivant k ou k' . Les figures de gauche illustrent la comparaison des distributions de q' (trait continu) et $q' + q''$ (points).

L'hypothèse des photons mous est vérifiée dans la mesure où $q'' < 4.5 \text{ MeV}/c$ pour 70% des événements et $q'' < 20 \text{ MeV}/c$ pour 93%.

IV.3.4 Méthode d'intégration numérique pour les corrections virtuelles

A ce stade du calcul, la compensation de tous les infinis, UV et IR, a été réalisée analytiquement et parmi tous les diagrammes de la figure IV.14, huit ont conduit à un développement entièrement formel. Nous détaillons ici la méthode numérique employée pour évaluer la contribution des termes finis restants dans les graphes de type $V1$, $V2$ et $V3$. Si l'on reprend l'expression typique (IV.93) de l'un de ces termes, nous voyons que l'intégrale sur l comporte jusqu'à quatre dénominateurs. Pour se

ramener à la formule connue (C.3) il faudra donc utiliser trois paramètres de Feynman. Le problème réside ensuite dans les intégrations sur ces paramètres. Deux principales difficultés sont apparues :

- Les variations de la fonction à intégrer sont très violentes près des bornes. Par exemple, un comportement typique est une dépendance relativement plate au centre du domaine avec deux remontées très prononcées près des extrémités. La largeur de ces deux pics est très faible, de l'ordre de m_e/E_{beam} , mais la contribution dans l'intégrale n'est pas négligeable et doit être soigneusement traitée pour garder une bonne précision.
- Pour certaines intégrales, l'intégrand possède des pôles . Ces singularités sont tout à fait indépendantes des limites UV ou IR et s'interprètent physiquement par la propagation d'états intermédiaires sur couche de masse dans les corrections radiatives virtuelles au VCS. Mathématiquement les intégrales restent finies mais leur évaluation nécessite une continuation analytique dans le plan complexe et implique la mise au point de nouveaux algorithmes.

L'idée directrice est d'utiliser autant que possible des expressions analytiques pour l'intégration la plus interne sur les paramètres de Feynman. Les suivantes seront évaluées numériquement avec la méthode de Gauss-Legendre [92, chap.XII et XIII]. Ce traitement spécifique de la première intégrale minimise le temps de calcul et améliore la précision numérique.

Dans le cas des intégrales singulières, la procédure de continuation dans le plan complexe pour la première dimension confert une partie imaginaire au pôle et supprime toutes les singularités pour les autres dimensions, sur l'axe réel.

Etudions à présent quelles seront les formes typiques d'intégrales impliquées dans le calcul. Nous poursuivons pour cela l'exemple du graphe $V1_i$. Dans le terme numérique (IV.93), la paramétrisation de Feynman (C.12) appliquée au premier dénominateur donne :

$$\begin{aligned}
 & 1 / \left\{ [l^2 - 2l.(k - q') - 2k.q'] [l^2 - 2l.k'] [l^2 - 2l.k] [l^2] \right\} \\
 = & 6 \int_0^1 dx_3 x_3^2 \int_0^1 dx_2 x_2 \int_0^1 dx_1 \\
 & 1 / \left\{ [l^2 - 2l.((k - q')(1 - x_3) + (k - qx_1)x_2x_3) - 2k.q'(1 - x_3)]^4 \right\} \\
 = & 6 \int_0^1 dx_3 x_3^2 \int_0^1 dx_2 x_2 \int_0^1 dx_1 1 / \left[(l - P^i)^2 - A^i \right]^4 \tag{IV.99}
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} P^i &= (k - q')(1 - x_3) + (k - qx_1)x_2x_3 \\ A^i &= 2k \cdot q'(1 - x_3) + (P^i)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.100})$$

De même, l'utilisation de (C.10) avec le deuxième dénominateur conduit à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[l^2 - 2l \cdot (k - q') - 2k \cdot q'] [l^2 - 2l \cdot k] [l^2]} \\ &= 2 \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{1}{[(l - y(k - q'x))^2 - yB_1^i]^3} \end{aligned} \quad (\text{IV.101})$$

Avec

$$B_1^i = 2k \cdot q'x(1 - y) + m_e^2y \quad (\text{IV.102})$$

Inséré dans (IV.93), ces nouvelles expressions des dénominateurs permettent d'intégrer sur d^4l . Le regroupement avec le terme analytique (IV.96) nous fournit alors la formule complète pour le graphe $V3_i$ qui illustre bien le volume important des calculs à manipuler :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{V1_i}^{ana} + \mathcal{M}_{V1_i}^{CT} &= \mathcal{M}_{BH_i} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{2}{\epsilon_{IR}} - 3 - v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right\} \\ &- \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p' - p)^2} J_\nu \bar{u}(k') \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{q}' + m_e}{2k \cdot q'} \\ &\left\{ \frac{1}{Q^2} \left[\not{q} \not{\epsilon}^* \not{q} \left(-1 + \frac{v^2 + 1}{2v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\not{k}' \not{\epsilon}^* \not{k} + \not{k} \not{\epsilon}^* \not{k}' \right) \frac{1}{v} \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) \right] \right. \\ &- 4 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_1 \\ &\left[\left(\frac{1}{A^i} \not{\epsilon}^* + \frac{1}{(A^i)^2} P^i \not{\epsilon}^* P^i \right) (P^i \cdot (q - q') + k \cdot q') \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2A^i} \left((q - q') \not{\epsilon}^* P^i + P^i \not{\epsilon}^* (q - q') \right) \right] \\ &- 2 \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{1}{B_1^i} \left[y(\not{k} - \not{q}'x) \not{\epsilon}^*(\not{k} - \not{q}') + y \not{k} \not{\epsilon}^*(\not{k} - \not{q}'x) \right. \\ &\quad \left. + 4m_e (\epsilon^* \cdot k)(1 - y) - \not{k} \not{\epsilon}^*(\not{k} - \not{q}') - m_e^2 \not{\epsilon}^* \right] \left. \right\} u(k) \end{aligned} \quad (\text{IV.103})$$

La partie analytique correspond aux quatre premières lignes de l'expression. Elle ne fait appel qu'à des produits de matrices qui sont tous connus pour une cinématique

donnée et peut être codée directement dans un programme. Le traitement de la partie numérique nécessite de travailler encore un peu les intégrales. Le but est en effet de factoriser toute la dépendance en les matrices de Dirac et de développer toutes les composantes des quadrvecteurs afin de se ramener à des intégrales de fonctions réelles. A partir des expressions (IV.100, IV.102 et IV.104) il est facile de voir que la forme générique est toujours :

$$\iiint_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{P(x_1, x_2, x_3)}{Q(x_1, x_2, x_3)} \quad (\text{IV.104})$$

où P et Q sont des polynômes des paramètres x_1, x_2, x_3 . Si l'on choisi de nommer x_1 la variable la plus interne et que l'on ordonne suivant les puissances de x_1 alors la première intégrale se réduit toujours à :

$$\int_0^1 \frac{x_1^m dx_1}{(\alpha x_1 + \beta)^n} \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \frac{x_1^m dx_1}{(\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma)^n} \quad (\text{IV.105})$$

où α, β et γ sont des polynômes en x_2 et x_3 avec des coefficients fonctions des variables cinématiques. Dans l'ensemble des six graphes concernés, m varie de 0 à 4 et n vaut 1 ou 2. Quelques termes numériques ne comportent des intégrales qu'à deux dimensions et constituent un sous-ensemble inclus dans le cas général décrit par (IV.104) et (IV.105). Ces décompositions successives ont bien sûr encore augmenté le volume des termes numériques mais elles ont le grand avantage de réduire le problème de la première intégration à l'évaluation de deux classes d'intégrales simples (IV.105). La dernière étape consiste maintenant à étudier la présence ou non de pôles dans le domaine d'intégration.

Origine et localisation des pôles

Je vais montrer que par un raisonnement simple sur la structure des diagrammes on peut prévoir la présence ou non de pôles. La figure IV.19 illustre les états intermédiaires créés par la correction de photons virtuels dans les graphes de type $V1$. Calculons la masse invariante de l'état intermédiaire ($e^- + \gamma$) signalé par le trait pointillé dans $V1_f$:

$$\begin{aligned} M_{inv}^2 &= (k' - l + q' + l)^2 \\ &= m_e^2 + 2k'.q' \geq m_e^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.106})$$

Celle-ci est toujours supérieure à m_e , ce qui signifie que l'électron et le photon peuvent acquérir une cinématique compatible avec un état réel. Mathématiquement, le passage sur la couche de masse d'un état intermédiaire va se traduire par la présence d'un pôle

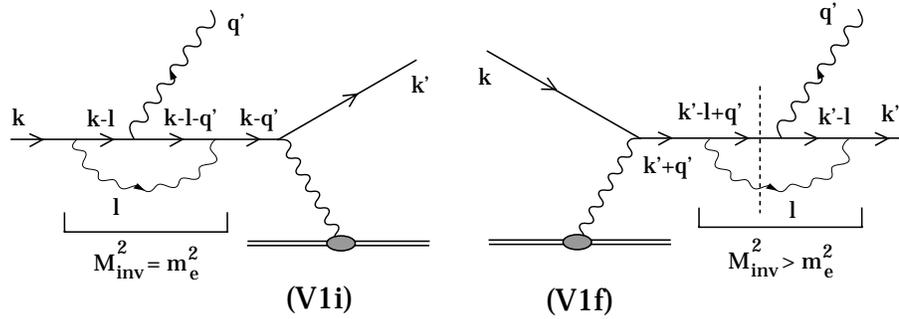


Figure IV.19: Illustration de la présence de pôles dans les termes numériques finis.

dans le propagateur associé. L'expression du diagramme $V1_f$ peut donc comporter des singularités. Cela sera d'autant plus probable que la masse invariante disponible sera grande. En négligeant la masse de l'électron dans IV.106 on obtient :

$$M_{inv}^2 - m_e^2 = 2|\vec{k}'||\vec{q}'|(1 - \cos \alpha) \quad (\text{IV.107})$$

où α représente l'angle d'émission de \vec{q}' par rapport à \vec{k}' . Dans la région du peaking ($\alpha = 0$ deg) la probabilité de pôle est donc fortement diminuée mais nous sommes placés expérimentalement loin de ces conditions pour mesurer les polarisabilités généralisées du nucléon. La propagation d'états sur couche est donc très probable dans $V1_f$.

Le même raisonnement appliqué à $V1_i$ montre une situation totalement différente puisque tous les états entre les deux vertex du photon virtuel ont une masse invariante $M_{inv}^2 = m_e^2$. Il est donc impossible de former un état ($\epsilon + \gamma$) sur couche et le propagateur ne comporte jamais de pôle.

Le critère décisif ici est la position du vertex d'émission du photon réel. Si ce dernier se couple à l'état initial, la masse invariante de chaque côté du vertex est $k^2 = m_e^2$ et le système passe hors couche dès qu'il y a autre chose qu'un simple électron. En revanche, si le photon réel est émis dans l'état final, la masse invariante devient $(k' + q')^2 \geq m_e^2$. Une correction virtuelle venant se connecter sur une ligne adjacente au vertex peut alors toujours créer un système ($\epsilon + \gamma_{virtuel}$) sur couche (fig.IV.19).

Par ces simples considérations, nous pouvons donc affirmer que tous les graphes indicés "i" de la figure IV.14 ne contiennent aucun pôle et que les diagrammes $V1_f, V2_f, V3_f$ et S_f permettent la propagation d'états intermédiaires sur couche. Le calcul de S_f est possible analytiquement (IV.3.2) et montre en effet l'apparition d'une nouvelle partie imaginaire dans l'amplitude. Pour les autres processus, l'étude mathématique de tous les dénominateurs a été entreprise et a confirmé la présence de pôles dès que \vec{q}' n'était plus colinéaire à \vec{k}' .

Dans le cadre de cette même étude, l'intégration la plus interne a été développée

suisant chaque paramètre de Feynman. Dans les intégrales (IV.105) le choix de x_1 comme première variable est en effet complètement arbitraire et les développements sur x_2 ou x_3 sont également possibles. Il a cependant été montré qu'il existait toujours un choix plus astucieux qui limitait la présence d'au plus 1 pôle dans le domaine d'intégration. Lorsque la puissance n définie en (IV.105) vaut 2 ce pôle sera bien sûr double mais il n'y aura jamais deux singularités distinctes dans l'intervalle $[0, 1]$, ce qui simplifie l'écriture des algorithmes numériques.

Les prochains paragraphes détaillent la méthode effective utilisée pour chaque type d'intégrale. Nous adopterons par la suite la notation x pour la variable choisie comme la plus interne. Les variables des deux dernières dimensions seront notées y et z .

Intégrales régulières

Quand les dénominateurs des intégrales définies en (IV.105) n'ont aucune racine dans l'intervalle $[0,1]$, des relations de récurrences pour les valeurs croissantes de m sont facilement obtenues et peuvent se trouver dans les tables [93, p.22,38] et [94, p.68,82]. Malheureusement, nous allons voir que les variations très brutales de la fonction intégrée nous obligent à faire varier y et z très près de 0 et 1, impliquant des valeurs extrêmes pour α, β et γ . Dès lors, les relations de récurrences font intervenir des soustractions de très grand nombres et deviennent numériquement instables. La solution adoptée est l'utilisation de plusieurs techniques d'intégration avec chacune un domaine de validité différent. Le paramètre de séparation est le rapport $r = \alpha/\beta$ pour les dénominateurs de degré 1 ou $r = \alpha/\gamma$ pour les degré 2. Lorsque r devient très petit devant 1, les intégrales sont approchées à l'aide des développements limités suivants :

$$\begin{aligned} \frac{x^m}{(\alpha x + \beta)^n} &= \frac{x^m}{\beta^n} \sum_{i=0}^p \left[C_{n+i-1}^i x^i \left(\frac{-\alpha}{\beta} \right)^i \right] + \mathcal{O}((\alpha/\beta)^{p+1}) \quad (\text{IV.108}) \\ \frac{x^m}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^n} &= \frac{x^m}{\gamma^n} \sum_{i=0}^p \left[C_{n+i-1}^i \frac{x^{2i}}{\left(1 + \frac{\beta}{\gamma}x\right)^{n+i}} \left(\frac{-\alpha}{\gamma} \right)^i \right] + \mathcal{O}((\alpha/\gamma)^{p+1}) \end{aligned}$$

L'ordre maximum du développement est ajusté au cas par cas afin de satisfaire à un critère fixe de convergence :

$$\frac{\text{dernier terme}}{\text{avant - dernier terme}} \leq 10^{-16} \quad (\text{IV.109})$$

Les relations de récurrences sont parfaitement stables pour $r \geq 1$. Pour garder une très bonne précision la méthode numérique de Gauss-Legendre est cependant utilisée dans une zone intermédiaire : $0.2 \leq r \leq 1$.

Intégrales singulières

Nous considérons maintenant le cas où les dénominateurs possèdent une racine réelle dans l'intervalle $[0, 1]$. Les intégrales correspondantes sont alors définies par prolongement analytique dans le plan complexe et prennent la forme:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(\alpha x + \beta \pm i\epsilon)^n} \quad \text{ou} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma \pm i\epsilon)^n} \quad (\text{IV.110})$$

La prescription pour le signe de la partie imaginaire des pôles est entièrement déterminée par les règles de Feynman (annexe D). La présence du "+iε" dans le propagateur du fermion est nécessaire au traitement de la propagation sur couche. Le signe positif est imposé par la condition physique qu'un électron se propageant en avant dans le temps possède une énergie positive ([95, p.86] et [63, p.148]). La répercussion du signe de la partie imaginaire tout au long du calcul est cependant assez fastidieuse et se remplace avantageusement par l'application de l'équivalent: $m_e \rightarrow m_e - i\epsilon/2$.

Nous allons voir que la décision de calculer analytiquement les parties réelles et imaginaires va conduire à une procédure d'intégration très performante. Mais avant d'entrer plus en détail il est intéressant de remarquer que le problème peut se réduire à l'évaluation d'un seul type d'intégrale avec un dénominateur en $(\alpha x + \beta \pm i\epsilon)^n$. Il suffit en effet de décomposer le polynôme du second degré de (IV.110) en éléments simples. Nous allons par la suite raisonner sur des polynômes normalisés. Si le coefficient α' est positif :

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' \pm i\epsilon')^n} = \frac{1}{\alpha'^n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(x^2 + \beta x + \gamma \pm i\epsilon)^n} \quad (\text{IV.111})$$

Avec

$$\beta = \frac{\beta'}{\alpha'} \quad \gamma = \frac{\gamma'}{\alpha'} \quad \epsilon = \left| \frac{\epsilon'}{\alpha'} \right|$$

La valeur absolue pour ϵ traduit la convention de prendre cette quantité toujours positive. Quand $\alpha' < 0$, il faut donc prendre garde de remplacer $\pm i\epsilon$ par $\mp i\epsilon$ dans tous les polynômes normalisés. La présence de pôles signifie que le discriminant $\delta = \beta^2 - 4\gamma$ est positif et que le dénominateur possède deux racines réelles :

$$x_+^R = \frac{-\beta + \sqrt{\delta}}{2} \quad x_-^R = \frac{-\beta - \sqrt{\delta}}{2} \quad (\text{IV.112})$$

La factorisation du polynôme du second degré demande un peu de soin pour propager le bon signe de la partie imaginaire. En se restreignant au cas physique d'une partie

imaginaire positive du polynôme, on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(x^2 + \beta x + \gamma + i\epsilon)^n} = \tag{IV.113}$$

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(x - x_+^R + i\tilde{\epsilon})^n (x - x_-^R - i\tilde{\epsilon})^n} \quad , \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\sqrt{\delta}} > 0$$

L'absence de changement de signe entre $\tilde{\epsilon}$ et ϵ permet de conserver par la suite la même notation ϵ . La décomposition en éléments simples est alors triviale. On obtient pour $n = 1$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{x^2 + \beta x + \gamma + i\epsilon}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{x - x_+^R + i\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{x - x_-^R - i\tilde{\epsilon}} \tag{IV.114}$$

et $n = 2$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(x^2 + \beta x + \gamma + i\epsilon)^2}$$

$$= \frac{1}{\delta} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(x - x_+^R + i\epsilon)^2} - \frac{2}{\delta^{3/2}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{x - x_+^R + i\epsilon}$$

$$+ \frac{1}{\delta} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(x - x_-^R - i\epsilon)^2} + \frac{2}{\delta^{3/2}} \lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{x - x_-^R - i\tilde{\epsilon}} \tag{IV.115}$$

On peut remarquer ici que si l'intégrale a été développée suivant la bonne variable, une seule des racines x_+^R, x_-^R sera dans l'intervalle d'intégration. La moitié seulement des éléments simples va donc nécessiter un traitement dans le plan complexe. La conclusion des opérations précédentes est que toutes les intégrales à évaluer seront de la forme :

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^m dx}{(x - x_0 \pm i\tilde{\epsilon})^n} \tag{IV.116}$$

Le point clé pour extraire analytiquement la partie réelle et la partie imaginaire est de revenir à la définition fondamentale de l'intégrale au sens de Cauchy :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{f(x) dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^n} = \tag{IV.117}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{x_0 - \eta} \frac{f(x) dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^n} + \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \frac{f(x) dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^n} + \int_{x_0 + \eta}^1 \frac{f(x) dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^n} \right]$$

où $f(x)$ est régulière sur l'axe réel et $a < x_0 < b$. Les formules obtenues pour les pôles simples ($n=1$) et doubles ($n=2$) [97] sont détaillées en annexe E.

