

Modélisation 3D de supraconducteurs à hautes températures

MAKONG HELL Ludovic

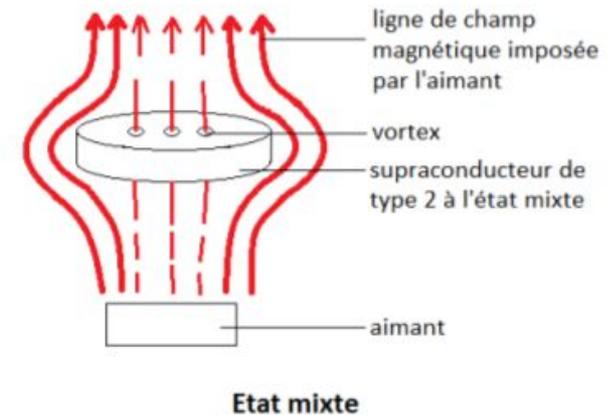
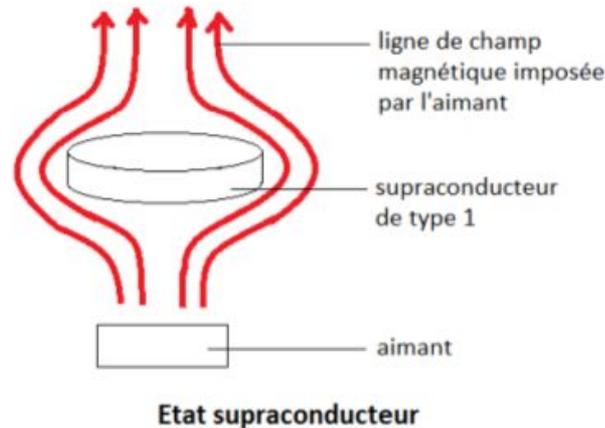
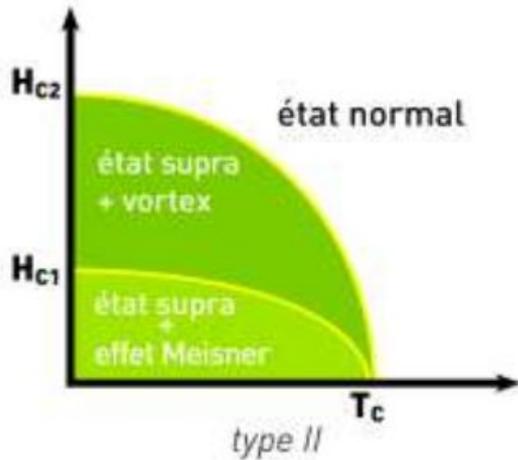
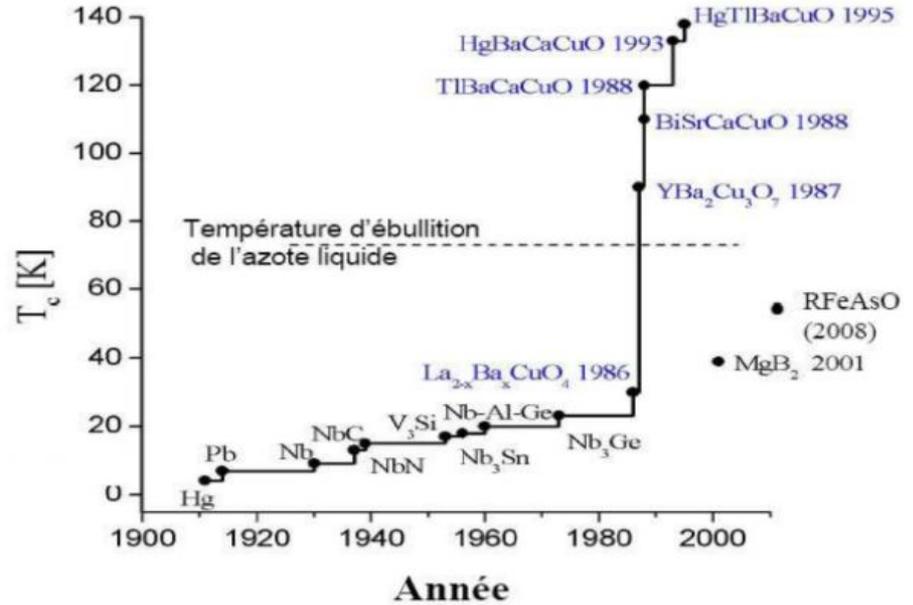
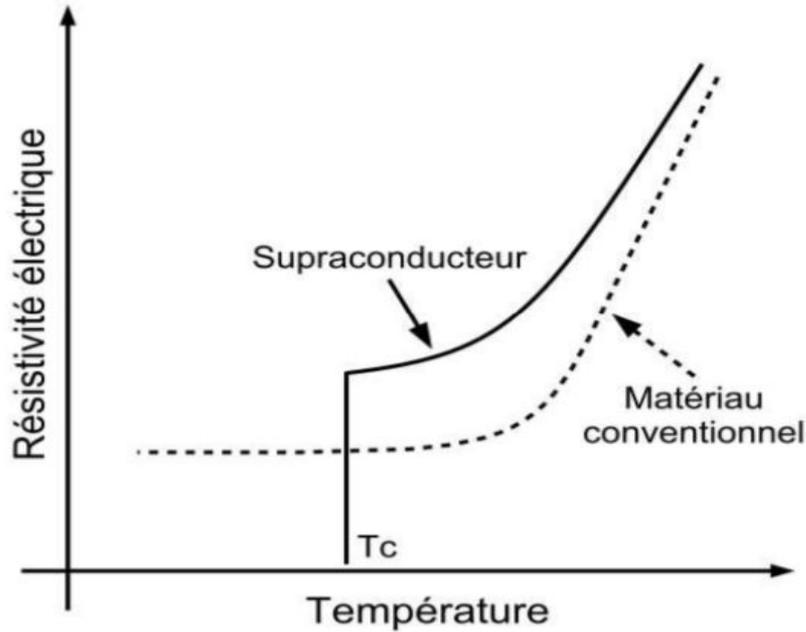
02 Decembre 2016

Directeur de Thèse : BOUILLAULT Frederic

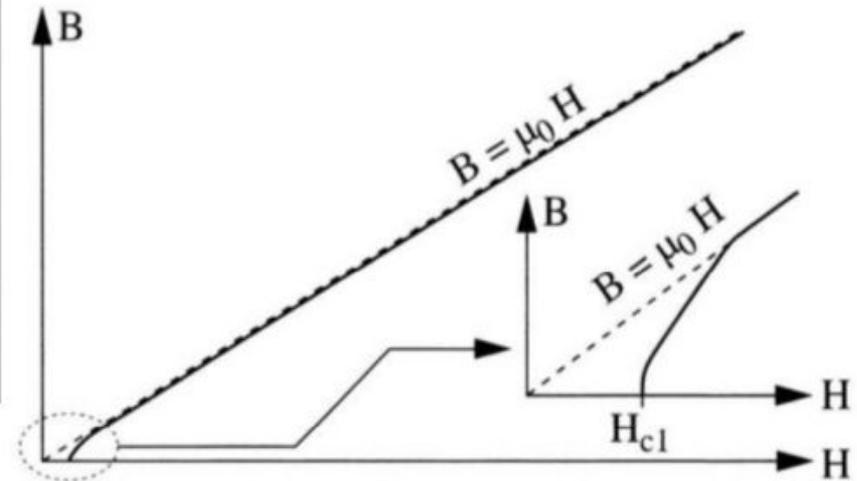
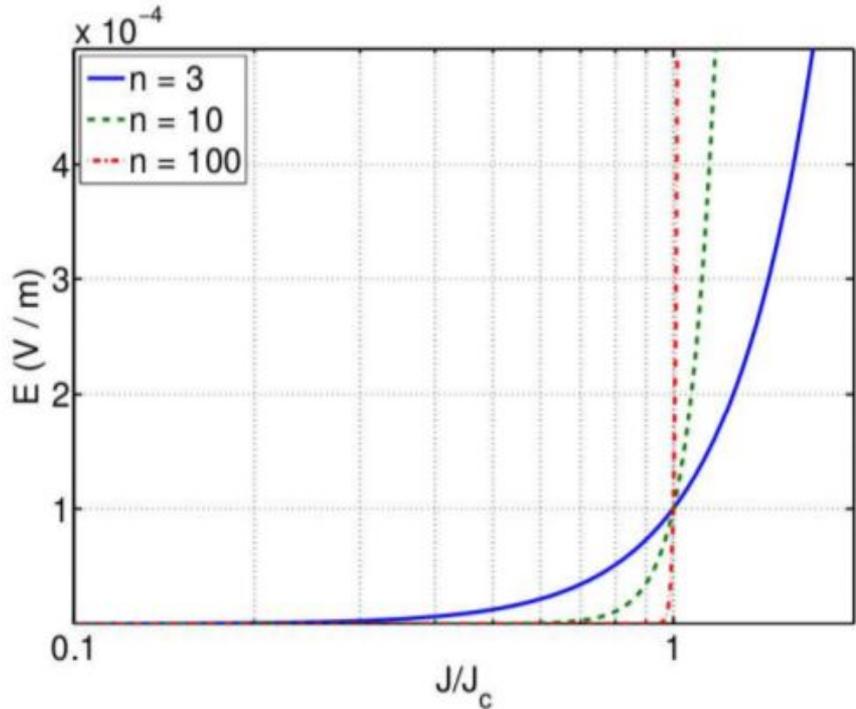
Co-directeur de Thèse : MASSON Philippe

