Calcul d'une "carte de transfert" réaliste pour particules chargées

Thomas PUGNAT [1 2]

Barbara DALENA [1] Ionel CIUPERCA [2]

[1]CEA au DSM/Irfu/SACM/LEDA

[2]Polytech Lyon 1

Stage réalisé pendant la période:

18 Mars 2015 - 18 Septembre 2015

Plan de la présentation

Sommaire

Le CEA et le LHC

Le CEA

Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives

Création : 11 Juillet 1945

Moyens à disposition :

- Budget : $\sim$ 4.4 milliard d'euros
- 10 centres de recherche dont 5 civils
- 16 110 techniciens, ingénieurs, chercheurs, ...
- des projets d'études et accords avec des universités et centres de recherche Français et dans le monde entier (dont le LHC)

Domaine de recherche :

l'énergie nucléaire, la physique nucléaire, la chimie, la biologie, la médecine et les énergies alternatives

Le LHC

Large Hadron Collider

Création : 1994 - 2008 (CERN, Suisse)

Le plus grand accélérateur au monde :

- 27 km de circonférence à $\sim$ 100 m de profondeur
- 1232 Dipôles + 600 autres aimants
- 600 millions de collision / s à 7-13 TeV

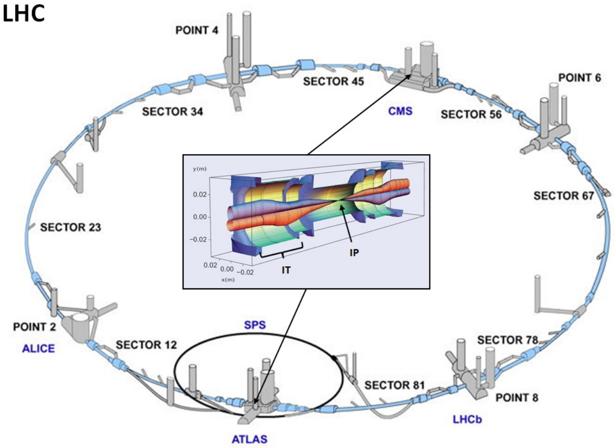
Objectif :

découvrir le boson de Higgs et donner sa masse, confirmer le modèle standard, découvrir de nouvelles physiques, ...

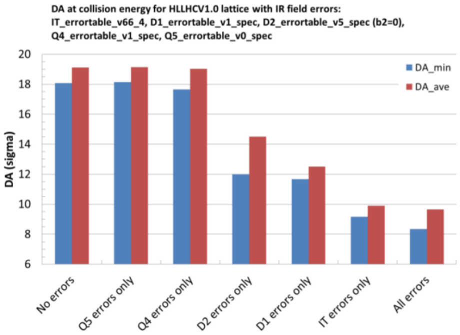
Le projet HiLumi-LHC

Augmenter la luminosité du LHC (Nb. de collisions/s) ⇒ Réduire la taille du faisceau aux points d'interaction (IP) ⇒ Augmentation de la taille faisceau dans le Triplet final

Augmentation de l'angle de croisement à l'IP ⇒ + grande ouverture des aimants

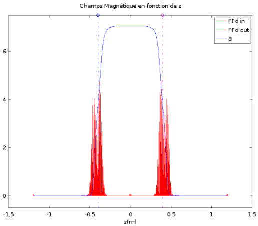


Le stage



A. V. Bogomyagkov et al. WEPEA049 @ IPAC'13 :

A travers des calculs analytiques, il a été montré que, bien que faible, le *champ de fuite ne devait pas être négligé.*



Objectif du stage :

- Tester et optimiser un nouveau code prenant en compte la dépendance en z du champ
- Interfacer le code du CEA au programme SixTrack du CERN

$\Rightarrow$ Quantifier les effets du champ de fuite sur la dynamique du faisceau à long terme

But final :

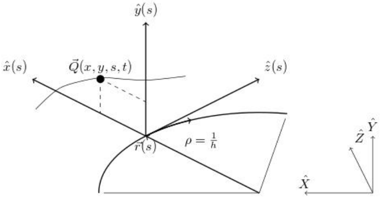
- Définir *la qualité du champ* et *les corrections*
- Fournir un retour aux concepteurs des aimants

Sommaire

Notation physique et outils mathématiques

Objectif :

Décrire le mouvement d'une particule chargée dans les éléments des accélérateurs !