La validation des résultats a été assurée par la comparaison avec une méthode numérique. Celle-ci consiste à déformer le contour d'intégration de Cauchy dans le plan complexe, en utilisant le théorème des résidus. Le choix le plus simple à coder est un demi-cercle de rayon $1/2$ centré sur le point $(1/2, 0)$ qui ferme le segment réel $[0, 1]$ (fig.IV.20). Le domaine d'intégration correspond alors à la variation de l'angle θ entre

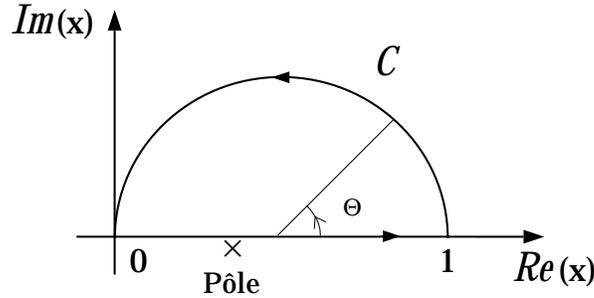


Figure IV.20: Exemple d'intégration sur un contour dans le plan complexe.

0 et π . Les points d'évaluation de la fonction intégrée sont fixés par l'algorithme de Gauss-Legendre. L'intégrale recherchée le long de l'axe réel est égale à l'intégrale le long de l'arc, qui converge d'autant plus vite que l'on s'éloigne du pôle. Grâce à la prescription physique du signe de la partie imaginaire, nous savons de quel côté de l'axe réel se situe l'unique pôle. En plaçant le contour dans le demi-plan opposé on s'affranchit ainsi du calcul du résidu.

La comparaison entre les deux méthodes a montré un accord parfait pour la quasi totalité des résultats. La seule déviation observée n'a en fait que confirmé la très bonne précision des formules analytiques et révélé les limitations de l'évaluation numérique. Le problème tient encore à l'obligation de faire varier y et z très près de 0 ou 1 . Dans ces configurations, l'abscisse du pôle en x peut atteindre des valeurs très faibles avec une dépendance en $(m_e/E_{beam})^2$. Cette proximité de la singularité avec l'origine, qui constitue une extrémité du contour, altère considérablement la convergence des calculs numériques.

Etant donné que les relations analytiques incluent la possibilité de deux racines dans l'intervalle, quelques tests complémentaires ont été effectués à titre de vérification dans le cas général. Le traitement numérique de deux pôles distincts nécessite alors un calcul de résidu mais les deux méthodes restent en accord.

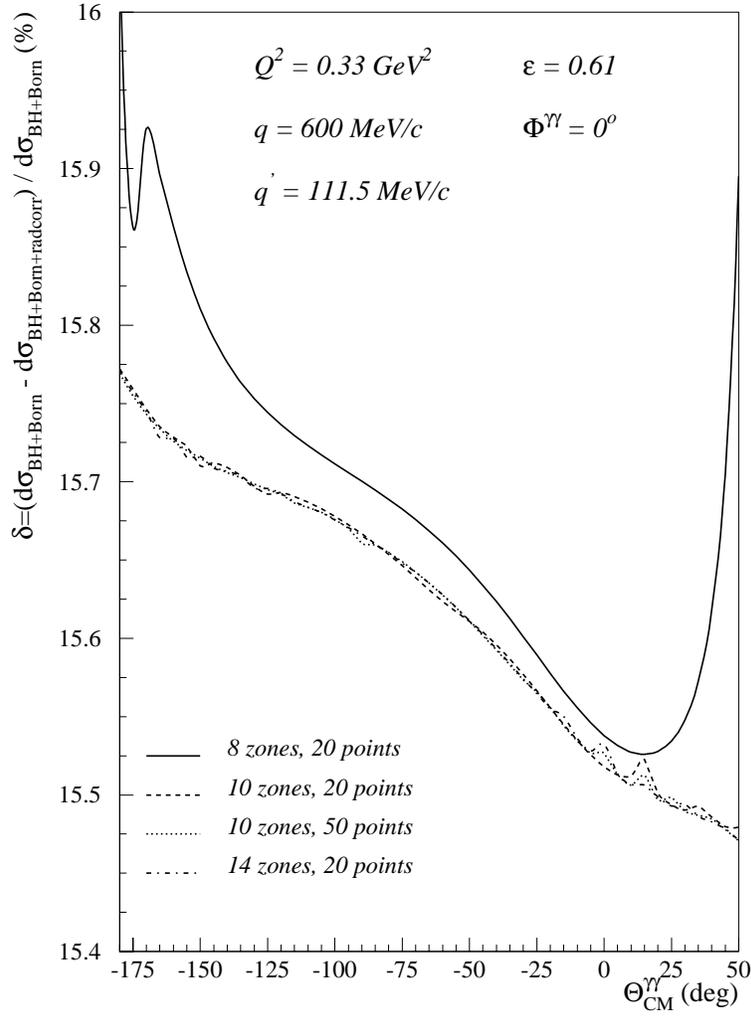


Figure IV.21: L'effet relatif δ des corrections virtuelles sur la section efficace, défini par l'équation (IV.87), est tracé en fonction de l'angle $\Theta_{CM}^{\gamma\gamma}$. Les différentes courbes correspondent à des tests effectués avec une précision de plus en plus accrue près des bornes d'intégration et montrent la très bonne convergence numérique obtenue à partir de 10 zones de 20 points. Le tableau ci-dessous fourni le détail de la répartition des zones.

Nb zones	Nb pts/zones	Répartition sur le segment $[0, 1]$
8	20	$0 \rightarrow 10^{-3} \rightarrow 10^{-1} \rightarrow 0.25 \rightarrow 0.5$ \rightarrow puis symétrique jusqu'à 1
10	20 50	$0 \rightarrow 10^{-7} \rightarrow 10^{-5} \rightarrow 10^{-3} \rightarrow 10^{-1} \rightarrow 0.5$ \rightarrow puis symétrique jusqu'à 1
14	20	$0 \rightarrow 10^{-10} \rightarrow 10^{-8} \rightarrow 10^{-6} \rightarrow 10^{-4} \rightarrow 10^{-2}$ $\rightarrow 0.8 \rightarrow 0.95 \rightarrow 0.99 \rightarrow 1 - 10^{-3} \rightarrow 1 - 10^{-4}$ $\rightarrow 1 - 10^{-5} \rightarrow 1 - 10^{-6} \rightarrow 1 - 10^{-7} \rightarrow 1$

Figure IV.22: Tableau des découpages des zones sur le segment $[0, 1]$ correspondant aux tests de la figure IV.21. La même répartition est utilisée pour les deux dernières dimensions y et z .

Intégration numérique des dernières dimensions.

L'étude détaillée et le traitement analytique de l'intégration la plus interne nous ont assuré un très bon contrôle de la précision des calculs. Comme remarqué précédemment, toutes les éventuelles singularités ont acquis une partie imaginaire finie et les intégrales sur les dimensions réelles restantes sont nécessairement régulières. Dès la deuxième intégration les expressions formelles sont malheureusement trop complexes et l'option retenue est donc un traitement numérique avec la méthode de Gauss-Legendre. L'implémentation de cet algorithme ne présente *a priori* aucune difficulté cependant, le choix du nombre de points et leur positionnement a demandé une étude fine et laborieuse de la fonction intégrée. Le principal travail a consisté à évaluer la largeur et l'amplitude des fortes variations près des extrémités de l'intervalle. La dépendance dans les deux variables y et z a contribué à augmenter le nombre de zones de test.

Il ressort de cette étude qu'une partie non négligeable de l'intégrale est concentrée dans une bande très étroite située sur les bords du domaine d'intégration. L'ordre de grandeur de la largeur de cette bande est proportionnelle au rapport m_e/E_{beam} c'est-à-dire très petite devant la longueur du segment $[0,1]$. Le désir d'une bonne précision dans le calcul numérique nous a donc contraint de placer beaucoup de zones et de points très près de 0 et de 1 comme le montre le tableau IV.22 qui rassemble quelques découpages typiques employés lors des tests. Le principal critère de vérification est bien-sûr la convergence numérique vers une valeur stable lorsque le nombre de zones et de points augmentent. Le bon ordre de grandeur du résultat a également été validé par des tests complémentaires effectués avec une fonction connue (de type exponentielle) simulant les mêmes variations rapides près des bornes.

Vérifications et crédibilité des résultats.

J'insisterai dans cette section sur l'ensemble des vérifications très contraignantes effectuées sur les résultats et sur la très bonne confiance dans nos algorithmes numériques qui en ressort.

Notre meilleur atout est que tous les calculs sont menés par deux programmes indépendants. Les méthodes numériques sont évidemment les mêmes mais dans la plupart des cas, les deux codes utilisent un ordre différent des intégrations successives, vérifiant ainsi la symétrie de la permutation des variables x, y et z . La comparaison pour chaque terme intermédiaire élimine également toutes les possibilités de fautes de frappe dans la programmation qui sont une source d'erreur non négligeable étant donné la lourdeur des expressions.

Après la validation des routines d'intégration et des formules littérales, le test incontournable est bien sûr la convergence numérique pour la somme cohérente de tous les graphes de corrections virtuelles. La figure (IV.21) montre les résultats obtenus pour une cinématique mesurée à Mainz. L'effet relatif des corrections virtuelles sur la section efficace est présenté en fonction de l'angle $\Theta_{CM}^{\gamma\gamma}$ entre les deux photons dans le centre de masse. Les différentes courbes correspondent à des nombres variables de zones et de points de Gauss. Le tableau IV.22 présente les découpages correspondants. Il montre l'importance de mettre en œuvre une très grande précision près de chaque borne. Au delà du réglage à 10 zones de 20 points la convergence devient cependant extrêmement bonne étant donné l'échelle verticale reportée. Ce choix a été retenu pour effectuer la plupart des calculs car il représente un bon compromis entre précision et temps d'exécution du programme. Ainsi, l'évaluation d'un point à un angle $\Theta_{CM}^{\gamma\gamma}$ fixé demande environ 4 minutes à l'unité centrale d'une station SUN ultra2 (fréquence de processeur 200MHz) ce qui correspond à environ 5 heures de calcul pour une cinématique complète.

Les routines d'intégration que nous avons développées fournissent une précision numérique bien au delà des incertitudes théoriques liée aux approximations effectuées ou à la mauvaise connaissance des facteurs de forme. Cette précision s'est cependant révélée cruciale car il est apparu que les instabilités numériques dans la somme cohérente de tous les diagrammes étaient amplifiées par rapport à celles observées sur un graphe seul.

Tous les tests précédents assurent la cohérence des calculs numériques mais nous disposons également de quelques contraintes imposées par la physique de l'électromagnétisme qui permettent de confirmer la validité des résultats. Ces contraintes sont l'invariance de jauge et la dépendance en masse.

Considérons tout d'abord l'amplitude totale A_{tot} de tous les graphes de corrections virtuelles au VCS. Si l'on associe l'indice de Lorentz μ avec le vertex du photon réel alors A_{tot} peut toujours s'écrire comme le produit scalaire $T^\mu \epsilon_\mu^*(q', \lambda)$ où $\epsilon_\mu^*(q', \lambda)$ décrit le photon d'impulsion q' et de polarisation λ et T^μ contient le reste du processus. L'invariance de jauge implique $T^\mu q'_\mu = 0$ et constitue un test très sévère de nos calculs². La comparaison avec 0 n'a cependant pas de sens car nous savons que notre précision numérique n'est pas infinie. L'idée est donc plutôt de vérifier que le produit scalaire est très petit devant une quantité typique que nous avons choisie comme étant

²Parmi tous les diagrammes des corrections virtuelles du VCS illustrés figure (IV.14), l'amplitude BH+Born se factorise, par les mêmes arguments que ceux de la diffusion élastique, pour les processus de type V4, P1 et P2. L'invariance de jauge pour ce sous-groupe est donc assurée et analytiquement vérifiée. Le test ne porte réellement que sur les huit autres processus pour lesquels la factorisation n'a pas lieu.

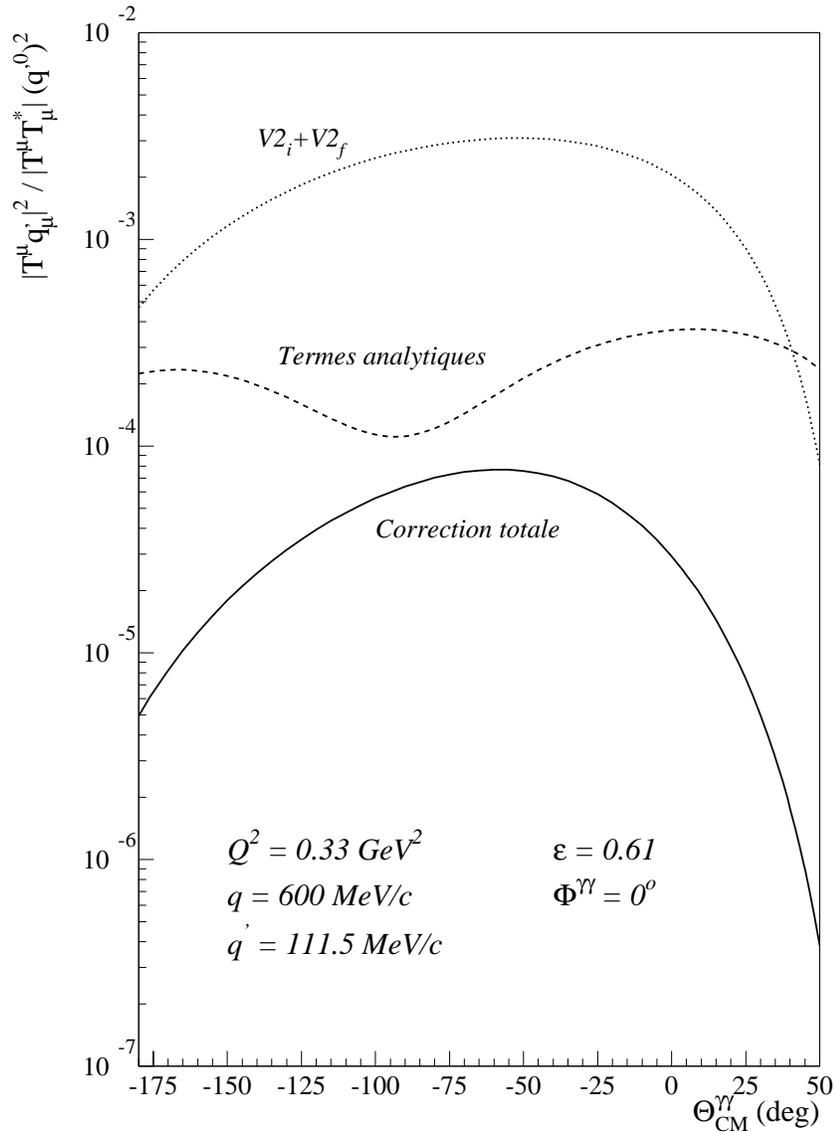


Figure IV.23: L'invariance de jauge requiert la prise en compte de tous les graphes de corrections virtuelles du courant leptonique pour être vérifiée. Cette figure montre en effet avec la courbe en trait continu que notre quantité test est la plus proche de zéro lorsque la totalité des corrections est incluse. La physique imposant $T^\mu q'_\mu = 0$, la seule contribution à cette courbe est donc l'erreur numérique de nos calculs. A titre d'exemple les pointillés montrent le résultat lorsque deux graphes seulement sont considérés et les tirets, la contribution obtenue si l'on omet les termes numériques.

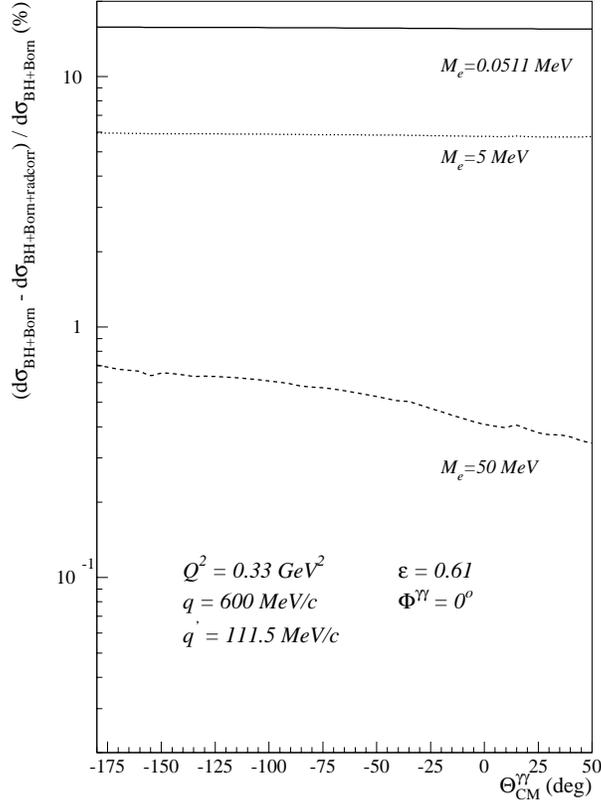


Figure IV.24: Evolution de l'effet relatif des corrections en fonction de la masse du lepton.

le produit des normes de chaque vecteur:

$$\text{Inv. de jauge} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|T^\mu q'_\mu|^2}{|T^\mu T_\mu^\dagger| (q'^0)^2} \ll 1 \quad (\text{IV.118})$$

Ce rapport est sans dimension et sa dépendance en Θ_{CM}^γ est illustrée sur la figure (IV.23). L'invariance de jauge est vérifiée dans la mesure où la courbe la plus basse prend des valeurs très faibles devant 1 et qu'elle est obtenue quand la totalité des corrections est prise en compte.

