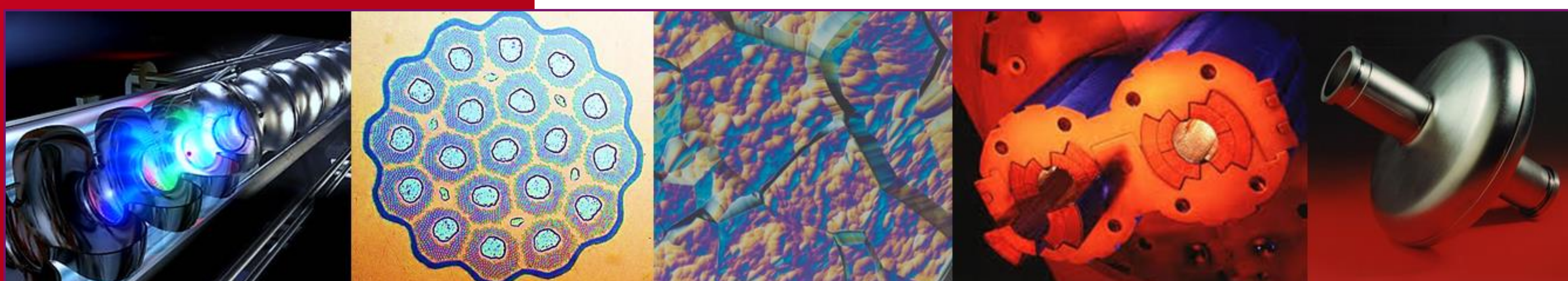
DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

SUPRACONDUCTIVITÉ DANS ACCÉLÉRATEURS PARTIE I : INTRODUCTION



Cours supraconductivité M2 GI | Claire ANTOINE

AIMANTS ET CAVITÉS RF

www.cea.fr

AVANT PROPOS

Objectifs de ce cours:

- **Peu de formules**
  - Ça peut se trouver dans des livres, e.g. :
    - A.C. Rose-Innes, "Introduction to superconductivity". Ed2. 2012: Elsevier
    - M. Héritier, « physique de la matière condensée » cours M2
    - CERN accelerator Schools (chercher « superconductivity »)…
- **Vous donner du sens physique**
  - Qu'est-ce qui est important, dans quel contexte
    - Ça varie beaucoup avec les applications
- **Vous donner du sens critique**
  - Beaucoup de théories/modèles en supra (c'est un truc compliqué!):
    - La littérature fourmille de calculs appliqués en dehors de leurs limites de validité,
- **Vous montrer qu'il faut faire des compromis**
  - Les propriétés supras ne sont jamais les seules à prendre en compte dans le design d'un projet
    - Antagonismes avec les propriétés mécaniques, thermiques….

NB Support de cours sur page web perso, rubrique enseignement

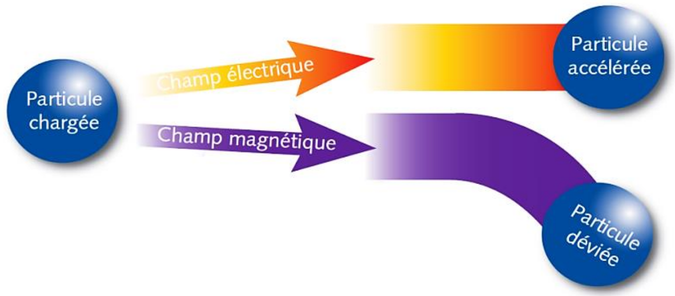
SOMMAIRE PARTIE I : INTRODUCTION/THEORIES

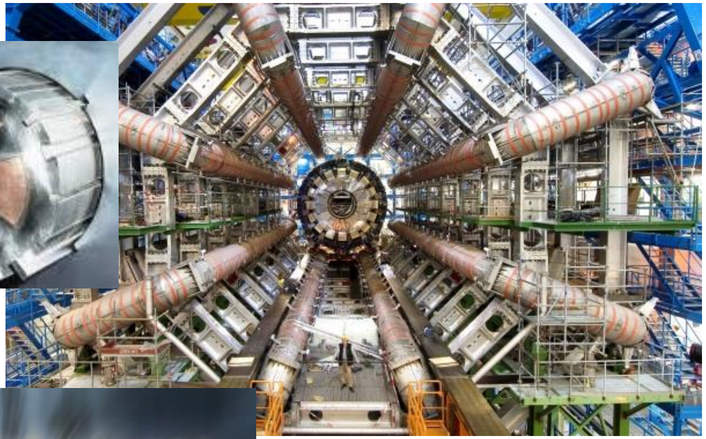
SOMMAIRE PARTIE II / ETAT MIXTE

SOMMAIRE PARTIE II / ETAT MIXTE … suite

INTRODUCTION

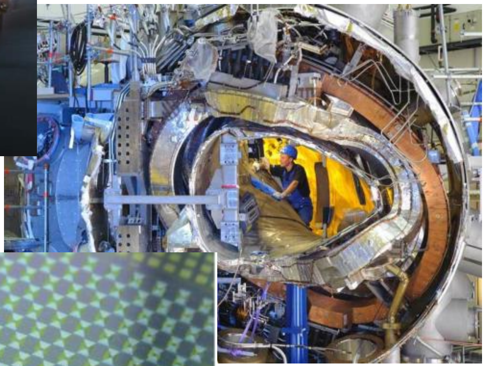
OÙ TROUVE-T'ON LA SUPRA ?



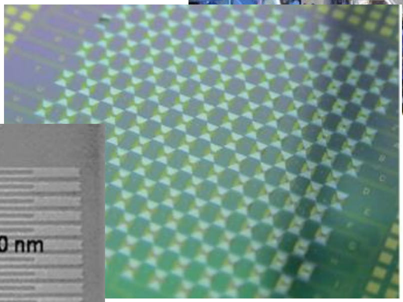


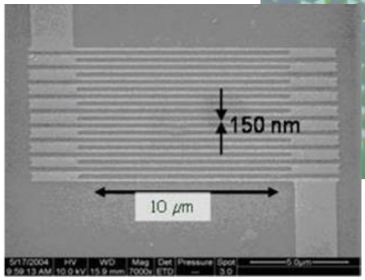
- **Aimants (pour courber la trajectoire des particules)**
  - Aimant de courbure, de focalisation
  - Détecteurs

- **Cavités RF (pour accélérer)**



- **Autres applications à connaitre**
  - Aimants pour l'imagerie médicale (origine du développement)
  - Aimants pour la fusion
  - Electrotechnique (très grands enjeux !!!)
  - Jonctions Josephson
    - Électronique supra (logique RSFQ)
    - SQUIDS
      - Détection de champ magnétique
      - Bolomètres
  - Nanodétecteurs (constrictions, fils…)





POURQUOI ?

Pour faire passer qqs 10 000 A :

Câble en cuivre

Câble NbTi (refroidi à l'hélium)

Aimants

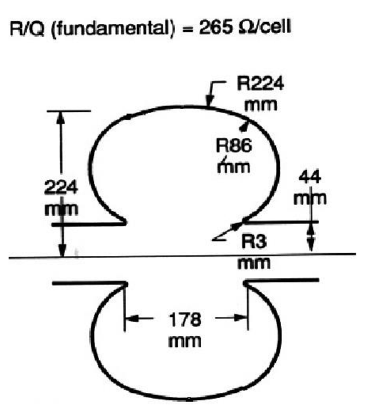
- **Exemples**
  - LHC @ CERN : aimant NbTi :
    - 27 km circonférence, consommation ~1 centrale thermique (seult consommation cryogénique).
    - Si aimants = Cu (+Fe) : 100 km de circonférence, consommation ~4 centrales,
  - Dans les détecteur : permet d'augmenter la « transparence »
    - Aimant pour courber trajectoires. Volume occupé /aimant => pas d'elt de détection

POURQUOI ?