Encadrant de Thèse : KAMENI Abelin

Supraconducteurs et applications

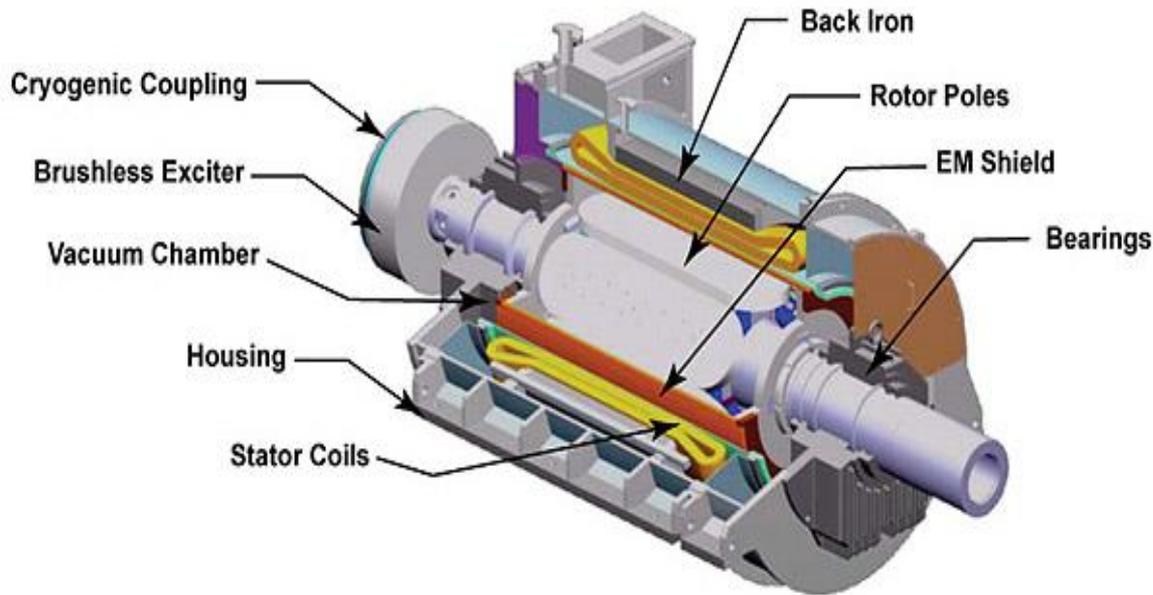


• Supraconducteurs et applications

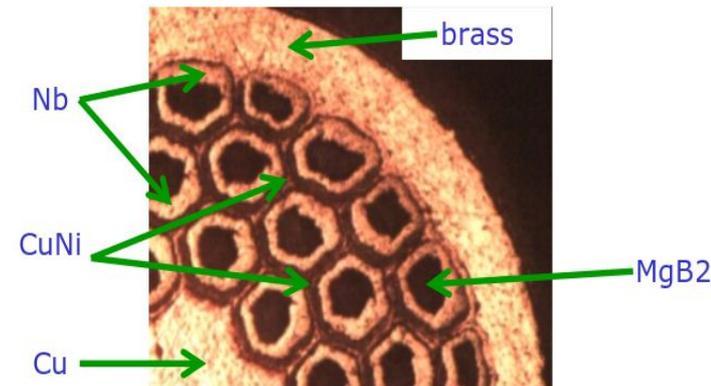
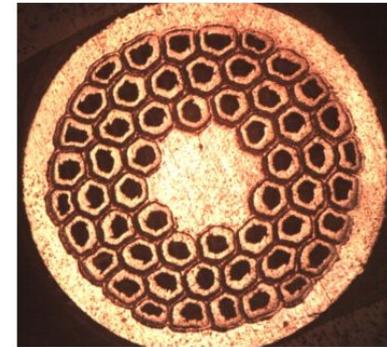


- Loi puissance non-linéaire caractérisant le comportement électrique $\mathbf{E} = \rho_s \mathbf{J}$ avec $\rho_s = (E_c/J_c) \|\mathbf{J}/J_c\|^{n-1}$
- Loi linéaire caractérisant le comportement magnétique $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

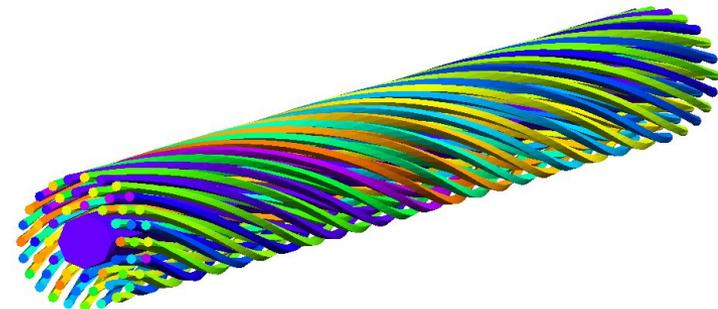
• Supraconducteurs et applications



Conceptual cutaway view of a superconducting field machine (American Superconducting Co.)



- Pas de torsade : **25 mm**
- Rayon filament : **36 microns**
- Rayon matrice : **0.2 mm**



- **Problématique : Modéliser en 3D des supraconducteurs pour calculer effectivement les pertes AC**

Objectif - 1: Développer des méthodes numériques robustes et rapides pour cette modélisation

Objectif - 2: Développer une approche pour simplifier le problème de modélisation 3D des cables supraconducteurs à multi-filaments torsades

• Formulation mathématique - différentielle

Definition du domaine d'étude Ω

- $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_{ns}$ où Ω_s et Ω_{ns} représentent les domaines supra et non-supra
- Resistivité $\rho = \begin{cases} \rho_s & \text{in } \Omega_s \\ \rho_{ns} & \text{in } \Omega_{ns} \end{cases}$
- ρ_{ns} est constant et $\rho_s = (E_c/J_c) \|\mathbf{J}/J_c\|^{n-1}$ où E_c et J_c représentent le champ électrique et la densité de courant critique du domaine supraconducteur.

Formulation différentielle en \mathbf{H}

$$\begin{cases} \partial \mathbf{H} / \partial t + \text{rot}(c \cdot \text{rot} \mathbf{H}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega \text{ où } c = \rho / \mu_0 \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_a & \text{sur } \Gamma = \partial \Omega \end{cases}$$

- \mathbf{H} est le champ magnétique du domaine Ω
- \mathbf{H}_a est le champ magnétique appliqué sur le bord $\Gamma = \partial \Omega$

Méthodes numériques

- Méthode Elements finis (**MEF**) implémentée sur **GetDP**
- Méthode Galerkin Discontinue (**DG**)

• Formulations mathématique - variationnelle

Définition du Maillage \mathcal{T}_h

- $\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ où K sont des éléments tétraédriques ou hexaédriques de taille h_K .
- $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_{ns} \Rightarrow \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{h,s} \cup \mathcal{T}_{h,ns}$
- $\Gamma_h^{\mathcal{I}}$ et $\Gamma_h^{\mathcal{B}}$: ensembles des faces intérieures et des faces extérieures du maillage.
- $\Gamma_h = \Gamma_h^{\mathcal{I}} \cup \Gamma_h^{\mathcal{B}}$: ensemble de toutes les faces du maillage.

Définition des espaces

- Méthode éléments finis (**MEF**) implémentée sur **GetDP**
 $H(\text{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3 : \text{rot} \mathbf{v} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3 \}$
 $\mathbf{V}^h = \{ \mathbf{v} \in H(\text{rot}; \Omega) : \mathbf{v}|_K \in (\mathbb{P}^1(K))^3, K \in \mathcal{T}_h \} \Rightarrow$ Projection sur les éléments d'arêtes
- Méthode Galerkin Discontinue (**DG**)
 $\mathbf{W}^h = \{ \mathbf{w} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3 : \mathbf{w}|_K \in (\mathbb{P}^m(K))^3, K \in \mathcal{T}_h \} \Rightarrow$ Projection sur les noeuds

• Formulations mathématique - variationnelle

Définition des espaces

- Méthode éléments finis (**MEF**) implémentée sur **GetDP**

$$H(\text{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3 : \text{rot} \mathbf{v} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3 \}$$

$$\mathbf{V}^h = \{ \mathbf{v} \in H(\text{rot}; \Omega) : \mathbf{v}|_K \in (\mathbb{P}^1(K))^3, K \in \mathcal{T}_h \} \implies \text{Projection sur les éléments d'arêtes}$$

- Méthode Galerkin Discontinue (**DG**)

$$\mathbf{W}^h = \{ \mathbf{w} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3 : \mathbf{w}|_K \in (\mathbb{P}^m(K))^3, K \in \mathcal{T}_h \} \implies \text{Projection sur les noeuds}$$

Formulation variationnelle

- Trouver $\mathbf{H} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3$ tel que **(P)** : $B_t(\mathbf{H}, \varphi) + A(\mathbf{H}, \varphi) = 0, \forall \varphi \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3$

$$\text{où } B_t(\mathbf{H}, \varphi) = \int_{\Omega} \partial \mathbf{H} / \partial t \cdot \varphi d\Omega \text{ et } A(\mathbf{H}, \varphi) = \int_{\Omega} \text{rot}(c \cdot \text{rot} \mathbf{H}) \cdot \varphi d\Omega.$$

- Après la discrétisation, **(P)** devient **(P_h)** : $B_{t,h}(\mathbf{H}, \varphi) - A_h(\mathbf{H}, \varphi) = 0$

$$\text{où } A_h(\mathbf{H}, \varphi) = \mathbf{I}_{v,h} + \mathbf{I}_{b,h}$$

Note : $\mathbf{I}_{v,h}$ et $\mathbf{I}_{b,h}$ représentent les termes de volume et de bord ou d'interface.

• Formulations mathématique - variationnelle - MEF

Formulation variationnelle - MEF

Trouver $\mathbf{H} \in \mathbf{V}^h$ tel que : $B_t(\mathbf{H}, \varphi) + A(\mathbf{H}, \varphi) = 0, \forall \varphi \in \mathbf{V}^h$

Expression initiale de $A(\mathbf{H}, \varphi)$

$$\int_{\Omega} \mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H} \cdot \text{rot} \varphi d\Omega - \int_{\Gamma} ((\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{n}) \cdot \varphi d\Gamma \text{ où } \text{rot} \mathbf{H}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$$

Ajout de termes pour imposer les conditions de Dirichlet

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \varphi d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_a) \cdot \boldsymbol{\lambda}' dA \text{ avec } (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}') \in \mathbf{V}^h \times \mathbf{V}^h \text{ les coefficients de Lagrange.}$$

Expression finale de $A(\mathbf{H}, \varphi)$

$$\int_{\Omega} \mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H} \cdot \text{rot} \varphi d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \varphi d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_a) \cdot \boldsymbol{\lambda}' dA$$

• Formulations mathématique - variationnelle - MEF

Expression finale de $A(\mathbf{H}, \varphi)$

$$\int_{\Omega} \mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H} \cdot \text{rot} \varphi d\Omega + \int_{\Gamma} \lambda \cdot \varphi d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_a) \cdot \lambda' dA$$

Linearisation de la loi de comportement électrique $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$

- $\mathbf{E}(\mathbf{J}^k) = \mathbf{E}(\mathbf{J}^{k-1}) + \overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot (\mathbf{J}^k - \mathbf{J}^{k-1})$ avec $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = A_{ij} = \partial E_i / \partial J_j$ où $i, j = 1, 2$ et 3 .