La dépendance en masse est quant à elle illustrée figure (IV.24) et montre un bon accord avec la condition physique de la suppression de l'émission de photons par une particule lourde. Les courbes sont obtenues en réintégrant explicitement la dépendance en m_e dans tous les calculs des variables cinématiques. La vérification de l'atténuation des corrections radiatives avec la masse croissante valide définitivement l'approximation consistant à négliger les corrections radiatives sur le proton.

IV.3.5 Sections efficaces corrigées et discussions

L'effet final des corrections radiatives sur la section efficace différentielle du VCS est illustré dans les figures (IV.26) et (IV.27) pour les deux cinématiques extrêmes, $q' = 33 \text{ MeV}/c$ et $q' = 111.5 \text{ MeV}/c$. Les valeurs des corrections réelles et virtuelles, moyennées sur toutes les cellules en $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \delta_V^{ana} \rangle &= +22.5\%, & \langle \delta_V^{num} \rangle &= -6.7\% \\ \langle \delta_R^{sim} \rangle &= +23.0\%, & \langle \delta_R - \delta_R^{sim} \rangle &= -20.0\% \end{aligned}$$

Soit

$$\langle \delta_V^{tot} \rangle = +15.8\%, \quad \langle \delta_R \rangle = +3\%$$

Le point crucial de ces résultats est de retrouver un effet comparable à celui de la cinématique élastique (Eq. IV.84). La continuité des effets radiatifs de la diffusion élastique vers la diffusion Compton virtuelle à basse énergie constitue une garantie supplémentaire de la validité de nos calculs. La différence de signe entre les deux corrections provient simplement de la convention utilisée pour définir la quantité δ (Eq. IV.75 et IV.86).

Sous le seuil de production du pion, le domaine cinématique restreint justifie une évolution très faible en q' des corrections radiatives virtuelles. $\langle \delta_V^{tot} \rangle$ par exemple reste stable entre 33 et 111.5 MeV/c à mieux de 0.5%. A l'intérieur d'une même cinématique, la dépendance en $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ est également très plate. La figure (IV.25) trace les variations de δ_V^{tot} dans la région des angles arrières pour la cinématique $q' = 111.5 \text{ MeV}/c$. Les différentes courbes montrent que la dépendance plate n'est obtenue qu'avec la correction complète (termes analytiques et numériques réunis). De plus, des tests de cinématiques à plus haut Q^2 prouvent que ce comportement est approché. Le caractère constant de la correction est donc attribué à la faible valeur de Q^2 mesurée à MAMI (0.33 GeV^2).

La dépendance en spin des corrections virtuelles est faible car elle ne provient que des termes numériques, qui ne se factorisent pas devant la section efficace BH+Born. La mesure d'une asymétrie dans la diffusion Compton polarisée présentera donc l'avantage d'être très peu sensible aux effets radiatifs. La figure (IV.29) montre la contribution de la correction virtuelle dans l'asymétrie

$$A = \frac{[\sigma_{\uparrow\uparrow} - \sigma_{\uparrow\downarrow}] - [\sigma_{\downarrow\uparrow} - \sigma_{\downarrow\downarrow}]}{[\sigma_{\uparrow\uparrow} + \sigma_{\uparrow\downarrow}] + [\sigma_{\downarrow\uparrow} + \sigma_{\downarrow\downarrow}]} \quad (\text{IV.119})$$

calculée par M. Vanderhaeghen [96]. Dans la notation des sections efficaces, la première flèche correspond à l'hélicité droite (\uparrow) ou gauche (\downarrow) de l'électron incident et

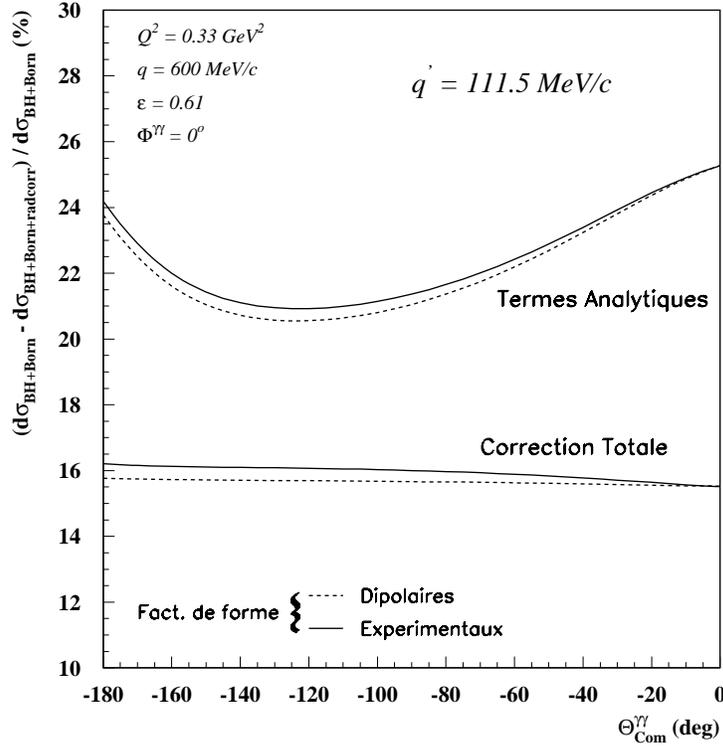


Figure IV.25: Effet relatif des corrections radiatives virtuelles par rapport à BH+Born. Les courbes en trait pointillés sont obtenues avec la forme dipolaire des facteurs de forme élastiques tandis que les traits pleins réfèrent à l'ajustement sur les données expérimentales proposé dans [48], équations (4) et(5). La répercussion de l'incertitude des facteurs de forme sur la section efficace absolue est discutée dans le chapitre V. Au delà de la normalisation de la section efficace nous voyons ici la contribution non linéaire des facteurs de forme dans l'effet des corrections virtuelles.

la deuxième à l'orientation parallèle (\uparrow) ou anti-parallèle (\downarrow) de la polarisation du proton sur l'axe de détection. L'effet obtenu des corrections radiatives reste inférieur à 5%.

Cette étude des corrections radiatives au VCS est novatrice par le formalisme de la régularisation dimensionnelle employé pour la compensation des infinis IR et UV, et par le calcul exact de tous les graphes considérés. En plus des tests sévères de convergence numériques et d'invariance de jauge, la continuité obtenue entre la diffusion élastique et le VCS à basse énergie valide le résultat final et offre une base sûre pour les corrections radiatives des processus à plus haute énergie. Des premiers tests effectués pour une cinématique à $Q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ montrent une augmentation sensible des effets radiatifs (fig.IV.28) qui atteignent $\simeq 30\%$ pour les photons virtuels.

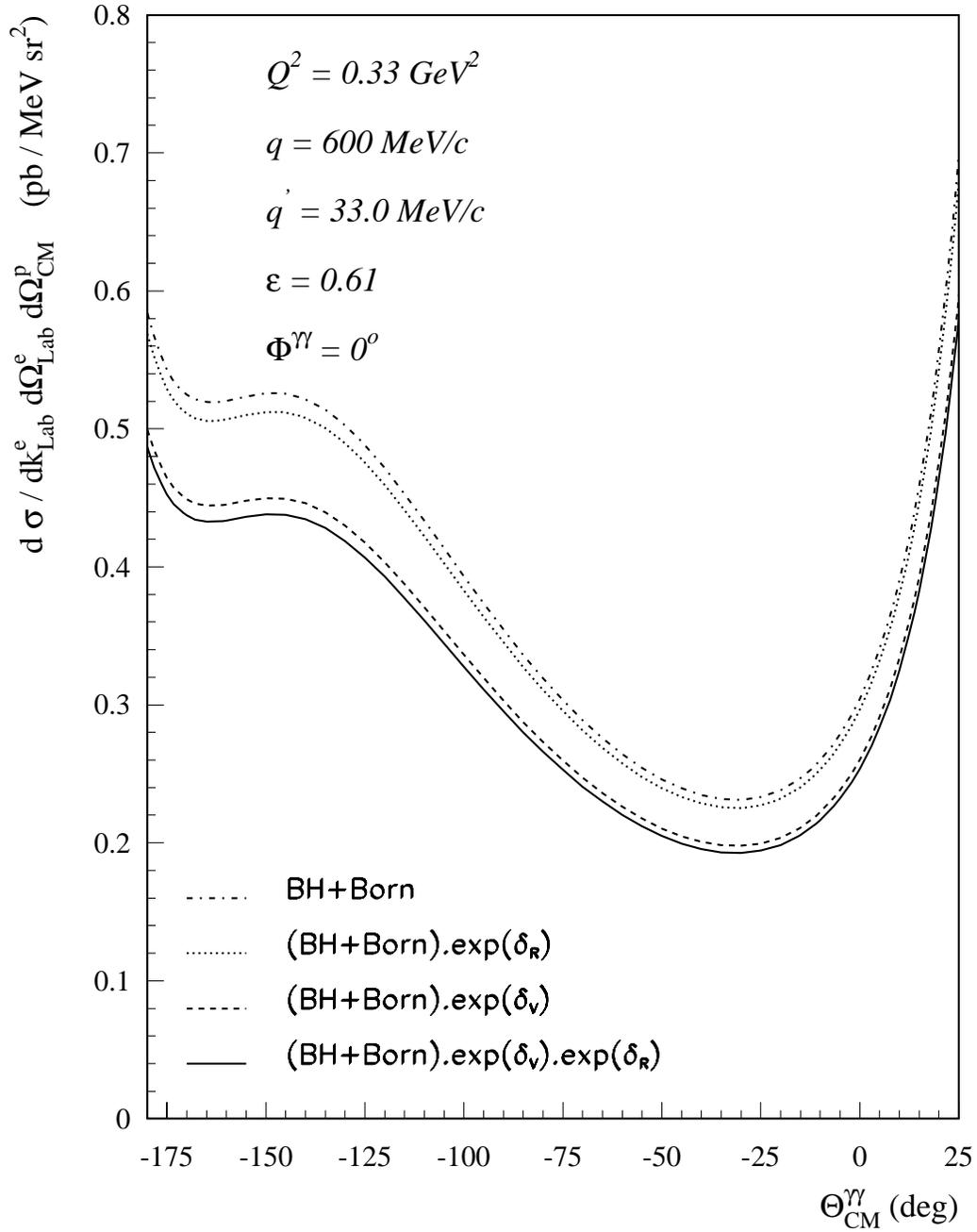


Figure IV.26: Correction des effets radiatifs réels et virtuels appliquée à la cinématique $q' = 33 \text{ MeV}/c$. Tous les termes sont exponentiés ce qui représente une différence de 1.6% par rapport au développement à l'ordre un : $(1 + \delta)$.

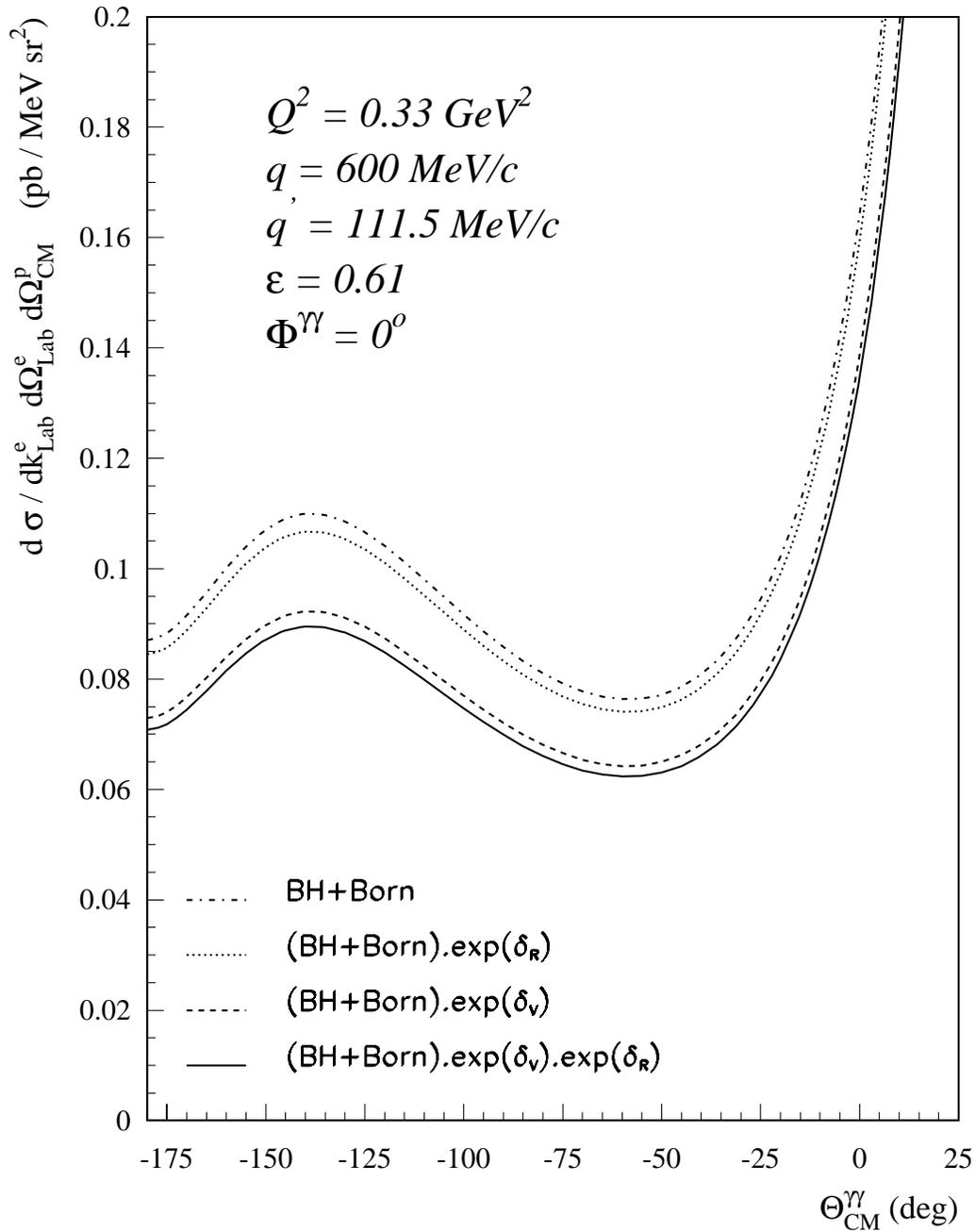


Figure IV.27: Effet des corrections radiatives virtuelles pour la cinématique à $q' = 111.5 \text{ MeV}$.

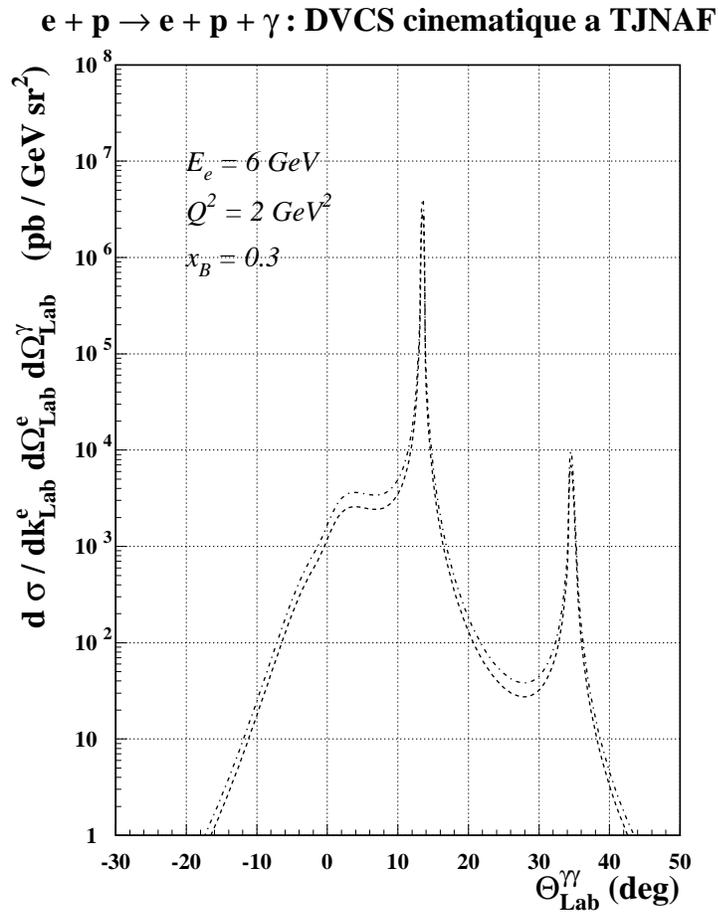


Figure IV.28: Effet des corrections virtuelles testé sur une cinématique de diffusion compton profondément virtuelle (Cf. section V.3.2). La courbe supérieure désigne la section efficace BH. La courbe inférieure inclut les corrections virtuelles analytiques uniquement, les termes numériques ne sont pas encore calculés.

A l'heure actuelle, notre algorithme de calcul numérique a été testé jusqu'à quelques GeV d'énergie de faisceau et sa précision n'a pas été mise en défaut. En cas de nécessité, les routines d'intégration peuvent être déclarées en quadruple précision ce qui redonne une marge de 16 ordres de grandeur mais multiplie le temps de calcul par 4.

