



energie atomique • énergies alternatives



R³B – GLAD

Mesures Magnétiques

Présenté par Fernando H. Fornari Genaro

*Stage effectué au CEA
Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives
Sous la responsabilité de Aline Curtoni*

Sommaire

1. Introduction

2. L'aimant « R3B-GLAD »

3. Problématique

4. Géométrie de la chambre à vide

5. Résolution de l'équation de Laplace

5.1. Les coordonnées curvilignes orthogonales

5.2. Choix du système de coordonnées

5.3. Solution de l'équation de Laplace

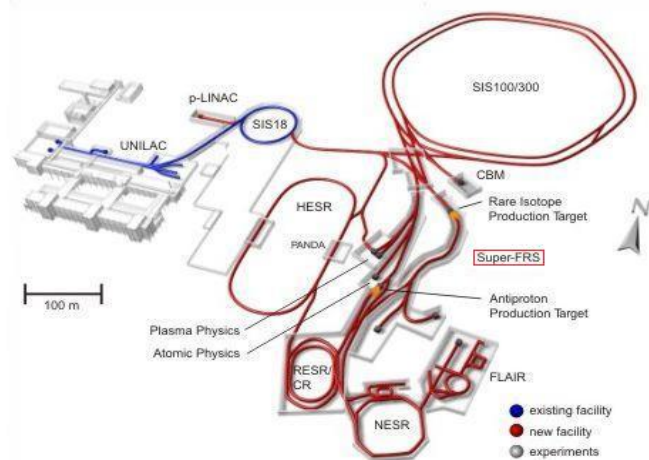
5.4. Les fonctions Lamé

6. Détermination des coefficients de la solution

7. Conclusion

1. Introduction

Le **SACM** « *Service des Accélérateurs, de la Cryogénie et du Magnétisme* » est en charge de la conception et de la réalisation du spectromètre supraconducteur **R3B-GLAD** « *Reaction studies with Relativistic Radioactive Beams of exotic nuclei* » et « *GSI Large Acceptance Dipole* ».



Le Projet FAIR (GSI - Allemagne)

L'installation:

- double anneau d'une circonférence d'environ 1100 mètres;
- réalisation simultanée de jusqu'à quatre programmes scientifiques.

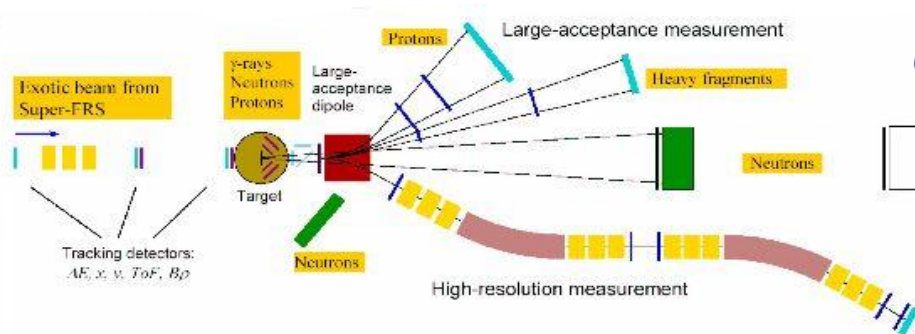
Les études:

- faisceaux de noyaux exotiques d'énergie de l'ordre de 1 GeV par nucléon;
- ...

L'expérience R3B

Objectifs:

- Réactions en cinématique inverse (noyaux lourds sur cible légère)
- Mesures de la cinématique de réaction à haute énergie avec une grande résolution en impulsion et en angle;



Sommaire

1. Introduction

2. L'aimant « R3B-GLAD »

3. Problématique

4. Géométrie de la chambre à vide

5. Résolution de l'équation de Laplace

5.1. Les coordonnées curvilignes orthogonales

5.2. Choix du système de coordonnées

5.3. Solution de l'équation de Laplace

5.4. Les fonctions Lamé

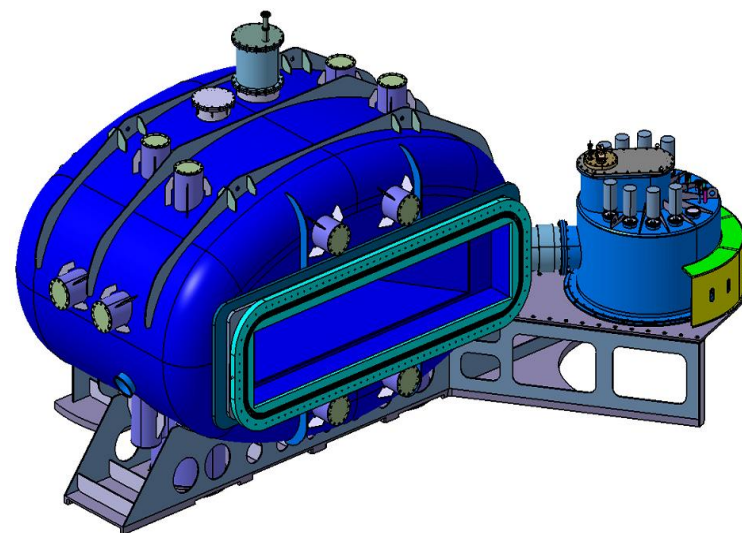
6. Détermination des coefficients de la solution

7. Conclusion

2. L'aimant « R3B-GLAD »

Spécifications:

- ouverture angulaire de ± 80 mrad en horizontal et en vertical à l'entrée de l'aimant.
- intégrale de champ de $4,8 T.m$;
- champ de fuite inférieur à $20 mT$ (autour de la zone de la cible);
- précision de 10^{-3} sur l'impulsion et $1 mrad$ sur les angles de déviation au point de réaction.



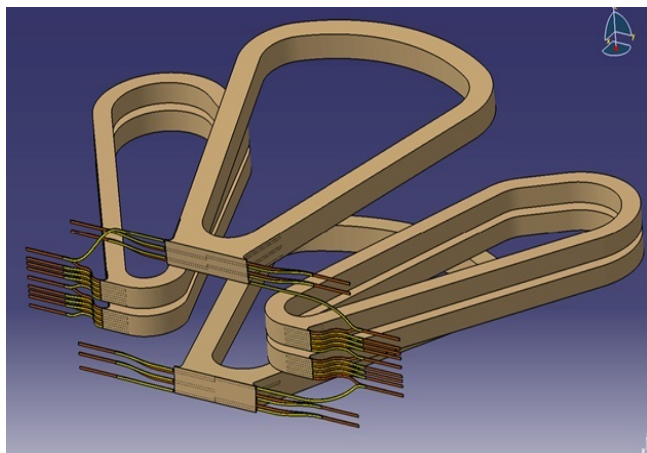
Le Champ Magnétique

Les bobines:

- 6 bobines supraconductrices inclinées, tournées et de formes trapézoïdales (longueur environ 3 mètres);
- placées au plus près de l'acceptance faisceau, pour limiter le volume magnétique et l'énergie stockée.
- avec un blindage actif à l'extérieur ($< 20 mT$);
- densité de courant $73 A.mm^{-2}$.

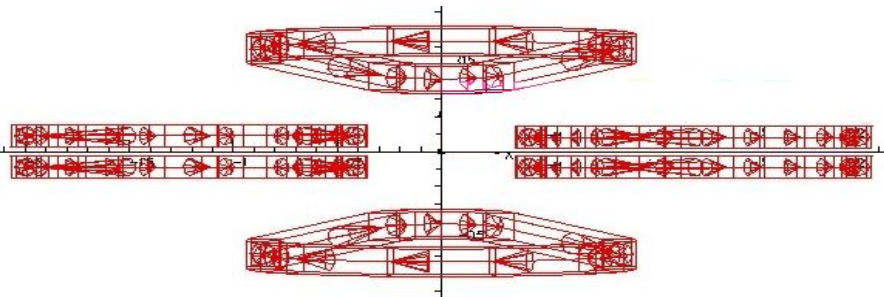
Les symétries:

Deux bobines principales de part et d'autre du plan médian et centrées sur l'axe de l'aimant. Quatre bobines latérales, deux par deux, et symétrique au plan vertical contenant l'axe de l'aimant.

