

Séminaire CEA

Transformée en ondelettes directionnelle pour la restauration d'images

Caroline CHAUX

INRIA, Projet ARIANA (INRIA/I3S), Sophia-Antipolis

INTRODUCTION

- Introduction
- Plan

- Analyse en arbre dual

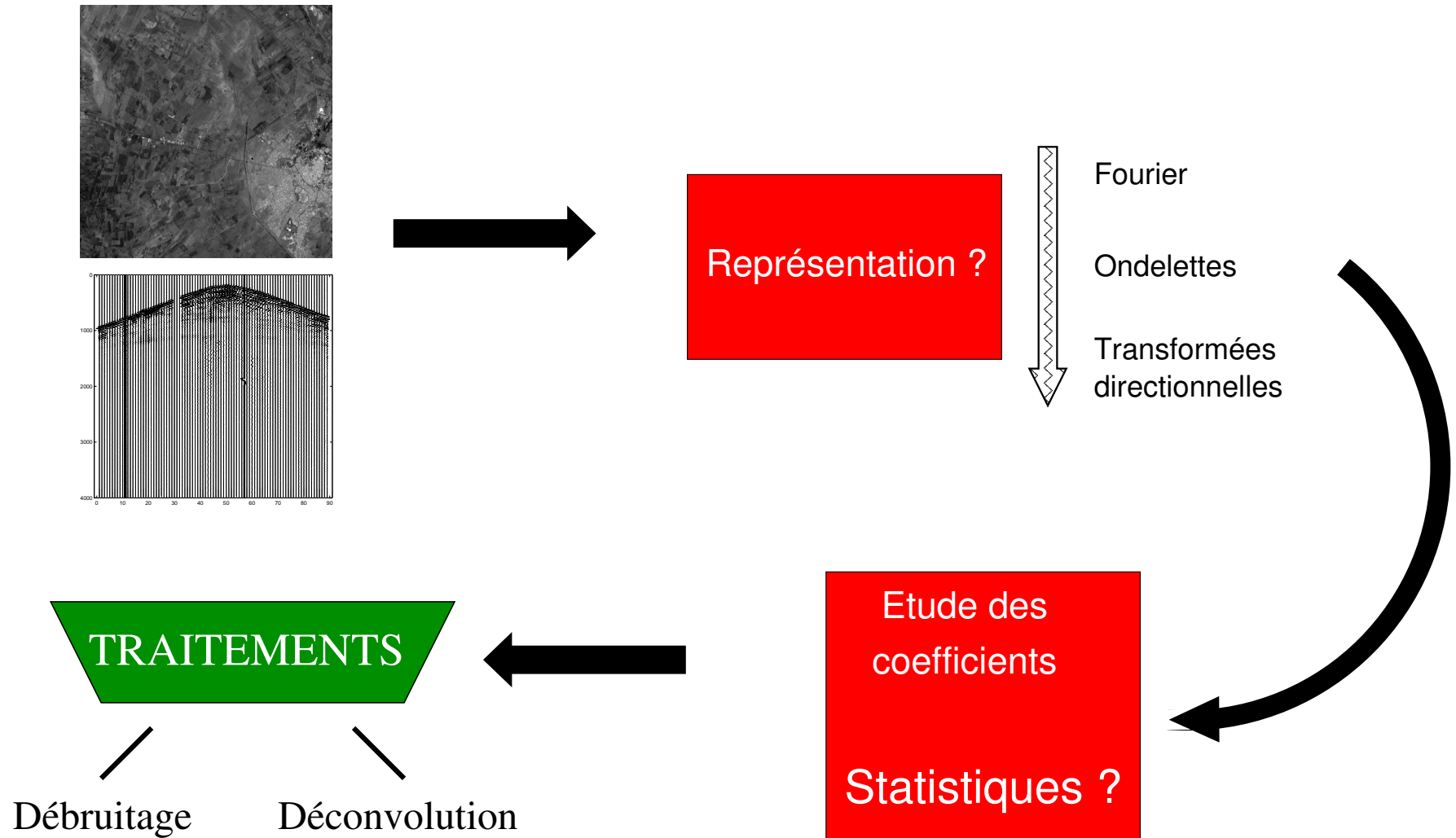
- Caractérisation du bruit

- Débruitage d'images

- Déconvolution d'images

- Microscopie confocale

- Conclusion



PLAN DE LA PRÉSENTATION

● Introduction

● Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- Transformée en ondelettes M -bandes en arbre dual
 - ◆ Construction des filtres
 - ◆ Mise en place de la transformée 2D
- Propriétés du bruit à l'issue de la transformée
 - ◆ Cas 2D
 - ◆ Etude dans le cas d'un bruit blanc
- Débruitage d'images
 - ◆ Dans le cas mono-canal
 - ◆ Mise en place d'un estimateur dans le cas multi-canaux
- Déconvolution d'images
 - ◆ Définition de l'opérateur prox
 - ◆ Déconvolution dans une trame
 - ◆ Mise en place d'un algorithme itératif
- Restauration d'images de microscopie confocale
- Conclusions et perspectives

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Analyse en arbre dual



AVANTAGES DE L'ANALYSE M -BANDES EN ARBRE DUAL

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

● Avantages

- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- **Avantages** du M -bandes ($M > 2$) :
 - ◆ Décomposition plus précise dans le domaine fréquentiel.
 - ◆ Plus grande liberté dans le choix des filtres M -bandes
 \iff ondelettes symétriques et orthogonales, à support compact.
 - **Avantages** de la construction **duale** :
 - ◆ Quasi invariance par translation.
 - ◆ Directionnalité en 2D.
- $M = 2$: [Kingsbury, 1998] [Selesnick, 2001]

AVANTAGES DE L'ANALYSE M -BANDES EN ARBRE DUAL

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

● Avantages

- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- **Avantages** du M -bandes ($M > 2$) :
 - ◆ Décomposition plus précise dans le domaine fréquentiel.
 - ◆ Plus grande liberté dans le choix des filtres M -bandes
 \iff ondelettes symétriques et orthogonales, à support compact.
 - **Avantages** de la construction **duale** :
 - ◆ Quasi invariance par translation.
 - ◆ Directionnalité en 2D.
- $M = 2$: [Kingsbury, 1998] [Selesnick, 2001]

Transformée géométrique basée sur des bancs de filtres M -bandes ayant une faible redondance (facteur 2).

RAPPELS

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Une analyse M -bandes multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$:

- Une fonction d'échelle $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et $(M - 1)$ ondelettes mères $\psi_m \in L^2(\mathbb{R})$, telles que

$$\forall m \in \{0, \dots, M - 1\}, \quad \frac{1}{\sqrt{M}} \psi_m\left(\frac{t}{M}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_m[k] \psi_0(t - k),$$

$(h_m[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ sont des suites de carré sommable.

- H_m étant la transformée de Fourier de $(h_m[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, les conditions de para-unitarité suivantes sont vérifiées :

$$\forall (m, m') \in \{0, \dots, M - 1\}^2,$$

$$\sum_{p=0}^{M-1} H_m\left(\omega + p \frac{2\pi}{M}\right) H_{m'}^*\left(\omega + p \frac{2\pi}{M}\right) = M \delta_{m-m'},$$

où $\delta_m = 1$ si $m = 0$ et 0 sinon.

OBJECTIF

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

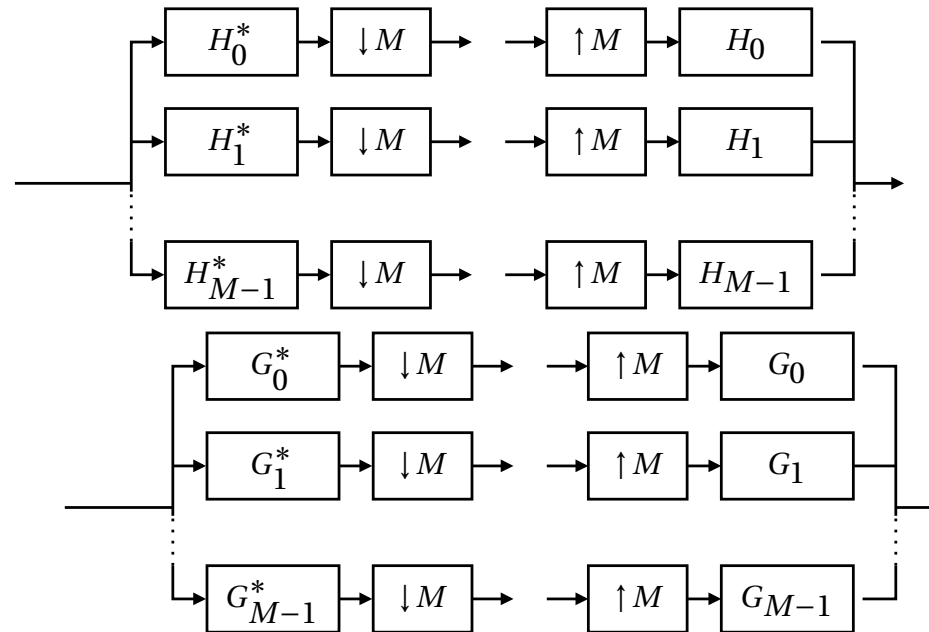
Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



$\forall M \geq 2$ et $M \in \mathbb{N}$, construire une décomposition en ondelettes M -bandes orthogonale « duale » associée à la fonction d'échelle ψ_0^H et aux ondelettes mères ψ_m^H , où

$$\forall m \in \{1, \dots, M-1\}, \quad \widehat{\psi}_m^H(\omega) = -i \operatorname{sign}(\omega) \widehat{\psi}_m(\omega)$$

$G_m, m \in \{0, \dots, M-1\}$: filtres associés à la décomposition duale.

CONSTRUCTION DES PAIRES DE HILBERT M -BANDES (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- $\forall m \in \{0, \dots, M-1\}$

$$G_m(\omega) = e^{-i\theta_m(\omega)} H_m(\omega)$$

où θ_m est 2π -périodique.

- pour tout $(m, m') \in \{0, \dots, M-1\}^2$ avec $m < m'$,

$\alpha_{m,m'} = \theta_{m'} - \theta_m$ est une fonction $2\pi/M$ -périodique.

$$\forall m \in \{1, \dots, M-1\},$$

$$\alpha_{0,m} \left(\frac{\omega}{M} \right) + \beta(\omega) = \frac{\pi}{2} \text{sign}(\omega) [2\pi],$$

$$\text{où } \beta(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_0 \left(\frac{\omega}{M^i} \right).$$

CONSTRUCTION DES PAIRES DE HILBERT M -BANDES (2)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

On impose la contrainte suivante :

$$\forall \omega \in [0, 2\pi/M[, \quad \theta_0(\omega) = \gamma\omega, \text{ où } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Les solutions (modulo 2π) sont données par $\forall m \in \{1, \dots, M-1\}$

$$\alpha_{0,m}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - (d + \frac{1}{2})M\omega & \text{si } \omega \in]0, \frac{2\pi}{M}[, \\ 0 & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

$$\text{et } \forall p \in \left\{0, \dots, \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil - 1\right\}, \forall \omega \in \left[p \frac{2\pi}{M}, (p+1) \frac{2\pi}{M} \right[,$$

$$\theta_0(\omega) = (d + \frac{1}{2})(M-1)\omega - p\pi,$$

où $d \in \mathbb{Z}$ défini un retard.

REPRÉSENTATION DE $\theta_0(\omega)$

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

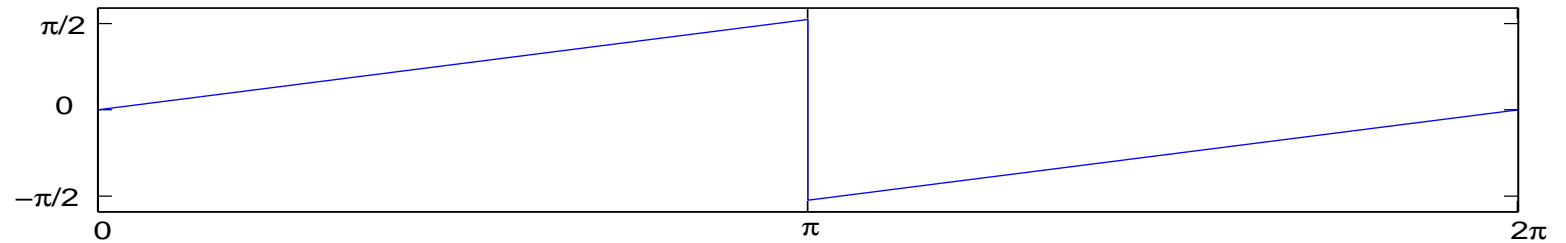
Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

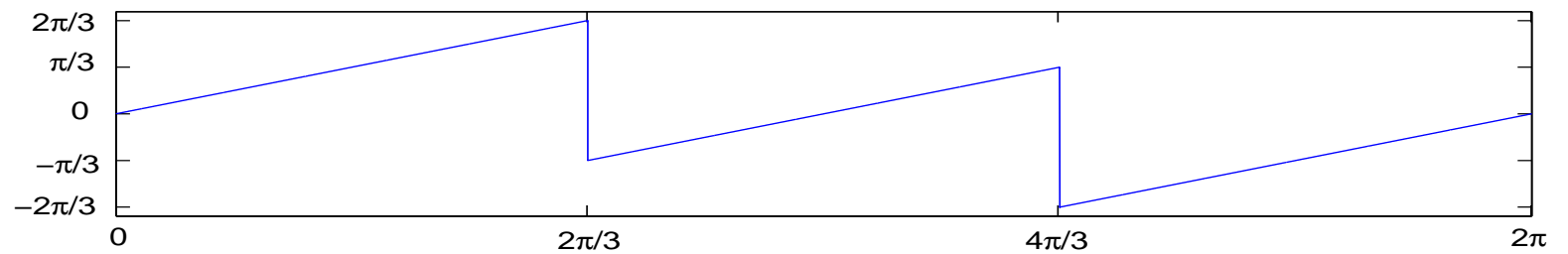
Déconvolution d'images

Microscopie confocale

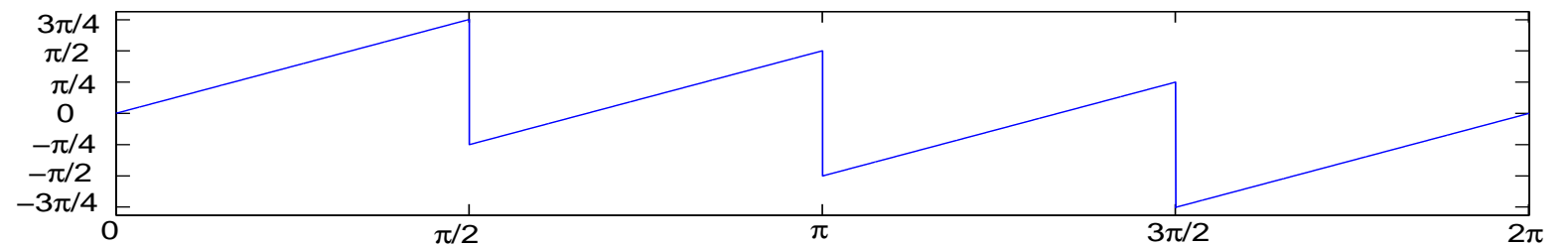
Conclusion



θ_0 avec $M = 2$



θ_0 avec $M = 3$



θ_0 avec $M = 4$

ASPECTS DE MISE EN ŒUVRE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Difficulté : Si les ondelettes originales sont à support compact, les ondelettes duales ne le sont pas.

Filtres primaux RIF \Rightarrow filtres duaux non RIF.

ASPECTS DE MISE EN ŒUVRE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Difficulté : Si les ondelettes originales sont à support compact, les ondelettes duales ne le sont pas.

Filtres primaux RIF \Rightarrow filtres duaux non RIF.

Deux solutions :

- **Implantation dans le domaine réel** du banc de filtres dual

\Rightarrow Synthèse d'un banc de filtres approximativement unitaire RIF qui approxime le banc de filtre dual idéal.

ASPECTS DE MISE EN ŒUVRE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Difficulté : Si les ondelettes originales sont à support compact, les ondelettes duales ne le sont pas.

Filtres primaux RIF \Rightarrow filtres duaux non RIF.

Deux solutions :

- **Implantation dans le domaine réel** du banc de filtres dual

\Rightarrow Synthèse d'un banc de filtres approximativement unitaire RIF qui approxime le banc de filtre dual idéal.

- **Implantation dans le domaine fréquentiel** du banc de filtres dual

\Rightarrow Convolutions dans le domaine de Fourier.

PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Les filtres duaux et ondelettes duales héritent des propriétés de symétrie des correspondants primaux.

PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- **Propriétés de symétries**
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

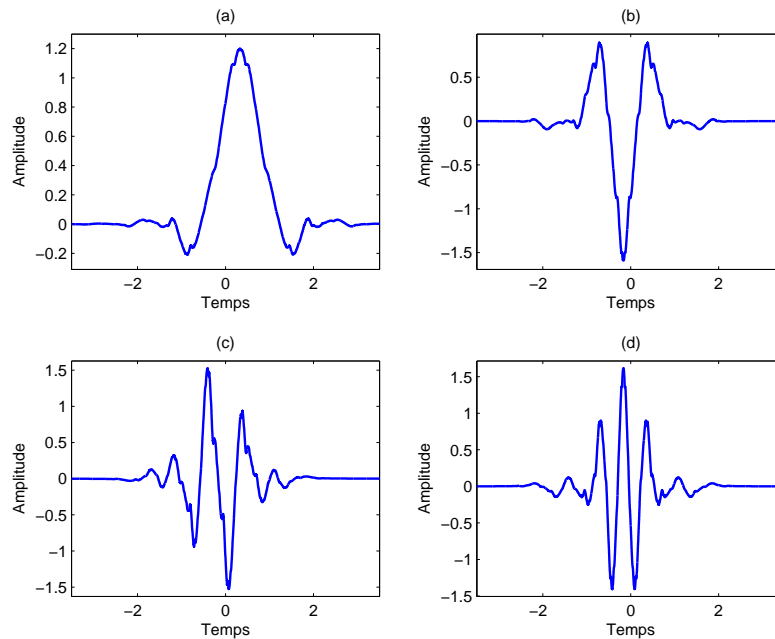
Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Les filtres duaux et ondelettes duales héritent des propriétés de symétrie des correspondants primaux.



Ondelettes originales

Banc de filtres para-unitaire 4-bandes d'Alkin et Caglar

PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- **Propriétés de symétries**
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

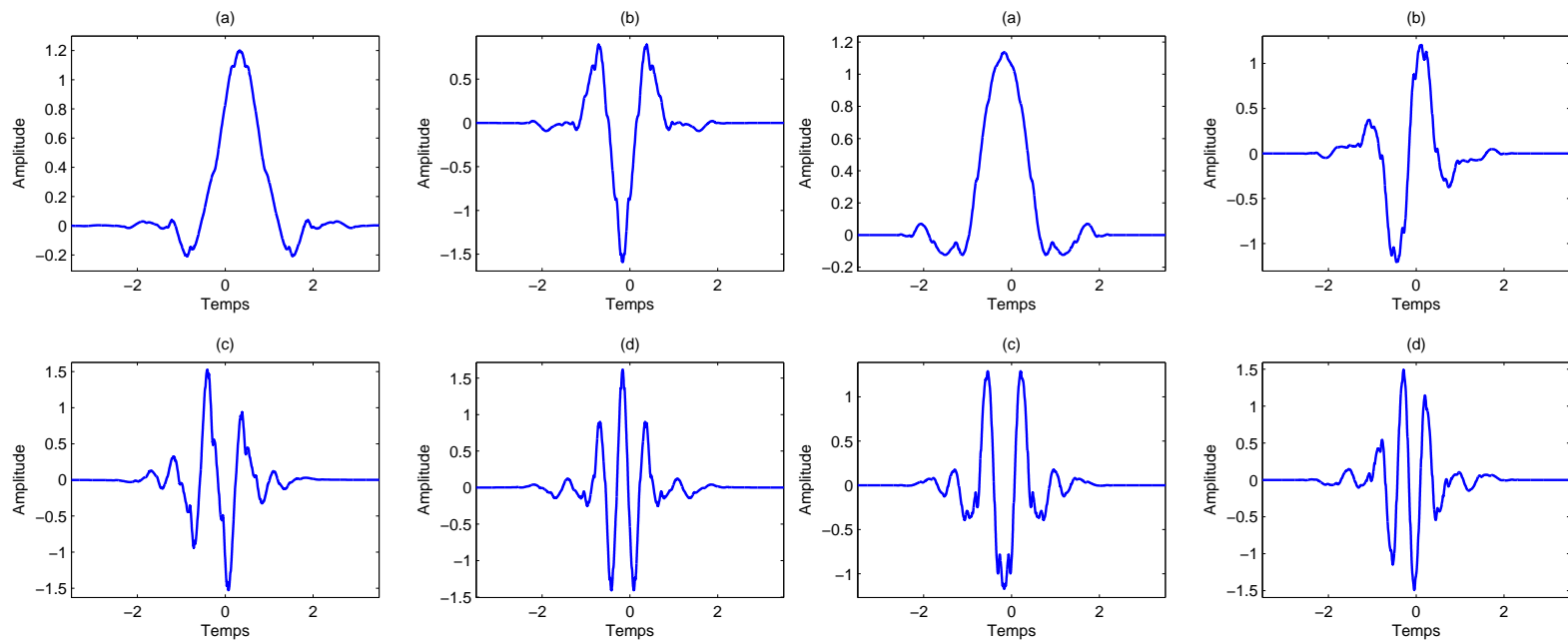
Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Les filtres duaux et ondelettes duales héritent des propriétés de symétrie des correspondants primaux.



Ondelettes originales

Ondelettes duales

Banc de filtres para-unitaire 4-bandes d'Alkin et Caglar

ANALYSE M -BANDES EN ARBRE DUAL 2D

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

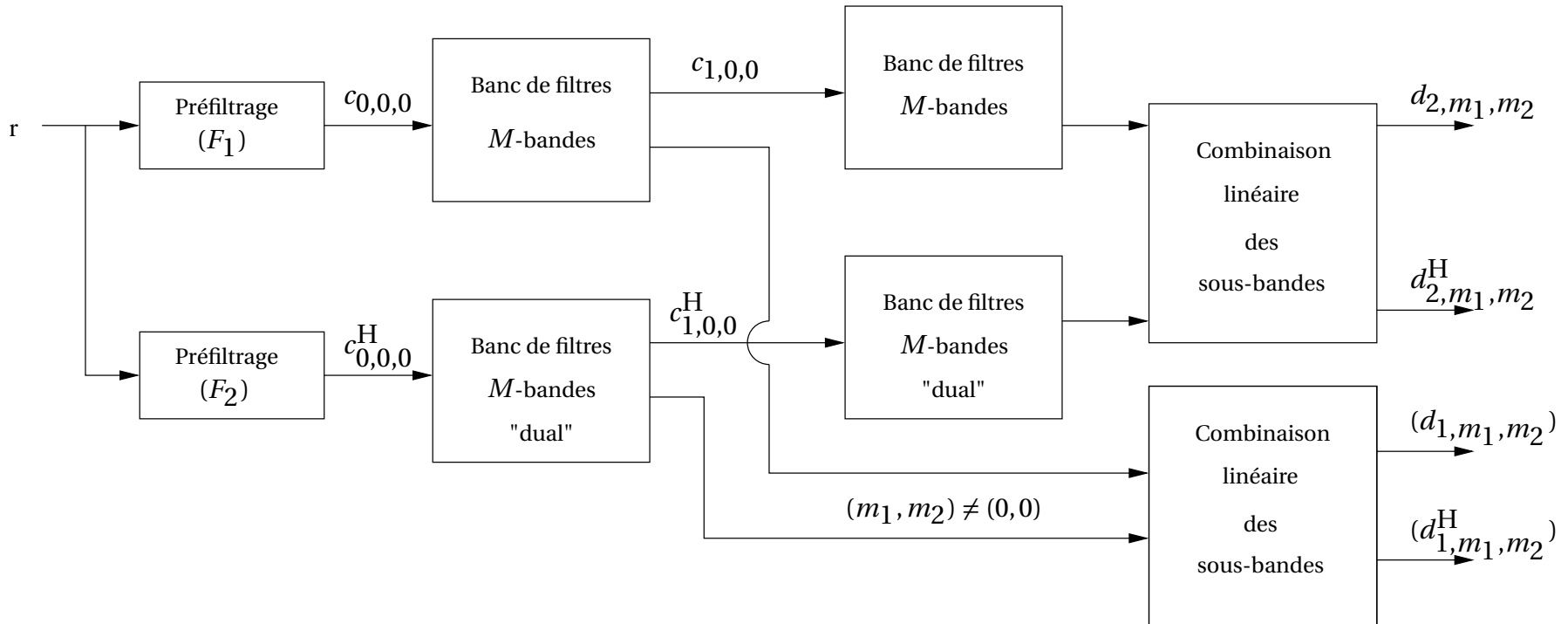
Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



ETAPE 1

Étape de préfiltrage.

ANALYSE M -BANDES EN ARBRE DUAL 2D

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

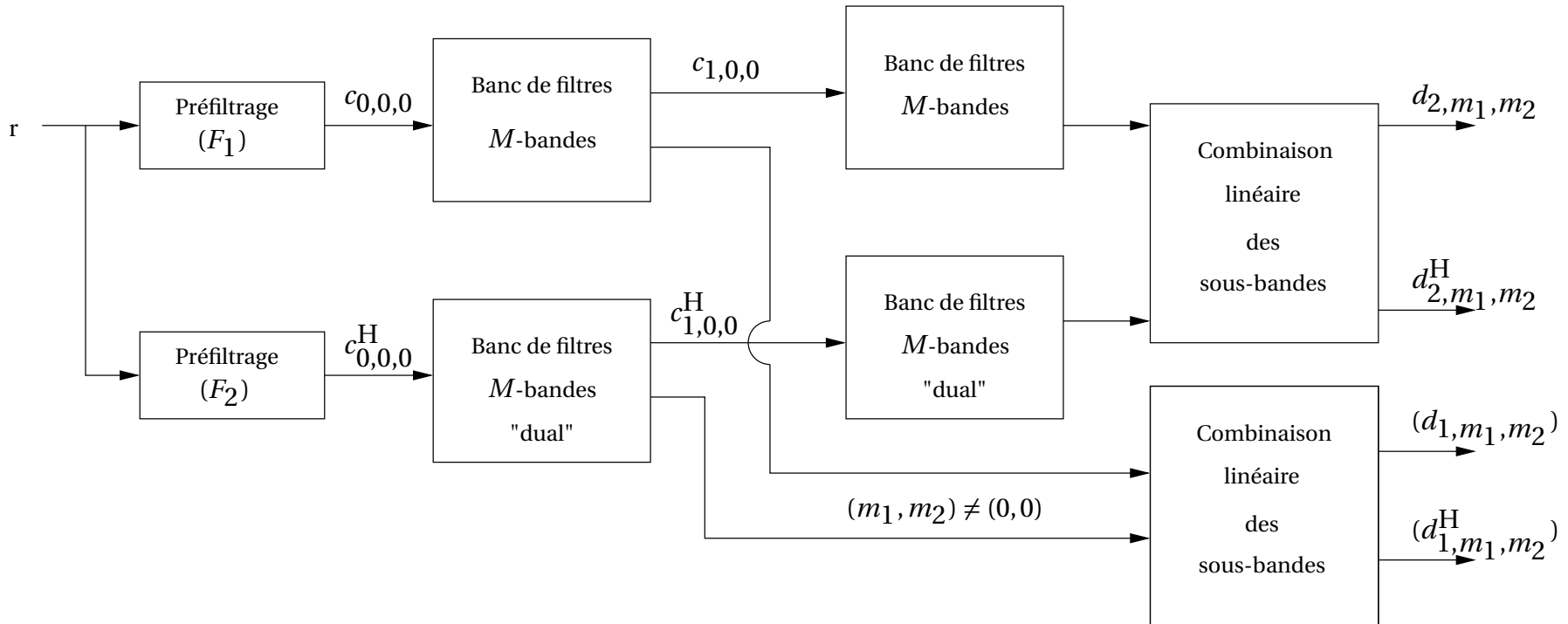
Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



ETAPE 2

Base d'ondelettes séparable orthonormale :

$$c_{j,m_1,m_2}[k_1,k_2] = \langle r(x_1,x_2), \frac{1}{M^j} \psi_{m_1}(\frac{x_1}{M^j} - k_1) \psi_{m_2}(\frac{x_2}{M^j} - k_2) \rangle$$

$$c_{j,m_1,m_2}^H[k_1,k_2] = \langle r(x_1,x_2), \frac{1}{M^j} \psi_{m_1}^H(\frac{x_1}{M^j} - k_1) \psi_{m_2}^H(\frac{x_2}{M^j} - k_2) \rangle.$$

ANALYSE M -BANDES EN ARBRE DUAL 2D

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

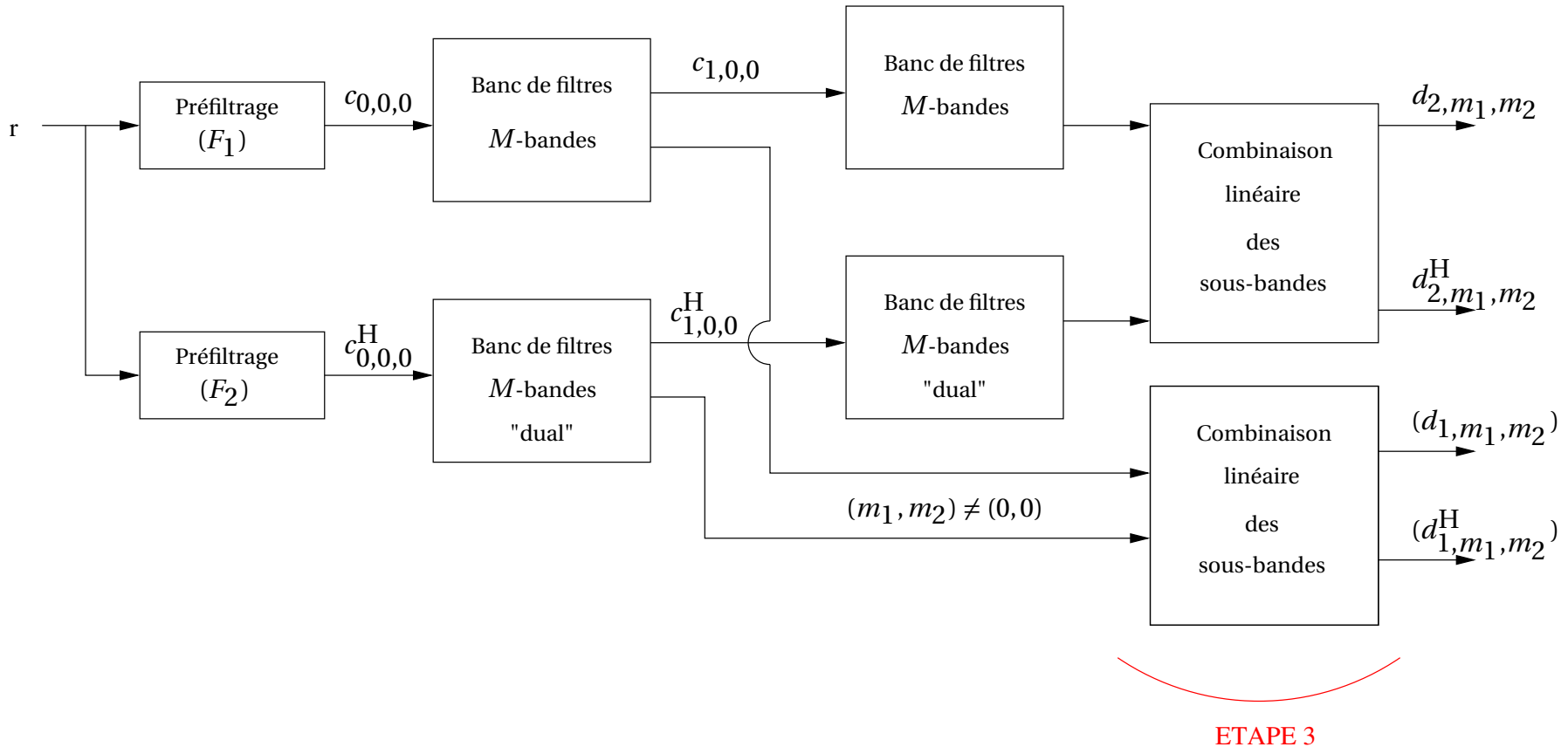
Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



Combinaison linéaire des coefficients issus des décompositions en ondelettes orthonormales.

PRÉFILTRAGE (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

■ Contexte :

$$r(x_1, x_2) = \sum_{k_1, k_2} r[k_1, k_2] \chi(x_1 - k_1, x_2 - k_2),$$

où χ est une fonction d'interpolation et $(r[k_1, k_2])_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2}$ sont les échantillons de l'image.

■ Les coefficients d'approximation :

$$c_{0,0,0}[k_1, k_2] = \sum_{p_1, p_2} r[p_1, p_2] \gamma_{\chi, \Psi_{0,0}}(k_1 - p_1, k_2 - p_2)$$

avec $\Psi_{0,0}(x_1, x_2) = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)$ et l'inter-corrélation

$$\gamma_{\chi, \Psi_{0,0}}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(u_1, u_2) \Psi_{0,0}(u_1 - x_1, u_2 - x_2) du_1 du_2$$

■ Les coefficients d'approximation duaux :

$$c_{0,0,0}^H[k_1, k_2] = \sum_{p_1, p_2} r[p_1, p_2] \gamma_{\chi, \Psi_{0,0}^H}(k_1 - p_1, k_2 - p_2)$$

PRÉFILTRAGE (2)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Interprétation :

Equivalent à une préfiltrage avec des filtres numériques de réponses fréquentielles :

$$F_1(\omega_1, \omega_2) = \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\omega_1 + 2p_1\pi, \omega_2 + 2p_2\pi)$$

$$\hat{\psi}_0^*(\omega_1 + 2p_1\pi) \hat{\psi}_0^*(\omega_2 + 2p_2\pi)$$

$$F_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\omega_1 + 2p_1\pi, \omega_2 + 2p_2\pi)$$

$$(\hat{\psi}_0^H(\omega_1 + 2p_1\pi))^* (\hat{\psi}_0^H(\omega_2 + 2p_2\pi))^*$$

PRÉFILTRAGE (2)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Exemple



$$\chi(x_1, x_2) = \chi(x_1) \chi(x_2) \text{ avec } \chi(t) = \text{sinc}(\pi t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

■ pour $(\omega_1, \omega_2) \in [-\pi, \pi]^2$,

$$F_1(\omega_1, \omega_2) = \hat{\psi}_0^*(\omega_1) \hat{\psi}_0^*(\omega_2)$$

⇒ si $\psi_0(t) = \chi(t)$ (filtre passe-bas idéal) alors

$$F_1(\omega_1, \omega_2) = 1 \implies \text{identité}$$

$$F_2(\omega_1, \omega_2) = e^{i(d+1/2)(\omega_1+\omega_2)} \implies \text{décalage d'un demi échantillon (d=0)}$$

dans chaque direction.