$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

Équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{q}{m_p} E_x + \frac{q}{m_p} \left(\frac{\partial s}{\partial t} B_y - \frac{\partial y}{\partial t} B_s \right)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q}{m_p} E_y + \frac{q}{m_p} \left(\frac{\partial x}{\partial t} B_s - \frac{\partial s}{\partial t} B_x \right)$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{q}{m_p} E_s + \frac{q}{m_p} \left(\frac{\partial y}{\partial t} B_x - \frac{\partial x}{\partial t} B_y \right)$$

$\Longrightarrow$ Réduction du temps de calcul

$\Longrightarrow$ Garantir la conservation de l'espace des phases

Outil Mathématique $\Longrightarrow$ Algèbre de Lie

Groupe Symplectique et système Hamiltonien

- **Algèbre de Lie**

$$\begin{array}{ccc} Q \times Q & \longrightarrow & Q \\ (x, y) & \longmapsto & [x, y] \end{array}$$

Crochet de poisson :

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

Prop. : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall x, y, z \in Q$,

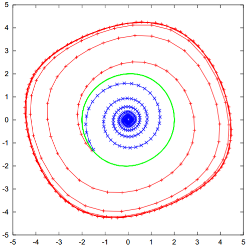
Structure Algébrique	*Anti-symétrie*	*Identité de Jacobi*
$[\alpha x, \beta(y+z)] = \alpha\beta[x, y] + \alpha\beta[x, z]$	$[x, y] = -[y, x]$	$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

- **Transformation symplectique**

Définition :

Une transformation différentiable g : $U \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$ est dite *symplectique* si la matrice Jacobienne $g'(q, p)$ est symplectique sur tout U, i.e. :

$$g'(q, p)^T S g'(q, p) = S$$



Explicit Euler (gains energy)

Implicit Euler (loses energy)

Exact phase diagram solution (ideal harmonic oscillator)

Création d'un schéma numérique symplectique

- **Système Hamiltonien**

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}$$

Hamiltonien 8D pour un quadripôle ($a(x,y,z) = q\frac{A(x,y,z)}{P_0 c}$ *) :*

$$H\left[x, p_x, y, p_y, s, \delta, z, p_z; \sigma\right] = -\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x - a_x)^2 - (p_y - a_y)^2} + p_z - a_z \quad \Rightarrow \quad K\left[x, p_x, y, p_y, s, \delta, z, p_z; \sigma\right] = p_z \underbrace{-a_z}_{(1)} - \delta + \frac{(p_x - a_x)^2}{2(1+\delta)} + \frac{(p_y - a_y)^2}{2(1+\delta)}$$

- **Transformation de Lie**

$$(1) \quad \Rightarrow \quad Mg = e^{(:-\frac{\Delta\sigma}{2}a_z:)} g = g + \{-\tfrac{\Delta\sigma}{2}a_z, g\} + O(2)$$

- **"Map" de Lie**

$$x^i \overset{M}{\longmapsto} x^f = x^i \qquad y^i \overset{M}{\longmapsto} y^f = y^i \qquad l^i \overset{M}{\longmapsto} l^f = l^i \qquad z^i \overset{M}{\longmapsto} z^f = z^i$$

$$p_x^i \overset{M}{\longmapsto} p_x^f = p_x^i - \frac{\Delta\sigma}{2}\frac{\partial a_z}{\partial x} \qquad p_y^i \overset{M}{\longmapsto} p_y^f = p_y^i - \frac{\Delta\sigma}{2}\frac{\partial a_z}{\partial y} \qquad \delta^i \overset{M}{\longmapsto} \delta^f = \delta^i \qquad p_z^i \overset{M}{\longmapsto} p_z^f = p_z^i - \frac{\Delta\sigma}{2}\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Sommaire

Contexte et optimisation du code

Context :

Le code développé au CEA sera utilisé par le code SixTrack du CERN. Le code doit être :

- Facile à intégrer.

SixTrack → créé en 1988 et en Fortran 77

- Rapide.

Appelé pour chaque quadripôle étudié (entrée et sortie) et à chaque tour de l'accélérateur.
Nb de tours : 1 000 - 100 000

Techniquement, la pas de mesure en z du champ magnétique est supérieur à quelques cm.

Contexte et optimisation du code

Context :

Le code développé au CEA sera utilisé par le code SixTrack du CERN. Le code doit être :

- Facile à intégrer.

  SixTrack $\rightarrow$ créé en 1988 et en Fortran 77

- Rapide.

Appelé pour chaque quadripôle étudié (entrée et sortie) et à chaque tour de l'accélérateur.
Nb de tours : 1 000 - 100 000

Techniquement, la pas de mesure en z du champ magnétique est supérieur à quelques cm.

Optimisation du code :

- Potentiel Vecteur stocké sous forme polynomial ($A_x \propto \sum_{i,j} x^i y^j C_{Ax}(z)$)
- Calcul séquentiel
- Vitesse $\propto$ Nb. de point en z

Contexte et optimisation du code

Context :

Le code développé au CEA sera utilisé par le code SixTrack du CERN. Le code doit être :

- Facile à intégrer.