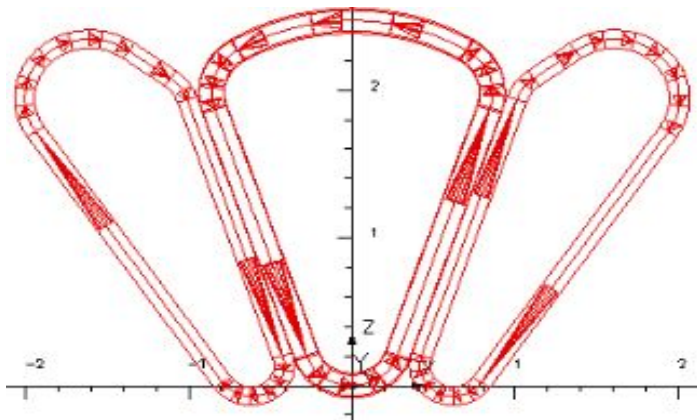


La symétrie et antisymétrie de la distribution de courants et du champ magnétique.

Le plan xOz: symétrie de la distribution de courant -> antisymétrie du champ magnétique, seulement B_y est non nulle.



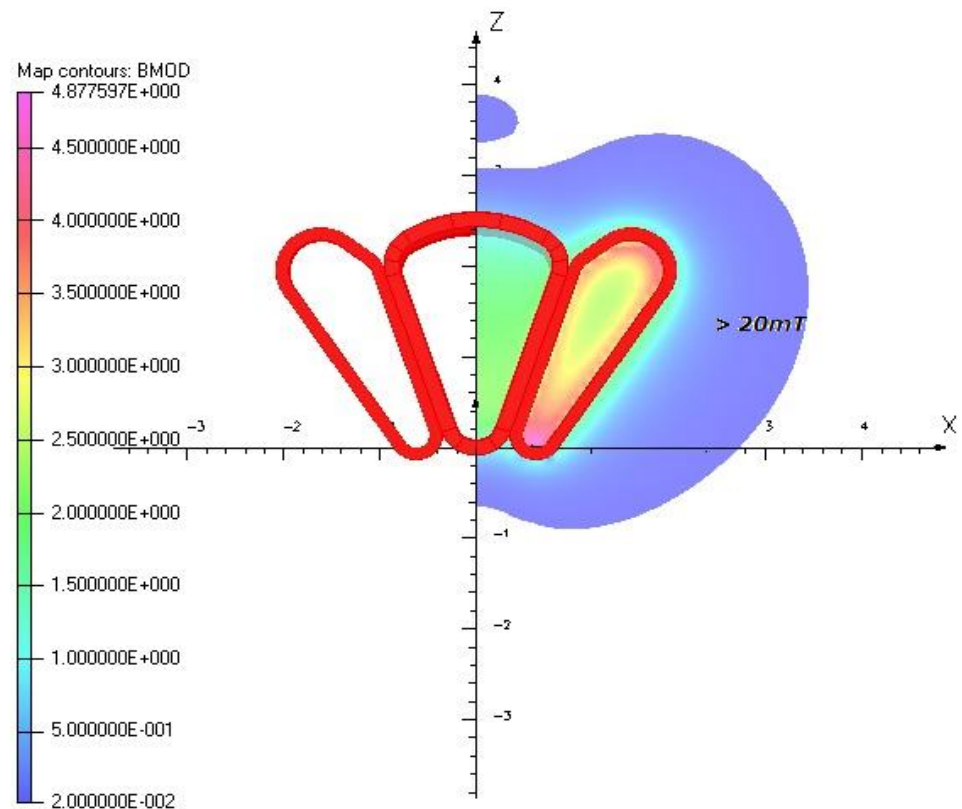
Le plan yOz: antisymétrie de la distribution de courant -> symétrie du champ magnétique, donc B_x est nulle.



Relations de symétrie:

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= -B_x(x, -y, z) = -B_x(-x, y, z) \\ B_y(x, y, z) &= B_y(x, -y, z) = B_y(-x, y, z) \\ B_z(x, y, z) &= -B_z(x, -y, z) = B_z(-x, y, z) \end{aligned}$$

Carte du champ magnétique:



Sommaire

1. Introduction

2. L'aimant « R3B-GLAD »

3. Problématique

4. Géométrie de la chambre à vide

5. Résolution de l'équation de Laplace

5.1. Les coordonnées curvilignes orthogonales

5.2. Choix du système de coordonnées

5.3. Solution de l'équation de Laplace

5.4. Les fonctions Lamé

6. Détermination des coefficients de la solution

7. Conclusion

3. Problématique

L'idée de ce travail est de mettre en place une méthode qui permette de déterminer la valeur du champ magnétique de l'aimant R3B-GLAD dans une région d'intérêt à partir de mesures sur une surface qui définit les frontières de cette région.

→ A partir des équations de Maxwell,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

Si, dans la région concernée, la densité de courant \mathbf{J} est nulle, \mathbf{B} peut être écrit sous forme du gradient d'un *potentiel scalaire magnétique* Φ_M . Les deux équations se réduisent alors à une équation de Laplace

$$\Delta \Phi_M = 0$$

La problématique: déterminer un système de coordonnées où l'équation de Laplace peut être résolue par séparation de variables.

Quoi faire: il faut définir une surface appartenant à un des systèmes où l'équation de Laplace est séparable de telle façon que son intérieur soit « magnétiquement » vide et qui contienne la plus grande région où nous voulons un développement du potentiel scalaire dont dérive le champ.

Sommaire

1. Introduction

2. L'aimant « R3B-GLAD »

3. Problématique

4. Géométrie de la chambre à vide

5. Résolution de l'équation de Laplace

5.1. Les coordonnées curvilignes orthogonales

5.2. Choix du système de coordonnées

5.3. Solution de l'équation de Laplace

5.4. Les fonctions Lamé

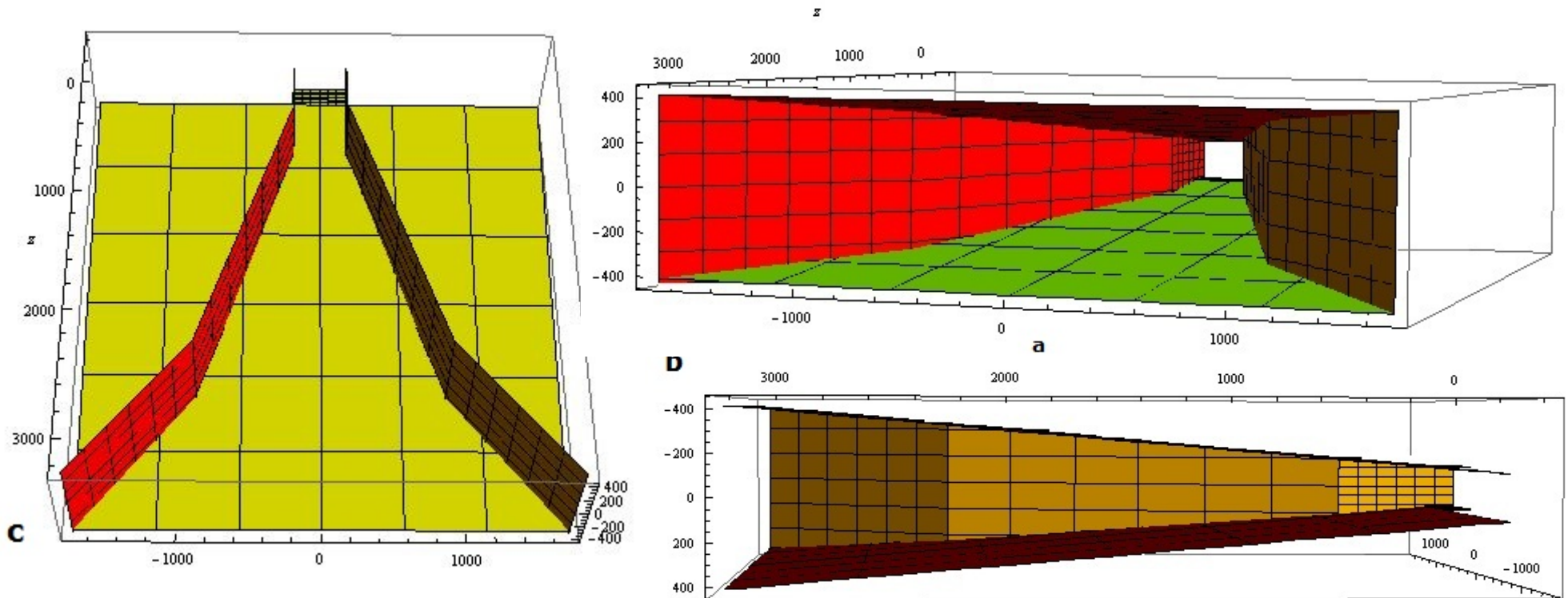
6. Détermination des coefficients de la solution