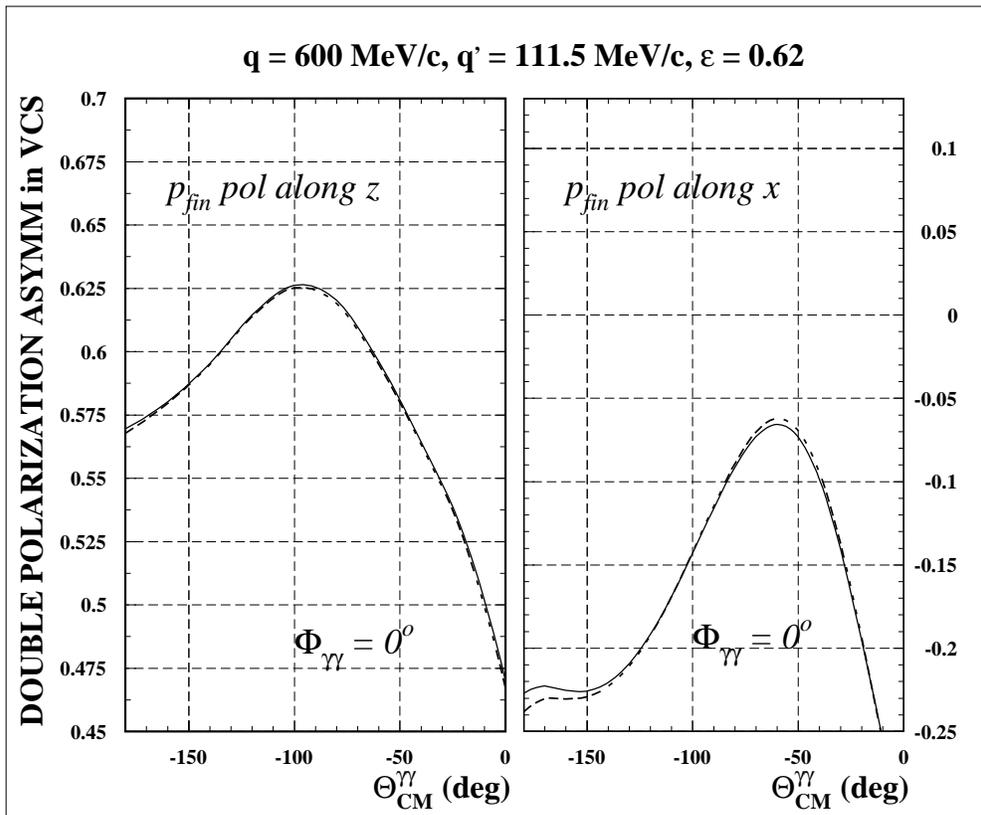
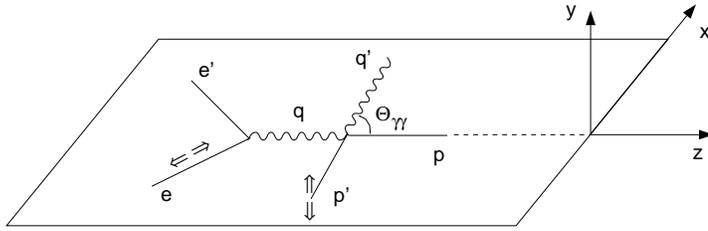


Figure IV.29: Effet des corrections virtuelles sur l'asymétrie du VCS doublement polarisé. Les résultats sont montrés pour deux axes de polarisation du proton dont les orientations sont définies dans le schéma ci-dessus.

Chapitre V

Résultats-Discussion

V.1 Sections efficaces VCS

V.1.1 Sélection des événements

La procédure de l'analyse est décrite dans le chapitre III. Je résume ici la progression de toutes les coupures, des données brutes vers les événements d'une cinématique VCS, qui aboutit à la mesure du taux de comptage.

La sélection d'un électron et d'un proton de recul dans les spectromètres s'effectue de la manière suivante :

- Arrivée en coïncidence dans les deux systèmes de détection. Le critère des bons événements est $\Delta T_{coinc} = \pm 5$ ns autour de la valeur centrale du pic de coïncidence (fig.III.10). La contribution des fortuites s'évalue dans l'intervalle double : $[-15 < T_{coinc} < -5] \cup [5 < T_{coinc} < 15]$.
- Signature d'un électron dans le spectromètre B par la présence d'un signal Cherenkov.
- Suppression de la contribution des parois de la cible par la coupure interne $-19.5 \text{ mm} < Z_{vertex} < 16.5 \text{ mm}$.

Le dépôt d'énergie dans les deux plans de scintillateurs du spectromètre A permet de séparer les protons des π^+ , μ^+ , e^+ . Cette dernière contribution est cependant déjà supprimée par la soustraction des fortuites. Au delà du réglage en angle et en impulsion des spectromètres, la sélection d'une certaine cinématique VCS est obtenue par :

- La signature de l'état final à un photon $|M_{miss}^2| \leq 4000 \text{ MeV}^2$.
- L'acquisition d'une bande en q' de $\pm 15 \text{ MeV}/c$ autour de la valeur nominale.

En ce qui concerne les cellules de l'espace de phase du proton, le déplacement des spectromètres dans un même plan impose la mesure d'une bande en φ de $\pm 22^\circ$ de part et d'autre du méridien $0 - 180^\circ$. L'angle $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ reste la dernière variable à déterminer et le taux de comptage est mesuré directement sur la distribution angulaire obtenue à l'intérieur de toutes les coupures précédentes. La figure (V.1) présente les spectres pour les deux réglages de la cinématique à $q' = 45 \text{ MeV}/c$. La forme des distributions est une image des variations de la section efficace dans l'acceptance. Le pic dans les données de b_1 résulte de la remontée de la section efficace près des "oreilles du chat". La mesure de la section efficace différentielle avec l'angle solide du proton défini par

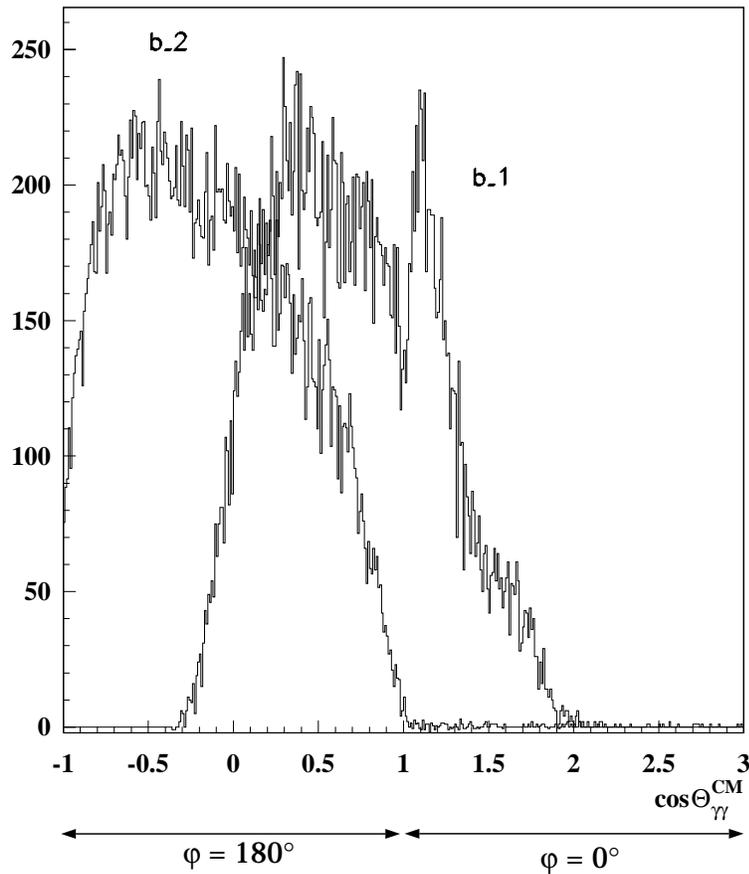


Figure V.1: Distributions angulaires des deux réglages à $q' = 45 \text{ MeV}/c$, à l'intérieur de toutes les coupures de l'analyse. Afin de séparer les contributions des méridiens $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 180^\circ$, la quantité reportée en abscisse correspond à $\cos \theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ pour les données associées à $\varphi = 180^\circ$ et $(2 - \cos \theta_{\gamma\gamma}^{cm})$ pour $\varphi = 0^\circ$.

$\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ et φ (section III.2.3) équivaut à compter le nombre d'événements N_{evts} dans des intervalles de 0.1 sur ces distributions et à appliquer la formule

$$\left. \frac{d^5\sigma}{d\Omega^5} \right|_{VCS} = \left. \frac{d^5\sigma}{d\Omega^5} \right|_{exp} \times \frac{1}{e^{-\delta}} = \frac{N_{evts}}{\mathcal{L} \Delta\Omega^5} \times \frac{1}{e^{-\delta}}, \quad (\delta > 0)$$

La simulation de l'angle solide $\Delta\Omega^5$ et la mesure de la luminosité \mathcal{L} sont décrites respectivement dans les sections (III.3.3) et (III.3.2). La comparaison de la section efficace VCS avec celle de BH+Born, qui doit mettre en évidence l'effet des polarisabilités, nécessite la considération des corrections radiatives. L'exponentiation de la correction à l'ordre 1 se manifeste par le facteur $1/e^{-\delta}$ dont le calcul est exposé dans le chapitre IV.

Une synthèse des premières sections efficaces expérimentales est présentée dans la section suivante.

V.1.2 Résultats à $q' = 45, 67.5$ et 90 MeV/c

L'analyse des données acquises en 1996 et 1997 est encore en cours actuellement. C'est pourquoi je ne présente ici que trois des cinq cinématiques mesurées à MAMI. Les sections efficaces expérimentales sont reportées dans les figures (V.2) à (V.5) pour les trois valeurs de q' : 45, 67.5, et 90 MeV/c. La courbe en trait plein indique à chaque fois la contribution BH+Born calculée pour la valeur nominale de q' . Les barres d'erreurs reportées correspondent à l'erreur statistique uniquement. L'incertitude moyenne est de 3.3% pour 45 MeV/c, 2.5% pour 67.5 MeV/c et 4% pour 90 MeV/c. L'erreur supérieure à 3% pour 45 MeV/c provient de la coupure expérimentale sur la moitié de la cible afin de s'affranchir des événements "rebond". De plus ces chiffres ne prennent pas en compte le cumul de la statistique entre plusieurs mesures indépendantes d'une même cinématique.

Les résultats à $q' = 45$ MeV/c sont particulièrement intéressants car pour cette faible énergie du photon final la section efficace doit encore être compatible avec la contribution de BH+Born. L'accord obtenu est assez bon au regard des barres d'erreurs statistiques affichées. Toute conclusion plus fine repose sur l'évaluation précise des erreurs systématiques réelles, discutées dans la prochaine section. La comparaison des figures (V.2) et (V.3) montre de plus l'indépendance des résultats par rapport au découpage choisi de l'espace de phase du proton, ce qui constitue un test sévère de la simulation de l'angle solide.

A travers les différents symboles utilisés, ces premiers résultats permettent également d'évaluer la qualité du recouvrement entre deux réglages de spectromètres pour une même cinématique ou entre deux prises de données identiques effectuées à un an

d'intervalle. Malgré un bon accord général, certains points restent incompatibles dans les barres d'erreurs statistiques et mettent en évidence des fluctuations encore trop importantes en comparaison de l'effet attendu des polarisabilités généralisées.

V.1.3 Erreurs systématiques

A travers les étapes successives de l'analyse, je présente ici les différentes erreurs systématiques estimées et les améliorations sur lesquelles doit porter la suite de l'analyse.

Sélection des cinématiques VCS

Les erreurs systématiques associées à la sélection des événements VCS ont déjà été discutées dans la section (III.3). Elles portent essentiellement sur l'inefficacité du système de détection à travers les deux points suivants :

- Efficacité de l'algorithme de reconstruction des trajectoires : avec la condition *OK1* (au moins trois fils touchés dans les paires de plans x et s) la correction de l'efficacité des chambres à fils ne produit pas d'effet sensible. L'erreur sur le nombre de trajectoires reconstruites est ainsi majorée à 0.5%.
- Efficacité du détecteur Cherenkov : Les pertes proviennent d'effets géométriques aux bords du détecteur et contribuent pour au plus 1% du taux de comptage (section III.14).
- Pour les cinématiques à plus bas q' (33 et 45 MeV/c), la contribution de la queue radiative du rebond, bien que minimisée par la coupure sur la cible arrière, reste à évaluer.

Normalisation

L'incertitude dans la mesure de la luminosité est évaluée à travers le contrôle de tous les paramètres intervenant dans son expression :

$$\mathcal{L} = \frac{I}{e} \times T \times \frac{\rho \mathcal{N} t}{A}$$

L'implantation de la sonde Foerster sur l'axe du troisième microtron permet de multiplier la précision de la mesure du courant I par le nombre de tours nécessaires à

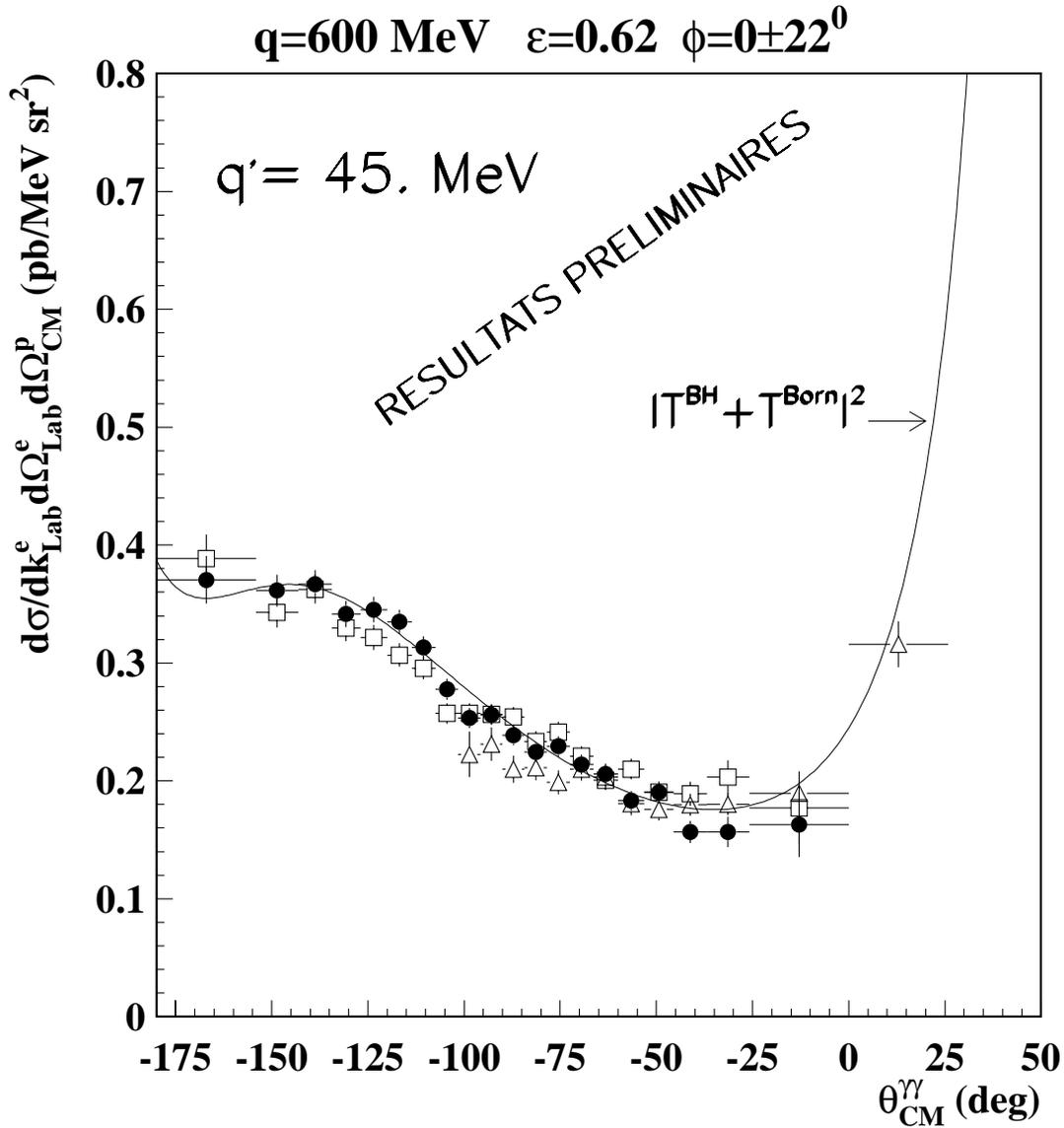


Figure V.2: Résultats expérimentaux à 45 MeV/c. Les différents symboles correspondent aux cinématiques et dates suivantes:
carrés blancs : b_2, 04/97; ronds noirs : b_2, 04/96; triangles blancs : b_1, 04/96.

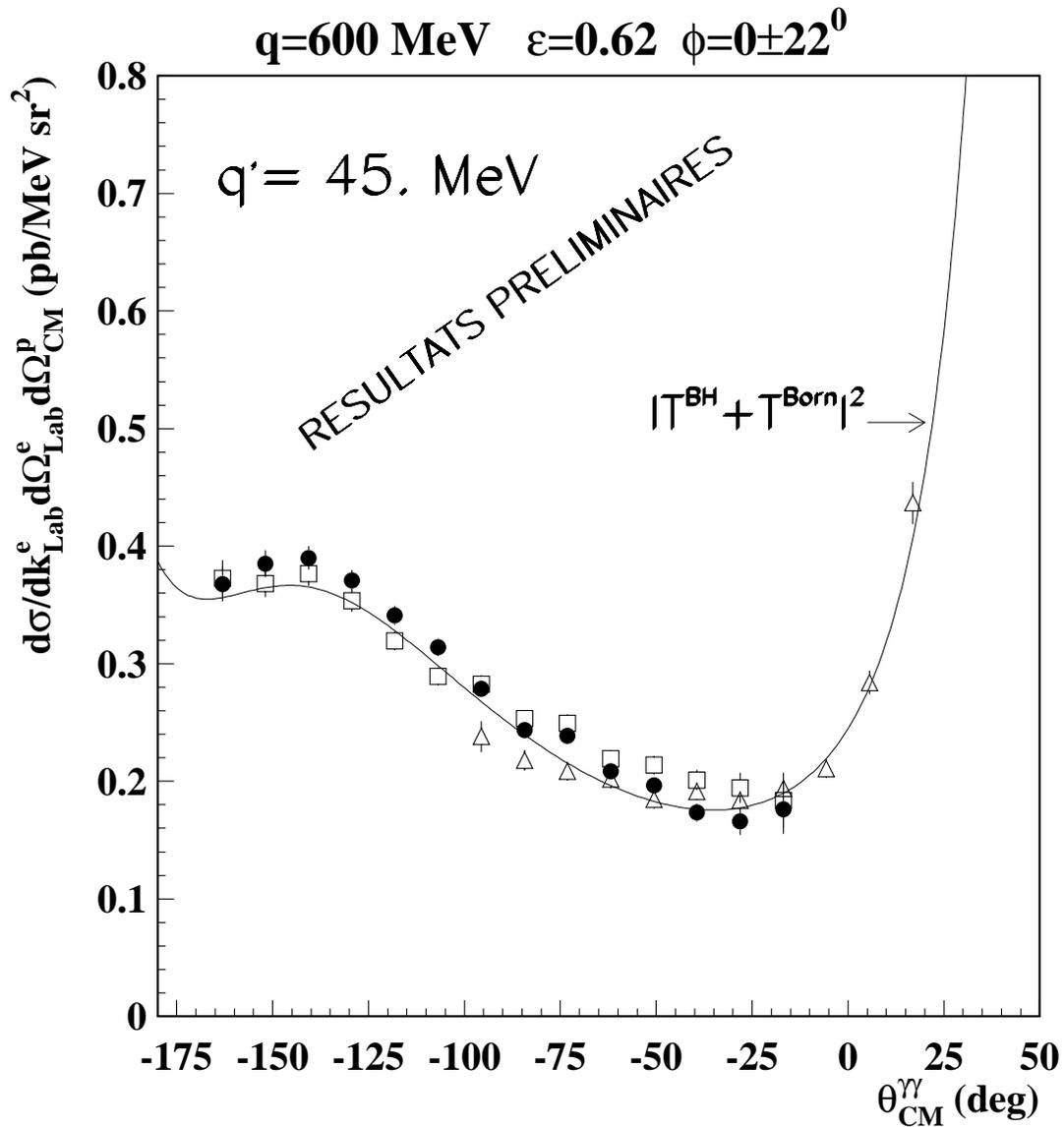


Figure V.3: Résultats expérimentaux à 45 MeV/c obtenus avec le découpage de l'espace de phase du proton suivant θ' et φ' . Les conventions des symboles sont les mêmes que pour la figure (V.2). On peut remarquer la nette amélioration des barres d'erreurs horizontales due à la meilleure efficacité des cellules θ' et φ' .