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{(n-1)E_c}{J_c^n} J_i^2 \|\mathbf{J}\|^{n-3} + \frac{E_c}{J_c^n} \|\mathbf{J}\|^{n-1}, & i = j \text{ in } \Omega_s \\ \frac{(n-1)E_c}{J_c^n} J_i J_j \|\mathbf{J}\|^{n-3} & , i \neq j \text{ in } \Omega_s \\ \rho_{ns} & , i = j \text{ in } \Omega_{ns} \\ 0 & , i \neq j \text{ in } \Omega_{ns} \end{cases}$$

Implémentation dans $A(\mathbf{H}, \varphi)$

$$\int_{\Omega} \mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H} \cdot \text{rot} \varphi d\Omega \approx \int_{\Omega} \mathbf{c}^{k-1} \cdot \text{rot} \mathbf{H}^{k-1} \cdot \text{rot} \varphi d\Omega + \mu_0^{-1} \int_{\Omega} (\overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot (\text{rot} \mathbf{H}^k - \text{rot} \mathbf{H}^{k-1})) \cdot \text{rot} \varphi d\Omega$$

• Formulations mathématique - variationnelle - DG

Formulation variationnelle - DG

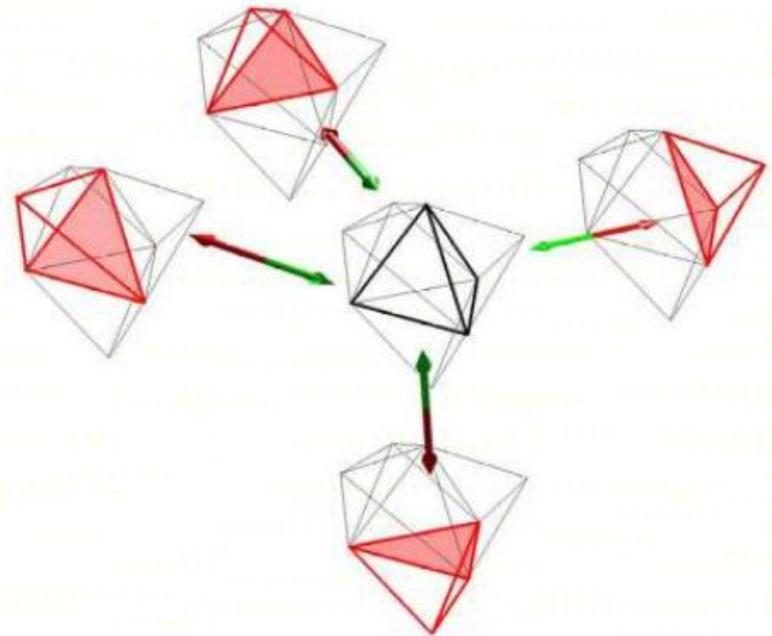
Trouver $\mathbf{H} \in \mathbf{W}^h$ tel que :
 $B_{t,h}(\mathbf{H}, \varphi) + A_h(\mathbf{H}, \varphi) = 0, \forall \varphi \in \mathbf{W}^h$.

Principe de DG

- Approche **MEF** locale sur les termes de volumes des éléments
- Approche **Volumes finies** locale sur les termes d'interfaces des éléments

Expression de $A_h(\mathbf{H}, \varphi) = I_{v,h}^{DG} + I_{b,h}^{DG}$

- $I_{v,h}^{DG} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H} \cdot \text{rot} \varphi dK$
- $I_{b,h}^{DG} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} ((\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{n}) \cdot \varphi dA$



Calcul semi-implicite (linéarisation de la loi puissance) ou **Calcul explicite** de \mathbf{c}

• Formulations mathématique - variationnelle - DG

Terme d'interface équivalent - $\mathbf{I}_{f,h}^{DG} \equiv \mathbf{I}_{b,h}^{DG}$

$$-\sum_{f \in \Gamma_h} \int_f [\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}] \cdot \{c \cdot \text{rot} \mathbf{H}\} dA - \sum_{f \in \Gamma_h} \int_f [\mathbf{H} \times \mathbf{n}] \cdot \{c \cdot \text{rot} \boldsymbol{\varphi}\} dA + \sum_{f \in \Gamma_h} \int_f \mathbf{a} \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}] dA$$

Notes

- $\{.\}$ et $[.]$ représentent les moyennes et saut aux interfaces.
- $f = \partial K \cap \partial K'$ (ou $f = \partial K \cap \Gamma$), $\mathbf{a}|_f = \alpha m \mathbf{h}$ où $\alpha = 0.35$, $m = \max(c_K, c_{K'})$ (ou $m = c_K$), et $h = \max(h_K, h_{K'})$ (ou $h = h_K$).

Autre expression de $\mathbf{I}_{f,h}^{DG}$

Sachant que : $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, on obtient :

$$\sum_{f \in \Gamma_h} \int_f [\boldsymbol{\varphi}] \cdot \{(\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{n}\} dA + \sum_{f \in \Gamma_h} \int_f [(\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{n}] \cdot \{\boldsymbol{\varphi}\} dA - \sum_{f \in \Gamma_h} \int_f \mathbf{a} \cdot [\boldsymbol{\varphi}] \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H} \times \mathbf{n}] dA$$

• Formulations mathématique - variationnelle - DG

Autre expression de $\mathbf{I}_{f,h}^{DG}$

Sachant que : $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, on obtient :

$$\sum_{f \in \Gamma_h} \int_f [\varphi] \cdot \{(\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{n}\} dA + \sum_{f \in \Gamma_h} \int_f [(\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{n}] \cdot \{\varphi\} dA - \sum_{f \in \Gamma_h} \int_f \mathbf{a} \cdot [\varphi] \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H} \times \mathbf{n}] dA$$

Passage de l'opérateur « rot-rot » à l'opérateur « div »

- $\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H} = (A_x, A_y, A_z)$ où $\mathbf{F}_1 = (0, A_z, -A_y)$, $\mathbf{F}_2 = (-A_z, 0, A_x)$, $\mathbf{F}_3 = (A_y, -A_x, 0)$.
- $\text{rot}(\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H}) = (\text{div} \mathbf{F}_1, \text{div} \mathbf{F}_2, \text{div} \mathbf{F}_3)$
- $(\mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n})$

Terme d'interface équivalent $\mathbf{I}_{f,h}^{DG} \equiv \mathbf{I}_{b,h}^{DG}$ en flux numérique

$$\sum_{f \in \Gamma_h} \sum_{i=1}^3 \int_f [\varphi_i] \cdot \{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}\} dA + \sum_{f \in \Gamma_h} \sum_{i=1}^3 \int_f [\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}] \cdot \{\varphi_i\} dA - \sum_{f \in \Gamma_h} \int_f \mathbf{a} \cdot [\varphi] \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H} \times \mathbf{n}] dA$$

Terme de volume équivalent $\mathbf{I}_{v,h}^{DG}$ en flux

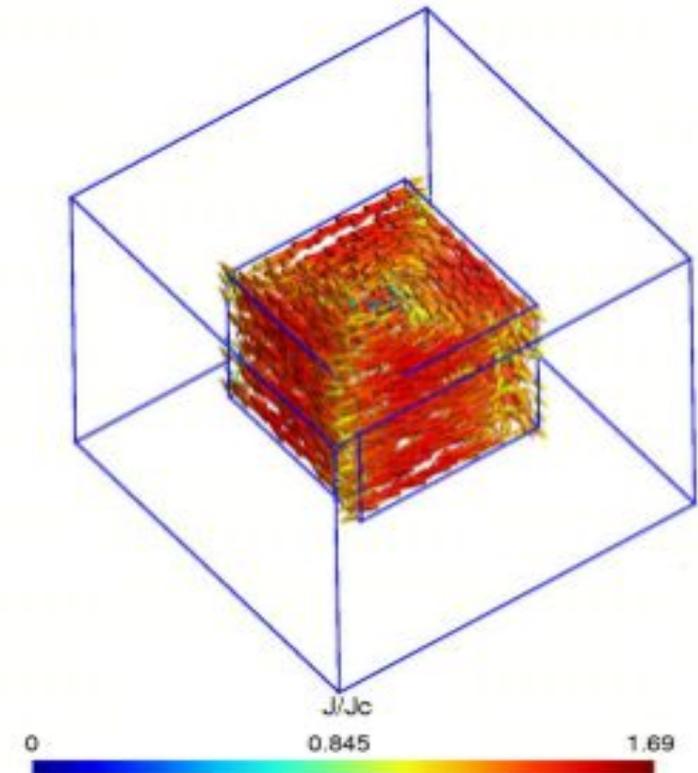
$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{c} \cdot \text{rot} \mathbf{H} \cdot \text{rot} \varphi dK = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \int_K \mathbf{F}_i \cdot \text{grad} \varphi_i dK$$

• Application et comparaison MEF - DG

Cube supraconducteur	
Longueur du coté (m)	$2 \cdot 10^{-3}$
Champ électrique critique $E_c (V/m)$	10^{-4}
Densité de courant critique $J_c (A/m^2)$	10^8
n	10
Air	
Longueur du coté (m)	$4 \cdot 10^{-3}$
Résistivité $\rho_{ns,a} (\Omega \cdot m)$	10^{-3}
$B_{max} (T)$	0.1
fréquence $f (Hz)$	50
$\mathbf{B}_a = B_{max} \sin(2\pi ft) \mathbf{e}_y$	

Notes sur les calculs

- Calcul non-parallèle en **2h – 3h** environ jusqu'à **T** avec **MEF**.
- Calcul parallèle en **1h – 2h** environ jusqu'à **T** avec **DG** : 32 processeurs de 2Go chacun.

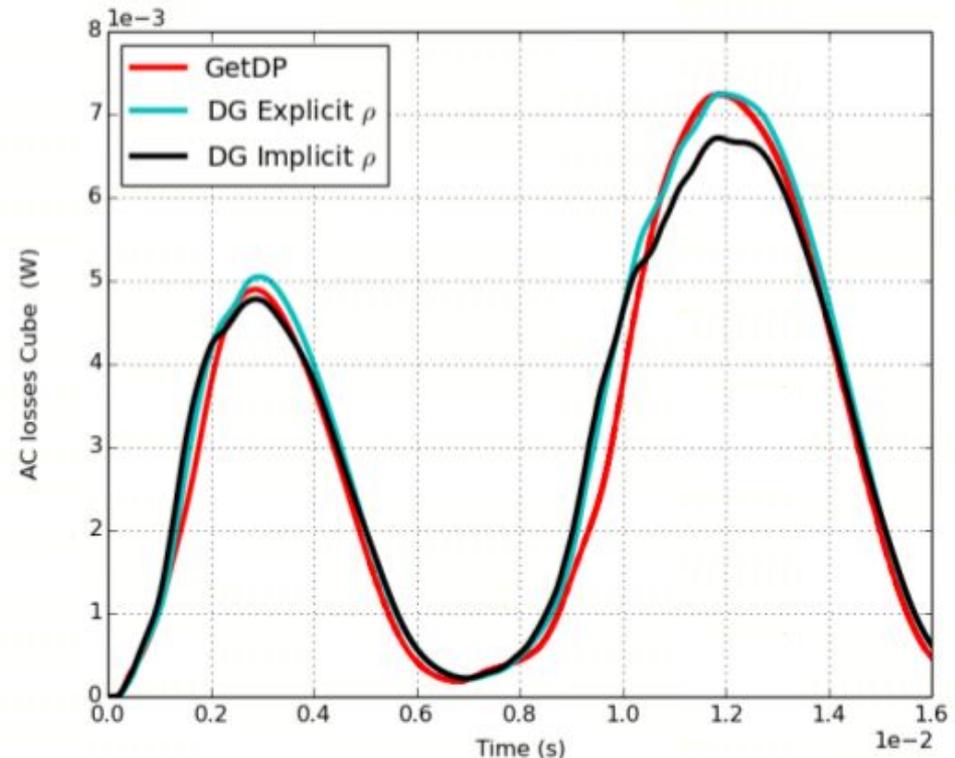


• Application et comparaison MEF - DG

Cube supraconducteur	
Longueur du coté (m)	$2 \cdot 10^{-3}$
Champ électrique critique E_c (V/m)	10^{-4}
Densité de courant critique J_c (A/m ²)	10^8
n	10
Air	
Longueur du coté (m)	$4 \cdot 10^{-3}$
Résistivité $\rho_{ns,a}$ ($\Omega \cdot m$)	10^{-3}
B_{max} (T)	0.1
fréquence f (Hz)	50
$\mathbf{B}_a = B_{max} \sin(2\pi ft) \mathbf{e}_y$	

Notes sur les calculs

- Calcul non-parallèle en **2h – 3h** environ jusqu'à **T** avec **MEF**.
- Calcul parallèle en **1h – 2h** environ jusqu'à **T** avec **DG** : 32 processeurs de 2Go chacun.