7. Conclusion

4. Géométrie de la chambre à vide

À partir de ce moment commence le travail que nous avons développé pendant le stage.

Géométrie complexe: nous ne pouvons pas définir, comme il est fait sur la plupart des aimants, un système de coordonnées de type *sphériques* ou *cylindriques*.



Représentation spatiale du volume utile de l'aimant. Pour reconstruire ce volume et pendant tout le stage nous avons utilisé le logiciel **MATHEMATICA**.

Sommaire

1. Introduction

2. L'aimant « R3B-GLAD »

3. Problématique

4. Géométrie de la chambre à vide

5. Résolution de l'équation de Laplace

5.1. Les coordonnées curvilignes orthogonales

5.2. Choix du système de coordonnées

5.3. Solution de l'équation de Laplace

5.4. Les fonctions Lamé

6. Détermination des coefficients de la solution

7. Conclusion

5. Résolution de l'équation de Laplace

Les (11 + 2) systèmes de coordonnées dans l'espace Euclidien où l'équation de Laplace peut être résolue par séparation des variables sont:

A. *Coordonnées Ellipsoïdales*

1. Coordonnées Rectangulaires

2. Coordonnées Cylindriques Circulaires

3. Coordonnées Elliptiques Cylindriques

4. Coordonnées Paraboliques Cylindriques

5. Coordonnées Sphériques

6. Coordonnées Coniques

7. Coordonnées Paraboliques

8. Coordonnées Sphéroïdales Prolate

9. *Coordonnées Sphéroïdales Oblate*

10. Coordonnées Paraboloïdales

B. Coordonnées Bisphériques

C. Coordonnées Toroïdales

5.1 Les coordonnées curvilignes orthogonales

Système composée par les (11 + 2) formes qui sont reconnues en tant que systèmes de coordonnées « différent » et nommé en accord avec sa symétrie.

Définition:

Famille de trois surfaces orthogonales,

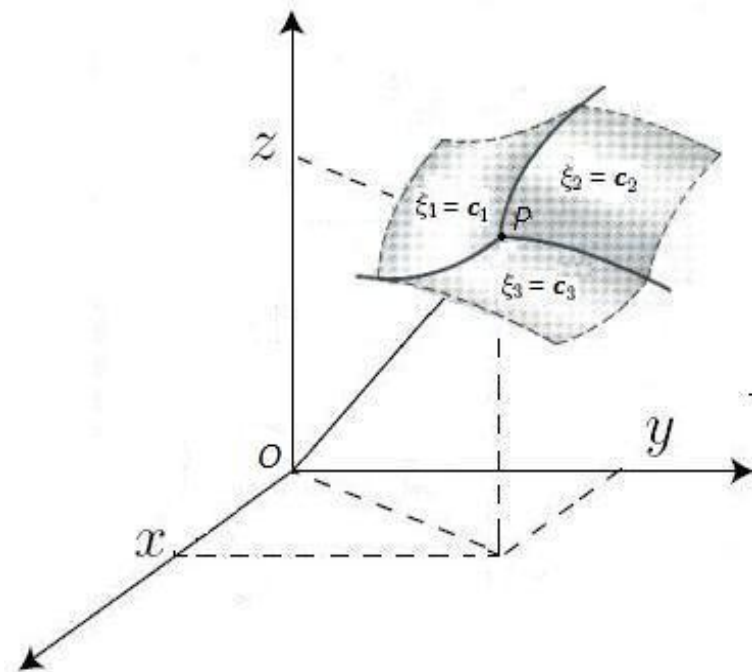
$$F_1(x, y, z) = \xi_1$$

$$F_2(x, y, z) = \xi_2$$

$$F_3(x, y, z) = \xi_3$$

Ceci correspond a un système triple orthogonal formé par trois familles de surfaces, où ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 peuvent être vus comme un ensemble de coordonnées pour un point d'intersection de ces trois surfaces.

On peut aussi inverser l'équation ci-dessous et obtenir x , y et z en termes de ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 .

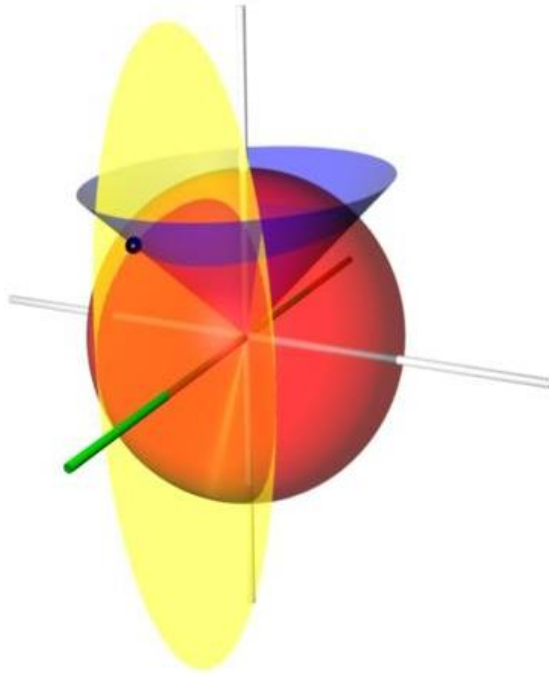


5.2. Choix du système de coordonnées

On cherche une surface qui occupe un plus grand volume utile de l'aimant, mais qui serait également une des trois surfaces orthogonales constituant un système de coordonnées curvilignes.