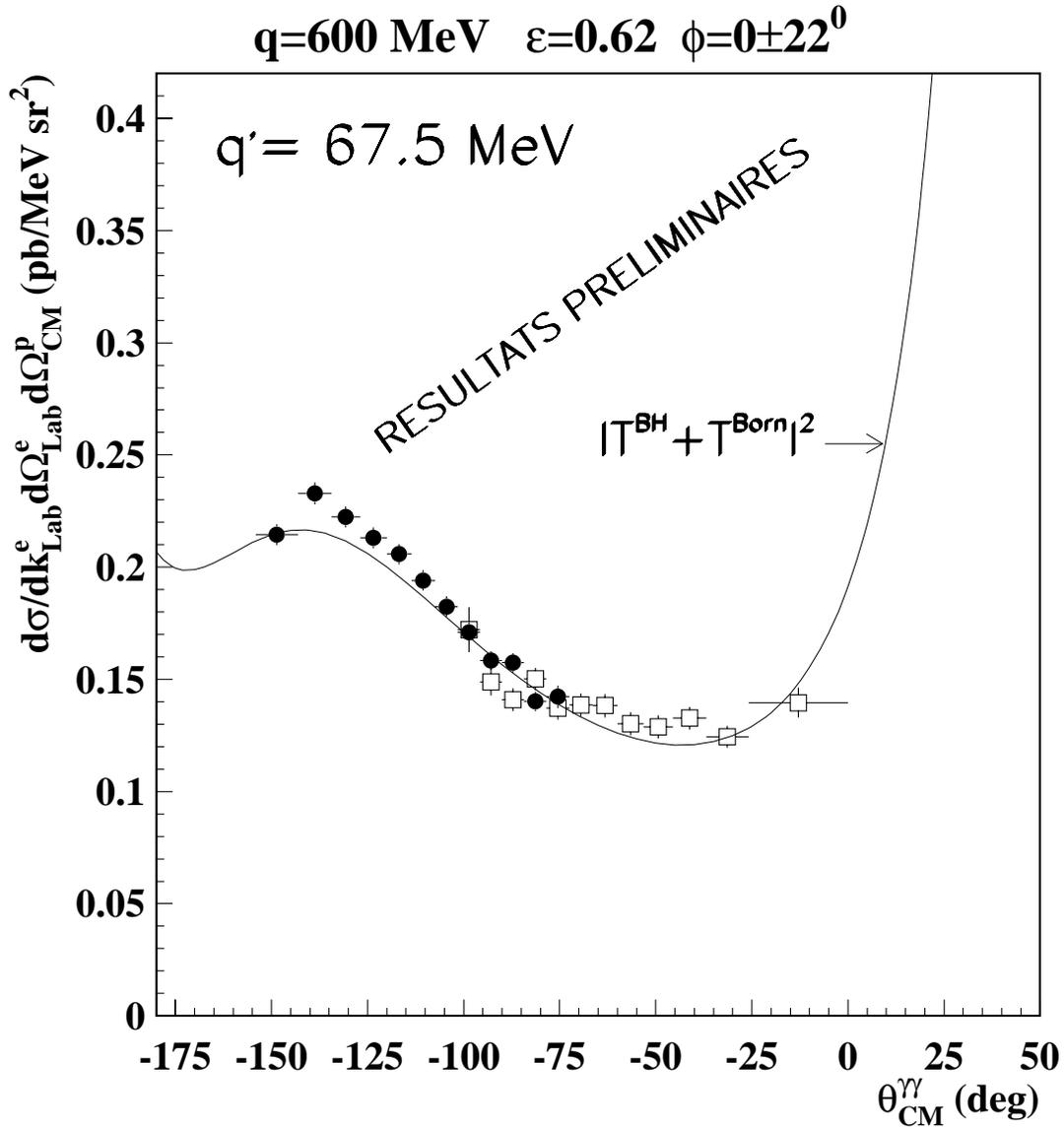


Figure V.4: Résultats expérimentaux à 67.5 MeV/c. Les points représentent les données de 1997 pour les deux cinématiques: c_2 (ronds noirs) et c_12 (carres blancs).

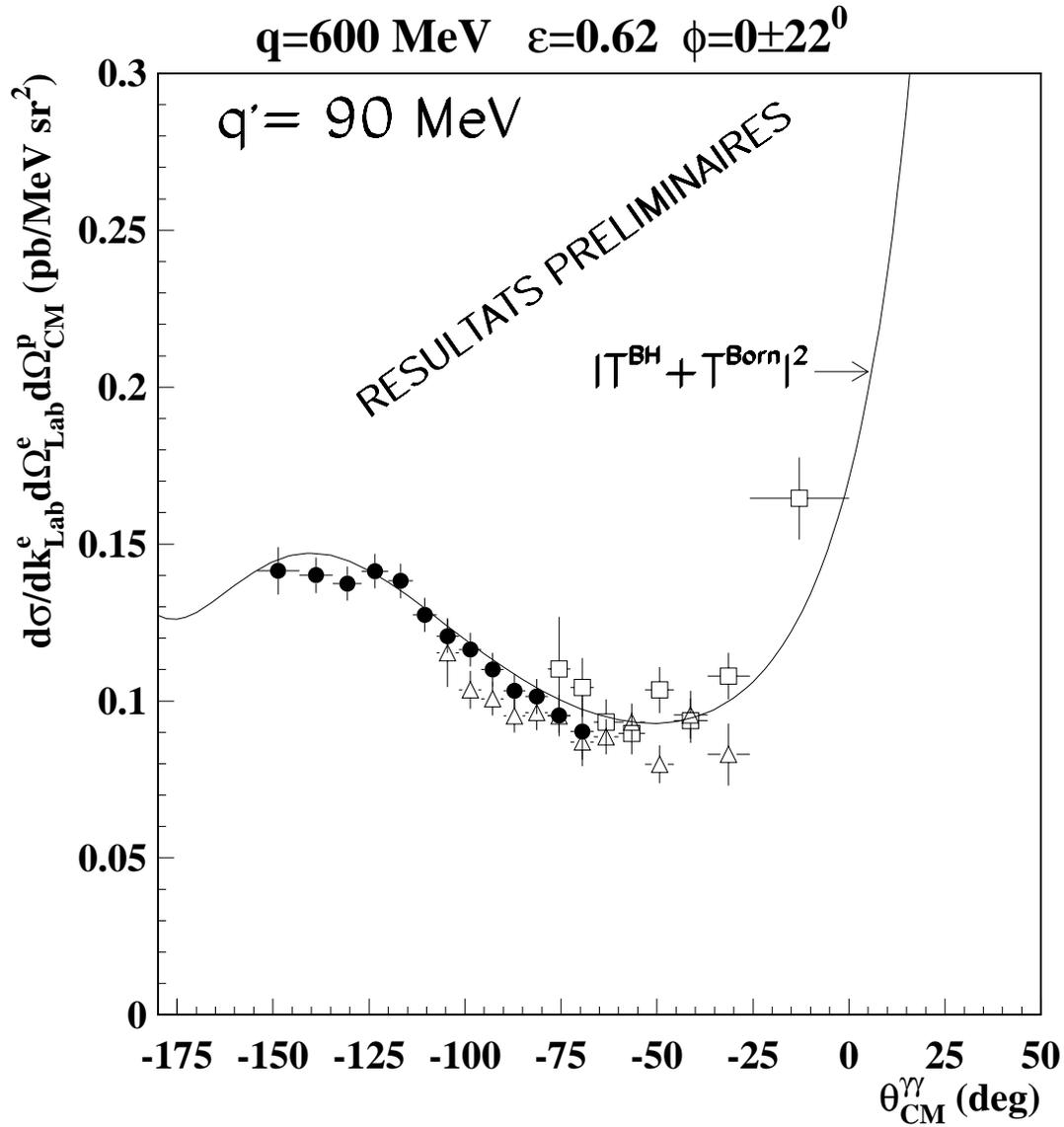


Figure V.5: Cumul des données 1996 et 1997 pour $q' = 90 \text{ MeV}/c$. Trois réglages sont présentés: d_2 (ronds noirs), d_23 (triangles blancs), d_3 (carrés blancs).

l'accélération (section II.3). La gamme d'énergie 750 – 855 MeV que nous avons utilisée correspond à un nombre de tours entre 75 et 90 qui assure une résolution de l'ordre de 1 nA. Pour des intensités de plusieurs μA l'erreur sur I est donc négligée. Dans l'état actuel de l'analyse, l'épaisseur de cible est définie par la largeur de la coupure expérimentale $-19.5 \text{ mm} < Z_{\text{vertex}} < 16.5 \text{ mm}$ soit 36 mm. Aucun effet de variation de densité n'a été observé lors des études de variation en courant (tableau III.4). Enfin, l'évaluation de la durée effective T de la prise de données tient compte du temps mort du à l'écriture sur disque des informations des détecteurs.

D'une manière générale, tous ces paramètres de normalisation sont validés par l'étude des cinématiques élastiques. Il faut cependant remarquer qu'en raison des limitations du taux de comptage dans les chambres, l'intensité reste inférieure ($I_{\text{max.}} = 12 \mu\text{A}$) devant celle utilisée pour le VCS (jusqu'à $28 \mu\text{A}$). De plus les données exploitées ont été obtenues avec le spectromètre électron B en simple, pour des cinématiques relativement centrales en impulsion $\pm 4\%$. Il est clair que les conditions VCS sont plus sévères et que nous ne pouvons pas conclure définitivement à ce stade.

Corrections radiatives

La fin du chapitre (IV) discute le contrôle des corrections radiatives virtuelles à BH+Born. La précision du calcul numérique est démontrée et la validité des approximations (échange de deux photons négligée, pas de rayonnement par le proton) est vérifiée.

Nous verrons (section V.2) que la précision requise pour l'extraction des polarisabilités généralisées pose le problème de la connaissance des facteurs de forme élastiques du proton. A $Q^2 = 0.33 \text{ GeV}^2$, les deux résultats de référence [98] et [47] sont en accord pour G_e et à 5% d'écart pour G_m . Dans le cas des corrections radiatives, l'effet de telles variations sera négligeable puisque la différence obtenue entre la forme dipolaire et l'ajustement expérimental de Bosted [48] est inférieure à 0.5% (fig. IV.25).

En conclusion, l'incertitude théorique dans le calcul des corrections radiatives virtuelle au VCS est jugée faible. Une majoration de l'effet du aux ordres supérieurs est donnée par la différence entre la correction au premier ordre en $(1 + \delta)$ et la sommation en série exponentielle $\exp(\delta)$. Dans le cas du VCS, ceci conduit à une incertitude de 1.6%. La dernière source possible d'erreur provient de l'hypothèse d'un même effet relatif des corrections pour BH+Born et pour BH+Born+NonBorn (section IV.3.1). Cet effet est cependant d'ordre au moins 1 en q' et nécessite une dépendance angulaire du terme NonBorn très différente de celle de BH+Born pour ne pas être négligeable. Les corrections radiatives réelles se décomposent quant à elles en

- une partie indépendante de ΔE (énergie maximale du photon émis) qui est analytique dans l'approximation $\Delta E \ll k$ avec k ordre de grandeur des impulsions des autres particules. Pour les cinématiques à petit q' l'hypothèse $\Delta E (\simeq 10)\text{MeV} \ll q' (\simeq 33.6 \text{ MeV})$ devient discutable. Cependant, avec les algorithmes développés pour la correction virtuelle, le calcul numérique de la déviation par rapport à cette approximation est rapidement envisageable.
- une partie dépendante de ΔE qui est traitée dans la simulation. Pour le processus VCS, la correction à l'émission de photons réels est appliquée sur la queue radiative de la masse manquante simulée. Le désaccord observé avec l'expérience sur la largeur de la distribution amène un biais dans la correction radiative réelle. Cet effet est important pour une coupure en masse manquante proche de la résolution expérimentale, $\Delta M_{\text{miss}}^2 = \pm 1000 \text{ MeV}^2$, mais contribue peu pour la coupure à 4000 MeV^2 que nous avons utilisée dans notre analyse. L'indépendance de la correction par rapport au choix de la coupure a été vérifiée sur la cinématique d_2 par la saturation du facteur correctif qui augmente de 4.4% entre 1000 et 4000, de 1.1% entre 2000 et 4000, et seulement 0.7% entre 3000 et 4000 MeV^2 .

Le très bon accord entre les corrections à bas q' du VCS et celles de la diffusion élastique garantit une bonne évaluation du facteur correctif global. L'erreur systématique sur la section efficace est estimée à 2% pour les corrections radiatives indépendantes de ΔE . Une amélioration de la simulation est actuellement en cours afin de parfaire la comparaison des masses manquantes et d'atteindre une confiance meilleure que 1% pour la partie dépendante de la résolution expérimentale.

Angle solide

Le calcul de l'angle solide fixe le nombre d'événements simulés dans chaque cellule de l'analyse à environ 1000, ce qui correspond à une erreur statistique de 1%.

La variation de la section efficace différentielle à l'intérieur des coupures expérimentales est assimilée à celle de BH+Born. Une amélioration prévue consiste à utiliser la section efficace du modèle de M. Vanderhaeghen [46] contenant la contribution de la résonance $\Delta(1232)$. Ceci va dans le sens de maximiser la contribution NonBorn et permettrait de tester l'approximation.

Une dernière erreur possible provient du report de tous les effets de l'acceptance au niveau des fenêtres d'entrée des colimateurs.

Indépendamment des corrections radiatives réelles, l'ensemble des incertitudes sur l'angle solide est évalué à 2%.

Bruit de fond des créations de paires

Nous considérons ici le processus de la figure(V.6). Le diagramme est semblable à celui de la diffusion Compton virtuelle à ceci près que le photon de l'état final (non détecté) est virtuel et se matérialise en une paire électron-positron. La masse manquante reconstruite par notre dispositif expérimental est alors celle des deux leptons. La borne

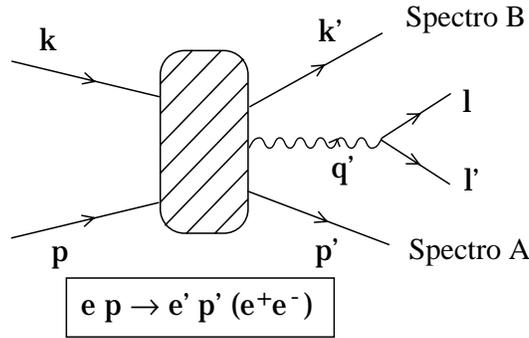


Figure V.6: Diagramme de création de paire vu comme bruit de fond de la diffusion Compton virtuelle.

inférieure correspond à la production de la paire au repos dans le laboratoire tandis que l'énergie disponible dans le centre de masse (fixée par le bras électron) impose la borne supérieure :

$$M_{miss}^2 = (l + l')^2, \quad M_{miss}^2|_{seuil} = 4m_e^2, \quad M_{miss}^2|_{max.} = (\sqrt{s} - m_p)^2$$

Dans la coupure en masse manquante, $|M_{miss}^2| \leq 4000 \text{ MeV}^2$, utilisée pour sélectionner les événements VCS, une partie de l'espace de phase de la création de paires est donc incluse. Elle constitue un bruit de fond qui a été évalué numériquement.

L'amplitude du processus est calculée à partir de celle du VCS en ajoutant la sommation sur les degrés de liberté supplémentaires des quadrivecteurs l et l' . La section efficace de création de paire est intégrée sur l'intervalle $[M_{miss}^{seuil}; M_{miss}^{max}]$, chaque point étant convolué par une gaussienne qui simule la résolution expérimentale avec $\sigma(M_{miss}) = 400 \text{ MeV}^2$. La contribution totale dans le domaine de masse manquante du VCS est ainsi calculée par l'expression:

$$\int_{-4000}^{4000} dM^2 \int_{4m_e^2}^{(\sqrt{s}-m_p)^2} dq'^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(M^2 - q'^2)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{d\sigma}{d|\vec{k}'|_{lab} d\Omega_{k'}^{lab} d\Omega_{p'}^{c.m.}}(q'^2)$$

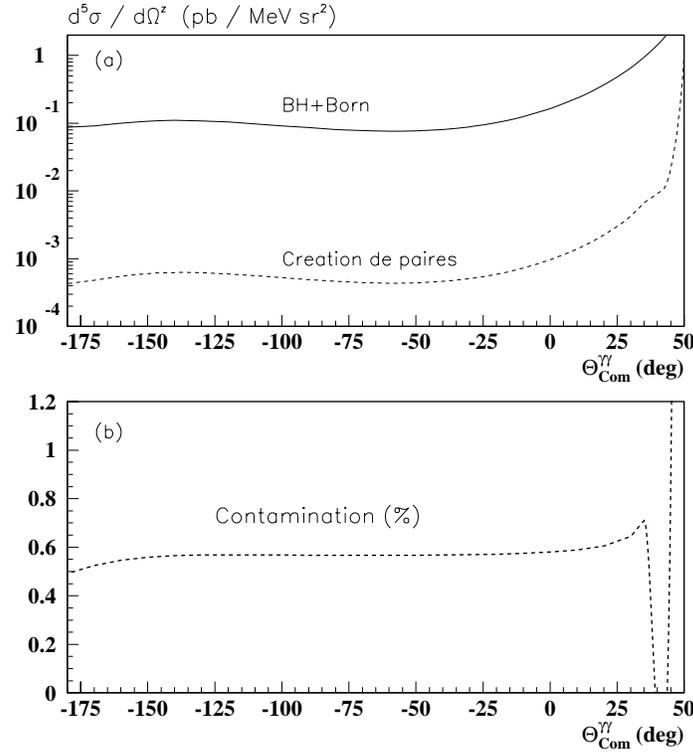


Figure V.7: Contribution du processus de création de paires dans l'intervalle en masse manquante utilisé pour l'analyse ($|M_{\text{miss}}^2| < 4000 \text{ MeV}^2$). La comparaison avec BH+Born est montrée en absolue (a) et en relatif (b). La lente convergence numérique des intégrales à l'approche des oreilles de chat explique les oscillations entre 35 et 50°.