OBTENTION DES DIRECTIONS (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- **Obtention des directions**
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- Outils : Ondelettes analytique /anti-analytique

$$\psi_m^a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_m(t) + \iota \psi_m^H(t)) \text{ et } \psi_m^{\bar{a}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_m(t) - \iota \psi_m^H(t)).$$

- Transformée de Fourier de la partie réelle du produit tensoriel de :

- Deux ondelettes analytiques :

$$\hat{\Psi}_{m_1, m_2}^a(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \hat{\psi}_{m_1}(\omega_1) \hat{\psi}_{m_2}(\omega_2) & \text{si } \text{sign}(\omega_1) = \text{sign}(\omega_2), \\ 0 & \text{si } \text{sign}(\omega_1) \neq \text{sign}(\omega_2). \end{cases}$$

$$\Psi_{m_1, m_2}^a(x_1, x_2) = \psi_{m_1}(x_1) \psi_{m_2}(x_2) - \psi_{m_1}^H(x_1) \psi_{m_2}^H(x_2)$$

- Une ondelette analytique et une anti-analytique :

$$\hat{\Psi}_{m_1, m_2}^{\bar{a}}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sign}(\omega_1) = \text{sign}(\omega_2), \\ \hat{\psi}_{m_1}(\omega_1) \hat{\psi}_{m_2}(\omega_2) & \text{si } \text{sign}(\omega_1) \neq \text{sign}(\omega_2). \end{cases}$$

$$\Psi_{m_1, m_2}^{\bar{a}}(x_1, x_2) = \psi_{m_1}(x_1) \psi_{m_2}(x_2) + \psi_{m_1}^H(x_1) \psi_{m_2}^H(x_2)$$

OBTENTION DES DIRECTIONS (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- **Obtention des directions**
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

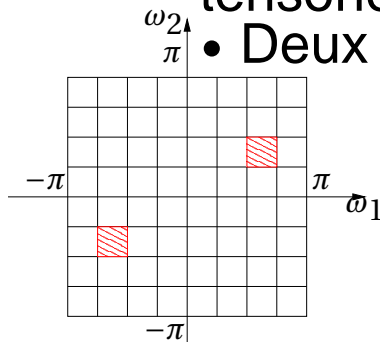
Conclusion

- Outils : Ondelettes analytique /anti-analytique

$$\psi_m^a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_m(t) + i\psi_m^H(t)) \text{ and } \psi_m^{\bar{a}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_m(t) - i\psi_m^H(t)).$$

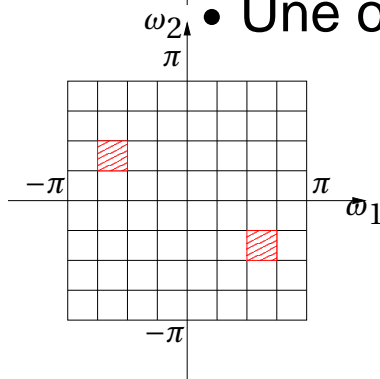
- Transformée de Fourier de la partie réelle du produit tensoriel de :

- Deux ondelettes analytiques :



$$\hat{\Psi}_{m_1, m_2}^a(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \hat{\psi}_{m_1}(\omega_1)\hat{\psi}_{m_2}(\omega_2) & \text{si } \text{sign}(\omega_1) = \text{sign}(\omega_2), \\ 0 & \text{si } \text{sign}(\omega_1) \neq \text{sign}(\omega_2). \end{cases}$$

- Une ondelette analytique et une anti-analytique :



$$\hat{\Psi}_{m_1, m_2}^{\bar{a}}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sign}(\omega_1) = \text{sign}(\omega_2), \\ \hat{\psi}_{m_1}(\omega_1)\hat{\psi}_{m_2}(\omega_2) & \text{si } \text{sign}(\omega_1) \neq \text{sign}(\omega_2). \end{cases}$$

$\hat{\Psi}_{m_1, m_2}^a$ et $\hat{\Psi}_{m_1, m_2}^{\bar{a}}$ permettent de sélectionner les composantes fréquentielles localisées dans les 1^{er}/3^e quadrants et 2^e/4^e quadrants du plan fréquentiel respectivement.

OBTENTION DES DIRECTIONS (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- **Obtention des directions**
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

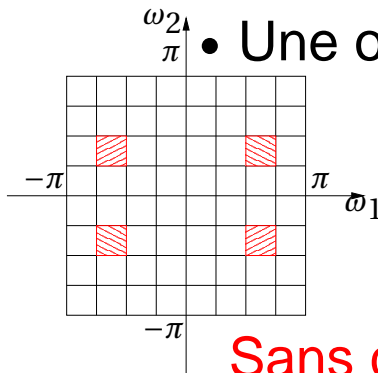
- Outils : Ondelettes analytique /anti-analytique

$$\psi_m^a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_m(t) + \iota \psi_m^H(t)) \text{ and } \psi_m^{\bar{a}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_m(t) - \iota \psi_m^H(t)).$$

- Transformée de Fourier de la partie réelle du produit tensoriel de :
 - Deux ondelettes analytiques :

$$\hat{\Psi}_{m_1, m_2}^a(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \hat{\psi}_{m_1}(\omega_1)\hat{\psi}_{m_2}(\omega_2) & \text{si } \text{sign}(\omega_1) = \text{sign}(\omega_2), \\ 0 & \text{si } \text{sign}(\omega_1) \neq \text{sign}(\omega_2). \end{cases}$$

- Une ondelette analytique et une anti-analytique :



$$\hat{\Psi}_{m_1, m_2}^{\bar{a}}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sign}(\omega_1) = \text{sign}(\omega_2), \\ \hat{\psi}_{m_1}(\omega_1)\hat{\psi}_{m_2}(\omega_2) & \text{si } \text{sign}(\omega_1) \neq \text{sign}(\omega_2). \end{cases}$$

Sans ce traitement, nous obtiendrions une ambiguïté en conservant les directions opposées dans les sous-bandes.

OBTENTION DES DIRECTIONS (2)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- **Obtention des directions**
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Les coefficients finaux sont :

OBTENTION DES DIRECTIONS (2)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

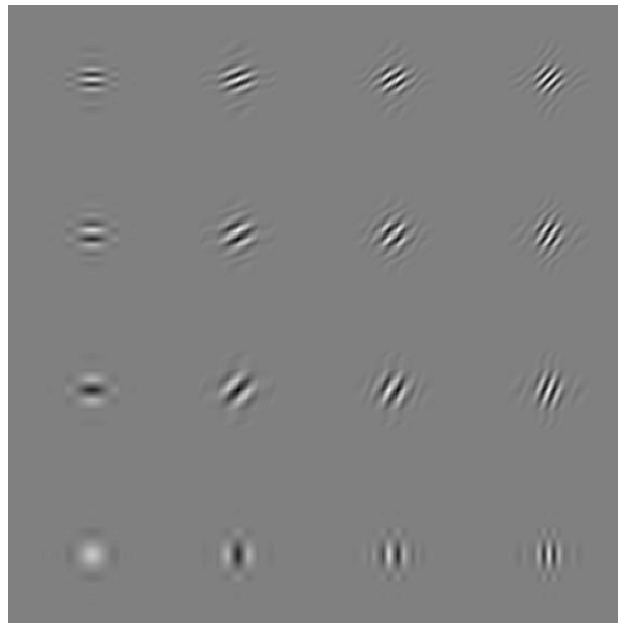
Conclusion

Les coefficients finaux sont :

pour tout $\mathbf{m} = (m_1, m_2) \in \{1, \dots, M-1\}^2$,

$$d_{j,\mathbf{m}}[k_1, k_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{j,\mathbf{m}}[k_1, k_2] + c_{j,\mathbf{m}}^H[k_1, k_2])$$

Ondelettes 2D obtenues dans le domaine spatial :



Arbre primal

OBTENTION DES DIRECTIONS (2)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- **Obtention des directions**
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

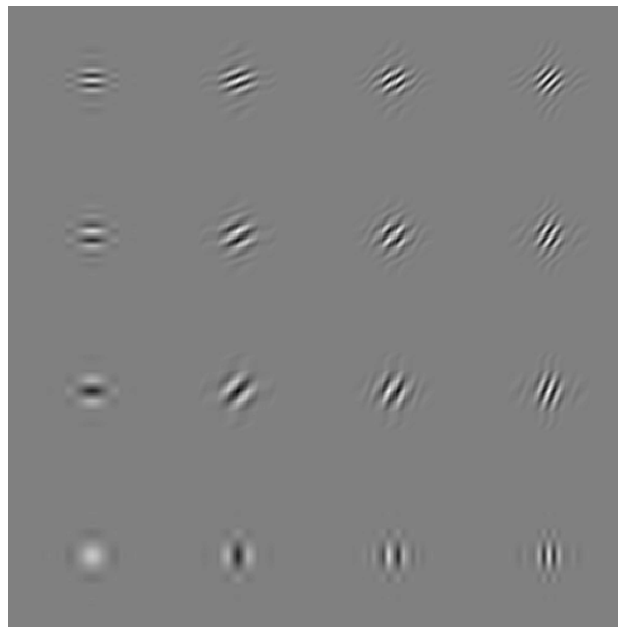
Conclusion

Les coefficients finaux sont : pour tout $\mathbf{m} \in \{1, \dots, M-1\}^2$,

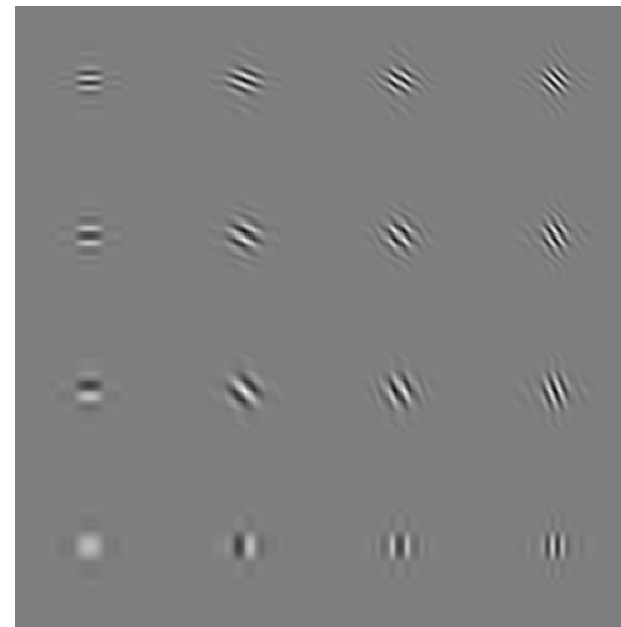
$$d_{j,\mathbf{m}}[k_1, k_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{j,\mathbf{m}}[k_1, k_2] + c_{j,\mathbf{m}}^H[k_1, k_2])$$

$$d_{j,\mathbf{m}}^H[k_1, k_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{j,\mathbf{m}}[k_1, k_2] - c_{j,\mathbf{m}}^H[k_1, k_2]).$$

Ondelettes 2D obtenues dans le domaine spatial :



Arbre primal



Arbre dual

DÉCOMPOSITION DE BARBARA

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

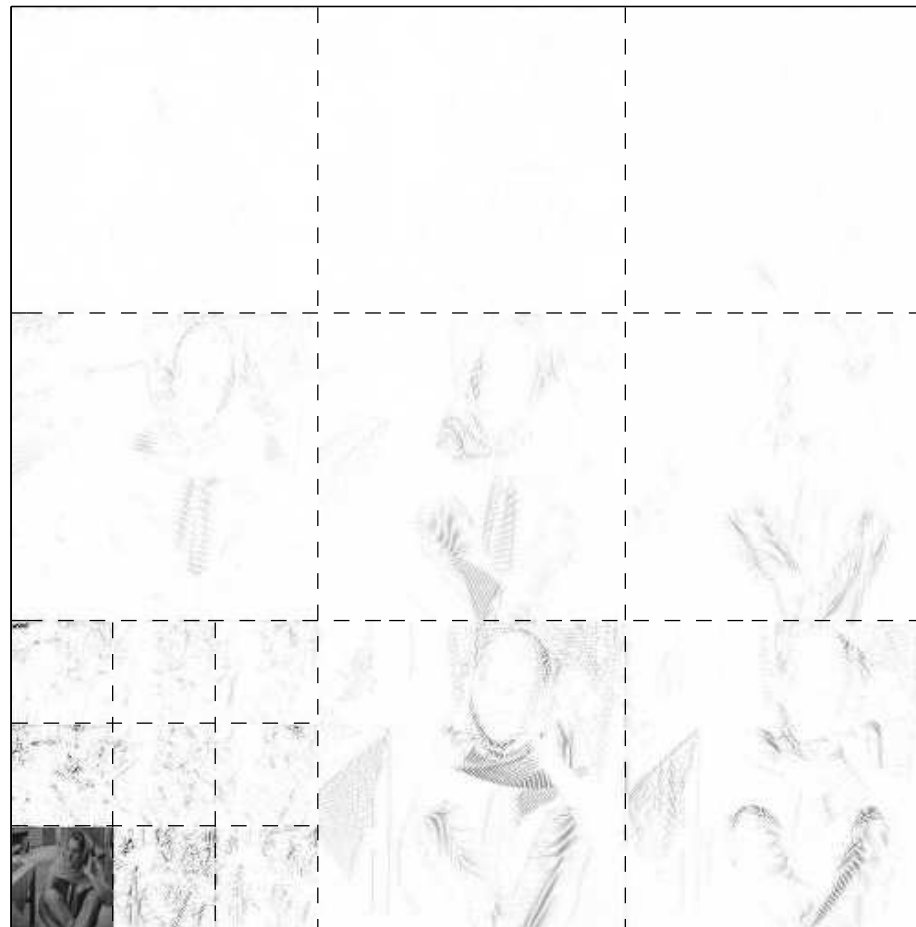
Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



DÉCOMPOSITION DE BARBARA

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

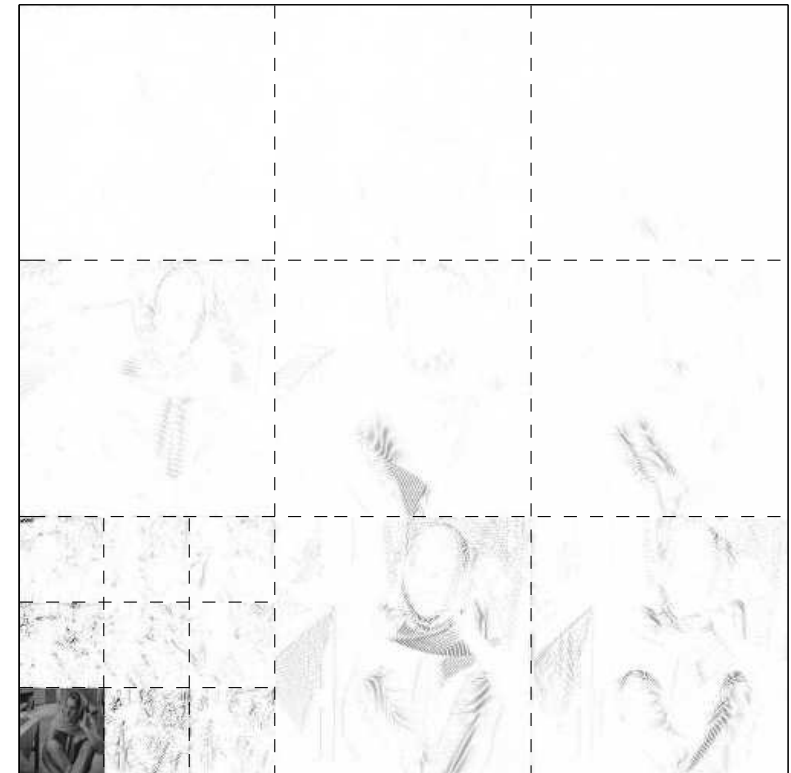
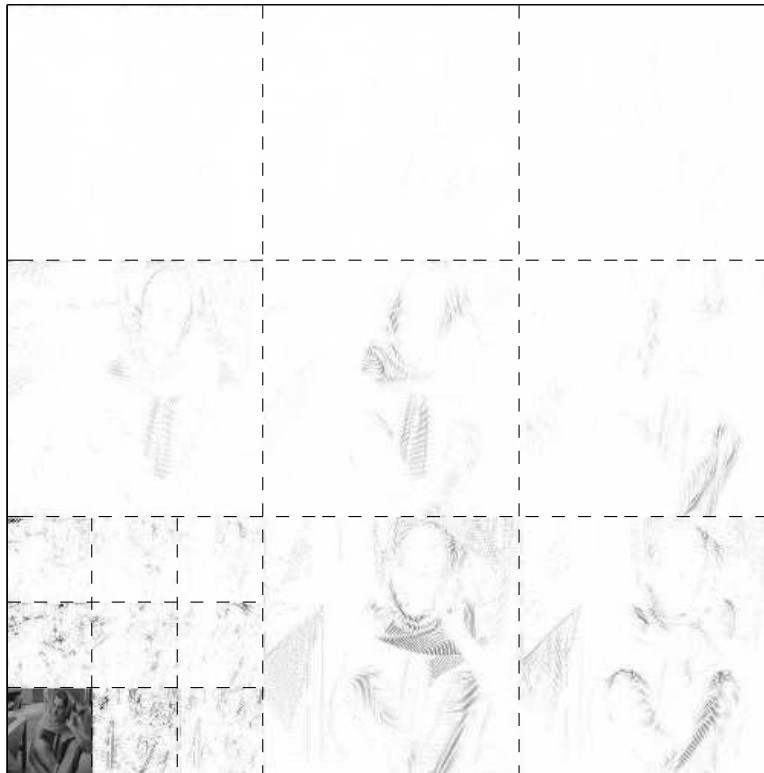
Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



RECONSTRUCTION (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Contexte

RECONSTRUCTION (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Contexte

Soit \mathbf{D} l'opérateur global de décomposition discrète :

$$\mathbf{D} : \mathbf{r} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{r} \\ \mathbf{D}_2 \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{r} \\ \mathbf{U}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 : les opérations de préfiltrages

\mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 : les décompositions en ondelettes M -bandes primale et duale.