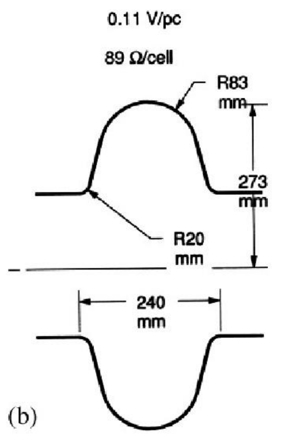
Cavités RF

- **C’est plus compliqué, dépend bcp du cycle utile**
  - Seule supra peut atteindre C.U. de 1 (puissance 100% du temps)
- **Exemple**
  - Linac à protons (sources de neutrons):
- **Autre avantage**
  - Ouverture + grande => plus faible impédance => alignement + facile et réduction du champ de sillage / meilleure émittance

	Cuivre	Niobium (SC)
Résistance de surface du matériau : R_S	7mΩ	10nΩ
Champ accélérateur envisageable : E_{acc}	1,6 MV/m	10 MV/m
Efficacité RF $h_{RF}=P_{beam}/(P_{beam}+P_{cav})$	15%	100%
Efficacité cryogénique ($h_{cryo}=h_{Carnot}$ x h_{thermo} avec $h_{Carnot}=T_{froid}/(T_{chaud}-T_{froid})$)	100%	0,2%
Efficacité globale $P_{fournie\ au\ faisceau}/P_{à\ la\ prise}$	**7.5%**	**49%**
Longueur réelle pour gagner 1 GeV	**833m**	**286m**



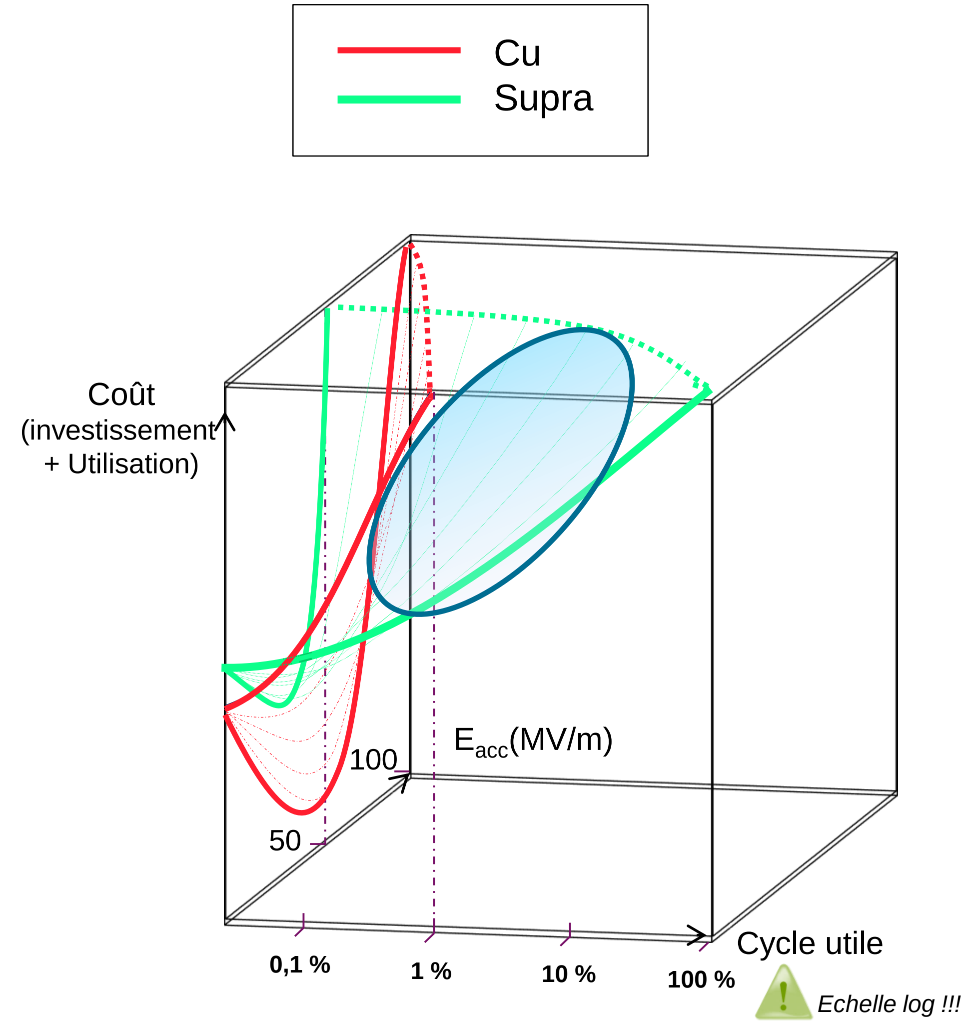
Copper cavity shape



(b)

Superconducting B-Factory Cell Shape

ELEMENTS DE COÛTS



(pour E, I donnés)

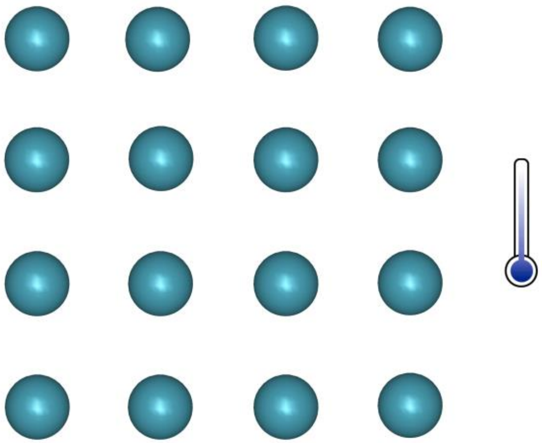
- **coûts ↑ avec C.U.**
- **∃ champ accel. Optimum**
  - Faible champ => accélérateur + long => coûts ↑
  - Fort champ => coûts RF ↑ pour cuivre et coûts cryogéniques ↑ pour supra
- **Autre exemple : CLIC vs ILC**

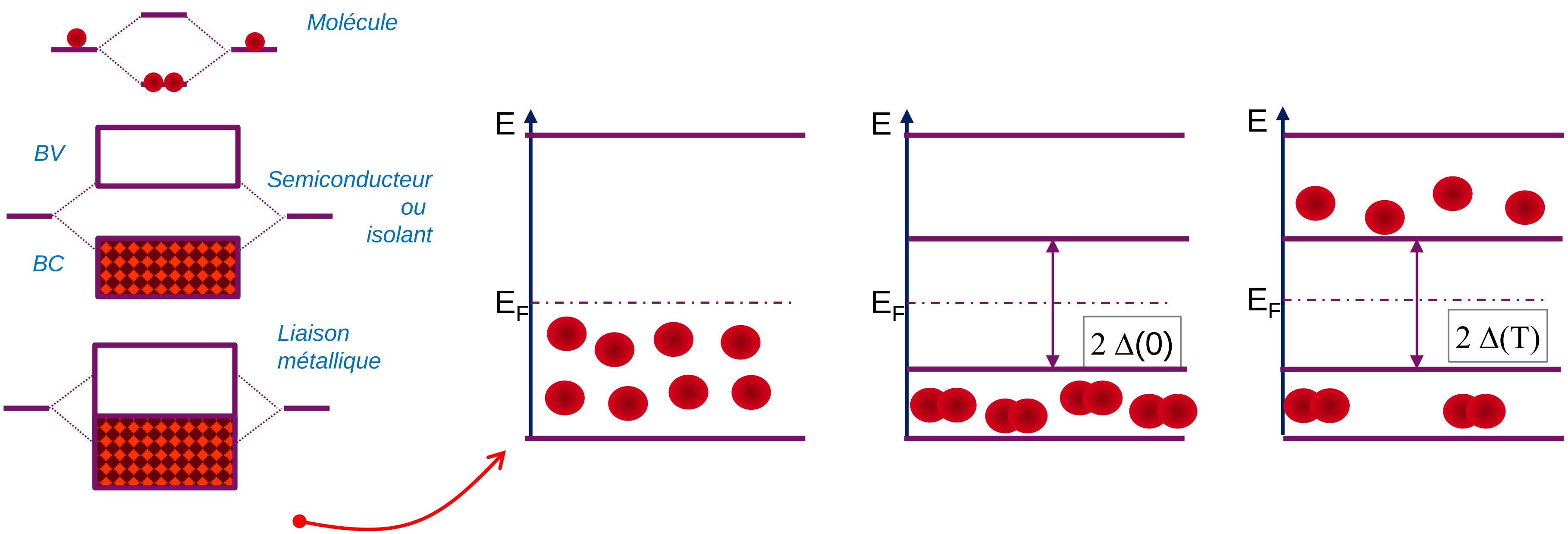
  (collisionneurs e+/e- usines à Higgs)
  - ILC : C.U. = 0,5 % @ 1,3 GHz
  - CLIC : C.U. = 0,001 % @ 12 GHz