La figure (V.7) illustre les résultats du calcul mené pour la cinématique $q' = 111.5 \text{ MeV}/c$ avec le côté électron fixé sur les valeurs nominales d'impulsion et d'angle. Il faut noter que les effets d'acceptance ne sont pas pris en compte et que les coupures cinématiques du photon final en q' , $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ et φ ne sont pas appliquées. Ceci va dans le sens d'une majoration de la contribution des paires.

Dans ces conditions, la contamination relativement au VCS a une dépendance plate sur tout le domaine en $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ égale à 0.6%. La correction au taux de comptage est donc très faible et l'erreur systématique sur cette correction est négligée.

Erreur systématique totale

L'objectif pour l'expérience VCS est d'atteindre une barre d'erreur systématique de l'ordre de 3%, comparable à l'erreur statistique. Au regard du tableau (V.1) qui résume les différentes estimations, ce cahier des charges semble techniquement accessible. Je voudrais cependant insister dans ce paragraphe sur le fait que certaines

	estimée	espérée
Efficacité		
Reconst. des traj.	0.5%	0.5%
Cherenkov	1.0%	1.0%
Luminosité		
Courant	< 0.5%	< 0.5%
Densité	< 0.5%	< 0.5%
Temps mort	⇒	0.5%
Épaisseur de cible	⇒	0.5%
Autres		
Angle solide simulé	2.0%	2.0%
Corrections radiatives		
Indépendantes de ΔE	2.0%	2.0%
Dépendantes de ΔE	⇒	< 1%
Somme quadratique		3.35%

Tableau V.1: Synthèse de toutes les erreurs systématiques.

fluctuations des données restent à l'heure actuelle incomprises. La figure (V.8) montre ainsi les taux de comptage par unité de charge obtenu pour la cinématique d₂ ($q' = 90$ MeV/c) dans 4 conditions différentes :

N°	Date	Courant (μA)	$\langle N_{evts}/Q \rangle$ (μC) ⁻¹	Signal/Bruit (normalisé à 1 μA)
(1)	04/96	15.5 μA	$1.10 \cdot 10^{-3} \pm 1.10^{-4}$	67.7 ± 0.8
(2)	04/96	22.5 μA	$1.05 \cdot 10^{-3} \pm 2.10^{-4}$	66.9 ± 0.5
(3)	04/97	22.5 μA	$1.12 \cdot 10^{-3} \pm 2.10^{-4}$	57.5 ± 0.6
(4)	04/97	24.2 μA	$0.99 \cdot 10^{-3} \pm 2.10^{-4}$	51.7 ± 0.4

Les données de 1996 sont compatibles entre elles mais en 1997, malgré un changement de courant moins important, l'écart entre les valeurs moyennes des séries (3) et (4) est de 12% et les rapports signal/bruit normalisés au courant sont également incompatibles. Cette mauvaise reproductibilité se retrouve sur les figures (V.2 à V.5) au niveau de la qualité du recouvrement entre mesures indépendantes d'une même cinématique.

Quelques hypothèses peuvent être avancées pour expliquer ce désaccord et définissent

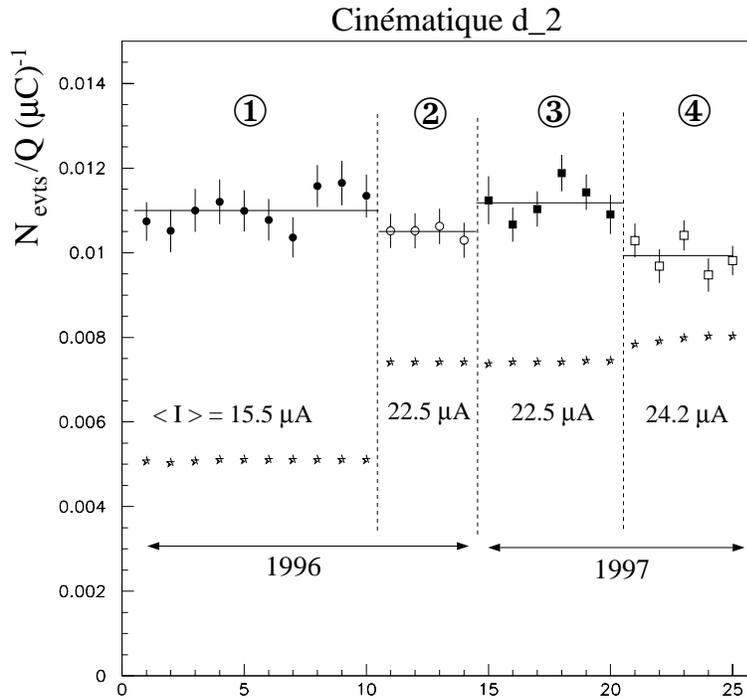


Figure V.8: Contrôle de la reproductibilité du taux de comptage par unité de charge de la cinématique d_2 ($q' = 90$ MeV) mesurée dans 4 conditions différentes.

les principaux efforts à fournir dans la poursuite de l'analyse afin d'atteindre les erreurs espérées sur le temps mort, l'épaisseur de cible et les corrections dépendantes de ΔE (tableau V.1) :

- Une limitation à la très bonne stabilité exposée dans le tableau (III.4) provient du fait que ces résultats sont obtenus pour une acquisition "en simple", du côté électron seulement. Du côté proton, la validité de la correction de temps mort pour les forts taux de comptage des cinématiques VCS (100 à 140 kHz) n'est donc pas complètement vérifiée. Le problème se pose principalement de l'influence du temps mort électronique provenant de la largeur de 70 ns de la porte de coïncidence.

La poursuite de cette étude demande l'analyse des données de diffusion élastique avec détection de l'électron et du proton en coïncidence. Des données ont été prises à cet effet mais elles restent encore à exploiter.

- Une étude détaillée de la reconstruction des vertex est actuellement menée par Julie Roche pour toutes les cinématiques. Elle fait apparaître un désalignement de la cible lors de certaines mesures ainsi que des problèmes de corrélation

entre Z_{vertex} et l'impulsion de l'électron, attribués à l'imprécision des éléments de matrices de l'optique magnétique. La correction de ces effets dans la coupure de l'analyse sur l'intérieur de la cible amènerait, en première estimation, des variations supérieures au % dans le taux de comptage.

- Enfin, la fiabilité de la simulation de l'angle solide et la maîtrise des corrections radiatives réelles passe par une meilleure compréhension de la différence des largeurs en masse manquante expérimentale et simulée.

V.2 Comparaison au théorème de basse énergie et effet des polarisabilités.

La précision statistique des données dans une cellule élémentaire en $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ varie de 2.5 à 4% et sera améliorée à des valeurs de 2 à 3% avec l'étude complète des jeux de données. La discussion précédente montre clairement la nécessité de travailler encore sur le contrôle de la normalisation et de la reproductibilité. A travers les efforts entrepris pour une meilleure estimation du temps mort, de l'épaisseur de cible et des corrections radiatives réelles, l'objectif affiché est de réduire les fluctuations observées en restant dans une barre d'erreur systématique totale proche de 3%.

A ce stade non définitif de l'analyse, nous devons donc être très prudents concernant nos conclusions sur la comparaison avec le théorème de basse énergie. Les résultats à $q' = 45$ MeV/c (figures V.2 et V.3), sont cependant en bon accord avec la prédiction BH+Born. Dans un avenir proche il sera nécessaire de conclure sur le point à 33 MeV/c.

L'extraction des polarisabilités reste un programme très ambitieux. A la vue des figures (V.4) et (V.5), la déviation moyenne au théorème de basse énergie semble positive à 67.5 MeV/c et négative à 90 MeV/c. Ainsi, tout le problème reste ouvert et je ne ferai que souligner la difficulté de l'expérience qui a pour but de mesurer la section efficace en valeur absolue avec une précision de 3% afin de mettre en évidence un effet prédit entre $\pm 10\%$.

Dans la section suivante, je vais discuter comment améliorer cette expérience pour maximiser l'effet.

V.3 Perspectives

V.3.1 Extensions possibles dans le domaine des polarisabilités

Je présente ici les extensions possibles des mesures que nous avons réalisées à Mainz. A travers les expériences complémentaires qui auront lieu en 1998 au Thomas Jefferson Lab (JLAB)[5] et MIT-Bates [99] d'autres choix de cinématiques sont discutés.

Etude en différents q

L'énergie de faisceau disponible à JLab, jusqu'à 6 GeV, permet de compléter la mesure des polarisabilités généralisées vers de plus hauts Q^2 (de 1 à 3 GeV) et de plus hauts q (de 1.06 à 2.16 GeV/c). L'augmentation de q a l'intérêt d'accentuer la concentration de l'espace de phase du proton autour de la direction du photon virtuel. Pour un même appareillage, la couverture de tous les événements VCS nécessite alors moins de positionnements différents des spectromètres.

En contrepartie, les prédictions des modèles chiraux ne sont plus utilisables au-delà de $q = 300$ MeV/c. De même, les approximations non relativistes des modèles de quarks et les données disponibles pour l'ajustement des couplages aux résonances dans les modèles phénoménologiques limitent la validité des prédictions théoriques au domaine $q < 1$ GeV/c.

L'expérience de Bates fournira une mesure complémentaire vers les plus basses impulsions de photon virtuel : $q = 240$ MeV/c et $Q^2 = 0.05$ GeV². Ce domaine cinématique est propice à un test de la symétrie chirale mais plusieurs facteurs imposent une limite inférieure pour le transfert au proton :

- Le recul du proton doit être suffisant afin de sortie de la cible sans que son impulsion soit trop dégradée par les diffusions multiples ($p > 240$ MeV/c).
- Le formalisme théorique impose les inégalités suivantes : $q > q' > q''$. La dernière inégalité a déjà été discutée dans la section (IV.3.3) et assure la validité des corrections radiatives réelles. La supériorité de q par rapport à q' est nécessaire pour justifier, dans le formalisme des polarisabilités, un développement multipolaire sur l'impulsion q du photon réel uniquement. Cet argument est discuté dans la référence [50].

Etude à différents φ

Les modèles théoriques ne prédisent pas d'augmentation sensible de l'effet des polarisabilités pour les mesures hors du plan. Néanmoins, à $\varphi \neq 0, 180^\circ$, la dépendance très piquée du BH dans les directions des électrons (oreilles du chat) est supprimée et les contributions des termes Born et NonBorn augmentent.

A MAMI, la possibilité d'incliner verticalement le spectromètre B de 10° permettrait d'intercepter la quasi-totalité de l'espace de phase du proton. A Bates, les mesures hors du plan sont réalisées à l'aide du spectromètre OOPS (Out Of Plane Spectrometer). Au-delà de la mise à profit de la dépendance angulaire, la variation de φ est nécessaire dans cette expérience car la faible valeur de q (240 MeV/c) implique une large extension de l'espace de phase du proton de part et d'autre du plan leptonique. Pour un transfert suffisant au proton, l'angle $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ doit, de plus, être assez grand. Ces considérations justifient les choix retenus pour les premières données : $\theta_{\gamma\gamma}^{cm} = 90^\circ$ et $\varphi = 0, 90, 180, 270^\circ$.

Etude à différents ϵ

Le flux de photons virtuels, proportionnel à $1/(1 - \epsilon)$, favorise le choix d'un ϵ le plus proche possible de 1. A MAMI, nous avons choisi de maximiser q ce qui impliquait une diminution de ϵ . Les valeurs accessibles pour les deux expériences futures sont $\epsilon = 0.94$ pour $q = 1$ GeV/c à JLab et $\epsilon = 0.90$ pour $q = 240$ MeV/c à Bates.

Dans la mesure où le dispositif expérimental le permet, un bras de levier important en ϵ présente l'intérêt de séparer les combinaisons linéaires P_{LL} et P_{TT} (Eq. III.4).

Prises de données de 1998 à JLab.

A la vue des problèmes rencontrés pour l'expérience de Mayence, nous savons que nous devons réaliser cette nouvelle mesure avec le plus grand soin. Les points essentiels qui seront développés pour atteindre la précision requise sont :

- Une étude systématique de la cinématique élastique dans toute l'acceptance et pour différents courants afin de contrôler la normalisation dans des conditions aussi voisines que possible de celles du VCS.
- Une bonne connaissance des matrices de transport par des expériences de sievelit pour assurer la qualité de reconstruction des coordonnées à la cible. Une mesure des cartes de champs magnétiques des deux spectromètres sera également réalisée et permettra une simulation réaliste de l'angle solide.

Expériences en polarisés

En non polarisé, la mesure de la diffusion Compton virtuelle ne donne pas accès à l'observable $\hat{P}^{(11,2)1}$ définie par le formalisme de P. Guichon *et al.* [7] (Cf. section III.1). Pour une extraction complète des polarisabilités, la double polarisation du faisceau et de la cible est nécessaire : $\vec{e} p \rightarrow e \vec{p} \gamma$. Sous le seuil de création du pion, l'amplitude VCS est en effet purement réelle ce qui annule l'asymétrie pour une simple polarisation.

Au-delà de la sensibilité à de nouvelles combinaisons linéaires des polarisabilités [96], l'intérêt de ces mesures porte sur deux points essentiels qui rendent l'expérience en non polarisés particulièrement difficile :

- L'effet des polarisabilités est extrait de l'asymétrie (IV.119) qui correspond à un rapport de sections efficaces. Le contrôle de la normalisation des sections efficaces absolues devient alors moins critique car dans ce rapport beaucoup d'erreurs systématiques se simplifient.
- La discussion de la section IV.3.5 montre qu'une grande partie des corrections radiatives est indépendante du spin et disparaît également dans le calcul de l'asymétrie.

Des électrons polarisés sont déjà disponibles auprès de l'accélérateur MAMI et le seront bientôt à JLab. La principale limitation de ces expériences provient en fait de la faible efficacité, environ 5%, dans la détection de la polarisation du proton de recul. Ceci correspond à une multiplication du taux de comptage par 20, difficilement envisageable.

V.3.2 Autres domaines cinématiques du VCS.

L'intérêt potentiel de la diffusion Compton virtuelle à plus haute énergie a déjà été mis en avant dans quelques récentes publications. Je les décrirai très brièvement suivant les différents domaines cinématiques en s , t , Q^2 présentés sur la figure (V.9).

- Au-dessus du seuil de production du pion, $\sqrt{s} = 1$ à 2 GeV, se situe le domaine des résonances. La décroissance réelle de l'état intermédiaire du VCS devient possible et se traduit par l'apparition d'une partie imaginaire dans l'amplitude. Dans une expérience avec faisceau polarisé, $\vec{e} p \rightarrow e p \gamma$, l'asymétrie

$$A = \frac{\sigma_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow}}{\sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow}} \quad (\text{V.1})$$

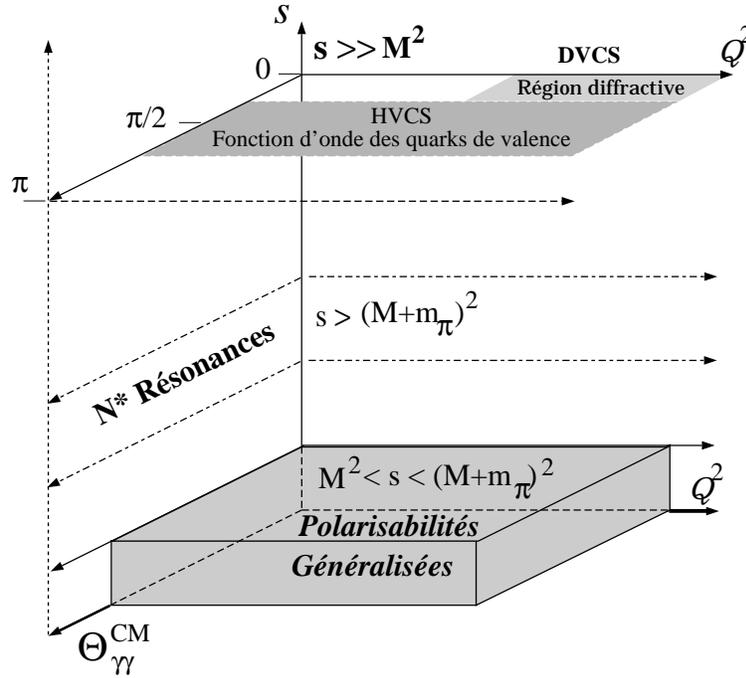


Figure V.9: Présentation des différents domaines cinématiques de la diffusion Compton virtuelle. $s = (p + q)^2$ traduit l'énergie disponible dans le centre de masse, Q^2 désigne la masse invariante du photon virtuel et $\theta_{\gamma\gamma}^{cm}$ l'angle entre le photon virtuel et le photon réel dans le centre de masse. Cet angle est directement relié au transfert fournit au proton : $t \propto (\cos \theta_{\gamma\gamma}^{cm} - 1)$.

est donc non nulle et provient uniquement du terme Non-Born. Par une évolution de l'énergie dans le centre de masse, on s'attend à une asymétrie piquée sur les valeurs des masses de résonances. L'intérêt de ces mesures réside dans une mise en évidence très claire du terme Non-Born et dans la possibilité de signer la présence des résonances manquantes [100]. Une première expérience [5] est programmée à JLab pour mars 1998.

- A grand Q^2 , grand s et petit t nous sommes dans le régime de la diffusion Compton profondément virtuelle (DVCS : Deep Virtual Compton Scattering), décrit par A.V. Radyushkin, X.D. Ji et P.A.M. Guichon [101], qui fournit de nouvelles fonctions de structure du nucléon. Des études de réalisation sont en cours actuellement à JLab, Compass, DESY...
- A grand s et grand t mais Q^2 arbitraire, nous sommes dans le domaine des réactions exclusives dures (HVCS : Hard Virtual Compton Scattering). L'utilisation de la théorie Chromo-Dynamique Quantique perturbative nous permet alors de

retirer des informations sur la fonction d'onde en quarks de valence du nucléon [102]. Cependant les sections efficaces dans cette gamme d'énergie (15 – 30*GeV*) sont faibles. Les mesures expérimentales sont rendues très difficiles et demandent les performances d'accélérateurs de haute luminosité et grand cycle utile (JLab [103], ELFE@DESY [104])

Conclusion

Ce travail a présenté la première mesure de la diffusion Compton virtuelle sur le proton, réalisée auprès de l'accélérateur MAMI à Mayence (Allemagne). Cette expérience est motivée par l'extraction des polarisabilités généralisées qui apportent une nouvelle information sur la structure interne du nucléon. Ces observables bénéficient d'une définition très propre, indépendante de tout modèle. Cependant la physique est une science de compromis et la description théorique exacte du processus VCS se paye par une faible manifestation ($\leq 10\%$) de la polarisation du proton au niveau de la section efficace absolue. La haute précision requise sur la mesure rend cette expérience très difficile.