RECONSTRUCTION (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Contexte

Soit \mathbf{D} l'opérateur global de décomposition discrète :

$$\mathbf{D} : \mathbf{r} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{r} \\ \mathbf{D}_2 \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{r} \\ \mathbf{U}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 : les opérations de préfiltrages

\mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 : les décompositions en ondelettes M -bandes primale et duale.

On a :

- \mathbf{c} : coefficients issus de l'arbre primal
 - \mathbf{c}^H : coefficients issus de l'arbre primal dual
- Décomposition redondante.**

RECONSTRUCTION (1)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Contexte

Soit \mathbf{D} l'opérateur global de décomposition discrète :

$$\mathbf{D} : \mathbf{r} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{r} \\ \mathbf{D}_2 \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{r} \\ \mathbf{U}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 : les opérations de préfiltrages

\mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 : les décompositions en ondelettes M -bandes primale et duale.

On a :

- \mathbf{c} : coefficients issus de l'arbre primal
- \mathbf{c}^H : coefficients issus de l'arbre primal dual

Décomposition redondante.

⇒ Il existe plusieurs solutions pour reconstruire l'image.

RECONSTRUCTION (2)

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

- Avantages
- Rappels
- Objectif
- Construction
- Aspects de mise en œuvre
- Propriétés de symétries
- Analyse bidimensionnelle
- Préfiltrage
- Obtention des directions
- Décomposition de Barbara
- Reconstruction

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

■ Solution :

S'il existe des constantes $(A_s, B_s, C_s, A_{\psi_0}) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ telles que, pour (presque) tout $(\omega_1, \omega_2) \in [-\pi, \pi]^2$,

$$A_s \leq |\hat{\chi}(\omega_1, \omega_2)| \leq B_s, \quad |\hat{\psi}_0(\omega_1)| \geq A_{\psi_0}$$

$$\sum_{(p_1, p_2) \neq (0, 0)} |\hat{\chi}(\omega_1 + 2p_1\pi, \omega_2 + 2p_2\pi)|^2 \leq C_s < A_s^2 A_{\psi_0}^4$$

\mathbf{D} est un opérateur de trame. L'opérateur de trame « dual » s'exprime par :

$$\mathbf{r} = (\mathbf{F}_1^\dagger \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^\dagger \mathbf{F}_2)^{-1} (\mathbf{F}_1^\dagger \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{c} + \mathbf{F}_2^\dagger \mathbf{U}_2^{-1} \mathbf{c}^H).$$

(\mathbf{T}^\dagger : adjoint d'un opérateur \mathbf{T})

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

- Fonctions d'intercorrélation dans le cas 2D
- Résumé
- Intercorrélation des ondelettes
- Résultats numériques

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Caractérisation du bruit après analyse *M*-bandes en arbre dual



FONCTIONS D'INTERCORRÉLATION DANS LE CAS 2D SÉPARABLE

- Introduction
- Plan
- Analyse en arbre dual
- Caractérisation du bruit
 - Fonctions d'intercorrélation dans le cas 2D
 - Résumé
 - Intercorrélation des ondelettes
 - Résultats numériques
- Débruitage d'images
- Déconvolution d'images
- Microscopie confocale
- Conclusion

Analyse d'un bruit n blanc bidimensionnel pour lequel

$$\Gamma_n(x_1, x_2) = \sigma^2 \delta(x_1)\delta(x_2).$$

$(n_{j,m}[\mathbf{k}])_{\mathbf{k}}$ (resp. $(n_{j,m}^H[\mathbf{k}])_{\mathbf{k}}$) sont blancs, centrés, de variance σ^2 .

$$\Gamma_{n_{j,m}, n_{j,m'}^H}(\boldsymbol{\ell}) = E\{n_{j,m}[\mathbf{k} + \boldsymbol{\ell}] n_{j,m'}^H[\mathbf{k}]\} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_n(x_1, x_2) \gamma_{\psi_{m_1}, \psi_{m'_1}^H} \left(\frac{x_1}{M^j} - l_1 \right) \gamma_{\psi_{m_2}, \psi_{m'_2}^H} \left(\frac{x_2}{M^j} - l_2 \right) dx_1 dx_2.$$

$$E\{n_{j,m}[\mathbf{k} + \boldsymbol{\ell}] n_{j,m'}^H[\mathbf{k}]\} = \sigma^2 \gamma_{\psi_{m_1}, \psi_{m'_1}^H}(-\ell_1) \gamma_{\psi_{m_2}, \psi_{m'_2}^H}(-\ell_2).$$

Rq : Cas particulier où $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0}$, pour $m_1 \neq 0$ ou $m_2 \neq 0$, le vecteur $[n_{j,m}[\mathbf{k}], n_{j,m}^H[\mathbf{k}]]^T$ a des composantes décorréliées.

CONSÉQUENCE DU POST-TRAITEMENT

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

● Fonctions d'intercorrélation
dans le cas 2D

- Résumé
- Intercorrélation des ondelettes
- Résultats numériques

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Pour toutes les sous-bandes telles que $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_M^{*2}$:

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2, \quad w_{j,\mathbf{m}}[\mathbf{k}] = \frac{1}{\sqrt{2}} (n_{j,\mathbf{m}}[\mathbf{k}] + n_{j,\mathbf{m}}^H[\mathbf{k}])$$

$$w_{j,\mathbf{m}}^H[\mathbf{k}] = \frac{1}{\sqrt{2}} (n_{j,\mathbf{m}}[\mathbf{k}] - n_{j,\mathbf{m}}^H[\mathbf{k}])$$

(non appliquée lorsque $m_1 = 0$ ou $m_2 = 0$).

Pour tout $(\mathbf{m}, \mathbf{m}') \in \{1, \dots, M-1\}^2 \times \{1, \dots, M-1\}^2$ et $\ell \in \mathbb{Z}^2$:

$$\Gamma_{w_{j,\mathbf{m}}, w_{j,\mathbf{m}'}}(\ell) = \Gamma_{n_{j,\mathbf{m}}, n_{j,\mathbf{m}'}}(\ell) + \Gamma_{n_{j,\mathbf{m}}, n_{j,\mathbf{m}'}^H}(\ell)$$

$$\Gamma_{w_{j,\mathbf{m}}^H, w_{j,\mathbf{m}'}^H}(\ell) = \Gamma_{n_{j,\mathbf{m}}, n_{j,\mathbf{m}'}}(\ell) - \Gamma_{n_{j,\mathbf{m}}, n_{j,\mathbf{m}'}^H}(\ell)$$

$$\Gamma_{w_{j,\mathbf{m}}, w_{j,\mathbf{m}'}^H}(\ell) = 0.$$

CONSÉQUENCE DU POST-TRAITEMENT

- Introduction
- Plan

- Analyse en arbre dual

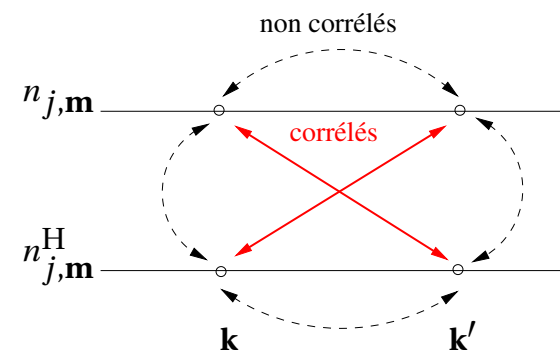
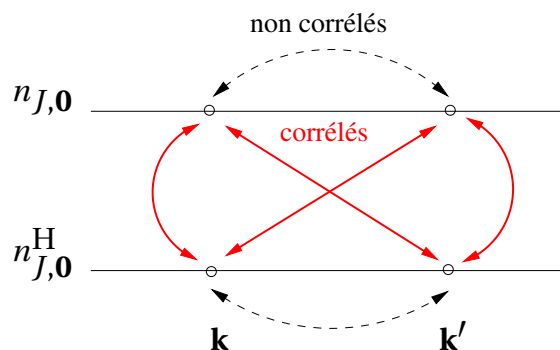
- Caractérisation du bruit
 - Fonctions d'intercorrélation dans le cas 2D
- Résumé
- Intercorrélation des ondelettes
- Résultats numériques

Débruitage d'images

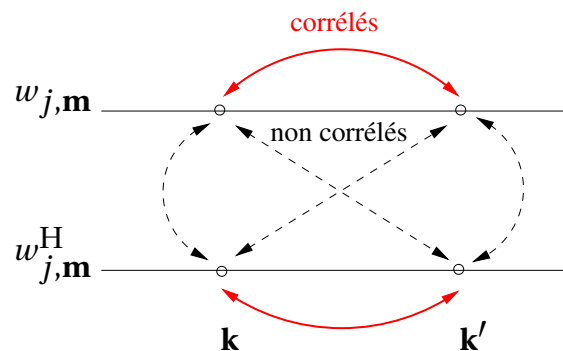
Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



Coefficients d'approximation Coefficients de détails ($m \neq 0$)



Coefficients de détails avec $m_1 m_2 \neq 0$

Schéma des corrélations inter-arbres pour une sous-bande (j, m) donnée, avant (haut) et après (bas) isométrie.

RÉSUMÉ

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

- Fonctions d'intercorrélation dans le cas 2D
- **Résumé**
- Intercorrélation des ondelettes
- Résultats numériques

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

En présence d'un bruit blanc : pour tout $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^2$, pour tout $(\mathbf{m}, \mathbf{m}') \in \{0, \dots, M-1\}^2 \times \{0, \dots, M-1\}^2$ et $\ell \in \mathbb{Z}^2$,

$$\Gamma_{n_{j,\mathbf{m}}, n_{j,\mathbf{m}'}}(\ell) = \Gamma_{n_{j,\mathbf{m}}^H, n_{j,\mathbf{m}'}^H}(\ell) = \sigma^2 \delta_{m_1 - m'_1} \delta_{m_2 - m'_2} \delta_{\ell_1} \delta_{\ell_2}$$

$$\Gamma_{n_{j,\mathbf{m}}, n_{j,\mathbf{m}'}^H}(\ell) = \sigma^2 \gamma_{\psi_{m_1}, \psi_{m'_1}^H}(-\ell_1) \gamma_{\psi_{m_2}, \psi_{m'_2}^H}(-\ell_2)$$

OBJECTIF : Calculer numériquement $\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(\ell) \forall m \in \{0, \dots, M-1\} \forall \ell \in \mathbb{Z}$ et pour différentes ondelettes M -bandes dans le but d'évaluer l'impact des corrélations entre les arbres primal et dual.

INTERCORRÉLATION DES ONDELETTES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

- Fonctions d'intercorrélacion dans le cas 2D
- Résumé
- Intercorrélacion des ondelettes
- Résultats numériques

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- Pour tout $m \neq 0$,

$$\hat{\gamma}_{\psi_m, \psi_m^H}(\omega) = \iota \operatorname{sign}(\omega) |\hat{\psi}_m(\omega)|^2$$

ce qui conduit à :

$$\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(\tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \sin(\omega\tau) d\omega$$

INTERCORRÉLATION DES ONDELETTES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

- Fonctions d'intercorrélacion dans le cas 2D
- Résumé
- Intercorrélation des ondelettes
- Résultats numériques

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- Pour tout $m \neq 0$,

$$\hat{\gamma}_{\psi_m, \psi_m^H}(\omega) = \iota \operatorname{sign}(\omega) |\hat{\psi}_m(\omega)|^2$$

ce qui conduit à :

$$\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(\tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \sin(\omega\tau) d\omega$$

- Pour $m = 0$,

$$\gamma_{\psi_0, \psi_0^H}(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\hat{\psi}_0(\omega)|^2 \cos\left(\omega\left(\frac{1}{2} + \tau + d\right)\right) d\omega.$$

INTERCORRÉLATION DES ONDELETTES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

- Fonctions d'intercorrélacion dans le cas 2D
- Résumé
- Intercorrélation des ondelettes
- Résultats numériques

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- Pour tout $m \neq 0$,

$$\hat{\gamma}_{\psi_m, \psi_m^H}(\omega) = \iota \operatorname{sign}(\omega) |\hat{\psi}_m(\omega)|^2$$

ce qui conduit à :

$$\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(\tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \sin(\omega\tau) d\omega$$

$\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}$ est une fonction impaire $\implies \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(0) = 0$.

- Pour $m = 0$,

$$\gamma_{\psi_0, \psi_0^H}(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\hat{\psi}_0(\omega)|^2 \cos\left(\omega\left(\frac{1}{2} + \tau + d\right)\right) d\omega.$$

Vue comme une fonction de $\tau + d$, $\gamma_{\psi_0, \psi_0^H}$ est une fonction symétrique par rapport à $-\frac{1}{2}$.

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

- Fonctions d'intercorrélation dans le cas 2D
- Résumé
- Intercorrélation des ondelettes
- Résultats numériques

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Théoriques	$\gamma_{\psi_0, \psi_0^H}$				$\gamma_{\psi_1, \psi_1^H}$		
	Ondelettes \ ℓ	0	1	2	3	1	2
Shannon	0.637	-0.212	0.127	-9.09×10^{-2}	0.637	0	0.212
Meyer $\epsilon = 1/3$	0.632	-0.199	0.107	-6.42×10^{-2}	0.594	-4.14×10^{-2}	0.119
Splines ordre 1	0.601	-0.129	3.48×10^{-2}	-9.30×10^{-3}	0.388	-5.75×10^{-2}	1.87×10^{-2}
Haar	0.513	-1.13×10^{-2}	-1.09×10^{-3}	-2.64×10^{-4}	0.108	5.70×10^{-3}	1.56×10^{-3}

Monte-Carlo		$\gamma_{\psi_0, \psi_0^H}$				$\gamma_{\psi_1, \psi_1^H}$		
Ondelettes	$j \setminus \ell$	0	1	2	3	1	2	3
Shannon	1	0.635	-0.211	0.126	-9.15×10^{-2}	0.637	-1.71×10^{-4}	0.212
	2	0.636	-0.213	0.130	-8.79×10^{-2}	0.634	7.06×10^{-4}	0.212
	3	0.635	-0.207	0.132	-9.01×10^{-2}	0.638	-1.24×10^{-3}	0.210
Meyer $\epsilon = 1/3$	1	0.631	-0.198	0.105	-6.47×10^{-2}	0.611	-1.24×10^{-2}	0.153
	2	0.631	-0.200	0.109	-6.11×10^{-2}	0.591	-4.09×10^{-2}	0.119
	3	0.630	-0.194	0.111	-6.34×10^{-2}	0.595	-4.26×10^{-2}	0.117
Splines ordre 1	1	0.600	-0.127	3.30×10^{-2}	-9.74×10^{-3}	0.477	1.62×10^{-2}	6.97×10^{-2}
	2	0.601	-0.130	3.76×10^{-2}	-6.54×10^{-3}	0.385	-5.75×10^{-2}	1.80×10^{-2}
	3	0.598	-0.123	3.94×10^{-2}	-9.32×10^{-3}	0.390	-5.81×10^{-2}	1.62×10^{-2}
Haar	1	0.503	-3.36×10^{-3}	-1.17×10^{-3}	2.78×10^{-4}	0.225	7.25×10^{-2}	4.64×10^{-2}
	2	0.510	-1.01×10^{-2}	7.24×10^{-6}	1.51×10^{-3}	9.97×10^{-2}	5.14×10^{-3}	1.08×10^{-3}
	3	0.510	-8.33×10^{-3}	2.79×10^{-3}	7.03×10^{-5}	0.107	6.77×10^{-3}	2.24×10^{-3}

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Débruitage d'images



DÉBRUITAGE MONO-CANAL

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

● Débruitage mono-canal

- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- Volonté de montrer que l'analyse M -bandes en arbre dual obtient de **meilleures performances** que :
 - ◆ la **transformée en ondelettes discrète** (DWT)
 - ◆ la **transformée en arbres dual dyadique** (DTT $M = 2$)
- Améliorations numériques (en terme de SNR) mais aussi visuelles.
- Volonté d'étudier l'**influence du nombre de bandes** ainsi que la **nature de l'ondelette choisie**

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- **Résultats**
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Barbara 512×512 , dégradée par un bruit additif, blanc, Gaussien et centré ; ondelettes : Meyer M -bandes.

