

TD 3

Mathématiques

Master ET 1^{ère} année

Exercice 1 : multiplication de matrice

Effectuer les calculs suivants :

$$1 \quad (u \quad v) \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{pmatrix}$$

$$2 \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

4

$$4.1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4.2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Conclure

Exercice 2 : matrice nilpotente

Soit A une matrice carrée A de $M_n(\mathbb{R})$. A est dite nilpotente ssi $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Calculer les puissances des matrices suivantes et conclure.

$$1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = \begin{pmatrix} a^k & b^k \\ c^k & d^k \end{pmatrix}$

Exercice 4 : méthode de Gauss

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$