Au niveau de l'appareillage, les qualités de l'accélérateur de nouvelle génération de Mayence donnent expérimentalement accès à la diffusion Compton virtuelle pour la première fois. Les faibles sections efficaces différentielles ($d\sigma/d\Omega$ entre 0.1 et 0.5 pb.MeV⁻¹.sr⁻²) sont mesurées grâce à la haute luminosité \mathcal{L} disponible. A Mainz, nous avons utilisé un courant maximum de 28 μA correspondant à $\mathcal{L} = 3.6 \cdot 10^{37}$ s⁻¹.cm⁻². Le cycle utile de 100% nous a permis d'atteindre un rapport signal/bruit de 5.5 et la résolution des spectromètres sépare les masse manquantes reconstruites du photon et du π^0 à plus de 30 écarts standards.

La plus grosse partie du travail expérimental concerne la normalisation des sections efficaces absolues. Elle est assurée par le contrôle des paramètres de la luminosité, la mesure des inefficacités de détection et l'étude systématique, encore en cours, des cinématiques élastiques proches de celles du VCS. La comparaison des spectres expérimentaux et simulés montre la nécessité d'affiner encore la simulation mais l'utilisation de différents découpages de l'espace de phase du proton nous donne déjà une bonne crédibilité de l'angle solide.

L'importance des effets radiatifs, qui contribuent pour 19% dans la section efficace, a motivé un calcul inédit et complet des corrections radiatives à l'ordre 1 du VCS. Les divergences infra-rouges et ultra-violettes ont été traitées analytiquement dans le même formalisme de la régularisation dimensionnelle et la mise au point d'un algorithme numérique a permis une évaluation précise de la partie finie. Au terme de ce

travail, nous sommes en mesure d'afficher une bonne maîtrise des corrections radiatives (mieux que 2% pour la partie indépendante de la résolution expérimentale). A faible impulsion du photon sortant, l'accord avec les corrections de la diffusion élastique est une validation supplémentaire de nos résultats.

Le formalisme de la régularisation dimensionnelle a également été appliqué à la diffusion élastique pour un traitement analytique complet de tous les diagrammes. La comparaison avec les formules habituellement utilisées, tirées des articles de référence [69, 86], fait apparaître des termes supplémentaires contenant des doubles logarithmes (\ln^2). Malgré des compensations entre les corrections virtuelles et réelles, l'effet de ces fonctions devient sensible à grand Q^2 et leur prise en compte pourrait s'avérer importante par exemple pour l'extraction des facteurs de forme au Thomas Jefferson Laboratory, dans la gamme $Q^2 = 1$ à 3 GeV^2 .

Au delà de tous les contrôles effectués, certaines instabilités expérimentales dans le taux de comptage restent mal comprises et un effort particulier est actuellement porté sur les corrections de temps mort, d'épaisseur de cible et d'émission de photons réels. Toutefois, dans l'état actuel de l'analyse, le théorème de basse énergie du VCS est vérifié à $q' = 45 \text{ MeV}/c$.

Il est encore prématuré de conclure sur l'effet des polarisabilités mais le travail se poursuit et fait l'objet des thèses de J. Roche et J. Friedrich.

La mesure de la diffusion Compton virtuelle à MAMI est une expérience pionnière qui a déjà contribué à la préparation d'autres expériences qui auront lieu en 1998 au JLab et à MIT-Bates. Le formalisme des polarisabilités a relancé l'activité théorique sur ce processus et ouvert de nombreuses perspectives dans d'autres domaines cinématiques à plus haute énergie.

Annexe A

Conventions

A.1 Notations

Soit k le quadrivecteur d'une particule. Les notations adoptées sont les suivantes :

k	quadrivecteur
k^0	composante temporelle
\vec{k}	trivecteur
$ \vec{k} $ ou k	module du trivecteur
\hat{k}	direction du trivecteur

La masse est toujours indiquée par rapport à la particule référée (m_e, m_p, m_π, \dots). Les notations m ou M désignent un cas général.

A.2 Systèmes d'unités

L'expression des lois physiques et la dimension des quantités utilisées dépendent du choix *arbitraire* des unités fondamentales que l'on se fixe. Je reprends ici les principaux points de la discussion présentée en annexe du livre de J.D. Jackson [8] auquel je renvoie le lecteur pour plus de détail.

A titre d'exemple, l'écriture de la loi de Coulomb qui donne la force d'interaction F entre deux charges q et q' séparées par une distance r

$$F = K \frac{qq'}{r^2} \quad (\text{A.1})$$

montre que

- soit la dimension et la valeur de la constante de proportionnalité K sont fixées par

Système	\hbar	c	ϵ_0	μ_0	α_{em}
MKSA	$1.055 \cdot 10^{-34}$ (ml^2t^{-1})	$2.998 \cdot 10^8$ (lt^{-1})	$10^{-7}/4\pi c^2$ ($l^{-3}m^{-1}t^4I^2$)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ ($lmt^{-2}I^{-2}$)	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$
Heaviside-Lorentz	1	1	1	1	$\frac{e^2}{4\pi}$
Gauss	1	1	$\frac{1}{4\pi}$	4π	e^2

Tableau A.1: Choix des constantes $\hbar, c, \epsilon_0, \mu_0$ et α_{em} (constante de structure fine électromagnétique) associés aux différents systèmes d'unités.

la dimension et la valeur de l'unité de charge

- soit le *choix* de la constante K définit l'unité de charge.

Les différents choix adoptés pour les constantes des lois physiques donnent lieu à autant de systèmes d'unité. Le plus répandu est **MKSA** qui définit comme quantités fondamentales la longueur (l), la masse (m), le temps (t) et l'intensité du courant électrique (I) avec les unités respectives : Mètre, Kilogramme, Seconde et Ampère.

Dans le domaine de la physique des particules, la simplification d'écriture des équations du mouvement a conduit à l'utilisation des unités "naturelles" dans lesquelles la constante d'action \hbar et la vitesse de la lumière dans le vide c sont choisies sans dimension et de valeur 1. Une seule unité est alors nécessaire pour décrire toutes les quantités physiques. On choisit généralement la longueur. Les grandeurs de temps, énergie, force, ... s'expriment en puissances de cette seule unité. Deux systèmes très similaires utilisent ces conventions :

- **Heaviside-Lorentz**, qui permet une écriture simple des équations de Maxwell.
- **Gauss**, qui ne diffère du précédent que par un facteur 4π . L'intérêt de ce système est l'écriture simple de la loi de Coulomb Eq.(A.1) avec $K = 1$. Afin de rester en accord avec toute la littérature sur les polarisabilités cette convention est utilisée pour l'ensemble du chapitre I.

Les deux tableaux suivants présentent l'expression de quelques constantes et des équations du champ électromagnétique pour les trois systèmes d'unités MKSA, Heaviside-Lorentz et Gauss.

Système	D, H	Equations de Maxwell	
MKSA	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Heaviside- Lorentz	$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P}$ $\vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$
Gauss	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \left(4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$

Tableau A.2: Champs macroscopiques et équations de Maxwell.

Annexe B

Généralités sur l'optique magnétique

Cette annexe reprend dans ses grandes lignes le cours de P. Vernin [105]. La présentation de l'optique magnétique est limitée au premier ordre et se veut avant tout une illustration de la terminologie utilisée dans le domaine.

Matrice de transport

Soit, dans le vide, une distribution de champ magnétique statique \vec{B} . La trajectoire d'une particule chargée d'impulsion \vec{p} , de vitesse \vec{v} et de charge q est solution de l'équation différentielle:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{B} \quad (\text{B.1})$$

Si on choisit comme trajectoire de référence une trajectoire particulière d'un point $A \in \mathcal{P}_A$, où \mathcal{P}_A est un plan orthogonal à la trajectoire en A , vers un point $B \in \mathcal{P}_B$, où \mathcal{P}_B est un plan perpendiculaire à la trajectoire en B , alors une trajectoire quelconque coupant les deux plans est caractérisée par 4 coordonnées d'entrée (2 de position (x_A, y_A) , 2 d'angle $(\theta_{x_A}, \theta_{y_A})$) et quatre de sortie ((x_B, y_B) et $(\theta_{x_B}, \theta_{y_B})$)¹. Selon l'équation du mouvement (B.1), les 4 coordonnées de sortie sont fonctions de 5 paramètres, les 4 coordonnées d'entrée et le module p de l'impulsion.

On appelle fonction de transport de \mathcal{P}_A vers \mathcal{P}_B , la fonction T_{AB} , telle que :

¹Les angles définis sont des angles cartésiens, par exemple θ_x est l'angle entre la direction de la trajectoire et la direction de référence, dans le plan (x,z) .

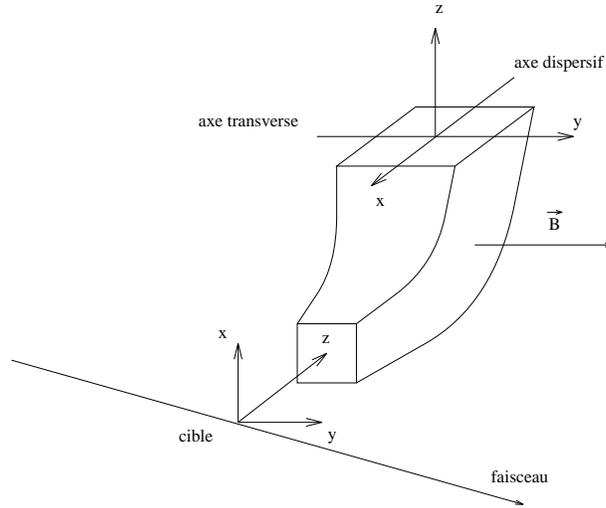


Figure B.1: Schémas de principes des différents repères utilisés en optique magnétique.

$$\begin{pmatrix} x_B \\ \theta_{x_B} \\ \delta_B \\ y_B \\ \theta_{y_B} \end{pmatrix} = T_{AB} \begin{pmatrix} x_A \\ \theta_{x_A} \\ \delta_A \\ y_A \\ \theta_{y_A} \end{pmatrix}$$

Avec, si p_0 est le module de l'impulsion de la trajectoire de référence :

$$\delta = \frac{p - p_0}{p_0}$$

Les systèmes de coordonnées sont choisis de sorte que la trajectoire de référence soit portée par l'axe z lorsqu'elle traverse les plans \mathcal{P}_A et \mathcal{P}_B : $T_{AB}(\vec{0}) = \vec{0}$ (fig.(B.1)). La conservation du module de l'impulsion au cours du transport implique $\delta_A = \delta_B = \delta$.

Lorsque T_{AB} est analytique, on peut en faire un développement en série de Taylor autour de la trajectoire de référence. En se limitant au premier ordre, la fonction de transport s'exprime par la matrice :

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta_x \\ \delta \\ y \\ \theta_y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \langle x|x \rangle & \langle x|\theta_x \rangle & \langle x|\delta \rangle & \langle x|y \rangle & \langle x|\theta_y \rangle \\ \langle \theta_x|x \rangle & \langle \theta_x|\theta_x \rangle & \langle \theta_x|\delta \rangle & \langle \theta_x|y \rangle & \langle \theta_x|\theta_y \rangle \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \langle y|x \rangle & \langle y|\theta_x \rangle & \langle y|\delta \rangle & \langle y|y \rangle & \langle y|\theta_y \rangle \\ \langle \theta_y|x \rangle & \langle \theta_y|\theta_x \rangle & \langle \theta_y|\delta \rangle & \langle \theta_y|y \rangle & \langle \theta_y|\theta_y \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta_x \\ \delta \\ y \\ \theta_y \end{pmatrix}_A$$

La notation $\langle \theta_x|x \rangle$ (par ex.) symbolise la dérivée première $\partial\theta_{x_B}/\partial x_A$.

En général, l'ensemble des solutions à l'équation de transport possède un plan de symétrie, dit de "Dirichlet" et noté \mathcal{D} . Si la trajectoire de référence est contenue dans

\mathcal{D} , il est possible, au premier ordre, de découpler (x_B, θ_{x_B}) de (y_B, θ_{y_B}) . La matrice de transport se réduit alors à :

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta_x \\ \delta \\ y \\ \theta_y \end{pmatrix}_B = \left(\begin{pmatrix} \langle x|x \rangle & \langle x|\theta_x \rangle & \langle x|\delta \rangle \\ \langle \theta_x|x \rangle & \langle \theta_x|\theta_x \rangle & \langle \theta_x|\delta \rangle \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{O} \quad \begin{pmatrix} \langle y|y \rangle & \langle y|\theta_y \rangle \\ \langle \theta_y|y \rangle & \langle \theta_y|\theta_y \rangle \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ \theta_x \\ \delta \\ y \\ \theta_y \end{pmatrix}_A$$

où \mathcal{O} représente une matrice nulle.

Ainsi (y_B, θ_{y_B}) ne dépendent plus de l'impulsion. L'axe des x est appelé "dispersif", celui des y "transverse".

Terminologie

Par simplicité d'écriture, les termes utilisés sont présentés par rapport à l'axe dispersif mais la transposition à l'axe transverse est immédiate :

- $\langle x|\delta \rangle$ est la dispersion.
- $\langle x|x \rangle$ est le grossissement en dispersif. S'il est nul, on parle d'optique parallèle-
point *ie* 2 trajectoires de même angle initial θ_{x_A} sont focalisées en un même
point de l'axe dispersif.
- $\langle \theta_x|\theta_x \rangle$ est le grossissement angulaire en dispersif. S'il est nul, on parle d'optique
"point-parallèle" en dispersif *ie* 2 trajectoires issues du même x_A sont focalisées
avec le même angle dispersif.
- Si $\langle x|\theta_x \rangle = 0$, l'optique est dite "point-point" en dispersif *ie* 2 particules qui ne
diffèrent que par la direction initiale de leur impulsion ont le même x de sortie.
- Les termes d'ordre supérieur à 1 sont appelés aberrations. Ces aberrations sont
qualifiées de chromatiques si elles dépendent de δ (par ex. $\langle x|\theta_x \delta \rangle$), de
géométriques sinon (par ex. $\langle x|\theta_x^2 \rangle$).
- Le plan focal est le plan tangent à la surface focale définie par $\langle x|\theta_x \rangle = 0$.

Reconstruction des trajectoires

Expérimentalement, les coordonnées B sont détectées en sortie du spectromètre par des chambres à fils. La reconstruction du vertex de réaction à la cible nécessite alors

d'inverser la matrice de transport. Si nous admettons, au premier ordre, la dissociation dispersif-transverse, le couple de coordonnées transverses (y_A, θ_{y_A}) s'obtient simplement en inversant une matrice 2×2 . Pour les dispersives $(x_A, \theta_{x_A}, \delta)$, la présence d'une matrice 2×3 demande en revanche de fixer une contrainte supplémentaire. Le choix usuel est de négliger l'extension verticale du faisceau ce qui implique $x_A = 0$. A titre d'illustration, les expressions de l'impulsion et des coordonnées transverses reconstruites sont données :

$$\delta = \frac{\theta_{x_B} \langle x | \theta_x \rangle - x_B \langle \theta_x | \theta_x \rangle}{\langle \theta_x | \delta \rangle \langle x | \theta_x \rangle - \langle x | \delta \rangle \langle \theta_x | \theta_x \rangle}$$

$$\theta_{y_A} = \frac{\theta_{y_B} \langle y | y \rangle - y_B \langle \theta_y | y \rangle}{\langle \theta_y | \theta_y \rangle \langle y | y \rangle - \langle y | \theta_y \rangle \langle \theta_y | y \rangle}$$

$$y_A = \frac{\theta_{y_B} \langle y | \theta_y \rangle - y_B \langle \theta_y | \theta_y \rangle}{\langle y | \theta_y \rangle \langle \theta_y | y \rangle - \langle \theta_y | \theta_y \rangle \langle y | y \rangle}$$

Intrinsèquement, les chambres à fils sont des détecteurs de position et non d'angle. A moins de disposer d'un grand bras de levier entre deux plans de chambres, l'erreur de la mesure d'angle prédomine. On choisira donc une optique qui annule au premier ordre la contribution de l'angle :

- $\langle x | \theta_x \rangle = 0$, optique point-point en dispersif pour une bonne résolution en impulsion.
- $\langle y | y \rangle = 0$, optique parallèle-point en transverse pour une bonne résolution sur l'angle de diffusion.
- $\langle y | \theta_y \rangle = 0$, optique point-point en transverse pour une bonne résolution sur la coordonnée transverse du vertex (réjection des parois de la cible).

Annexe C

Calculs en D dimensions

C.1 Algèbre de Dirac

En dimension N d'espace temps, les matrices de Dirac vérifient les relations :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{C.1})$$

avec $g^{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$, $g^{00} = 1$, $g^{ii} = -1$ pour $i = 1, \dots, D-1$.

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= D, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= (2-D)\gamma^\alpha, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} + (D-4)\gamma^\alpha \gamma^\beta, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\mu &= -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha + (4-D)\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta, \\ \not{a} &= \gamma_\mu a^\mu, \quad \not{a} \not{a} = a^2 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

C.2 Intégrales utiles

$$\int \frac{d^D k}{(2\Pi)^D} \frac{(k^2)^r}{(k^2 - C)^m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(16\Pi^2)^{D/4}} \frac{\Gamma(r+D/2) \Gamma(m-r-D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(m) C^{m-r-D/2}} \quad (\text{C.3})$$

$$\int d^D k k^\mu k^\nu f(k^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{D} \int d^D k k^2 f(k^2) \quad (\text{C.4})$$

$$\int d^D k k^{\mu_1} k^{\mu_2} \dots k^{\mu_{2n+1}} f(k^2) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\int d^D \Omega = \frac{2\pi^{(D+1)/2}}{\Gamma[(D+1)/2]}, \quad (\text{espace Euclidien}) \quad (\text{C.6})$$

On rappelle :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \quad n \in \mathbf{N} \\ \Gamma(x+1) &= x \Gamma(x) \quad (x > 0) \\ \Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \frac{1}{2} \left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

avec γ_E la constante d'Euler :

$$\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\ln(n) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right] \simeq 0.5772157 \quad (\text{C.8})$$

Paramétrisations de Feynman :

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{\{xA + (1-x)B\}^{\alpha+\beta}} \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta C^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \, x \int_0^1 dy \frac{u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} u_3^{\gamma-1}}{\{u_1 A + u_2 B + u_3 C\}^{\alpha+\beta+\gamma}} \quad (\text{C.10})$$

$$u_1 = xy, \quad u_2 = x(1-y), \quad u_3 = 1-x.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta} &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma) \Gamma(\delta)} \\ &\int_0^1 dx \, x^2 \int_0^1 dy \, y \int_0^1 dz \frac{u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} u_3^{\gamma-1} u_4^{\delta-1}}{\{u_1 A + u_2 B + u_3 C + u_4 D\}^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$u_1 = xyz, \quad u_2 = xy(1-z), \quad u_3 = x(1-y), \quad u_4 = 1-x.$$

Fonction de Spence :

$$Sp(x) = - \int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt, \quad (\text{C.12})$$

Les propriétés de cette fonction sont détaillées dans [87, appendix E].