  SixTrack $\rightarrow$ créé en 1988 et en Fortran 77

- Rapide.

  Appelé pour chaque quadripôle étudié (entrée et sortie) et à chaque tour de l'accélérateur.
  Nb de tours : 1 000 - 100 000

Techniquement, la pas de mesure en z du champ magnétique est supérieur à quelques cm.

Optimisation du code :

- Potentiel Vecteur stocké sous forme polynomial ($A_x \propto \sum_{i,j} x^i y^j C_{Ax}(z)$)
- Calcul séquentiel
- Vitesse $\propto$ Nb. de point en z

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & & j & \\
\hline
 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
i & C_{Ax} & 0 & \cdots \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

i	j
1	0
3	2
$\vdots$	$\vdots$

C_{Ax}
2.6548E+2
3.4452E+4
$\vdots$

Contexte et optimisation du code

Context :

Le code développé au CEA sera utilisé par le code SixTrack du CERN. Le code doit être :

- Facile à intégrer.

  SixTrack $\rightarrow$ créé en 1988 et en Fortran 77

- Rapide.

  Appelé pour chaque quadripôle étudié (entrée et sortie) et à chaque tour de l'accélérateur.
  Nb de tours : 1 000 - 100 000

Techniquement, la pas de mesure en z du champ magnétique est supérieur à quelques cm.

Optimisation du code :

- Potentiel Vecteur stocké sous forme polynomial ($A_x \propto \sum_{i,j} x^i y^j C_{Ax}(z)$)
- Calcul séquentiel
- Vitesse $\propto$ Nb. de point en z

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & & j & \\
\hline
 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
i & C_{Ax} & 0 & \cdots \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

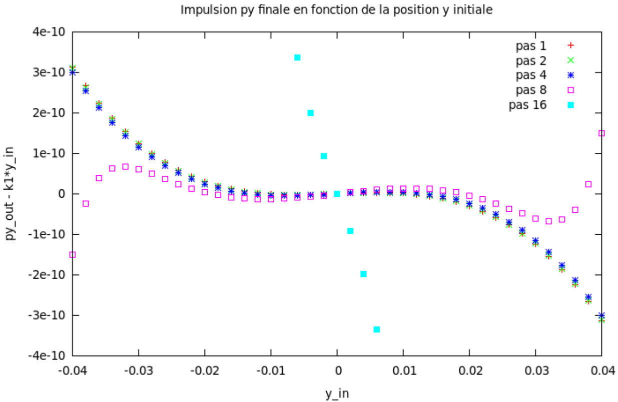
i	j
1	0
3	2
$\vdots$	$\vdots$

C_{Ax}
2.6548E+2
3.4452E+4
$\vdots$

$\Rightarrow$ Vitesse $\times$ 2

Variation de la taille du pas en z

Mesure distante

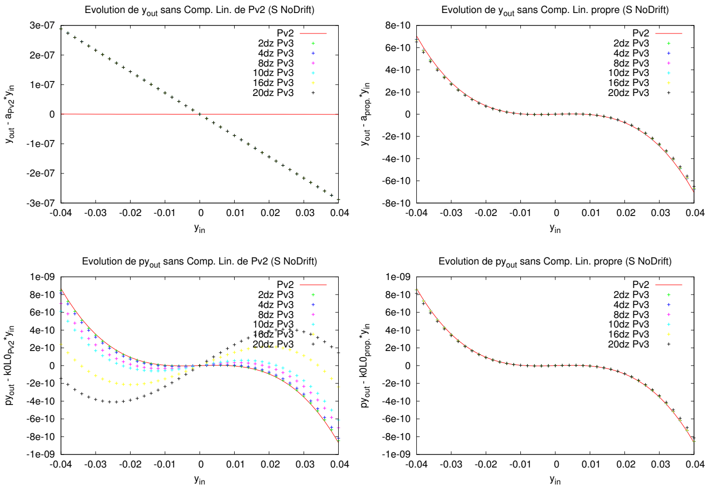


Évolution de p_y en sortie du quadripôle (sans la partie linéaire de référence) pour différentes positions en y en entrée avec des pas en z de 3 (Ref. $+$), 6, 12, 24 et 48 mm.