• Formulations et applications

Definition du domaine d'étude Ω

- $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_{ns}$ où Ω_s et Ω_{ns} représentent les domaines supra et non-supra
- Resistivité $\rho = \begin{cases} \rho_s & \text{in } \Omega_s \\ \rho_{ns} & \text{in } \Omega_{ns} \end{cases}$
- ρ_{ns} est constant et $\rho_s = (E_c/J_c) \|\mathbf{J}/J_c\|^{n-1}$ où E_c et J_c représentent le champ électrique et la densité de courant critique du domaine supraconducteur.

Formulation différentielle en \mathbf{H}

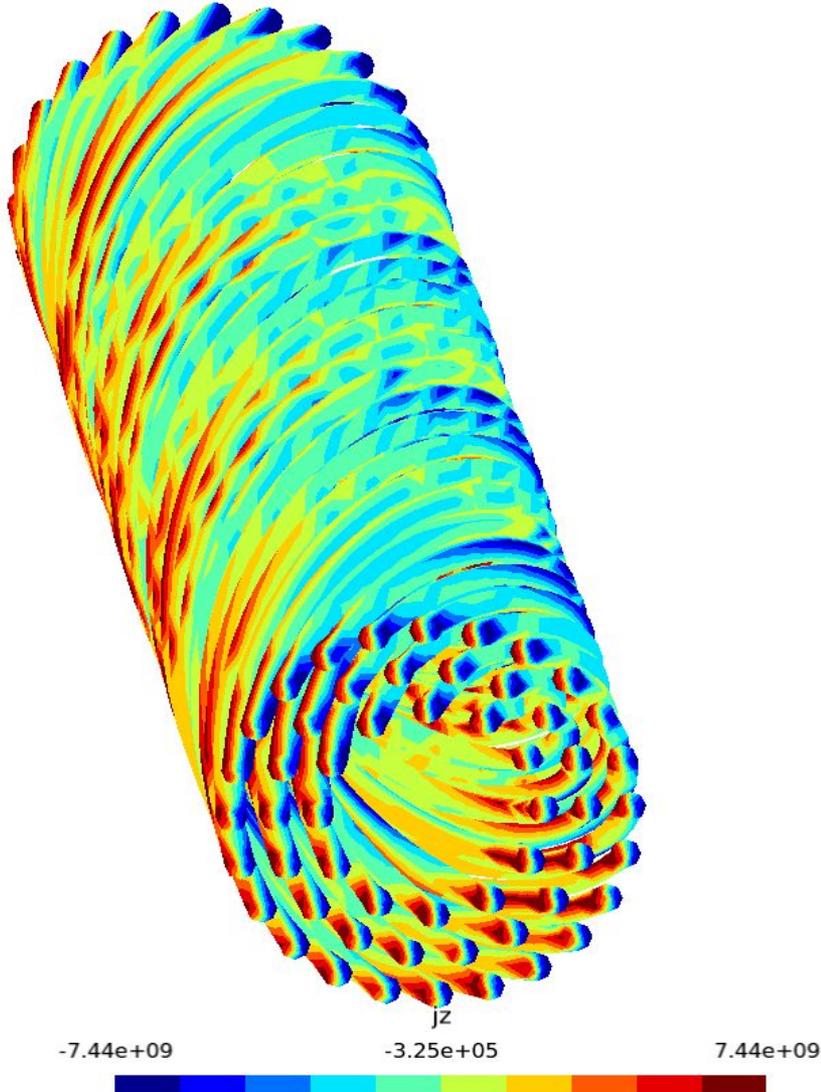
$$\begin{cases} \partial \mathbf{H} / \partial t + \text{rot}(c \cdot \text{rot} \mathbf{H}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega \text{ où } c = \rho / \mu_0 \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_a & \text{sur } \Gamma = \partial \Omega \end{cases}$$

- \mathbf{H} est le champ magnétique du domaine Ω
- \mathbf{H}_a est le champ magnétique appliqué sur le bord $\Gamma = \partial \Omega$

Méthodes numériques

- Méthode Elements finis (MEF) implémentée sur **GetDP**
- Méthode Galerkin Discontinue (DG)

- **Applications aux cas de cables multi-filamentaires**



- Géométrie complexe si filaments torsadés = Maillage complexe pour des cables à pas de torsades multiples.

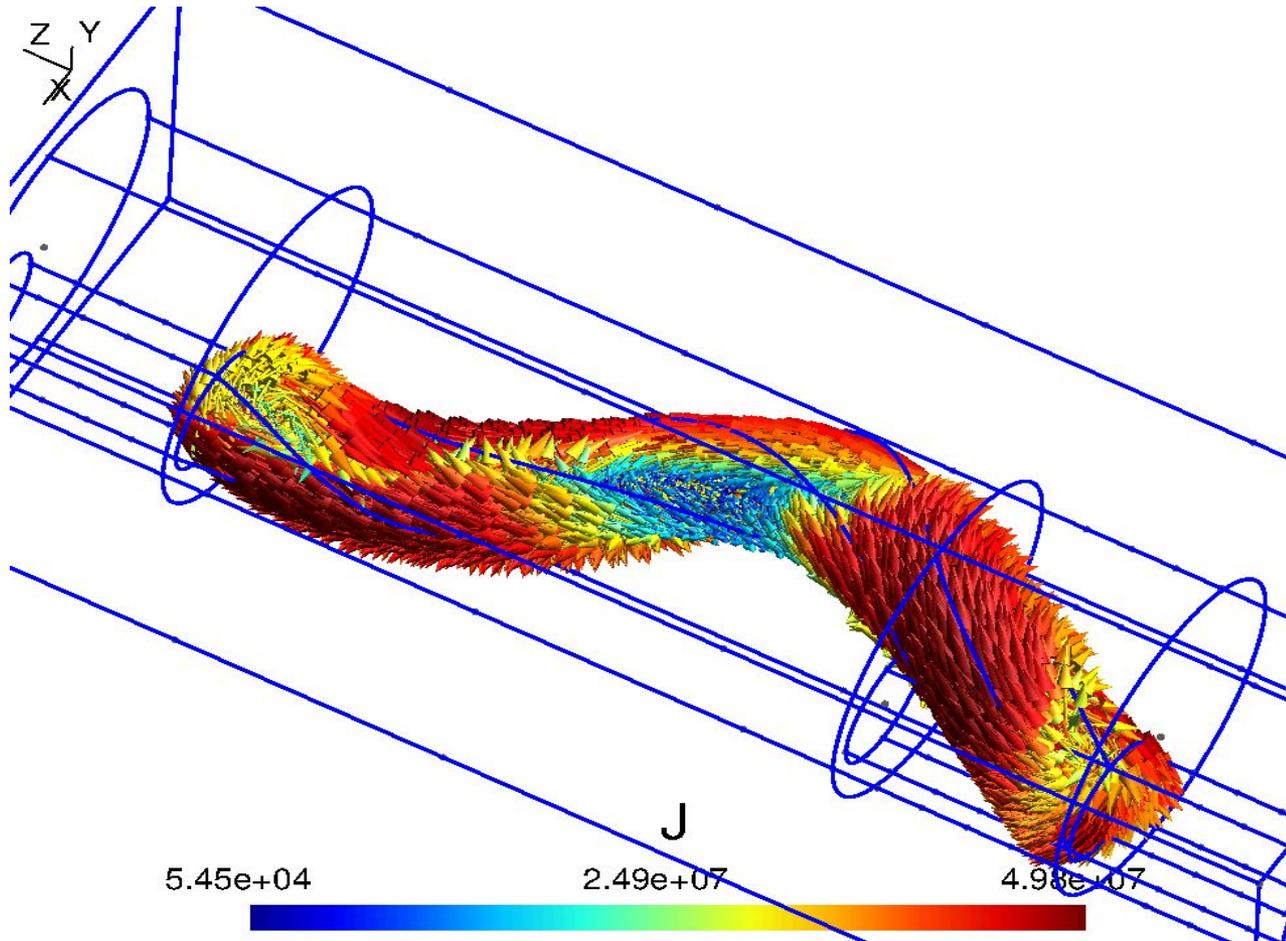
- Difficulté pour imposer naturellement des conditions de périodicité aux extrémités du cable.

- **Applications aux cas de cables multi-filamentaires**

Objectif : Trouver une configuration/méthode permettant de **simplifier le problème 3D** caractéristique des supraconducteurs multi-filamentaires.

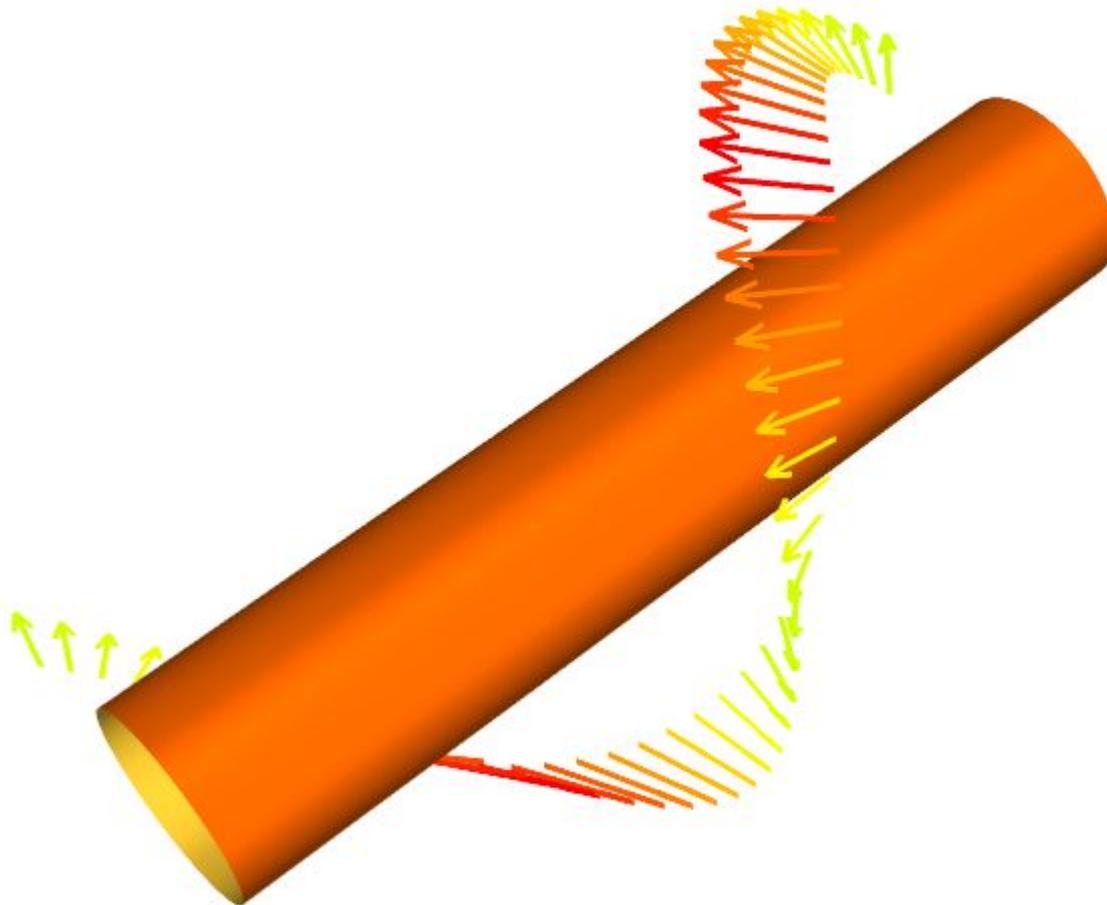
Idée : modéliser uniquement des multifilaments droits
(**Avantage:** condition de périodicité applicable)