Première approche:

L'idée initiale a été d'utiliser comme système de coordonnées les *coordonnées coniques* dont les familles de surfaces orthogonales sont une sphère et deux cônes



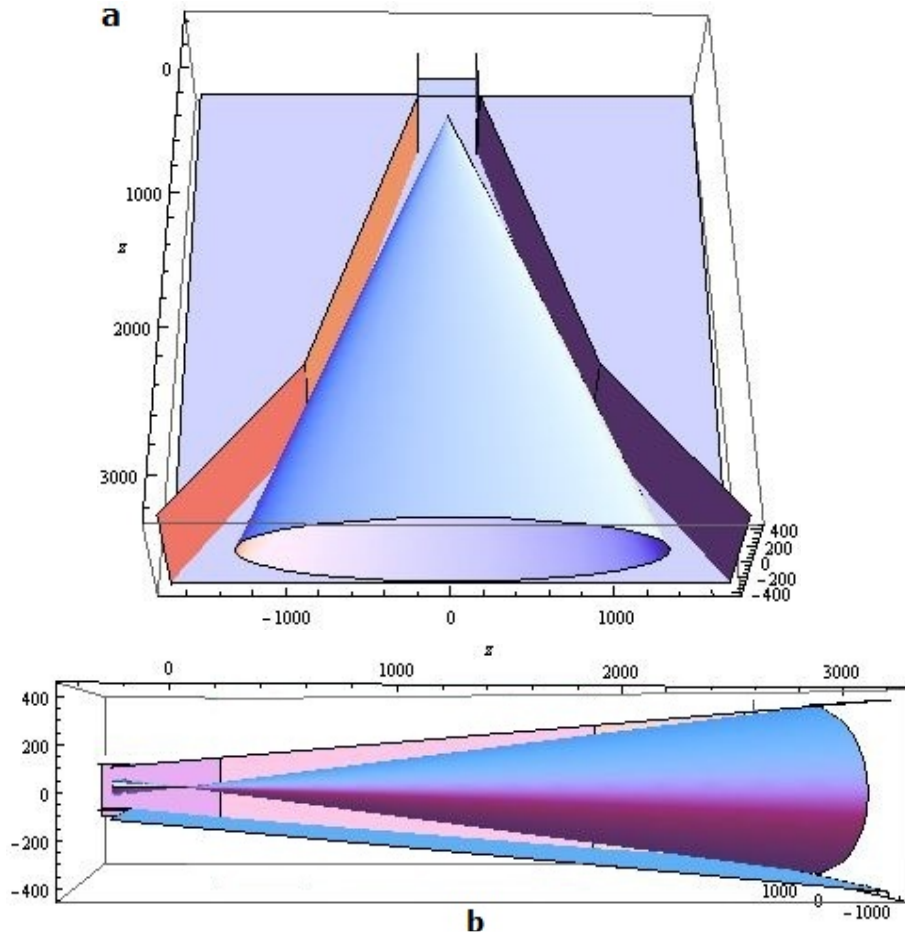
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - h^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - k^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - h^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - k^2} = 0.$$

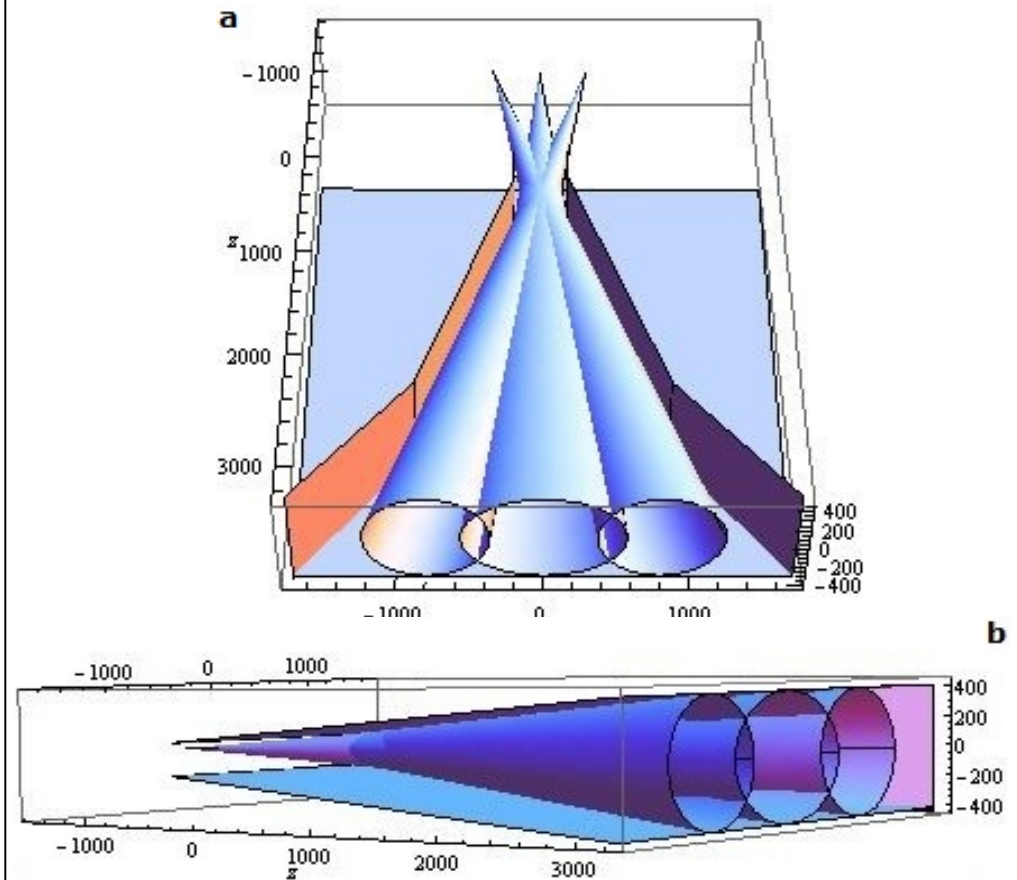
où $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \mu$ et $\xi_3 = \nu$ sont les coordonnées coniques et k, h les paramètres qui définissent les familles de surfaces dont les valeurs sont liées au volume de la chambre à vide de l'aimant.

Un cône elliptique:



Cette construction ne couvre pas assez bien la région entre 0 et 0,4m (l'axe z) où le gradient de champ est important

Trois cônes elliptiques:



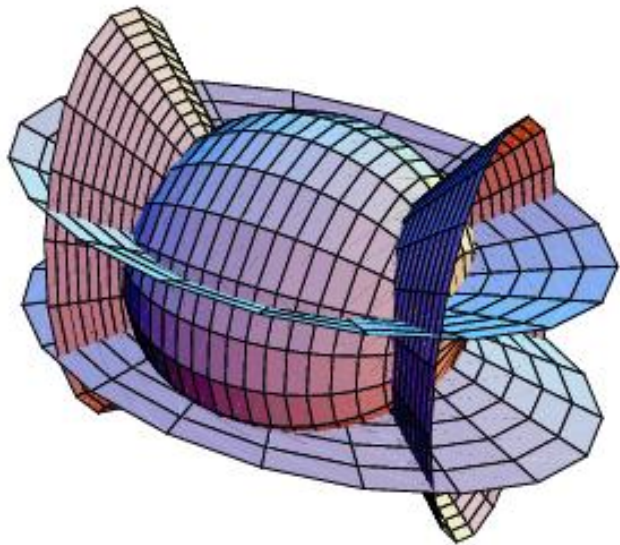
Les cônes sont décalés de l'origine du système de coordonnées et aucun d'entre eux ne coïncide avec les surfaces qui définissent le système de coordonnées .

On est encore à la recherche du système de coordonnées approprié.