Très rapidement, des perturbations sur la partie non-linéaire apparaisent. (dz < 24 mm)

Variation de la taille du pas en z

Mesure continue (interpolation Simpson des coefficients de A)



Des perturbations sur la partie non-linéaire de y apparaissent très faiblement. (dz < 60 mm)

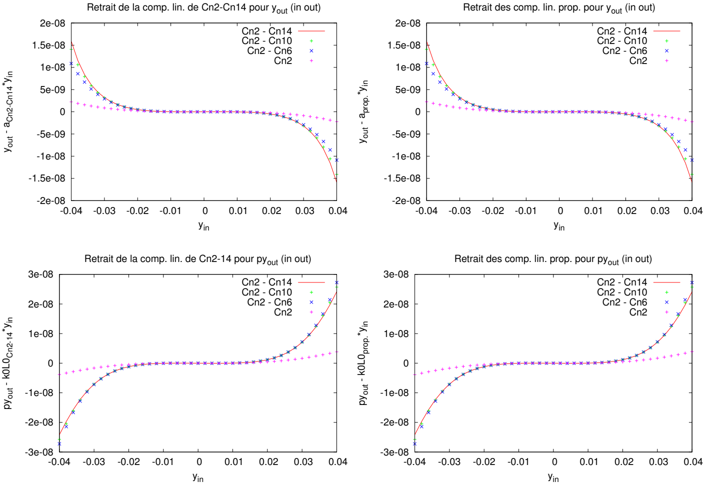
On a une modification de la partie linéaire de y et p_y. (Peut être corrigée)

Évolution de y (en haut) et de p_y (en bas) sortant en fonction de y entrant en moyennant avec une interpolation Simpson pour différentes tailles de pas (3mm pour Pv2 (Ref.), puis 6, 12, 24, 30, 48 et 60mm pour Pv3.

Sommaire

Cas non-symétrique

Entrée : sans connecteur, Sortie : avec connecteur

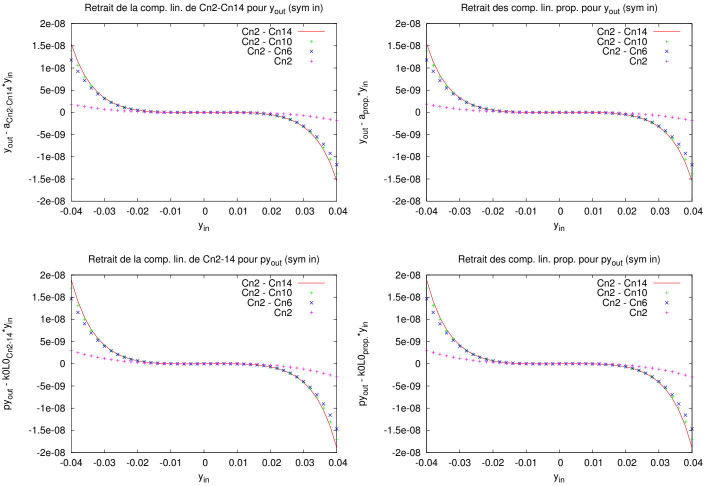


Évolution de y (en haut) et de p_y (en bas) sortant en fonction de y entrant pour différentes harmoniques avec un champ magnétique non-symétrique en z.

- Harmonique b_2 : la composante linéaire du quadripôle + légère déviation ("Octupole Like")
- Harmonique b_6 : la majorité de la partie non-linéaire du quadripôle
- Perturbations non-linéaire en y et en p_y différentes

Cas symétrique

Entrée : sans connecteur, Sortie : sans connecteur

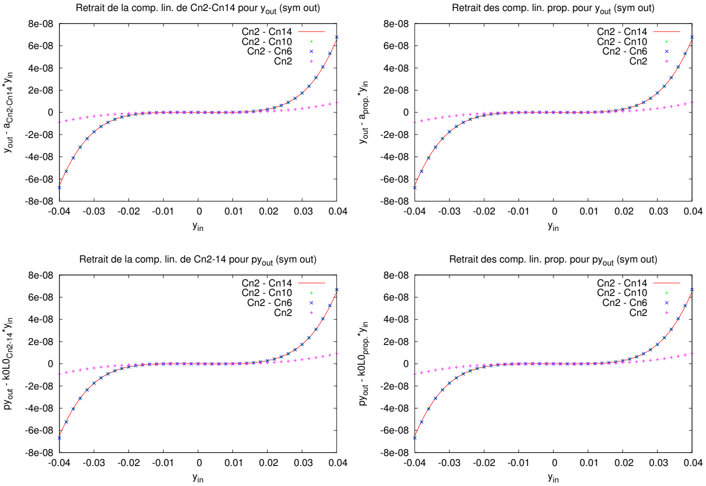


- Perturbations non-linéaire en y et en p_y ont la même forme
- Perturbations pour y : identiques au cas non-symétrique avec la même amplitude
- Perturbations pour p_y : différentes du cas non-symétrique

Évolution de y (en haut) et de p_y (en bas) sortant en fonction de y entrant pour différentes harmoniques avec un champ magnétique symétrique en z (partie sans connecteur).

Cas symétrique

Entrée : avec connecteur, Sortie : avec connecteur



Évolution de y (en haut) et de p_y (en bas) sortant en fonction de y entrant pour différentes harmoniques avec un champ magnétique symétrique en z (partie avec connecteur).