BASES

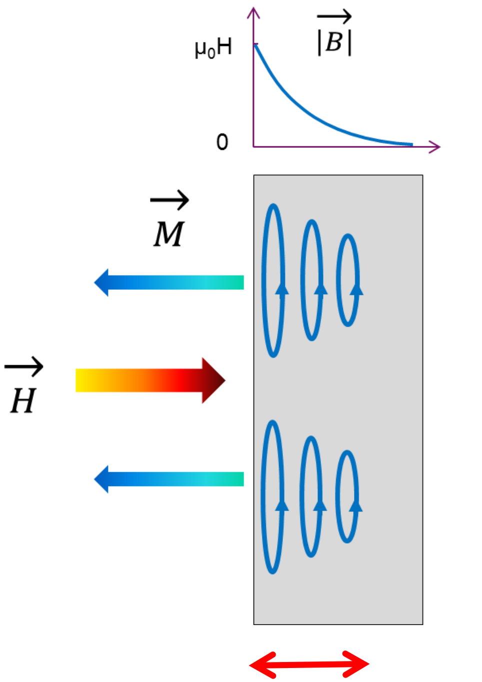
Principe simplifié :

- Couplage via les phonons
- e- seuls= fermions, paires de Cooper = bosons
- Condensation (type Bose-Einstein) + ouverture d'un gap
- 1! Fonction d'onde pour tous les e- appariés : état cohérent dimension macro
- R=0 (⚠ : pas toujours vrai !!!)





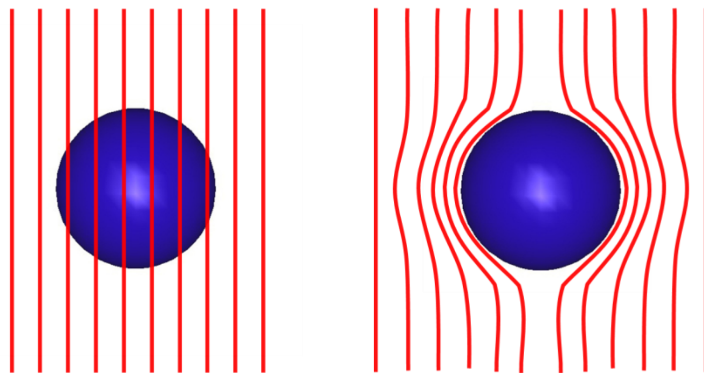
ETAT MEISSNER, SUPRAS TYPE I & II

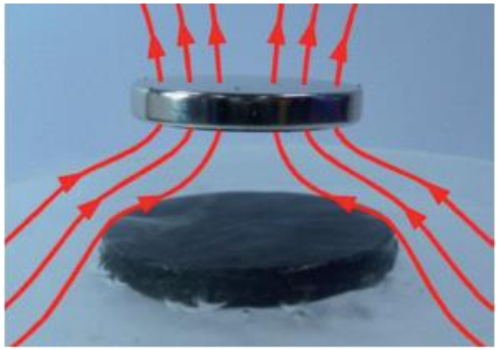


λ ~ 50 nm (Nb)

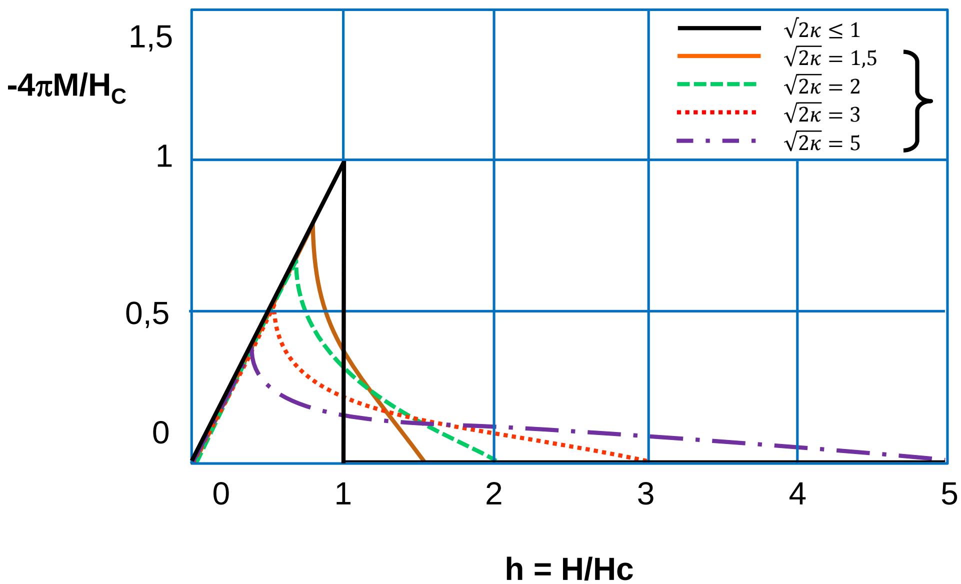
Supercourants >> GA/m²

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = 0$$





Lévitation magnétique



Type I

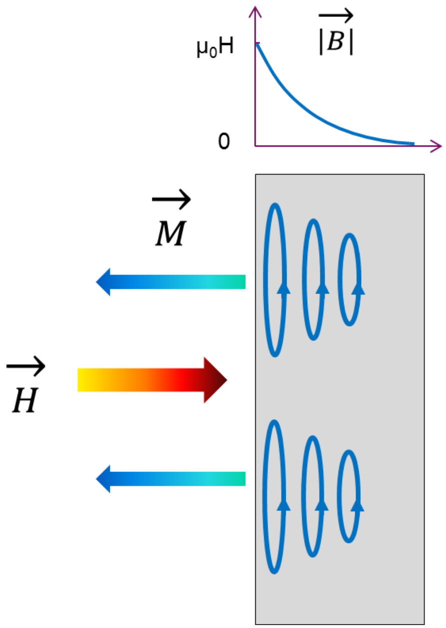
Type II

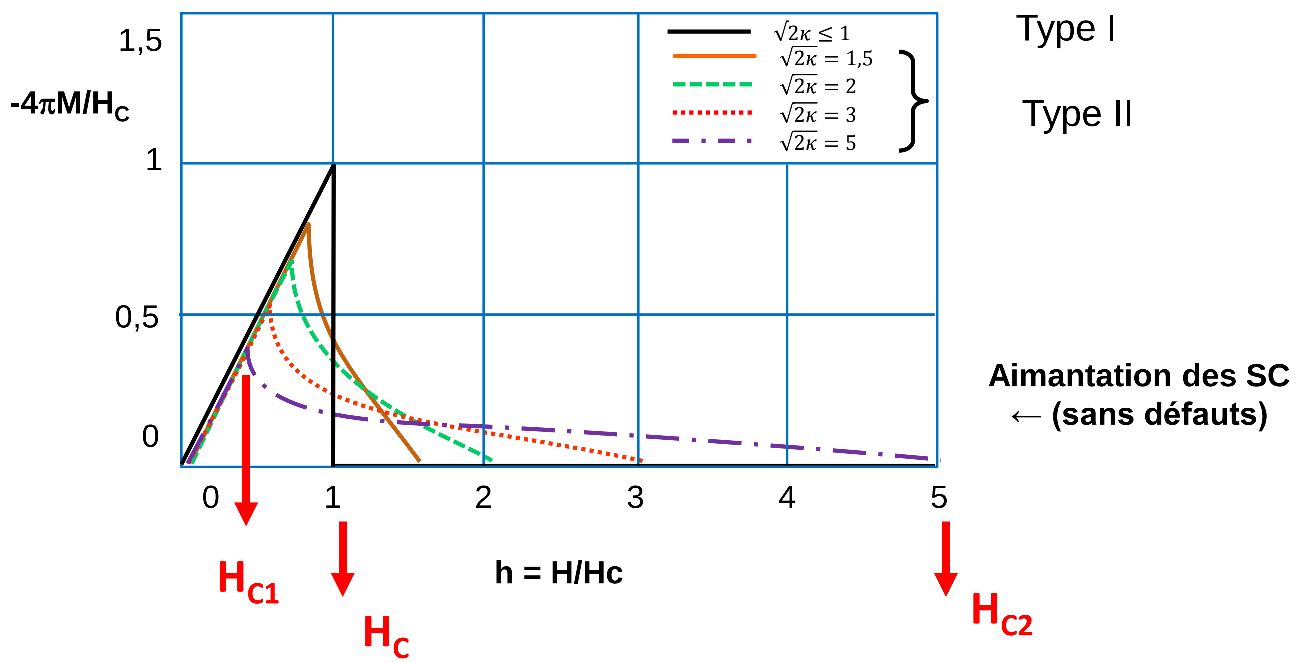
K : grandeur caractéristique d'un supra (voir + loin)