Deuxième approche:

Pour un système de *coordonnées ellipsoïdales confocales*. Les coordonnées ellipsoïdales confocales sont définies selon un ellipsoïde de demi-axes **a**, **b** et **c**, respectivement, suivant **x**, **y** et **z**:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$



À partir de cette équation nous écrivons les équations des familles de surfaces orthogonales qui constituent ce système de coordonnées

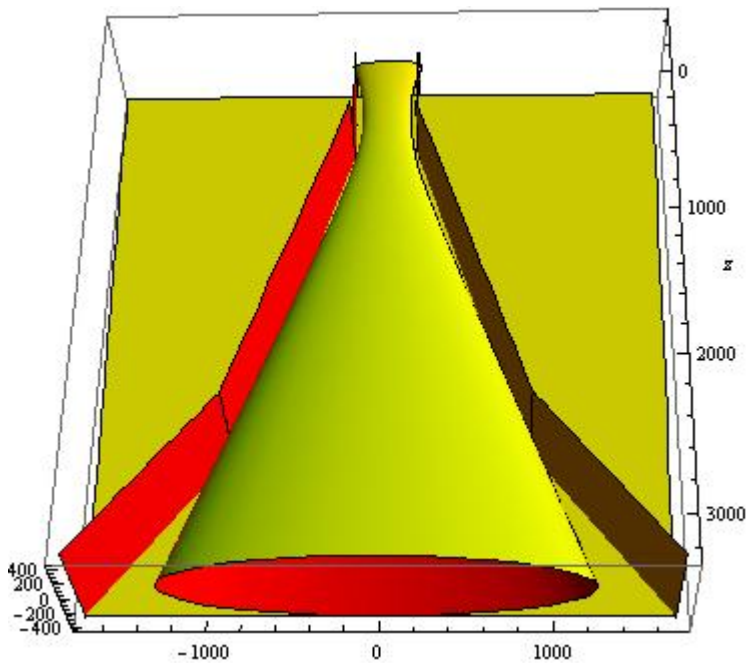
$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - h^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - k^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - h^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - k^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - h^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - k^2} = 1$$

dont les paramètres **ρ** , **μ** , **ν** sont les coordonnées ellipsoïdales et **$k^2 = a^2 - c^2$** , **$h^2 = a^2 - b^2$** les paramètres définissant les familles de surfaces. Pour $k^2 \leq \rho^2 \leq \infty$ nous avons des ellipsoïdes, $h^2 \leq \mu^2 \leq k^2$ des hyperboloïdes à une nappe et $0 \leq \nu^2 \leq h^2$ des hyperboloïdes à deux nappes

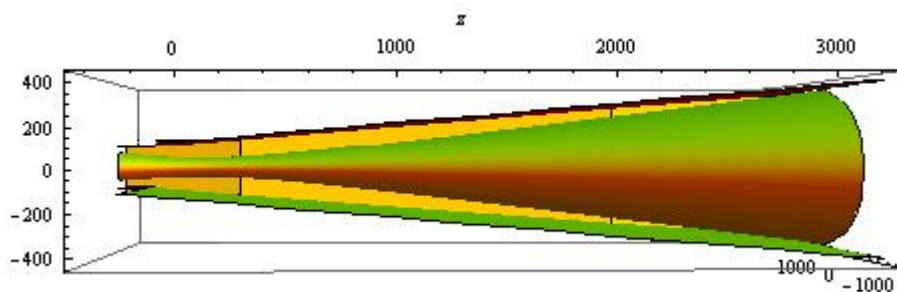
Remplissage de la chambre à vide avec un hyperboloïde



Il occupe un volume plus important de la chambre que le cône précédent. En outre, cette surface coïncide avec une des familles qui compose les coordonnées ellipsoïdales confocales.

Ainsi nous pouvons définir la coordonnée de la surface limite ($\mu = \text{const}$ pour un hyperboloïde à une nappe) et les paramètres k et h :

$$\begin{aligned}\mu &= 150 \\ k^2 &= 177736 \\ h^2 &= 20000,\end{aligned}$$



$$\left(\frac{x}{150}\right)^2 + \left(\frac{y}{50}\right)^2 - \left(\frac{z}{394}\right)^2 = 1$$

On a choisi celle-ci!!!

Nous avons utilisé ces paramètres pour valider notre modèle.

5.3. Solution de l'équation de Laplace

Le Laplacien dans le système de coordonnées curvilignes orthogonal s'écrit

$$\Delta\Phi_M = \sum_n \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial \Phi_M}{\partial \xi_n} \right]$$

où h_n est le facteur scalaire,

$$h_n^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_n} \right)^2$$

Nous pouvons trouver les expressions de \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} en fonctions des coordonnées ellipsoïdales ρ , μ , ν

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - h^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - k^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - h^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - k^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - h^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - k^2} &= 1 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{\rho^2 \mu^2 \nu^2}{h^2 k^2} \\ y^2 &= \frac{(\rho^2 - h^2)(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}{h^2(k^2 - h^2)} \\ z^2 &= \frac{(\rho^2 - k^2)(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}{k^2(k^2 - h^2)} \end{aligned} \right.$$

Ainsi, l'équation de Laplace dans le système de coordonnées ellipsoïdales est

$$\begin{aligned}
 & (\mu^2 - \nu^2)\sqrt{(\rho^2 - k^2)(\rho^2 - h^2)}\frac{\partial}{\partial\rho} \left[\sqrt{(\rho^2 - k^2)(\rho^2 - h^2)}\frac{\partial\Phi_M}{\partial\rho} \right] \\
 & + (\nu^2 - \rho^2)\sqrt{(k^2 - \mu^2)(\mu^2 - h^2)}\frac{\partial}{\partial\mu} \left[\sqrt{(k^2 - \mu^2)(\mu^2 - h^2)}\frac{\partial\Phi_M}{\partial\mu} \right] \\
 & + (\rho^2 - \mu^2)\sqrt{(k^2 - \nu^2)(h^2 - \nu^2)}\frac{\partial}{\partial\nu} \left[\sqrt{(k^2 - \nu^2)(h^2 - \nu^2)}\frac{\partial\Phi_M}{\partial\nu} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Séparations de variables: soit $\Phi_M = F(\rho)G(\mu)H(\nu)$ une forme de solution, en substituant dans l'équation ci-dessus nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & (\rho^2 - h^2)(\rho^2 - k^2)\frac{d^2F(\rho)}{d\rho^2} + \rho(2\rho^2 - h^2 - k^2)\frac{dF(\rho)}{d\rho} + \\
 & + [p - m(m + 1)\rho^2] F(\rho) = 0 \\
 & (\mu^2 - h^2)(\mu^2 - k^2)\frac{d^2G(\mu)}{d\mu^2} + \mu(2\mu^2 - h^2 - k^2)\frac{dG(\mu)}{d\mu} + \\
 & + [p - m(m + 1)\mu^2] G(\mu) = 0 \\
 & (\nu^2 - h^2)(\nu^2 - k^2)\frac{d^2H(\nu)}{d\nu^2} + \nu(2\nu^2 - h^2 - k^2)\frac{dH(\nu)}{d\nu} + \\
 & + [p - m(m + 1)\nu^2] H(\nu) = 0
 \end{aligned}$$

En conséquence, si $F(\rho) = E_m^p(\rho)$, nous avons $G(\mu) = E_m^p(\mu)$ et $H(\nu) = E_m^p(\nu)$.
Ainsi

$$\Phi_M(\rho, \mu, \nu) = E_m^p(\rho) E_m^p(\mu) E_m^p(\nu)$$

est une solution de L'équation de Laplace.

L'équation

$$\begin{aligned} & (\xi_i^2 - h^2)(\xi_i^2 - k^2) \frac{d^2 E_m^p(\xi_i)}{d\xi_i^2} + \xi_i(2\xi_i^2 - h^2 - k^2) \frac{dE_m^p(\xi_i)}{d\xi_i} + \\ & + [p - m(m + 1)\xi_i^2] E_m^p(\xi_i) = 0 \end{aligned}$$

est connue comme *l'équation de Lamé*, et $E_m^p(\xi_i)$ comme une **fonction de Lamé** ou un **harmonique ellipsoïdale**.

5.4. Les Fonctions de Lamé

Ces fonctions sont divisées en deux classes:

- fonctions polynômiales de degré m positif (*première classe*);
- fonctions polynômiales avec degré négatif (*deuxième classe*).

Pour un développement du potentiel scalaire dans l'intérieur d'une surface fermée, les fonctions de Lamé de deuxième classe sont physiquement inacceptables, car quand $\xi_i \rightarrow 0$ le potentiel divergerait.