- Perturbations non-linéaire en y et en p_y ont la même forme
- Perturbations pour y : différentes du cas non-symétrique
- Perturbations pour p_y : identiques au cas non-symétrique mais avec une amplitude plus grande

Sommaire

Résultats

- Harmonique $b_2 \mapsto$ la composante linéaire du quadripôle + légère déviation ("Octupole Like")
- Harmonique $b_6 \mapsto$ la majorité de la partie non-linéaire du quadripôle
- Les harmoniques d'ordres supérieure $\mapsto$ correction sur les perturbations non-linéaires
- Non-symétrie du champ magnétique $\mapsto$ compensation des effets du Champ de fuite
- Moyenner des mesures sur des intervalles contigus $\mapsto$ pas de perte d'information sur la partie non-linéaire pour des pas jusqu'à 60mm

  $\Rightarrow$ Diminution du nombre de pas $\Rightarrow$ Augmentation de la vitesse de calcul
- Méthode développée par le CEA, aussi puissante qu'un Runge Kutta symplectique d'ordre 4 mais plus rapide

Résultats

- Harmonique $b_2 \mapsto$ la composante linéaire du quadripôle + légère déviation ("Octupole Like")
- Harmonique $b_6 \mapsto$ la majorité de la partie non-linéaire du quadripôle
- Les harmoniques d'ordres supérieure $\mapsto$ correction sur les perturbations non-linéaires
- Non-symétrie du champ magnétique $\mapsto$ compensation des effets du Champ de fuite
- Moyenner des mesures sur des intervalles contigus $\mapsto$ pas de perte d'information sur la partie non-linéaire pour des pas jusqu'à 60mm

  $\Rightarrow$ Diminution du nombre de pas $\Rightarrow$ Augmentation de la vitesse de calcul
- Méthode développée par le CEA, aussi puissante qu'un Runge Kutta symplectique d'ordre 4 mais plus rapide

Résultats

- Harmonique $b_2 \mapsto$ la composante linéaire du quadripôle + légère déviation ("Octupole Like")
- Harmonique $b_6 \mapsto$ la majorité de la partie non-linéaire du quadripôle
- Les harmoniques d'ordres supérieure $\mapsto$ correction sur les perturbations non-linéaires
- Non-symétrie du champ magnétique $\mapsto$ compensation des effets du Champ de fuite
- Moyenner des mesures sur des intervalles contigus $\mapsto$ pas de perte d'information sur la partie non-linéaire pour des pas jusqu'à 60mm

  $\Rightarrow$ Diminution du nombre de pas $\Rightarrow$ Augmentation de la vitesse de calcul
- Méthode développée par le CEA, aussi puissante qu'un Runge Kutta symplectique d'ordre 4 mais plus rapide

Résultats

- Harmonique $b_2 \mapsto$ la composante linéaire du quadripôle + légère déviation ("Octupole Like")
- Harmonique $b_6 \mapsto$ la majorité de la partie non-linéaire du quadripôle
- Les harmoniques d'ordres supérieure $\mapsto$ correction sur les perturbations non-linéaires
- Non-symétrie du champ magnétique $\mapsto$ compensation des effets du Champ de fuite
- Moyenner des mesures sur des intervalles contigus $\mapsto$ pas de perte d'information sur la partie non-linéaire pour des pas jusqu'à 60mm

  $\Rightarrow$ Diminution du nombre de pas $\Rightarrow$ Augmentation de la vitesse de calcul
- Méthode développée par le CEA, aussi puissante qu'un Runge Kutta symplectique d'ordre 4 mais plus rapide

Sommaire

Contexte

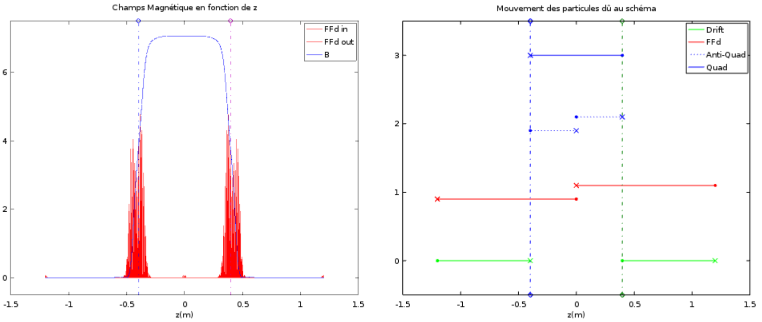
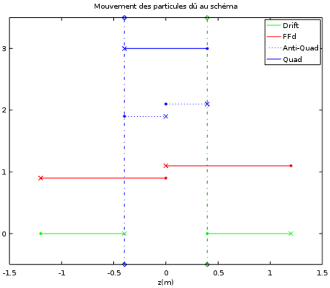


FIGURE: Tracé du champ magnétique B et du champ de fuite FFd le long d'un quadripôle test théorique (à gauche) et représentation des positions initiales (×) et finales (•) pour les différentes parties du schéma d'intégration (à droite). Le calcul du quad est effectué par SixTrack.