Aimatation des SC ← (sans défauts)

Paramètres importants:

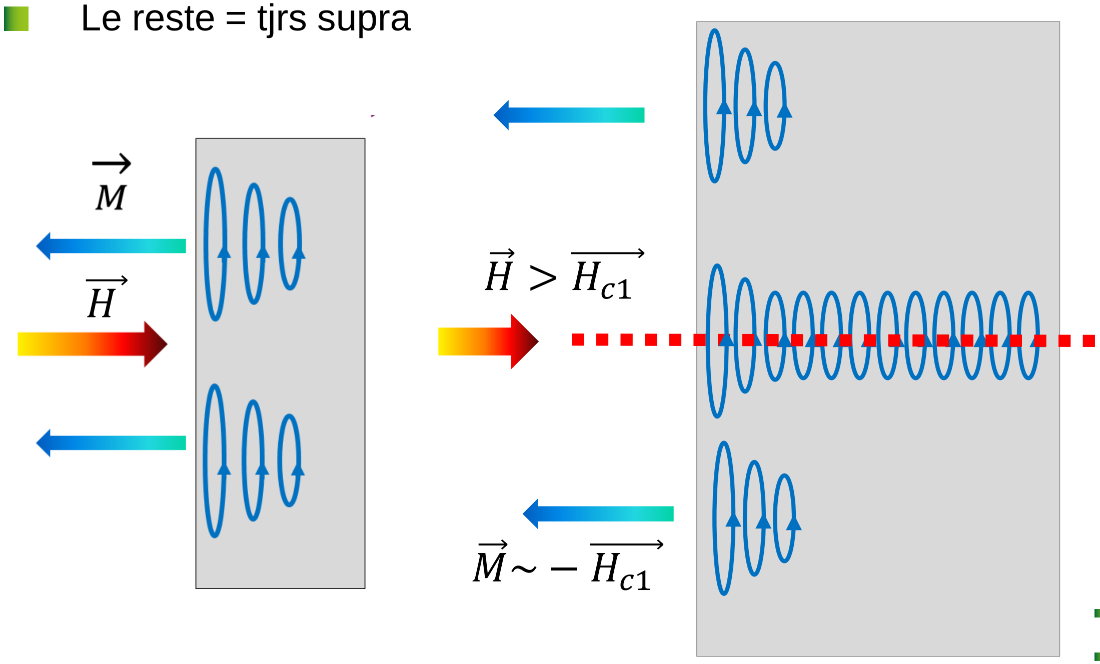
- H_C : champ critique thermodynamique (intrinsèque)
- H_{C1} : 1er champ critique (transition état Meissner => état mixte, dépend de l'état du matériau)
- H_{C2} : 2nd champ critique (transition état mixte => état normal , dépend de l'état du matériau)
- κ : λ/ξ, paramètre de Ginzburg-Landau (dépend de l'état du matériau, indépendant de T)
- λ : profondeur de pénétration du champ, ξ longueur de cohérence des paires de Cooper (voir suite)

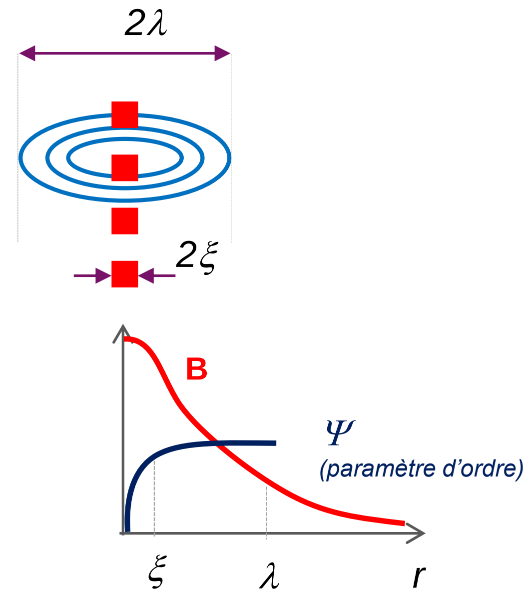




Etat mixte : au - dessus de H_{C1}

- Le champ n'est plus totalement écranté
- Des lignes de champ pénètrent dans le matériau => zone normale (également) entourée de courants d'écrantage (= vortex)
- Le reste = tjrs supra





- Chaque vortex porte 1! Quantum de flux Φ_0
- Suppression de $\Delta(r)$ pour $r < \xi$ car $J(r)$ atteint J_D
- Courants d'écrantages sur $r < \lambda$

NB : ne pas confondre état *intermédiaire* des supras type I (coexistence de zones normales et supra, sans vortex) avec l'état *mixte* des supras type II

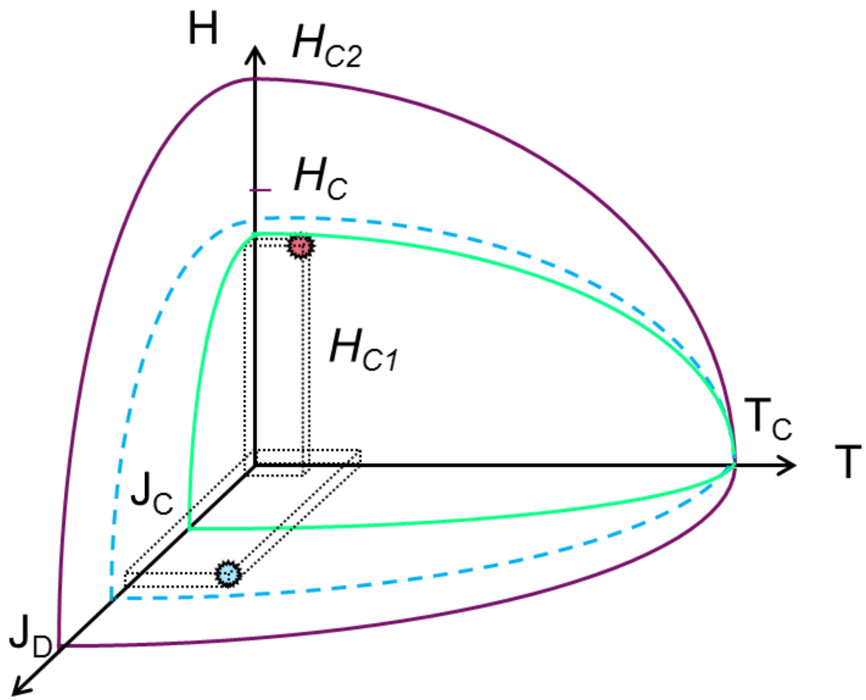
Φ_0 = h/(2e) = 2,06783376 × 10^{-15} Weber (T/m^2)

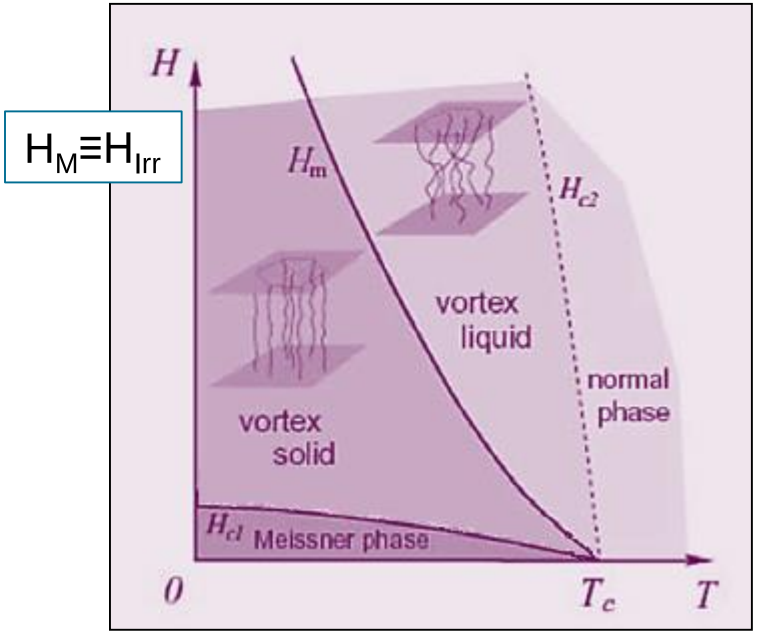
- **Supra type II : 3 Phases**
  - Etat Meissner (B=0)
  - Etat mixte (supra + vortex(B≠0))
  - Etat normal conducteur