Les quatre fonctions définissent les fonctions de Lamé de première classe:

$$\mathcal{K}(\xi_i) = \xi_i^{m-2r} \sum_{j=0}^r a_j \xi_i^{2j}$$

$$\mathcal{L}(\xi_i) = \xi_i^{1-m+2r} \sqrt{|\xi_i^2 - h^2|} \sum_{j=0}^{m-r-1} b_j \xi_i^{2j}$$

$$\mathcal{M}(\xi_i) = \xi_i^{1-m+2r} \sqrt{|\xi_i^2 - k^2|} \sum_{j=0}^{m-r-1} c_j \xi_i^{2j}$$

$$\mathcal{N}(\xi_i) = \xi_i^{m-2r} \sqrt{|\xi_i^2 - k^2| |\xi_i^2 - h^2|} \sum_{j=0}^{r-1} d_j \xi_i^{2j},$$

- $r=m/2$ pour m paire;
- $r=(m-1)/2$ pour m impaire;
- m est le degré de la fonction
- $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots, c_0, c_1, \dots, d_0, d_1, \dots,$ sont les coefficients polynomiaux.

En substituant ces expressions dans l'équation de Lamé, nous obtenons des relations de récurrence qui nous permettent de déterminer les différentes constantes $\mathbf{p}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots$. Dans la table ci-dessous il y a le nombre de valeurs de \mathbf{p} pour chaque type de fonction de Lamé.

Fonction de Lamé	Nb valeurs-propres (p)
\mathcal{K}	$r + 1$
\mathcal{L}	$m - r$
\mathcal{M}	$m - r$
\mathcal{N}	r
Total	$2m + 1$

Pour chaque m nous avons $2m + 1$ valeurs de \mathbf{p} .

Alors, pour une valeur \mathbf{p} , $\mathbf{E}_m^{\mathbf{p}}$ peut prendre les différentes formes $\mathbf{K}_m^{\mathbf{p}}, \mathbf{L}_m^{\mathbf{p}}, \mathbf{M}_m^{\mathbf{p}}$ ou $\mathbf{N}_m^{\mathbf{p}}$. Ainsi la solution analytique de l'équation de Laplace est

$$\Phi_M = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{2m+1} C_m^{\mathbf{p}} E_m^{\mathbf{p}}(\rho) E_m^{\mathbf{p}}(\mu) E_m^{\mathbf{p}}(\nu),$$

où $\mathbf{C}_m^{\mathbf{p}}$ sont les constantes définies par les conditions aux limites. Dans notre problème, celles-ci seront calculées sur l'hyperboloïde.

Le nombre des coefficients pour un m donné sera $(m + 1)^2$.

Les harmoniques elliptiques pour m jusqu'à 2

$m = 0$

$$K_0(\lambda) = 1$$

$$L_0(\lambda) = 0$$

$$M_0(\lambda) = 0$$

$$N_0(\lambda) = 0$$

$m = 1$

$$K_1(\lambda) = \lambda$$

$$L_1(\lambda) = \sqrt{|\lambda^2 - h^2|}$$

$$M_1(\lambda) = \sqrt{|\lambda^2 - k^2|}$$

$$N_1(\lambda) = 0$$

$m = 2$

$$K_2^{p1}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{3} \left(h^2 + k^2 + \sqrt{h^4 - h^2 k^2 + k^4} \right)$$

$$K_2^{p2}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{3} \left(h^2 + k^2 - \sqrt{h^4 - h^2 k^2 + k^4} \right)$$

$$L_2(\lambda) = \lambda \sqrt{|\lambda^2 - h^2|}$$

$$M_2(\lambda) = \lambda \sqrt{|\lambda^2 - k^2|}$$

$$N_2(\lambda) = \sqrt{|(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)|}$$

Sommaire

1. Introduction

2. L'aimant « R3B-GLAD »

3. Problématique

4. Géométrie de la chambre à vide

5. Résolution de l'équation de Laplace

5.1. Les coordonnées curvilignes orthogonales

5.2. Choix du système de coordonnées

5.3. Solution de l'équation de Laplace

5.4. Les fonctions Lamé

6. Détermination des coefficients de la solution

7. Conclusion

6. Détermination des coefficients de la solution

Dans une première approche nous considérons le développement jusqu'à $m = 2$. Premièrement, il faut écrire le gradient du potentiel Φ_M , car

$$\Phi_M : \mathbf{B} = -\nabla\Phi_M$$

$${}^{(2)}\nabla\Phi_M(\rho, \mu, \nu) = \begin{cases} (a_1 C_1^1 + b_1 C_2^1 \mathbb{E}_1^1 + c_1 C_2^2 \mathbb{E}_1^1 + a_1 C_2^3 \mathbb{E}_1^2 + a_1 C_2^4 \mathbb{E}_1^3) \hat{\mathbf{x}} \\ (a_2 C_1^2 + b_2 C_2^1 \mathbb{E}_1^2 + c_2 C_2^2 \mathbb{E}_1^2 + a_2 C_2^3 \mathbb{E}_1^1 + a_2 C_2^5 \mathbb{E}_1^3) \hat{\mathbf{y}} \\ (a_3 C_1^3 + b_3 C_2^1 \mathbb{E}_1^3 + c_3 C_2^2 \mathbb{E}_1^3 + a_3 C_2^4 \mathbb{E}_1^1 + a_3 C_2^5 \mathbb{E}_1^2) \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

où $\mathbb{E}_m^p(\rho, \mu, \nu) = E_m^p(\rho)E_m^p(\mu)E_m^p(\nu)$. Ainsi, nous avons

$$B_x = - \left(a_1 C_{11} + b_1 C_{21} E_1^1 + c_1 C_{22} E_1^1 + a_1 C_{23} E_1^2 + a_1 C_{24} E_1^3 \right)$$

$$B_y = - \left(a_2 C_{12} + b_2 C_{21} E_1^2 + c_2 C_{22} E_1^2 + a_2 C_{23} E_1^1 + a_2 C_{25} E_1^3 \right)$$

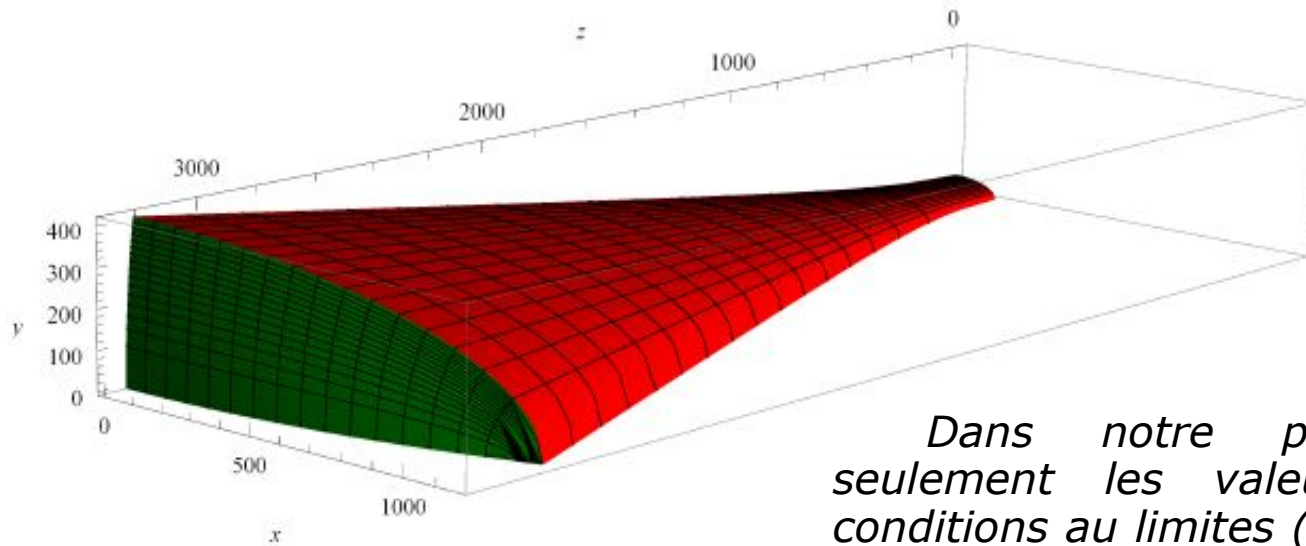
$$B_z = - \left(a_3 C_{13} + b_3 C_{21} E_1^3 + c_3 C_{22} E_1^3 + a_3 C_{24} E_1^1 + a_3 C_{25} E_1^2 \right)$$