Recherche des paramètres

Matrice utilisée pour le quadripôle équivalent

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_f = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{C}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \pm K0L_Q(L_Q + C) & L_Q + C \\ \pm K0L_Q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{C}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_i$$



$\Leftarrow$

Méthode de Newton en cherchant le minimum de la fonction :

$$F(K,C) = \begin{pmatrix} \dfrac{(K0L0_{calc.}(K,C) - K0L0_{obj.})^2}{K0L0^2_{obj.}} \\ \dfrac{(o_{y,calc.}(K,C) - o_{y,obj.})^2}{o^2_{y,obj.}} \end{pmatrix}$$

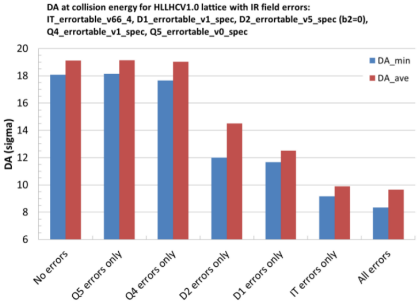
($K0L0$: pente de $p_{y,out} = f(y_{in})$; o_y : pente de $y_{out} = f(y_{in})$)

On converge aussi sur K afin de supprimer la totalité de la partie linéaire sur p_y

Conclusion

Perspectives :

- Amélioration de la recherche des paramètres des anti-quad dans 2 plans ((x, p_x) et (y, p_y))
- Quantification de l'effet du champ de fuite sur la dynamique du faisceau à long terme (DA) en utilisant notre modèle.



Merci de votre attention !

Remerciement

Je souhaiterai remercier :

- le CEA pour ce paisible environnement de travail, ses opportunités et sa rapidité pour faire un double de clef.
- toutes les équipes du SACM pour m'avoir accueilli et les parties de Mölkky endiablées.
- Jacques PAYET pour tous ses conseils avisés.
- Barbara DALENA pour ce stage des plus agréables et instructifs.
- Abele SIMONA pour avoir été un joyeux collègue plein de ressource.

Bibliographie

Fringe Fields Modeling for the High Luminosity LHC Large Aperture quadripôle,
B. Dalena et al.,
IPAC'14 Proceedings, TUPRO002, pdf

LIE ALGEBRAIC TREATMENT OF LINEAR AND NONLINEAR BEAM DYNAMICS,
Alex J. Dragt et al.,
Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1988.38 : 455-69.

Explicit symplectic integrator for s-dependent static magnetic field,
Y. K. Wu, E. Forest and D. S. Robin,
PHYSICAL REVIEW E 68, 046502, 13 October 2003

SixTrack Physics Manual,
R. De. Maria and M. Fjellstrom,
24 Mars 2015, pdf

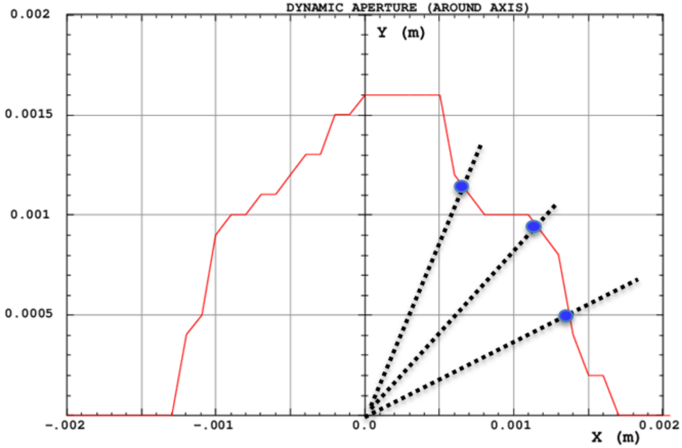
Lie Methods for Nonlinear Dynamics with Applications to Accelerator Physics,
Alex J. Dragt,
University of Maryland, College Park, pdf

Master Professionnel IMOI 2ième année : Cours Grands Systèmes Linéaires,
Pierre Puiseux,
Université de Pau et des Pays de l'Adour, pdf

Calcul du potentiel vecteur d'une carte de champ magnétique pour des études de dynamique à long terme,
Oleg Gabouev, Jacques Payet, Barbara Dalena,
Université de Reims, Champagne-Ardennes

Ouverture Dynamique du LHC

Zone du plan (x, y) pour laquel une particule est concidérée comme stable dans l'accélérateur.