- Formulations et applications**



- 2 boucles de courant au lieu d'une seule boucle =>
le filament ne voit pas le champ uniquement suivant y

- **Formulation** : champ transverse selon y devient hélicoïdal dans le repère liée à la transformation hélicoïdale



- **Formulation**

$$\mathbf{H}_{[T,N,K]} = \begin{bmatrix} -a \cdot \sin(\theta) & a \cdot \cos(\theta) & b \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -b \cdot \sin(\theta) & b \cdot \cos(\theta) & -a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}_{[x,y,z]}$$

$$a = r/L, b = c/L \text{ et } \theta = z/c \text{ avec } c = p/2\pi, L^2 = r^2 + c^2.$$

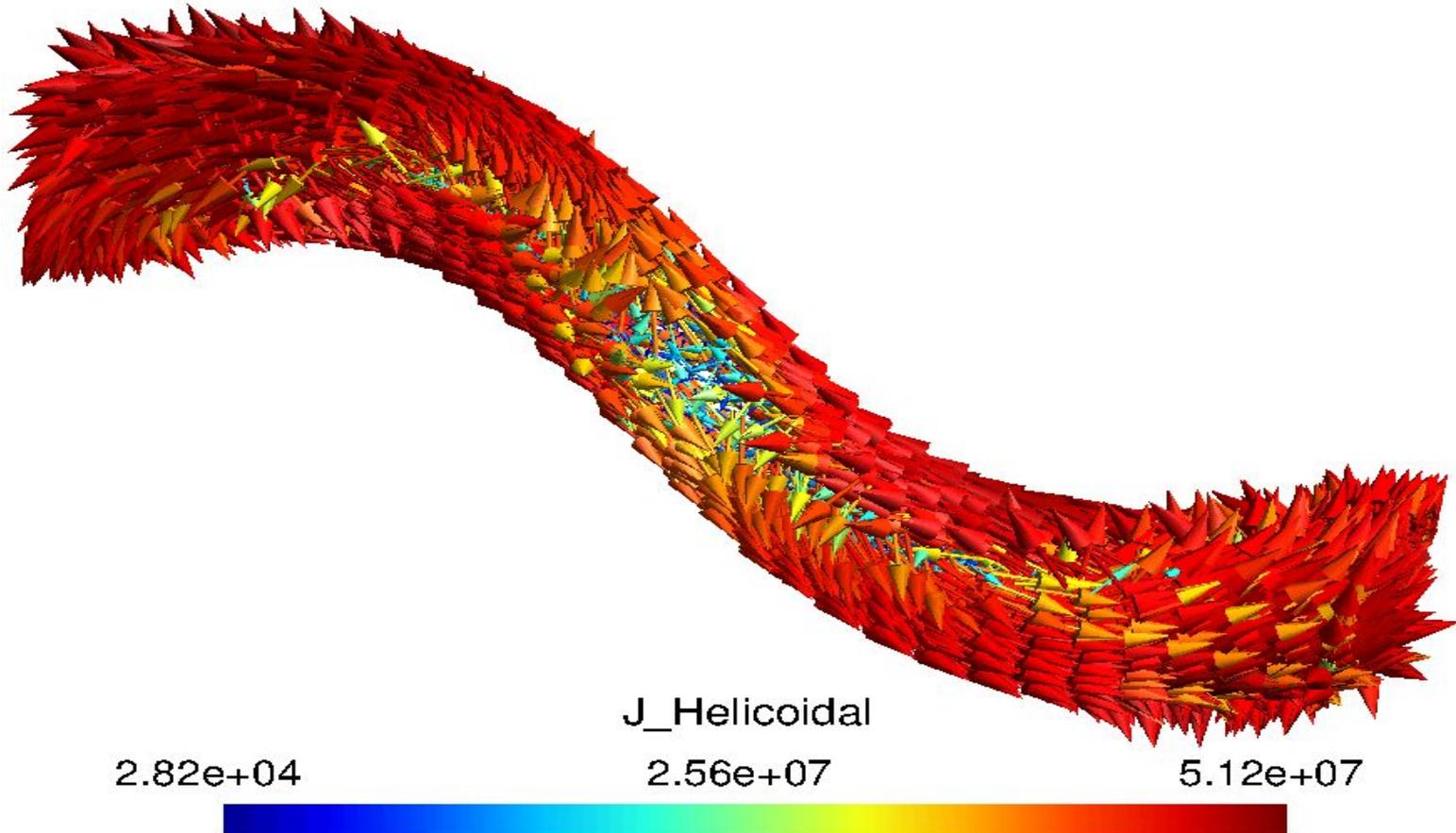
p le pas de torsadage et r le rayon extérieur de l'hélice.

- Passage au repère local (repère de Frenet) lié à la transformation helicoidale

- Le champ appliqué suit la trajectoire helicoidale due au torsadage

- Les filaments deviennent droits dans ce repère

- **Formulation**

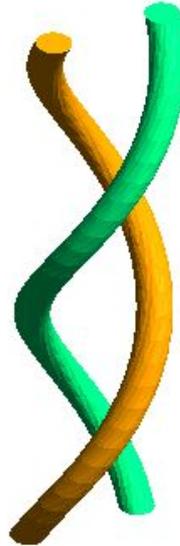


- Une champ helicoidal => **Une boucle de courant dans le repère local** - Equivalent a un filament droit + champ transverse

- **Etude paramétrique sur $p = 2,4,6,8$ et 10 mm**

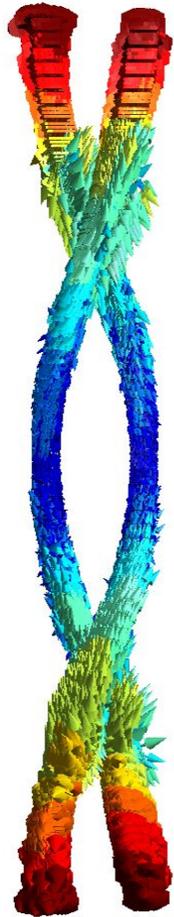
2 superconducting filaments

rayon(μm)	60
Critical current density (A/mm^2)	5
n	10
matrice de Niobium	
rayon(mm)	0.4
Conductivite (S/m)	6E+09
B = $B_{\text{max}} \cdot \sin(2\pi f)$, $f=50\text{Hz}$	
Resistivity ($\text{n}\Omega \cdot \text{m}$)	140



- filaments torsades avec champ transverse - **repère global**
- filaments droits avec champ hélicoïdal (image du champ transverse en local) - **repère local**
- **Comparaison des pertes AC**
- **Etude pour $B_{\text{max}}=0.1\text{T}$ puis pour $B_{\text{max}}=0.05\text{T}$**

- **Distribution du courant - $p=4\text{mm}$ pour $B_{\text{max}}=0.1\text{ T}$ (champ suivant x) - $t=T/2$**