		$SNR_{init} = 5.67$ dB		$SNR_{init} = 4.17$ dB		$SNR_{init} = 2.67$ dB	
		SURE	Biv	SURE	Biv	SURE	Biv
Variance du bruit connue	DWT $M = 2$	12.21	13.27	10.90	12.30	10.15	11.37
	DWT $M = 3$	12.18	13.32	11.13	12.41	10.43	11.54
	DWT $M = 4$	12.60	13.37	11.03	12.51	10.39	11.68
	DTT $M = 2$	12.88	13.75	11.84	12.77	10.83	11.83
	DTT $M = 3$	12.80	13.99	11.69	13.06	10.95	12.15
	DTT $M = 4$	13.32	14.16	12.28	13.31	11.20	12.47
Variance du bruit estimée	DWT $M = 2$	12.19	13.25	10.89	12.28	10.14	11.35
	DWT $M = 3$	12.17	13.31	11.13	12.41	10.42	11.54
	DWT $M = 4$	12.55	13.37	11.04	12.51	10.39	11.68
	DTT $M = 2$	12.99	13.79	11.92	12.83	11.02	11.90
	DTT $M = 3$	12.78	13.99	11.70	13.06	10.96	12.14
	DTT $M = 4$	13.30	14.17	12.23	13.31	11.21	12.47

Biv : seuillage bivarié (méthode bayésienne, dépendance inter-échelle) et SURE : SUREShrink (fondé sur le principe de Stein)

RÉSULTATS VISUELS

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

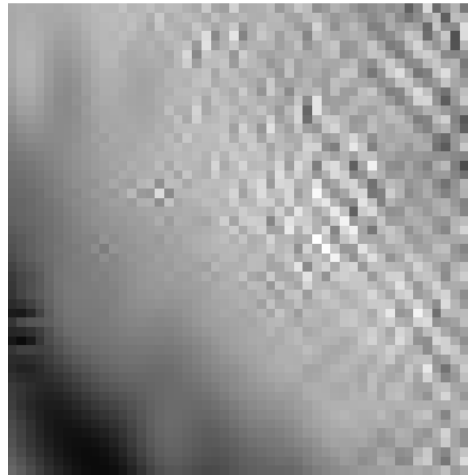
Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

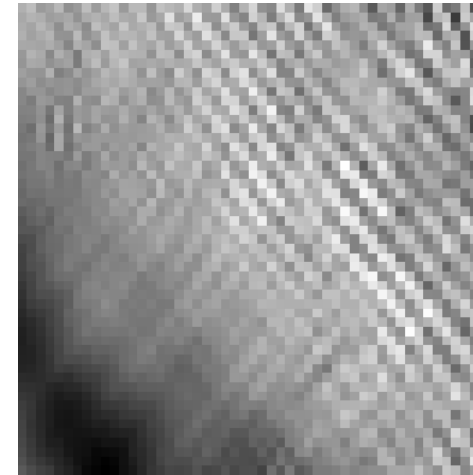
Déconvolution d'images

Microscopie confocale

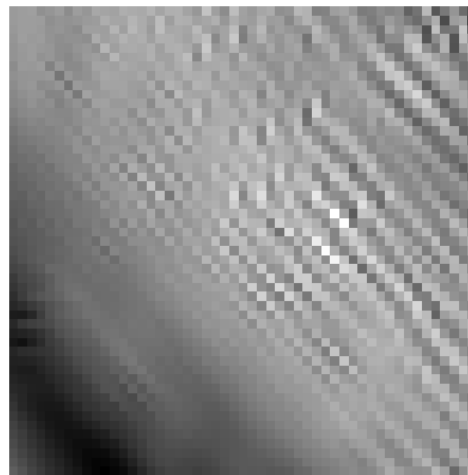
Conclusion



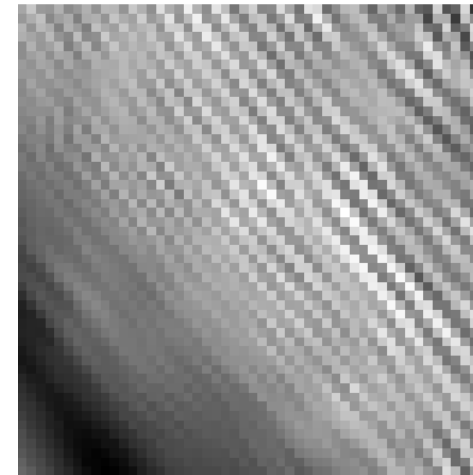
DWT $M = 2$



DWT $M = 4$



DTT $M = 2$



DTT $M = 4$

DÉBRUITAGE MULTI-CANAU

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Images multispectrales

≠

Images hyperspectrales



**Plus grand nombre
de composantes (bandes)**
(100 vs 10)

DÉBRUITAGE MULTI-CANAU

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

Images multispectrales

≠

Images hyperspectrales

Plus grand nombre
de composantes (bandes)
(100 vs 10)

■ Traiter chaque composantes séparément

■ Traiter les composantes conjointement

↙ Exploiter les dépendences inter-composantes

↙ Jusqu'à présent : souvent fondé sur des représentations monorésolutions

➤ ([Scheunders , 2004][Pizurica, Philips, 2005][Benazza, Pesquet, 2005])

PROBLÈME DE L'IMAGERIE MULTI-CANAU

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal

- Résultats

- Débruitage multi-canaux

- **Problème de l'imagerie multi-canaux**

- Voisinage

- Estimateurs : point de départ

- Estimateur proposé

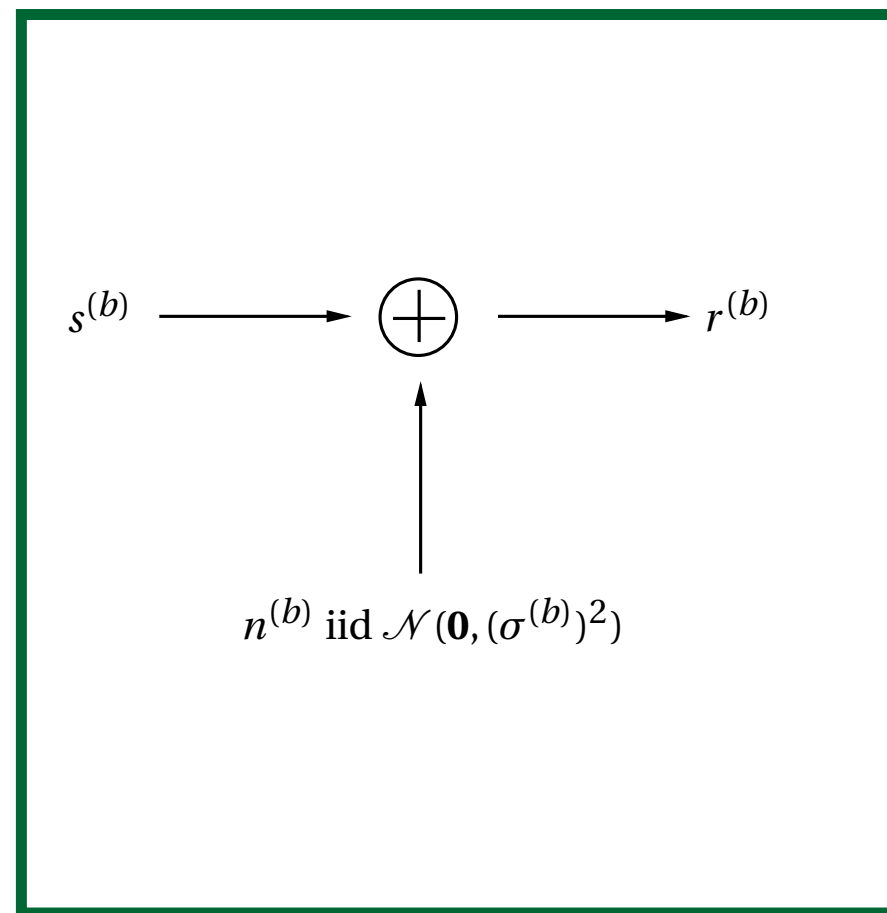
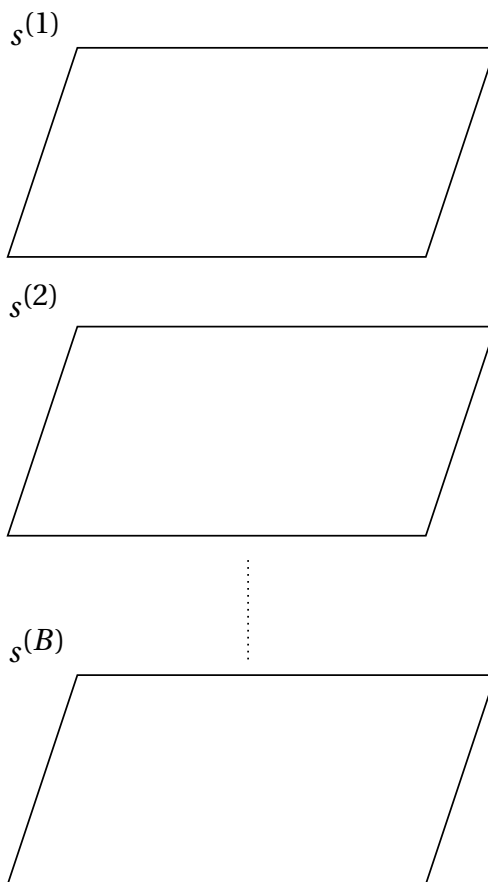
- Calcul des paramètres

- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



PROBLÈME DE L'IMAGERIE MULTI-CANAU

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux

● Problème de l'imagerie multi-canaux

● Voisinage

● Estimateurs : point de départ

● Estimateur proposé

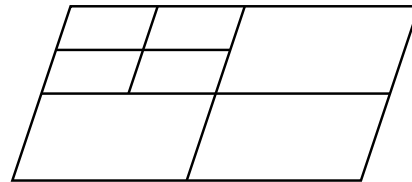
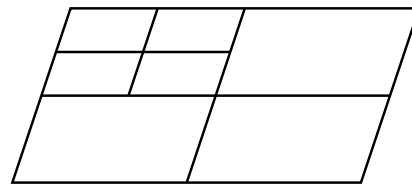
● Calcul des paramètres

● Résultats

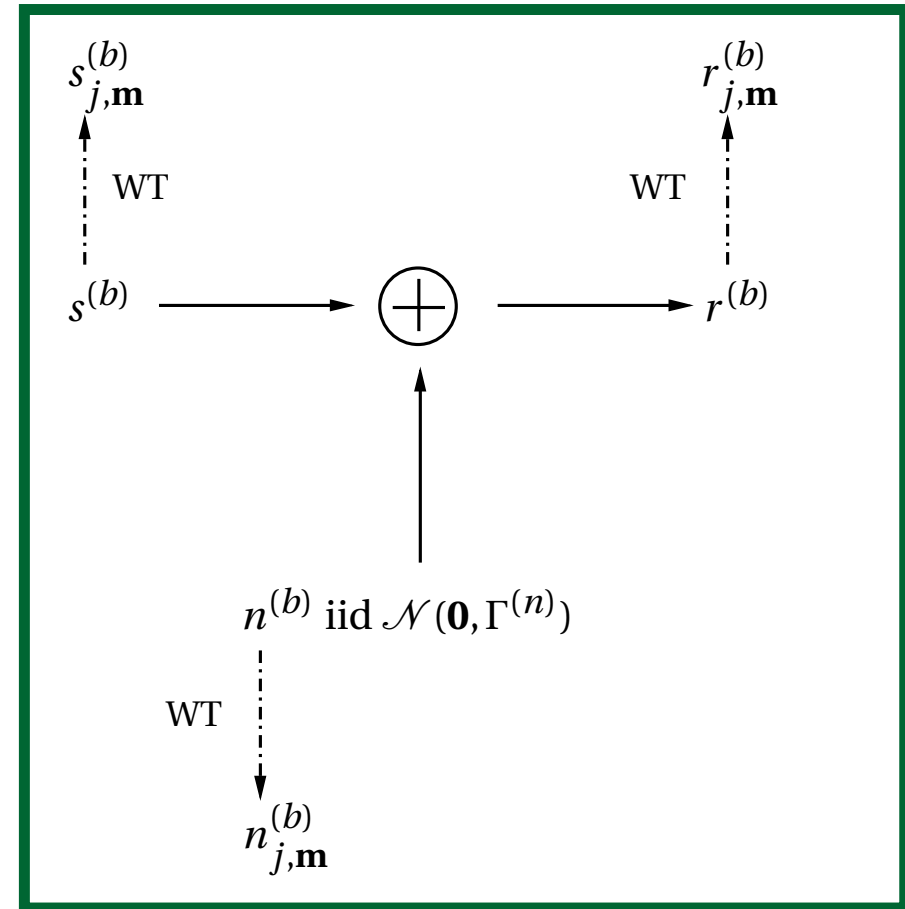
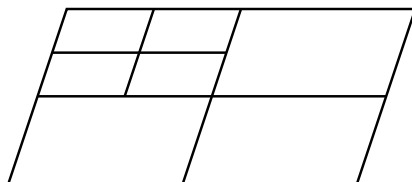
Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



⋮



Objectif : Construire un estimateur $\hat{s}_{j,m}^{(b)}$ des coef. d'ondelettes $s_{j,m}^{(b)}$ de $s^{(b)}$ à partir des coefficients d'ondelettes observés $r_{j,m}^{(b')}$ de tous les canaux b' .

PROBLÈME DE L'IMAGERIE MULTI-CANAU

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal

- Résultats

- Débruitage multi-canaux

- **Problème de l'imagerie multi-canaux**

- Voisinage

- Estimateurs : point de départ

- Estimateur proposé

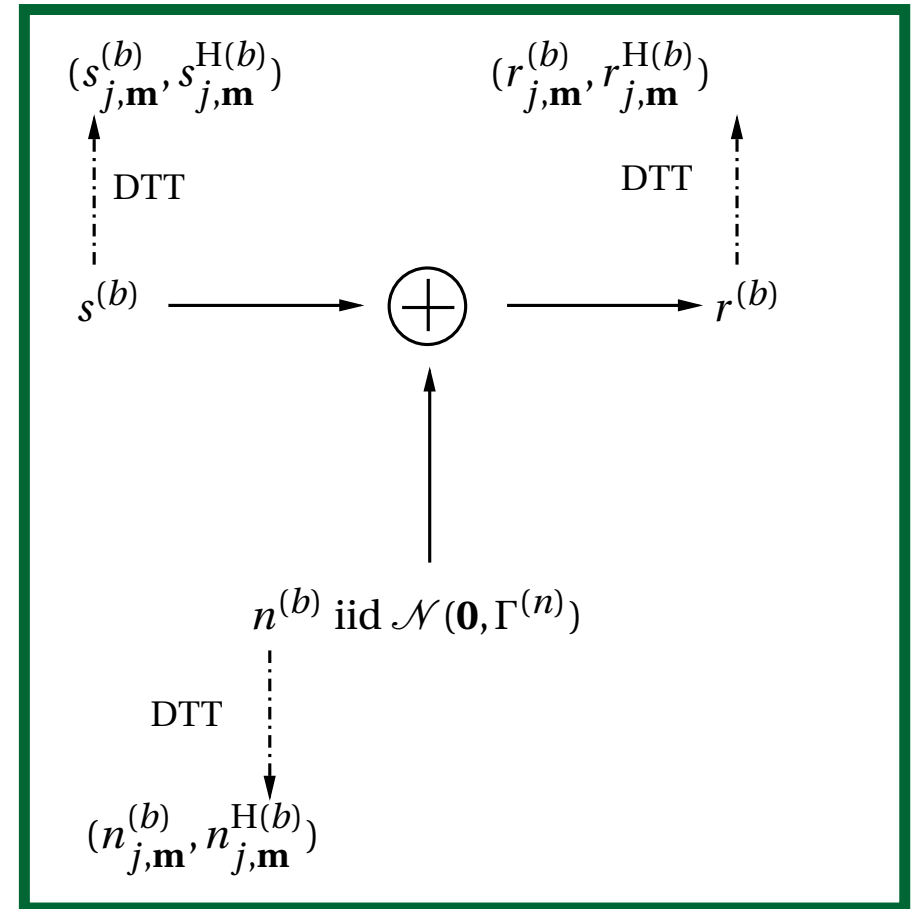
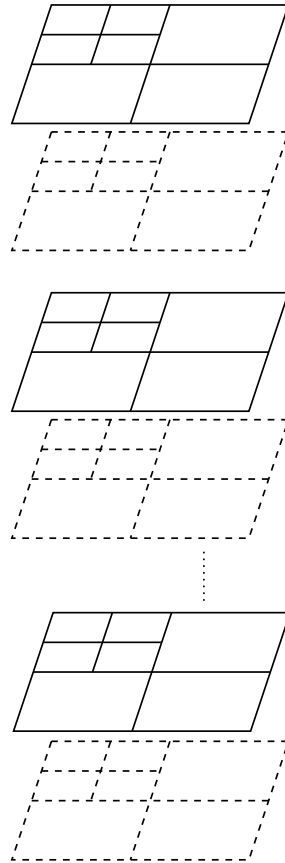
- Calcul des paramètres

- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion



Objectif : Construire un estimateur $\hat{s}_{j,m}^{(b)}$ (resp. $\hat{s}_{j,m}^{H(b)}$) des coef. issus de la DTT $s_{j,m}^{(b)}$ (resp. $s_{j,m}^{H(b)}$) de $s^{(b)}$ (resp. $s^{H(b)}$) à partir des coefficients d'ondelettes observés $r_{j,m}^{(b')}$ et $r_{j,m}^{H(b')}$ de tous les canaux b' .