Exemple du "Hard Edge"

- **"Vector Potential"**

$$A_x(x,y,z)=0, \qquad A_y(x,y,z)=0 \qquad \text{et} \qquad A_z(x,y,z)=-\frac{K_0}{2}\left(x^2-y^2\right) \qquad \text{avec} \qquad a(x,y,z)=q\frac{A(x,y,z)}{P_0 c}$$

- **Hamiltonien**

$$K\left[x,p_x,y,p_y,l,\delta,z,p_z;\sigma\right]\approx p_z+\frac{k_1}{2}\left(x^2-y^2\right)-\delta+\frac{p_x^2}{2\left(1+\delta\right)}+\frac{p_y^2}{2\left(1+\delta\right)}$$

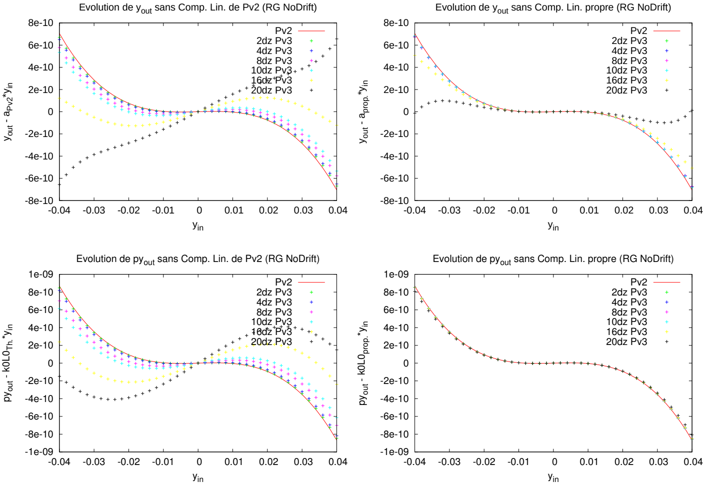
- **Schéma numérique** sur $\mathbf{q}=(x,y,l,z)$ et $\mathbf{p}=(p_x,p_y,\delta,p_z)$

$$\begin{array}{lcll}
\mathbf{q}^{i+1/7} & = & \mathbf{q}^{i} & + \left(0,\quad 0,\quad -\frac{\Delta\sigma}{2},\quad \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\\
\mathbf{q}^{i+2/7} & = & \mathbf{q}^{i+2/7} & + \left(0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right)\\
\mathbf{q}^{i+3/7} & = & \mathbf{q}^{i+1/7} & + \left(\frac{\Delta\sigma}{2}\frac{p_x^{i+1/7}}{(1+\delta)},\quad 0,\quad -\frac{\Delta\sigma}{2}\frac{(p_x^{i+1/7})^2}{2(1+\delta)^2},\quad 0\right)\\
\mathbf{q}^{i+4/7} & = & \mathbf{q}^{i+3/7} & + \left(0,\quad \Delta\sigma\frac{p_y^{i+3/7}}{(1+\delta)},\quad -\Delta\sigma\frac{(p_y^{i+3/7})^2}{2(1+\delta)^2},\quad 0\right)\\
\mathbf{q}^{i+5/7} & = & \mathbf{q}^{i+4/7} & + \left(\frac{\Delta\sigma}{2}\frac{p_x^{i+4/7}}{(1+\delta)},\quad 0,\quad -\frac{\Delta\sigma}{2}\frac{(p_x^{i+4/7})^2}{2(1+\delta)^2},\quad 0\right)\\
\mathbf{q}^{i+6/7} & = & \mathbf{q}^{i+5/7} & + \left(0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right)\\
\mathbf{q}^{i+1} & = & \mathbf{q}^{i+6/7} & + \left(0,\quad 0,\quad -\frac{\Delta\sigma}{2},\quad \frac{\Delta\sigma}{2}\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
\mathbf{p}^{i+1/7} & = & \mathbf{p}^{i} & + \left(0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right)\\
\mathbf{p}^{i+2/7} & = & \mathbf{p}^{i+1/7} & + \left(-\frac{\Delta\sigma}{2}k_1x^{i+1/7},\quad \frac{\Delta\sigma}{2}k_1y^{i+1/7},\quad 0,\quad 0\right)\\
\mathbf{p}^{i+3/7} & = & \mathbf{p}^{i+2/7} & + \left(0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right)\\
\mathbf{p}^{i+4/7} & = & \mathbf{p}^{i+3/7} & + \left(0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right)\\
\mathbf{p}^{i+5/7} & = & \mathbf{p}^{i+4/7} & + \left(0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right)\\
\mathbf{p}^{i+6/7} & = & \mathbf{p}^{i+5/7} & + \left(-\frac{\Delta\sigma}{2}k_1x^{i+5/7},\quad \frac{\Delta\sigma}{2}k_1y^{i+5/7},\quad 0,\quad 0\right)\\
\mathbf{p}^{i+1} & = & \mathbf{p}^{i+6/7} & + \left(0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right)
\end{array}$$