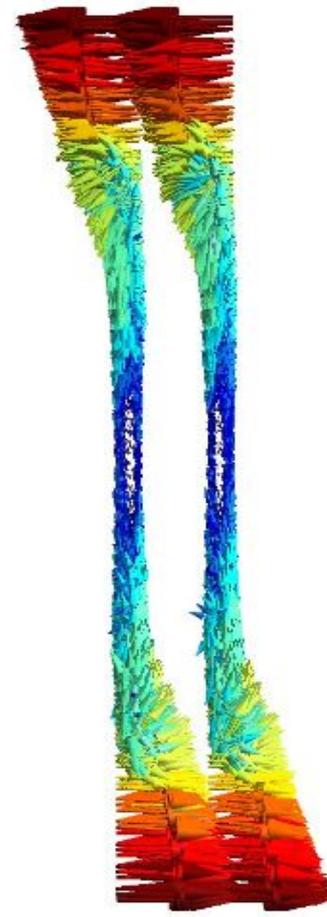
J_Cartésien

4.13e+03

4.18e+06

8.35e+06

Z
X | Y



J_Helicoidal

1.28e+03

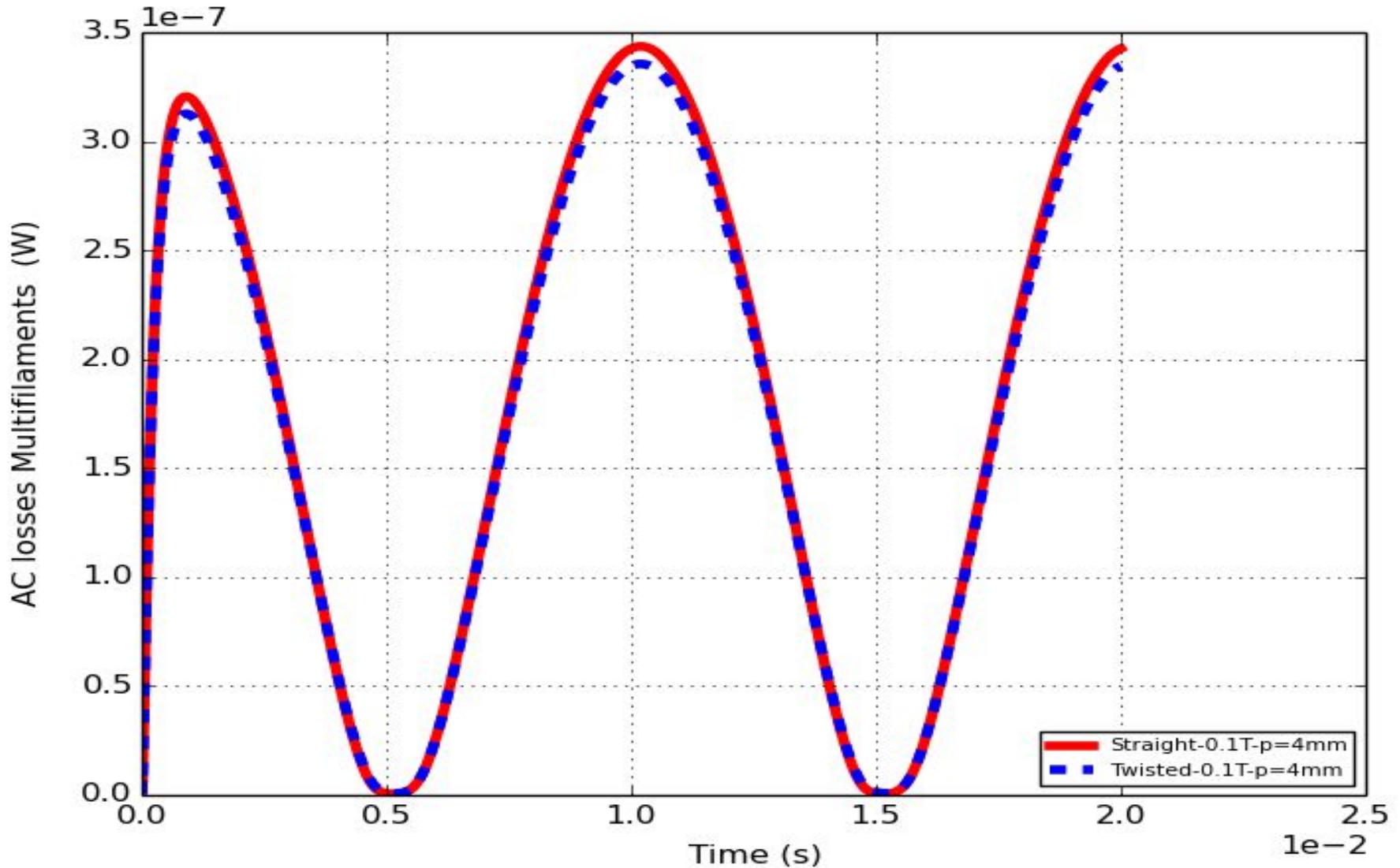
4.3e+06

8.59e+06

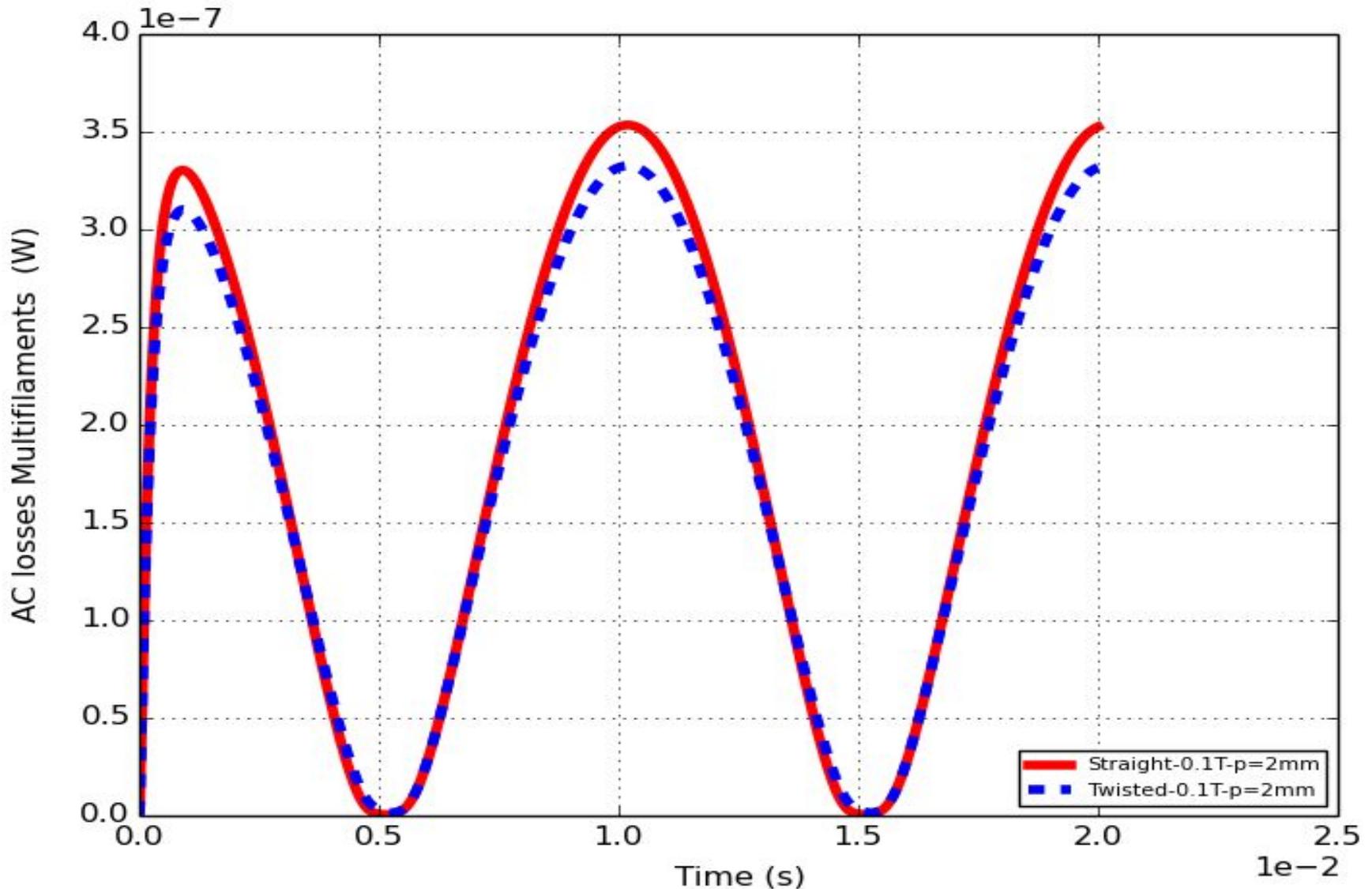
T
-N | K



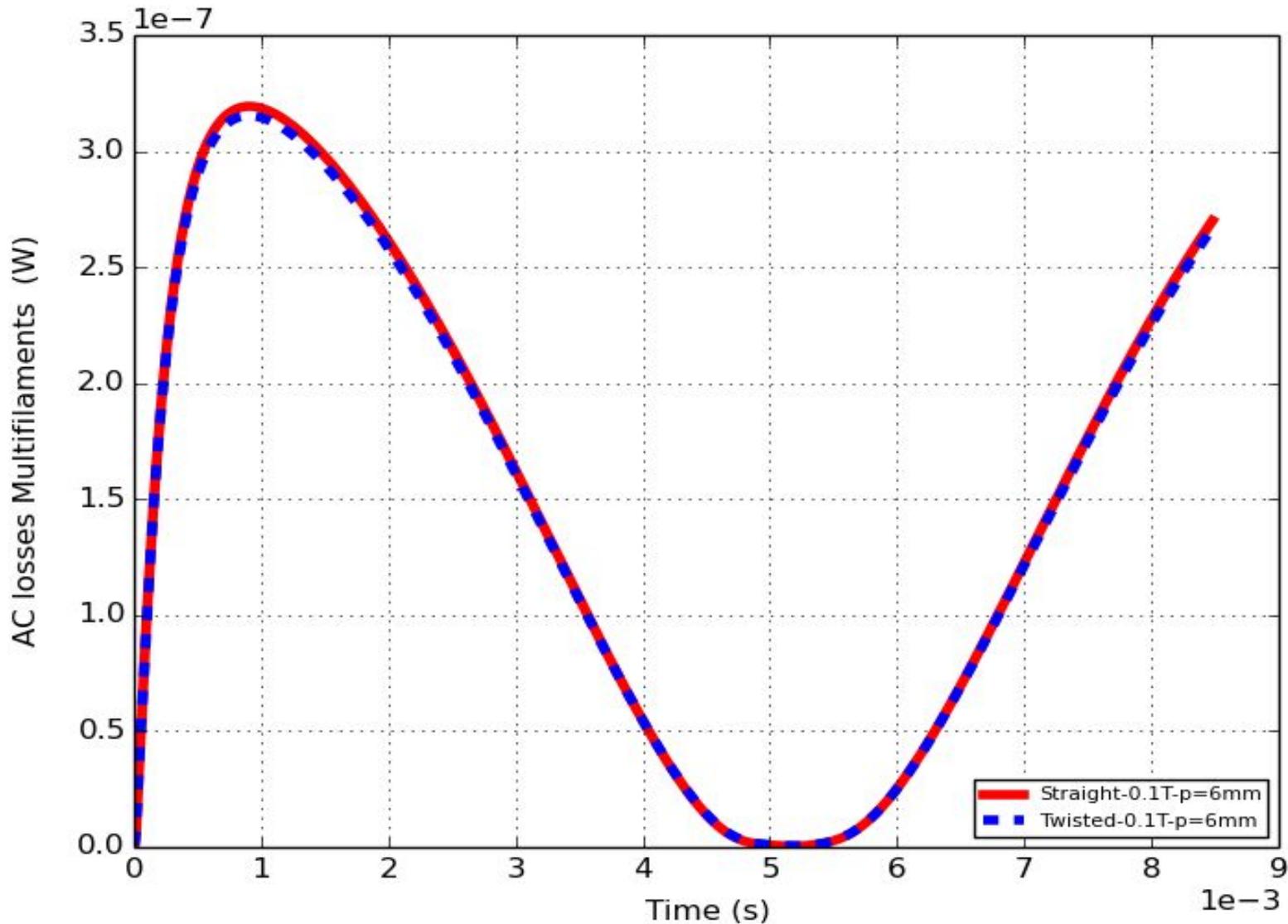
- Etude paramétrique sur p : $B_{max}=0.1$ T pour $p=4$ mm



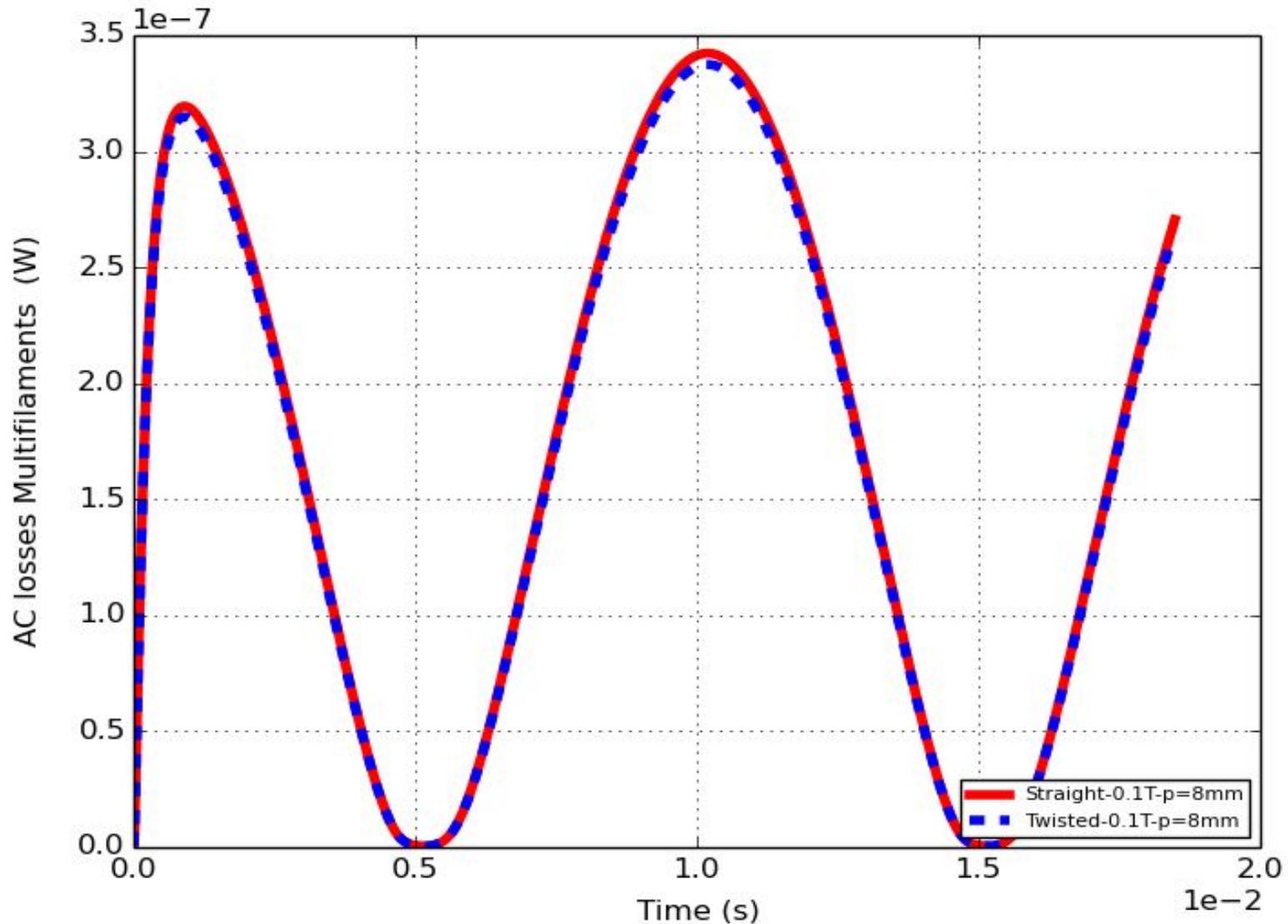
- **Etude paramétrique sur p : $B_{max} = 0.1$ T pour $p=2$ mm**