VOISINAGE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage

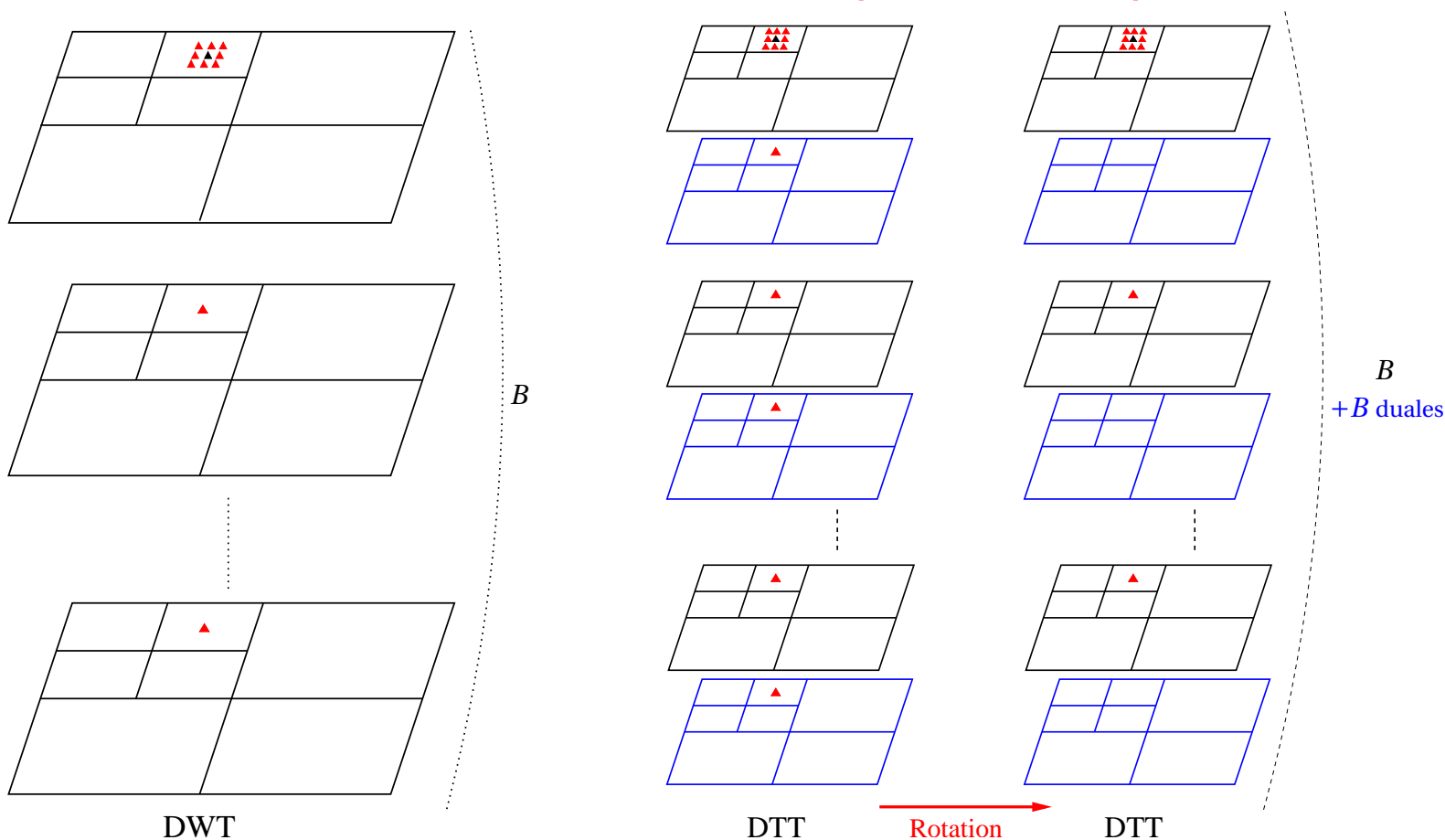
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

$\bar{r}_{j,m}^{(b)}(\mathbf{k})$: coefficients observés utilisés au débruitage de $s_{j,m}^{(b)}(\mathbf{k})$ à la position spatiale \mathbf{k} (ROV). On a choisi un voisinage combinant des informations *inter-composante et spatiale* :



ESTIMATEURS : POINT DE DÉPART

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- Neighblock [Cai and Silverman, 2001] :

Étude asymptotique minimax

$$\hat{\mathbf{s}}_{j,\mathbf{m}}^{(b)}(\mathbf{k}) = \left(\frac{\|\bar{\mathbf{r}}_{j,\mathbf{m}}^{(b)}(\mathbf{k})\|^2 - \lambda}{\|\bar{\mathbf{r}}_{j,\mathbf{m}}^{(b)}(\mathbf{k})\|^2} \right)_+ \mathbf{r}_{j,\mathbf{m}}^{(b)}(\mathbf{k})$$

- Seuillage bivarié [Şendur and Selesnick, 2002] :

Approche bayésienne

$$\hat{s}_{j,\mathbf{m}}^{(b)}(\mathbf{k}) = \left(\frac{\sqrt{(r_{j,\mathbf{m}}^{(b)}(\mathbf{k}))^2 + (r_{j+1,\mathbf{m}}^{(b)}(\lceil \frac{\mathbf{k}}{2} \rceil))^2} - \lambda}{\sqrt{(r_{j,\mathbf{m}}^{(b)}(\mathbf{k}))^2 + (r_{j+1,\mathbf{m}}^{(b)}(\lceil \frac{\mathbf{k}}{2} \rceil))^2}} \right)_+ r_{j,\mathbf{m}}^{(b)}(\mathbf{k})$$

où

$$(f)_+ \triangleq \begin{cases} f & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

→ On omettra les indices $j, \mathbf{m}, \mathbf{k}$ dans la suite.

ESTIMATEUR PROPOSÉ

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- **Estimateur proposé**
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- Fonction de seuillage généralisée $\eta_{\lambda}(\|\bar{\mathbf{r}}^{(b)}\|^{\beta})$, où :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}_+, \quad \eta_{\lambda}(\tau) = \left(\frac{\tau - \lambda}{\tau} \right)_+$$

et $\beta > 0$ et $\lambda \geq 0$.

-

$$\hat{s}^{\lambda^{(b)}} = f(\bar{\mathbf{r}}) = \eta_{\lambda^{(b)}}\left(\|\bar{\mathbf{r}}^{(b)}\|_{\Lambda^{(b)}}^{\beta^{(b)}}\right) (\mathbf{q}^{(b)})^{\top} \bar{\mathbf{r}}^{(b)}$$

où $\mathbf{q}^{(b)}$: vecteur de même taille que le ROV, $\beta^{(b)} > 0$, $\lambda^{(b)} \geq 0$,
 $\Lambda^{(b)}$: matrice symétrique définie semi-positive et $\|\cdot\|_{\Lambda^{(b)}}$ est la
 semi-norme définie par :

$$\forall \mathbf{u}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\Lambda^{(b)}} = (\mathbf{u}^{\top} \Lambda^{(b)} \mathbf{u})^{1/2}.$$

CALCUL DES PARAMÈTRES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

■ $\lambda^{(b)} \iff$ valeur de seuil (seuillage doux de $\|\bar{\mathbf{r}}^{(b)}\|_{\Lambda^{(b)}}^{\beta^{(b)}}$)

CALCUL DES PARAMÈTRES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- $\lambda^{(b)} \iff$ valeur de seuil (seuillage doux de $\|\tilde{\mathbf{r}}^{(b)}\|_{\Lambda^{(b)}}^{\beta^{(b)}}$)
- Objectif :
 - ◆ Trouver la valeur du seuil $\lambda^{(b)}$
 - ◆ Trouver le paramètre exposant $\beta^{(b)}$
 - ◆ Trouver le vecteur $\mathbf{q}^{(b)}$ servant à la combinaison linéaire

CALCUL DES PARAMÈTRES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- $\lambda^{(b)} \iff$ valeur de seuil (seuillage doux de $\|\bar{\mathbf{r}}^{(b)}\|_{\Lambda^{(b)}}^{\beta^{(b)}}$)
- Objectif :
 - ◆ Trouver la valeur du seuil $\lambda^{(b)}$
 - ◆ Trouver le paramètre exposant $\beta^{(b)}$
 - ◆ Trouver le vecteur $\mathbf{q}^{(b)}$ servant à la combinaison linéaire *minimisant l'erreur quadratique moyenne* :

$$R(\lambda, \beta, \mathbf{q}) = E\{|s^{(b)}(\mathbf{k}) - \hat{s}^{(b)}(\mathbf{k})|^2\}$$

$$= E\{|s^{(b)}(\mathbf{k})|^2\} + E\{|f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))|^2\} - 2E\{f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))s^{(b)}(\mathbf{k})\}.$$

CALCUL DES PARAMÈTRES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- $\lambda^{(b)} \iff$ valeur de seuil (seuillage doux de $\|\bar{\mathbf{r}}^{(b)}\|_{\Lambda^{(b)}}^{\beta^{(b)}}$)
- Objectif :
 - ◆ Trouver la valeur du seuil $\lambda^{(b)}$
 - ◆ Trouver le paramètre exposant $\beta^{(b)}$
 - ◆ Trouver le vecteur $\mathbf{q}^{(b)}$ servant à la combinaison linéaire *minimisant l'erreur quadratique moyenne :*

$$R(\lambda, \beta, \mathbf{q}) = E\{|s^{(b)}(\mathbf{k}) - \hat{s}^{(b)}(\mathbf{k})|^2\}$$

$$= E\{|s^{(b)}(\mathbf{k})|^2\} + E\{|f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))|^2\} - 2E\{f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))s^{(b)}(\mathbf{k})\}.$$

❗ $s^{(b)}$ est inconnu (principe de Stein) :

$$E\{s^{(b)}(\mathbf{k})f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))\} = E\{r^{(b)}(\mathbf{k})f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))\} - E\left\{\frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))}{\partial \bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k})}\right\}^\top \mathbf{\Gamma}(\bar{\mathbf{n}}^{(b)}, n^{(b)})$$

CALCUL DES PARAMÈTRES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

- $\lambda^{(b)} \iff$ valeur de seuil (seuillage doux de $\|\bar{\mathbf{r}}^{(b)}\|_{\Lambda^{(b)}}^{\beta^{(b)}}$)
- Objectif :
 - ◆ Trouver la valeur du seuil $\lambda^{(b)}$
 - ◆ Trouver le paramètre exposant $\beta^{(b)}$
 - ◆ Trouver le vecteur $\mathbf{q}^{(b)}$ servant à la combinaison linéaire *minimisant l'erreur quadratique moyenne :*

$$R(\lambda, \beta, \mathbf{q}) = E\{|s^{(b)}(\mathbf{k}) - \hat{s}^{(b)}(\mathbf{k})|^2\}$$

$$= E\{|s^{(b)}(\mathbf{k})|^2\} + E\{|f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))|^2\} - 2E\{f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))s^{(b)}(\mathbf{k})\}.$$

❗ $s^{(b)}$ est inconnu (principe de Stein) :

$$E\{s^{(b)}(\mathbf{k})f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))\} = E\{r^{(b)}(\mathbf{k})f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))\} - E\left\{\frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k}))}{\partial \bar{\mathbf{r}}^{(b)}(\mathbf{k})}\right\}^T \mathbf{\Gamma}(\bar{\mathbf{n}}^{(b)}, n^{(b)})$$

*Procédure d'optimisation similaire à celle de SUREshrink.
Procédure similaire dans la branche duale de la DTT.*

RÉSULTATS

- Introduction
- Plan
- Analyse en arbre dual
- Caractérisation du bruit
- Débruitage d'images
 - Débruitage mono-canal
 - Résultats
 - Débruitage multi-canaux
 - Problème de l'imagerie multi-canaux
 - Voisinage
 - Estimateurs : point de départ
 - Estimateur proposé
 - Calcul des paramètres
 - Résultats

- Déconvolution d'images
- Microscopie confocale
- Conclusion

Non redondant

Canal	SNR _{init}	Biv	ProbShrink (3 × 3)	BLS-GSM	BLS-GSM + parent	Surevect	Méthode proposée
$b = 1$	4.664	11.12	11.18	11.32	11.42	12.95	13.08
$b = 2$	5.653	11.60	11.63	11.81	11.90	12.99	13.14
$b = 3$	4.926	12.82	12.77	13.01	13.11	13.30	13.47
Moy.	5.081	11.85	11.86	12.05	12.14	13.08	13.23
$b = 1$	14.66	17.32	17.05	17.67	17.81	19.16	19.46
$b = 2$	15.65	18.01	17.65	18.36	18.50	19.35	19.65
$b = 3$	14.93	18.32	17.93	18.64	18.74	18.61	18.93
Moy.	15.08	17.88	17.54	18.22	18.35	19.04	19.35

Redondant

Canal	SNR _{init}	Curvelets	BLS-GSM red + parent	ProbShrink red (3 × 3)	ProbShrink red (1 × 1)	Méthode proposée
$b = 1$	4.664	11.16	12.21	12.36	12.84	13.27
$b = 2$	5.653	11.64	12.69	12.77	13.14	13.36
$b = 3$	4.925	12.92	13.88	13.88	14.00	13.85
Moy.	5.081	11.91	12.92	13.00	13.33	13.49
$b = 1$	14.66	16.87	18.47	18.22	18.95	19.52
$b = 2$	15.65	17.50	19.12	18.80	19.38	19.79
$b = 3$	14.93	18.31	19.53	19.24	19.28	19.47
Moy.	15.08	17.56	19.04	18.76	19.20	19.59

RÉSULTATS

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

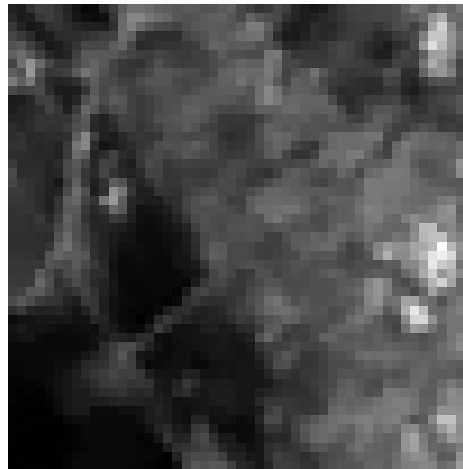
Débruitage d'images

- Débruitage mono-canal
- Résultats
- Débruitage multi-canaux
- Problème de l'imagerie multi-canaux
- Voisinage
- Estimateurs : point de départ
- Estimateur proposé
- Calcul des paramètres
- Résultats

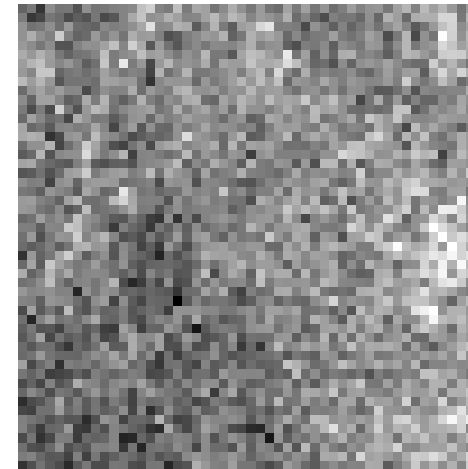
Déconvolution d'images

Microscopie confocale

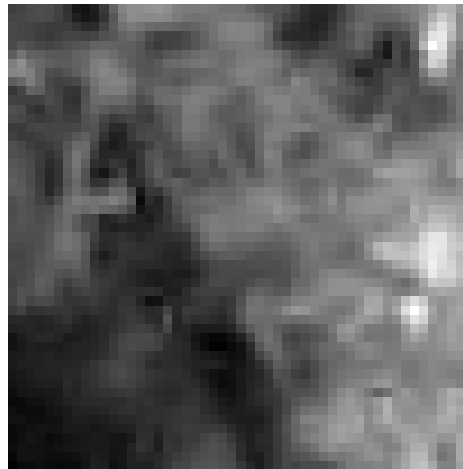
Conclusion



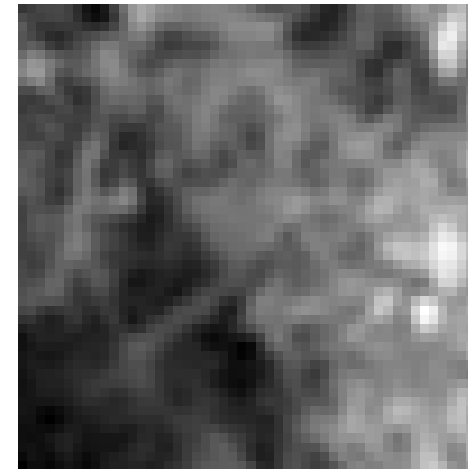
Originale



Bruitée



Probshrink



Notre approche

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

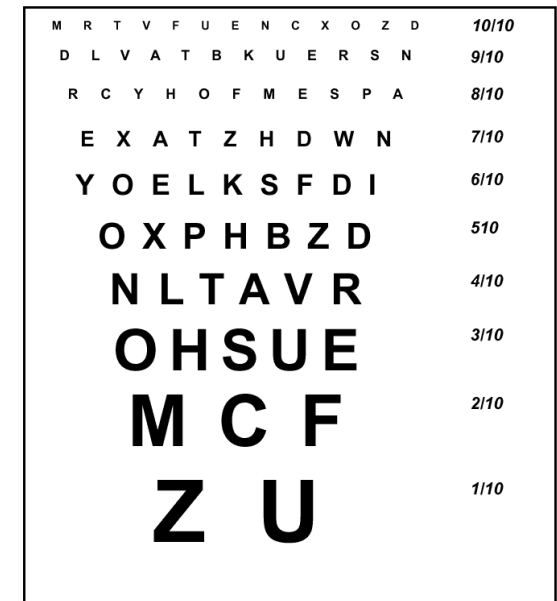
Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

Déconvolution d'images



PRÉSENTATION DU PROBLÈME

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

● **Présentation du problème**

- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

BUT : Déconvolution d'une image en ayant un a priori sur sa représentation dans une trame.