Alors, le problème se résume à calculer un système linéaire surdéterminé, c'est-à-dire, plus d'équations que d'inconnues:

$$\begin{pmatrix}
 a_1 & 0 & 0 & b_1 \mathbb{E}_1^1(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & c_1 \mathbb{E}_1^1(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & a_1 \mathbb{E}_1^2(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & a_1 \mathbb{E}_1^3(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & 0 \\
 0 & a_2 & 0 & b_2 \mathbb{E}_1^2(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & c_2 \mathbb{E}_1^2(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & a_2 \mathbb{E}_1^1(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & 0 & a_2 \mathbb{E}_1^3(\rho_1, \mu_1, \nu_1) \\
 0 & 0 & a_3 & b_3 \mathbb{E}_1^3(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & c_3 \mathbb{E}_1^3(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & 0 & a_3 \mathbb{E}_1^1(\rho_1, \mu_1, \nu_1) & a_3 \mathbb{E}_1^2(\rho_1, \mu_1, \nu_1) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_1 & 0 & 0 & b_1 \mathbb{E}_1^1(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & c_1 \mathbb{E}_1^1(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & a_1 \mathbb{E}_1^2(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & a_1 \mathbb{E}_1^3(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & 0 \\
 0 & a_2 & 0 & b_2 \mathbb{E}_1^2(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & c_2 \mathbb{E}_1^2(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & a_2 \mathbb{E}_1^1(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & 0 & a_2 \mathbb{E}_1^3(\rho_n, \mu_n, \nu_n) \\
 0 & 0 & a_3 & b_3 \mathbb{E}_1^3(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & c_3 \mathbb{E}_1^3(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & 0 & a_3 \mathbb{E}_1^1(\rho_n, \mu_n, \nu_n) & a_3 \mathbb{E}_1^2(\rho_n, \mu_n, \nu_n)
 \end{pmatrix} \cdot$$

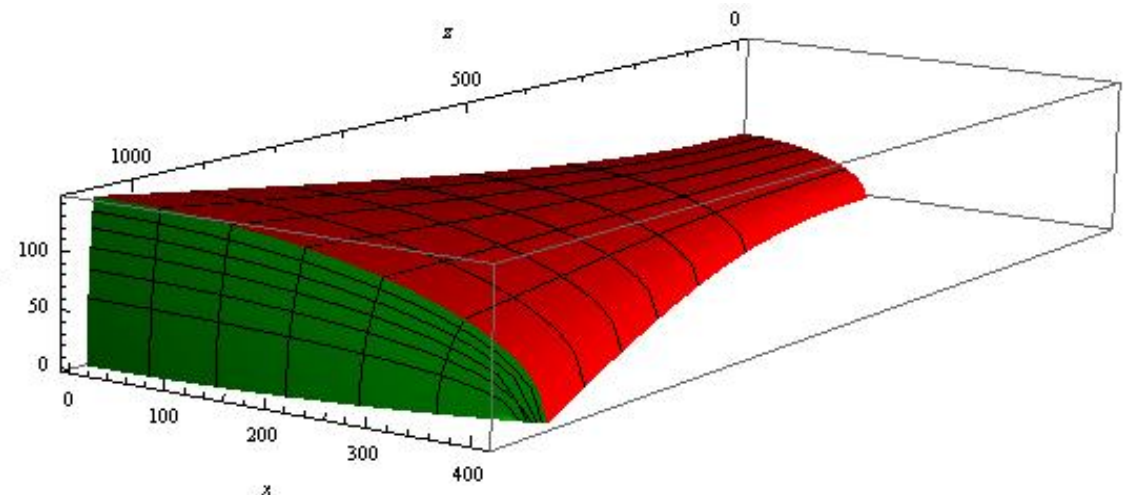
$$\begin{pmatrix}
 C_1^1 \\
 C_1^2 \\
 C_1^3 \\
 C_2^1 \\
 C_2^2 \\
 C_2^3 \\
 C_2^4 \\
 C_2^5
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 -B_{x_1} \\
 -B_{y_1} \\
 -B_{z_1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 -B_{x_n} \\
 -B_{y_n} \\
 -B_{z_n}
 \end{pmatrix}$$

Maintenant pour déterminer les coefficients, il nous faut mesurer le champ magnétique sur l'hyperboloïde que nous avons défini pour délimiter le volume dans lequel nous cherchons le développement du champ magnétique.



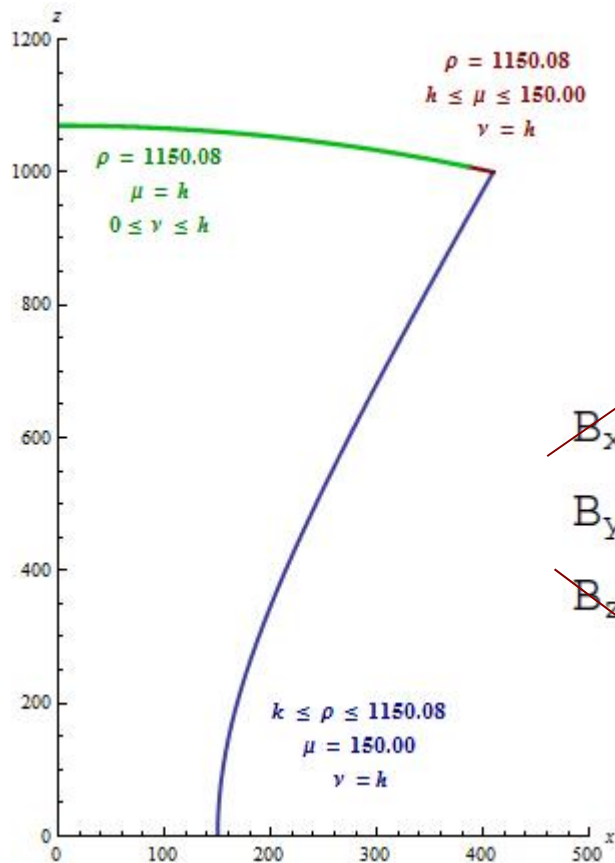
Dans notre problème nous spécifions seulement les valeurs des dérivées comme conditions au limites (Neumann), alors il nous faut une surface fermée. Pour cette raison nous avons utilisées un morceau d'ellipsoïde ($\rho = \text{const}$).

Premièrement nous allons calculer les coefficients C_m^p sur n points d'une région réduite de cette surface. Ces points sont $\rho_1, \mu_1, \nu_1, \dots, \rho_n, \mu_n, \nu_n$.