Annexe D

Règles de Feynman et constantes de renormalisation dans QED

Propagateur du photon

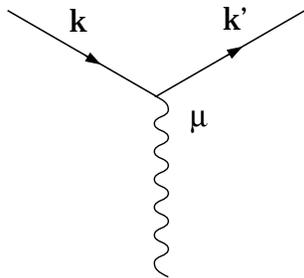
$$\begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \text{~~~~~} \curvearrowright \end{array} = \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left(-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (\text{D.1})$$

ξ désigne le paramètre de jauge. Les calculs présentés dans cette thèse utilisent la jauge de Feynman, $\xi = 1$.

Propagateur du fermion

$$\begin{array}{c} \mathbf{k} \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{\not{k} - m} = i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{D.2})$$

Vertex électromagnétique



Couplage avec une charge q :

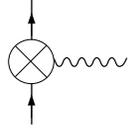
$$-iq\gamma^\mu \quad (\text{D.3})$$

La convention adoptée pour la charge de l'électron est $q = e = -|e|$.

La renormalisation de l'ElectroDynamique Quantique définit quatre constantes de renormalisation: Z_2 pour le champ de fermion, Z_3 pour le champ de photon, Z_m pour la masse et Z_g pour la charge. Les expressions de chaque contre-terme sont illustrées

ci-dessous et le développement de chaque constante est donné à l'ordre 1 dans la constante de couplage. La notation des pôles utilise l'écriture :

$$\frac{1}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_e^2} \right)$$



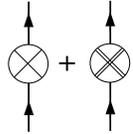
$$\mathbf{L}_{\text{CT}} = \underbrace{(\mathbf{Z}_e \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3 - 1)}_{\mathbf{Z}_1} (-e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \mathbf{A}_\mu)$$

$$\begin{aligned} Z_1 = 1 - \frac{\alpha_{em}}{4\pi} & \left\{ \frac{1}{\bar{\epsilon}_{UV}} [1 - (1 - \xi)] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} [2 + (1 - \xi)] + 4 - 2(1 - \xi) \right\} + \mathcal{O}(\alpha_{em}^2) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$



$$\mathbf{L}_{\text{CT}} = (\mathbf{Z}_3 - 1) \left(-\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \right)$$

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \frac{4}{3} \frac{1}{\bar{\epsilon}_{UV}} + \mathcal{O}(\alpha_{em}^2) \quad (\text{D.5})$$



$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{CT}} = & (\mathbf{Z}_2 - 1) \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \\ & - (\mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_m - 1) \bar{\Psi} \mathbf{m} \Psi \end{aligned}$$

$$Z_2 = Z_1 \quad (\text{Identité de Ward}) \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} Z_2 Z_m = 1 - \frac{\alpha_{em}}{4\pi} & \left\{ \frac{1}{\bar{\epsilon}_{UV}} [4 - (1 - \xi)] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} [2 + (1 - \xi)] + 8 - 2(1 - \xi) \right\} + \mathcal{O}(\alpha_{em}^2) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Annexe E

Traitement des singularités

Les formules analytiques des parties réelles et imaginaires des intégrales

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^m dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^n}$$

sont présentées pour $n = 1$ et $n = 2$. Le point de départ du calcul est la définition des intégrales au sens de Cauchy. En remarquant que

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \quad (\text{E.1})$$

on écrit donc la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^m dx}{x - x_0 \pm i\epsilon} = & \quad (\text{E.2}) \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{x_0 - \eta} \frac{(x - x_0)x^m dx}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} + \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \frac{(x - x_0)x^m dx}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} + \int_{x_0 + \eta}^b \frac{(x - x_0)x^m dx}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \right\} \\ & \mp i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \epsilon \left\{ \int_a^{x_0 - \eta} \frac{(x - x_0)x^m dx}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} + \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \frac{(x - x_0)x^m dx}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} + \int_{x_0 + \eta}^b \frac{(x - x_0)x^m dx}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \right\} \end{aligned}$$

On obtient alors les relations suivantes pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{dx}{x - x_0 \pm i\epsilon} &= J_0 \mp i \pi \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x dx}{x - x_0 \pm i\epsilon} &= J_1 + x_0 J_0 \mp i \pi x_0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^2 dx}{x - x_0 \pm i\epsilon} &= J_2 + 2x_0 J_1 + x_0^2 J_0 \mp i \pi x_0^2 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^3 dx}{x - x_0 \pm i\epsilon} &= J_3 + 3x_0 J_2 + 3x_0^2 J_1 + x_0^3 J_0 \mp i \pi x_0^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^m dx}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \sum_{p=0}^m C_m^p x_0^p J_{m-p} \mp i\pi x_0^m \quad (\text{E.3})$$

$$C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

avec les définitions

$$J_0 = \log \left(\frac{b - x_0}{a - x_0} \right), \quad J_n = \frac{1}{n} [(b - x_0)^n - (a - x_0)^n] \quad (\text{E.4})$$

De même pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^2} &= I_0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^2} &= I_1 + x_0 I_0 \mp i\pi \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^2 dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^2} &= I_2 + 2x_0 I_1 + x_0^2 I_0 \mp i 2\pi x_0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^3 dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^2} &= I_3 + 3x_0 I_2 + 3x_0^2 I_1 + x_0^3 I_0 \mp i 3\pi x_0^2 \\ &\dots \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^m dx}{(x - x_0 \pm i\epsilon)^2} &= \sum_{p=0}^m C_m^p x_0^p I_{m-p} \mp i\pi (x_0^m)' \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

avec

$$I_0 = \frac{1}{a - x_0} - \frac{1}{b - x_0}, \quad I_n = J_{n-1} \quad (\text{E.6})$$

Bibliographie

- [1] R. Feynman, *Photon-Hadron Interactions*, Benjamin, New York, 1972.
- [2] W.K.H. Panofsky, *Proceedings of the XIV International Conference on High Energy Physics*, Vienna (1968) p. 23.
J. Friedman and H. Kendall, *Deep inelastic electron scattering*, Annual Review of Nuclear Science, Vol.22, 1972.
J.I. Friedman, H.W. Kendall, R.E. Taylor, *Conférences Nobel 8 décembre 1990*, reproduites dans Rev. Mod. Phys. **63**, (1991) p. 573, 597 et 615.
- [3] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, *The eightfold way*, Benjamin, New York, 1964.
- [4] Pegasys/Mark II, A letter of intent to the Stanford Linear Accelerator Center for a program of internal target physics using the Mark II detector at the PEP storage ring, July 1990.
- [5] P.Y. Bertin, P.A.M. Guichon and C. Hyde-Wright, *CEBAF proposal PR93-050*, 1993.
- [6] N. D'Hose and T. Walcher, *Nucleon Structure Study by Virtual Compton Scattering*, MAMI proposal, 1994.
- [7] P.A.M. Guichon, G.Q. Liu and A.W. Thomas, *Nucl. Phys.* **A591**, (1995) 606.
- [8] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1975.
- [9] F.E. Low, *Phys. Rev.* **96**, (1954) 1428.
- [10] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Editions MIR, Moscou, 1989.
- [11] T.E.O. Ericson and J. Hüfner, *Nucl. Phys.* **B57**, (1973) 604.
- [12] V.S. Barashenkov, H.J. Kaiser and A.A. Ogreba, *Phys. Lett.* **2**, (1962) 33.
- [13] J.L. Powell, *Phys. Rev.* **75**, (1949) 32.

- [14] O. Klein and Y. Nishina, *Zeit. für Physik* **52**, (1929) 853.
- [15] F.J. Federspiel *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **67**, (1991) 1511.
- [16] E.L. Hallin *et al.*, *Phys. Rev.* **C48**, (1993) 1497.
- [17] B.E. MacGibbon *et al.*, *Phys. Rev.* **C52**, (1995) 2097.
- [18] V.I. Gol'danskiĭ *et al.*, *Sov. Phys. -JETP* **11**, (1960) 1223.
- [19] P.S. Baranov *et al.*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **21**, (1975) 355.
- [20] A. Zieger *et al.*, *Phys. Lett.* **B278**, (1992) 34.
- [21] A.. Migdal, *J. Phys. USSR* **8**, (1944) 331.
- [22] A.M. Baldin, *Nucl. Phys.* **18**, (1960) 310.
- [23] M. Damashek and F.J. Gilman, *Phys. Rev.* **D1**, (1970) 1319.
- [24] A.I. L'vov, V.A. Petrun'kin and S.A. Startsev, *Yad. Fiz.* **D29**, (1979) 1265.
- [25] N. Isgur and G.Karl, *Phys. Rev.* **D18**, (1978) 4187; **D19**, (1979) 2653.
- [26] R.A. Arndt *et al.*, *Phys. Rev.* **C53**, (1996) 430.
M. Batinić *et al.*, *Phys. Rev.* **C51**, (1995) 2310.
- [27] V.A. Petrun'kin, *Sov. J. Part. Phys.* **12**, (1981) 278.
- [28] D. Drechsel and A. Russo, *Phys. Lett.* **B137**, (1984) 294.
- [29] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19**, (1961) 154.
- [30] A.W. Thomas, *Adv. Nucl. Phys.* **13**, (1983) 1.
- [31] G.E. Brown and M. Rho, *Comm. Nucl. Part. Phys.* **18**, (1988) 1.
- [32] R. Weiner and W. Weise, *Phys. Rev. Lett.* **159**, (1985) 85.
- [33] W.J. Marciano and A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **71**, (1993) 3629.
C. Czappek *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **70**, (1993) 17.
D.I. Britton *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **68**, (1992) 3000.
- [34] T.H. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. (London)* **260**, (1961) 127; **262**, (1961) 237.
- [35] U.-G. Meißner, N.Kaiser and W.Weise, *Nucl. Phys.* **A466**, (1987) 685.
- [36] M. Chemtob, *Nucl. Phys.* **A473**, (1987) 613.

-
- [37] N. Scoccola and W. Weise, *Phys. Lett.* **B232**, (1989) 287.
- [38] N. Scoccola and W. Weise, *Nucl. Phys.* **A517**, (1990) 495.
- [39] V. Bernard, N. Kaiser and U.-G. Meißner, *Phys. Rev. Lett.* **67**, (1991) 1515.
- [40] V. Bernard, N. Kaiser, U.G. Meißner and A. Schmidt, *Phys. Lett.* **B319**, (1994) 269; *Z. Phys.* **A348**, (1994) 317.
- [41] T.R. Hemmert, B.R. Holstein and J. Kambor, *Phys. Rev.* **D55**, (1997) 5598.
- [42] F.E. Low, *Phys. Rev.* **110**, (1958) 974.
- [43] R.A. Berg and C.N. Lindner, *Nucl. Phys.* **26**, (1961) 259.
- [44] J.F.J. van den Brand *et al.*, *Phys. Rev.* **D52**, (1995) 868.
- [45] H. Fonvieille, *La nature de la sonde électromagnétique*, Ecole Joliot-Curie, 1992.
- [46] M. Vanderhaeghen, *Phys. Lett.* **B368**, (1996) 13.
- [47] R.C. Walker *et al.*, *Phys. Rev.* **D49**, (1994) 5671.
- [48] P.E. Bosted, *Phys. Rev.* **C51**, (1995) 409.
- [49] J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley and Sons, New York, 1952.
- [50] D. Drechsel, G. Knöchlein, A. Metz and S. Scherer, *Phys. Rev.* **C55**, (1997) 424.
- [51] R. Machleidt, *Adv. Nucl. Phys.* **19**, (1989) 189.
- [52] A. Metz and D. Drechsel, *Z. Phys.* **A356**, (1996) 351.
- [53] M. Gell-Mann and M. Lévy, *Nuovo Cim.* **16**, (1960) 705.
- [54] T.R. Hemmert, B.R. Holstein, G. Knöchlein and S. Scherer *Phys. Rev.* **D55**, (1997) 2630; *Phys. Rev. Lett.* **79**, (1997) 22.
- [55] Mainz Microtron MAMI, *Activity Report Presented to the Gordon Conference on Photo-Nuclear Reactions* (1996).
- [56] M.O. Distler, “*Elektroproduktion von neutralen Pionen am Wasserstoff an der Schwelle*”. Doctorate these. (1997).
“*Aufbau und Test einer vertikalen Driftkammer*”. Diploma these, Johannes Gutenberg Universität Mainz. (1990).

-
- [57] I. Anthony *et al.*, *Nucl. Instr. Meth.* **A301**, (1991) 230.
- [58] G. Audit *et al.*, *Nucl. Instr. Meth.* **A301**, (1991) 473.
- [59] R. Novotny *et al.*, *IEEE, Trans. Nucl. Sci.* **38**, (1991) 379.
- [60] J. Ahrens *et al.*, *Contribution to the Workshop on Future Detectors for Photonuclear Experiments*, Edinburgh (UK), Ed. D.Branford (1991)
- [61] M. Meyerhoff, D. Eyl, A. Frey *et al.*, *Phys. Lett.* **B327**, (1994) 210.
- [62] H. Herminghaus *et al.*, *Nucl. Instr. Meth.* **138**, (1976) 1.
- [63] F. Halzen and A.D. Martin, *Quark & Leptons: An introductory Course in Modern Particle Physics*, Wiley, New York, 1984.
- [64] R. Brun, O. Couet, C. E. Vandoni, P. Zancarini, PAW : A general purpose portable software tool for data analysis and presentation, *CERN-DD/89/1*.
- [65] I. Ewald, *Entwicklung und Erprobung einer langen, dünnen Flüssig-Wasserstoff-Targetzelle*, Diploma these, Johannes Gutenberg Universität Mainz. (1996).
- [66] L. Van Hoorebeke *et al.*, *Monte Carlo simulation of virtual Compton scattering at MAMI*, Actes de proceeding of VCS96, V. Breton, Clermont-Ferrand, 1996.
- [67] Review of particle properties, *Phys. Rev.* **D50**, (1994) 1283.
- [68] S.S. Schweber, *QED and the men who made it : Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga*, Princeton University Press, 1994.
- [69] L.C. Maximon, *Rev. of Mod. Phys.* **41**, (1969) 193.
- [70] A.I. Akhiezer and V.B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, Interscience Monographs and Texts in Physics and Astronomy Vol.XI, Interscience Publishers, New York, 1995.
- [71] T. P. Cheng and L. F. Li., *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford, 1989.
- [72] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics*, World Scientific, Singapore, 1987.
- [73] G. t'Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**, (1972) 189.
- [74] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Phys. Lett.* **B40**, (1972) 566.

-
- [75] J.F. Ashmore, *Lett. Nuovo Cimento* **4**, (1972) 289.
- [76] G. M. Cicuta and E. Montaldi, *Lett. Nuovo Cimento* **4**, (1972) 329.
- [77] R. Gastmans and R. Meuldermans, *Nucl. Phys.* **B63**, (1973) 277.
- [78] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **76**, (1949) 790.
- [79] F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **52**, (1937) 54.
- [80] J.M. Jauch and F. Rohrlich, *Helv. Phys. Acta.* **27**, (1954) 613;
J.M. Jauch and F. Rohrlich, *Theory of Photons and Electrons*, Addison-Wesley,
New York, 1989.
- [81] D.R. Yennie, S.C. Frautschi and H. Suura, *Ann. Phys.* **13**, (1961) 379.
- [82] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [83] M. Vanderhaeghen, D. Lhuillier, D. Marchand and J. Van de Wiele, *article en préparation*
- [84] C. De Calan, H. Navelet and J. Picard, *Nucl. Phys.* **348**, (1973) 47.
- [85] C. De Calan, H. Navelet and J. Picard, *note CEA-N-2624*, (1990).
- [86] L.W. Mo and Y.S. Tsai, *Rev. of Mod. Phys.* **41**, (1969) 205.
- [87] R.D. Field, *Applications of Perturbative QCD*, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
- [88] G. Sterman, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [89] L. Van Hoorebeke, *Communication privée*, 1987.
- [90] Y-S. Tsai, *SLAC-PUB-0848*.
- [91] C. Marchand, *Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, centre d'Orsay*, 1987.
- [92] H. Mineur, *Techniques de calcul numérique*, Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1952.
- [93] H.B. Dwight, *Tables of integrals and other mathematical data*, Macmillan, New York, 1961.

- [94] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and products*, Academic Press, 1994.
- [95] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill Book Compagny, New York, 1965.
- [96] M. Vanderhaeghen, *Phys. Lett.* **B402**, (1997) 243.
- [97] J. Van de Wiele, *Communication privée*, 1997.
- [98] G. Höhler, *Nucl. Phys.* **B114**, (1976) 505.
- [99] J.Shaw, R. Minskimen, *MIT-Bates proposal*, 1997.
- [100] M. Vanderhaeghen, *Theoretical overview of virtual Compton scattering on the nucleon, Proceedings of conference on Perspectives in Hadronic Physics*, Trieste, 12-16 May, 1997.
- [101] A.V. Radyushkin, *Phys. Lett.* **B380**, (1996) 417.
X.D. Ji, *Phys. Rev. Lett.* **78**, (1997) 610.
P.A.M. Guichon, *Proceedings of the DIS97 Conference*, Chicago, April 1997.
- [102] S.J. Brodsky and G. Farrar, *Phys. Rev. Lett.* **31**, (1973) 1953.
J.P. Lepage and S.J. Brodsky, *Phys. Rev.* **D22**, (1980) 2157.
- [103] V. Breton and C. Hyde-Wright, *TJLab proposal*, 1996.
- [104] N. D'Hose *et al.*, *Proceedings of the VCS96 Conference*, Clermont-Ferrand, June 1997.
- [105] P. Vernin, *Projet d'Accélérateur Européen d'électrons et défis expérimentaux*, Ecole internationale Joliot-Curie de Physique Nucléaire, Maubuisson, 1992.