- Reconstruire \bar{x} dans une espace de Hilbert réel \mathcal{H} à partir de l'observation d'une image

$$z = T\bar{x} + v,$$

où $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$: opérateur linéaire de dégradation
 $v \in \mathcal{H}$: bruit additif.

PRÉSENTATION DU PROBLÈME

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

● **Présentation du problème**

- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

BUT : Déconvolution d'une image en ayant un a priori sur sa représentation dans une trame.

- Reconstruire \bar{x} dans une espace de Hilbert réel \mathcal{H} à partir de l'observation d'une image

$$z = T\bar{x} + v,$$

où $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$: opérateur linéaire de dégradation

$v \in \mathcal{H}$: bruit additif.

- Une image x peut être représentée par $x = \sum_{k \in \mathbb{K}} \xi_k e_k$ où $(\xi_k)_{k \in \mathbb{K}} \in \mathbb{R}$, $(e_k)_{k \in \mathbb{K}}$ sont les éléments de la trame et $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}$.

PRÉSENTATION DU PROBLÈME

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

● **Présentation du problème**

● Solution proposée

● Liens avec les approches
Bayésiennes

● Définition de l'opérateur
proximal

● Algorithme mis en œuvre

● Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

BUT : Déconvolution d'une image en ayant un a priori sur sa représentation dans une trame.

- Reconstruire \bar{x} dans une espace de Hilbert réel \mathcal{H} à partir de l'observation d'une image

$$z = T\bar{x} + v,$$

où $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$: opérateur linéaire de dégradation

$v \in \mathcal{H}$: bruit additif.

- Une image x peut être représentée par $x = \sum_{k \in \mathbb{K}} \xi_k e_k$ où $(\xi_k)_{k \in \mathbb{K}} \in \mathbb{R}$, $(e_k)_{k \in \mathbb{K}}$ sont les éléments de la trame et $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}$.
- L'opérateur de trame associé est

$$F: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{K}): x \mapsto (\langle x | e_k \rangle)_{k \in \mathbb{K}},$$

et son adjoint $F^*: \ell^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{H}: (\xi_k)_{k \in \mathbb{K}} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{K}} \xi_k e_k.$

SOLUTION PROPOSÉE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème

● Solution proposée

- Liens avec les approches Bayésiennes

- Définition de l'opérateur proximal

- Algorithme mis en œuvre

- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

Problème :

Soient

➤ $\Gamma_0(\mathcal{H})$: classe des fonctions convexes semi-continues inférieurement de \mathcal{H} vers $] -\infty, +\infty]$, non identiquement égales à $+\infty$.

➤ $(\phi_k)_{k \in \mathbb{K}}$: fonctions de $\Gamma_0(\mathbb{R})$

➤ $\Psi \in \Gamma_0(\mathcal{H})$: différentiable sur \mathcal{H} et ayant un gradient Lipschitz.

Notre objectif est de

$$\underset{(\xi_k)_{k \in \mathbb{K}} \in \ell^2(\mathbb{K})}{\text{minimiser}} \sum_{k \in \mathbb{K}} \phi_k(\xi_k) + \Psi(F^*(\xi_k)_{k \in \mathbb{K}}).$$

Exemple : $\Psi : x \mapsto \|Tx - z\|^2/2$.

LIENS AVEC LES APPROCHES BAYÉSIENNES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée

● Liens avec les approches
Bayésiennes

- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

Nous supposons ici que

- $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$ et $\mathbb{K} = \{1, \dots, K\}$ avec $N \leq K < \infty$.
- $\bar{x} = F^* \bar{z}$, où \bar{x}, z et v sont des réalisations des vecteurs réels \bar{X}, Z et V .
- \bar{X} et V sont mutuellement indépendants avec des densités de probabilité $f_{\bar{X}}$ log concave, semi-continue supérieurement et $\ln f_V$ concave, de gradient Lipschitz.

Estimateur Maximum A Posteriori (MAP) pour estimer \bar{x} :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^K}{\text{minimiser}} -\ln f_{\bar{X}}(x) - \ln f_V(z - TF^*x).$$

A priori sur les coefficients :

$$(\forall (\xi_k)_{k \in \mathbb{K}} \in \mathbb{R}^K) f_{\bar{X}}((\xi_k)_{k \in \mathbb{K}}) \propto \prod_{k=1}^K \exp(-\phi_k(\xi_k)).$$

Terme de fidélité aux données :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^N) \Psi(x) = -\ln f_V(z - Tx)$$

DÉFINITION DE L'OPÉRATEUR PROXIMAL

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème

- Solution proposée

- Liens avec les approches Bayésiennes

- Définition de l'opérateur proximal

- Algorithme mis en œuvre

- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

■ $\varphi \in \Gamma_0(\mathcal{H})$.

Pour tout $x \in \mathcal{H}$, la fonction $y \mapsto \varphi(y) + \|x - y\|^2/2$ atteint son minimum en un **point unique** noté $\text{prox}_\varphi x$. L'opérateur

$$\text{prox}_\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : x \mapsto \arg \min_{y \in \mathcal{H}} \varphi(y) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2$$

est appelé **l'opérateur proximal** de φ .

Quelques propriétés :

- Soit $\psi = \varphi(\cdot - z)$, où $z \in \mathcal{H}$. Alors $\text{prox}_\psi x = z + \text{prox}_\varphi(x - z)$.
- Soit $\psi = \varphi(\cdot / \rho)$, où $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $\text{prox}_\psi x = \rho \text{prox}_{\varphi/\rho^2}(x/\rho)$.
- Soit $\psi : y \mapsto \varphi(-y)$. Alors $\text{prox}_\psi x = -\text{prox}_\varphi(-x)$.

DÉFINITION DE L'OPÉRATEUR PROXIMAL

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

$(\phi_k)_{k \in \mathbb{K}}$: modélisent les coefficients de la représentation dans une trame ; associées à des fonctions densité de probabilité log-concave.

➤ $\text{prox}_{\phi_k}(\xi)$ calculé pour de nombreuses distributions log concaves :

➤ Laplace

➤ **Gaussienne généralisée**

➤ **maximum d'entropie**

➤ gamma

➤ uniforme

➤ Weibull

➤ Pearson type I

➤ Gaussienne

➤ Huber

➤ Laplace lissée

➤ chi

➤ triangulaire

➤ inverse Gaussienne généralisée

DÉFINITION DE L'OPÉRATEUR PROXIMAL

- Introduction
- Plan

- Analyse en arbre dual

- Caractérisation du bruit

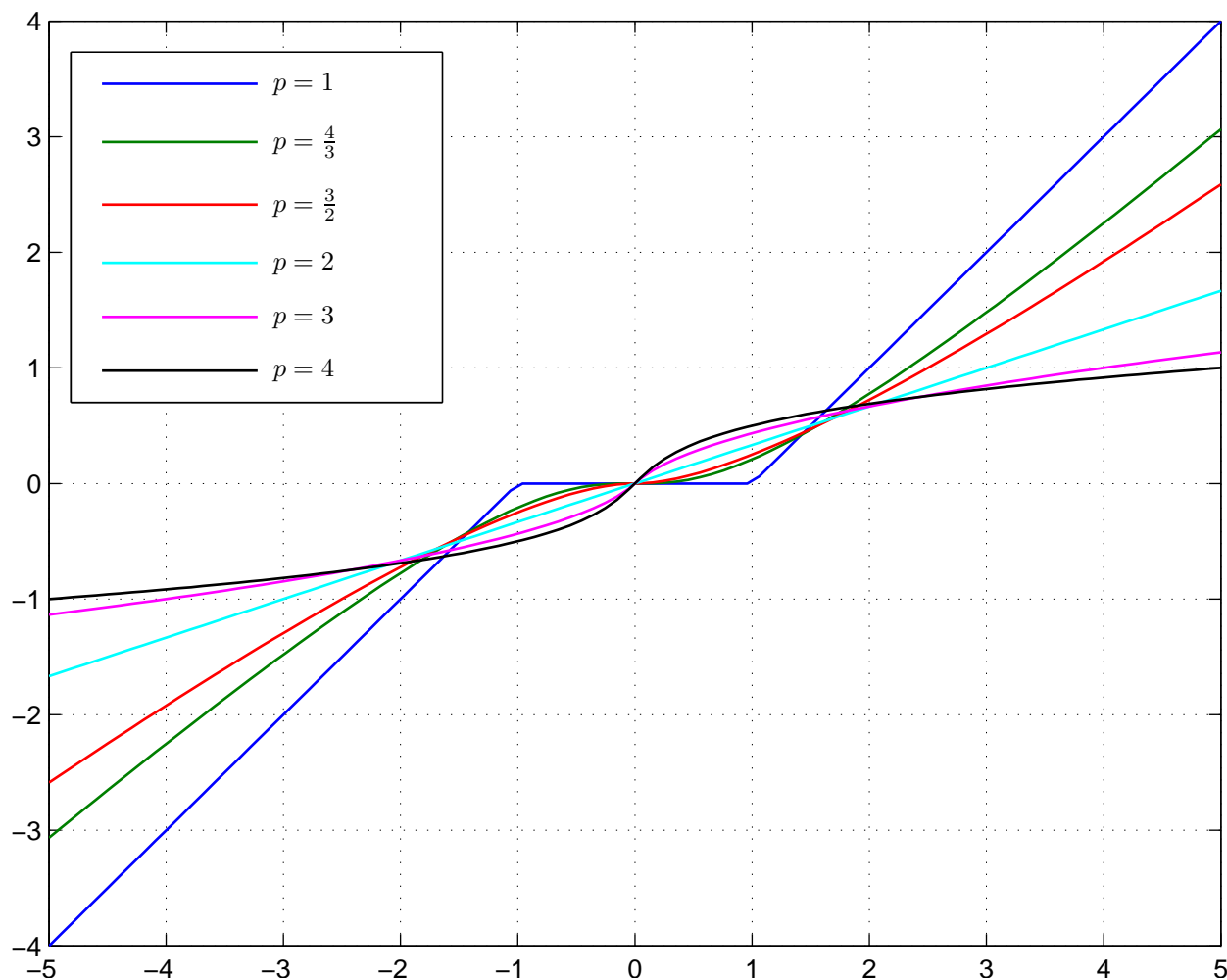
- Débruitage d'images

- Déconvolution d'images

 - Présentation du problème
 - Solution proposée
 - Liens avec les approches Bayésiennes
 - Définition de l'opérateur proximal
 - Algorithme mis en œuvre
 - Simulations

- Microscopie confocale

- Conclusion



Graphes de $\text{prox}_{|\cdot|^p}$.

DÉFINITION DE L'OPÉRATEUR PROXIMAL

- Introduction
- Plan

- Analyse en arbre dual

- Caractérisation du bruit

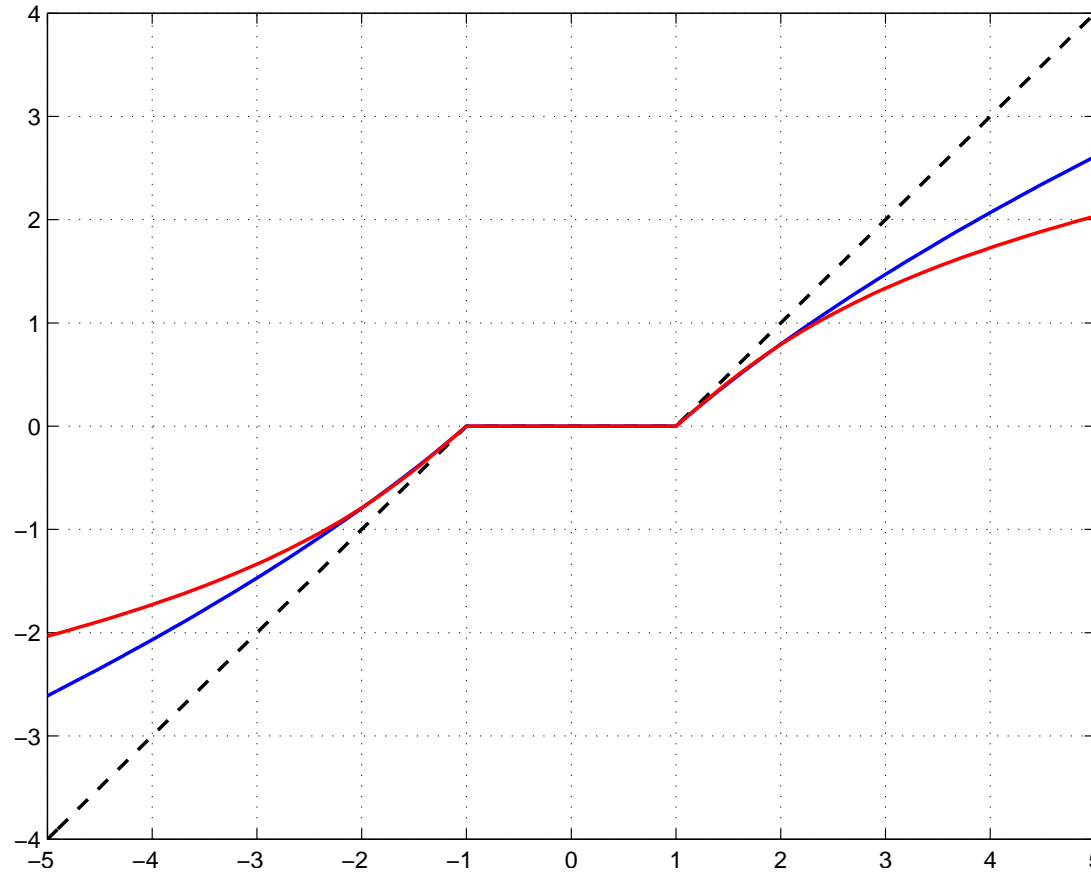
- Débruitage d'images

- Déconvolution d'images

 - Présentation du problème
 - Solution proposée
 - Liens avec les approches Bayésiennes
 - Définition de l'opérateur proximal
 - Algorithme mis en œuvre
 - Simulations

- Microscopie confocale

- Conclusion



$$\psi = |\cdot| + 0.07|\cdot|^2 + 0.05|\cdot|^3$$

$$\psi = |\cdot| + 0.07|\cdot|^2 + 0.05|\cdot|^4$$

Graphes de prox_{ψ} (pointillés pour $\psi = |\cdot|$).