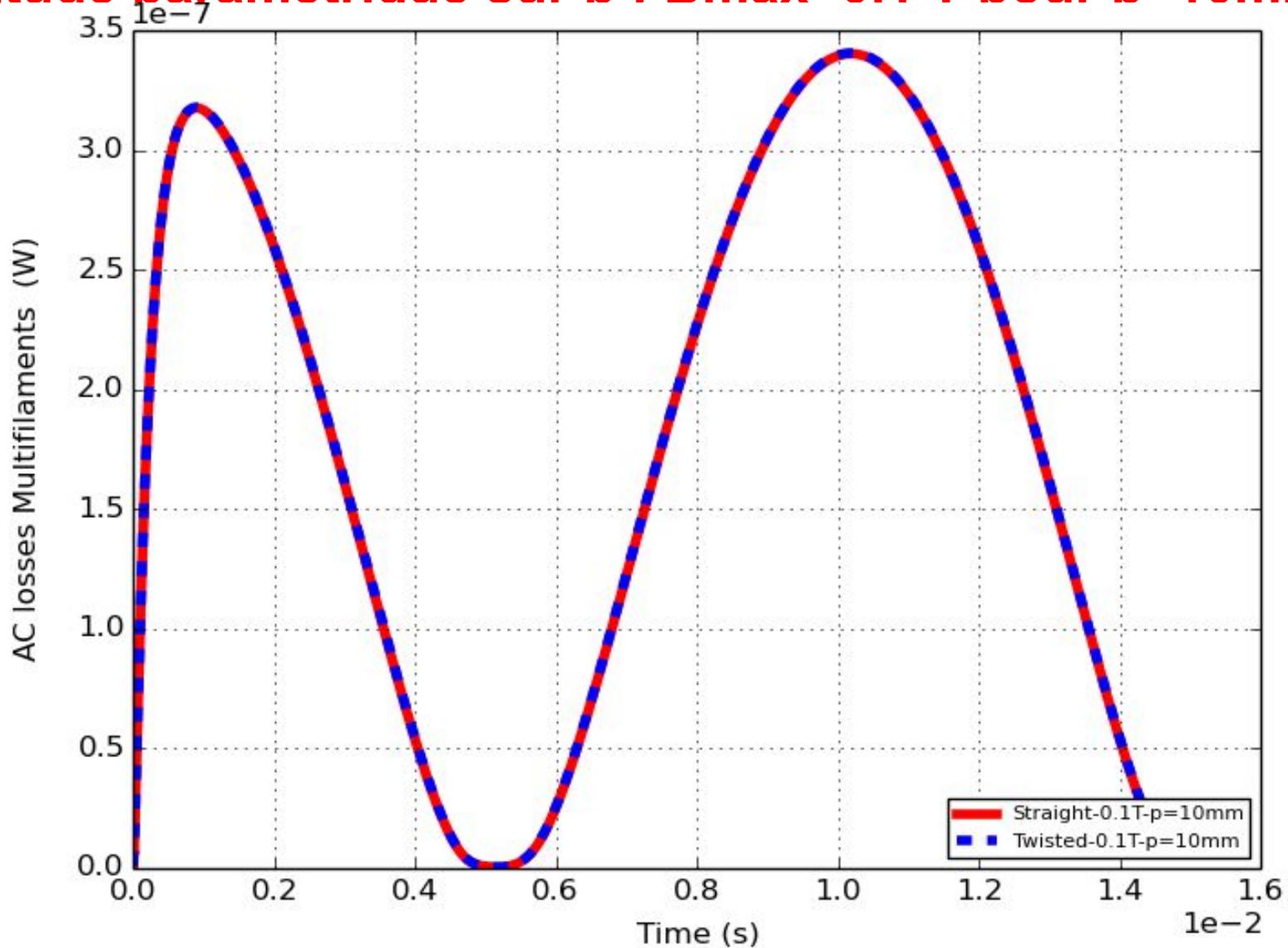
- Etude paramétrique sur p : $B_{max}=0.1$ T pour $p=6$ mm



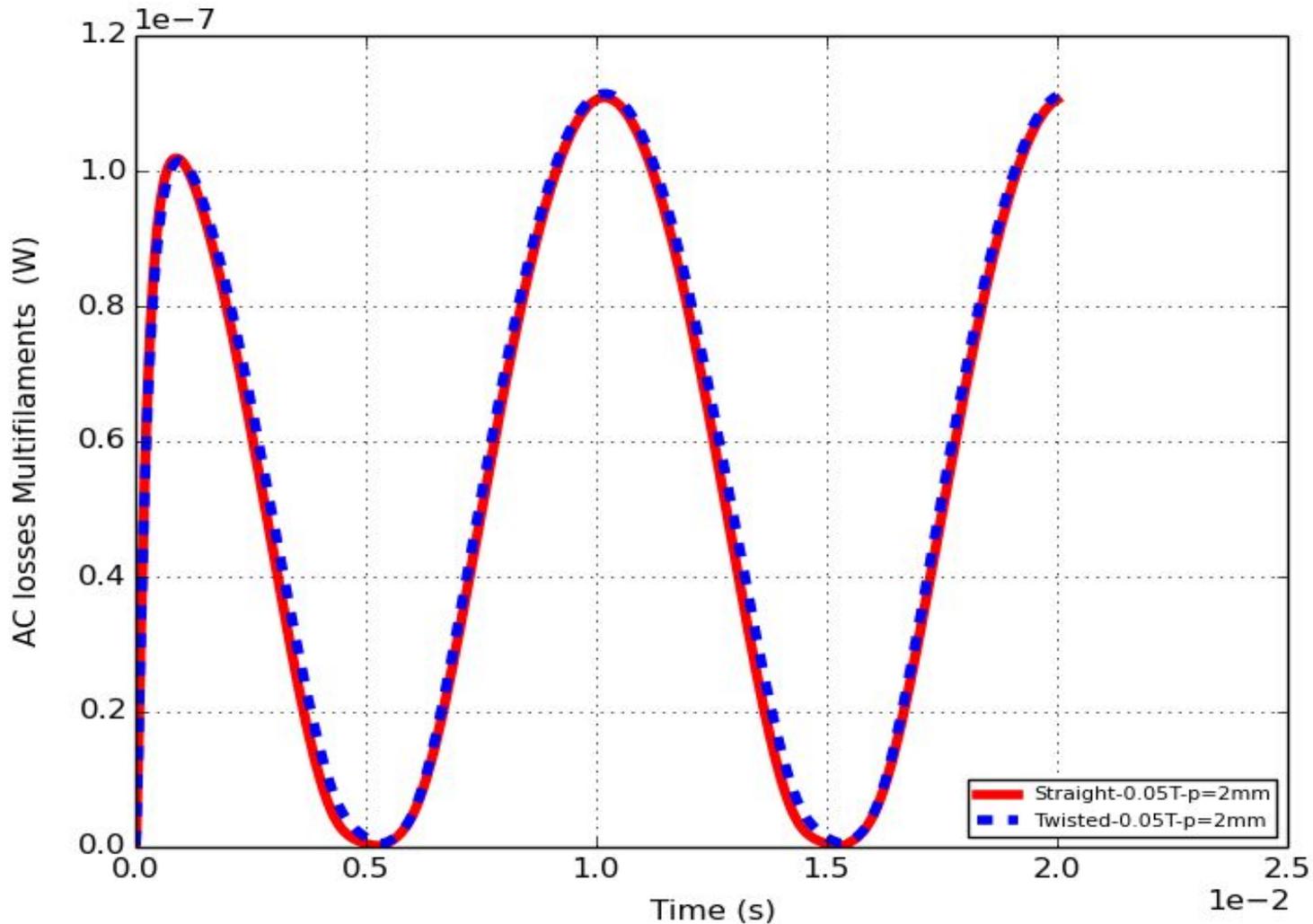
- **Etude paramétrique sur p : $B_{max}=0.1$ T pour $p=8$ mm**