NB : J_D courant de désappariement (intrinsèque)

≠ J_C courant critique (limite technique en DC)

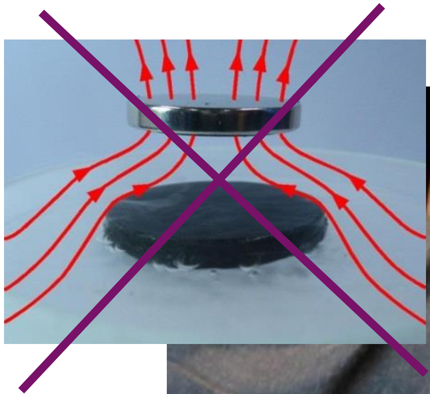
Jc n'a pas de sens en RF (voir partie II)



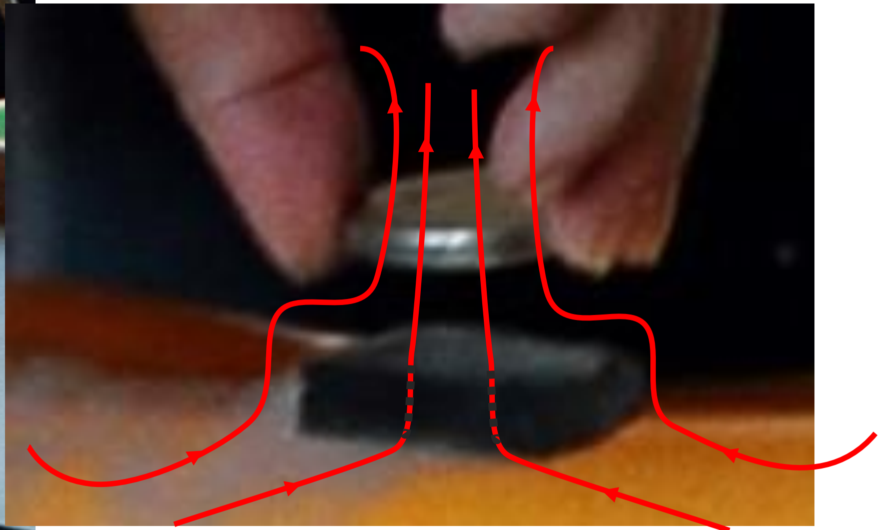


- **Vortex**
  - forment un réseau hexagonal centré
  - peuvent d'ancrer sur des défauts (voir + loin)
  - peuvent présenter ≠ états
  - $H>H_M$ => R≠ 0

ETAT MIXTE : LEVITATION + STABILITÉ



Seule application : …. impressionner les foules ☹



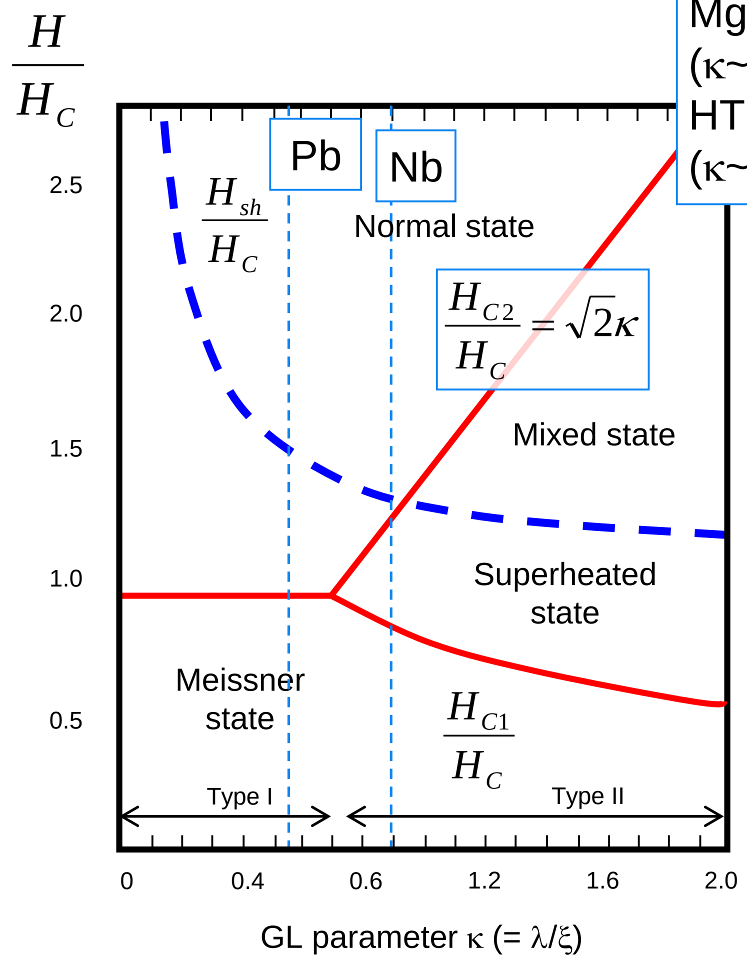
- **Mouvement ≡ ΔH**
  - supercourants génèrent - **ΔM**
  - s'oppose au changement de position
  - ramène le supra dans la position « figée » au moment du refroidissement

http://hebergement.u-psud.fr/supraconductivite/videossupra.html

UNE AUTRE FAÇON DE VOIR…

Applications…

- ∃ des milliers de supra
- Dans la pratique
  - <10 utilisés
  - Supras conventionnels type II : H_{C1} faibles et H_{C2} élevés => état mixte… **Sauf Nb !** (appli. RF)
  - E. Mixte décrit par modèles phénoménologiques (GL et GLAG)
  - ⚠ approximations valables seul[t] à T~Tc
  - « superheating field » = état métastable (voir § « RF »)

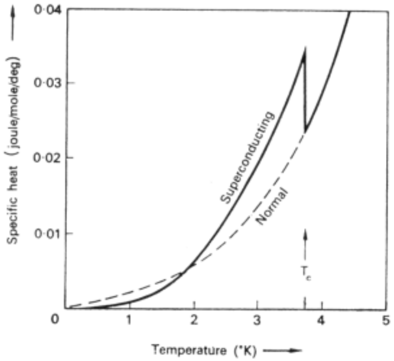


→ MgB_2, NbTi (κ~40-50)
HTc (κ~60-2000)

OTHER SUPERCONDUCTORS ?

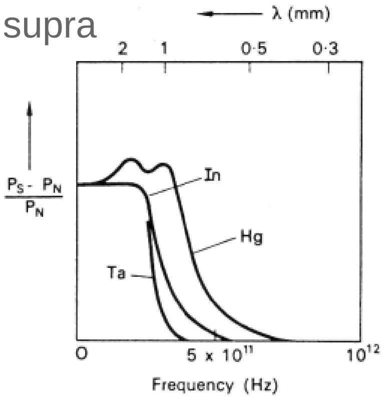
Material	T_C (K)	ρ_n (µWcm)	$\mu_0 H_{C1}$ (mT)*	$\mu_0 H_{C2}$ (mT)*	$\mu_0 H_C$ (mT)*	$\mu_0 H_{SH}$ (mT)*	λ_L (nm)*	ξ (nm)*	Type
Pb	7,1		n.a.	n.a.	80		48		I
Nb	**9,22**	**2**	**170**	**400**	**200**	**219**	**40**	**28**	**II**
NbN	17,1	70	20	15 000	230	214	200-350	<5	II
NbTiN	17,3	35	30				150-200	<5	II
Nb_3Sn	**18,3**	**20**	**50**	**30 000**	**540**	**425**	**80-100**	**<5**	**II**
V_3Si	17								II
Mo_3Re	15		30	3 500	430	170	140		II
MgB_2	**39**		**30**	**3 500**	**430**	**170**	**140**		**II- 2gaps**
YBCO	**93**		**10**	**100 000**	**1400**	**1050**	**150**		**d-wave**
Pnictures $Ba_{0.6}K_{0.4}Fe_2As_2$	**38**				**900**	**756**	**200**		