Afin de simplifier notre calcul, nous définissons les coordonnées ρ, μ, ν de façon à obtenir les courbes d'intersection de cette surface avec le plan horizontal (x0z)

Le plan x0z est un plan de symétrie de l'aimant. Donc, seulement la composante verticale du champ est non nulle



$$y^2 = \frac{(\rho^2 - h^2)(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}{h^2(k^2 - h^2)}$$

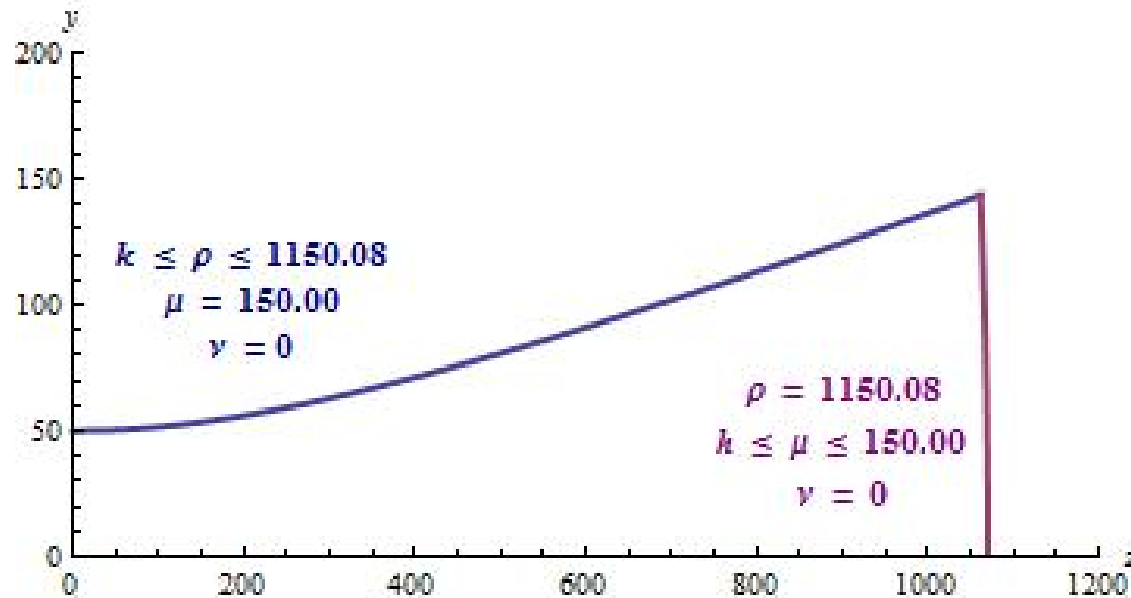
$$B_x = - (a_1 C_{11} + b_1 C_{21} E_1^1 + c_1 C_{22} E_1^1 + a_1 C_{24} E_1^3)$$

$$B_y = - (a_2 C_{12} + a_2 C_{23} E_1^1 + a_2 C_{25} E_1^3)$$

$$B_z = - (a_3 C_{13} + b_3 C_{21} E_1^3 + c_3 C_{22} E_1^3 + a_3 C_{24} E_1^1)$$

Nous définissons maintenant les coordonnées ρ, μ, ν de façon à obtenir les courbes d'intersection de cette surface avec le plan vertical (y0z)

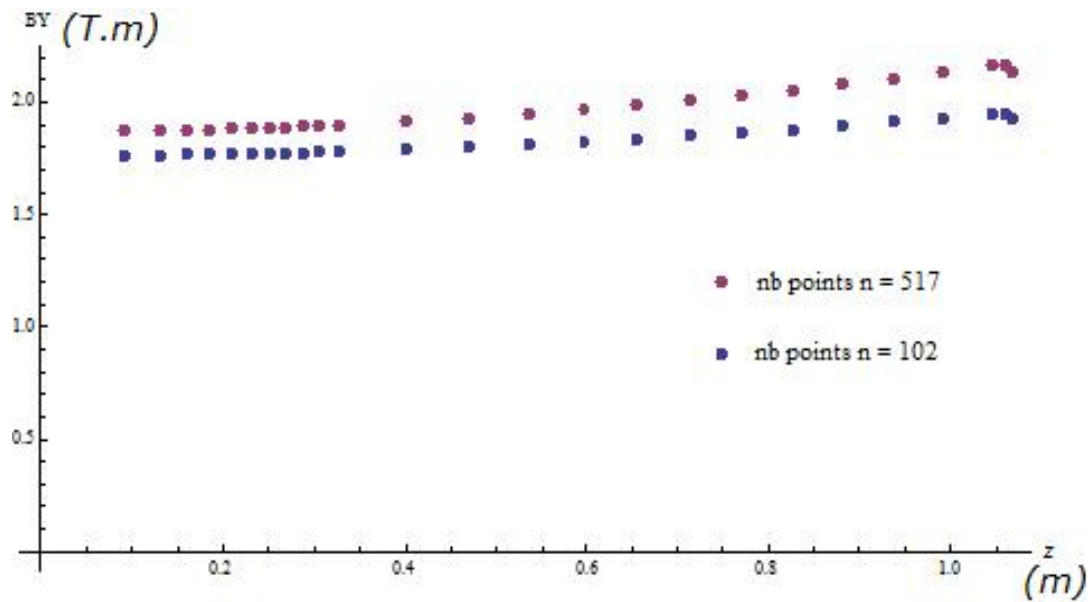
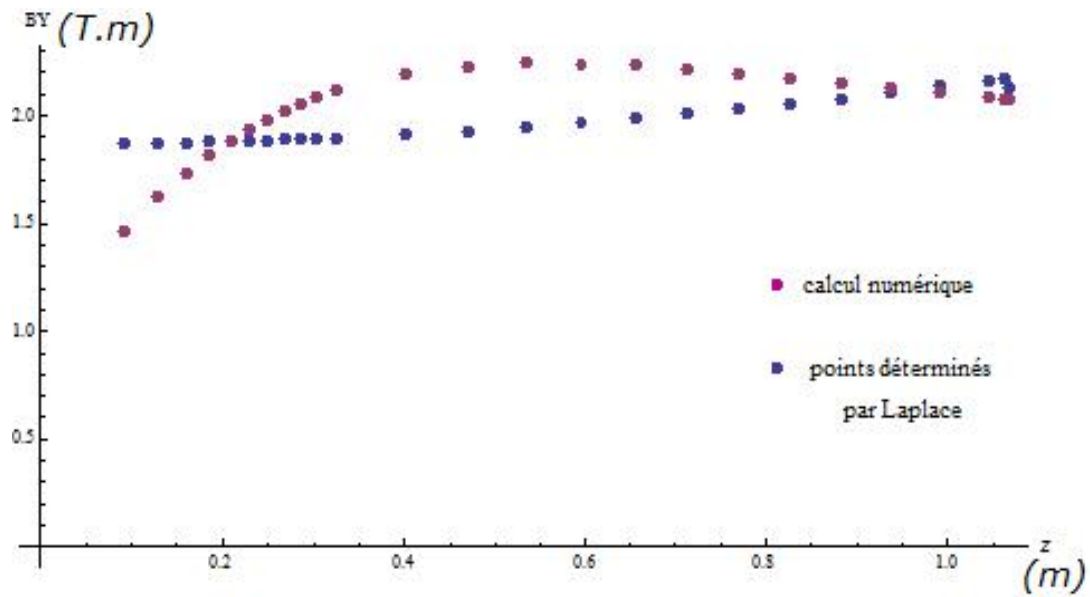
Le plan y0z est un plan d'antisymétrie de l'aimant. Donc, la seule composante nulle dans ce plan est celle du champ dans la direction x



$$x^2 = \frac{\rho^2 \mu^2 \nu^2}{h^2 k^2}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_x &= - \left(a_1 C_{11} + a_1 C_{23} E_1^2 + a_1 C_{24} E_1^3 \right) \\
 B_y &= - \left(a_2 C_{12} + b_2 C_{21} E_1^2 + c_2 C_{22} E_1^2 + a_2 C_{25} E_1^3 \right) \\
 B_z &= - \left(a_3 C_{13} + b_3 C_{21} E_1^3 + c_3 C_{22} E_1^3 + a_3 C_{25} E_1^2 \right)
 \end{aligned}$$

Premiers résultats pour le champ sur l'axes z



7. Conclusion (Perspective)

- Développement de la solution pour $m > 2$ (pour augmenter la precision);
- Tester les composantes B_x et B_z dans l'espace utile;
- Certaines implémentation dans la routine pour le calcul du champ;
- Possible mesure du champ magnétique dans deux plans pour déterminer la cartographie du champ dans tout l'espace intérieur (peut-être un troisième parallèle au plan xOy);
- Étudier l'effet des incertitude de mesure.