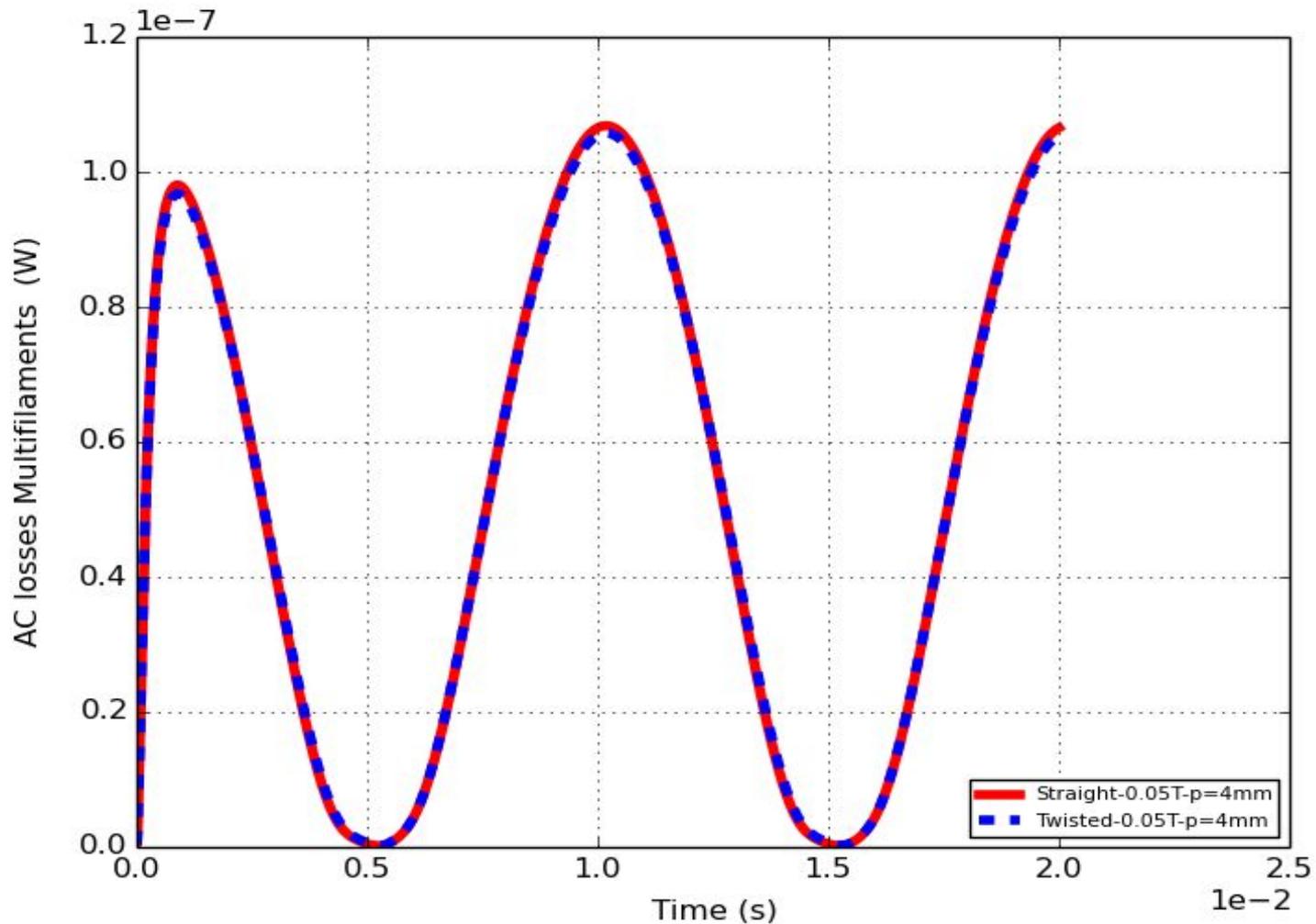
- **Etude paramétrique sur p : $B_{max}=0.1$ T pour $p=10$ mm**



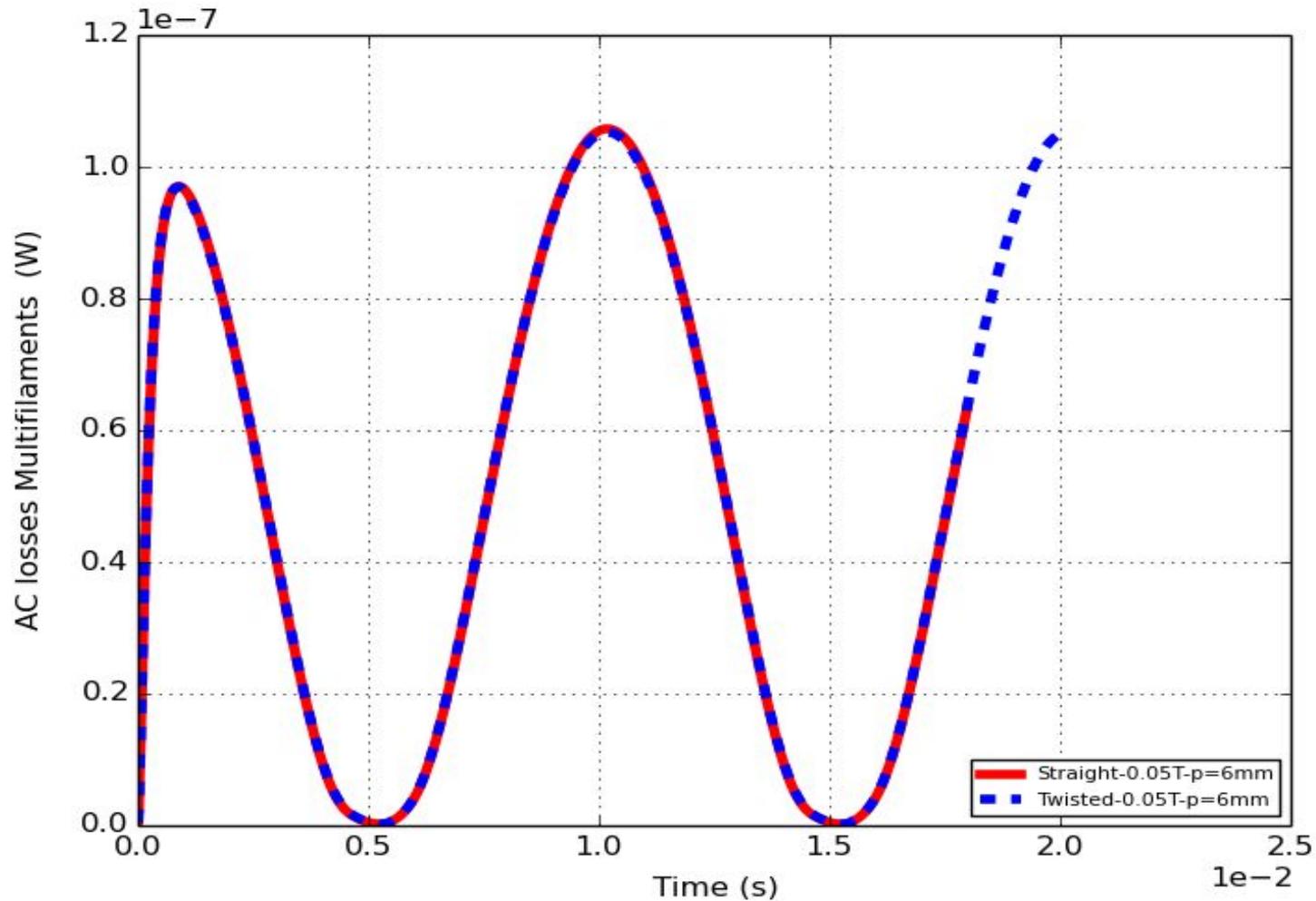
- Etude paramétrique sur p : $B_{max} = 0.05$ T pour $p=2$ mm



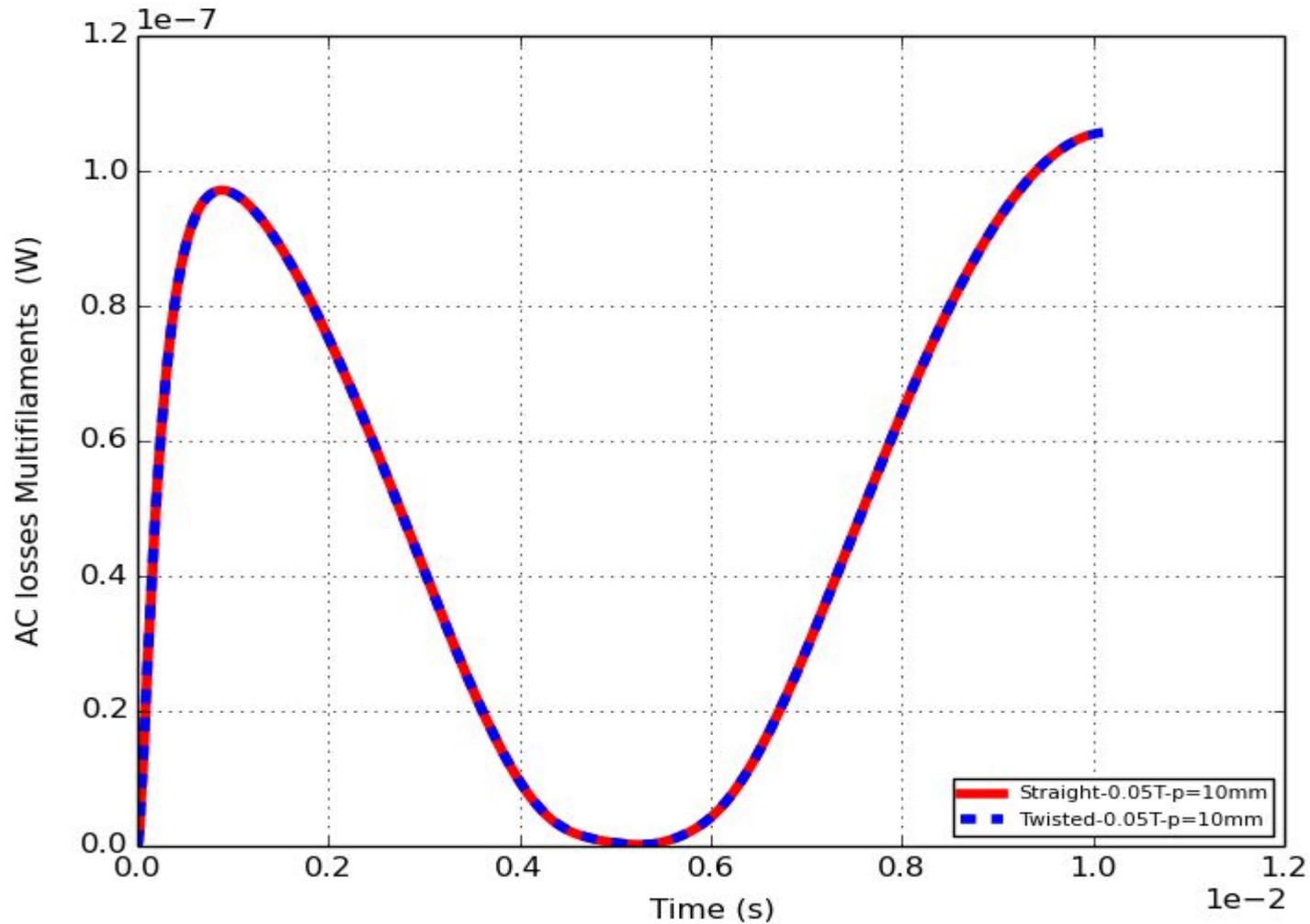
- Etude paramétrique sur p : $B_{max} = 0.05$ T pour $p=4$ mm



- Etude paramétrique sur p : $B_{max} = 0.05$ T pour $p=6$ mm



- Etude paramétrique sur p : $B_{max} = 0.05$ T pour $p=10$ mm



- **Conclusion et perspectives**

- Approximation acceptable de **deux filaments torsades en champ transverse** par **deux filaments droits en champ hélicoïdal** (distribution de courant et pertes AC presque identique)
- Compléter l'étude paramétrique sur les **deux filaments en champ transverse (rayon des filaments)**
- Etude globale paramétrique sur **deux filaments en champ axial** - puis sur **plusieurs filaments en champ transverse et axial**
- Vérification de l'estimation des pertes AC d'un câble avec des **multiples pas de torsades** à partir des pertes AC d'un **seul pas de torsade**

**MERCI POUR VOTRE
ATTENTION**