* @ 0K



Transition normal => SC

- Saut sur chaleur spécifique (si B=0) mais pas sur chaleur latente
  - => transition du 2nd ordre
  - contribution électronique change, pas celle du réseau cristallin
- Effet isotopique :
  - Tc ~ $1/\sqrt{m}$ (lien avec réseau cristallin, mais pas changement de structure aux RX)
- e- : Ordre à longue portée :
  - Transition abrupte @ Tc : bcp d'e- concernés
  - Effet de proximité (ds ξ à l'interface région normale/supra)
- Pas d'effets thermoélectriques dans les supras type I
  - Car paires de Cooper ne transportent pas d'entropie (mais vortex si !)
- Pas de changement ds l'absorp^n lumière visible (liée à ρ_n)
  - mais bande d'abs vers 10^{11} -10^{12} Hz (~ 10^{-3} -10^{-4} eV~qqs K~ T_C) => gap supra
- Conductivité thermique↓
  - Partie des e- qui assuraient la conductivité thermique maintenant sous forme de paires de Cooper
- Influence de l'état mécanique
  - Pression isostatique peut jouer sur Tc (e,g, SC organiques)
  - Déformation : joue sur l.p.m. ℓ (ℓ joue bcp sur les pptés supra : voir suite)



LES THÉORIES

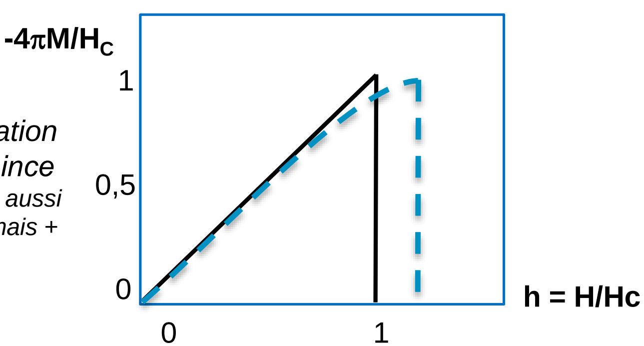
LES THÉORIES… (1)

Les + utilisées…

- London (1935)
  - Modèle 2 fluides, inspiré du comportement de l'He superfluide
  - Théorie classique, suppose n_S uniforme
  - Ne marche pas pour les films mince
  - Valable $\forall$ T, mais B faible; à B fort : comportement non linéaire
  - Permet d'expliquer l'effet Meissner
- Ginzburg Landau (1950)
  - Introduit les aspects quantiques : 1! fonction d'onde, paramètre d'ordre
  - Introduit les comportements non-linéaires
  - Développements valables seul^{mt} à T~< T_C
  - A. N. pas vraiment meilleures que London, mais meilleures prédictions pour films minces
  - GLAC (Ginzburg-Landau-Abrikosov- Gor'kov) : développements de G.L. adaptés aux κ >> 1,2

Les deux modèles restent « bas courant »

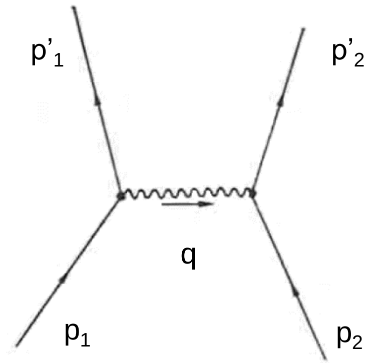
Magnétisation d'1 film mince
(effet existe aussi pour bulk, mais + faible)



La + complète…

- BCS (Bardeen-Schrieffer-Cooper) : (1957)
  - Théorie quantique, locale
  - Généralement pas utilisée pour prédictions « ingénierie » : trop complexe,
  - Paires = électrons de moments p et spins opposés (au temps T)

    (Aspect quantique : on ne peut pas parler d'e- individuels, système corrélé)
  - 1 ! Fonction d'onde pour tous les e- supra, bcp d'échanges entre paires, couplage faible
  - Permet d'expliquer tous les phénomènes observés autour de la supra



$$q = h\nu_q / s$$

Fréq, phonon

Vit, du son

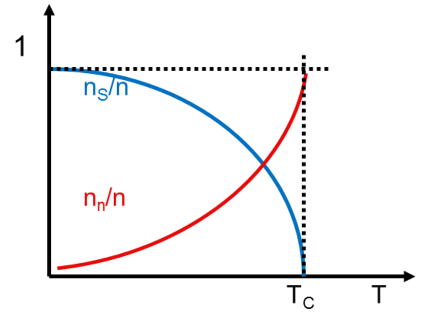
D'autres raffinements

- Eliashberg
  - Valide ∀ T
  - Couplages fort (s'applique à Nb, bien que type II ?)
- Eilenberg
  - Théorie semi-classique , toujours pas valable à bas T
  - type II limite propre : tient compte des certaines inhomogénéités
- RF :
  - Réponse aux ondes EM (R≠0) : Mattis-Bardeen (B faible)
  - Fort courants ($J \sim J_D$) : "non linear R_{BCS}" (clean type II)
  - ….

SC:

- Pas de théorie complète ☹
- Bcp de développements particuliers
- Attentions aux limites de validité
- ∃ Contradictions ds littérature
- Théo. parfois très loin du monde réel

Modèle à 2 fluides



- La conductivité est assurée par deux composantes différentes
  - $\vec{j} = \overrightarrow{j_n} + \overrightarrow{j_s}$
  - Composante normale n_n/n
  - Composante superfluide $n_s/n = 1 - n_n/n$
- E accélère seul[t] la composante SC, la composante N est court-circuitée
  - $J_s = n_s\, e\, v_s$
  - $m\dot{\overrightarrow{v_s}} = -e\vec{E}$ *éq. Dynamique des e- (accélération par $\vec{E}$)*
- 1ère Equation de London (eq. de Maxwell + 2 fluides) *Analogue de la Loi d'Ohm pour les supras*

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{J_S}}{dt} = \frac{e^2 n_S}{m}\vec{E} = \lambda_L^2 \vec{E}}$$

ou

$$\overrightarrow{J_S} = \frac{\vec{A}}{\mu_0 \lambda_L^2} \quad \Rightarrow \quad J(x) = \frac{H(0)}{\lambda_L} e^{\left(-x/\lambda_L\right)}$$

- 2ème Equation de London (rot 1ère eq. + Maxwell) *Diamagnétisme parfait quand x>>λ_L*

$$\nabla \times \frac{d\overrightarrow{J_S}}{dt} = \nabla \times \lambda_L^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \overrightarrow{J_S}$$

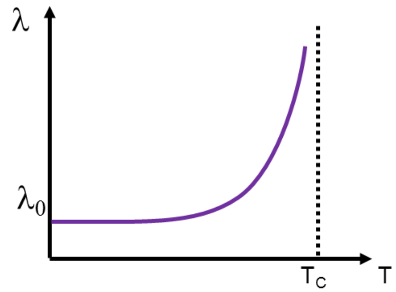
$$\Rightarrow$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} = \frac{\vec{H}}{\lambda_L^2}} \quad \Rightarrow \quad H(x) = H(0) e^{\left(-x/\lambda_L\right)}$$

LONDON (II)

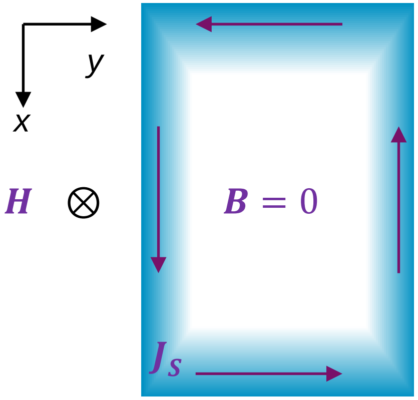
$$\lambda_L = \left(\frac{m}{e^2 n_s(T)\mu_0}\right)$$



Remarque : $\lambda_L \leq$ erreur d'un facteur ~ 2 par rapport aux valeurs λ mesurées exp)

London permet d'expliquer l'état Meissner

- Le champ pénètre sur λ_L
- Les supercourants écrantent complétement H_0
- B = 0 au cœur du supra
- NB. La densité de courant maximum ne peut pas excéder J_D (le courant de désappariement)



$$\boxed{J_D(T) = \frac{H_C(T)}{\lambda_L(T)} \sim J_0\left(1 - \frac{T^2}{{T_C}^2}\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = B(0)e^{(-x/\lambda_L)}$$