Variation de la taille du pas en z

Mesure continue (interpolation Rectangle Gauche des coefficients de A)



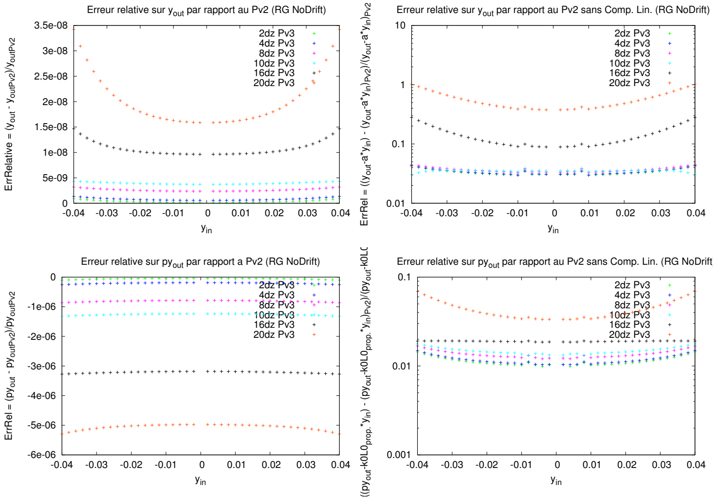
Des perturbations sur la partie non-linéaire de y apparaisent. (dz < 48 mm)

On a une modification de la partie linéaire de y et p_y. (Peut être corrigée)

Évolution de y (en haut) et de p_y (en bas) sortant en fonction de y entrant en moyennant avec une interpolation Rectangle gauche pour différentes tailles de pas (3mm pour Pv2 (Ref.), puis 6, 12, 24, 30, 48 et 60mm pour Pv3).

Variation de la taille du pas en z : les erreurs relatives

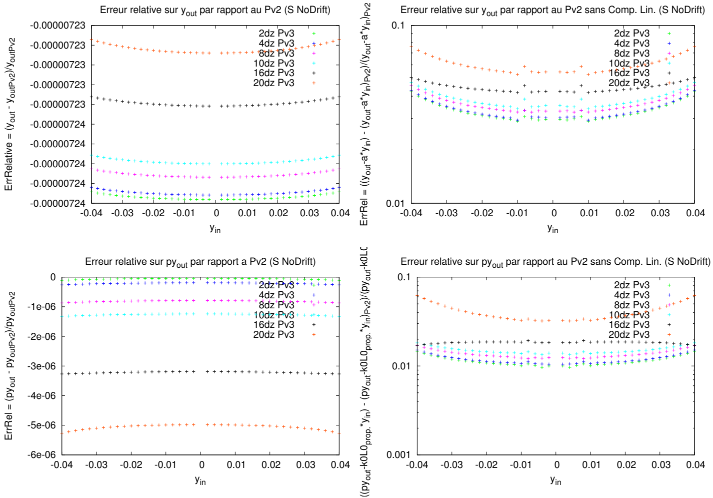
Mesure continue (interpolation Rectangle Gauche des coefficients de A)



Évolution de l'erreur relative sur y (en haut) et p_y (en bas) sortant en fonction de y entrant (Ref. 3mm pour Pv2) en moyennant avec une interpolation Rectangle Gauche pour différentes tailles de pas (6, 12, 24, 30, 48 et 60mm pour Pv3).

Variation de la taille du pas en z : les erreurs relatives

Mesure continue (interpolation Simpson des coefficients de A)



Évolution de l'erreur relative sur y (en haut) et p_y (en bas) sortant en fonction de y entrant (Ref. 3mm pour Pv2) en moyennant avec une interpolation Simpson pour différentes tailles de pas (6, 12, 24, 30, 48 et 60mm pour Pv3).

Drift, Kick et quadripôle

- Drift :

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_f = \begin{bmatrix} 1 & L_D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_i$$

- Kick :

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -K0 * L_Q & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_i$$

- Quadripôle "Thin" :

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_f = \begin{bmatrix} 1 & L_Q \\ -K0 * L_Q & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_i$$

- Quadripôle "Thick" :

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_f = \begin{bmatrix} cos(L_Q\sqrt{K_0}) & \frac{1}{\sqrt{K_0}} sin(L_Q\sqrt{K_0}) \\ -\sqrt{K_0} sin(L_Q\sqrt{K_0}) & cos(L_Q\sqrt{K_0}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}_i$$