ALGORITHME MIS EN ŒUVRE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

Fixons $x_0 \in \ell^2(\mathbb{K})$ et construisons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\xi_{n,k})_{k \in \mathbb{K}})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\xi_{n+1,k} = \xi_{n,k} + \lambda_n \left(\text{prox}_{\gamma_n \phi_k} \left(\xi_{n,k} - \gamma_n (F(\nabla \Psi(F^* x_n))) \right) - \xi_{n,k} \right).$$

ALGORITHME MIS EN ŒUVRE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

Fixons $x_0 \in \ell^2(\mathbb{K})$ et construisons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\xi_{n,k})_{k \in \mathbb{K}})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\xi_{n+1,k} = \xi_{n,k} + \lambda_n \left(\text{prox}_{\gamma_n \phi_k} (\xi_{n,k} - \gamma_n (F(\nabla \Psi(F^* x_n))) - \xi_{n,k}) \right).$$

- $0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < 2/\beta$ (β est la constante de Lipchitz de $F \circ \nabla \Psi \circ F^*$)
- $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$

ALGORITHME MIS EN ŒUVRE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

Fixons $x_0 \in \ell^2(\mathbb{K})$ et construisons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\xi_{n,k})_{k \in \mathbb{K}})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\xi_{n+1,k} = \xi_{n,k} + \lambda_n \left(\text{prox}_{\gamma_n \phi_k} (\xi_{n,k} - \gamma_n (F(\nabla \Psi(F^* x_n)) + F b_n)) + \alpha_{n,k} - \xi_{n,k} \right).$$

- $0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < 2/\beta$ (β est la constante de Lipchitz de $F \circ \nabla \Psi \circ F^*$)
- $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{K}} |\alpha_{n,k}|^2} < +\infty$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_n\| < +\infty$

ALGORITHME MIS EN ŒUVRE

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- **Algorithme mis en œuvre**
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

Fixons $x_0 \in \ell^2(\mathbb{K})$ et construisons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\xi_{n,k})_{k \in \mathbb{K}})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\xi_{n+1,k} = \xi_{n,k} + \lambda_n \left(\text{prox}_{\gamma_n \phi_k} (\xi_{n,k} - \gamma_n (F(\nabla \Psi(F^* x_n)) + F b_n)) + \alpha_{n,k} - \xi_{n,k} \right).$$

➤ $0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < 2/\beta$ (β est la constante de Lipchitz de $F \circ \nabla \Psi \circ F^*$)

➤ $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$

➤ $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{K}} |\alpha_{n,k}|^2} < +\infty$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|b_n\| < +\infty$

➤ \mathbb{K} est fini ou non et il existe $L \in \mathbb{K}$ tel que, $\forall k \in L$, $\phi_k \geq 0$ et tel qu'il existe $(\zeta_k)_{k \in L} \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k \in L} |\zeta_k|^2 < +\infty$, $\sum_{k \in L} |\text{prox}_{\phi_k} \zeta_k|^2 < +\infty$ et $\sum_{k \in L} \phi_k \zeta_k < +\infty$.

Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge faiblement** vers une solution du problème.

Cas particuliers : [Combettes, Wajs, 2005] $\rightarrow (e_k)_{k \in \mathbb{K}}$ base orthonormale
 [Daubechies et al., 2004] $\rightarrow (e_k)_{k \in \mathbb{K}}$ base orthonormale, Ψ quadratique,
 $\|T\| = 1$, $\gamma_n \equiv 1$, $\lambda_n \equiv 1$, $\phi_k = \omega_k |\cdot|^p$, $p \in [1, 2]$.

SIMULATIONS

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

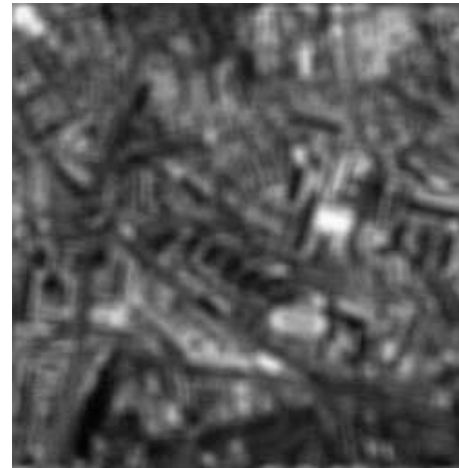
Microscopie confocale

Conclusion

Originale



Dégradée



Restaurée



SNR = 11.05 dB

SNR = 15.14 dB

L'analyse **en arbre dual** apporte **0.4 dB d'amélioration** par rapport aux ondelettes correspondantes.

SIMULATIONS

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

Restaurée avec une DWT



SNR = 14.74 dB

Restaurée avec une DTT



SNR = 15.14 dB

Visuellement, les directions sont mieux préservées et les artefacts atténués.

SIMULATIONS

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

- Présentation du problème
- Solution proposée
- Liens avec les approches Bayésiennes
- Définition de l'opérateur proximal
- Algorithme mis en œuvre
- Simulations

Microscopie confocale

Conclusion

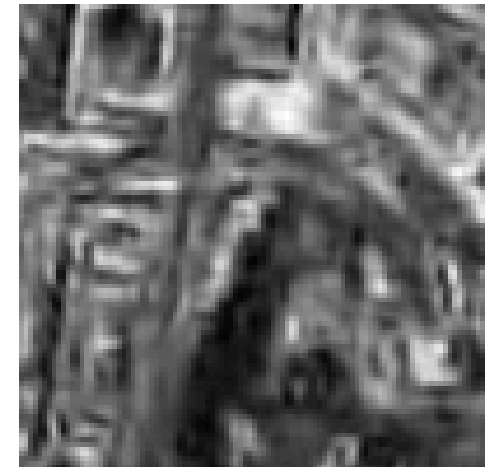
Originale



Restaurée (DWT)



Restaurée (DTT)



- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

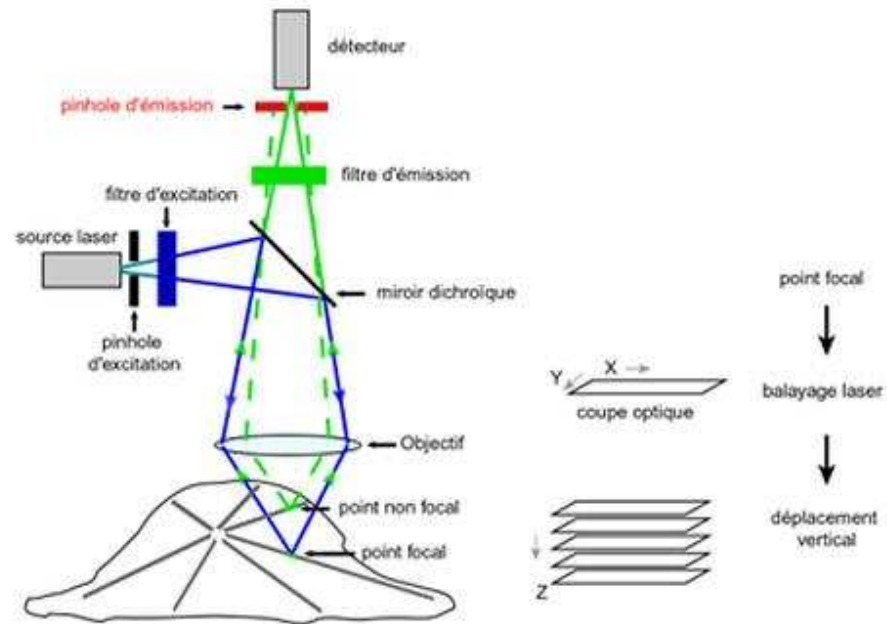
Déconvolution d'images

Microscopie confocale

- Présentation
- Méthodes proposées
- Simulations

Conclusion

Microscopie confocale



PRÉSENTATION DU PROBLÈME

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

● **Présentation**

● Méthodes proposées

● Simulations

Conclusion

➤ Modèle considéré :

$$i = \mathcal{P}(o * h)$$

où \mathcal{P} est un **bruit de Poisson**, i l'image observée, o l'objet et h la PSF (Point Spread Function).

- L'objectif est d'estimer l'image originale obtenant ainsi \hat{o} en ne connaissant uniquement l'image observée i .
- On utilise la **transformée en ondelettes** pour atteindre cet objectif.
- Possibilité de **prétraiter** les images avec les transformées de **Anscombe ou Fisz** afin de stabiliser la variance et d'appliquer des méthodes usuelles.

MÉTHODES PROPOSÉES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

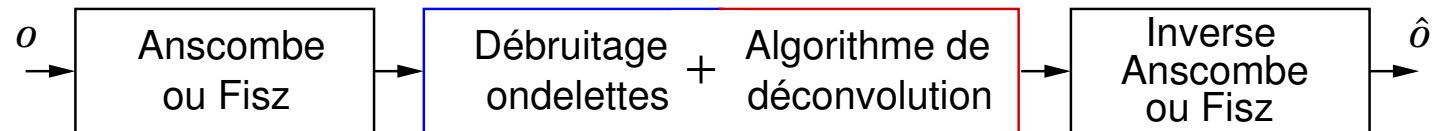
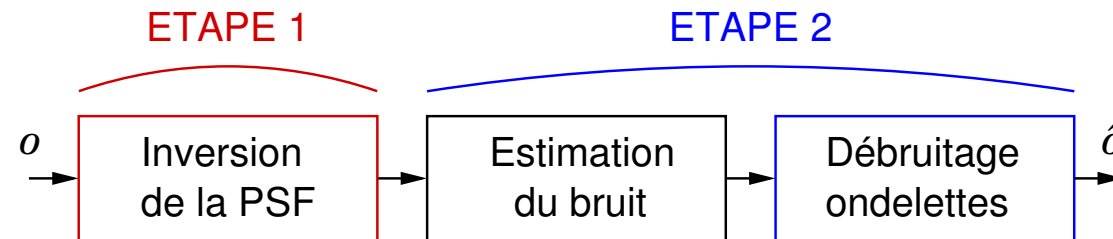
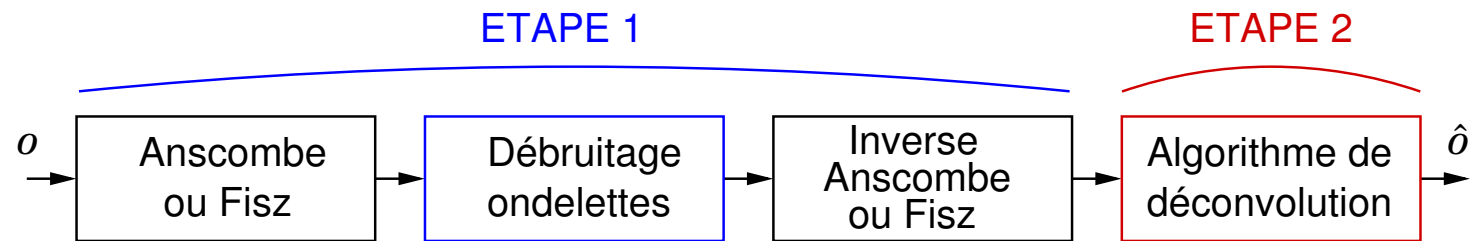
Microscopie confocale

● Présentation

● Méthodes proposées

● Simulations

Conclusion



SIMULATIONS : IMAGES FANTOMES

● Introduction

● Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

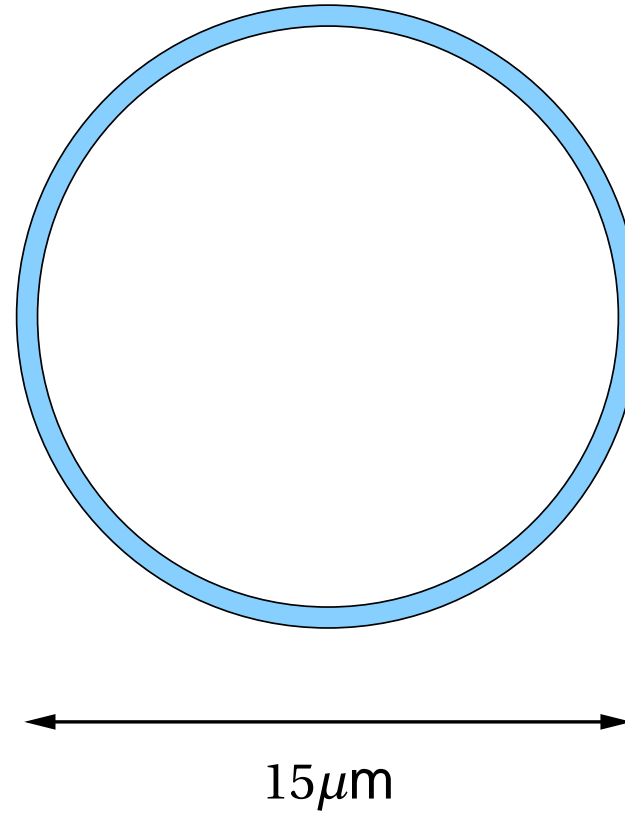
Microscopie confocale

● Présentation

● Méthodes proposées

● Simulations

Conclusion



SIMULATIONS : IMAGES FANTOMES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

- Présentation
- Méthodes proposées
- Simulations

Conclusion



Originale



Restaurée (meth 1.)



Restaurée (meth. 3)

Meth. 1 : débruitage puis déconvolution (Richardson-Lucy)

Meth. 3 : algorithme proposé avec DWT

SIMULATIONS : IMAGES FANTOMES

- Introduction
- Plan

- Analyse en arbre dual

- Caractérisation du bruit

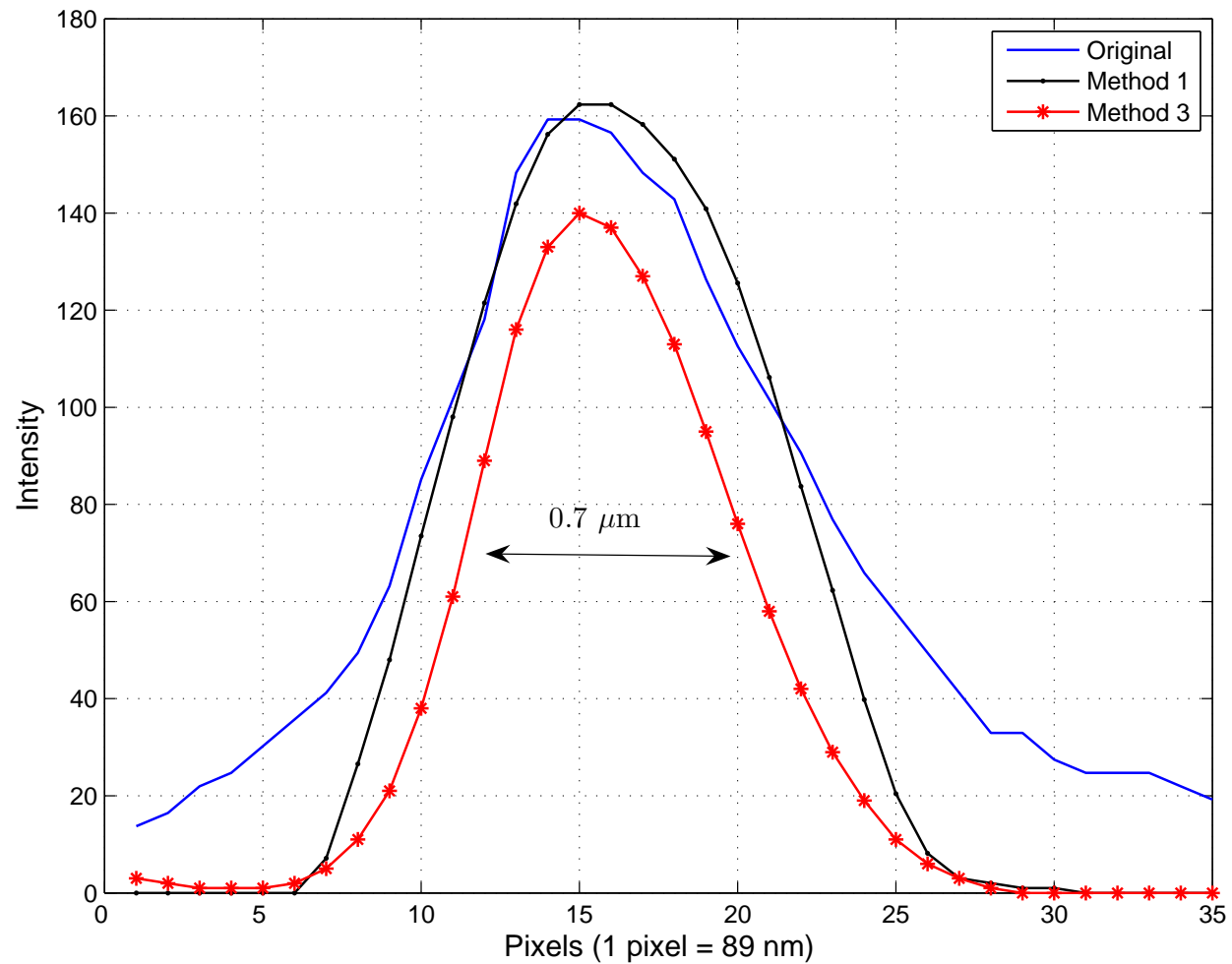
- Débruitage d'images

- Déconvolution d'images

- Microscopie confocale

 - Présentation
 - Méthodes proposées
 - Simulations

- Conclusion



CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

● Conclusion



- Extension à d'autres applications tridimensionnelles
 - Traitement de volumes de données (sismique, biomédical (tomographie), microscopie, ...)
 - ◆ Mettre en oeuvre des méthodes prenant en compte directement un bruit de Poisson
 - ◆ Reconstruction 4D
- Compression de données
 - Utilisation de la transformée en ondelettes M -bandes biorthogonales en arbre dual

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- Introduction
- Plan

Analyse en arbre dual

Caractérisation du bruit

Débruitage d'images

Déconvolution d'images

Microscopie confocale

Conclusion

● Conclusion



- Extension à d'autres applications tridimensionnelles
 - Traitement de volumes de données (sismique, biomédical (tomographie), microscopie, ...)
 - ◆ Mettre en oeuvre des méthodes prenant en compte directement un bruit de Poisson
 - ◆ Reconstruction 4D
- Compression de données
 - Utilisation de la transformée en ondelettes M -bandes biorthogonales en arbre dual

Merci