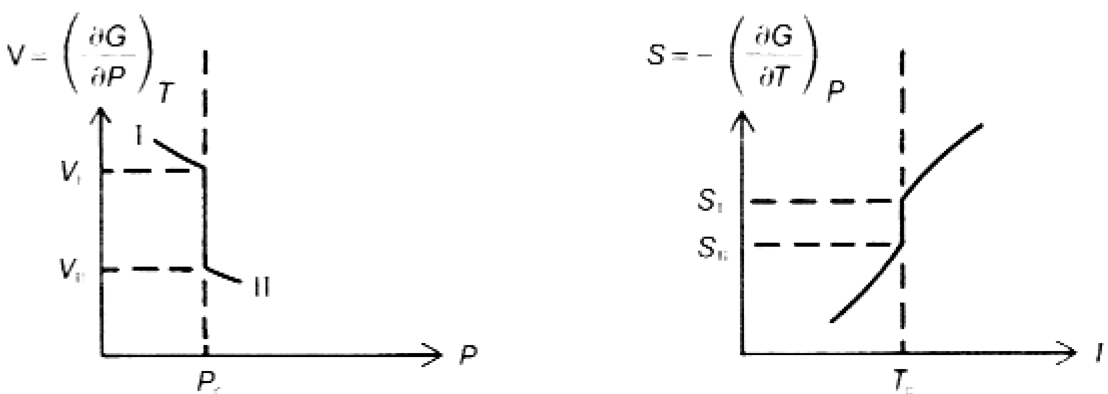
Remarques :

- *H_C : champ critique thermodynamique*
- *Peut être défini comme le champ suffisant pour briser les paires de Cooper*

MODÈLE DE GINZBURG-LANDAU (I)

Rappels sur les transitions du 1er/2nd ordre

- Supras
  - transition du 2nd ordre si B = 0
  - transition du 1er ordre si B ≠ 0

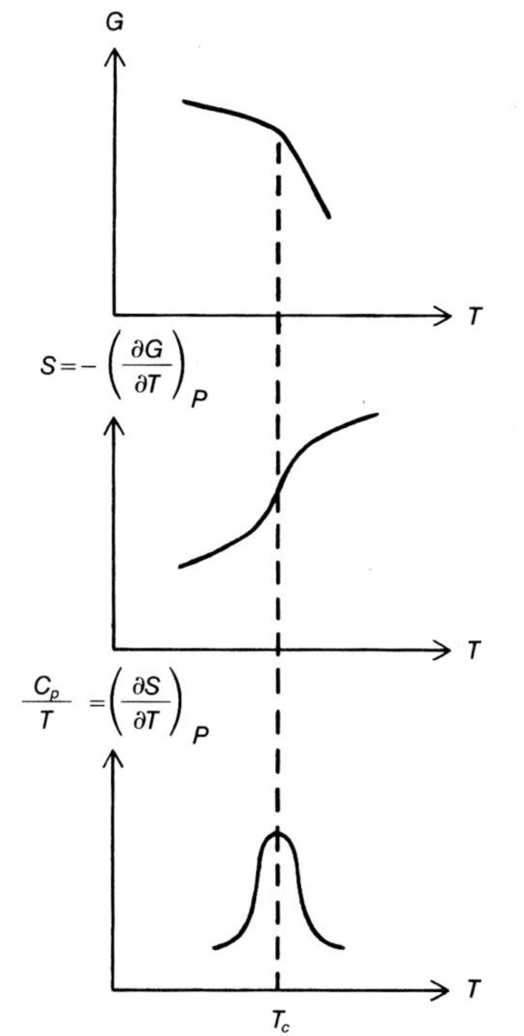


Comportement de l'enthalpie libre (Gibbs) et de ses dérivées lors d'une transition de phase du 1er ordre.

Transitions du premier ordre : énergie libre discontinue, systèmes hétérogènes, toutes les parties ne transitent pas en même temps, e.g. ébullition : mélange liquide – gaz

Transitions du second ordre : dérivée énergie libre discontinue, systèmes homogène, toutes les parties transitent en même temps, e.g. transition ferromagnétique, transition nématique

Les phases avant et après transition ont souvent des symétries différentes.



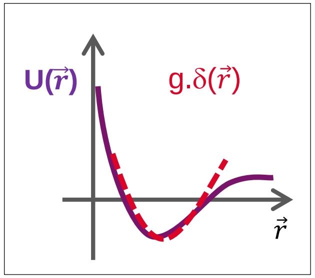
Comportement de enthalpie libre (Gibbs) pour une transition du 2nd ordre.

MODÈLE DE GINZBURG LANDAU (II)

Théorie de Jauge / approche de Landau / champ moyen

(Approche universelle pour les phénomènes critiques, e.g. transitions de phase)

- Trouver un paramètre d'ordre ψ macroscopique
  - Décrit les degrés de liberté du point critique
  - Guidé par des considérations de symétrie du système (théorie de Jauge)
    - Théorie de Jauge : théorie de champ basée sur 1 gpe de symétrie locale (gpe de Jauge) qui définit une « invariance de Jauge ». S'applique bien aux transitions de phase : généralement 1 coté est symétrique et il y a brisure de symétrie après la transition
- Construire énergie libre F[ψ] effective (approxim^n champ moyen)
  - On suppose fluctuations spatiales et thermo de ψ petites devant taille système
  - On peut remplacer U($\vec{r}$) par gxδ($\vec{r}$) + perturbation (faible d° dans les développements en ψ)
  - On fixe g = potentiel effectif qui a les mêmes propriétés locales dans la gamme d'nrj considérée
    - Soit par intuition
    - Soit par minimisation de l'nrj libre => on trouve la configuration fondamentale ψ_0
  - Permet de reconstruire le diagramme de phase
  - F[ψ] doit respecter les symétries microscopiques du système *(« Invariant de Jauge »)*
  - Équivalent à un Hamiltonien effectif dit de « Ginzburg-Landau »



EQUATIONS DE GINZBURG LANDAU

ψ = 0 si T > T$_C$, ψ ↑↑si T → 0, et ψ ~ 0 à T$_C$=>D.L.

$$\mathcal{F}_s(T,\Psi,\vec{A}) = \mathcal{F}_n(T) + a(T-T_c)|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \underbrace{\frac{1}{2m^*}|(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e^*\vec{A})\Psi|^2}_{} + \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0} - \vec{H}_0\cdot\vec{B}}_{}$$

- Remarques
  - Fluctuations spatiales de n_s prises en compte dans le terme $i\hbar\vec{\nabla}$
  - Termes impairs non nuls s.si transition 1er ordre (champ H)
  - F_0 doit être « invariante de Jauge » (invariante par/ aux opérations de symétrie de la phase désordonnée)
  - A champ nul, J=0 et ψ est réel **=> on en déduit ξ**
  - Conditions aux limites : annuler les termes de surface (**J**=**0**, **B**-**H** =**0**)

$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi(\mathbf{r}) \exp -i\frac{e^*}{\hbar c} f(\mathbf{r})$$

$$\boxed{\Psi = |\Psi| e^{i\theta} \text{ avec } |\Psi| = \sqrt{n_s}}$$

Minimisation.

Calculs longs et compliqués

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{2m}[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}]^2\Psi = 0 \\ &\vec{J} = \frac{i\hbar q}{2m}[\Psi\vec{\nabla}\Psi^* - \Psi^*\vec{\nabla}\Psi] - \frac{q^2\vec{A}}{m}|\Psi|^2 \end{aligned}}$$

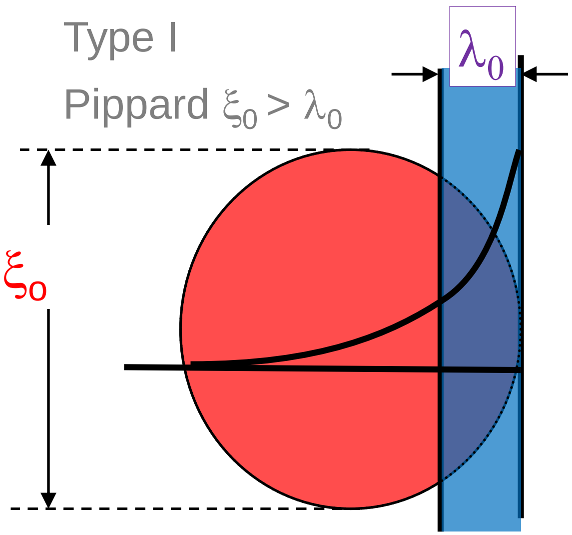
Equations de Ginzburg Landau

Oups ! Des Eq. diff. non linéaires et couplées… => Traitements numériques

- Rend compte de l'effet Meissner pour supras I et II (supercourants), quantification du flux, effets quantiques macroscopiques…), donne un calcul pour estimer λ et ξ

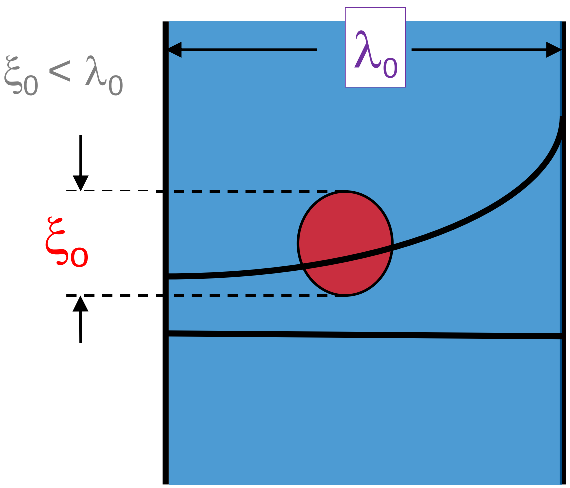
Type I

Pippard $\xi_0 > \lambda_0$



Type II

London $\xi_0 < \lambda_0$



- $\xi = \xi_0$ si $\ell \to \infty$ sinon $\boxed{\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\ell}}$
- si $\ell \searrow$ alors
  - $\xi \searrow$
  - $\lambda \nearrow$
  - $\kappa \nearrow\nearrow$
- et

$$\boxed{\lambda = \lambda_L \cdot \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_L \cdot \left(1 + \frac{\xi_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

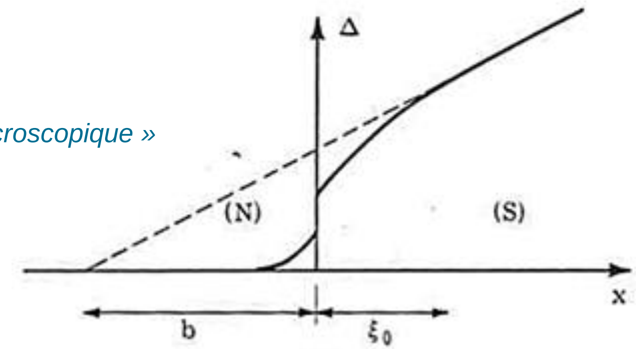
ℓ libre parcours moyen

En jouant sur ℓ (état cristallin, impuretés) on peut modifier les propriétés du supra

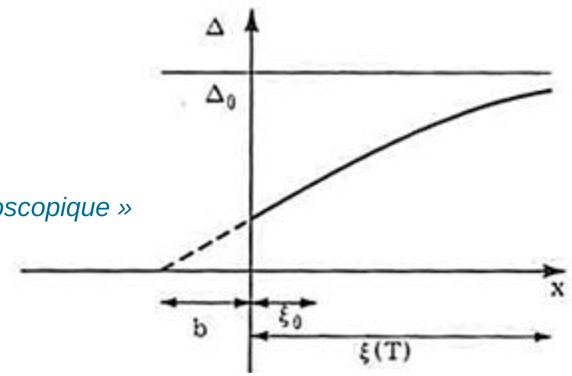
Supras « sales » : on peut généraliser G.L. ∀ T

(i. e. : à l'échelle GL ~ ξ, λ >> ξ_0, on peut considérer que ψ, Δ varient linéairement)

ξ_0 :
« Microscopique »



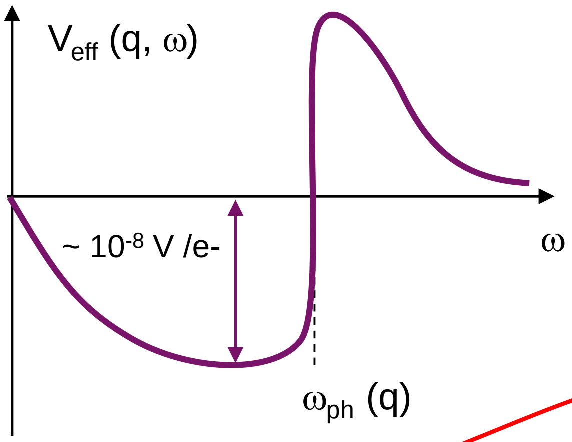
ξ, λ :
« Macroscopique »



- Cas très inhomogènes (e.g. H~H_{C2}, ou impuretés magnétiques…)
  - H~H_{C2} (quand H ↘) : phase supra vient d'apparaitre, Ψ est petit
    - Le terme non lin. en $|\psi|^4$ peut être négligé, il ne reste plus que des termes en $|\psi|^2$
  - L'effet d'écrantage peut également être négligé (on est >> H_{C1}) donc $\vec{A} \sim \overrightarrow{A_{appl}}$
    - les deux éq de GL deviennent découplées
    - La minimisation de l'nrj libre devient : $\xi^2(T)(\nabla + ik_A)^2\psi(\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$
    - ~ éq. De Schrödinger (part masse 2m, ch. 2e) : sol^ns de la MQ marchent.

Modèle principal valable pour les aimants (mais pas SRF)

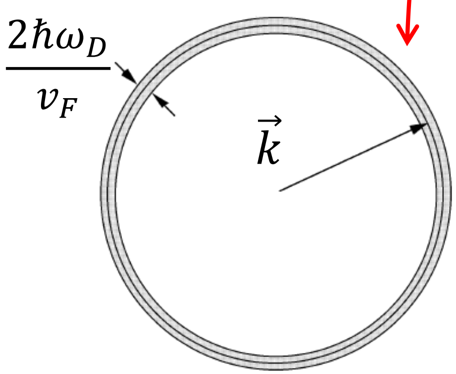
- Pour traiter les autres cas : de proches en proches, solutions de continuités, méthodes variationnelles, etc…
  - Par ex : SC « sale » : invariance translationnelle est perdue mais…
    - On fait une approximation de + (moyenne sur toutes les impuretés)
    - On traite les potentiels dus aux impuretés comme des « perturbations faibles » => GLAC



Interaction effective

(écrantages e- et noyaux, vibrations du réseau, etc…)

- Seuls les électrons près du niveau de Fermi voient une interaction positive => états liés
  - Simplification :
    - e^- dont l'énergie est $\varepsilon_F \pm 2\hbar\omega_D$ sont soumis à –V/2, sinon 0



- Fonction d'onde variationnelle *($H = H_0 + V$)*

$$|\psi\rangle = \prod_k (u_k + v_k c^\dagger_{k,\uparrow} . c^\dagger_{-k,\downarrow})|0\rangle$$

  - Etat supraconducteur : condensation des paires de Cooper (~bosons)
  - Blocage de la phase
  - Le nombre de particules n'est pas fixé (principe d'incertitude)
  - Existence d'un gap $\Delta \sim \langle c^\dagger_{k,\uparrow} . c^\dagger_{-k,\downarrow} \rangle$

Pour la suite, on reviendra au formalisme G.L.

Le ψ (param. d'ordre)de GL…
Même symétrie, mais pas tout à fait même valeur que Δ_{BCS}

COMPORTEMENT RÉSISTIF EN AC/RF

Inertie des paires de Cooper : écrantage du champ imparfait dans λ

- Bande de conduction : e^- normaux accélérés et dissipent *e- normaux : e.g. paires thermiquement cassées à T>0 K*
- Rappel : métal normal dans AC

$$\boxed{Z_n = \frac{1-i}{\sigma_n \delta} = (1-i)\frac{\rho_n}{\delta}}$$

$\sigma_n = 1/\rho_n$ = conductivité DC @ T

δ = profondeur de peau (skin depth)

- Extension aux supras :
  - Modèle à 2 fluides (London) : σ_1-iσ_2 à la place de σ_n
  - BCS => on peut évaluer σ_1/σ_n et σ_2/σ_n (intégrales de Mattis et Bardeen)
  - Elle peuvent être calculées numériquement

$$\boxed{\frac{R_s}{R_n} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_n}}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_n}\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

pour $T < T_c / 2$

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_n} \sim \left[\frac{\frac{2\Delta}{K_B T}}{\left(1+e^{-\Delta/K_B T}\right)^2}\right] e^{-\Delta/K_B T} \ln\frac{\Delta}{\hbar\omega}}$$

et

$$\boxed{\frac{\sigma_2}{\sigma_n} \sim \frac{\pi\Delta}{\omega} \tanh\frac{\Delta}{2K_B T}}$$

- Résistance de surface d'un supra en RF

$$\boxed{R_{BCS} = A(\lambda_L^4, \xi_F, \ell, \sqrt{\rho_n})\frac{\omega^2}{T} e^{-\Delta/kT}}$$

Valable seulement à bas champ, au delà, corrections nécessaires

FIN DE LA PARTIE I

A SUIVRE :

PARTIE II : L’ÉTAT MIXTE